UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Esta monografia foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática, outorgado pela Universidade Federal do Ceará, e encontra-se a disposição na biblioteca da referida Universidade.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita de conformidade com as normas da ética científica.

Carlos Alberto Gomes de Almeida

Hipersuperfícies de curvaturas médias e escalar constantes.

Monografia aprovada em, 22 de agosto de 1997.

Banca Examinadora

Aldir Chaves Brasil Junior
Aldir Chaves Brasil Junior

Abdênago Alves de Barros

Sebastião Carneiro de Almeida
Sebastião Carneiro de Almeida
Orientador e Presidente

Dedico este trabalho à minha querida mãe Lucemar aos meus irmãos Germana e Luciano e à memória de meu querido pai Antônio Carlos

Agradecimentos

Agradeço a meu orientador, Sebastião C. de Almeida, a meu co-orientador e excelente amigo Aldir Brasil Jr. Registro também o interesse e a atenção do professor Abdênago A. Barros. Ao CNPQ pela concessão de uma valiosa bolsa, que muito me ajudou em várias fases da preparação.

Muito me beneficiei em conviver com os meus amigos da pós-graduação , Barnabé, Rosângela, Jurandir, Jorge Herbert, Ezequias, Paulo, Miguel, Vicente, Feliciano, Pedro, Isaac, Nathália e a todos os outros minha mais profunda gratidão. Registro também, com prazer, a competência e a paciência dos funcionários Deka e Tavares.

Estou imensamente grato aos professores, Aldo B. Maciel, Marcelo Martins e Carlos Alberto ([UFPB]) pela confiança e apoio, aos meus amigos da gradução: Maité, Hellena, Elias, Stênio, João, Rosivaldo entre outros.Agradeço ainda aos meus amigos de João Pessoa e a toda minha família, em especial às tias Geiza e Maria da Penha.

Exprimo também minha profunda gratidão à minha madrinha, Zuila.Tive a grande e boa sorte do conselho e apoio da minha querida noiva,Valdneide.

" A ciência sem a religião é imperfeita, a religião sem a ciência é cega"

Albert Einstein

ÍNDICE

Hipersuperfícies de curvaturas média e escalar constantes

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho faremos um estudo detalhado sobre as hipersuperfícies compactas de curvaturas média e escalar constantes imersas na esfera unitária $S^{n+1}(1)$.

Seja M^n uma hipersuperfície compacta imersa na esfera unitária $S^{n+1}(1)$. Escolhamos um campo normal η, e denotamos por S_η a aplicação linear associada a segunda forma fundamental B, i.e.,

$$\langle S_\eta(X), Y\rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y, \eta\rangle = B(X, Y),$$

onde X e Y são vetores tangentes a M e $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana obtida através da métrica usual $<,>$ de $S^{n+1}(1)$. Associada a segunda forma fundamental B existem n funções $H_1, ..., H_n$ definida por

$$H_r = \sum_{i_1 < ... < i_r} k_{i_1} \dots k_{i_r},$$

onde $k_1, \dots, k_n$ são as curvaturas principais de M. A função $H_1 = H$ é a curvatura média e a menos de uma constante H_2 é a curvatura escalar de M. O quadrado da norma da segunda forma fundamental será denotada por S. Com a notação introduzida acima tem-se que $S = \sum_{i=1}^n k_i^2$.

Quando a imersão é mínima , temos o seguinte teorema :

Teorema 1.1. *([CdCK],[L1]) Seja M^n compacta e $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}(1)$ uma imer*
são mínima. Suponha que $S \leq n$, para todo $p \in M$. Então:
(i) $S \equiv 0$ ou $S \equiv n$;
(ii) $S \equiv n$ se, e somente se, M^n é um toro de Clifford em $S^{n+1}(1)$, i.e. , M^n é um dos produtos de esferas $S^k\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \times S^{n-k}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)$, $k = 0, ..., \left[\frac{n}{2}\right]$.

O resultado (i) é devido à Simons [S] . A caracterização dada em (ii) foi obtida independentemente por Lawson [L1] e Chern-do Carmo-Kobayashi [CdCK] resultado em (ii) é local .

Houve uma tentativa de se estender o Teorema1.1 acima à hipersuperfícies com curvatura média constante H (veja , Okumura [O]). Um dos propósitos deste trabalho é apresentar uma extensão do resultado acima. Para isto, introduziremos um tensor simétrico de tipo $(1,1)$, Φ bem como um polinômio quadrático P_H, cujo quadrado de sua raiz positiva será denotado por B_H. Este tensor Φ é definido em termos da curvatura média H e da segunda forma fundamental B de M. Explicitamente o tensor Φ correspondente via $<,>$ ao tensor $\Phi = H\langle,\rangle - B$ que é um tensor simétrico de tipo $(0,2)$.

No capítulo 4 , demonstraremos o seguinte teorema :

Teorema 1.2. *([AC]) Suponha que $|\Phi|^2 \leq B_H$, para todo $p \in M$. Então :*
(i) $|\Phi|^2 \equiv 0$ (e M é totalmente umbílica) ou $|\Phi|^2 \equiv B_H$;
(ii) $|\Phi|^2 \equiv B_H$ se , e somente se ,
(a) $H = 0$ e M^n é um toro de Cilfford em $S^{n+1}(1)$;
(b) $H \neq 0$, $n \geq 3$, e M^n é um $H(r)-$toro com $r^2 < \frac{n-1}{n}$;
(c) $H \neq 0$, $n = 2$, e M^n é um $H(r)-$toro com $r^2 \neq \frac{n-1}{n}$.

A constante B_H depende somente de n e da curvatura média H. Quando M é mínima $B_H = n$. Apesar do novo resultado , o ítem (ii) do teorema acima ainda preserva seu caratér local . Ainda relacionado ao teorema , é importante observar que não se listam todos os $H(r) - toros$, mas aqueles para os quais $r^2 < \frac{n-1}{n}$. De fato, pode-se verificar que, se orientarmos aqueles $H(r) - toro$ para os quais $r^2 > \frac{n-1}{n}$ de modo que $H \geq 0$, então teremos $|\Phi|^2 > B_H$. Isto tem haver com o fato de que o têrmo que contém H na equação $P_H(x) = 0$ se anula quando $n = 2$. Deste modo, a equação que define B_H, é invariante por orientação se, e somente se, $n = 2$. O resultado que se obtem em (ii)(c), já é conhecido em um trabalho de K. Nomizu e B. Smyth, [NS].

No caso mínimo, o Teorema 1.1 foi estendido para codimensão superior (veja, [CdCK]). Em sua tese de doutorado do IMPA, W. Santos fez uma extensão do Teorema 1.2 para codimensão superior.

No capítulo 5, iremos tratar de formas espaciais $Q^{n+1}(c)$, e demonstrar algumas estimativas. Como é bastante conhecido, existem vários resultados de rigidez para hipersuperfícies mínimas ou hipersuperfícies com curvatura média constante H em $Q^{n+1}(c)$, (veja [S],[NS],[L1]). Aqui, uma prática e poderosa ferramenta é o cálculo do laplaciano de algum invariante geométrico global sobre M. Esta técnica foi iniciada por J. Simons [S]. Em 1977, S. Y. Cheng & S. T. Yau, introduziram um operador diferencial auto-adjunto $\square$ que possibilitou a prova de resultados de rigidez para hipersuperficies de curvatura escalar constante. Explicitamente:

Teorema 1.3. *([CY]) Seja M uma hipersuperfície compacta n-dimensional com curvatura escalar normalizada R em $Q^{n+1}(c)$. Se,*

(i) $R - c \geq 0$;

(ii) a curvatura seccional K de M é não-negativa, i.e. , $K \geq 0$,

então M é uma hipersuperfície totalmente umbílica, ou um produto Riemanniano de duas subvariedades totalmente umbílicas.

Neste mesmo capítulo, provaremos dois teoremas usando o operador auto-adjunto $\square$ de Cheng e Yau. Os teoremas são:

Teorema 1.4. *([Li]) Seja M uma hipersuperfície compacta com curvatura escalar normalizada constante R na esfera unitária (n+1)-dimensional $S^{n+1}(1)$. Se,*

(i) $\overline{R} \equiv R - 1 \geq 0$,

(ii) $\overline{R} \leq H^2 \leq C_{\overline{R}}$, onde $C_{\overline{R}} = \frac{(n-1)\overline{R}}{n} + \frac{n(n-1)\overline{R}^2 + 4(n-1)\overline{R} + n}{n(n-2)(n\overline{R}+2)}$

e $n \geq 3$, então, M é totalmente umbílica, com

$$H^2 \equiv \overline{R}, \tag{1.1}$$

ou $M = S^1(\sqrt{1-r^2}) \times S^{n-1}(r)$, $r = \sqrt{(n-2)/n(R+1)}$ *e*

$$H^2 \equiv C_{\overline{R}} \tag{1.2}$$

Teorema 1.5. *([Li]) Seja M uma hipersuperfície compacta n-dimensional ($n \geq 3$) com curvatura escalar normalizada R no espaço Euclidiano (n+1)-dimensional R^{n+1}. Se o quadrado da norma (S) da segunda forma fundamental de M, satisfaz*

$$nR \leq S \leq \frac{n(n-1)}{n-2}R, \tag{1.3}$$

então $S \equiv nR$ e M é uma esfera Euclidiana n-dimensional $S^n(r)$, $r = \sqrt{1/R}$.

Quando M é uma hipersuperfície compacta mergulhada em R^{n+1} o Teorema (1.5) vale sem a condição (1.3) (veja [R]). Quando M é uma hipersuperfície compacta mergulhada em $S_+^{n+1}(1) \subset S^{n+1}(1)$, o Teorema (1.4) vale sem a condição (ii) (veja [MR]). Neste caso, M é uma hipersuperfície totalmente umbílica.

2. Preliminares

Neste capítulo introduziremos os pré-requisitos básicos, que servirão de sustentação aos principais resultados.

2.1. Definições:

Seja N uma variedade Riemanniana. Diz-se que N é um forma espacial , quando possui curvatura seccional constante.

Seja $Q^{n+1}(c)$ um forma espacial com curvatura seccional c. Quando $c = 1$, $Q^{n+1}(c) = S^{n+1}$ é a esfera unitaria (n+1)-dimensional ; quando $c = 0$, $Q^{n+1}(c) = E^{n+1}$ é o espaço Euclidiano (n+1)-dimensional.

Consideremos uma imersão $\varphi : M^n \hookrightarrow Q^{n+1}(c)$, onde M é uma hipersuperfície compacta n-dimensional. Seja $p \in M$, escolhamos um referencial ada ptado $\{e_1, ..., e_{n+1}\}$ em uma vizinhança de $\varphi(p)$, de modo que $e_1, ..., e_n \in T_pM$. Associado a este referencial, definimos o coreferencial $\omega_1, ..., \omega_{n+1}$, i.e., $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$ e as formas de conexão ω_{AB} por:

$$d\varphi = \textstyle\sum_A \omega_A e_A \quad ; \quad de_A = \sum_B \omega_{AB} e_B \quad .$$

Façamos agora, as seguintes distinções de índices:

$$1 \leq A, B, C \leq n+1 \quad ; \quad 1 \leq i, j, k \leq n.$$

As formas ω_A e ω_{AB} satisfazem as equações de estruturas,

$$\begin{cases} d\omega_A = \sum_B \omega_{AB} \wedge \omega_B, & \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0 \\ d\omega_{AB} = \sum_C \omega_{AC} \wedge \omega_B - c\omega_A \wedge \omega_B. & \end{cases}$$

As restrições das formas ω_A, ω_{AB} a M satisfazem ainda as equações acima, i.e.,

$$d\omega_i = \textstyle\sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j \quad , \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji} \tag{2.1}$$

$$d\omega_{ij} = \textstyle\sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - \frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l, \tag{2.2}$$

onde, R_{ijkl} é o tensor curvatura da métrica induzida sobre M por φ. Restrito a M, $\omega_{n+1} = 0$, deste modo,

$$d\omega_{n+1} = \sum_i \omega_{n+1,i} \wedge \omega_i = 0 \quad . \tag{2.3}$$

Pelo lema de Cartan, segue-se:

$$\omega_{n+1,i} = \sum_j h_{ij}\omega_j, \; h_{ij} = h_{ji} \tag{2.4}$$

A forma quadrática, $B = \sum_i \omega_i \otimes \omega_{i,n+1} = \sum_{ij} h_{ij}\omega_i \otimes \omega_j$, é chamada a segunda forma fundamental de φ na direção de e_{n+1}.Segundo a equação de Gauus temos:

$$\overline{R}_{ijkl} = R_{ijkl} - \langle B(e_j, e_l), B(e_i, e_k)\rangle + \langle B(e_i, e_l), B(e_j, e_k)\rangle.$$

Como, $\overline{R}_{ijkl} = c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$ obtemos:

$$R_{ijkl} = c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + h_{jl}h_{ik} - h_{il}h_{jk}. \tag{2.5}$$

Substituindo em (2.5) $k = i$ e $l = j$, teremos:

$$R_{ijij} = c(\delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ji}) + h_{ii}h_{jj} - h_{ij}h_{ji} = c + h_{ii}h_{jj} - h_{ij}^2.$$

Somando em i e j, esta última expressão segue-se que:

$$\begin{array}{rcll} \sum_{i,j} R_{ijij} &=& n(n-1)c + \sum_{i,j} h_{ii}h_{jj} - \sum_{i,j} h_{ij}^2 & \Rightarrow \\ n(n-1)(R-c) &=& \sum_i h_{ii}^2 - \sum_{i,j} h_{ij}^2 & \Rightarrow \\ n(n-1)(R-c) &=& n^2H^2 - S, & \end{array} \tag{2.6}$$

onde R é a curvatura escalar de M, $H = \frac{1}{n}\sum_i h_{ii}$ a curvatura média e $S = \sum_{i,j} h_{ij}^2$ é o quadrado da norma da segunda forma fundamental de M.

A equação de Codazzi é expressa por:

$$h_{ijk} = h_{ikj}, \tag{2.7}$$

onde h_{ijk} representa a derivada covariante da segunda forma fundamental e é definida como,

$$\sum_k h_{ijk}\omega_k = dh_{ij} + \sum_k h_{kj}\omega_{ki} + \sum_k h_{ik}\omega_{kj}. \tag{2.8}$$

Derivando-se exteriormente (2.8) e definindo h_{ijkl} por,

$$h_{ijkl} = dh_{ijk} + \sum_m h_{mjl}\omega_{mi} + \sum_m h_{imk}\omega_{mj} + \sum_m h_{ijm}\omega_{mk}, \tag{2.9}$$

obtem-se:

$$\sum_{k,l}(h_{ijkl} - \tfrac{1}{2}\sum_m h_{im}R_{mjkl} - \tfrac{1}{2}\sum_m h_{mj}R_{mikl})\omega_k \wedge \omega_l = 0, \tag{2.10}$$

donde

$$h_{ijkl} - h_{ijlk} = \sum_m h_{mj}R_{mikl} + \sum_m h_{im}R_{mjkl}. \tag{2.11}$$

2.2. O Operador diferencial $\square$

Para uma função f de classe C^2, sobre uma variedade Riemaniana M, definimos seu gradiente e seu hessiano através das seguintes fórmulas:

$$df = \sum_i f_i\omega_i \quad , \quad \sum_j f_{ij}\omega_j = df_i + \sum_j f_j\omega_{ji}. \tag{2.12}$$

Seja $\phi = \sum_{i,j}\phi_{ij}\omega_i \otimes \omega_j$ um tensor simétrico definido sobre M, onde

$$\phi_{ij} = nH\delta_{ij} - h_{ij}. \tag{2.13}$$

Então, podemos definir um operador $\square$ associado a ϕ, agindo sobre uma função de classe C^2, dado por:

$$\square f = \sum_{i,j}\phi_{ij}f_{ij} = \sum_{i,j}(nH\delta_{ij} - h_{ij})f_{ij} \tag{2.14}$$

Proposição 2.1. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta orientável. Então, o operador $\square$ é auto-adjunto se, e somente se,*

$$\sum_j \phi_{ijj} = 0 \quad , \quad \forall i. \tag{2.15}$$

Demonstração : Note que a derivada covariante de ϕ_{ij} é definida como,

$$\sum_k \phi_{ijk}\omega_k = d\phi_{ij} + \sum_k \phi_{ik}\omega_{ki} + \sum_k \phi_{ik}\omega_{kj}, \tag{2.16}$$

de tal forma que a condição (2.15) independa da escolha do referencial.

De (2.14) verificamos que para f e g funções de classe C^2, teremos:

$$\int_M(\square f)g = \int_M d(\sum_{i,j}\phi_{ij}f_i g * \omega_j) - \int_M \phi_{ij}f_i g_j. \tag{2.17}$$

Portanto, pelo teorema de Stokes,

$$\int_M (\Box f) g = \int_M f(\Box g). \tag{2.18}$$

Logo operador $\Box$ é auto-adjunto relativamente ao produto interno de L^2de M.

Reciprocamente, vê-se facilmente que a validade de (2.18) para toda f e g implica (2.15).

Baseado na proposição anterior daremos dois exemplos de operadores auto-adjunto do tipo acima.

Exemplo 1. *Seja $R_{ij} = \sum_k R_{ikjk}$ o tensor de Ricci de uma variedade Riemanniana. Então, afirmamos que o operador $\Box f = \sum_{i,j}(\frac{R}{2}\delta_{ij} - R_{ij})f_{ij}$ é auto-adjunto, onde $R = \sum_i R_{ii}$ é a curvatura escalar.*

De fato, segundo a identidade de Bianchi,

$$\begin{aligned} \sum_j R_{ij,j} &= \sum_{k,j} R_{ikjk,j} \\ &= \sum_{k,j} R_{jkik,j} \\ &= -\sum_{k,j} R_{jkkj,i} - \sum_{k,j} R_{jkji,k} \\ &= R_i - \sum_{k,j} R_{jijk,k} \\ &= R_i - \sum_k R_{ik,k} \end{aligned} \tag{2.19}$$

Portanto, $\sum_j R_{ij,j} = \frac{1}{2}R_i$ e nossa afirmação está provada.

Exemplo 2. *Seja $\phi_{ij} = (\sum_k \psi_{kk})\delta_{ij} - \psi_{ij}$, onde ψ_{ij} é um tensor simétrico satisfazendo a equação de Codazzi:*

$$\psi_{ij,k} = \psi_{ik,j}.$$

Usando diretamente a equação acima, é fácil verificar que o operador $\Box f = \sum_{i,j} \phi_{ij} f_{ij}$ é auto-adjunto.

Consideremos novamente o ponto $p \in M$, o referencial adaptado $\{e_1, ..., e_{n+1}\}$ e seu correspondente coreferencial $\{\omega_1, ..., \omega_{n+1}\}$, de modo que, a aplicação linear auto-adjunta associada a segunda forma fundamental seja diagonlizável, sendo assim, $h_{ij} = k_i\delta_{ij}$. Usando (2.6) e (2.14) nós temos,

$$\begin{aligned} \Box(nH) &= nH\Delta(nH) - \sum_i k_i(nH)_{ii} \\ &= \tfrac{1}{2}\Delta(nH)^2 - \sum_i (nH)_i^2 - \sum_i k_i(nH) \\ &= \tfrac{1}{2}n(n-1)\Delta R + \tfrac{1}{2}\Delta S - n^2 |\nabla H|^2 - \sum_i k_i(nH)_{ii} \end{aligned} \tag{2.20}$$

Agora, como o tensor B satisfaz (2.7), tem-se:

$$\Delta h_{ij} = (\sum_k \phi_{kk})_{ij} - \sum_{m,k} \phi_{mk} R_{mikj} - \sum_{m,j} \phi_{im} R_{mkkj}. \tag{2.21}$$

Assim, para $S = \sum_i k_i^2$ e $nH = \sum_i k_i$, a equação acima nos dá:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\Delta S &= \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + \sum_{i,j} k_i (nH)_{ij} - \\ &- \sum_{i,j,m,k} h_{ij} h_{mk} R_{mikj} - \sum_{i,j,m,k} h_{ij} h_{im} R_{mkkj} \end{aligned} \tag{2.22}$$

Daí, como $h_{ij} = k_i \delta_{ij}$, a expressão acima simplifica-se para:

$$\tfrac{1}{2}\Delta S = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + \sum_i k_i (nH)_{ii} + \tfrac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(k_i - k_j)^2 \tag{2.23}$$

Substituindo, (2.23) em (2.20), teremos:

$$\Box(nH) = \tfrac{1}{2}n(n-1)\Delta R + |\nabla B|^2 - n\,|\nabla H|^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(k_i - k_j)^2 \tag{2.24}$$

Ao considerarmos M com curvatura média H constante, definiremos o tensor $\Phi : T_pM \longrightarrow T_pM$, relativo a H e a segunda forma fundamental, da seguinte forma:

$$\Phi = H\langle\ ,\ \rangle - B \quad ,$$

onde B é o operador auto-adjunto associado a segunda forma fundamental.

Considere, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM a qual diagonaliza B, então: $\Phi(e_i) = (H - k_i)e_i$. Donde obtemos,

$$tr\,(\Phi) = \sum_i (H - k_i) = 0 \text{ e } |\Phi|^2 = \frac{1}{2n}\sum_{i,j}(k_i - k_j)^2,\ i,j = 1,\ldots,n.$$

De fato, tome: $\mu_i = H - k_i$, observe que:

$$k_i - k_j = H - \mu_i - H + \mu_j = \mu_j - \mu_i,$$

logo,

$$\sum_{i,j}(k_i - k_j)^2 = \sum_{i,j}(\mu_i^2 + \mu_j^2 - 2\mu_i\mu_j) = 2n\sum_i \mu_i^2 - 2(\sum_i \mu_i)(\sum_j \mu_j),$$

a expressão acima implica em,

$$\sum_{i,j}(k_i - k_j)^2 = 2n\sum_i \mu_i^2 = 2n\,|\Phi|^2\,.$$

Logo $|\Phi|^2 \equiv 0$ se, e somente se, M é totalmente umbílica.

Consideremos agora algumas notações e definições finais. Um $H(r) - toro$ em $S^{n+1}(1)$ é obtido considerando as imersões canônicas de,

$$S^{n-1}(r) \subset R^n\ ,\ S^1\left(\sqrt{1-r^2}\right) \subset R^2,\ 0 \leq r \leq 1,$$

onde o valor entre parenteses denota o raio da correspondente esfera, e tomando a imersão produto:

$$S^{n-1}(r) \times S^1\left(\sqrt{1-r^2}\right) \longrightarrow R^n \times R^2.$$

Da forma como foi construido, temos que o $H(r) - toro$ esta contido em $S^{n+1}(1)$ e possui curvaturas principais dadas, em alguma orientação, por:

$$k_1 = \ldots = k_{n-1} = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}\ ,\ k_n = -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}, \tag{2.25}$$

ou o simétrico destes valores, para a orientação oposta.

Finalmente, seja M^n compacta e orientável, e seja $\chi : M^n \longrightarrow S^{n+1}(1)$ com curvatura média constante H. Podemos escolher uma orientação para M tal que $H \geq 0$. Para cada H, considere o conjunto:

$$P_H(x) = x^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}Hx - n\left(H^2+1\right),$$

e seja B_H o quadrado da raiz positiva de $P_H(x) = 0$. Note que, para $H = 0$, $B_0 = n$.

2.3. Hipersuperfícies isoparamétricas

Seja M^n uma hipersuperfície imersa numa variedade (n+1)-dimensional de curvatura constante. Sejam $k_1, ..., k_p$ as curvaturas distintas de M^n relativa a segunda forma fundamental B, com multiplicidades $m_1, ..., m_p$ respectivamente. Tal hipersuperfície é dita isoparamétrica se suas curvaturas principais são constantes com multiplicidades constantes. Se M^n for uma hipersuperfície isoparamétrica de S^{n+1} com p curvaturas distintas, então $p \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ (veja [Mu]).

No caso $n = 3$, i.e., M^3 hipersuperfície imersa em S^4 temos exatamente três caracterizações para M^3, que são:

Esferas: Seja $x : S^3(r) \longrightarrow S^4(1)$ imersão isométrica dada por $x(p) = (p, s)$, onde $s^2 + r^2 = 1$. Então $M^3 = S^3(r)$ é totalmente umbílica com curvaturas principais $k_i = s \backslash r, i = 1, 2, 3$. A curvatura média H e a curvatura escalar R e a curvatura de Gauss-Kronecker K satisfazem as relações

$$\begin{aligned} R &= 6 + 2H^2/3 \\ R &= 6(1 + K^{2/3}). \end{aligned}$$

Toro de Clifford: Seja $\Psi : S^2(r) \times S^1(1) \longrightarrow S^4$ uma imersão isométrica dada por $\Psi(p, q) = (p, q)$. Suas curvaturas principais são dadas por $k_1 = -r \backslash s, k_2 = k_3 = s \backslash r$. A curvatura média e a curvatura escalar da imersão satisfazem,

$$\begin{aligned} R &= 3 + (H^2 \pm H\sqrt{8 + H^2})/4 \\ R &= 2(1 + K^2). \end{aligned}$$

Família isoparamétrica de Cartan: Consideremos primeiramente a imersão $\Upsilon : S^2(\sqrt{3}) \longrightarrow S^4$ dada por:

$$\Upsilon(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{3}}(xy, xz, \frac{1}{2}(x^2 - y^2), \frac{1}{2\sqrt{3}}(x^2 + y^2 - 2z^2)).$$

Isto define um mergulho do plano real projetivo RP^2 em S^4 . Este plano projetivo real mergulhado em S^4 é chamado superfície de Veronese. Seja $N_1(\Sigma)$ o fibrado normal unitário da superfície de Veronese Σ, i.e.,

$$N_1(\Sigma) = \{(x, \nu) \in \Sigma \times S^4 | \nu \perp T_x\Sigma e \nu \perp x\}.$$

Em $(x, \nu) \in N_1(\Sigma)$ as curvaturas principais da superfície de Veronese são dadas por $k_1(x, \nu) = -k_2(x, \nu) = \sqrt{3}/3$. Portanto, a superfície de Veronese é uma subvariedade mínima de S^4. Considere a aplicação polar $\Theta : N_1(\Sigma) \longrightarrow S^4$ dada por $\Theta(x, \nu) = \nu$. As curvaturas principais da imersão Θ são: $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$.

Finalmente, definimos a família isoparamétrica $\Theta_t : N_1(\Sigma) \longrightarrow S^4$ por $\Theta_t(x, \nu) = \cos t\ \Theta(x, \nu) + \sin t\ x$. As curvaturas principais da imersão Θ_t são:

$$\frac{\sqrt{3} + \tan t}{1 - \tan t}, \frac{\tan t - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} \tan t}, \tan t.$$

A curvatura escalar de Θ_t é dada por $R_t = 0$. A curvatura média H_t e a curvatura de Gauss-Kronecker K_t de Θ_t satisfazem $H_t + 3K_t = 0$.

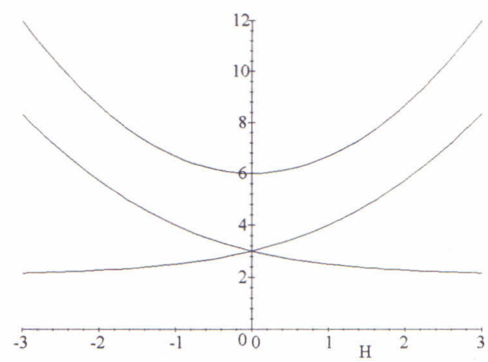

Figura 1: $R = 0, 3 + \frac{1}{4}(H^2 \pm H\sqrt{8 + H^2}), 6 + \frac{2}{3}H^2$

Observação 1. *A figura 1 mostra os possíveis valores para a curvatura média* (H) *e para a curvatura escalar* (R) *de uma hipersuperfície* M *isoparamétrica em* S^4.

3. Lemas e Estimativas

Neste capítulo se encontram os lemas que servirão para as conclusões dos teoremas citados na introdução. Em sequência, teremos primeiramente algumas identidades necessárias.

3.1. Fórmulas

No que se segue, assumiremos que a curvatura escalar normalizada R de M seja constante, então de (2.24) tem-se:

$$\square(nH) = |\nabla B|^2 - n^2|\nabla H|^2 + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i,j} R_{ijij}(k_i - k_j)^2. \tag{3.1}$$

De (2.5), obtemos $R_{ijij} = c + k_i k_j$, substituindo em (3.1) teremos,

$$\begin{aligned}\square(nH) &= |\nabla B|^2 - n^2|\nabla H|^2 + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i,j}(c + k_i k_j)(k_i - k_j)^2\\ &= |\nabla B|^2 - n^2|\nabla H|^2 + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i,j}(ck_i^2 + ck_j^2 - 2ck_ik_j + k_i^3k_j + k_ik_j^3 - 2k_i^2k_j^2)\\ &= |\nabla B|^2 - n^2|\nabla H|^2 + \tfrac{1}{2}nc\textstyle\sum_i k_i^2 + \tfrac{1}{2}nc\sum_j k_j^2 - c\sum_{i,j} k_jk_i + \tfrac{1}{2}\sum_{i,j} k_i^3k_j + \tfrac{1}{2}\sum_{i,j} k_ik_j^3\\ &\quad - \textstyle\sum_{i,j} k_i^2k_j^2,\end{aligned}$$

fazendo $i = j$, temos:

$$\square(nH) = |\nabla B|^2 - n^2|\nabla H|^2 + ncS - n^2H^2c - S^2 + nH\textstyle\sum_i k_i^3. \tag{3.2}$$

Sejam $\mu_i = H - k_i$ e $|Z|^2 = \sum_i \mu_i^2$, temos então:

$$\sum_i \mu_i = \sum_i k_i - \sum_i H = 0, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}|Z|^2 &= nH^2 + \textstyle\sum_i k_i^2 - 2H\sum_i k_i\\ &= S + nH^2 - 2nH^2 = S - nH^2,\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\textstyle\sum_i k_i^3 = nH^3 + 3H\sum_i \mu_i^2 - \sum_i \mu_i^3, \tag{3.5}$$

das fórmulas (3.2) a (3.5), temos:

$$\begin{aligned}\square(nH) &= |\nabla B|^2 - n^2|\nabla H|^2 + nc|Z|^2 - S^2 + nH(nH^3 + 3H\textstyle\sum_i \mu_i^2 - \sum_i \mu_i^3)\\ &= |\nabla B|^2 - n^2|\nabla H|^2 + nc|Z|^2 - S^2 - nH\textstyle\sum_i \mu_i^3 + 3nH^2|Z|^2 + n^2H^4\end{aligned}$$

Assim,

$\square(nH) = |\nabla B|^2 - n^2|\nabla H|^2 + nc|Z|^2 - |Z|^4 - n^2H^4 - 2nH^2|Z|^2 + 3nH^2|Z|^2$
$+n^2H^4 - nH\sum_i \mu_i^3.$
Segue-se então que:

$$\square(nH) = |\nabla B|^2 - n^2|\nabla H|^2 + |Z|^2(nc + nH^2 - |Z|^2) - nH\sum_i \mu_i^3 \tag{3.6}$$

Enunciaremos, dois lemas de fundamental importância para a demonstração dos teoremas apresentados na introdução deste trabalho, o primeiro destes é o seguinte:

Lema 3.1. *([O]) Considerando os $\mu_i's$ definidos anteriormente, para $n \geq 3$, e $|Z|^2 \equiv cte \geq 0$, tem-se:*

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|Z|^3 \leq \sum_i \mu_i^3 \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|Z|^3, \tag{3.7}$$

e a igualdade no lado direito (lado esquerdo) de (3.7) é verificada se, e somente se, $(n-1)$ dos $\mu_i's$ são não-positivos e iguais ($(n-1)$ dos $\mu_i's$ são não-negativos e iguais).

Demonstração: Utilizaremos aqui, o método dos multiplicadores de Lagrange
Vamos calcular os pontos críticos da função $f = \sum_i \mu_i^3$, sujeita aos seguintes vínculos:

$$\sum_i \mu_i = 0 \quad e \quad \sum_i \mu_i^2 = |Z|^2. \tag{3.8}$$

Segue-se então que, os pontos críticos satisfazem a equação quadrática:

$$\mu_i^2 - \lambda\mu_i - \alpha = 0\ ,\ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Então, os valores de μ_i são os pontos críticos, a saber:

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_p = a > 0\ ,\ \mu_{p+1} = \mu_{p+2} = \ldots = \mu_n = -b < 0,$$

reenumerando se necessário. Temos ainda que os $\mu_i's$ satisfazem:

$$0 = \sum_i \mu_i = pa - (n-p)b \tag{3.9}$$

$$|Z|^2 = \sum_i \mu_i^2 = pa^2 - (n-p)b^2 \tag{3.10}$$

e ainda,

$$f = \sum_i \mu_i^2 = pa^3 - (n-p)b^3. \qquad (3.11)$$

As equações (3.9) e (3.10) nos dão o seguinte sistema:

$$\begin{cases} pa^2 + (n-p)b^2 & = & |Z|^2 \\ pa - (n-p)b & = & 0, \end{cases}$$

para o qual, teremos:

$$a^2 = \tfrac{n-p}{pn}|Z|^2 \quad , \quad b^2 = \tfrac{p}{n(n-p)}|Z|^2.$$

Observa-se também que,

$$f = \tfrac{1}{n}[(n-p)a - pb]\,|Z|^2.$$

Da equação acima, nota-se que f decresce quando p cresce. Portanto, f atinge o máximo quando $p = 1$ eo máximo de f é dado por:

$$\begin{aligned} a^3 - (n-1)b^3 &= \{(n-1)b\}^3 - (n-1)b^3 = (n-1)^3b^3 - (n-1)b^3 \\ &= \{(n-1)^2 - 1\}(n-1)b^2b = (n^2 - 2n + 1 - 1)(n-1)b^2b \\ &= (n-2)n(n-1) = \tfrac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|Z|^3. \end{aligned}$$

Visto que, f é simétrica, isto prova o lema.

Combinando (2.6) com (3.7), obtemos:

$$\Box(nH) \geq |\nabla B|^2 - |\nabla H|^2 + |Z|^2\left(nc + nH^2 - |Z|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H\,|Z|\right) \qquad (3.12)$$

Lema 3.2. *([ACC]) Seja $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ uma imersão com curvatura escalar R constante. Suponha que $R - c \geq 0$. Então,*

$$|\bigtriangledown B|^2 \geq n^2 |\bigtriangledown H|^2 . \tag{3.13}$$

Demonstração: De (2.6), temos:

$$n^2H^2 - \textstyle\sum_{i,j} h_{ij}^2 = n(n-1)(R-c).$$

Derivando-se covariantemente a expressão acima, e usando o fato de R ser cons tante, chega-se a:

$$n^2 H H_k = \textstyle\sum_{i,j} h_{ij}h_{ijk}.$$

Segue-se então que,

$$\textstyle\sum_k n^4 H^2 (H_k)^2 = \sum_k (\sum_{i,j} h_{ij}h_{ijk})^2 \leq (\sum_{i,j} h_{ij}^2)(\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2), \tag{3.14}$$

donde,

$$n^4 H^2 |\bigtriangledown H|^2 \leq S |\bigtriangledown B|^2 . \tag{3.15}$$

Por outro lado, sendo $R - c \geq 0$ teremos também que $n^2H^2 - S \geq 0$, já que $n \geq 3$. Desta forma,

$$n^2 S |\bigtriangledown H|^2 \leq n^4 H^2 |\bigtriangledown H|^2 \leq S |\bigtriangledown B|^2 ,$$

e o lema fica provado.

Obteremos agora outra estimativa, para abreviar, escreveremos:

$$\overline{R} = R - c, \tag{3.16}$$

por (2.6), teremos:

$$|Z|^2 = S - nH^2 = \frac{n-1}{n}(S - n\overline{R}), \tag{3.17}$$

note que $S \geq n\overline{R}$, e $S \equiv n\overline{R}$ se, e somente se, M é totalmente umbílica.

Por uso de (2.6), (3.17) e do Lema (3.2), nós temos de (3.12),

$$\begin{aligned}\square(nH) &\geq \tfrac{n-1}{n}(S-n\overline{R})[nc+2nH^2- \\ &\quad -S-(n-2)\,|H|\,\sqrt{S-n\overline{R}}] \\ &\geq \tfrac{n-1}{n}(S-n\overline{R})[nc+2(n-1)\overline{R}- \\ &\quad -\tfrac{n-2}{n}S-\tfrac{n-2}{n}\sqrt{(n(n-1)+S)(S-n\overline{R})}.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Esta é a estimativa chave, a qual nos ajudará a provar os Teoremas (1.4) e (1.5).

Lema 3.3. *As seguintes desigualdades são equivalentes:*

(1) $S \leq \frac{n}{(n-2)(n\overline{R}+2)}[n(n-1)\overline{R}^2+4(n-1)\overline{R}+n]$

(2) $(n+2(n-1)\overline{R}-\frac{n-2}{n}S)^2 \geq \frac{(n-2)^2}{n^2}(n(n-1)\overline{R}+S)(S-n\overline{R})$.

Demonstração: Vamos primeiramente mostrar que, (2) implica (1).

$$(n+2(n-1)\overline{R}-\frac{n-2}{n}S)^2 \geq (\frac{n-2}{n})^2(n(n-1)\overline{R}+S)(S-n\overline{R}).$$

Daí,

$$(n+2(n-1)\overline{R})^2+(\frac{n-2}{n})^2S^2-2(n+2(n-1)\overline{R})(\frac{n-2}{n})S$$

$$\geq (\frac{n-2}{n})^2(n(n-1)\overline{R}+S)(S-n\overline{R}).$$

Assim, temos que:

$$[(\frac{n-2}{n})^2n(n-2)\overline{R}+2(n+2(n-1)\overline{R}(\frac{n-2}{n})]S$$

$$\leq (n+2(n-1)\overline{R})^2+(\frac{n-2}{n})^2n^2(n-1)\overline{R}^2$$

Por um cálculo direto, teremos que,

$$(n-2)(n\overline{R}+2)S \leq n[n(n-1)\overline{R}^2+4(n-1)\overline{R}+n].$$

A outra implicação é verificada facilmente.

4. Hipersuperfícies com curvatura média constante em esferas

Consideremos aqui, uma hipersuperfície compacta M^n de uma esfera, com curvatura média constante H. Através da definição do tensor Φ, mostraremos que se $|\Phi|^2 \leq B_H$, onde $B_H \neq 0$ é um número que depende somente de H e n, então $|\Phi|^2 \equiv 0$ ou $|\Phi|^2 \equiv B_H$. Nós também caracterizaremos todas as M^n com $|\Phi|^2 \equiv B_H$.

4.1. Prova do Teorema (1.2):

Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal, o qual diagonaliza φ em cada ponto de M, i.e., $\varphi e_i = \mu_i e_i$ e seja ∇ a conexão sobre M.

Primeiramente calcularemos o laplaciano de φ. Dada uma variedade Riemanniana M e uma aplicação linear simétrica sobre o espaço tangente de M, que satisfaz formalmente a equação de Codazzi (2.7), Cheng e Yau [CY] fizeram o cálculo para um tal laplaciano. Em nosso contexto, este cálculo é aplicado a Φ. Então, [CY , pg.198]

$$\tfrac{1}{2}\Delta |\Phi|^2 = \quad |\nabla\Phi|^2 + \textstyle\sum_i \mu_i (tr\Phi)_{ii} + \tfrac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\mu_i - \mu_j)^2, \tag{4.1}$$

onde R_{ijij} é a curvatura seccional do plano $\{e_i, e_j\}$.

Verificamos primeiro o último termo do lado direito de (4.1). Segundo a definição de Φ, $\mu_i = H - k_i$ e por (2.5),

$$R_{ijij} = 1 + k_i k_j = 1 + \mu_i\mu_j - H(\mu_i + \mu_j) + H^2$$

a qual implica, já que $tr\Phi = 0$, que:

$$\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i,j}(1 + \mu_i\mu_j)(\mu_i - \mu_j)^2 \quad = \quad n\sum_i \mu_i^2 - (\sum_i \mu_i^2)^2.$$

Portanto, como $\sum_{i,j}(\mu_i - \mu_j)^2 = 2n|\Phi|^2$, nós obtemos:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i,j} R_{ijij}(\mu_i - \mu_j)^2 \quad &= \quad n\textstyle\sum_i \mu_i^2 - (\sum_i \mu_i^2)^2 \\ &\quad -\tfrac{H}{2}\textstyle\sum_{i,j}(\mu_i + \mu_j)(\mu_i - \mu_j)^2 \\ &\quad +\tfrac{H^2}{2}\textstyle\sum_{i,j}(\mu_i - \mu_j)^2 = \\ &= \quad n|\Phi|^2 - |\Phi|^4 + nH|\Phi|^2 \\ &\quad -\tfrac{H}{2}\textstyle\sum_{i,j}(\mu_i + \mu_j)(\mu_i - \mu_j)^2, \end{aligned} \tag{4.2}$$

por outro lado, temos que $\sum_i \mu_i = 0$ e deste modo,

$$\tfrac{1}{2}\sum_{i,j}(\mu_i + \mu_j)(\mu_i - \mu_j)^2 \quad = \quad n\sum_i \mu_i^3. \tag{4.3}$$

Segue-se de (4.2) e (4.3) que (4.1) pode ser escrita como:

$$\tfrac{1}{2}\Delta\left|\Phi\right|^2 = \left|\nabla\Phi\right|^2 - \left|\Phi\right|^4 + n\left|\Phi\right|^2 + nH\left|\Phi\right|^2 - nH\sum_i \mu_i^3. \tag{4.4}$$

Usando o Lema (3.1) em (4.4), obtemos:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\Delta\left|\Phi\right|^2 &\geq \left|\nabla\Phi\right|^2 - \left|\Phi\right|^4 + n(H^2+1)\left|\Phi\right|^2 - \tfrac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H\left|\Phi\right|^3 \\ &\geq \left|\nabla\Phi\right|^2 + \left|\Phi\right|^2\{-\left|\Phi\right|^2 - \tfrac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H\left|\Phi\right| + n(H^2+1)\}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

observe que o termo entre chaves é exatamente $-P_H(|\Phi|)$, que é não-negativo, pois $\left|\Phi\right|^2 \leq B_H$.

Integrando ambos os lados de (4.5), usando o teorema de Stokes e as hipóteses, concluimos que,

$$0 \geq \int_M \left|\nabla\Phi\right|^2 + \int_M \left|\Phi\right|^2\{-\left|\Phi\right|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H\left|\Phi\right| + n(H^2+1)\} \geq 0.$$

Deste modo, $\left|\nabla\Phi\right|^2 \equiv 0$ e $\Phi \equiv 0$ ou $\left|\Phi\right|^2 \equiv B_H$. Isto prova a parte (i) do Teorema (1.2).

Consideremos agora, a parte (ii). Note primeiramente que, se $\left|\Phi\right|^2 \equiv B_H$, o lado direito de (4.5) se anula independentemente da compacidade de M.

Se $H = 0$, o teorema reduz-se ao Teorema (1.1), o qual nos dá $(ii)\,(a)$.

Se $H \neq 0$, nós concluimos que $\nabla\Phi = 0$ e que a igualdade no lado direito de (3.7) vale, i.e., $(n-1)$ dos $\mu_i's$ são não-positivos $(\mu_i \leq 0)$ e iguais, como $\mu_i = H - k_i$ esta afirmação é válida também para os $k_i's$. Assim, reenumerando se necessário, nós podemos supor que

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_{n-1}\ ,\ k_1 \neq k_n\ ,\ k_i = cte.\,.$$

Por Cartan [Ca], como M é isoparamétrica com duas curvaturas principais constantes. Logo, M é um $H\,(r) - toro$. Para identificar de qual $H\,(r) - toro$ se aproxima, é conveniente observar que:

$$\sum_i \mu_i^3 = \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} |Z|^3 ,$$

se, e somente se, $(n-1)$ dos $\mu_i's$ são da forma,
$-b = -(\frac{1}{n(n-1)})^{\frac{1}{2}} |Z|$ e o restante da forma $a = (\frac{n-1}{n})^{\frac{1}{2}} |Z|$, e daí,

$$\mu_n = \sqrt{\frac{n-1}{n}} |\Phi| \ , \ \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n-1} = -\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}} |\Phi| .$$

Deste modo,

$$k_1 = H - \mu_1 = H + \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}} |\Phi| ,$$

$$k_n = H - \mu_n = H - \sqrt{\frac{n-1}{n}} |\Phi| \quad e$$

$$nk_n k_1 = nH^2 - |\Phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H |\Phi| .$$

Portanto, visto que $|\Phi|^2 \equiv B_H$ temos que $P_H(|\Phi|) = 0$, i.e.,

$$nk_n k_1 = nH^2 - |\Phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H |\Phi| = -n.$$

Assim, $k_n k_1 = -1$. Por outro lado,

$$k_n = H - \mu_n = \frac{k_n + (n-1)k_1}{n} - \mu_n ,$$

donde,

$$(n-1)k_n - (n-1)k_1 = -n\mu_n ,$$

e como $\mu_n > 0$, obetmos que $k_n < k_1$. Como, $k_n k_1 = -1$ então $k_n < 0$.

Observa-se que o $H(r) - toro$ orientado, é obtido tendo em vista a igualdade do Lema (3.1), assim ele é dado por:

$$k_1 = \ldots = k_{n-1} = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}, \; k_n = -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Já que sua curvatura média,

$$H = \frac{(n-1)\sqrt{1-r^2}}{nr} - \frac{r}{n\sqrt{1-r^2}} = \frac{(n-1) - nr^2}{nr\sqrt{1-r^2}},$$

é positiva, tem-se:

$$r^2 < \frac{n-1}{n}.$$

Isto completa a prova no caso $(ii)(b)$.

Para provar finalmente, o caso $(ii)(c)$, observamos que $M^2 \hookrightarrow S^3(1)$ é uma superfície isoparamétrica em $S^3(1)$, desta forma, ou é totalmente umbílica, ou um $H(r) - toro$.

Tendo em vista que, $|\Phi|^2 \neq 0$ então M^2 é um $H(r) - toro$. Por um argumento semelhante, $k_1 k_2 = -1$. Note que a igualdade no Lema (3.1) não nos dá informação adicional, e nós temos então os seguintes casos:

$$H = \frac{1-2r^2}{2r\sqrt{1-r^2}} \; ou \; H = \frac{2r^2-1}{2r\sqrt{1-r^2}}, n = 2,$$

e em qualquer um dos casos $r^2 \neq \frac{n-1}{n} = \frac{1}{2}$ ocorrerá . Isto conclui a prova de $(ii)(c)$ e a prova do teorema.

4.2. Observações Adicionais

O Teorema (1.2) levanta as seguintes questões: considere o conjunto de hipersuperfícies de $S^{n+1}(1)$ com H e $|\Phi|$ constantes. O conjunto de valores de $|\Phi|$ é discreto? Para hipersuperfícies mínimas, esta questão foi levantada em [CdCK]

Para $n = 3$ e $H = 0$, uma contribuição significativa foi dada por Peng e Terng [PT] a qual mostrou que, se $|\Phi|$ é constante e $3 < |\Phi|^2 \leq 6$, então $|\Phi|^2 = 6$.

O resultado de Peng e Terng foi estendido à hipersuperfícies de $S^4(1)$, com curvatura média constante H por Almeida e Brito [AB]. Em [AB] prova-se que, se

$|\Phi|^2$é constante e $|\Phi|^2 \leq 6+6H^2$, então M^3 é uma hipersupefície isoparamétrica de $S^4(1)$. Além disso, se $4+6H^2 \leq |\Phi|^2 \leq 6+6H^2$, então $|\Phi|^2 = 6+6H^2$ e M^3 possui três curvaturas pricipais distintas.

O resultado de Almeida e Brito resolve a questão acima para $n=3$ e $|\Phi|^2 \leq 6+6H^2$ e também nos dá uma luz sobre o que acontece para o $H(r)-toro$ quando $H \neq 0$ e $r^2 > \frac{2}{3}$ todos no intervalo $B_H < |\Phi|^2 < 4+6H^2$.

5. Hipersuperfícies com curvatura escalar constante em formas espaciais

O objetivo deste capítulo, é demonstrar os Teoremas (1.4) e (1.5).

5.1. Prova do Teorema (1.4):

Neste caso, $Q^{n+1}(c) = S^{n+1}$, i.e., $c=1$ nós temos de (3.18)

$$\begin{aligned} \square(nH) \quad \geq \quad & \tfrac{n-1}{n}(S-n\overline{R})[n+2(n-1)\overline{R}-\tfrac{n-2}{n}S \\ & -\tfrac{n-2}{n}\sqrt{(n(n-1)+S)(S-n\overline{R})}]. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Segundo a equação de Gauss, segue-se que,

$$\begin{aligned} \square(nH) \quad \geq \quad & n(n-1)(H^2-\overline{R})[n(2H^2+1)-S \\ & -n(n-2)\,|H|\,\sqrt{H^2-\overline{R}}]. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Como $S \geq n\overline{R}$ e $S-n\overline{R} = n^2(H^2-\overline{R})$ temos que, $H^2-\overline{R} \geq 0$.
Verifica-se facilmente pela equação de Gauss que, $H^2 \leq C_{\overline{R}}$ é equivalente a:

$$S \leq \frac{n}{(n-2)(n\overline{R}+2)}[n(n-1)\overline{R}^2+4(n-1)\overline{R}+n] \tag{5.3}$$

Pelo Lema (3.3) temos que a desigualdade acima se equivale a:

$$\{n+2(n-1)\overline{R}-\frac{n-2}{n}S\}^2 \geq \frac{(n-2)^2}{n^2}\{n(n-1)\overline{R}+S\}\{S-n\overline{R}\}. \tag{5.4}$$

Assim, por transitividade $H^2 \leq C_{\overline{R}}$ é equivalente a:

$$[n(2H^2+1)-S]^2 \geq n^2(n-2)^2H^2(H^2-\overline{R})$$

Portanto, o lado direito de (5.2) é não-negativo, e também temos que $\int_M \square(nH) = 0$, já que M é compacta e o operador $\square$ é auto-adjunto. Deste modo,

$$H^2 \equiv \overline{R}. \tag{5.5}$$

Isto equivale a $S \equiv nH^2$ e M é uma hipersuperfície totalmente umbílica, ou

$$H^2 \equiv C_{\overline{R}}. \tag{5.6}$$

Usando mais uma vez a equação de Gauss, temos que (5.6) é equivalente a:

$$S \equiv \frac{n}{(n-2)(n\overline{R}+2)}[n(n-1)\overline{R}^2 + 4(n-1)\overline{R} + n].$$

No último caso, $H \neq 0$. De (2.6), $\overline{R} = R - 1 \geq 0$ e a igualdade integral mostra que, $\sum_i \mu_i^3 = -\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|Z|^3$. O Lema (3.1) afirma que $(n-1)$ dos $\mu_i's$ são não-negativos, além disso são da forma:

$$\mu_1 = -\sqrt{\frac{n-1}{n}}|Z|, \ \mu_2 = \ldots = \mu_n = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}}|Z|.$$

Agora, como $\mu_i = H - k_i$ e por $H = cte.$, então $(n-1)$ dos $k_i's$ são iguais e constantes. Temos ainda que,

$$k_1 = H + \sqrt{\frac{n-1}{n}}|Z|, \ k_2 = \ldots = k_n = H - \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}}|Z|.$$

Assim, M é isoparamétrica com duas curvaturas principais distintas. Por Cartan [Ca], $M = S^j(r_1) \times S^{n-j}(r_2) \subset S^{n+1}(1)$. Mostraremos que M é do tipo, $S^1(\sqrt{1-r^2}) \times S^{n-1}(r)$. Como $r_1^2 + r_2^2 = 1$, tome $r_2 = r$, e $r_1 = \sqrt{1-r^2}$.
Para este produto de esferas as curvaturas principais são dadas por:

$$k_1 = \ldots = k_j = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \text{ e } k_{j+1} = \ldots = k_n = -\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}.$$

Como M é isoparamétrica, as curvaturas principais são constantes com multiplicidade constante, assim $j = 1$. Logo, $M = S^1(\sqrt{1-r^2}) \times S^{n-1}(r)$.
De (2.6) é fácil ver que $n(n-1)\overline{R} = (n-1)(n-2-nr^2)/r^2$, deste modo, $r = \sqrt{\frac{n-2}{n(\overline{R}+1)}}$ demonstrando assim o teorema.

5.2. Prova do Teorema (1.5):

Para este caso, $Q^{n+1}(c) = R^{n+1}$, i.e., $c = 0$, nota-se primeiramente que a condição $\overline{R} = R - 0 \geq 0$ é automaticamente satisfeita, pois sendo M compacta, existe um ponto $p_o \in M$, com $k_i(p_o) > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Deste modo $n(n-1)R = \sum_{i \neq j} k_i(p_o)k_j(p_o) > 0$. Mas, por hipótese $R = cte$ e concluimos que $R > 0$ sobre M.

Tomando, $c = 0$ em (3.18) obtemos:

$$\begin{aligned} \square(nH) \geq \; & \tfrac{n-1}{n}(S - n\overline{R})[2(n-1)\overline{R} - \tfrac{n-2}{n}S - \\ & -\tfrac{n-2}{n}\sqrt{\{n(n-1)\overline{R} + S\}\{S - n\overline{R}\}}]. \end{aligned} \tag{5.7}$$

De (1.3), vê-se facilmente que o lado direito de (5.7) é não-negativo, o que implica $\square(nH) \geq 0$. Usando o mesmo processo do teorema anterior, nós temos que M é uma hipersuperfície isoparamétrica. Deste modo $S \equiv nR$ e M é uma esfera n-dimensional $S^n(r)$, $r = \sqrt{\frac{1}{R}}$. Assim, a prova esta completa.

5.3. Observações Finais

Escolhendo, $c = -1$ em (3.18) e tomando o mesmo processo da prova do Teorema (1.4) e do Teorema (1.5), nós podemos obter um teorema para hipersuperfícies de dimensão n e com curvatura escalar constante no espaço hiperbólico $H^{n+1}(-1)$.

Referências

[AB] S. C. de Almeida and F. G.B. Brito: Closed 3-dimensional hypersurface with constant mean curvature and constant scalar curvature, Duke Math. J., 61 (1990) 195-206.

[AC] H. Alencar and M. do Carmo: Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres, Proc. Amer. Math. Soc.(4) 120 (1994), 1223-1228.

[ACC] H. Alencar, M. do Carmo, A.G. Colares, Stable hypersurfaces with constant scalar curvature, Math. Z., 213 (1993), 117-131.

[Ca] E. Cartan, Sur des familles remarquables d'hypersurfaces isoparametriques dans les espaces spheriques, Math. Z., 45(1939),335-367.

[CY] S.Y. Chang and S.T.Yau: Hypersurfaces with constant scalar curvature, Math.Ann., 225 (1977) , 195-206.

[CdCK] S.S. Chern , M. do Carmo and S. Kobayashi: Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length , Functional Analysis and Related Fields (F. Browder,ed.) , Springer-Verlag , Berlin , (1970), 59-75.

[dC] M. P. do Carmo. Geometria Riemanniana.

[dCD] M. do Carmo and M. Dajczer: Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature , Trans. Amer. Math. Soc. 277, (1983), 685-709.

[Li] Li Haizhong: Hypersurfaces with constant scalar curvature in space forms, Math. Ann., 305 (1996), 665-672.

[L1] B. Lawson: Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces . Ann. of Math.(2) , 89 (1969), 187-197.

[L2] H.Z.Li : A characterization of Clifford minimal hypersurfaces in S^4. To appear in Proc. Amer. Math. Soc..

[MR] S. Montiel and A. Ros : Compact hypersurfaces : The Alexandrov Theorem for higher order mean curvatures . In : H.B. Lawson , K. Teneblat (eds) Differential Geometry , a symposium in honor of M. do Carmo , Pitman Monogr., 52 (1991), 279-296.

[NS] K. Nomizu and B. Smyth: A formula of Simon's type and hypersurfaces with constant mean curvature , J. Diff. Geom.3 (1969), 367-377.

[O] M. Okumura: Hypersurfaces and a pinching problem on the second fundamental tensor. Amer. J. Math. 96 (1974), 207-213.

[PT] C. K. Peng and C. L. Terng, Minimal hypersurface of spheres with constant scalar curvature, Ann. of Math. Stud., 103 (1983), 177-198.

[R] A. Ros : Compact hypersufaces with constant scalar curvature and a congruence the orem. J. Diff. Geom., 27 (1988), 215-220.

[S] J. Simons : Minimal varieties in Riemannian manifolds . Ann. of Math., 88 (1968), 62-105.