



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JOSÉ DANUSO ROCHA DE OLIVEIRA

ESTRUTURA HIPERBÓLICA NO COMPLEMENTO DO NÓ FIGURA 8

FORTALEZA

2017

JOSE DANUSO ROCHA DE OLIVEIRA

ESTRUTURA HIPERBÓLICA DO COMPLEMENTO DO NÓ FIGURA 8

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial/Topologia.

Orientador: Prof. Dr. Darlan Ribeiro Girão

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- O47e Oliveira, Jose Danuso Rocha de.
Estrutura Hiperbólica no Complemento do Nó Figura 8 / Jose Danuso Rocha de Oliveira. – 2017.
57 f. : il.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2017.
Orientação: Prof. Dr. Darlan Ribeiro Girão.
1. Nó Figura 8. 2. Geometria Hiperbólica. 3. Estrutura Hiperbólica. 4. (X,G)-variedades. I. Título.
CDD 510
-

JOSE DANUSO ROCHA DE OLIVEIRA

ESTRUTURA HIPERBÓLICA DO COMPLEMENTO DO NÓ FIGURA 8

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial/Topologia

Aprovada em: 11 / 04 / 2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Darlan Ribeiro Girão (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Florentiu Daniel Cibotaru
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Alexandre Cesar Gurgel Fernandes
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Rodrigo Mendes Pereira
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que
contribuíram direta ou indiretamente com a
sua realização.

AGRADECIMENTOS

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

Ao Prof. Dr. Darlan Ribeiro Girão, pela excelente orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora Florentiu Daniel Cibotaru, Alexandre Cesar Gurgel Fernandes e Rogrigo Mendes Pereira pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos colegas da turma de mestrado, pelas reflexões, críticas e sugestões.

”There is no branch of mathematics, however abstract, which may not some day be applied to phenomena of the real world.”
(Nikolai Ivanovich Lobachevsky)

RESUMO

Nesse trabalho estudaremos o Espaço Hiperbólico e classificaremos suas isometrias usando o modelo de Semi-Espaço de Poincaré e o modelo de Disco de Poincaré. Serão apresentados os conceitos poliedros convexos nos espaços euclidiano, esférico e hiperbólico e de (X,G) -variedades, em particular quando X é o espaço euclidiano, esférico ou hiperbólico, e G o respectivo grupo de isometrias. Formalizaremos o conceito de colagem de superfície convexas e de poliedros convexos. Daremos exemplos de colagem de polígonos convexos com estrutura euclidiana e hiperbólica. E construiremos uma estrutura hiperbólica para o complemento do nó figura 8 na esfera de dimensão 3.

Palavras-chave: Nó figura 8. Estrutura hiperbólica. (X,G) -variedades. Geometria hiperbólica.

ABSTRACT

In this work, we study the hyperbolic space and will classify its isometries by using Poincaré's disc and half-space models. We introduce the concepts of convex polyhedra on euclidian, spheric and hyperbolic spaces, as well as in (X, G) -manifolds, in particular when X is the euclidian, spheric or hyperbolic space, and G is its respectiv group of isometries. We formalize the concept of gluing convex surfaces and polyhedra. We also give examples of gluing convex polyhedra with euclidian and hyperbolic sctructure for the complement of the 8-figure knot on the 3-sphere.

Keywords: 8-figure knot. hyperbolic structure. (X, G) -manifolds. Hyperbolic Geometry.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	PRÉ-REQUISITOS	11
2.1	Geometria Riemanniana	11
2.2	Esfera \mathbb{S}^n de \mathbb{R}^{n+1}	11
3	ESPAÇO HIPERBÓLICO	12
3.1	Modelo de Disco de Poincaré	12
3.2	Modelo de Semiespaço de Poincaré	12
3.3	Isometria Entre os Dois Modelos	12
3.4	Alguns Exemplos de Isometria do Espaço Hiperbólico	18
3.5	Geodésicas de \mathbb{H}^n	22
3.6	Classificação das Isometrias de \mathbb{H}^n	25
4	(X, G) -VARIEDADES	29
4.1	Poliedros convexos de X	29
4.2	Definição (X, G) -variedades	30
4.3	Colando superfícies	31
4.4	Toro e garrafa de Klein com estrutura euclidiana	38
4.5	Toro sem um ponto com estrutura hiperbólica	38
4.6	Colando poliedros convexos de dimensão 3	39
4.7	Complemento do nó Figura Oito	46
5	CONCLUSÃO	57
	REFERÊNCIAS	58

1 INTRODUÇÃO

O objetivo desse trabalho é apresentar um estudo detalhado do Espaço Hiperbólico e classificar suas isometrias. Também será apresentado a definição de (X, G) -variedades e a construção de (X, G) -variedades por colagem de polígonos e poliedros convexos. O texto principalmente baseado nos livros de RATCLIFFE (2006) e THURSTON (1997), e nas notas de aula de LACKENBY (2000).

2 PRÉ-REQUISITOS

2.1 Geometria Riemanniana

Vamos precisar da seguinte proposição no decorrer do texto. Uma prova para essa proposição pode ser encontrado em [Geometria Riemanniana/ **Manfredo Perdigão do Carmo, 5ed, Cap. VIII, seção 4, Lema 4.2**].

Proposição 2.1. *Seja (M, g) e (N, \tilde{g}) duas variedades riemannianas. Seja $H_1 : M \rightarrow N$ e $H_2 : M \rightarrow N$ isometrias sobre suas imagens. Suponha que existe $x \in M$ tal que $H_1(x) = H_2(x)$ e $d(H_1)_x = d(H_2)_x$ então $H_1 = H_2$*

Proposição 2.2. *Seja (M, g) uma variedade riemanniana. Se uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ diferenciável por partes, parametrizada pelo comprimento de arco na métrica de M , tem comprimento menor ou igual a qualquer outra curva ligando $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ então γ é uma geodésica. Em particular, γ é diferenciável em todo ponto.*

2.2 Esfera \mathbb{S}^n de \mathbb{R}^{n+1}

Antes de começar vamos fixar a seguinte nomenclatura, a **estrutura diferenciável padrão** de \mathbb{R}^n será a gerada pelo atlas $\{Id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n\}$, onde Id é a identidade de \mathbb{R}^n . Na notação usada nesse texto, a base canônica para \mathbb{R}^n será denotada por $\{e_1, \dots, e_n\}$ onde

$$e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{posição } i}, 0, \dots, 0)$$

Se escrevermos $v, w \in \mathbb{R}^n$ na base canônica, $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ e $w = \sum_{i=1}^n w_i e_i$ denotamos por $\langle v, w \rangle_{eucl} := \sum_{i=1}^n v_i w_i$ o produto escalar padrão de \mathbb{R}^n . Vamos denotar por $|v|_{eucl} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{eucl}}$.

No decorrer do texto, $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, x \rangle_{eucl} = 1\}$ será a esfera de \mathbb{R}^{n+1} com tensor métrica induzido de \mathbb{R}^{n+1} .

3 ESPAÇO HIPERBÓLICO

Nessa seção, mostraremos os dois modelos mais conhecidos do Espaço Hiperbólico, o Modelo de Disco e o Modelo de Semiespaço de Poincaré. Exibiremos uma isometria entre os dois modelos. Na última subseção classificaremos as isometrias do Espaço Hiperbólico.

3.1 Modelo de Disco de Poincaré

Definição 3.1. O **Modelo de Disco** do Espaço Hiperbólico é a variedade riemanniana (\mathbb{D}^n, \bar{g}) onde $\mathbb{D}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$ é a variedade diferenciável com a estrutura diferenciável padrão herdada de \mathbb{R}^n e \bar{g} é dado no sistema de coordenadas padrão por $\bar{g} = \frac{4\delta_{ij}}{(1-\langle x, x \rangle_{eucl})^2} dx^i dx^j$, ou seja, dados $v, w \in T_x \mathbb{D}^n$, $\bar{g}_x(v, w) = \frac{4\langle v, w \rangle_{eucl}}{(1-\langle x, x \rangle_{eucl})^2}$, onde sem mencionar estaremos identificando $T_x \mathbb{D}^n$ com \mathbb{R}^n . Vamos denotar por $|v|_{\mathbb{D}^n} := \sqrt{\bar{g}(v, v)}$. Apesar da fronteira $\mathbb{S}_{\infty}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n; |x|_{eucl} = 1\}$ de \mathbb{D}^n , visto como aberto de \mathbb{R}^n , não fazer parte do Modelo de Disco do Espaço Hiperbólico, $\mathbb{S}_{\infty}^{n-1}$ será útil no decorrer do texto. A fronteira $\mathbb{S}_{\infty}^{n-1}$ será chamada de **Esfera no Infinito**.

3.2 Modelo de Semiespaço de Poincaré

Definição 3.2. O **Modelo do Semiespaço** do Espaço Hiperbólico é a variedade riemanniana $(\mathbb{U}^n, \tilde{g})$ onde $\mathbb{U}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$ é a variedade diferenciável com a estrutura diferenciável padrão herdada do \mathbb{R}^n e \tilde{g} é dado no sistema de coordenadas padrão por $\tilde{g} = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2} dx^i dx^j$, ou seja, dados $v, w \in T_x \mathbb{U}^n$, $\tilde{g}_x(v, w) = \frac{\langle v, w \rangle_{eucl}}{x_n^2}$. E denotamos por $|v|_{\mathbb{U}^n} := \sqrt{\tilde{g}(v, v)}$. A fronteira de \mathbb{U}^n , visto como aberto de \mathbb{R}^n , será denotada por $\partial \mathbb{U}^n := \{x \in \mathbb{R}^n; x_n = 0\}$.

3.3 Isometria Entre os Dois Modelos

Nessa subseção mostraremos que as variedades riemannianas (\mathbb{D}^n, \bar{g}) e $(\mathbb{U}^n, \tilde{g})$ são isométricas. Portanto, considerações feitas em um modelo com respeito a métrica são verdadeiras no outro modelo. Daí, vamos nos referir aos dois modelos como \mathbb{H}^n , o Espaço Hiperbólico de dimensão n .

Antes de começar precisamos de algumas definições:

Definição 3.3. Uma **translação euclidiana** é uma aplicação da forma:

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \mapsto x + c$$

onde $c \in \mathbb{R}^n$. Uma **homotetia euclidiana** é uma aplicação da forma:

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \lambda x \end{aligned}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda > 0$. Uma **inversão euclidiana** é a aplicação da forma:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n - \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\} \\ x &\mapsto \frac{x}{\langle x, x \rangle_{eucl}} \end{aligned}$$

Geometricamente uma inversão aplica um ponto x em outro ponto com o inverso do módulo na semirreta que inicia em 0 e passa por x .

Proposição 3.4. *Existe uma isometria entre $(\mathbb{U}^n, \tilde{g})$ e (\mathbb{D}^n, \bar{g})*

Demonstração. Defina

$$\begin{aligned} I : \mathbb{R}^n - \{-e_n\} &\rightarrow \mathbb{R}^n - \{-e_n\} \\ x &\mapsto 2 \frac{x + e_n}{\langle x + e_n, x + e_n \rangle_{eucl}} - e_n \end{aligned}$$

Note que I é a composição de restrições de uma translação, uma inversão, uma homotetia e outra translação euclidianas, nessa ordem, a saber, defina:

$$\begin{aligned} F_1 : \mathbb{R}^n - \{-e_n\} &\rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\} \\ x &\mapsto x + e_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2 : \mathbb{R}^n - \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\} \\ x &\mapsto \frac{x}{\langle x, x \rangle_{eucl}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_3 : \mathbb{R}^n - \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_4 : \mathbb{R}^n - \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^n - \{-e_n\} \\ x &\mapsto x - e_n \end{aligned}$$

Daí, $I = F_4 \circ F_3 \circ F_2 \circ F_1$. Para provar que I é um difeomorfismo, basta provar que F_1, F_2, F_3 e F_4 são difeomorfismos. Claramente, translações e homotetias são difeomorfismos. Basta mostrar que a inversão F_2 é difeomorfismo. F_2 é injetiva, pois se $F_2(x) = F_2(y)$ com $x, y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, x e y tem a mesma direção. Portanto:

$$\begin{aligned} |F_2(x)|_{eucl} &= |F_2(y)|_{eucl} \\ \frac{|x|_{eucl}}{\langle x, x \rangle_{eucl}} &= \frac{|y|_{eucl}}{\langle y, y \rangle_{eucl}} \\ \frac{1}{|x|_{eucl}} &= \frac{1}{|y|_{eucl}} \\ |x|_{eucl} &= |y|_{eucl} \end{aligned}$$

Concluimos que $x = \pm y$. Suponha, por contradição, que $x = -y$. Assim,

$$F_2(x) = \frac{x}{\langle x, x \rangle_{eucl}} \neq \frac{-x}{\langle -x, -x \rangle_{eucl}} = F_2(y)$$

Portanto, $x = y$ e F_2 é injetiva. F_2 é sobrejetiva, pois dado $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, temos que $F_2\left(\frac{x}{\langle x, x \rangle_{eucl}}\right) = x$. Portanto, como F_2 é claramente C^∞ , logo é difeomorfismo. Concluimos que, de fato, I é difeomorfismo. A inversa de F_2 é a própria inversão F_2 . A inversa de I é dada por $I^{-1} = F_1^{-1} \circ F_2^{-1} \circ F_3^{-1} \circ F_4^{-1}$, que curiosamente nos leva a $I^{-1} = I$.

Note $I|_{\mathbb{D}^n} : \mathbb{D}^n \rightarrow I(\mathbb{D}^n)$ é um difeomorfismo, pois \mathbb{D}^n é um aberto.

Defina:

$$\begin{aligned} \pi_i : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto x_i \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $I(\mathbb{D}^n) = \mathbb{U}^n$:

$$\begin{aligned} I(x) \in \mathbb{U}^n &\iff \pi_n(I(x)) > 0 \\ \iff \pi_n\left(2\frac{x + e_n}{\langle x + e_n, x + e_n \rangle_{eucl}} - e_n\right) > 0 &\iff \pi_n\left(2\frac{x + e_n}{\langle x + e_n, x + e_n \rangle_{eucl}}\right) > 1 \\ &\iff \frac{x_n + 1}{\langle x + e_n, x + e_n \rangle_{eucl}} > 1 \iff 2(x_n + 1) > \langle x + e_n, x + e_n \rangle_{eucl} \\ \iff 2(x_n + 1) > x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + (x_n + 1)^2 &\iff 1 > x_1^2 + \dots + x_n^2 \iff x \in \mathbb{D}^n \end{aligned}$$

Note que $I|_{\mathbb{D}^n}(x) = 2f(x)F(x) - e_n$ onde $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{\langle x + e_n, x + e_n \rangle_{eucl}}$$

e $F : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(x) = x + e_n$. Daí, dado $v \in T_x \mathbb{D}^n$ temos:

$$\begin{aligned} dI_x(v) &= 2((v(f)).F(x) + f(x).dF_x(v)) \\ dI_x(v) &= 2 \left(\frac{-1}{\langle x + e_n, x + e_n \rangle_{eucl}^2} 2 \langle x + e_n, v \rangle_{eucl} \cdot F(x) + f(x) \cdot v \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Note que, para $w \in T_x \mathbb{D}^n$ com w perpendicular a $x + e_n$, temos $dI_x(w) = 2f(x).w$, pois

$$\begin{aligned} dI_x(w) &= 2 \left(\frac{-1}{\langle x + e_n, x + e_n \rangle_{eucl}^2} 2 \langle x + e_n, w \rangle_{eucl} \cdot F(x) + f(x) \cdot w \right) \\ dI_x(w) &= 2 \left(\frac{-1}{\langle x + e_n, x + e_n \rangle_{eucl}^2} \underbrace{2 \langle x + e_n, w \rangle_{eucl}}_0 \cdot F(x) + f(x) \cdot w \right) = 2f(x)w. \end{aligned}$$

E para $\tilde{w} \in T_x \mathbb{D}^n$ com \tilde{w} múltiplo de $x + e_n$, digamos $\tilde{w} = \lambda(x + e_n)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$, temos $dI_x(\tilde{w}) = -2f(x)\tilde{w}$, pois

$$\begin{aligned} dI_x(\tilde{w}) &= 2 \left(\frac{-1}{\langle x + e_n, x + e_n \rangle_{eucl}^2} 2 \langle x + e_n, \tilde{w} \rangle_{eucl} \cdot F(x) + f(x) \cdot \tilde{w} \right) \\ dI_x(\tilde{w}) &= 2 \left(\frac{-1}{\langle x + e_n, x + e_n \rangle_{eucl}^2} 2 \langle x + e_n, \lambda(x + e_n) \rangle_{eucl} \cdot (x + e_n) + f(x) \cdot \tilde{w} \right) \\ dI_x(\tilde{w}) &= 2 \left(\frac{-1}{\langle x + e_n, x + e_n \rangle_{eucl}^2} 2 \langle x + e_n, x + e_n \rangle_{eucl} \cdot \lambda(x + e_n) + f(x) \cdot \tilde{w} \right) \\ dI_x(\tilde{w}) &= 2 \left(\underbrace{\frac{-2}{\langle x + e_n, x + e_n \rangle_{eucl}}}_{-2f(x)} \cdot \underbrace{\lambda(x + e_n)}_{\tilde{w}} + f(x) \cdot \tilde{w} \right) = -2f(x)\tilde{w}. \end{aligned}$$

Portanto, $|dI_x(v)|_{eucl} = 2f(x)|v|_{eucl}, \forall v \in T_x\mathbb{D}^n$. Temos que:

$$\begin{aligned} |dI_x(v)|_{\mathbb{U}^n} &= \frac{|dI_x(v)|_{eucl}}{\pi_n(I(x))} \\ |dI_x(v)|_{\mathbb{U}^n} &= \frac{2f(x)|v|_{eucl}}{2^{\frac{x_n+1}{\langle x+e_n, x+e_n \rangle_{eucl}}}-1} \\ |dI_x(v)|_{\mathbb{U}^n} &= \frac{2f(x)|v|_{eucl}}{\frac{2x_n+2-\langle x+e_n, x+e_n \rangle_{eucl}}{\langle x+e_n, x+e_n \rangle_{eucl}}} \\ |dI_x(v)|_{\mathbb{U}^n} &= \frac{2f(x)|v|_{eucl}}{f(x)(2x_n+2-\langle x+e_n, x+e_n \rangle_{eucl})} \\ |dI_x(v)|_{\mathbb{U}^n} &= \frac{2|v|_{eucl}}{1-(x_1^2+\dots+x_n^2)} \\ |dI_x(v)|_{\mathbb{U}^n} &= \frac{2|v|_{eucl}}{1-|x|_{eucl}^2} = |v|_{\mathbb{D}^n} \end{aligned}$$

Portanto $I|_{\mathbb{D}^n}$ é, de fato, uma isometria. □

O lema 3.5, a seguir, demonstra que o difeomorfismo I da Proposição 3.4 preserva esferas e planos da mesma dimensão. Este lema será usado futuramente no texto.

Lema 3.5. $I(A_k) = A_k$, onde I é a aplicação definida no Teorema 3.4 e $A_k = \{\text{planos euclidianos de dimensão } k\} \cup \{\text{esferas euclidianas de dimensão } k\}$

O próximo lema será usado no lema 3.5, que afirma que a aplicação I preserva a união entre planos e esferas de mesma dimensão. O lema 3.6 é bem técnico, mas necessário para facilitar as contas do lema 3.5, pois dá uma caracterização unificada de planos e esferas de dimensão $n-1$.

Lema 3.6. Seja $B_{(k_1, k_2, k_3, a)} := \{x \in \mathbb{R}^n; k_1\langle x, x \rangle_{eucl} + k_2\langle x, a \rangle_{eucl} + k_3 = 0\}$, onde $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ com $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$, $a \in \mathbb{R}^n$ e a equação $k_1\langle x, x \rangle_{eucl} + k_2\langle x, a \rangle_{eucl} + k_3 = 0$ possui mais de uma solução (Propriedade S). Seja:

$$\mathcal{B} := \{B_{(k_1, k_2, k_3, a)} | k_1^2 + k_2^2 \neq 0, a \in \mathbb{R}^n \text{ e a propriedade } S \text{ é satisfeita}\}$$

$$\mathcal{A} := \{\text{planos euclidianos de dimensão } n-1\} \cup \{\text{esferas euclidianas de dimensão } n-1\}$$

Temos que $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Seja a esfera $\mathbb{S} := \{x \in$

$\mathbb{R}^n; \langle x - c, x - c \rangle_{eucl} = r^2\} \in \mathcal{A}$ onde o centro $c \in \mathbb{R}^n$ e o raio $r \in \mathbb{R}$. Então:

$$\begin{aligned} \langle x - c, x - c \rangle_{eucl} &= r^2 \\ \langle x, x \rangle_{eucl} - 2\langle x, c \rangle_{eucl} + \langle c, c \rangle_{eucl} &= r^2 \\ \underbrace{1}_{k_1} \langle x, x \rangle_{eucl} - \underbrace{2}_{k_2} \langle x, c \rangle_{eucl} + \underbrace{\langle c, c \rangle_{eucl} - r^2}_{k_3} &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbb{S} \in \mathcal{B}$. Seja o Plano $P = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x - p_0, N \rangle_{eucl} = 0\}$ onde $p_0, N \in \mathbb{R}^n$, com o normal ao plano $N \neq 0$. Temos que:

$$\begin{aligned} \langle x - p_0, N \rangle_{eucl} &= 0 \\ \underbrace{1}_{k_2} \langle x, N \rangle_{eucl} + \underbrace{\langle -p_0, N \rangle_{eucl}}_{k_3} &= 0 \end{aligned}$$

Daí, $P \in \mathcal{B}$. Logo $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

Agora temos que mostrar que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Dado $B_{(k_1, k_2, k_3, a)} \in \mathcal{B}$.

i) Suponha que $k_1 = 0$, daí $k_2 \neq 0$. Podemos supor que $k_2 = 1$ sem perda de generalidade (basta dividir a equação por k_2). Para $x \in B_{(0, 1, k_3, a)}$, temos $\langle x, a \rangle_{eucl} + k_3 = 0$. Podemos escolher $p_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\langle p_0, a \rangle_{eucl} = k_3$. Logo:

$$\begin{aligned} \langle x, a \rangle_{eucl} + k_3 &= 0 \\ \langle x, a \rangle_{eucl} + \langle p_0, a \rangle_{eucl} &= 0 \\ \langle x - p_0, a \rangle_{eucl} &= 0 \end{aligned}$$

Temos $a \neq 0$, pois a equação acima possui mais de uma solução. Portanto, $B_{(0, 1, k_3)}$ é o plano passando por p_0 com normal a . $B_{(0, 1, k_3)} \in \mathcal{A}$.

ii) Suponha agora que $k_1 \neq 0$, podemos supor sem perda de generalidade que $k_1 = 1$. Daí, temos que dado $x = (x_1, \dots, x_n) \in B_{(1, k_2, k_3, a)}$ com $a = (a_1, \dots, a_n)$:

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle_{eucl} + k_2 \langle x, a \rangle_{eucl} + k_3 &= 0 \\ \sum_{i=0}^n (x_i^2 + k_2 a_i x_i) + k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, como a propriedade S é satisfeita, basta completar os quadrados pra notar que $B_{(1, k_2, k_3, a)}$ é uma esfera de dimensão $n - 1$. Logo, $B_{(1, k_2, k_3)} \in \mathcal{A}$. E concluímos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. E $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

□

Demonstração do Lema 3.5. Já sabemos que o conjunto A_k é preservado por translações e homotetias euclidianas. Então basta mostrar que A_k também é preservado por inversão euclidiana. Começemos com o caso particular A_{n-1} . Pelo lema 3.6, temos que um plano

ou uma esfera de dimensão $n - 1$ pode ser representado pelo conjunto $B_{(k_1, k_2, k_3, a)} = \{x \in \mathbb{R}^n; k_1 \langle x, x \rangle_{eucl} + k_2 \langle x, a \rangle_{eucl} + k_3 = 0\}$, onde $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ com $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$ e $a \in \mathbb{R}^n$, caso a equação $k_1 \langle x, x \rangle_{eucl} + k_2 \langle x, a \rangle_{eucl} + k_3 = 0$ possua mais de uma solução.

Vamos mostrar que $F_2(B_{(k_1, k_2, k_3, a)}) \in A_{n-1}$, onde a inversão F_2 foi definida no proposição 3.4. Note agora se $k_1 \neq 0$ e $k_2 = 0$ então $k_3 \neq 0$, a saber, caso $k_3 = 0$ a equação ficaria da forma $k_1 \langle x, x \rangle_{eucl} = 0$ que só tem uma solução. Agora, temos que dado $x_0 \in B$:

$$\begin{aligned} k_1 \langle x_0, x_0 \rangle_{eucl} + k_2 \langle x_0, a \rangle_{eucl} + k_3 &= 0 \\ k_1 + k_2 \frac{\langle x_0, a \rangle_{eucl}}{\langle x_0, x_0 \rangle_{eucl}} + \frac{k_3}{\langle x_0, x_0 \rangle_{eucl}} &= 0 \\ k_1 + k_2 \left\langle \frac{x_0}{\langle x_0, x_0 \rangle_{eucl}}, a \right\rangle_{eucl} + k_3 \frac{\langle x_0, x_0 \rangle_{eucl}}{\langle x_0, x_0 \rangle_{eucl}^2} &= 0 \\ k_1 + k_2 \left\langle \frac{x_0}{\langle x_0, x_0 \rangle_{eucl}}, a \right\rangle_{eucl} + k_3 \left\langle \frac{x_0}{\langle x_0, x_0 \rangle_{eucl}}, \frac{x_0}{\langle x_0, x_0 \rangle_{eucl}} \right\rangle_{eucl} &= 0 \\ \underbrace{k_1}_{k'_3} + \underbrace{k_2}_{k'_2} \langle F_2(x_0), a \rangle_{eucl} + \underbrace{k_3}_{k'_1} \langle F_2(x_0), F_2(x_0) \rangle_{eucl} &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, $F_2(x_0) \in B'_{(k'_1, k'_2, k'_3, a)} := \{y \in \mathbb{R}^n; k'_1 \langle y, y \rangle_{eucl} + k'_2 \langle y, a \rangle_{eucl} + k'_3 = 0\}$. E observe que $(k'_1)^2 + (k'_2)^2 \neq 0$, pois caso contrário $k'_1 = k'_2 = 0$. E daí, $k_2 = k'_2 = 0 \implies k'_3 = k_1 \neq 0$ e $k_3 = k'_1 = 0$ e teríamos $B_{(k_1, k_2, k_3, a)} = \{x \in \mathbb{R}^n; k_1 \langle x, x \rangle_{eucl} = 0\}$ que só possui uma solução. Portanto, pelo Lema 3.6, temos que $B' \in \mathcal{B} = \mathcal{A}$. Portanto $I(A_{n-1}) = A_{n-1}$. Agora note que uma esfera ou plano de dimensão k é a interseção entre esferas ou planos de dimensão $n - 1$. Portanto, $M_k \in A_k$ é aplicado em uma interseção de elementos de A_{n-1} que é um elemento de A_l . Como I é um difeomorfismo, $k = l$.

□

3.4 Alguns Exemplos de Isometria do Espaço Hiperbólico

Antes dos exemplos de isometrias, precisamos da definição de transformação ortogonal entre espaços tangentes.

Definição 3.7. Sejam (M_1, g_1) e (M_2, g_2) duas variedades riemannianas de dimensão n . Uma transformação linear $O : T_{x_1}M_1 \rightarrow T_{x_2}M_2$, com $x_1 \in M_1$ e $x_2 \in M_2$, é dita **ortogonal** se, e somente se, para todo $v_1, w_1 \in T_{x_1}M_1$ temos $(g_1)_{x_1}(v_1, w_1) = (g_2)_{x_2}(O(v_1), O(w_1))$. Se $M_1 = M_2 = \mathbb{R}^n$ com a métrica padrão, uma transformação ortogonal $O : T_{x_1}\mathbb{R}^n \rightarrow T_{x_2}\mathbb{R}^n$ é dita ortogonal **euclidiana**.

Exemplo 3.8. Tome uma transformação ortogonal euclidiana $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Defina $H := T|_{\mathbb{D}^n} : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$. H é uma isometria de (\mathbb{D}^n, \bar{g}) , a saber, seja $x \in \mathbb{D}^n$ e $v \in T_x\mathbb{D}^n$, temos:

$$|dT_x(v)|_{\mathbb{D}^n} = |T(v)|_{\mathbb{D}^n} = 2 \frac{|T(v)|_{eucl}}{1 - |T(x)|_{eucl}} = 2 \frac{|v|_{eucl}}{1 - |x|_{eucl}} = |v|_{\mathbb{D}^n}$$

Logo, é isometria. Note que $\tilde{H} := I \circ H \circ I^{-1} : \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$ é uma isometria de \mathbb{U}^n tal que $\tilde{H}(e_n) = e_n$ e $d\tilde{H}_{e_n}(v) = dI_0 \circ dH_0 \circ dI_{e_n}^{-1}(v)$, onde $v \in T_{e_n}\mathbb{U}^n$. Qualquer que seja a transformação ortogonal $O : T_{e_n}\mathbb{U}^n \rightarrow T_{e_n}\mathbb{U}^n$, temos uma isometria da forma $\tilde{H} = I \circ H \circ I^{-1}$ tal que $d\tilde{H}_{e_n} = O$. A saber, da equação 1 da proposição 3.4, temos que $dI_x(v) = 2((v(f)).F(x) + f(x).dF_x(v))$ para $v \in T_x\mathbb{D}^n$ então:

$$dI_x(v) = 2 \left(\frac{-1}{\langle x + e_n, x + e_n \rangle_{eucl}} (2\langle x + e_n, v \rangle_{eucl}) F(x) + f(x).v \right)$$

substituindo $x = 0$ e sabendo que $F(0) = 0 + e_n = e_n$ e $f(0) = \frac{1}{\langle 0 + e_n, 0 + e_n \rangle_{eucl}} = 1$, temos:

$$dI_0(v) = 2 \left(\frac{-1}{\langle 0 + e_n, 0 + e_n \rangle_{eucl}^2} (2\langle 0 + e_n, v \rangle_{eucl}) F(0) + f(0).v \right) = 2(-2\langle v, e_n \rangle_{eucl} e_n + 1.v)$$

Agora podemos escrever v na base canônica $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_0\mathbb{D}^n$, $v = \sum_{i=1}^n v_i.e_i$.

Daí,

$$dI_0(v) = 2 \left(-2\langle v, e_n \rangle_{eucl} e_n + 1. \sum_{i=1}^n v_i.e_i \right) = 2 \left(-2v_n.e_n + 1. \sum_{i=1}^n v_i.e_i \right) = 2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} v_i.e_i - v_n.e_n \right)$$

,ou seja, dI_0 é a transformação linear que multiplica por 2 os $n - 1$ primeiros vetores da base canônica e $dI_0(e_n) = -2e_n$. A transformação linear $dI_0 : T_0\mathbb{D}^n \rightarrow T_{e_n}\mathbb{U}^n$ tem matriz nas bases canônicas de $T_0\mathbb{D}^n$ e de $T_{e_n}\mathbb{U}^n$ da forma:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Daí, a matriz de $d(I^{-1})_{e_n}$, a inversa de dI_0 , nas bases canônicas é dada por:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Portanto, para que tenhamos $d\tilde{H}_{e_n} = O$, basta que tomemos $H = (T^{-1} \circ O \circ T)|_{\mathbb{D}^n}$ onde $T : T_0\mathbb{D}^n \rightarrow T_0\mathbb{D}^n$ é o operador linear que tem como matriz na base canônica a matriz B . Daí, $d\tilde{H}_{e_n} = dI_0 \circ dH_0 \circ d(I^{-1})_{e_n} = dI_0 \circ T^{-1} \circ O \circ T \circ d(I^{-1})_{e_n} = O$

Exemplo 3.9. Defina a aplicação:

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x \mapsto \lambda Ax + b$$

com $\lambda \in (0, +\infty)$, $b \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ e A uma transformação ortogonal que fixa o eixo e_n , ou seja, $A(e_n) = e_n$. Defina $H := F|_{\mathbb{U}^n} : \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$. A aplicação h é uma isometria, a saber, claramente é um difeomorfismo e dado $x \in \mathbb{U}^n$ e $v \in T_x\mathbb{U}^n$, temos:

$$|dH_x(v)|_{\mathbb{U}^n} = \frac{|dH_x(v)|_{eucl}}{\pi_n(H(x))} = \frac{|\lambda A(v)|_{eucl}}{\pi_n(\lambda x)} = \frac{|A(v)|_{eucl}}{\pi_n(x)} = \frac{|v|_{eucl}}{\pi_n(x)} = |v|_{\mathbb{U}^n}$$

Basta conjugar H por I para obter uma isometria em \mathbb{D}^n , ou seja, $\bar{H} := I^{-1} \circ H \circ I : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$.

Definição 3.10. Seja (M, g) uma variedade riemanniana. Dizemos que M é **homogênea** se e só se para todo $x, y \in M$ existe uma isometria $H : M \rightarrow M$ tal que $H(x) = y$. M é dita **isotrópica** se para todo ponto $p \in M$ e para todo $v, w \in T_pM$ existe uma isometria $H : M \rightarrow M$ tal que $H(p) = p$ e $dH_p(v) = w$

Dizer que uma variedade riemanniana é homogênea e isotrópica quer dizer que todos os pontos se comportam da mesma forma em relação a métrica e em qualquer direção que se queira.

Lembrando que estamos identificando \mathbb{U}^n com \mathbb{D}^n e chamando essa variedade riemanniana de \mathbb{H}^n . Vamos demonstrar que \mathbb{H}^n é homogêneo e isotrópico.

Proposição 3.11. Para todo $x, y \in \mathbb{H}^n$ e qualquer transformação ortogonal $A : T_x\mathbb{H}^n \rightarrow T_y\mathbb{H}^n$ existe uma isometria $H : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ tal que $H(x) = y$ e $dH_x = A$. Além disso, H é uma composição dos Exemplos 3.8 e 3.9.

Demonstração. Dados $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ em \mathbb{U}^n , podemos achar duas isometrias $H_1, H_2 : \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$ tais que $H_1(x) = e_n$ e $H_2(y) = e_n$, a saber, podemos tomar $H_1(w) = \frac{w - (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)}{x_n}$ e $H_2(w) = \frac{w - (y_1, \dots, y_{n-1}, 0)}{y_n}$ para $w \in \mathbb{U}^n$. H_1 é isometria pois é uma composição de isometrias como no exemplo 3.9 ($w \mapsto w - (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ e $w \mapsto \frac{w}{x_n}$).

De forma análoga, H_2 é isometria. Vamos denotar as bases ortonormais por $\mathcal{B}_x = \{x_n e_1, \dots, x_n e_n\} \subset T_x \mathbb{U}^n$, $\mathcal{B}_y = \{y_n e_1, \dots, y_n e_n\} \subset T_y \mathbb{U}^n$ e $\mathcal{B}_{e_n} = \{e_1, \dots, e_n\} \subset T_{e_n} \mathbb{U}^n$. Como $d(H_1)_x(x_n e_i) = e_i$ e $d(H_2)_y(y_n e_i) = e_i$ para $i \in \{1, \dots, n\}$, então $d(H_1)_x$ e $d(H_2)_y$ são transformações ortogonais pois aplicam base ortonormal em base ortonormal. Agora vamos procurar uma transformação linear $\tilde{A} : T_{e_n} \mathbb{U}^n \rightarrow T_{e_n} \mathbb{U}^n$ tal que o seguinte diagrama comute:

$$\begin{array}{ccc} T_x \mathbb{U}^n & \xrightarrow{A} & T_y \mathbb{U}^n \\ d(H_1)_x \downarrow & & \uparrow d(H_2^{-1})_{e_n} \\ T_{e_n} \mathbb{U}^n & \xrightarrow{\tilde{A}} & T_{e_n} \mathbb{U}^n \end{array}$$

Para encontrar \tilde{A} , basta termos a matriz de representação de \tilde{A} , $M_{\mathcal{B}_{e_n}}^{\mathcal{B}_{e_n}}$, na base \mathcal{B}_{e_n} igual a representação matricial de A , $M_{\mathcal{B}_x}^{\mathcal{B}_y}$, na base \mathcal{B}_x para $T_x \mathbb{U}^n$ e \mathcal{B}_y para $T_y \mathbb{U}^n$, ou seja, defina \tilde{A} como a transformação tal que $(\tilde{M})_{\mathcal{B}_{e_n}}^{\mathcal{B}_{e_n}} = (M)_{\mathcal{B}_x}^{\mathcal{B}_y}$. A saber, seja $(M_1)_{\mathcal{B}_x}^{\mathcal{B}_{e_n}}$ a matriz de representação de $d(H_1)_x$ na base \mathcal{B}_x para $T_x \mathbb{U}^n$ e \mathcal{B}_{e_n} para $T_{e_n} \mathbb{U}^n$ então $(M_1)_{\mathcal{B}_x}^{\mathcal{B}_{e_n}}$ é a matriz identidade. De modo análogo, a matriz de representação de $d(H_2^{-1})_{e_n}$, $(M_2^{-1})_{\mathcal{B}_{e_n}}^{\mathcal{B}_y}$, é a matriz identidade. Defina $O := d(H_2^{-1})_{e_n} \circ \tilde{A} \circ d(H_1)_x : T_x \mathbb{U}^n \rightarrow T_y \mathbb{U}^n$. Pelo que foi descrito, a matriz de representação de O , na base \mathcal{B}_x para $T_x \mathbb{U}^n$ e \mathcal{B}_y para $T_y \mathbb{U}^n$ é dada por:

$$\underbrace{(M_2^{-1})_{\mathcal{B}_{e_n}}^{\mathcal{B}_y}}_{Id} \underbrace{(\tilde{M})_{\mathcal{B}_{e_n}}^{\mathcal{B}_{e_n}}}_{(M)_{\mathcal{B}_x}^{\mathcal{B}_y}} \underbrace{(M_1)_{\mathcal{B}_x}^{\mathcal{B}_{e_n}}}_{Id} = (M)_{\mathcal{B}_x}^{\mathcal{B}_y}$$

Daí, como desejado $A = O = d(H_2^{-1})_{e_n} \circ \tilde{A} \circ d(H_1)_x$. Pelo exemplo 3.8, existe uma isometria $\tilde{H} : \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$ tal que $\tilde{H}(e_n) = e_n$ e $d\tilde{H}_{e_n} = \tilde{A}$. Daí, defina:

$$\begin{aligned} H : \mathbb{U}^n &\rightarrow \mathbb{U}^n \\ w &\mapsto (H_2^{-1}) \circ \tilde{H} \circ H_1(w) \end{aligned}$$

Como desejado

$$H(x) = (H_2^{-1}) \circ \tilde{H} \circ H_1(x) = (H_2^{-1}) \circ \tilde{H}(e_n) = (H_2^{-1})(e_n) = y$$

$$dH_x = d(H_2^{-1})_{e_n} \circ \underbrace{d(\tilde{H})_{e_n}}_{\tilde{A}} \circ d(H_1)_x = A$$

Portanto, H é a isometria desejada. Além disso, como H_1 e H_2 são composições de isometrias como no exemplo 3.9 e \tilde{H} é uma isometria como no exemplo 3.9, H é uma isometria composição dos exemplos 3.8 e 3.9.

□

Definição 3.12. $\mathbf{Isom}(\mathbb{H}^n)$ é o grupo de isometrias de \mathbb{H}^n

Corolário 3.13. As isometrias dos Exemplos 3.8 e 3.9 geram $\mathbf{Isom}(\mathbb{H}^n)$

Demonstração. Dada uma isometria $G \in \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^n)$, fixe um ponto $x \in \mathbb{H}^n$, pela proposição 3.11, existe $H \in \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^n)$ tal que $H(x) = G(x)$ e $dH_x = dG_x$, pela proposição 2.1, $H = G$. Portanto, G é composição dos Exemplos 3.8 e 3.9. □

Corolário 3.14. Qualquer isometria hiperbólica $H : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ (respectivamente, $\tilde{H} : \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$):

- Pode ser estendida a um homeomorfismo $\mathbb{S}_\infty^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}_\infty^{n-1}$ (respectivamente, $\partial\mathbb{U}^n \cup \{\infty\} \rightarrow \partial\mathbb{U}^n \cup \{\infty\}$)
- Preserva $\{\text{Esferas de dimensão } k\} \cup \{\text{Planos de dimensão } k\}$
- preserva ângulo entre \mathbb{S}_∞^{n-1} e arcos intersectando \mathbb{S}_∞^{n-1} (respectivamente $\partial\mathbb{U}^n$)

Demonstração. Basta notar que toda isometria em $\mathbf{Isom}(\mathbb{H}^n)$ é composição dos exemplos 3.8 e 3.9 e/ou uma conjugação por I . Os exemplos e I tem essas três propriedades. Logo, toda isometria também tem as três propriedades. □

3.5 Geodésicas de \mathbb{H}^n

Definição 3.15. Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{D}^n$ uma curva diferenciável. O **comprimento hiperbólico** de α é definido como:

$$\mathbf{L}_{\mathbb{D}^n}(\alpha) := \int_a^b |\alpha'(t)|_{\mathbb{D}^n} dt$$

De forma análoga, seja $\tilde{\alpha} : [a, b] \rightarrow \mathbb{U}^n$ uma curva diferenciável. O **comprimento hiperbólico** de $\tilde{\alpha}$ é definido como:

$$\mathbf{L}_{\mathbb{U}^n}(\tilde{\alpha}) := \int_a^b |\tilde{\alpha}'(t)|_{\mathbb{U}^n} dt$$

Lema 3.16. O segmento de reta euclidiano ligando 0 a x em \mathbb{D}^n é a menor curva ligando 0 a x na métrica hiperbólica. Além disso, a parametrização pelo comprimento de arco na métrica hiperbólica desse segmento de reta é a única geodésica ligando 0 a x .

Demonstração. Defina $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{U}^n$ por $\gamma(t) = (0, \dots, 0, E^t)$, onde E é a constante de Euler que denotamos assim para não confundir com o vetor e_i da base canônica. Tome quaisquer pontos no eixo e_n em \mathbb{U}^n , digamos $(0, \dots, 0, a)$ e $(0, \dots, 0, b)$ com $a < b$. A restrição de γ que liga $(0, \dots, 0, a)$ a $(0, \dots, 0, b)$, ou seja, $\gamma|_{[\ln a, \ln b]} : [\ln a, \ln b] \rightarrow \mathbb{U}^n$, que denotaremos por γ_{ab} , será a menor curva ligando $(0, \dots, 0, a)$ e $(0, \dots, 0, b)$. Vamos provar que γ_{ab} é uma

geodésica. Para isso, utilizaremos a proposição 2.2. Primeiro, γ é parametrizada pelo comprimento de arco, pois

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (0, \dots, 0, E^t) \\ |\gamma'(t)|_{\mathbb{U}^n} &= \sqrt{\frac{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_{eucl}}{\gamma(t)^2}} = \sqrt{\frac{E^{2t}}{(E^t)^2}} = 1\end{aligned}$$

Seja $\alpha : [\ln a, \ln b] \rightarrow \mathbb{U}^n$ uma curva diferenciável por partes arbitrária com $\alpha(\ln a) = (0, \dots, a)$ e $\alpha(\ln b) = (0, \dots, b)$. Demonstraremos que $\mathbf{L}_{\mathbb{U}^n}(\gamma_{ab}) \leq \mathbf{L}_{\mathbb{U}^n}(\alpha)$. Se denotamos $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$ e $\gamma_{ab}(t) = (\gamma_{ab_1}(t), \dots, \gamma_{ab_n}(t))$ teremos

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{\mathbb{U}^n}(\alpha) &= \int_{\ln a}^{\ln b} |\alpha'(t)|_{\mathbb{U}^n} dt = \int_{\ln a}^{\ln b} \frac{\sqrt{\alpha_1'(t)^2 + \dots + \alpha_n'(t)^2}}{\alpha_n(t)} dt = \int_{\ln a}^{\ln b} \frac{|\alpha_n'(t)|}{\alpha_n(t)} dt \geq \int_{\ln a}^{\ln b} \frac{\alpha_n'(t)}{\alpha_n(t)} dt = \\ &= \ln b - \ln a = \int_{\ln a}^{\ln b} \frac{\gamma_{ab_n}'(t)}{\gamma_{ab_n}(t)} dt = \mathbf{L}_{\mathbb{U}^n}(\gamma_{ab}).\end{aligned}$$

Então pela proposição 2.2, γ_{ab} é uma geodésica de \mathbb{U}^n .

Agora, como $I^{-1}|_{\mathbb{U}^n} = I|_{\mathbb{U}^n} : \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$, definida na proposição 3.4, é uma isometria de $(\mathbb{U}^n, \tilde{g})$ em (\mathbb{D}^n, \bar{g}) e γ é uma geodésica de \mathbb{U}^n , $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{D}^n$ definida por $\tilde{\gamma}(t) = I(\gamma(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$ é uma geodésica de \mathbb{D}^n .

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}(t) = I(\gamma(t)) &= 2 \frac{(E^t e_n + e_n)}{\langle (E^t e_n + e_n), (E^t e_n + e_n) \rangle_{eucl}} - e_n = \\ &= \frac{2}{E^t + 1} e_n - e_n = \left(\frac{2}{E^t + 1} - 1 \right) e_n\end{aligned}$$

Como $\gamma(0) = e_n$, $\tilde{\gamma}(0) = I(e_n) = 0 \in \mathbb{D}^n$. Note que $\tilde{\gamma}$ é a parametrização de um segmento de reta em \mathbb{D}^n passando por 0, pois $\tilde{\gamma}(t) = \left(\frac{2}{E^t + 1} - 1 \right) e_n$. Se aplicarmos uma isometria H como no exemplo 3.8 em \mathbb{D}^n , $H(\tilde{\gamma})$ ainda será uma geodésica de \mathbb{D}^n . Como H é a restrição de uma operador ortogonal euclidiano, $H(\tilde{\gamma})$ é um segmento de reta passando por 0. Portanto, todas as geodésicas passando por 0 são segmentos de retas. Daí, a menor curva ligando 0 a x em \mathbb{D}^n é o segmento de reta que liga os dois pontos, pois pela proposição 2.2 se houvesse outra curva que minimizasse o comprimento hiperbólico, deveria ser uma geodésica passando por 0, ou seja, um segmento de reta. Como existe apenas um segmento de reta ligando 0 a x , existe apenas uma geodésica ligando esses pontos.

□

Proposição 3.17. *Entre dois pontos $x, y \in \mathbb{D}^n$ existe uma única geodésica ligando x e y .*

Demonstração. Pela Proposição 3.11, existe $H \in \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^n)$ tal que $H(x) = 0$. Daí, como H induz uma correspondência 1-1 entre as geodésicas passando por 0 e as passando por x , existe uma única geodésica ligando 0 a $H(y)$ pelo lema 3.16. Portanto existe uma única

geodésica ligando x a y . □

Proposição 3.18. *As geodésicas em \mathbb{D}^n (respectivamente em \mathbb{U}^n) são precisamente as retas e os arcos de círculos que encontram \mathbb{S}_∞^{n-1} (respectivamente $\partial\mathbb{U}^n$) em ângulos retos.*

Demonstração. Tome $x \in \mathbb{D}^n$. Pela Proposição 3.11, existe $H \in \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^n)$ tal que $H(x) = 0$.

$$\alpha \text{ é geodésica} \iff H(\alpha) \text{ é geodésica} \iff H(\alpha) \text{ é uma reta passando por } 0$$

$$\stackrel{\text{Corolário 3.14}}{\iff} \alpha \text{ é uma reta ou um arco que encontra } \mathbb{S}_\infty^{n-1} \text{ em um ângulo reto}$$

Como I preserva retas, círculos e ângulos (pelo Lema 3.5) e H também preserva (pelo Corolário 3.14), as geodésicas de \mathbb{U}^n são retas e arcos de círculos perpendiculares a $\partial\mathbb{U}^n$. □

O corolário a seguir afirma que a geometria em \mathbb{H}^2 contraria o quinto postulado de Euclides.

Corolário 3.19. *Se $x \in \mathbb{H}^2$ e α uma geodésica tal que x não está em α . Então, existe infinitas geodésicas paralelas a α passando por x .*

Demonstração. De novo, pela proposição 3.11, podemos tomar uma isometria $H \in \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^n)$ tal que $H(x) = 0 \in \mathbb{D}^2$. Como x não pertence a α , 0 não pertence a $H(\alpha)$. Pela proposição 3.18, $H(\alpha)$ tem de ser um arco de círculo perpendicular a \mathbb{S}_∞^1 , pois as retas perpendiculares a \mathbb{S}_∞^1 passam por 0 . Basta tomarmos agora infinitos segmentos de retas que passam por 0 e que não intersectam $H(\alpha)$. A imagem inversa desses segmentos de reta por H serão nossas infinitas paralelas a α passando por x . □

Corolário 3.20. *Entre dois pontos distintos $x, y \in \mathbb{S}_\infty^{n-1}$ existe uma única geodésica tal que a extensão da imagem da geodésica a \mathbb{S}_∞^{n-1} liga x a y .*

Demonstração. Tome uma isometria $H : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ como no exemplo 3.8 tal que a extensão de H aplique x em $-e_n$, isso é possível pois H é a restrição de um operador ortogonal euclidiano. Como $I(-e_n) = \infty$, podemos assumir a menos da isometria que $x = -e_n$ e $I(x) = \infty$. Pela proposição 3.18, a única geodésica que liga $I(x) = \infty$ a $I(y)$ é a reta perpendicular a $\partial\mathbb{U}^n$ em $I(y)$. Portanto, como I é isometria, existe uma única geodésica ligando x a y . □

Corolário 3.21. *Todas as geodésicas de \mathbb{H}^n são infinitas em ambas direções*

Demonstração. A menos de isometria, podemos assumir que a geodésica α é a geodésica passando por e_n tal que a extensão da imagem liga 0 a ∞ . A saber, seja α a geodésica e $x \in \mathbb{U}^n$ um ponto na imagem de α cuja velocidade de α em x seja o vetor $v \in T_x\mathbb{U}^n$, podemos tomar uma isometria $H_1 \in \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^n)$ tal que $H_1(x) = e_n$ e $d(H_1)_x(v) = e_n$ pela

proposição 3.11. Podemos parametrizar a geodésica por $\alpha : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{U}^n$ com $\alpha(t) = te_n$. Daí, seu comprimento de arco hiperbólico de e_n a ∞ é:

$$\mathbf{L}_{\mathbb{U}^n}(\alpha) = \int_1^\infty |\alpha'(t)|_{\mathbb{U}^n} dt = \int_1^\infty \frac{1}{t} dt = \ln(t)|_1^\infty = \infty$$

O comprimento de arco hiperbólico de $\alpha|_{(0,1]}$ também é infinito pois podemos aplicar uma isometria H tal que $H(\alpha|_{(0,1]}) = \alpha|_{[1,\infty)}$ \square

3.6 Classificação das Isometrias de \mathbb{H}^n

Nosso objetivo nessa subseção é classificar as isometrias de \mathbb{H}^n . Vamos classificá-las em 3 tipos.

Definição 3.22. Seja $H \in \mathbb{H}^n$. Então H é:

1. elíptica, caso fixe um ponto em \mathbb{H}^n
2. parabólica, caso fixe nenhum ponto em \mathbb{H}^n e a extensão de H a \mathbb{S}_∞^{n-1} fixe exatamente um ponto em \mathbb{S}_∞^{n-1}
3. loxodrômica, caso fixe nenhum ponto em \mathbb{H}^n e a extensão a \mathbb{S}_∞^{n-1} fixe exatamente 2 pontos em \mathbb{S}_∞^{n-1}

Observação. Lembre-se que o Exemplo 3.8 é elíptico. Se H e K são conjugadas em $\mathbf{Isom}(\mathbb{H}^n)$, ou seja, existe $G \in \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^n)$ tal que $K = G^{-1} \circ H \circ G$. Então se H é elíptica (respectivamente parabólica ou loxodrômica) assim o é K . A saber, digamos que H é elíptica e $x \in \mathbb{H}^n$ é o ponto fixado, ou seja, $H(x) = x$. Se $G(y) = x$, então $K(y) = G^{-1} \circ H \circ G(y) = G^{-1} \circ H(x) = G^{-1}(x) = y$. Daí, y é ponto fixo de K . Agora se a extensão de H fixa um ou dois pontos fixos, raciocinando analogamente, temos que K tem um ou dois pontos fixos, respectivamente.

Proposição 3.23. *Qualquer isometria $H \in \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^n)$ é ou elíptica, ou parabólica ou loxodrômica.*

Antes de provar a Proposição 3.23, precisaremos do seguinte lema.

Lema 3.24. Qualquer isometria $H : \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$, que sua extensão a $\partial\mathbb{U}^n \cup \{\infty\}$ fixa ∞ , é da forma $H(x) = \lambda Ax + b$, onde $\lambda \in (0, \infty)$, $b \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ e A é uma transformação ortogonal que fixa o eixo e_n .

Demonstração. A extensão de H aplica 0 para algum $b \in \partial\mathbb{U}^n$. Defina $G : \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$, com $G(x) = x + b$. Daí, a extensão de $G^{-1} \circ H$ fixa ∞ e 0. Portanto, $G^{-1} \circ H$ fixa a geodésica que liga 0 e ∞ , o eixo e_n . Portanto, $G^{-1} \circ H(e_n) = \lambda e_n$ para algum $\lambda \in (0, \infty)$. Defina $F : \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$, onde $F(x) = \lambda x$. Temos que $F^{-1} \circ G^{-1} \circ H(e_n) = e_n$. Denote $A := d(F^{-1} \circ G^{-1} \circ H)_{e_n}$. Portanto, A é ortogonal (pois F^{-1}, G^{-1}, H são isometrias). Note que $\tilde{H}(x) := Ax$ é uma isometria como no Exemplo 3.9. Pela Proposição 2.1, temos $\tilde{H} = F^{-1} \circ G^{-1} \circ H \implies H(x) = \lambda Ax + b$. \square

Corolário 3.25. *Uma isometria $H \in \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^n)$ não-elíptica, cuja a extensão fixa pelo*

menos 2 pontos em \mathbb{S}_∞^{n-1} , é conjugada a uma isometria como no Exemplo 3.9, com $\lambda \neq 1$. Em particular, H é loxodrômica.

Demonstração. Podemos assumir a menos de conjugação que a extensão de H fixa ∞ e 0 em $\partial\mathbb{U}^n \cup \{\infty\}$. A saber, digamos que a extensão de $H : \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$ fixa $x, y \in \partial\mathbb{U}^n \cup \{\infty\}$, então a extensão de $\tilde{H} := I \circ H \circ I^{-1} : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ fixa $I(x)$ e $I(y)$. Tome uma isometria $H_1 : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$, como no exemplo 3.8, tal que a extensão de H_1 aplique $-e_n \in \mathbb{S}_\infty^{n-1}$ em $I(x)$. Daí, $H_1^{-1} \circ \tilde{H} \circ H_1 : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ fixa $-e_n$. Como $I(-e_n) = \infty$, a extensão de $I^{-1} \circ H_1^{-1} \circ \tilde{H} \circ H_1 \circ I : \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$, a $\partial\mathbb{U}^n \cup \{\infty\}$, fixa ∞ . Se definirmos a isometria $H_2 := I^{-1} \circ H_1 \circ I : \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$, então

$$I^{-1} \circ H_1^{-1} \circ \tilde{H} \circ H_1 \circ I = I^{-1} \circ H_1^{-1} \circ I \circ H \circ I^{-1} \circ H_1 \circ I = H_2 \circ H \circ H_2^{-1}$$

, ou seja, a menos de conjugação por H_2 , a extensão de H fixa $\infty \in \partial\mathbb{U}^n \cup \{\infty\}$.

A menos de conjugação, podemos assumir também que o outro ponto fixo é 0 (Digamos que o outro ponto fixo $b_1 \in \partial\mathbb{U}^n$. Daí, conjugamos por $H_3(x) = x + b_1$). Pelo que foi visto, a menos de duas conjugações, podemos assumir que a extensão de H fixa ∞ e 0 em $\partial\mathbb{U}^n \cup \{\infty\}$. Daí, pelo lema 3.24, Então $H : \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$ é da forma

$$H(x) = \lambda Ax + \underbrace{b}_0 \quad (b = 0, \text{ pois } 0 \text{ é ponto fixo}).$$

Se $\lambda = 1$, $H(e_n) = e_n$, mas H é não-elíptica então $\lambda \neq 1$. Como $\lambda \neq 1$, a extensão de H não fixa nenhum ponto em $\partial\mathbb{U}^n \cup \{\infty\}$ além de 0 e ∞ (basta notar que a extensão de H é dada pela mesma expressão $x \mapsto \lambda Ax$ e com $\lambda \neq 1$ nenhum ponto de $\partial\mathbb{U}^n$ além de 0 é fixado). Portanto, H é loxodrômica. \square

Ainda precisaremos usar o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Demonstração da Proposição 3.23. Se $H \in \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^n)$ é não-elíptica, e seja \tilde{H} sua extensão para \mathbb{S}_∞^{n-1} . Pelo Corolário 3.25, \tilde{H} fixa no máximo dois pontos em \mathbb{S}_∞^{n-1} . Agora basta mostrar que \tilde{H} fixa ao menos um ponto em \mathbb{S}_∞^{n-1} . Isso é uma consequência fácil do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, pois podemos aplicá-lo a $\mathbb{D}^n \cup \mathbb{S}_\infty^{n-1}$ como H não é elíptica, o ponto fixo de \tilde{H} não está em \mathbb{D}^n . Portanto, se H não é elíptica, é loxodrômica ou parabólica. \square

Proposição 3.26. *Qualquer isometria elíptica $H \in \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^n)$ é conjugada do Exemplo 3.8*

Demonstração. Seja x o ponto fixo de H em \mathbb{D}^n . Como \mathbb{D}^n é homegêneo, podemos tomar $H_1 \in \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^n)$ tal que $H_1(x) = 0$. Então $\tilde{H} := H_1 \circ H \circ H_1^{-1}(0) = 0$. Seja $A := d\tilde{H}_0$, A é ortogonal. Defina a isometria, como no Exemplo 3.8, $H_2 = A|_{\mathbb{D}^n}$. Pela Proposição 2.1, como $\tilde{H}(0) = H_2(0)$ e $d\tilde{H}_0 = A = d(H_2)_0$, então $\tilde{H} = H_2$. \square

Proposição 3.27. *Qualquer isometria parabólica $H \in \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^n)$ é conjugada de uma isometria como no Exemplo 3.9 com $\lambda = 1$ e $b \neq 0$*

Demonstração. Podemos supor, a menos de uma conjugação, que a extensão de H fixa $\infty \in \partial\mathbb{U}^n \cup \{\infty\}$. A saber, digamos que a extensão de H fixa $x \in \partial\mathbb{U}^n \cup \{\infty\}$, então a extensão de $\tilde{H} := I^{-1} \circ H \circ I : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ fixa $I(x) \in \mathbb{S}_\infty^{n-1}$. Podemos tomar uma isometria $H_1 : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ como no exemplo 3.8 tal que a extensão de H_1 aplica $I(x)$ em $-e_n$ em \mathbb{S}_∞^{n-1} . Então $H_1 \circ \tilde{H} \circ H_1^{-1} : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ fixa $-e_n$. Então a extensão de $I \circ H_1 \circ \tilde{H} \circ H_1^{-1} \circ I^{-1} : \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$ fixa $\infty \in \partial\mathbb{U}^n \cup \{\infty\}$. Defina $H_2 := I \circ H_1 \circ I^{-1} : \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$, então $I \circ H_1 \circ \tilde{H} \circ H_1^{-1} \circ I^{-1} = I \circ H_1 \circ I^{-1} \circ H \circ I \circ H_1^{-1} \circ I^{-1} = H_2 \circ H \circ H_2^{-1}$, ou seja, a menos de conjugação por H_2 , H fixa ∞ . Pelo Lema 3.24, $H : \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$ é da forma $H(x) = \lambda Ax + b$. Mostraremos que $\lambda = 1$. Como H não tem ponto fixo em $\mathbb{U}^n \cup \partial\mathbb{U}^n$, a extensão de H a \mathbb{R}^n , dada por $x \mapsto \lambda Ax + b$, pode ter ou não um ponto fixo em $\mathbb{R}^n - (\mathbb{U}^n \cup \partial\mathbb{U}^n)$. Digamos primeiro que $y = \lambda Ay + b$ com $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \in \mathbb{R}^n - (\mathbb{U}^n \cup \partial\mathbb{U}^n)$ é um ponto fixo da extensão de H , então

$$\begin{aligned} y &= \lambda Ay + b \\ \sum_{i=1}^n y_i e_i &= \lambda A \left(\sum_{i=1}^n y_i e_i \right) + b \\ \sum_{i=1}^{n-1} y_i e_i + y_n e_n &= \lambda A \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i e_i \right) + \lambda \underbrace{A(y_n e_n)}_{y_n e_n} + b \\ y_n e_n - \lambda y_n e_n &= - \sum_{i=1}^{n-1} y_i e_i + \lambda A \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i e_i \right) + b \\ y_n (1 - \lambda) e_n &= - \sum_{i=1}^{n-1} y_i e_i + \lambda A \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i e_i \right) + b \in \partial\mathbb{U}^n. \end{aligned}$$

Como o lado direito da equação pertence a $\partial\mathbb{U}^n$ e $y_n(1 - \lambda)e_n$ pertence ao eixo e_n , então $y_n(1 - \lambda) = 0$. Portanto, $\lambda = 1$, pois $y_n < 0$.

Se a extensão de H não tem solução em $\mathbb{R}^n - (\mathbb{U}^n \cup \partial\mathbb{U}^n)$ então $x = \lambda Ax + b$ não tem solução em \mathbb{R}^n . $x - \lambda Ax = b$ não tem solução $\implies \det(I - \lambda A) = 0 \implies \lambda^{-n} \det(I - \lambda A) = 0 \implies \det(\lambda^{-1}I - A) = 0$. Portanto λ^{-1} é autovalor de A . Como A é ortogonal, $|\lambda^{-1}| = 1$. Então $\lambda = 1$, pois no Exemplo 3.9 exigimos que $\lambda \in (0, \infty)$. \square

Toda isometria em $\mathbf{Isom}(\mathbb{H}^n)$ induz um homeomorfismo \mathbb{S}_∞^{n-1} (veja Corolário 3.14). Portanto, podemos definir um homomorfismo $\phi : \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^n) \rightarrow \mathbf{Homeo}(\mathbb{S}_\infty^{n-1})$, onde $\mathbf{Homeo}(\mathbb{S}_\infty^{n-1})$ é o grupo de homeomorfismos de \mathbb{S}_∞^{n-1} em \mathbb{S}_∞^{n-1} , $\phi(H)$ é a restrição da extensão de H a \mathbb{S}_∞^{n-1} . De fato, ϕ é um homomorfismo, pois $\phi(H_1 \circ H_2) = \phi(H_1) \circ \phi(H_2)$

Proposição 3.28. *ϕ é injetivo.*

Demonstração. Suponha que a extensão de uma isometria $H \in \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^n)$ fixa \mathbb{S}_∞^{n-1} , ou

seja, $\phi(H) = Id|_{\mathbb{S}_\infty^{n-1}}$. Provaremos que $H = Id|_{\mathbb{D}^n}$. Se H é elíptica, pela Proposição 3.26, H é conjugada de uma isometria \tilde{H} como no Exemplo 3.8 ($H = H_1 \circ \tilde{H} \circ (H_1)^{-1}$ para algum $H_1 \in \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^n)$). A única transformação ortogonal de \mathbb{R}^n que fixa \mathbb{S}_∞^{n-1} é $Id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Portanto, $\tilde{H} = Id|_{\mathbb{D}^n}$, pois uma conjugada de uma isometria, cuja extensão fixa \mathbb{S}_∞^{n-1} , também fixa \mathbb{S}_∞^{n-1} . Portanto, $H = H_1 \circ \tilde{H} \circ (H_1)^{-1} = H_1 \circ Id|_{\mathbb{D}^n} \circ (H_1)^{-1} = Id|_{\mathbb{D}^n}$. Agora suponha que H é não-elíptica. Como a extensão H fixa pelo menos 2 pontos em \mathbb{S}_∞^{n-1} , pelo Corolário 3.25, a extensão de H é conjugada a uma isometria que fixa exatamente dois pontos, então a extensão de H fixa exatamente dois pontos em \mathbb{S}_∞^{n-1} . Isso é um absurdo, pois $\phi(H) = Id|_{\mathbb{S}_\infty^{n-1}}$. Logo, $\phi(H) = Id|_{\mathbb{S}_\infty^{n-1}} \iff H = Id|_{\mathbb{D}^n}$. \square

4 (X, G) -VARIEDADES

Nesta seção, introduziremos conceitos de conjuntos convexos, poliedros convexos, (X, G) -variedades e construiremos (X, G) -variedades colando poliedros e polígonos.

4.1 Poliedros convexos de X

Seja $X = \mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$ ou \mathbb{S}^n . Uma par de pontos $x, y \in X$ é dito próprio se e só se x e y são distintos e x e y não são pontos antípodas de $X = \mathbb{S}^n$. Se x e y são um par próprio de X , então existe apenas uma geodésica em X unindo x a y . Iremos denotar essa geodésica por $[x, y]$.

Definição 4.1. Um subconjunto C de X é convexo se e só se para cada par próprio de $x, y \in C$, a geodésica $[x, y]$ está contida em C .

Seja C um subconjunto convexo não vazio de X :

1. A dimensão de C , $\dim C$ é o menor natural m tal que C está contido em um m -plano de X .
2. Se $\dim C = m$, então claramente C está contido em um único m -plano, que é denotado por $\langle C \rangle$.
3. o interior de C é o interior topológico de C em $\langle C \rangle$ e é denotado por $\overset{\circ}{C}$.
4. a fronteira de C é fronteira topológica de C em $\langle C \rangle$ e é denotado por ∂C .
5. o fecho de C é o fecho topológico de C em X e é denotado por \bar{C} . Note que \bar{C} é o fecho topológico em $\langle C \rangle$, já que $\langle C \rangle$ é fechado em X . Portanto \bar{C} é a união disjunta de $\overset{\circ}{C}$ e ∂C .

Se C é vazio, a dimensão de C é indefinida e $\langle C \rangle$, $\overset{\circ}{C}$, ∂C e \bar{C} são vazios por definição.

Definição 4.2. Um lado de um conjunto conexo é um subconjunto convexo, maximal e não vazio de ∂C .

Definição 4.3. Um poliedro convexo P de X é um subconjunto não vazio, fechado, conexo de X tal que a coleção de lados \mathcal{S} é localmente finita em X

Seja P um poliedro convexo de dimensão m . Definimos uma k -face de P para todo $i = 0, 1, \dots, m$ indutivamente por: A única m -face de P é o próprio P . Suponha que todas as $(k+1)$ -faces de P estão definidas e cada $(k+1)$ -face de P é um poliedro convexo de X . Então a k -face de P é um lado de uma $(k+1)$ -face de P . Uma face própria de P é uma k -face com $k < m$.

Quando $X = \mathbb{S}^3, \mathbb{R}^3$ ou \mathbb{H}^3 , chamaremos as 2-face de um poliedro convexo apenas de face, as 1-faces de arestas e 0-faces de vértices.

Quando $X = \mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2$ ou \mathbb{H}^2 , chamaremos os poliedros convexos de dimensão 2 de *polígonos*, as 1-faces de desse polígono de aresta e as 0-faces de vértices.

4.2 Definição (X, G) -variedades

Seja $X = \mathbb{S}^n, \mathbb{H}^n$ ou \mathbb{R}^n e G um grupo de isometrias de X e M uma variedade de dimensão n .

Definição 4.4. Um (X, G) -atlas para M é uma família de aplicações:

$$\Phi = \{\phi_i : U_i \rightarrow X\}$$

chamadas cartas, satisfazendo as seguintes condições:

1. O conjunto U_i , chamado de *vizinhança coordenada*, é um subconjunto aberto, conexo de M .
2. A carta ϕ_i aplica a vizinhança coordenada U_i homeomorficamente sobre um subconjunto aberto de X , para todo i .
3. As vizinhanças coordenadas $\{U_i\}$ cobrem M .
4. Se U_i e U_j se intersectam, temos que a aplicação:

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j),$$

chamada mudança de coordenadas, concorda em uma vizinhança de todo ponto com um elemento de G .

A próxima proposição garante a unicidade do atlas maximal contendo Φ .

Proposição 4.5. *Seja Φ um (X, G) -atlas para M . Então existe um único (X, G) -atlas maximal que contém Φ*

Demonstração. Seja $\Phi = \{\phi_i : U_i \rightarrow X\}$ e $\bar{\Phi}$ a família de todas aplicações $\phi : U \rightarrow X$ tal que:

1. O conjunto U é um subconjunto aberto conexo de M ;
2. ϕ aplica U homeomorficamente sobre um subconjunto aberto de X ;
3. a aplicação:

$$\phi \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U) \rightarrow \phi(U_i \cap U)$$

concorda em uma vizinhança de todo ponto de seu domínio com um elemento de G , para todo i .

Claramente $\bar{\Phi}$ contém Φ . Suponha que $\phi : U \rightarrow X$ e $\psi : V \rightarrow X$ estão em $\bar{\Phi}$. Então para todo i , temos:

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V \cap U_i) \rightarrow \psi(U \cap V \cap U_i)$$

é a composição $(\psi \circ \phi_i^{-1}) \circ (\phi_i \circ \phi)$ e portanto concorda em uma vizinhança de todo ponto no domínio com um elemento de G . Como $\{U_i\}$ cobre M , temos que $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ concorda em uma vizinhança de todo ponto de seu domínio com um elemento de G . Portanto, $\bar{\Phi}$ é um (X, G) -atlas para M . Claro que $\bar{\Phi}$ contém todos os (X, G) -atlas

que contém Φ . Portanto $\bar{\Phi}$ é o único (X, G) -atlas maximal contendo Φ . □

Definição 4.6. Uma (X, G) -estrutura para uma variedade M de dimensão n é um (X, G) -atlas maximal.

Definição 4.7. Uma (X, G) -variedade é uma variedade M de dimensão n munida com uma (X, G) -estrutura.

Exemplo 4.8. Uma $(\mathbb{S}^n, Isom(\mathbb{S}^n))$ -estrutura de uma variedade de dimensão n é chamada estrutura esférica, e uma $(\mathbb{S}^n, Isom(\mathbb{S}^n))$ -variedade é chamada de variedade esférica de dimensão n . Por exemplo, seja $U \subset \mathbb{S}^n$ um aberto de \mathbb{S}^n , então tome o atlas maximal de $\{Id|_U : U \rightarrow U\}$. Com esse atlas maximal, U é uma variedade esférica.

Exemplo 4.9. Uma $(\mathbb{R}^n, Isom(\mathbb{R}^n))$ -estrutura de uma variedade de dimensão n é uma estrutura euclidiana, e uma $(\mathbb{R}^n, Isom(\mathbb{R}^n))$ -variedade é chamada de variedade euclidiana de dimensão n .

Exemplo 4.10. Uma $(\mathbb{H}^n, Isom(\mathbb{H}^n))$ -estrutura de uma variedade de dimensão n é uma estrutura hiperbólica, e uma $(\mathbb{H}^n, Isom(\mathbb{H}^n))$ -variedade é uma variedade hiperbólica de dimensão n .

4.3 Colando superfícies

Nessa seção vamos dar um critério para que uma colagem de polígonos seja uma superfície euclidiana, esférica ou hiperbólica.

Nessa seção usaremos a seguinte notação:

X : $\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2$ ou \mathbb{H}^2

\mathcal{P} : é um conjunto de polígonos convexos disjuntos em X

G : $Isom(\mathbb{S}^2), Isom(\mathbb{R}^2)$ ou $Isom(\mathbb{H}^2)$

Definição 4.11. Um G -emparelhamento (G -side-pairing) para \mathcal{P} é um subconjunto de G :

$$\Phi = \{g_S; S \in \mathcal{S}\}$$

indexado pela coleção \mathcal{S} de todas as faces de poliedro em \mathcal{P} tal que para todo $S \in \mathcal{S}$:

1. Há uma face $S' \in \mathcal{S}$ tal que $g_S(S') = S$;
2. As isometrias de g_S e $g_{S'}$ satisfazem $g_{S'} = g_S^{-1}$;
3. Se S é uma face de $P \in \mathcal{P}$ e S' é uma face de $P' \in \mathcal{P}$ então:

$$P \cap g_S(P') = S$$

Segue de (1) que S' é unicamente determinado por S , já que g_S é uma isometria. O lado S' é chamado de **emparelhado** a S . Por (2), se S'' é a face emparelhada a S' por

Φ ,

$$\begin{aligned} g_{S'}(S'') &= S' \\ g_S^{-1}(S'') &= S' \\ S'' &= g_S(S') = S \\ S'' &= S \end{aligned}$$

Portanto, a aplicação $S \mapsto S'$ é a própria inversa no conjunto \mathcal{S} , pois $S'' = S$. Por (3), $g_S \neq Id$ para todo $S \in \mathcal{S}$, onde $Id : X \rightarrow X$ é a identidade de X , pois se existisse S tal que $g_S = Id$, então $S = S'$ e $P = P'$ e $P \cap g_S(P') = P$ contrariando (3).

Seja $\Phi = \{g_S; S \in \mathcal{S}\}$ um emparelhamento para \mathcal{P} e

$$\Pi = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P$$

Dois pontos x, x' estão **emparelhados** por Φ , e escrevemos $x \simeq x'$ se e só se há um lado $S \in \mathcal{S}$ tal que $x \in S$, $x' \in S'$, $g_S(x') = x$. Se $g_S(x') = x$ então $g_{S'}(x) = x'$. Daí, $x \simeq x'$ então $x' \simeq x$.

Dois pontos $x, y \in \Pi$ estão **relacionados** por Φ , e escrevemos $x \sim y$, se e somente se, ou $x = y$ ou há uma sequência finita de pontos $x_1, \dots, x_m \in \Pi$ tais que:

$$x = x_1 \simeq x_2 \simeq \dots \simeq x_m = y$$

Ser relacionado por Φ é claramente uma relação de equivalência em Π . As classes de equivalências de Π são chamadas de *ciclos de Φ* . Vamos denotar por $[x]$ o ciclo de Φ contendo x .

Seja $[x] = \{x_1, \dots, x_m\}$ um ciclo finito de Φ . Seja P_i o polígono em \mathcal{P} tal que $x_i \in P_i$ e seja $\theta(P_i, x_i)$ o ângulo subtendido por P_i no ponto x_i .

Definição 4.12. O **soma de ângulo** em $[x]$ é definido como o número real:

$$\theta[x] := \theta(P_1, x_1) + \dots + \theta(P_m, x_m)$$

Definição 4.13. Um G -emparelhamento Φ é **próprio** se, e somente se, todo ciclo de Φ é finito e tem soma de ângulo igual a 2π .

Proposição 4.14. Se $\Phi = \{g_S; S \in \mathcal{S}\}$ é um G -emparelhamento próprio para \mathcal{P} , então para todo lado S de \mathcal{S} :

1. A isometria g_S não fixa ponto em S' ;
2. S e S' são iguais se e somente se S é um grande círculo em \mathbb{S}^2 e g_S é a aplicação antípoda de \mathbb{S}^2 .

Demonstração. Para demonstrar o item 1, vamos supor, por absurdo, que g_S fixa um ponto $x' \in S'$ do polígono $P' \in \mathcal{P}$. Se $x' \in \mathring{S}'$, então $[x'] = \{x\}$ e $\theta[x'] = \pi$, contrariando o

fato de Φ ser próprio. Portanto, podemos assumir que $x' \in \partial S'$ e assim x' seria vértice de exatamente dois lados de P' , S' e T' . Como $g_S(S') = S$, ou $S = S'$ ou $S = T'$. Suponha que $S = S'$, então g_S fixaria algum ponto no interior de S' , que contraria a primeira parte da demonstração. Portanto, podemos assumir que $S = T'$ e concluímos que $[x'] = \{x'\}$ e $\theta[x'] < \pi$, pois $\theta[x]$ é o ângulo entre S' e T' , que contraria Φ ser próprio. Concluímos que g_S não fixa nenhum ponto de S' .

Agora vamos provar o item 2. Se supormos que S é um grande círculo e g_S é a aplicação antípoda, é fácil ver que $S = S'$. Reciprocamente, suponha que $S = S'$, então tome $x' \in S'$, daí $x = g_S(x')$ também pertence a S' . Se x e x' não são antípodas, existe um único segmento geodésico $[x, x']$ ligando x a x' . Daí, g_S fixaria o ponto médio do segmento geodésico $[x, x']$, o que contraria o item 1, pois o ponto médio pertence a S' . portanto x e x' são pontos antípodas em \mathbb{S}^2 . Então S é invariante pela aplicação antípoda de \mathbb{S}^2 . Afirmamos que S é um grande círculo, pois caso S não fosse um grande círculo, existiria y no grande círculo $\langle S \rangle$ tal que $y \notin S$ e portanto $-y \notin S$. Daí, S seria conexo, que é um absurdo. Como g_S é a aplicação antípoda restrita a S e $g_S(P) \cap P = S$, temos que g_S tem de ser a aplicação antípoda. □

Agora seja Φ um G -emparelhamento próprio de \mathcal{P} . Então Π é a união disjunta dos polígonos em \mathcal{P} , já que \mathcal{P} é uma família finita de polígonos disjuntos de X . Seja M o espaço quociente de Π dos ciclos de Φ . O espaço M é dito obtido *por colagem dos polígonos de \mathcal{P} por Φ* .

Proposição 4.15. *Seja G um grupo de isometria de X e M o espaço obtido por colagem dos polígonos da família finita de polígonos disjuntos e finitos \mathcal{P} pelo G -emparelhamento próprio Φ . Então M é uma variedade de dimensão 2 com (X, G) -estrutura tal que o mergulho natural de \mathring{P} em M é uma (X, G) -aplicação para todo $P \in \mathcal{P}$.*

Demonstração. Primeiramente vamos construir homeomorfismos $\phi_x : U(x, r) \rightarrow B(x, r)$, onde $x \in \Pi$, $U(x, r)$ é um aberto de M contendo $[x]$ e $B(x, r)$ é uma bola aberta centrada em x com um raio $r > 0$ a ser determinado. Seja P o polígono em \mathcal{P} tal que $x \in P$. Há três casos para analisar:

1. $x \in \mathring{P}$
2. x pertence ao interior de um lado S de P
3. x é um vértice de P

No caso 1, $[x] = \{x\}$. No caso 2, $[x] = \{x, x'\}$ com $x \neq x'$ pela proposição 4.14. No caso 3, x é um vértice de P , então x está na fronteira de dois lados de P , então x é emparelhado a outros dois pontos em Π . Nos três casos, podemos denotar $[x]$ por $\{x_1, \dots, x_m\}$ onde $x = x_1 \simeq x_2 \simeq \dots \simeq x_m \simeq x_1$. Seja S_i o lado do polígono P_i que contém x_i . Como $x - i$ está emparelhado a x_{i+1} , $g_{S_i}(x_{i+1}) = x_i$, para $i = 1, \dots, m - 1$, e $g_{S_m}(x_1) = x_m$, ou seja, $x_{i+1} \in S'_i$, para $i = 1, \dots, m - 1$, e $x_1 \in S'_m$. Defina $g_1 = Id$ e $g_i = g_{S_1} \circ \dots \circ g_{S_{i-1}}$

para $i = 2, \dots, m$. Dessa forma, $g_i(x_i) = g_{S_1} \circ \dots \circ g_{S_{i-1}}(x_i) = g_{S_1} \circ \dots \circ g_{S_{i-2}}(x_{i-1}) = \dots = g_{S_1}(x_2) = x_1 = x$ para todo $i = 1, \dots, m$. Sejam $\epsilon_1 = \min\{d(x_i, x_j); i \neq j\}$, ϵ_{2i} a menor distância entre x_i e qualquer lado de $P-i$ que não contém x_i e $\epsilon_2 = \min\{\epsilon_{2i}; i \in \{1, \dots, m\}\}$. Vamos tomar $r < \frac{1}{4} \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Dessa forma, a interseção $(B(x_i, r) \cap P_i) \cap (B(x_j, r) \cap P_j)$, com $i \neq j$, é vazia. A saber, se $z \in (B(x_i, r) \cap P_i) \cap (B(x_j, r) \cap P_j)$, então $d(x_i, x_j) \leq d(x_i, z) + d(z, x_j) < r + r < \frac{1}{4}\epsilon_1 + \frac{1}{4}\epsilon_1 \leq \frac{1}{2}d(x_i, x_j)$, que é uma contradição. Denote $\theta_i = \theta(P_i, x_i)$, $i = 1, \dots, m$. Temos que $P_i \cap B(x_i, r)$ é um setor circular do disco aberto $B(x_i, r)$ com ângulo θ_i , para $i = 1, \dots, m$. Temos que:

$$g_i(P_i \cap B(x_i, r)) = g_i(P_i \cap g_i(B(x_i, r))) = g_i(P_i) \cap B(x, r),$$

já que $g_i(x_i) = x$. Portanto, $g_i(P_i \cap B(x_i, r))$ é um setor circular de $B(x, r)$ com ângulo θ_i , pois g_i é isometria. Vamos provar que em qualquer um dos três casos, $B(x, r) = \cup_{i=1}^m g_i(P_i) \cap B(x, r)$. No caso 1, $m = 1$ e $B(x, r) = P \cap B(x, r) = g_1(P_1) \cap B(x, r)$. No caso 2, $m = 2$ e $[x] = \{x, x'\}$ e x está no interior de S_1 e teremos:

$$\begin{aligned} B(x, r) &= (P \cap B(x, r)) \cup (g_2(P_2) \cap B(x, r)) = \\ &= (g_1(P_1) \cap B(x, r)) \cup ((g_2(P_2) \cap B(x, r))) \end{aligned}$$

No caso 3, $m > 2$ e x é um vértice de P . Temos que $g_i(P_i)$ e $g_{i+1}(P_{i+1})$ estão contidos em lados opostos do lado em comum $g_i(S_i)$, para $i = 1, 2, \dots, m-1$. A saber, $g_{S_i}(P_{i=1})$ e P_i pertencem a lados opostos de S_i , pois Φ é um emparelhamento. Então $g_i(P_i)$ e $g_{i+1}(P_{i+1}) = g_i(g_{S_i}(P_{i+1}))$ estão em lados opostos de $g_i(S_i)$, pois g_i é isometria. Já que $S_i = g_{S_i}(S'_i)$, temos $g_i(S_i) = g_i(g_{S_i}(S'_i)) = g_{i+1}(S'_1)$. Como temos que S'_{i-1} e S_i são os lados de P_i contendo x_i , então $g_i(S'_{i-1})$ e $g_i(S_i)$ são lados de $g_i(P_i)$ e daí $g_i(S'_{i-1}) = g_{i-1}(S_{i-1})$. Então os lados de $g_i(P_i)$ que contém x são $g_{i-1}(S_{i-1})$ e $g_i(S_i)$.

Daí, os setores circulares $g_i(P_i) \cap B(x, r)$ aparecem na ordem rotacionando x . Já que Φ é próprio, $\theta[x] = 2\pi$ e temos $B(x, r) = \cup_{i=1}^m g_i(P_i) \cap B(x, r)$. Os polígonos P_n e $g_{S_m}(P)$ estão contidos em lados opostos do lado em comum S_m . Daí, $g_{S_m}^{-1}(P_m)$ e P estão em lados opostos do lado em comum S'_m . Então deduzimos que $g_m(P_m) = g_{S_m}^{-1}(P_m)$, pois $g_m(P_m)$ e $g_{S_m}^{-1}(P_m)$ compartilham um lado S'_m e estão no lado oposto de P com relação ao lado S'_m . Como as isometrias g_m e $g_{S_m}^{-1}$ concordam no aberto $\overset{\circ}{P}_m$, $g_m = g_{S_m}^{-1}$. Portanto, $g_{S_1} \circ \dots \circ g_{S_{m-1}} = g_m = g_{S_{m-1}}^{-1}$ que implica que $g_{S_1} \circ \dots \circ g_{S_{m-1}} \circ g_{S_m} = Id = g_1$.

Nos três casos, vamos definir $U(x, r) := q(\cup_{i=1}^m P_i \cap B(x_i, r))$. $U(x, r)$ é um aberto de M , pois $q^{-1}(U(x, r)) = \cup_{i=1}^m P_i \cap B(x_i, r)$ que é aberto em Π . agora definimos $\psi_x : \cup_{i=1}^m P_i \cap B(x_i, r) \rightarrow B(x, r)$ por $\psi_x(z) = g_i(z)$ se $z \in P_i \cap B(x_i, r)$. Como ψ_x concorda nos ciclos de Φ , ψ_x induz uma aplicação:

$$\phi_x : U(x, r) \rightarrow B(x, r)$$

ϕ_x é uma bijeção, pois possui inversa dada por $\phi_x^{-1}(z) = q(g_i^{-1}(z))$, se $z \in$

$g_i(P_i) \cap B(x, r)$. Portanto, ϕ_x é um homeomorfismo. Agora vamos mostrar que M é Hausdorff. Seja $[x], [y] \in M$, com $[x] \neq [y]$. Sejam $[x] = \{x_1, \dots, x_m\}$ e $[y] = \{y_1, \dots, y_n\}$. Sejam P_i os polígonos em \mathcal{P} contendo x_i e Q_j o polígono em \mathcal{P} contendo y_j . Portanto, podemos escolher raios $r, s > 0$ como antes tais que:

$$\begin{aligned} U(x, r) &= q(\cup_{i=1}^m P_i \cap B(x_i, r)) \\ U(y, s) &= q(\cup_{j=1}^n Q_j \cap B(y_j, s)) \end{aligned}$$

Podemos escolher $r, s > 0$ suficientemente pequenos tais que $\cup_{i=1}^m P_i \cap B(x_i, r)$ e $\cup_{j=1}^n Q_j \cap B(y_j, s)$ sejam conjuntos de Π . daí, $U(x, r)$ e $U(y, s)$ são vizinhanças abertas disjuntas de $[x]$ e $[y]$, respectivamente. Portanto, M é Hausdorff. E daí, M é uma variedade topológica de dimensão 2.

Agora precisamos mostrar que $\{\phi_x : U(x, r) \rightarrow B(x, r)\}$ é um (X, G) -atlas para M . Já sabemos que $U(x, r)$ é um aberto conexo de M e ϕ_x é um homeomorfismo. Além disso, está definido para todo $q(x) \in M$ e raio r suficientemente pequeno. Daí, $\{U(x, r)\}$ é uma cobertura aberta de M . Basta mostrar que se $U(x, r)$ e $U(y, s)$ se sobrepõem, então a mudança de coordenadas:

$$\phi_y \circ \phi_x^{-1} : \phi_x(U(x, r) \cap U(y, s)) \rightarrow \phi_y(U(x, r) \cap U(y, s))$$

é uma restrição a uma isometria de G .

Como antes, temos:

$$\begin{aligned} \cup_{i=1}^m P_i \cap B(x_i, r) &= q^{-1}(U(x, r)) \\ \cup_{j=1}^n Q_j \cap B(y_j, s) &= q^{-1}(U(y, s)) \end{aligned}$$

Podemos assumir que $m \leq n$, se necessário trocando os papéis de x e y . Se $m > 1$ denote como antes S_i o lado em P_i contendo x_i e se $n > 1$ denote por T_j o lado em Q_j contendo y_j . Seja g_1, \dots, g_m e h_1, \dots, h_n elementos de G construídas como antes para x e y , respectivamente. Existe somente um dos índices j , digamos l , tal que:

$$P \cap B(x, r) \cap Q_j \cap B(y_j, s) \neq \emptyset$$

Devemos provar que a mudança de coordenadas $\phi_y \circ \phi_x^{-1}$ é a restrição de $h_l \in G$. Assuma

que $m = 1$. Então x está em \mathring{P} e:

$$\begin{aligned}
q^{-1}(U(x, r)) &= B(x, r) \implies \\
\implies U(x, r) \cap U(y, s) &= \\
&= q(B(x, r)) \cap q(\cup_{j=1}^n Q_i \cap B(y_j, s)) = \\
&= q(B(x, r) \cap \cup_{j=1}^n Q_i \cap B(y_j, s)) = \\
&= q(B(x, r) \cap B(y_l, s)) \implies \\
\phi_x(U(x, r) \cap U(y, s)) &= B(x, r) \cap B(y_l, s) \\
\phi_y(U(x, r) \cap U(y, s)) &= h_l(B(x, r) \cap B(y_l, s))
\end{aligned}$$

Portanto, a mudança de coordenadas:

$$\phi_y \circ \phi_x^{-1} : \phi_x(U(x, r) \cap U(y, s)) \rightarrow \phi_y(U(x, r) \cap U(y, s))$$

é restrição de $h_l \in G$.

Assuma agora que $m = 2$, então x está no interior do lado S em P e x' está no interior de S' de P' e o conjunto $P' \cap B(x', r) \cap Q_j \cap B(y_j, s)$

é não vazio ou para $j = l - 1$ ou $l + 1 \pmod{n}$. Assuma que essa interseção é não vazia para $j = l + 1$, sem perda de generalidade, pois podemos mudar a ordem de y_1, \dots, y_n . Então $P = Q_l$, $P' = Q_{l+1}$, $S = T_l$ e:

$$\begin{aligned}
U(x, r) \cap U(y, s) &= \\
&= q(B(x, r) \cap P \cap B(x', r) \cap P') \cap q(\cup_{j=1}^n Q_i \cap B(y_j, s)) \\
&= q(B(x, r) \cap P \cap B(x', r) \cap P' \cap (\cup_{j=1}^n Q_i \cap B(y_j, s))) \\
&= q((\cup_{j=1}^n B(x, r) \cap P \cap Q_i \cap B(y_j, s)) \cup (\cup_{j=1}^n B(x', r) \cap P' \cap Q_i \cap B(y_j, s))) \\
&= q((P \cap B(x, r) \cap B(y_l, s)) \cup (P' \cap B(x', r) \cap B(y_{l+1}, s))) \implies \\
\implies \phi_x(U(x, r) \cap U(y, s)) &= \\
&= (B(x, r) \cap P \cap B(y_l, s)) \cup g_S(B(x', r) \cap P' \cap B(y_{l+1}, s)) = \\
&= (B(x, r) \cap P \cap B(y_l, s)) \cup (g_S(B(x', r)) \cap g_S(P') \cap g_S(B(y_{l+1}, s))) = \\
&= (B(x, r) \cap P \cap B(y_l, s)) \cup (B(x, r) \cap g_S(P') \cap B(y_l, s)) = \\
&= B(x, r) \cap B(y_l, s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \phi_y(U(x, r) \cap U(y, s)) = \\
& = h_l(B(x, r) \cap P \cap B(y_l, s)) \cup h_{l+1}(B(x', r) \cap P' \cap B(y_{l+1}, s)) = \\
& = h_l[(B(x, r) \cap P \cap B(y_l, s)) \cup g_{T_l}(B(x', r) \cap P' \cap B(y_{l+1}, s))] = \\
& = h_l[(B(x, r) \cap P \cap B(y_l, s)) \cup g_S(B(x', r) \cap P' \cap B(y_{l+1}, s))] = \\
& = h_l(B(x, r) \cap B(y_l, s))\phi_y(U(x, r) \cap U(y, s)) = \\
& = h_l(B(x, r) \cap P \cap B(y_l, s)) \cup h_{l+1}(B(x', r) \cap P' \cap B(y_{l+1}, s)) = \\
& = h_l[(B(x, r) \cap P \cap B(y_l, s)) \cup g_{T_l}(B(x', r) \cap P' \cap B(y_{l+1}, s))] = \\
& = h_l[(B(x, r) \cap P \cap B(y_l, s)) \cup g_S(B(x', r) \cap P' \cap B(y_{l+1}, s))] = \\
& = h_l(B(x, r) \cap B(y_l, s)).
\end{aligned}$$

Agora no conjunto $P \cap B(x, r) \cap B(y_l, s)$, $\phi_y \circ \phi_x^{-1}$ é a restrição de h_l a este conjunto. E no conjunto $g_S(P' \cap B(x', r) \cap B(y_{l+1}, s))$, $\phi_y \circ \phi_x^{-1}$ é a restrição de $h_{l+1} \circ g_S^{-1} = h_l \circ g_{T_l}^{-1} = h_l$. Portanto, a mudança de coordenadas $\phi_y \circ \phi_x^{-1} : \phi_x(U(x, r) \cap U(y, s)) \rightarrow \phi_y(B(x, r) \cap B(y, s))$ é restrição de $h_l \in G$.

Agora assumamos que $m > 2$, então x e y são vértices. Como r é menor que a distância do vértice x aos lados não contendo x e s é menor que a distância do vértice y aos lados não contendo y , então $x = y_l$ e $q(x) = q(y)$. Tome $t := \min\{r, s\}$, temos:

$$\begin{aligned}
U(x, r) \cap U(y, s) &= U(x, t) \\
\phi_x(U(x, t)) &= B(x, t) \\
\phi_y(U(x, t)) &= B(y, t) \\
x_i &= y_{l+i-1} \pmod{m} \text{ ou } x_i = y_{l-i+1} \pmod{m}
\end{aligned}$$

onde \pmod{m} significa que os restos dos índices por m que devem ser levados em conta como verdadeiros índices. Sem perda de generalidade, podemos assumir que a primeira igualdade é verdadeira, caso contrário basta trocar a ordem de y_1, \dots, y_m . Então $P_i = Q_{l+i-1} \pmod{m}$ e $S_i = T_{l+i-1}$. Agora observe que

$$\begin{aligned}
g_i &= g_{S_1} \circ \dots \circ g_{S_{i-1}} \\
&= g_{T_l} \circ \dots \circ g_{T_{l-i+2}} \pmod{m} \\
&= h_l^{-1} \circ h_{l-i+1} \pmod{m} \implies \\
\implies h_{l-i+1} &= h_l \circ g_i
\end{aligned}$$

Como $B(x, t) = \cup_{i=1}^m g_i(P_i) \cap B(x, t)$, a aplicação $\phi_y \circ \phi_x^{-1}$ restrita ao conjunto $g_i(P_i) \cap B(x, r) \cap B(y_l, s)$ é dada pela restrição de $h_{l-i+1} \circ g_i^{-1} = (h_l \circ g_i) \circ g_i^{-1}$ para $i = 1, \dots, m$. Portanto $\phi_y \circ \phi_x^{-1} : B(x, t) \rightarrow B(y, t)$ é a restrição de h_l . Portanto nos três casos, provamos que $\phi_y \circ \phi_x^{-1}$ é restrição de um elemento de G . Assim provamos que M , de fato, possui

uma (X, G) -estrutura. Agora, seja P um polígono em \mathcal{P} e seja $i : \mathring{P} \rightarrow M$ o mergulho natural de \mathring{P} em M . Então para todo $x \in \mathring{P}$, temos $\phi_x : U(x, r) \rightarrow B(x, r)$ e a aplicação $i^{-1} : i(B(x, r)) \rightarrow B(x, r)$ é ϕ_x . Portanto i é um (X, G) -aplicação.

□

4.4 Toro e garrafa de Klein com estrutura euclidiana

Como exemplo da aplicação do teorema 4.15, vamos mostrar que um quadrado com suas arestas identificadas formando um Toro ou uma garrafa de Klein terá estrutura euclidiana.

Sejam $X = \mathbb{R}^n$ e $G = Isom(\mathbb{R}^n)$, vamos mostrar que o G -emparelhamento, que identifica os seguintes lados do quadrado Q , é próprio. Seja T o toro que é obtido com a colagem dos lados do quadrado. T tem estrutura euclidiana.



Figura 1: Quadrado com os lados colados com indica a figura, ou seja, toro T

Para garantir que esse G -emparelhamento é próprio, basta notar que o ciclo de qualquer ponto de T é finito e que a soma de ângulo $\theta[x]$ de qualquer ponto de $[x] \in T$ é 2π . A saber, para qualquer ponto $[x] \in T$, onde x está no interior lado do quadrado, temos que $\theta[x] = 2\pi$. Temos que todos os vértices são relacionados. Portanto, se $[v] \in T$ é a classe de equivalência dos vértices, temos que $\theta[v] = \theta(Q, v_1) + \theta(Q, v_2) + \theta(Q, v_3) + \theta(Q, v_4) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 2\pi$.

De modo análogo, podemos mostrar que o quociente K do seguinte quadrado tem estrutura euclidiana, ou seja, a garrafa de Klein tem estrutura euclidiana.

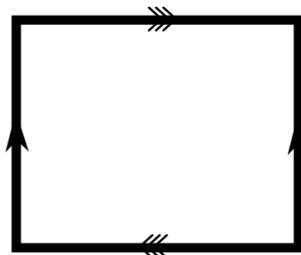


Figura 2: Quadrado com os lados colados como indicado, ou seja, garrafa de Klein K

4.5 Toro sem um ponto com estrutura hiperbólica

Outra aplicação interessante do teorema 4.15 é mostrar que um toro sem um ponto tem estrutura hiperbólica. Seja P o polígono convexo de \mathbb{D}^2 tal que os 4 lados de

P serão, como indicado na figura:

1. a geodésica l_1 que liga e_1 e e_2 de \mathbb{S}_∞^1 ;
2. a geodésica l_2 que liga e_2 e e_1 de \mathbb{S}_∞^1 ;
3. a geodésica l_3 que liga $-e_1$ e $-e_2$ de \mathbb{S}_∞^1 e
4. a geodésica l_4 que liga e_1 e $-e_2$ de \mathbb{S}_∞^1 .

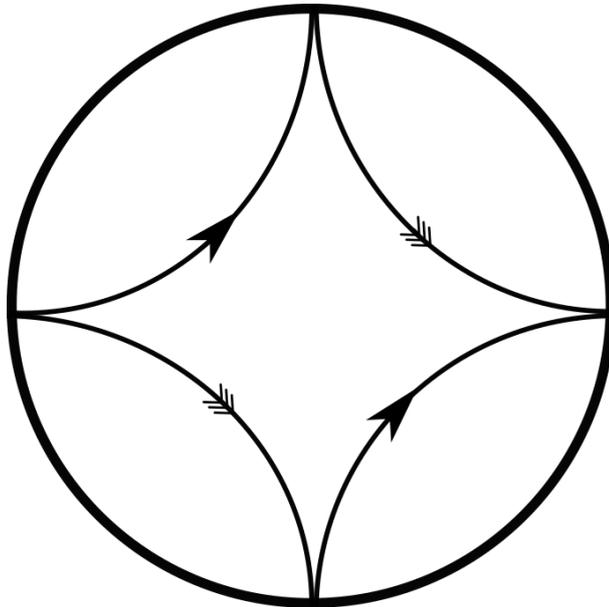


Figura 3: Quadrilátero com os lados identificados como na figura e vértices no infinito

4.6 Colando poliedros convexos de dimensão 3

Nessa seção, formalizaremos a construção de variedades hiperbólicas, esféricas e euclidianas de dimensão 3 por colagem de poliedros convexos de $X = \mathbb{H}^3, \mathbb{S}^3, \mathbb{R}^3$ ao longo de suas faces.

Nessa seção usaremos a seguinte notação:

X : $\mathbb{S}^3, \mathbb{R}^3$ ou \mathbb{H}^3

\mathcal{P} : é um conjunto de poliedros convexos disjuntos em X

G : $Isom(\mathbb{S}^3), Isom(\mathbb{R}^3)$ ou $Isom(\mathbb{H}^3)$

Definição 4.16. Um G -emparelhamento (G -side-pairing) para \mathcal{P} é um subconjunto de G :

$$\Phi = \{g_S; S \in \mathcal{S}\}$$

indexado pela coleção \mathcal{S} de todas as faces de poliedro em \mathcal{P} tal que para todo $S \in \mathcal{S}$:

1. Há uma face $S' \in \mathcal{S}$ tal que $g_S(S') = S$;
2. As isometrias de g_S e $g_{S'}$ satisfazem $g_{S'} = g_S^{-1}$; e
3. Se S é uma face de $P \in \mathcal{P}$ e S' é uma face de $P' \in \mathcal{P}$ então:

$$P \cap g_S(P') = S$$

Segue de 1 que S' é unicamente determinado por S . A face S' é chamada de *emparelhada a S por Φ* . Por 2, se S'' é a face emparelhada a S' por Φ ,

$$\begin{aligned} g_{S'}(S'') &= S' \\ g_S^{-1}(S'') &= S' \\ S'' &= g_S(S') = S \\ S'' &= S \end{aligned}$$

portanto, a face emparelhada a S' é S . O emparelhamento de pontos de face por elementos de Φ gera uma relação de equivalência em $\Pi = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P$ e suas classes de equivalência são chamadas de ciclos de Φ .

Definição 4.17. *Ângulo sólido* subtendido por um poliedro P no ponto x é definido pelo número real:

$$\omega(P, x) = 4\pi \frac{\text{Vol}(P \cap B(x, r))}{\text{Vol}(B(x, r))}$$

Onde r é menor que a distância de x a qualquer outra face de P não contendo x .

Seja $[x] = \{x_1, \dots, x_m\}$ um ciclo infinito de Φ , e seja P_i o poliedro em \mathcal{P} que contém x_i para todo $i \in \{1, \dots, m\}$.

Definição 4.18. A soma do ângulo sólido de $[x]$ é definido como o número real:

$$\omega[x] = \omega(P_1, x_1) + \dots + \omega(P_m, x_m)$$

Se x está no interior de um poliedro P em \mathcal{P} então $[x] = \{x\}$ e $\omega[x] = 4\pi$, pois $P \cap B(x, r) = B(x, r)$. Agora se x está no interior de uma face S de um poliedro P , então podemos ter $[x] = \{x\}$ ou $[x] = \{x, x'\}$, com $x \neq x'$. Caso $[x] = \{x\}$, $\omega[x] = 4\pi \frac{1}{2} = 2\pi$, pois $P \cap B(x, r)$ é um hemisfério. Caso $[x] = \{x, x'\}$, $\omega[x] = \omega(P, x) + \omega(P', x') = 2\pi + 2\pi = 4\pi$.

Suponha que x está no interior de uma aresta de um poliedro em \mathcal{P} , então todo ponto de $[x]$ é chamado de *ciclo de aresta de Φ* . Seja $\theta(P_i, x_i)$ o ângulo diedral de P_i ao longo da aresta contendo x_i para todo i .

Definição 4.19. A soma de ângulo diedral do ciclo de aresta $[x]$ é definido pelo número real:

$$\theta[x] = \theta(P_1, x_1) + \dots + \theta(P_m, x_m)$$

Notando que $\omega(P_i, x_i) = 2\theta(P_i, x_i)$ para todo i , temos que $\omega[x] = 2\theta[x]$.

Definição 4.20. Um G -emparelhamento para \mathcal{P} é próprio se e somente se cada ciclo de Φ é finito e tem soma do ângulo sólido igual a 4π .

Proposição 4.21. Se G é um grupo de isometrias de X e Φ é um G -emparelhamento

próprio de uma família finita \mathcal{P} de poliedro convexos disjuntos então:

1. A isometria g_S fixa nenhum ponto de S' para todo $S \in \mathcal{S}$;
2. As faces S e S' são iguais se e só se S é uma grande esfera de dimensão 2 de \mathbb{S}^3 ; e
3. Cada ciclo de aresta de Φ contém no máximo um ponto de uma aresta de um poliedro de \mathcal{P}

Demonstração. Para demonstrar 1, suponha, por absurdo, que g_S fixa um ponto x de S' . denote por $[x] = \{x_1, \dots, x_m\}$ o ciclo de Φ com $x_1 = x$. E denote por P_i o poliedro em \mathcal{P} contendo x_i . Seja $\epsilon_1 := \min\{d(x_i, x_j); i \neq j\}$, ϵ_{2i} a menor distância entre x_i e os lados de P_i que não contém x_i e $\epsilon_2 = \min\{\epsilon_{2i}; i \in \{1, \dots, m\}\}$. Tome $r < \frac{1}{2} \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Então $P_i \cap S(x_i, r)$ é um polígono em $S(x_i, r)$ e a família de polígonos $\{P_i \cap S(x_i, r)\}$ é disjunta pela escolha de r . O G -emparelhamento Φ se restringe um $Isom(\mathbb{S}^2)$ -emparelhamento próprio dos polígonos $\{P_i \cap S(x_i, r)\}$. Pela proposição 4.15, Σ tem estrutura esférica. como $\omega[x] = 4\pi$, Σ é compacto e conexo, então Σ é uma esfera de dimensão 2. Seja P o poliedro em \mathcal{P} contendo x . Como $g_S(S') = S$ e $g_S(x) = x$, o lado $S' \cap S(x, r)$ de $P \cap S(x, r)$ é emparelhado com o lado $S \cap S(x, r)$ de $P \cap S(x, r)$. Seja y um ponto em $S \cap S(x, r)$ e $y' = g_S^{-1}(y)$. Pelo teorema 4.14 item 1, $y \neq y'$. Como $P \cap S(x, r)$ é um polígono convexo existe um segmento geodésico $[y, y']$ ligando y a y' em $P \cap S(x, r)$. Como y e y' estão emparelhados, $[y, y']$ é projetado em um grande círculo de Σ , mas isso contraria o fato de $[y, y']$ ter o comprimento no máximo a metade do comprimento de um grande círculo de $S(x, r)$. Portanto, g_S não fixa nenhum ponto de S' .

O item 2 é análogo ao item 2 da proposição 4.14. Se supormos que S é um grande esfera e g_S é a aplicação antípoda, é fácil ver que $S = S'$. Reciprocamente, suponha que $S = S'$, então tome $x' \in S'$, daí $x = g_S(x')$ também pertence a S' . Se x e x' não são antípodas, existe um único segmento geodésico $[x, x']$ ligando x a x' . Daí, g_S fixaria o ponto médio do segmento geodésico $[x, x']$, o que contraria o item 1, pois o ponto médio pertence a S' . portanto x e x' são pontos antípodas em \mathbb{S}^3 . Então S é invariante pela aplicação antípoda de \mathbb{S}^3 . Então S é uma grande esfera, para justificar isso tome um ponto $y \in \mathring{S}$, então o ponto antípoda $-y$ pertence a S , mas como y está no interior de S , $B(y, r_y) \cap \langle S \rangle \subset S$, para $r_y > 0$ suficientemente pequeno. Portanto se $z \in B(y, r_y) \cap \langle S \rangle$ os segmentos geodésicos $[z, -y]$ e $[z, y]$ estão contidos em S , então a geodésica que liga y a $-y$ passando por z está contida em S . Como z é arbitrário, todas as geodésicas ligando y a $-y$ em $\langle S \rangle$ estão contidas em S . Portanto, S é igual à grande esfera $\langle S \rangle$. Como g_S é a aplicação antípoda restrita a S e $g_S(P) \cap P = S$, temos que g_S tem de ser a aplicação antípoda de \mathbb{S}^3

Para provar o item 3, suponha que $[x]$ é um ciclo de aresta. Então o ciclo $[x]$ pode ser ordenado:

$$[x] = \{x_1, \dots, x_m\} \text{ tal que } x = x_1 \simeq x_2 \simeq \dots \simeq x_m \simeq x_1$$

Seja E_i a aresta contendo x_i e seja k o número de pontos em $[x]$ contidos em E_1 . Então E_i contém k pontos de $[x]$ para todo i . Seja y_i o centro geométrico dos pontos de $[x]$ em E_i para todo i , e $y := y_1$. E daí, temos:

$$y = y_1 \simeq y_2 \simeq \dots \simeq y_m \simeq y_1 \text{ e } d(x_1, y_1) = d(x_2, y_2) = \dots = d(x_m, y_m)$$

Então $k = 1$ ou 2 , pois existem apenas dois pontos a mesma distância de y_i em E_i . Mas como $4\pi = \omega[x] = 2\theta[x] = 2k\theta[y] = k\omega[y] = k4\pi$, então $k = 1$. □

Seja Φ uma G -emparelhamento próprio para \mathcal{P} e M o espaço quociente de Π dos ciclos de Φ . Dizemos que M foi obtido pela colagem dos poliedros de \mathcal{P} por Φ .

Teorema 4.22. *Seja G um grupo de isometrias de X e M o espaço quociente obtido pela colagem da família finita de \mathcal{P} de poliedros disjuntos e convexos em X por um G -emparelhamento próprio. Então M é uma variedade com dimensão 3 com (X, G) -estrutura tal que o mergulho natural de \dot{P} em M é uma (X, G) -aplicação para todo $P \in \mathcal{P}$.*

Demonstração. Como na proposição 4.15, vamos criar cartas ϕ_x para M usando as isometrias de Φ . Primeiramente vamos criar as vizinhanças $U(x, r)$ de $[x]$ adequadas. Seja $x \in \Pi = \cup_{P \in \mathcal{P}} P$ e $[x] = \{x_1, \dots, x_m\}$. Seja P_i o poliedro em \mathcal{P} que contém x_i . Se x_i está em um lado de P_i , então $m \geq 2$ pela proposição 4.21 item 1. Seja $\epsilon_1 := \min\{d(x_i, x_j); i \neq j\}$, ϵ_{2i} o mínimo das distâncias entre x_i e os lados de P_i que não contém x_i e $\epsilon_2 = \min\{\epsilon_{2i}; i \in \{1, \dots, m\}\}$. Tome $\delta(x) = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Seja $r < \frac{\delta(x)}{2}$. Então o conjunto $P_i \cap S(x_i, r)$ é um polígono de $S(x_i, r)$ e a família de polígonos $\{P_i \cap S(x_i, r)\}$ é disjunta. O G -emparelhamento próprio Φ se restringe a um $Isom(\mathbb{S}^2)$ -emparelhamento para os polígonos $\{P_i \cap S(x_i, r)\}$. Seja $\Sigma(x, r)$ o espaço quociente obtido pela colagem dos polígonos. Pela proposição 4.15, $\Sigma(x, r)$ tem estrutura esférica. Como $\Sigma(x, r)$ é compacto, conexo e $\omega[x] = 4\pi$, então $\Sigma(x, r)$ é uma esfera de dimensão 2. Seja $q : \Pi \rightarrow M$ a aplicação quociente. Temos que a restrição de q ao polígono $P_i \cap S(x_i, r)$ se estende a uma isometria $\xi_i : S(x_i, r) \rightarrow \Sigma(x, r)$. Além disso, para $i, j \in \{1, \dots, m\}$ a isometria $\xi_j^{-1} \circ \xi_i : S(x_i, r) \rightarrow S(x_j, r)$ se estende a uma única isometria g_{ij} de X tal que $g_{ij}(x_i) = x_j$. Agora suponha que g_S em Φ emparelha $S' \cap S(x_i, r)$, lado de $P_i \cap S(x_i, r)$, com $S \cap S(x_j, r)$, lado de $P_j \cap S(x_j, r)$. Então $\xi_j^{-1} \circ \xi_i$ e g_S concordam em $\langle S' \rangle \cap S(x_i, r)$. Portanto, g_{ij} e g_S concordam no plano $\langle S' \rangle$. Como g_{ij} e g_S aplicam $P_i \cap S(x_i, r)$ no lado oposto do $\langle S \rangle$ que contém $P_j \cap S(x_j, r)$, deduzimos que $g_{ij} = g_S$.

Agora se tomarmos $x_i, x_j \in [x]$ que não necessariamente estão emparelhados, mas estão relacionados por Φ , então existem $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}$ tal que $x_i = x_{i_1} \simeq \dots \simeq x_{i_p} = x_j$. Então teremos $\xi_j^{-1} \circ \xi_i = (\xi_{i_p}^{-1} \circ \xi_{i_{p-1}}) \circ (\xi_{i_{p-1}}^{-1} \circ \xi_{i_{p-2}}) \circ \dots \circ (\xi_{i_2}^{-1} \circ \xi_{i_1})$. Daí, temos $g_{ij} = g_{i_p i_{p-1}} \circ g_{i_{p-1} i_{p-2}} \circ \dots \circ g_{i_1 i_2}$. Como $g_{i_1 i_2}, \dots, g_{i_{p-1} i_p}$ estão em Φ pelo parágrafo anterior. Portanto, g_{ij} está em G , para todo $i, j \in \{1, \dots, m\}$. Defina $U(x, r) = \cup_{i=1}^m q(P_i \cap B(x_i, r))$. Como o conjunto $q^{-1}(U(x, r)) = \cup_{i=1}^m P_i \cap B(x_i, r)$ é aberto em Π , então $U(x, r)$ é aberto em

M . Como $[x] \in U(x, r)$, $U(x, r)$ será nossa vizinhança aberta de $[x]$. Agora vamos definir as cartas de M . para isso, suponha que $x = x_k$ e defina $\psi - x : \cup_{i=1}^m P_i \cap B(x_i, r) \rightarrow B(x, r)$ por $\psi_x(z) = g_{ik}$, se $z \in P_i \cap B(x_i, r)$. Agora vamos provar que se $y, y' \in \cup_{i=1}^m P_i \cap B(x_i, r)$ são emparelhados então $\psi_x(y) = \psi_x(y')$. Suponha que $g_S(x_i) = x_j$, então $g_S = g_{ij}$. Supondo que y é um ponto de $S \cap B(x_j, r)$, então $g_S(y) = y$, ou seja, $y' = g_S^{-1}(y)$. y' é um ponto de $S' \cap B(x_i, r)$. Como $\xi_k^{-1} \circ \xi_i = (\xi_k^{-1} \circ \xi_j) \circ (\xi_j^{-1} \circ \xi_i)$, temos que $g_{ik} = g_{jk} \circ g_{ij}$. $\psi_x(y) = g_{jk}(y) = g_{jk}(g_S(y')) = g_{ik}(g_{ij}(y')) = g_{ik}(y') = \psi_x(y')$. Portanto, ψ_x induz uma aplicação contínua $\phi_x : U(x, r) \rightarrow B(x, r)$. Para todo t tal que $0 < t \leq r$ a aplicação ϕ_x se restringe a uma isometria $\xi_k^{-1} : \Sigma(x, t) \rightarrow S(x, t)$ para cada t . Portanto ϕ_x é uma bijeção (pois ξ_k^{-1} leva esfera de raio t bijectivamente em esfera de raio t) com inversa contínua dada por $\phi_x^{-1}(z) = q(g_{ik}(z))$ se $z \in g_{ik}(P_i \cap B(x_i, r))$. Portanto, ϕ_x é um homeomorfismo. O mesmo argumento mostrado em 4.15 pode ser usado para mostrar que M é Hausdorff. Portanto, M é uma variedade de dimensão 3.

Agora iremos mostrar que $\{\phi_x : U(x, r) \rightarrow B(x, r); x \in \Pi \text{ e } r < \frac{\delta(x)}{3}\}$ é um (X, G) -atlas para M . Por construção, $U(x, r)$ é um subconjunto aberto e conexo de M e ϕ_x é um homeomorfismo. Além disso, $U(x, r)$ está definido para todo $q(x)$ de M e r suficientemente pequeno. Consequentemente, $\{U(x, r)\}$ é uma cobertura aberta de M . Suponha que $U(x, r)$ e $U(y, s)$ tem interseção não-vazia e $r < \frac{\delta(x)}{3}$ e $s < \frac{\delta(y)}{3}$. Seja $F(x)$ a face, aresta ou vértice que contém x em seu interior. Invertendo papéis se necessário, podemos assumir que $\dim F(x) \geq \dim F(y)$. Como antes, temos $q^{-1}(U(x, r)) = \cup_{i=1}^m P_i \cap B(x_i, r)$ e $q^{-1}(U(y, s)) = \cup_{j=1}^m Q_j \cap B(y_j, s)$. Agora pra algum par i e j , o conjunto $P_i \cap B(x_i, r)$ intersecta $Q_j \cap B(y_j, s)$. Por reindexação se necessário, podemos assumir que $P_1 \cap B(x_1, r)$ intersecta $Q_1 \cap B(y_1, s)$. Então $P_1 = Q_1$. Seja z na interseção de $P_1 \cap B(x_1, r)$ e $Q_1 \cap B(y_1, s)$, pela desigualdade triangular, $d(x_1, y_1) \leq d(x_1, z) + d(z, y_1) < r + s$. Afirmamos que y_1 está em toda face de P_1 que contém x_1 . Caso contrário, suponha que y_1 não está em uma face de P_1 que contém x_1 . Então $s < \frac{\delta(y)}{3} < \frac{d(x_1, y_1)}{3}$. Daí, y_1 está em todas as faces de P_1 que contém x_1 , pois caso contrário teríamos $d(x_1, y_1) < r + s < r + \frac{d(x_1, y_1)}{3} \implies \frac{2d(x_1, y_1)}{3} < r \implies r < \frac{\delta(x)}{3} < \frac{2d(x_1, y_1)}{3} < r \implies r < r$, absurdo. Portanto, y_1 está em toda face de P_1 contendo x_1 . Isto implica que para todo i , $P_i \cap B(x_i, r)$ intersecta $Q_j \cap B(y_j, s)$ para algum j . Afirmamos que o conjunto $P_i \cap B(x_i, r)$ intersecta $Q_j \cap B(y_j, s)$ para apenas um índice j . Caso contrário, suponha que $P_i \cap B(x_i, r)$ intersecta $Q_j \cap B(y_j, s)$ e $Q_k \cap B(y_k, s)$ para $j \neq k$. Então $P_i = Q_j = Q_k$. Já que y_j e y_k estão em todas as faces de P_i contendo x_i , nós temos que $F(y_j)$ e $F(y_k)$ são faces de alguma dimensão de $F(x_i)$. Além disso, $F(y_j)$ e $F(y_k)$ são distintas pela Proposição 4.21. Portanto, temos que $F(y_j)$ e $F(y_k)$ não são iguais a $F(x_i)$. Daí, temos $r < \frac{d(x_i, y_j)}{3}$, $r < \frac{d(x_i, y_k)}{3}$ e $s < \frac{d(y_j, y_k)}{3}$, pois y_j e y_k estão em alguma face que x_i não está e existe alguma face que contém y_j e não contém

y_k , senão $F(y_j) = F(y_k)$.

$$\begin{aligned} d(x_i, y_j) + d(x_i, y_k) &< (r + s) + (r + s) \\ &< \left(\frac{d(x_i, y_j)}{3} + \frac{d(y_j, y_k)}{3} \right) + \left(\frac{d(x_i, y_k)}{3} + \frac{d(y_j, y_k)}{3} \right) \\ &< \frac{d(x_i, y_j)}{3} + \frac{d(x_i, y_k)}{3} + \frac{2d(y_j, y_k)}{3} \end{aligned}$$

Pela desigualdade triangular, $d(y_j, y_k) \leq d(y_j, x_i) + d(x_i, y_k)$. E daí, temos:

$$d(x_i, y_j) + d(x_i, y_k) < \frac{d(x_i, y_j)}{3} + \frac{d(x_i, y_k)}{3} + \frac{2}{3}(d(y_j, x_i) + d(x_i, y_k)) = d(x_i, y_j) + d(x_i, y_k)$$

que é uma contradição. Logo, $P_i \cap B(x_i, r)$ intersecta $Q_j \cap B(y_j, s)$ para apenas um índice j . Afirmamos agora que o conjunto $Q_j \cap B(y_j, s)$ intersecta $P_i \cap B(x_i, r)$ para apenas um índice i . Caso contrário, suponha que $Q_j \cap B(y_j, s)$ intersecta $P_i \cap B(x_i, r)$ e $P_k \cap B(x_k, r)$ para $i \neq k$. Então $Q_j = P_i = P_k$. Já que y_j está em toda face de Q_j que contenha x_i ou x_k , nós temos $F(y_j)$ é uma face de alguma dimensão de $F(x_i)$ e $F(x_k)$. Além disso, $F(x_i)$ e $F(x_k)$ são distintas pela Proposição 4.21. Portanto, $F(y_j)$ não é igual a $F(x_i)$, nem a $F(x_k)$. Daí, temos $r < \frac{d(x_i, y_j)}{3} \leq \frac{1}{3}(d(x_i, z) + d(z, y_j)) < \frac{(r+s)}{3}$, onde $z \in (P_i \cap B(x_i, r)) \cap (Q_j \cap B(y_j, s))$. Daí,

$$\begin{aligned} r &< \frac{(r+s)}{3} \\ r - \frac{r}{3} &< \frac{s}{3} \\ \frac{2r}{3} &< \frac{s}{3} \\ 2r &< s \\ r &< \frac{s}{2} \end{aligned}$$

Como $s < \frac{\delta(y)}{3}$, então $r < \frac{\delta(y)}{6}$. Observe que $d(x_i, y_j) < r + s < \frac{\delta(y)}{6} + \frac{\delta(y)}{3} = \frac{\delta(y)}{2}$ e $d(x_k, y_j) < r + s < \frac{\delta(y)}{2}$. Agora pela construção de $U(y, r + s)$, nós deduzimos que q aplica $Q_j \cap B(y_j, r + s)$ injetivamente em M . Como $x_i, x_k \in Q_j \cap B(y_j, r + s)$, nós temos uma contradição, pois $q(x_i) = q(x_k)$. Portanto, podemos reindexar $[y]$ tal que $P_i \cap B(x_i, r)$ intersecta apenas $Q_i \cap B(y_i, s)$ para $i = 1, \dots, m$. Então $P_i = Q_i$. Sejam g_{ij} e h_{ij} isometrias de G como construídas antes para x e y , respectivamente. Suponha que g_S emparelha a face $S' \cap S(x_i, r)$ de $P_i \cap S(x_i, r)$ à face $S \cap S(x_j, r)$ de $P_j \cap S(x_j, r)$. Então $g_S = g_{ij}$ e $g_S(x_i) = g_{ij}(x_i) = x_j$. Portanto x_i está em S' . Como $P_i \cap B(x_i, r)$ intersecta $Q_i \cap B(y_i, s) = P_i \cap B(y_i, s)$, temos que y_i também está S' . Aplicando g_S , temos que $g_S(P_i \cap B(x_i, r))$ intersecta $g_S(P_i \cap B(y_i, s))$. Daí, $P_j \cap B(x_j, r)$ intersecta $P_j \cap B(g_S(y_i), s)$. Portanto, $g_S(y_i) = y_j$. Daí, $g_{ij} = h_{ij}$ pois as isometrias concordam

no aberto contido em $(P_i \cap B(y_i, s)) \cap (P_i \cap B(x_i, r))$. Agora suponha que $x_i = x_{i_1} \simeq x_{i_2} \simeq \dots \simeq x_{i_p} = x_j$, então ,pelos argumentos anteriores, $y_i = y_{i_1} \simeq y_{i_2} \simeq \dots \simeq y_{i_p} = y_j$ e $g_{ij} = g_{i_p i_{p-1}} \circ g_{i_{p-1} i_{p-2}} \circ \dots \circ g_{i_2 i_1} = h_{i_p i_{p-1}} \circ h_{i_{p-1} i_{p-2}} \circ \dots \circ h_{i_2 i_1} = h_{ij}$. Agora, observe que:

$$\begin{aligned} U(x, r) \cap U(y, s) &= \\ &= q(\cup_{i=1}^m P_i \cap B(x_i, r)) \cap q(\cup_{j=1}^n Q_j \cap B(y_j, s)) \\ &= q((\cup_{i=1}^m P_i \cap B(x_i, r)) \cap \cup_{j=1}^n Q_j \cap B(y_j, s)) \\ &= q(\cup_{i=1}^m \cup_{j=1}^n P_i \cap B(x_i, r) \cap Q_j \cap B(y_j, s)) \\ &= q(\cup_{i=1}^m P_i \cap B(x_i, r) \cap B(y_i, s)) \end{aligned}$$

Seja $x = x_k$ e $y = y_l$. Então $\phi_x(U(x, r) \cap U(y, s)) = \cup_{i=1}^m g_{ik}(P_i \cap B(x_i, r) \cap B(y_i, s))$ e $\phi_y(U(x, r) \cap U(y, s)) = \cup_{i=1}^m h_{il}(P_i \cap B(x_i, r) \cap B(y_i, s))$. Agora no conjunto $g_{ij}(P_i \cap B(x_i, r) \cap B(y_i, s))$, a aplicação $\phi_y \circ \phi_x^{-1}$ é restrição de $h_{il} \circ g_{ik}^{-1} = h_{il} \circ g_{ki} = h_{il} \circ h_{ki} = h_{kl}$ para todo $i = 1, \dots, m$. Daí, $\phi_y \circ \phi_x^{-1}$ é restrição de h_{kl} . Portanto, $\phi_y \circ \phi_x^{-1}$ concorda com um elemento de G . E isto conclui a prova que $\{\phi_x\}$ é um (X, G) -atlas para M . O mesmo argumento como na Proposição 4.15 mostra que o mergulho natural de \mathring{P} em M é uma (X, G) -aplicação para todo $P \in \mathcal{P}$.

□

A próxima proposição nos dá um critério mais fácil pra provar que um G -emparelhamento é próprio. Basta

Proposição 4.23. *Seja G um grupo de isometrias que preserva orientação e seja $\Phi = \{g_S; S \in \mathcal{S}\}$ um G -emparelhamento de um família finita \mathcal{P} de Poliedros em X . Então Φ é próprio se e só:*

1. *Todo ciclo de Φ é finito;*
2. *As isomerias g_S não fixam nenhum ponto em S' para todo $S \in \mathcal{S}$; e*
3. *Todo ciclo de aresta de Φ tem soma de ângulo diedral 2π*

Demonstração. Suponha que Φ é próprio. Então todo ciclo de Φ é finito e a soma de ângulo sólido é 4π . Além disso, g_S não fixa nenhum ponto em S' pela Proposição 4.21. Seja $[x] = \{x_1, \dots, x_m\}$ um ciclo de aresta de Φ . Como $\omega[x] = 2\theta[x]$, nós temos $\theta[x] = 2\pi$. Portanto todo ciclo de aresta tem soma de ângulo diedral 2π .

Reciprocamente, suponha que Φ satisfaz (1), (2) e (3). Então, por (1), todo ciclo de Φ é finito. Seja $[x] = \{x_1, \dots, x_m\}$ um ciclo de Φ . Se x é no interior de um poliedro de \mathcal{P} , $\omega[x] = 4\pi$. Se x está no interior de uma face de um poliedro de \mathcal{P} , então $\omega[x] = 4\pi$ pelo item (2). Se x está no interior de uma aresta de um poliedro em \mathcal{P} , então $[x]$ é um ciclo de aresta e nós temos que $\theta[x] = 2\pi$ pelo item (3). Como $\omega[x] = 2\theta[x]$, $\omega[x] = 4\pi$.

Agora suponha que x é vértice de um poliedro de \mathcal{P} . Então x_i é um vértice de P_i para todo i . Sejam $\epsilon_1 := \min\{d(x_i, x_j)\}$, ϵ_{2i} a menor distância entre x_i e os lados de P_i que não contém x_i e $\epsilon_2 := \min\{\epsilon_{2i}; i \in \{1, \dots, m\}\}$. Tome $r < \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Então

$P_i \cap S(x_i, r)$ é um polígono na esfera $S(x_i, r)$ e os polígonos $\{P_i \cap S(x_i, r)\}$ são disjuntos. O G -emparelhamento Φ se restringe a um $(\mathbb{S}^2, Iso(\mathbb{S}^2))$ -emparelhamento para os polígonos $\{P_i \cap S(x_i, r)\}$. Portanto, pela Proposição 4.15, o espaço quociente Σ obtido colando os polígonos $\{P_i \cap S(x_i, r)\}$ pela restrição de Φ tem estrutura esférica. Então Σ é uma esfera de dimensão 2, já que Σ é compacto e conexo. Portanto, $\omega[x] = 4\pi$ e Φ é próprio. \square

4.7 Complemento do nó Figura Oito

Nesta seção, mostraremos que o complemento do Nó Figura Oito \mathbb{L} em \mathbb{S}^3 possui uma estrutura hiperbólica.

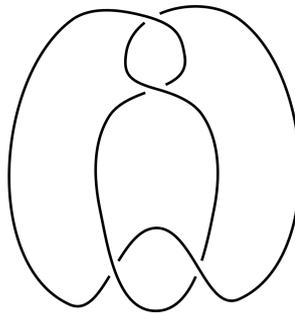


Figura 4: Nó figura oito

Para esse fim, devemos utilizar de uma variedade homeomorfa a $\mathbb{S}^3 - \mathbb{L}$. Considere o seguinte diagrama de dois tetraedros em \mathbb{R}^3 . Vamos colar as faces por isometrias de \mathbb{R}^3 de tal forma que as arestas e orientações de aresta sejam preservadas. Chamaremos, nessa seção, tal quociente de M .

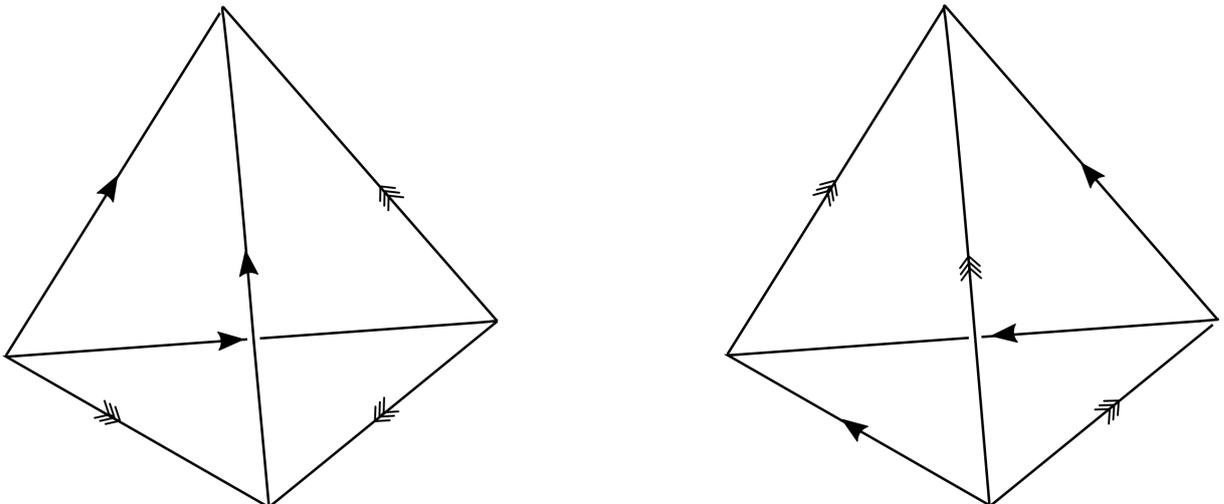


Figura 5: Tetraedros

M é um complexo celular. Entretanto, M não é uma variedade topológica. Pois os vértices dos tetraedros são identificados com um único ponto $v \in M$ e para qualquer vizinhança U suficientemente pequena de v temos que ∂U em M é homeomorfa a um toro. (Veja a figura a seguir.)

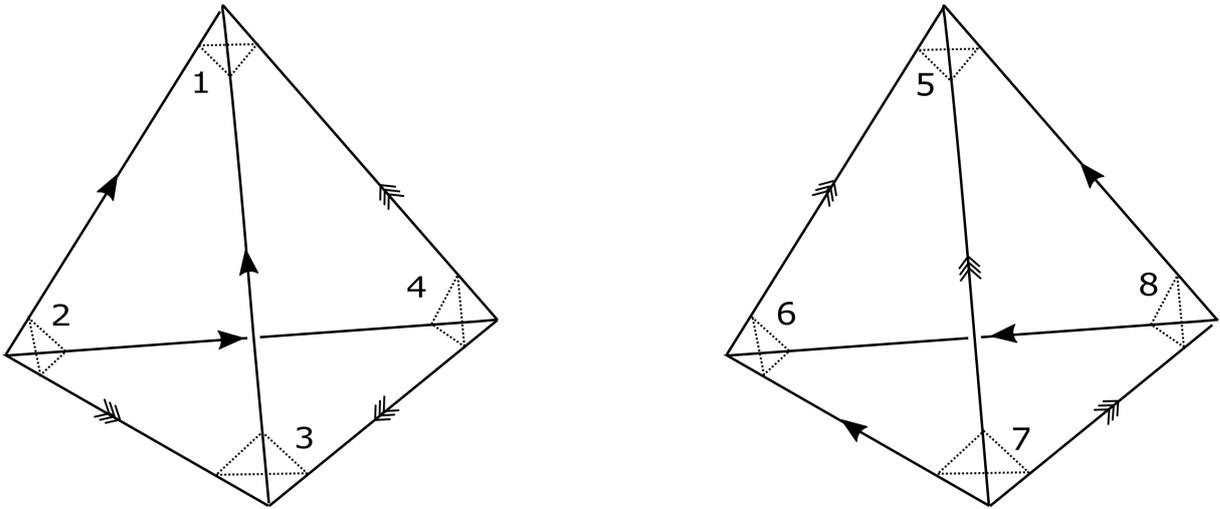


Figura 6: Vizinhança de v

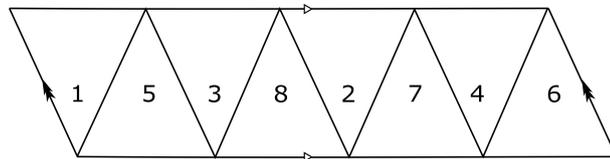


Figura 7: Fronteira da vizinhança de v

Note agora que todo ponto em $M - \{v\}$ possui uma vizinhança homeomorfa a uma bola aberta B^3 em \mathbb{R}^3 . Daí, $M - \{v\}$ é uma variedade topológica de dimensão 3.

Proposição 4.24. $M - \{v\}$ é homeomorfo a $\mathbb{S}^3 - \mathbb{L}$.

Demonstração. Primeiramente, vamos definir o seguinte complexo celular K^1 mergulhado em \mathbb{S}^3 . As 1-células são numeradas de 1-6 com orientações indicadas como na figura seguinte:

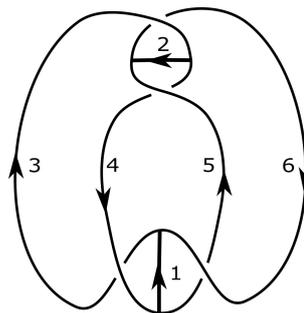


Figura 8: Nó com duas 1-células coladas

Agora colamos quatro 2-células para formar o complexo celular K^2 :

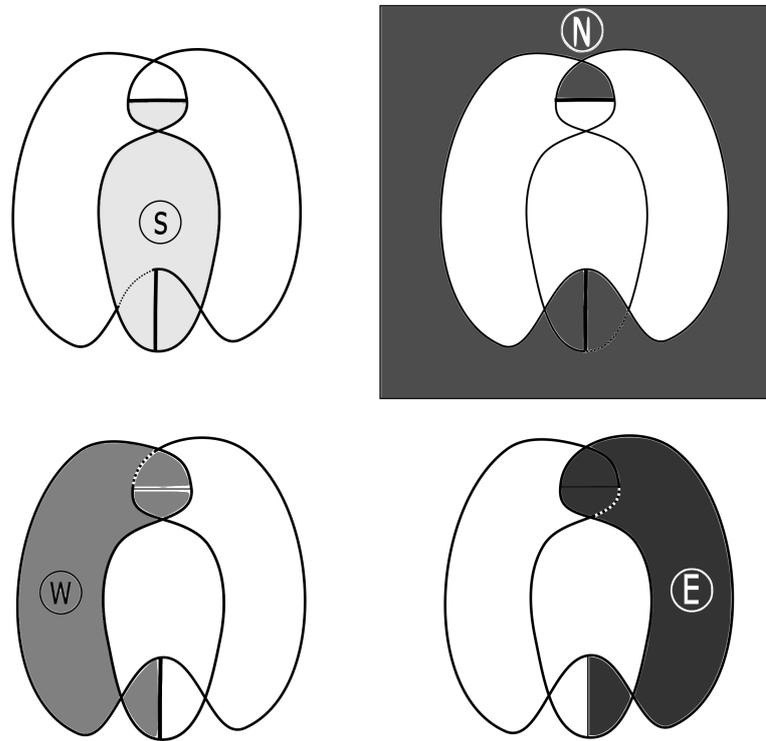


Figura 9: 2-células N, S, W e E coladas em K^1

$\mathbb{S}^3 - K^2$ é homeomorfo a duas bolas abertas disjuntas de dimensão 2. A saber, temos que $\mathbb{S}^3 - K^1$ é homeomorfo a $\mathbb{S}^3 - K_1^1$, onde K_1^1 é o seguinte complexo celular:

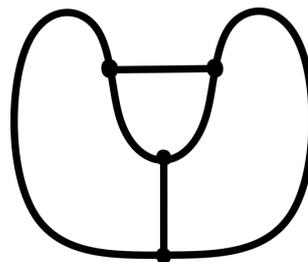


Figura 10: K_1^1

Podemos deixar fixo K^1 , a não ser em vizinhança da 1-célula numerada por 1:

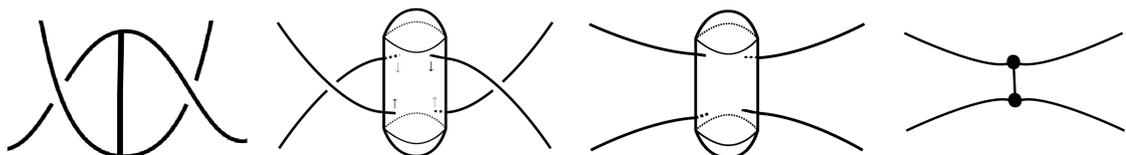


Figura 11: Vizinhança da 1-célula 1

Podemos fazer um processo análogo numa vizinhança da 1-célula numerada por 2. Daí, temos que $\mathbb{S}^3 - K^1$ é homeomorfo a $\mathbb{S}^3 - K_1^1$. Portanto, esse homeomorfismo aplica $\mathbb{S}^3 - K^2$ no complemento em \mathbb{S}^3 do seguinte complexo celular K_1^2 :

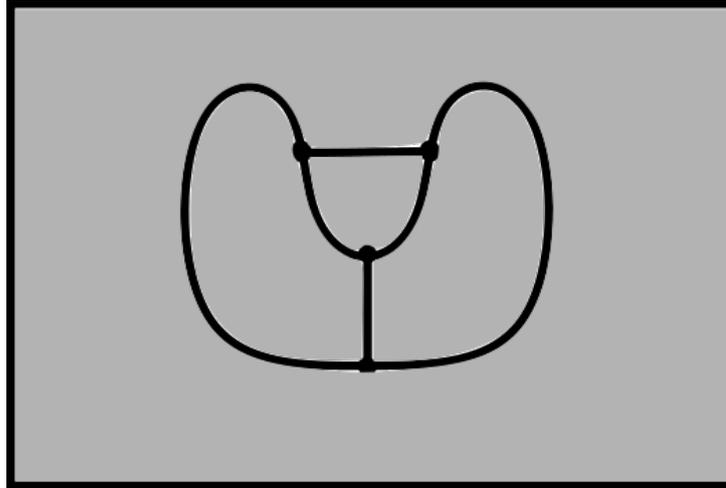


Figura 12: Complexo celular K_1^2

Como o complemento de K_1^2 em \mathbb{S}^3 é homeomorfo a duas bolas abertas disjuntas, temos, como afirmado que $\mathbb{S}^3 - K^2$ é homeomorfo a duas bolas abertas. Agora basta identificar como as 2-células E, W, N e S serão coladas umas com as outras. Em $\mathbb{S}^3 - K^2$ há duas bolas abertas, B e B' , onde B é a bola aberta acima de K^2 na figura seguinte e B' a bola em baixo de K^2 na figura seguinte.

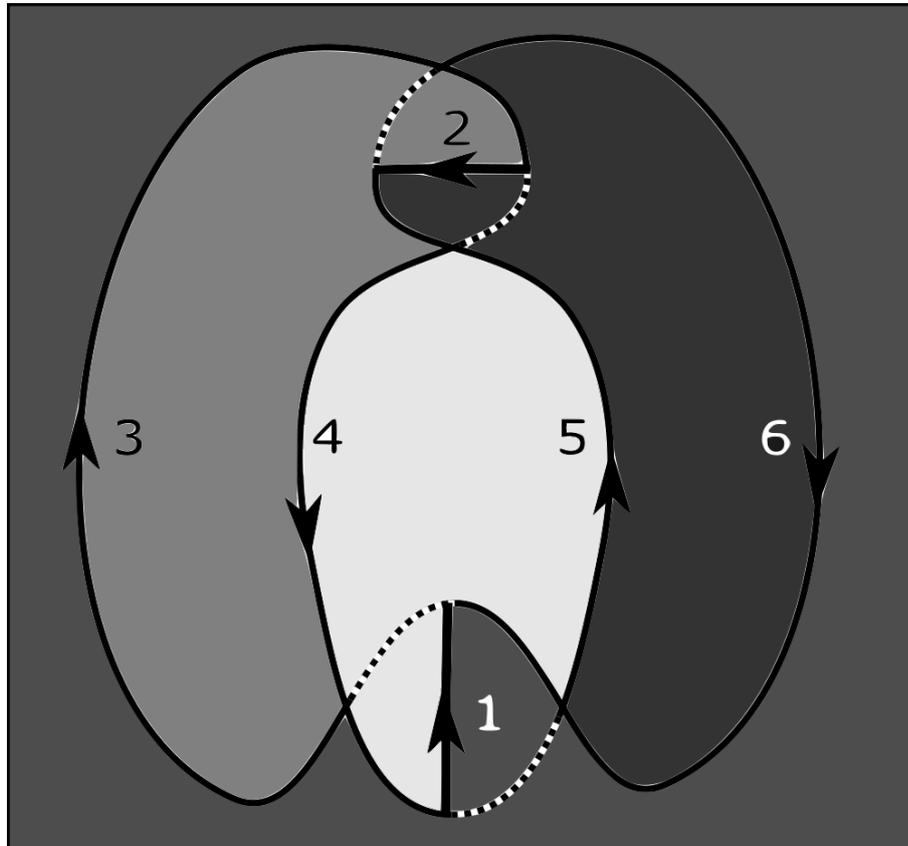


Figura 13: Complexo celular K^2

B e B' farão o papel dos tetraedros. A seguir ilustraremos como as vizinhanças das 1-células 1 e 2 se comportam:

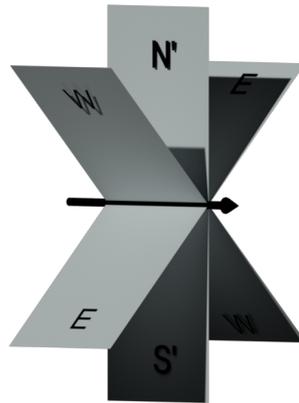


Figura 14: Ao redor da 1-célula 1

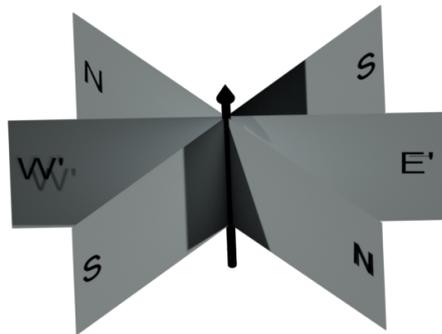


Figura 15: Ao redor da 1-célula 2

onde indicaremos por N' , S' , W' e E' as 2-células vistas do interior de B' . Para entender como as 2-células serão coladas na fronteira de B , vamos nos basear na seguinte figuras. Podemos distorcer a 2-célula N da seguinte forma:

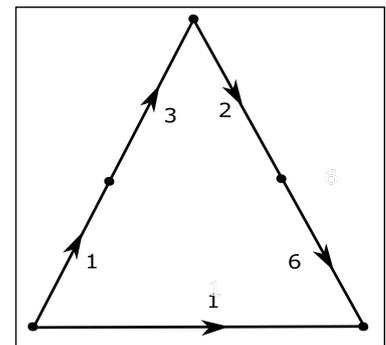
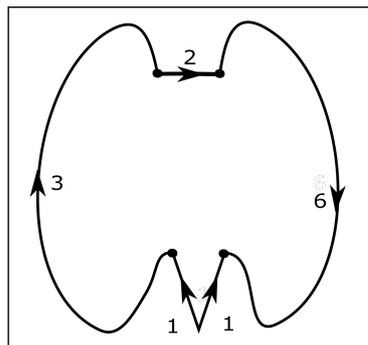
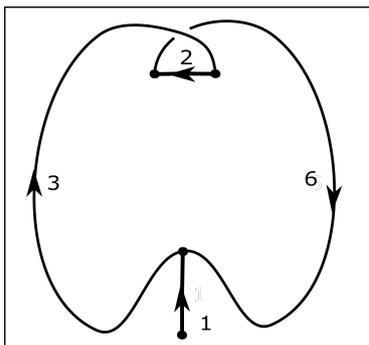


Figura 16: N distorcendo

A 2-célula S será colada em N pela 1-célula 1, basta verificar na figura da vizinhança da 1-célula 1.

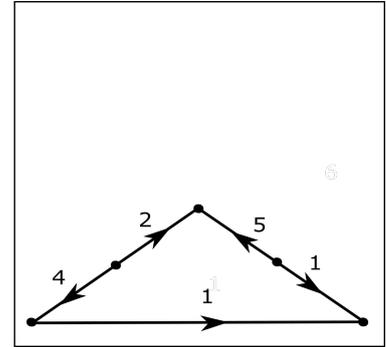
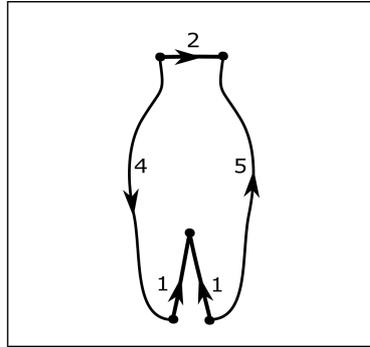
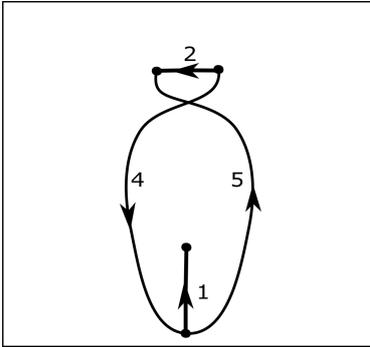


Figura 17: S distorcendo

A 2-célula W será colada em N pelas 1-células 2 e 6. Podemos distorcer W da forma como indicado na figura:

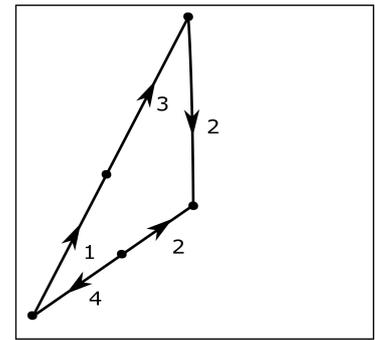
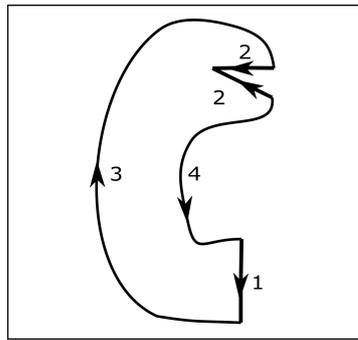
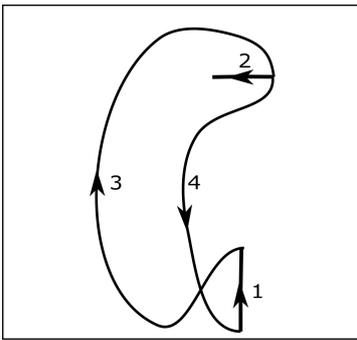


Figura 18: W distorcendo

De forma análoga, podemos distorcer E como na figura seguinte:

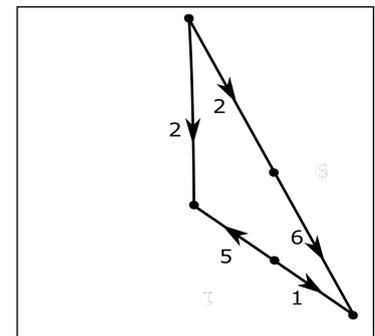
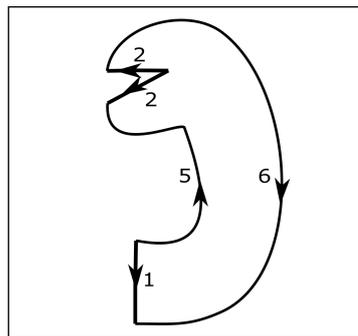
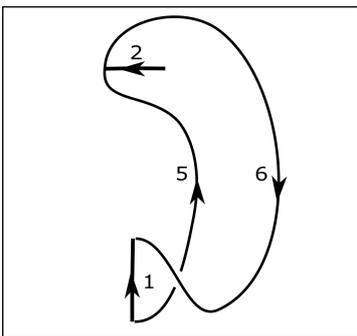


Figura 19: E distorcendo

Como as 2-células foram distorcidas convenientemente, podemos ver uma superfície homeomorfa a fronteira de B na seguinte figura, onde as 2-células são coladas dessa forma com base nas Figuras 14 e 15.

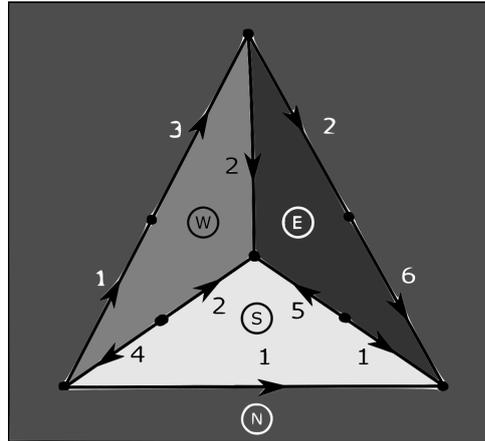


Figura 20: Fronteira de B vista do interior de B

fazendo um processo análogo a fronteira de B' , temos que a fronteira de B' é homeomorfa a seguinte figura:

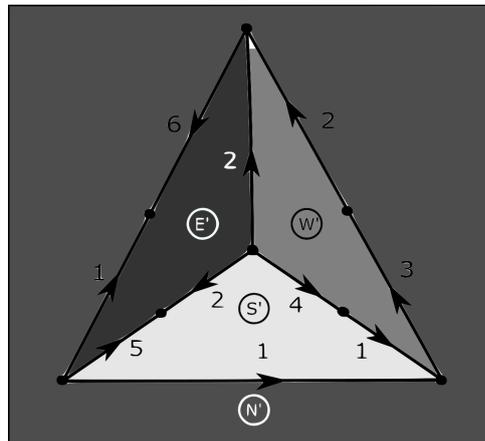


Figura 21: Fronteira de B' vista do interior de B'

Agora como as 0-células com as 1-células 3, 4, 5 e 6 formam o nó Figura Oito, podemos colapsar a 1-células que formam o nó Figura oito da seguinte maneira:

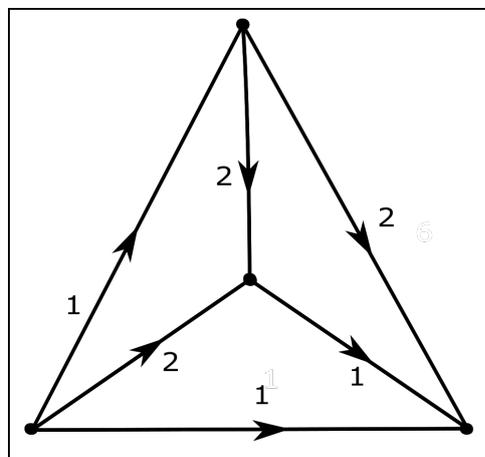


Figura 22: Fronteira de B vista do interior de B com as arestas que formam o nó Figura Oito colapsados nos vértices

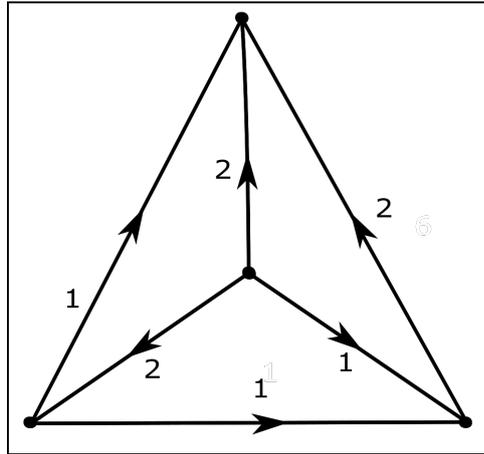


Figura 23: Fronteira de B' vista do interior de B' com as arestas que formam o nó Figura Oito colapsados nos vértices

Agora podemos enxergar os tetraedros homeomorfos a B e B' :

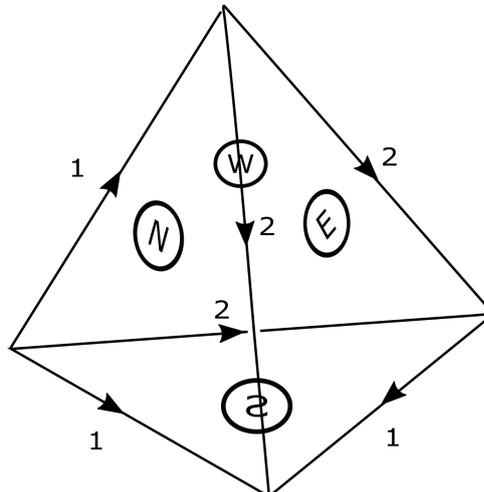


Figura 24: Tetraedro homeomorfo a B

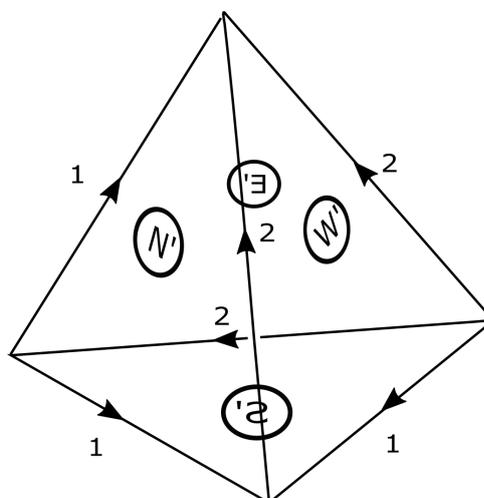


Figura 25: Tetraedro homeomorfo a B'

Agora para o tetraedro homeomorfo a B ficar igual ao primeiro tetraedro da

figura 5 e o tetraedro homeomorfo a B' ficar igual ao segundo tetraedro da 5, basta girar os dois tetraedros da seguinte forma:

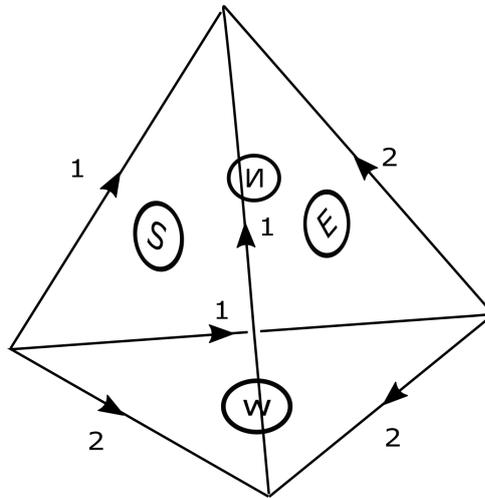


Figura 26: Tetraedro homeomorfo a B girado

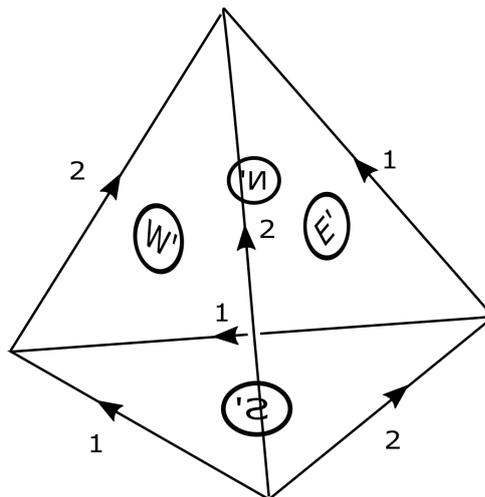


Figura 27: Tetraedro homeomorfo a B' girado

Portanto, $M - \{v\}$ é homeomorfo a $\mathbb{S}^3 - \mathbb{L}$ como afirmado.

□

Definição 4.25. Um n -simplexo ideal é um poliedro ideal não-degenerado determinado por $n + 1$ pontos em \mathbb{S}_∞^{n-1} . Um 3-simplexo ideal também pode ser chamado de **tetraedro ideal**.

Vamos abusar a notação chamando os $n + 1$ pontos, que determinam um n -simplexo ideal, de **vértices**.

Definição 4.26. Um n -simplexo ideal é chamado de **regular** se para toda permutação de vértices existe uma isometria hiperbólica tal que a extensão permuta os vértices de acordo com a permutação.

Vamos construir um tetraedro ideal regular. Seja um tetraedro regular euclidiano com vértices em \mathbb{S}_∞^{n-1} . Tome Δ o tetraedro ideal determinado pelos vértices do

tetraedro euclidiano. Δ é regular pois podemos achar uma transformação ortogonal euclidiana que permuta os vértices, tal transformação restrita a \mathbb{D}^3 é uma isometria como no Exemplo 3.8.

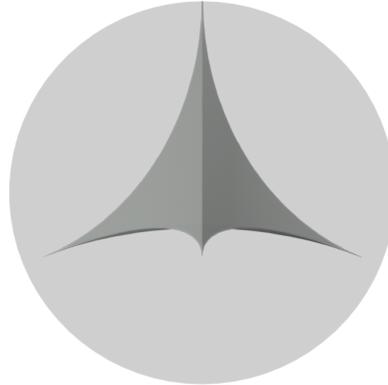


Figura 28: Tetraedro ideal regular

Agora vamos colar as faces de duas cópias de Δ através de isometria de \mathbb{H}^n como tínhamos feito com tetraedro euclidianos da figura 5. É claro que esse quociente é homeomorfo a M (quociente dos tetraedros euclidianos). Portanto, chamaremos esse novo quociente de M também. Vamos mostrar que as condições da proposição 4.23 são satisfeitas por $M - \{v\}$. Daí, como $M - \{v\}$ é homeomorfo a $\mathbb{S}^3 - \mathbb{L}$, $\mathbb{S}^3 - \mathbb{L}$ herda uma estrutura hiperbólica.

Para o seguinte lema, precisamos observar que para quaisquer dois $(n - 1)$ -hiperplanos em \mathbb{H}^n , que se intersectam, formam o mesmo ângulo em qualquer ponto de interseção. Para isso, basta notar que podemos aplicar uma isometria H a \mathbb{H}^n tal que um ponto de interseção entre os $(n - 1)$ -hiperplanos seja levado 0. Daí, as imagens dos $(n - 1)$ -hiperplanos serão dois $(n - 1)$ -planos euclidianos passando por 0. Para as imagens é claro que formam o mesmo ângulo independente do ponto de interseção escolhido. Como H é isometria, H preserva ângulos. Portanto, a afirmação é de fato válida.

Lema 4.27. Seja F_1, F_2 e F_3 faces de um tetraedro ideal de \mathbb{H}^3 e β_{12}, β_{23} e β_{13} os ângulos internos entre as faces indicadas pelos índices. Então $\beta_{12} + \beta_{23} + \beta_{13} = \pi$

Demonstração. Vamos trabalhar em \mathbb{U}^3 . Digamos que um dos vértices do tetraedro ideal é ∞ (A menos da aplicação de uma isometria, isso é verdade). Portanto, podemos assumir que F_1, F_2 e F_3 são planos euclidianos perpendiculares a $\partial\mathbb{U}^3$. Portanto, β_{12}, β_{23} e β_{13} são ângulos internos de um triângulo formado pelos três planos euclidianos (F_1, F_2 e F_3). Daí, lembrando que a métrica em \mathbb{U}^3 é conforme com a euclidiana e a soma dos ângulos internos de triângulo euclidiano, temos $\beta_{12} + \beta_{23} + \beta_{13} = \pi$. \square

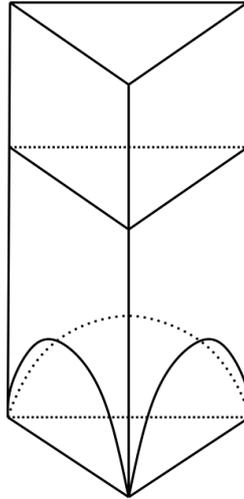


Figura 29: tetraedro ideal em \mathbb{U}^3

Corolário 4.28. *Em um tetraedro ideal regular de qualquer ângulo entre suas faces é $\pi/3$.*

Demonstração. Como existe uma isometria para cada permutação de vértices do tetraedro ideal regular, o ângulo diedral é o mesmo para a interseção entre quaisquer faces. Portanto, pelo Lema 4.27, $3\beta = \pi \implies \beta = \frac{\pi}{3}$, onde β é o ângulo entre duas facetas. \square

Pelo Corolário 4.28 e 4.23, o emparelhamento dos dois tetraedros ideais regulares é próprio. E pela Proposição 4.22, a colagem dos tetraedros tem estrutura hiperbólica. Portanto, o complemento do nó Figura Oito em \mathbb{S}^3 possui estrutura hiperbólica.

5 CONCLUSÃO

Nesse trabalho, além de estudar os aspectos básicos do Espaço Hiperbólico, criamos um critério geométrico para que uma colagem de polígonos ou poliedro sejam localmente isométrico a espaço hiperbólico baseado somente na colagem e soma dos ângulos, a saber, proposições 4.22 e 4.15. Assim, definimos a chamadas (X, G) -variedades que são exemplos de variedades riemannianas que são localmente isométricos a $X = \mathbb{H}^3, \mathbb{H}^2, \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3$ ou \mathbb{R}^2 .

REFERÊNCIAS

LACKENBY, Marc. **Hyperbolic manifolds (Graduate Course, Hilary 2000)**, 2000. Disponível em: <<http://people.maths.ox.ac.uk/lackenby/>>. Acesso em: 21 jan. 2017.

RATCLIFFE, John G. **Foundations of hyperbolic manifolds**. New York: Springer, 2006.

THURSTON, William P. **Three-Dimensional geometry and topology**. Princeton: Princeton University Press, 1997.