GEOMETRIA MÉTRICA ALEATÓRIA

ISRAEL ANDRADE DE OLIVEIRA

9

MONOGRAFIA SUBMETIDA À COORDENAÇÃO DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA, COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

FORTALEZA - 1987

Esta Monografia foi submetida como parte dos requisitos necessários a obtenção do Grau de Mestre em Matemática, outorgado pela Universidade Federal do Ceará, e encontra-se a disposição dos interessados na Biblioteca Central da referida Universidade.

A citação de qualquer trecho desta Monografia é permitida, desde que seja feita de conformidade com as normas da ética científica.

Israel Andrade de Oliveira

MONOGRAFIA APROVADA EM, 09/03/87

Airton Fontenele Sampaio Xavier
Orientador

Gauss Moutinho Cordeiro

José de Anchieta Delgado

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Airton Fontenele Sampaio Xavier, pelas orientações na elaboração desta Monografia.

Ao Professor Guilherme Lincoln Aguiar Ellery, meu primeiro orientador.

À Comissão de Tese, pelas observações e esclarecimentos.

A todos os Professores da Pós-Graduação em Matemática pelo incentivo ao longo de todo o meu curso.

Ao funcionário do Departamento de Matemática da UFC, Sr. José Alves Ferreira (FERREIRA), pelo caprichoso serviço de datilografia.

SUMÁRIO

	página
INTRODUÇÃO	1
1 - ESPAÇO MÉTRICO PROBABILÍSTICO	2
1.1 - A Noção de Espaço Métrico Probabilístico	2
1.2 - Normas Triangulares. Espaço de Menger	4
1.3 - Espaço de Wald	6
1.4 - Exemplos de E M P	11
1.5 - Espaço Métrico Probabilístico Generalizado	24
1.6 - Topologia nos E M P	29
2 - COMPRIMENTO ALEATÓRIO DE ARCOS	33
2.1 - Conceituação. Pseudo-Inversas	33
2.2 - Arcos Equivalentes	38
2.3 - Condição de Regularidade	39
2.4 - Comprimento de Arcos nos Espaços Métricos	44
2.5 - "Aditividade" de Arcos	45
2.6 - Comprimento Aleatório de Arcos nos E N P	48
2.7 - Exemplos	49
3 - INTERMEDIARIDADE	57
3.1 - Introdução	57
3.2 - Intermediaridade de Wald	59
3.3 - Intermediaridade de Menger	67
3.4 - Intermediaridade Probabilística	73
3.5 - Intermediaridade do Comprimento Aleatório de Arcos ...	80
BIBLIOGRAFIA	

INTRODUÇÃO

Ao procurar o Professor Xavier e me colocar sob a sua orientação para a monografia, ele, inicialmente, me apresentou o seu trabalho "Contribuição ao Estudo dos Espaços Métricos Probabilísticos" para uma leitura inicial; o assunto muito me agradou.

Começamos então com algumas idéias geométricas dos Espaços Métricos (Blumenthal (1953)), passando depois para Comprimento Aleatório de Arcos (Xavier (1979)), para concluirmos com Intermediaridade (Moynihan & Schweizer (1979)).

Por outro lado, para aclarar noções e idéias, tivemos de consultar diversos outros trabalhos constantes da bibliografia, entre livros e artigos; destes últimos, alguns foram por nós estudados na íntegra.

Assim conseguimos concluir e estamos apresentando esta monografia tratando de alguns conceitos sobre os *Espaços Métricos Probabilísticos* (Cap. 1), sobre *Comprimento Aleatório de Arcos* (Cap. 2) e ainda sobre *Intermediaridade* (Cap. 3), isto é: sobre como "um ponto está entre outros dois".

1 - ESPAÇOS MÉTRICOS PROBABILÍSTICOS

1.1 - A Noção de Espaço Métrico Probabilístico

Deve-se a *Menger* (1942) e a *Wald* (1943) a introdução do conceito de *Espaço Métrico Probabilístico* (E M P), como uma generalização da teoria dos Espaços Métricos. A ideia básica é considerar a distância entre dois pontos p e q dada através de uma função de distribuição F_{pq}.

Por sua vez, *Schweizer* e *Sklar* (1960) consideraram o uso de T-Normas (ou Normas Triangulares) para simular a desigualdade triangular, introduzindo, assim, o conceito de *Espaço de Menger*.

Posteriormente, *Serstnev* (1965) introduziu nova desigualdade, incluindo todas as consideradas anteriormente, como casos particulares; a noção de *Espaço Métrico Probabilístico Generalizado*, daí decorrente, trabalha com as chamadas funções triangulares τ.

Neste capítulo introdutório queremos recapitular algumas definições e resultados fundamentais, contidos nesses trabalhos e em outros que serão referidos posteriormente. Iniciaremos com detalhes de notação.

Assim Δ^+ representará a classe das funções de distribuição $F:\mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$, não decrescentes, contínuas à esquerda, com ínfimo 0 (zero) e supremo 1 (um), tais que $F(0) = 0$.

Em particular $H_0 \in \Delta^+$ é a função assim definida:

$H_o(x) = 0$ se $x \leq 0$ e $H_o(x) = 1$ se $x > 0$; Por outro lado, para cada real $a > 0$ definiremos $H_a \in \Delta^+$, deste modo: $H_a(x) = H_o(x - a)$, para todo x. Outros elementos de notação serão apresentados ao longo do trabalho.

1.1.1 - Definição: Um *Espaço Métrico Probabilístico* (E M P) é um par (S, F) onde S é um conjunto não vazio e F é uma função de $S \times S$ em Δ^+[notaremos $F(p, q) = F_{pq}$] satisfazendo os seguintes axiomas:

(P1) $F_{pq} = H_o \Longleftrightarrow p = q$

(P2) $F_{pq}(0) = 0$

(P3) $F_{pq} = F_{qp}$

(P4) $F_{pr}(x) = F_{rq}(y) = 1 \Longrightarrow F_{pq}(x+y)=1$;

onde p, q e r são elementos de S e x e y são reais.

Observemos que (P4) é uma forma fraca de "desigualdade triangular estocástica". Por exemplo, se as F não atingirem o valor 1, ela vale por vacuidade. Esta definição de E M P é uma generalização do conceito de Espaço Métrico, no sentido de que todo Espaço Métrico traz dentro de si um EMP. Isto fica mais claro com a proposição seguinte

1.1.2 - Proposição: (i) Se (S, d) é um Espaço Métrico, então (S, F_d) é um E M P onde $F_d(p,q) = F_{pq} = H_{d(p,q)}$;

(ii) Se (S, F) é um E M P rígido [isto é: $F_{pq} = H_{a(p,q)}$ onde $a(p,q) \geq 0$ qualquer que sejam p e q em S] então (S, d) é um Espaço Métrico, com $d(p,q)=a(p,q)$.

Demonstração: (i) (P1), (P2) e (P3) são evidentes.

(P4) $F_{pr}(x) = 1 \Longrightarrow H_o(x-d(p,r)) = 1 \Longrightarrow x > d(p,r)$;

$F_{rq}(y) = 1 \Longrightarrow H_o(y-d(r,q)) = 1 \Longrightarrow x > d(r,q)$;

assim, $x + y > d(p,r) + d(r,q) \geq d(p,q)$ e

$F_{pq}(x + y) = H_o(x + y - d(p,q)) = 1$

(ii) 1. $d(p,q) = a(p,q) \geq 0$

2. $d(p,q) = a(p,q) = 0 \Longleftrightarrow F_{pq} = H_o \Longleftrightarrow p = q$

3. $F_{pq} = F_{qp} \Longrightarrow a(p,q) = a(q,p)$, isto é: $d(p,q)=d(q,p)$

4. $F_{pr}(a(p,r)) + \varepsilon/2) = 1 \quad \forall\, \varepsilon > 0$

$F_{rq}(a(r,q)) + \varepsilon/2) = 1 \quad \forall\, \varepsilon > 0$ então

$F_{pq}(a(p,r) + a(r,q) + \varepsilon) = 1 \quad \forall\, \varepsilon > 0$ o que significa $a(p,r) + a(r,q) + \varepsilon > a(p,q)$ ou

$a(p,r) + a(r,q) \geq a(p,q)$, isto é:

$d(p, d) \leq d(p, r) + d(r, q)$. ■

1.2 - Normas Triangulares. Espaço de Menger

Nesta secção tomamos conhecimento dos Espaços de Menger, os quais já envolvem uma desigualdade triangular estocástica forte. Nestes espaços intervêm as chamadas normas triangulares que iremos, de início, estudar.

1.2.1 - Definição: Uma *Norma Triangular* (ou T-Norma) é qualquer aplicação $T:[0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0,1]$ satisfazendo as seguintes condições:

(T1) $T(a,1) = a$;

(T2) $T(a,b) \leq T(c,d)$ se $a \leq c$ e $b \leq d$;

(T3) $T(a, b) = T(b, a)$;

(T4) $T(T(a, b), c) = T(a, T(b, c))$;

(T5) T é contínua à esquerda;

com a, b, c e d em $[0, 1]$.

De imediato, podemos constatar que $T(0,0) = 0$.

As normas que mais se farão presentes em nosso trabalho são:

Min : $\mathrm{Min}(x, y) = \mathrm{Min}\{x, y\}$

Prod : $\mathrm{Prod}(x, y) = x.y$

T_m : $T_m(x, y) = \mathrm{Max}\{x + y - 1, 0\}$

Note-se que Min é a *mais forte* das normas triangulares, no sentido de que $T \leq \mathrm{Min}$, qualquer que seja T; por outro lado, existe uma norma *mais fraca* que todas as demais, a saber:

$$T_w : \begin{cases} T_w(x, y) = x \quad \text{se } y = 1 \text{ (e igual a } y \text{ se } x = 1) \\ T_w(x, y) = 0 \quad \text{se } x < 1 \text{ e } y < 1. \end{cases}$$

A condição (T5), a continuidade à esquerda, pode também ser caracterizada através da continuidade à esquerda em cada uma das coordenadas. Agora, podemos apresentar a definição do Espaço de Menger conforme *Schweizer* e *Sklar* (1960):

1.2.2 - Definição: Um *Espaço de Menger* é um terno (S, F, T) onde (S, F) satisfazem os axiomas (P1), (P2) e (P3) da definição 1.1.1, enquanto T é uma norma triangular; valendo, ademais, o axioma

(P4m) $F_{pq}(x + y) \geq T(F_{pr}(x), F_{rq}(y))$;

com p, q e r em S e para todo x e y reais.

Conforme já acenamos anteriormente, (P4m) é uma forma forte da desigualdade triangular estocástica. Deste modo, é lógico, que deve implicar a desigualdade fraca (P4) da definição 1.1.1. De fato:

1.2.3 - Proposição: Um Espaço de Menger é um E M P.

Demonstração: Como os axiomas (P1), (P2) e (P3) já valem, só nos resta verificar (P4); ora, se $F_{pr}(x) = F_{rq}(y) = 1$, então

$$1 \geq F_{pq}(x + y) \geq T(F_{pr}(x), F_{rq}(y)) = T(1, 1) = 1$$

■

1.3 - Espaço de Wald

Antes de *Schweizer* e *Sklar* (1960) introduziram a noção de Espaço de Menger, já fora apresentada por Wald, em 1943, uma versão forte da desigualdade triangular estocástica, através da operação de convolução de funções de distribuição. Lembremos que, dadas F e G, seu produto de convolução $F * G$ é assim definido:

$$[F * G](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x - y)\, dG(y)$$

No nosso caso, em que F e G estão em Δ^{+}, os limites de integração podem ser tomados de 0 a x.

1.3.1 - Definição: *Um Espaço de Wald* é um par (S,F) onde valem os axiomas (P1), (P2) e (P3) da definição 1.1.1 e, ainda, vale o axioma:

(P4w) $F_{pq}(x) \geq [F_{pr} * F_{rq}](x)$ onde p, q e r são elementos de S e x é real.

Em todo Espaço de Wald é possível introduzir uma T-Norma (no caso específico $T = \text{Prod}$) obtendo-se deste modo um Espaço Menger.

1.3.2 - Proposição: Todo Espaço de Wald é um Espaço de Menger com $T = \text{Prod}$.

Demonstração: Tratando-se de um Espaço de Wald, já valem os axiomas (P1), (P2) e (P3). Então, só nos resta provar que (P4w) implica em (P4m). Ora,

$$F_{pq}(x + y) \geq [F_{pr} * F_{rq}] (x + y) =$$

$$= \int_0^{x+y} F_{pr}(x + y - z)\, dF_{rq}(z)$$

$$= \int_0^{x+y} \left[\int_0^{x+y-z} dF_{pr}(t) \right] dF_{rq}(z)$$

$$= \int_0^{x+y} \int_0^{x+y-z} dF_{pr}(t) . dF_{rq}(z)$$

$$= \iint\limits_{\substack{0 \leq z \leq x+y \\ 0 \leq t \leq x+y-z}} dF_{pr}(t) . dF_{rq}(z) \qquad [\ A\ ]$$

$$\geq \iint_{\substack{0 \leq z \leq y \\ 0 \leq t \leq x}} dF_{pr}(t) \cdot dF_{rq}(z) \qquad [\, B \,]$$

$$= \int_0^y dF_{rq}(z) \cdot \int_0^x dF_{pr}(t)$$

$$= F_{pr}(x) \cdot F_{rq}(y)$$

Observemos que a integral [A] é sobre um triângulo enquanto [B] é sobre um retângulo contido no referido triângulo, donde a desigualdade entre as duas integrais.

∎

1.3.2a - Corolário: Todo Espaço de Wald é um E M P.

Em todo Espaço de Wald podemos definir uma métrica e, mais uma vez, observamos que os E M P são generalizações de Espaços Métricos. Para definirmos esta métrica, precisamos do seguinte lema:

1.3.3 - Lema: Se F e G estão em Δ^+, então, para todo $x > 0$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\, d[F * G](x) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dF(x) \cdot \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dG(x)$$

Demonstração: Teremos necessidade, aqui, de um argumento de caráter probabilístico, o qual será indicado a seguir. De fato, estando F e G em Δ^+, podemos pensá-las como funções de distribuição associadas a variáveis aleatórias X e Y, independentes e não negativas, isto é: $F = F_X$ e

$G = F_Y$. Um resultado clássico nos garante que $F * G = F_{X+Y}$, desde que X e Y sejam tomadas como variáveis aleatórias independentes. Ora, é também conhecido que e^{-X} e e^{-Y} são igualmente independentes. Segue-se, então:

$$E(e^{-(X+Y)}) = E(e^{-X} \cdot e^{-Y}) = E(e^{-X}) \cdot E(e^{-Y}) .$$

Mas: $$E(e^{-X}) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dF(x) ;$$

$$E(e^{-Y}) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dG(x) ;$$

e $$E(e^{-(X+Y)}) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, d[F * G](x)$$

destas igualdades segue o lema.

■

1.3.4 - Proposição: Seja (S, F) um Espaço de Wald; então, $d : S \times S \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante

$$d(p, q) = -\log \int_0^{+\infty} e^{-e}\, dF_{pq}(x) ,$$

é uma métrica em S.

Demonstração: Inicialmente observemos que $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dF_{pq}(x) > 0$,

pois $e^{-x} > 0$ e $F_{pq}(x) > 0$ se $x > 0$.

Se $p = q$ então $F_{pq}(x) = H_o(x) = 1$ para $x > 0$ e

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dF_{pq}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1$$

Se $p \neq q$ então existe $x_o > 0$ tal que $0 < F_{pq}(x_o) < 1$, donde:

$$0 < \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dF_{pq}(x) = \int_0^{+x_o} e^{-x}\, dF_{pq}(x) + \int_{x_o}^{+\infty} e^{-x}\, dF_{pq}(x)$$

$$\leq \int_0^{x_o} dF_{pq}(x) + e^{-x_o} \cdot \int_{x_o}^{+\infty} dF_{pq}(x)$$

$$= F_{pq}(x_o) + e^{-x_o} \cdot (1 - F_{pq}(x_o)) < 1$$

Sendo $d(p, q) = -\log \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dF_{pq}(x)$, segue-se

$$d(p, q) \geq 0 \quad e \quad d(p,q) = 0 \iff p = q .$$

Quanto à demonstração de que $d(p, q) = d(q, p)$, nada exige. Usando agora o Lema 1.3.3, temos:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dF_{pr}(x) \cdot \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dF_{rq}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, d\left[F_{pr} * F_{rq}\right](x) =$$

$$= \left[e^{-x} \cdot (F_{pr} * F_{rq})(x)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \left[F_{pr} * F_{rq}\right](x) \cdot d(e^{-x})$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot \left[F_{pr} * F_{rq}\right](x)$$

$$\leq \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dF_{pq}(x)$$

de onde concluimos:

$$d(p, r) + d(r, q) = -\log\left[\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dF_{pr}(x) \cdot \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dF_{rq}(x)\right]$$

$$\geq -\log \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dF_{pq}(x)$$

$$= d(p,q).$$

∎

1.4 - Exemplos de E M P

Nesta secção apresentaremos alguns exemplos de E M P e suas propriedades mais marcantes. Ao longo do desenvolvimento de nosso trabalho voltaremos a nos referir a estes mesmos espaços.

1.4.1 - Exemplo: *Espaço Equilátero*.

1.4.1a - Definição: (S, F) é um *Espaço Equilátero* se existe G em Δ^+ com $G \neq H_o$ tal que

$$F_{pq} = \begin{cases} H_o & \text{se} \quad p = q \\ G & \text{se} \quad p \neq q \end{cases}$$

É fácil verificar que todo Espaço Equilátero é um Espaço de Menger com T = Min e, também, é um Espaço de Wald.

1.4.2 - Exemplo: *Espaço Simples*

1.4.2a: Definição: (S, F) é um *Espaço Simples* se existem d em S e uma G em Δ^+ tais que

$$F_{pq}(x) = \begin{cases} H_o(x) & \text{se } p = q \\ G(x/d(p,q)) & \text{se } p \neq q \end{cases}$$

Nestas condições dizemos que (S, F) é o "Espaço Simples gerado pelo Espaço Métrico (S,d) e pela função de distribuição G".

Uma desigualdade elementar dos reais ser-nos-á útil na demonstração de que um Espaço Simples é um Espaço de Menger. Recordemos esta desigualdade: se $x/a \leq y/b$ então $x/a \leq (x+y)/(a+b) \leq y/b$.

1.4.2b - Proposição: Todo Espaço Simples é um Espaço de Menger com $T = \mathrm{Min}$.

Demonstração: Como (P1), (P2) e (P3) não apresentam dificuldades, verifiquemos apenas (P4m):

$$\begin{aligned} T(F_{pr}(x), F_{rq}(y)) &= T(G(x/d(p,r)), G(y/d(r,q))) \\ &= \mathrm{Min}\{G(x/d(p,r)), G(y/d(r,q))\} \\ &= G(\mathrm{Min}\{(x/d(p,r)), (y/d(r,q))\}) \\ &\leq G({}^{x+y}/_{d(p,r)+d(r,q)}) \\ &\leq G({}^{x+y}/_{d(p,q)}) \\ &= F_{pq}(x + y). \end{aligned}$$

■

Um resultado curioso refere-se aos momentos de ordem k das variáveis aleatórias X_{pq} cujas funções de distribuição sejam as F_{pq}; lembremos que estes momentos são calculados pela integral:

$$E(X_{pq}^k) = \int_0^{+\infty} x^k \, dF_{pq}(x); \quad \text{assim,}$$

1.4.2c - Proposição: No Espaço Simples (S, $\mathcal{F}$) gerado por um Espaço Métrico (S, d) e por $G \neq H_o$, as raízes k-ésimas dos momentos de ordem k, se existirem, originam um espaço homotético ao espaço (S, d).

A demonstração desta proposição não apresenta dificuldade e por esta razão é omitida.

1.4.3 - Exemplo: *Espaço Normado Probabilístico*

Serstnev (1965) introduziu o conceito de Espaço Normado Probabilístico utilizando uma lei de composição interna τ que confere a Δ^+ a estrutura de semi-grupo. Mais adiante, consideraremos tais funções no contexto dos Espaços Métricos Probabilísticos Generalizados. Aqui queremos apresentar uma definição num contexto mais simples.

1.4.3a - Definição: Um *Espaço Normado Probabilístico* (ENP) é um par (S, N), onde S é um Espaço Linear Real e N uma aplicação de S em Δ^+, de sorte que:

(N1) $N_p = H_o \iff p = 0$

(N2) $N_p(0) = 0$

(N3) $N_{ap}(x) = N_p(x/|a|)$

(N4) $N_p(x) = N_q(y) = 1 \Longrightarrow N_{p+q}(x+y)=1$

ou

(N4m) $N_{p+q}(x+ y) \geq T(N_p(x), N_q(y))$,

onde T é uma norma triangular, p e q são elementos de S e x, y e a são reais.

Note-se que em vez de N(p) escrevemos, simplesmente, N_p.

Um resultado imediato é que todo E N P é um E M P, de modo que os E N P são casos particulares dos E M P.

1.4.3b - **Proposição:**

(i) Todo E N P é um E M P.

(ii) Se no E N P vale (N4m) então o Espaço é de Menger,

Demonstração: É suficiente tomarmos $F:S \times S \longrightarrow \Delta^+$ assim definida: $F_{pq} = N_{p-q}$. A verificação dos axiomas é simples e imediata.

1.4.4 - **Exemplo:** *E M P (Pseudo-)Metricamente Gerado*

Nesta secção queremos tomar conhecimento de uma classe bastante geral de E M P, ditos Metricamente Gerados e Pseudo-Metricamente Gerados. Tomaremos por base os artigos de *Stevens* (1968) e *Nishiura* (1970).

1.4.4a - Definição. Sejam S um conjunto não vazio, $\mathcal{D}$ uma coleção de métricas em S e μ uma medida definida numa σ-álgebra de partes de $\mathcal{D}$, de sorte que:

[1] $D = \{d \in \mathcal{D} \mid d(p,q) < x\}$ é μ-mensurável, $\forall\ p, q \in S$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$;

[2] $\mu(\mathcal{D}) = 1$.

Então, o E M P *Metricamente Gerado* por $(S,\mathcal{D},\mu)$ é o par (S, F), onde F se define mediante:

[3] $F_{pq}(x) = \mu\{d \in \mathcal{D} \mid d(p, q) < x\}$,

para todo p e q em S e qualquer x real.

Se as d são Pseudo-Métricas (em vez de Métricas) falamos que o E M P é *Pseudo-Metricamente Gerado*.

Lembremos que numa pseudo-métrica podemos ter pontos distintos p e q, cuja distância é nula.

Como já fizemos nos exemplos anteriores, vamos mostrar, também, que um Espaço Metricamente Gerado é um E M P; aliás, é até um Espaço de Menger.

1.4.4b - Proposição: Seja (S, F) um Espaço Métricamente Gerado, então

(i) (S, F) é um E M P ;

(ii) (S, F) é um Espaço de Menger com a norma T_m;

(iii) Cada F_{pq} é contínua em zero (naturalmente, se $p \neq q$).

Demonstração: A demonstração desta proposição, apesar de longa, é ilustrativa de certos fatos e, por isto, vamos apresentá-la completa.

(i) (P1) Se $p = q$ e $x > 0$ então $0 = d(p, q) < x$, $\forall\ d \in \mathcal{D}$, e $F_{pq}(x) = \mu\{d \in \mathcal{D} \mid d(p,q) < x\} = \mu(\mathcal{D}) = 1$.

No outro sentido, partimos de $F_{pq}(x) = 1$, $\forall\ x > 0$; em particular $\mu\{d \in \mathcal{D} \mid d(p, q) < 1/n\} = 1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Notemos $A_n = \{d \mid d(p, q) < 1/n\}$ e observemos que $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$; então $1 = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu\{d \mid d(p, q) = 0\}$; ou seja, existe $d \in \mathcal{D}$ tal que $d(p, q) = 0$; em consequência, $p = q$.

(P2) e (P3) são evidentes.

(P4) Temos:

$$F_{pr}(x) = 1 \iff \mu\{d \mid d(p,r) < x\} = 1;$$

$$F_{rq}(y) = 1 \iff \mu\{d \mid d(r,q) < y\} = 1;$$

então

$$1 = \mu\{d \mid d(p,r) < x \text{ e } d(r,q) < y\}$$

$$= \mu\{d \mid d(p,q) < x + y\},$$

isto é,

$$F_{pq}(x + y) = 1$$

(ii) (P4m) $F_{pq}(x + y) \geq T_m(F_{pr}(x), F_{rq}(y))$

$$= \mathrm{Max}\{F_{pr}(x) + F_{rq}(y) - 1, 0\}.$$

Se $\mathrm{Max}\ \{F_{pr}(x) + F_{rq}(y) - 1, 0\}$ é igual a zero, então, a desigualdade está satisfeita. Vamos, pois, supor que $\operatorname{Max}\{F_{pr}(x) + F_{rq}(y) - 1,\ 0\}$ seja diferente de zero.

Consideremos os conjuntos $A_x = \{d \mid d(p, r) < x\}$;

$$A_y = \{d \mid d(r, q) < y\} \quad \text{e}$$

$$A_{x+y} = \{d \mid d(p, q) < x + y\},$$

donde $F_{pr}(x) = \mu(A_x)$, $F_{rq}(y) = \mu(A_y)$ e $F_{pq}(x+y) = \mu(A_{x+y})$.

Como $A_x \cap A_y \subset A_{x+y}$, então $\mu(A_x \cap A_y) \leq \mu(A_{x+y})$

e

$$\begin{aligned} F_{pq}(x + y) &= \mu(A_{x+y}) \\ &\geq \mu(A_x \cap A_y) \\ &= \mu(A_x) + \mu(A_y) - \mu(A_x \cup A_y) \\ &\geq F_{pr}(x) + F_{rq}(y) - 1 \end{aligned}$$

(iii) Suponhamos que $x_n \longrightarrow 0$ com $x_n > 0$; e seja

$E_n = \{d \mid d(p, q) < x_n\}$, para $n = 1, 2, \ldots$, onde

$p \neq q$; então, $\lim\limits_{n \to \infty} E_n = \emptyset$

e deste modo:

$$\begin{aligned} \lim_{x_n \to 0} F_{pq}(x_n) &= \lim_{n \to \infty} F_{pq}(x_n) \\ &= \lim_{n \to \infty} \mu(E_n) \\ &= \mu(\lim_{n \to \infty} E_n) \\ &= \mu(\emptyset) = F_{pq}(0) . \end{aligned}$$

Como as F_{pq} já são contínuas à esquerda, então podemos concluir que são sempre contínuas em zero, encerrando assim a demonstração. ∎

1.4.5 - Em que condições um E M P é (Pseudo-)Metricamente Gerado?

Desde o início falamos que os E M P são generalizações dos Espaços Métricos e, dado um E M P, podemos ter alguma métrica. Assim sendo, um problema que se coloca, é saber quais as condições para que um E M P seja (Pseudo-)Metricamente Gerado.

1.4.5a - Lema: Sejam (S, F) um E M P e $a \in [0, 1)$; dados p e q em S, consideremos

$d_a(p, q) = \inf \{x | F_{pq}(x) > a\}$; então:

(i) d_a é uma pseudo-métrica em S se e somente se satisfaz à condição

$$F_{pr}(x) \geq a \quad \text{e}$$

$$F_{rq}(y) \geq a \Longrightarrow F_{pq}(x + y) \geq a \qquad [\,A\,]$$

(ii) d_a é uma métrica em S se e somente se cada F_{pq} é contínua em zero (com $p \neq q$, naturalmente).

Note-se que $d_a(p, q) < x \Longleftrightarrow F_{pq}(x) > a$;

além disso, $F_{pq}(x) = \sup \{a \mid d_a(p, q) < x\}$.

A demonstração deste lema é um tanto longa e não apresenta nenhum fato novo digno de menção, sendo por esse motivo omitida.

Agora, dado (S, F), consideremos a aplicação $T_F : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ tal que:

$$T_F(a, b) = \inf\{F_{pq}(x + y) \mid F_{pr}(x) \geq a;\ F_{rq}(y) \geq b\}.$$

Esta aplicação satisfaz as propriedades (T2) e (T3) das T-Normas Triangulares (Vide 1.2.3):

(T2) $T_F(a, b) \leq T_F(c, d)$ se $a \leq c$ e $b \leq d$;

(T3) $T_F(a, b) = F_F(b, a)$;

além disso, vale com T_F a desigualdade triangular estocástica forte:

(P4m) $F_{pq}(x + y) \geq T_F(F_{pr}(x), F_{rq}(y))$;

por isto, esta aplicação T_F é chamada de *quase-norma.*

Para provarmos que os Espaços de Menger com a Norma $T = \mathrm{Min}$ são Pseudo-Metricamente Gerados, precisamos de outro lema que se refere precisamente à quase-norma T_F ;

1.4.5b - Lema: Seja (S, F) um E M P; se $T_F \geq \mathrm{Min}$ então vale a condição [A] do lema 1.4.5a; isto é:

$F_{pr}(x) \geq a$ e

$F_{rq}(y) \geq a \Longrightarrow F_{pq}(x + y) \geq a$ [A]

Demonstração: Se $F_{pr}(x) > a$ e $F_{rq}(y) > a$, então, para algum $b > a$, temos $F_{pr}(x) > b$ e $F_{rq}(y) > b$

e $T_F(b, b) = \inf\{F_{pq}(x + y) \mid F_{pr}(x) \geq b;\ F_{rq}(y) \geq b\}$;

donde, $F_{pq}(x + y) \geq T_F(b, b) \geq \mathrm{Min}(b, b) = b > a$.

■

1.4.5c - Teorema: Todo E M P que é um Espaço de Menger com $T = \mathrm{Min}$

(i) é Pseudo-Metricamente Gerado;

(ii) é Metricamente Gerado, se cada F_{pq} for contínua em zero (com $p \neq q$)

Demonstração: (i) Vamos supor, por absurdo, que

$$T_F(a, b) < \mathrm{Min}(a, b) \quad \text{então,}$$

$$F_{pq}(x + y) < \mathrm{Min}(a, b) \leq \mathrm{Min}(F_{pr}(x), F_{rq}(y))$$

o que contradiz (P4m); logo $T_F \geq \mathrm{Min}$ e pelo lema 1.4.5b vale a condição [A] o que implica, pelo lema 1.4.5a que

$$\mathcal{D} = \{d_a \mid a \in [0, 1)\}$$

é uma família de pseudo-métricas.

Vamos agora definir uma medida μ na σ-álgebra de partes de $\mathcal{D}$ do seguinte modo: dado $D \in \mathcal{D}$, então

$$\mu(D) = \lambda\{a \mid d_a \in D\},$$

onde λ é a medida de Lebesgue em $[0, 1)$.

Verifiquemos as condições [1], [2] e [3] da definição 1.4.4a:

[1] $\mu\{d_a \mid d_a(p,q) < x\} = \lambda\{a \mid d_a(p, q) < x\}$ o que nos diz ser $\{d_a \mid d_a(p, q) < x\}$ μ-mensurável.

[2] $\mu(\mathcal{D}) = \mu\{d_a \mid d_a \in \mathcal{D}\}$

$$= \lambda\{a \mid d_a \in \mathcal{D}\} = \lambda[0, 1) = 1$$

[3] tem-se $F_{pq}^{1}(x) = \mu\{d_a \in \mathcal{D} \mid d_a(p, q) < x\}$

$$= \lambda\{a \mid d_a(p, q) < x\}$$

$$= \lambda\{a \mid F_{pq}(x) > a\}$$

$$= \lambda[0, F_{pq}(x))$$

$= F_{pq}(x)$; assim, concluimos ser $(S, \mathcal{F})$ Pseudo-Metricamente Gerado.

(ii) Esta segunda parte decorre imediata da parte (ii) do lema 1.4.5a.

■

Corolário: Um Espaço Simples (ver 1.4.2) é Metricamente Gerado se e somente se a função G é contínua em zero.

1.4.6 - Exemplo: *E-Espaço*

Sherwood (1969), tomando por base os estudos de *Stevens* (1968) sobre os Espaços Metricamente Gerados, considerou uma extensão desse conceito, que ele chamou de E-Espaço. Neste seu trabalho, no qual nos basearemos, ele demonstra as principais propriedades dos E-Espaços, concluindo pela caracterização destes, como Espaços Pseudo-Metricamente Gerados.

No que se segue, teremos necessidade de trabalhar com um Espaço de Probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, onde Ω é um conjunto não vazio, $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de partes de Ω e

$P:\Omega \longrightarrow [0, 1]$ uma probabilidade; isto é: $P(\Omega) = 1$ e se $A_1, A_2, \ldots \in \Omega$ com $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, então $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$.

1.4.6a - Definição: (S, F) é um *E-Espaço* sobre o Espaço Métrico (M, d) se S é um conjunto de funções de um Espaço de Probabilidade (Ω, A, P) sobre o Espaço Métrico (M, d) tal que

[1] para toda função p e q em S e todo real x,

$$\{t \in \Omega \mid d(p(t), q(t)) < x\} \in A \quad ;$$

[2] e F é uma aplicação de $S \times S$ em Δ^+ assim definida:

$$F_{pq}(x) = P\{t \in \Omega \mid d(p(t), q(t)) < x\}$$

Com demonstração semelhante à da proposição 1.4.4b, mostra-se que os E-Espaços são Espaços de Menger com $T = T_m$.

Os demais resultados sobre os E-Espaços falam de isometria entre espaços. Sabemos que dois Espaços Métricos são isométricos se existe uma aplicação bijetiva entre eles, que preserve as distâncias. Semelhantemente, temos nos E M P:

1.4.6b - Definição: Dois E M P (S, F) e (S_1, F_1) são isométricos, se existe uma aplicação ϕ, bijetiva, entre S e S_1 de tal modo que $F(p, q) = F_1(\phi(p), \phi(q))$.

A demonstração de que todo Espaço Metricamente Gerado é isométrico a um E-Espaço, por ser bastante longa, não será apresentada aqui em nosso trabalho. O inverso, porém, desta afirmação, não é verdade: existe E-Espaço que não é Metricamente Gerado. Vamos constatar isto com um exemplo.

1.4.6c - Exemplo: Seja $\Omega = \{0,1\}$, então $A = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \Omega\}$ e vamos definir $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$ e $P(\{0\}) = P(\{1\}) = 1/2$; deste modo, (Ω, A, P) é um Espaço de Probabilidade. Seja, agora, $S = \{p, q\}$ onde $p(0) = 2$, $p(1) = 3$ e $q(0) = q(1) = 2$.

Deste modo, $F_{pp} = F_{qq} = H_o$ e

$$F_{pq}(x) = F_{qp}(x) = P\{t \in \Omega \mid |p(t) - q(t)| < x\}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ 1/2 & \text{se} \quad 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Assim, tem-se que (S,F) é um E-Espaço sobre os reais e, como já vimos na proposição 1.4.4b (iii), se (S, F) é Metricamente Gerado, então cada F_{pq} (com $p \neq q$) é contínua no zero. Logo, aqui, temos um E-Espaço que não é Metricamente Gerado.

Se pensarmos agora em termos de Espaços Pseudo-Metricamente Gerados, podemos demonstrar a afirmação nos dois sentidos; isto é:

Um espaço é Pseudo-Metricamente Gerado se e somente se é isométrico a um E-Espaço.

É fácil constatar que para um E-Espaço (S, F) sobre o Espaço Métrico (M, d), com base no Espaço de Probabilidade (Ω, A, P), podemos definir, para cada t em Ω e para cada p e q em S, a aplicação $d_t : S \times S \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$d_t(p, q) = d(p(t), q(t)) .$$

A verificação de que d_t é uma pseudo-métrica e que a coleção destas pseudo-métricas geram o Espaço é bastante simples.

1.5 - Espaço Métrico Probabilístico Generalizado

A generalização da noção de Espaço Métrico Probabilístico foi empreendida, inicialmente, por *Serstnev*(1965) no contexto da noção de Espaço Normado Probabilístico. Tal generalização decorre da introdução de normas triangulares generalizadas (ou funções triangulares τ) que são operações no espaço das funções de distribuição de probabilidades, ao passo que as normas triangulares introduzidas por Menger são operações no intervalo $[0, 1]$. Posteriormente, a formulação proposta por *Serstnev* foi estendida aos Espaços Métricos Probabilísticos.

1.5.1 - Definição: Uma *Função Triangular* τ (ou Norma Triangular Generalizada) é uma operação binária em Δ^+ que goza das seguintes propriedades:

(1) $\tau(F, H_o) = F$

(2) $\tau(F, G) = \tau(G, F)$

(3) $\tau(\tau(F, G), H) = \tau(F, \tau(G, H))$

(4) $\tau(F_1, G_1) \leq \tau(F_2, G_2)$ se $F_1 \leq F_2$ e $G_i \leq G_2$

Como H_∞ é o menor elemento de Δ^+ temos $\tau(H_\infty, F) = H_\infty$

Podemos partir de normas triangulares no $[0, 1]^2$ e obtermos funções triangulares. Uma maneira imediata é definir, ponto a ponto, a função triangular, conforme:

1.5.2 - Definição: Dada uma Norma Triangular T definimos a função triangular $\tilde{T}$ do seguinte modo: $\tilde{T}(F, G)(x) = T(F(x), G(x))$ para todo x real.

A verificação das propriedades (1) a (4) da definição 1.5.1 não apresenta a mínima dificuldade.

Neste contexto Min é maximal na classe das funções triangulares; de fato:

1.5.3 - Proposição: Se τ é uma função triangular então $\tau \leq \text{Min}$.

Demonstração: $\tau(F, G) \leq \tau(F, H_o) = F$

e $\tau(F, G) \leq \tau(H_o, G) = G$;

logo, $\tau(F, G)(x) \leq \text{Min}(F(x), G(x)) = \widetilde{\text{Min}}(F, G)(x)$

Outra maneira de se definir uma função triangular, a partir de uma norma triangular, foi motivada pela reformulação que Serstenev fazia na desigualdade triangular estocástica forte que já conhecemos de 1.2.2; logo mais, veremos esta reformulação.

1.5.4 - Definição: Dada uma norma triangular T, temos que τ_T é uma Função Triangular cujo valor, para cada F e G em Δ^+ é a função $\tau_T(F, G)$ assim definida em $\mathbb{R}$:

$$\tau_T(F, G)(x) = \sup\{T(F(tx), G((1-t)x)), \text{ com } t \in [0, 1]\}$$

$$= \sup\{T(F(u), G(v)) \mid u+v = x\}$$

Carece de qualquer dificuldade a demonstração de que τ_T é, na realidade, uma função triangular; por esse motivo, sendo aqui omitida.

1.5.5 - Definição: Um *Espaço Métrico Probabilístico Generalizado* (E M P G) é um terno $(S, \mathcal{F}, \tau)$ onde S é um conjunto não vazio, $\mathcal{F}$ é uma aplicação de $S \times S$ em Δ^+ e τ é uma função triangular, e valem as propriedades (P1), (P2) e (P3) da definição 1.1.1 e também a propriedade

(P4g) $F_{pq} \geq \tau(F_{pr}, F_{rq})$

Como podemos observar, um Espaço Métrico Probabilístico Generalizado (E M P G) é uma modificação do Espaço de

Menger. As propriedades (P1), (P2) e (P3) já nos são por demais conhecidas e (P4g) é a modificação que acenamos, acima, de (P4m). Ainda mais: (P4g) é equivalente a (P4m), desde que estejamos trabalhando com as funções τ_T, pois,

$$F_{pq}(x) \geq \tau_T(F_{pr}, F_{rq})(x) \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}$$

$$= \sup\{T(F_{pr}(u), F_{rq}(v)) \mid u + v = x\},$$

donde $F_{pq}(u + v) \geq T(F_{pr}(u), F_{rq}(v))$

e no outro sentido:

$$F_{pq}(x + y) \geq T(F_{pr}(x), F_{rq}(y)),$$

donde $F_{pq}(x + y) \geq \sup\{T(F_{pr}(x), F_{rq}(y))\}$

$$= \tau_T(F_{pr}, F_{rq})(x + y)$$

Com isto provamos a seguinte proposição:

1.5.6 - Proposição: | Se (S, F, T) é um Espaço de Menger então, (S, F, τ_T) é um E M P G.

Já em relação ao Espaço de Wald, é evidente que é um E M P G. Apenas por uniformidade de notação vamos escrever: $F * G = \tau_*(F, G)$.

Os E M P G podem ser classificados de vários modos. A classificação que a seguir apresentamos, leva em consideração as propriedades da função triangular τ.

1.5.7 - Definição: Seja (S, F, τ) um E M P G. Então diz-se que é:

(i) *próprio* se $\tau(H_a, H_b) \geq H_{a+b}$;

(ii) *de Menger* se $\tau = \tau_T$;

(iii) *de Wald* se $\tau = \tau_*$;

Nós vimos que dado um Espaço Métrico podemos construir um E M P (ver proposição 1.1.2). Agora vamos mostrar que é possível construir um E M P G, no caso específico, um E M P G próprio.

1.5.8 - Teorema: (i) Sejam (S, d), um Espaço Métrico; F assim definida: $F(p,q) = F_{pq} = H_{d(p,q)}$; e τ uma função triangular tal que $\tau(H_a, H_b) = H_{a+b}$; então (S, F, τ) é um E M P G próprio.

(ii) Se (S, F, τ) é um E M P G próprio e existe $d : S \times S \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F_{pq} = H_{d(p,q)}$; então (S, d) é um Espaço Métrico.

Demonstração: (i) como já provamos na proposição 1.1.2 que (S, F) é um E M P, então necessitamos apenas provar que vale (P4g); mas

$$\begin{aligned}\tau(F_{pr}, F_{rq}) &= \tau(H_{d(p,r)}, H_{d(r,q)}) \\ &= H_{d(p,r) + d(r,q)} \\ &\leq H_{d(p,q)} = F_{pq}\end{aligned}$$

(ii) Vamos mostrar que d tem as propriedades de uma métrica:

1. $d(p, q) \geq 0$ é evidente.

$$d(p, q) = 0 \Longleftrightarrow F_{pq} = H_{d(p,q)} = H_o \Longleftrightarrow p = q$$

2. $d(p, q) = d(q, p)$ é evidente.

3. $$H_{d(p,q)} = F_{pq} \geq \tau(F_{pr}, F_{rq})$$
$$= \tau(H_{d(p,r)}, H_{d(r,q)})$$
$$\geq H_{d(p,r) + d(r,q)}, \text{ isto é:}$$

$$d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$$

■

1.6 - Topologia nos E M P

Queremos apresentar algumas idéias topológicas dos Espaços Métricos Probabilísticos. Nos Espaços Métricos temos a topologia métrica e temos as topologias metrizáveis. Nos E M P vamos considerar a topologia definida pelas vizinhanças esféricas a dois parâmetros, conforme vamos definir, logo a seguir.

1.6.1 - Definição: Seja (S, F) um E M P. Dados $\varepsilon > 0$ e $\lambda > 0$ a *Bola* ou *Vizinhança Esférica* de parâmetros ε e λ e centro em p de S é o conjunto

$$N_\varepsilon^\lambda(p) = \{q \in S \mid F_{pq}(\varepsilon) > 1 - \lambda\}$$

A interpretação que podemos dar para esta definição é a seguinte: "$N_\varepsilon^\lambda(p)$ é o conjunto dos pontos q em S tais que a probabilidade que a distância aleatória entre p e q seja menor do que ε, é maior do que $1 - \lambda$". Sendo deste modo, que $\varepsilon > 0$ funciona como o raio da bola e $\lambda > 0$ é um nível probabilístico de significância.

Sendo as F_{pq} contínuas à esquerda podemos provar facilmente que a topologia induzida pelas vizinhanças $N_\varepsilon^\lambda(p) = N(p)$ é uma topologia de Hausdorff. Para isto vejamos os lemas seguintes:

1.6.2 - Lema: Seja (S, F) um E M P. Então:

(i) $p \in N(p)$

(ii) $q \in N(p) \Longrightarrow p \in N(q)$

(iii) $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ e $\lambda_1 \leq \lambda_2 \Longrightarrow N_1(p) \subset N_2(p)$

(iv) dadas $N_1(p)$ e $N_2(p)$ existe

$N_3(p) \subset N_1(p) \cap N_2(p)$

Demonstração: (i) e (ii) são evidentes.

(iii) Seja $q \in N_1(p) \Longrightarrow F_{pq}(\varepsilon_1) > 1 - \lambda_1$

$\Longrightarrow F_{pq}(\varepsilon_2) > 1 - \lambda_2$

$\Longrightarrow q \in N_2(p)$

(iv) Seja $\varepsilon_3 = \mathrm{Min}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ e $\lambda_3 = \mathrm{Min}\{\lambda_1, \lambda_2\}$; então, para $q \in N_3(p)$, temos $F_{pq}(\varepsilon_3) > 1 - \lambda_3$; o que significa $F_{pq}(\varepsilon_1) > 1 - \lambda_1$ e $F_{pq}(\varepsilon_2) > 1 - \lambda_2$, isto é:

$q \in N_1(p) \cap N_2(p)$.

1.6.3 - Lema: Sendo (S, F, T) um Espaço de Menger temos:

(i) se $q \in N(p)$ então existe $N(q) \subset N(p)$;

(ii) se $p \neq q$ então existem $N(p)$ e $N(q)$ disjuntas.

Demonstração: (i) Seja $q \in N(p)$ então $F_{pq}(\varepsilon) > 1 - \lambda$ e como F_{pq} é contínua à esquerda então existem $\varepsilon_0 < \varepsilon$ e $\lambda_0 < \lambda$ tais que $F_{pq}(\varepsilon_0) > 1 - \lambda_0 > 1 - \lambda$.

Seja $N(q) = \{r \mid F_{rq}(\varepsilon_1) > 1 - \lambda_1\}$ com $\varepsilon_1 < \varepsilon - \varepsilon_0$ e λ_1 tal que $T(1 - \lambda_0, 1 - \lambda_1) > 1 - \lambda$.

Seja, agora, $s \in N(q)$; então, $F_{qs}(\varepsilon_1) > 1 - \lambda_1$;

e
$$\begin{aligned} F_{ps}(\varepsilon) &\geq T(F_{pq}(\varepsilon_0), F_{qs}(\varepsilon - \varepsilon_0)) \\ &\geq T(F_{pq}(\varepsilon_0), F_{qs}(\varepsilon_1)) \\ &\geq 1 - \lambda ; \end{aligned}$$

logo, $s \in N(p)$.

(ii) Sejam $x > 0$ tal que $F_{pq}(x) = a < 1$ e $b \in (0, 1)$ tal que $T(b, b) > a$.

Sejam, ainda, as bolas: $N(p) = \{r \mid F_{pr}(x/2) > b\}$ e

$$N(q) = \{s \mid F_{qs}(x/2) > b\}$$

deste modo, $N(p)$ e $N(q)$ são disjuntas.

Se existir $t \in N(p) \cap N(q)$ teremos

$$a = F_{pq}(x) \geq T(F_{pt}(x/2), F_{tq}(x/2)) > T(b, b) > a ,$$

absurdo! ∎

1.6.4 - Teorema: Sendo (S, F, T) um Espaço de Menger, então a família N das bolas $N(p)$ constituem uma base de vizinhanças abertas para uma topologia de Hausdorff em S.

Demonstração: Os Lemas 1.6.2 e 1.6.3 são a prova do teorema.

Ao longo do nosso estudo, quando falarmos em topologia nos E M P, estaremos nos referindo a esta topologia de Hausdorff, também chamada a ε,λ-topologia.

2 - COMPRIMENTO ALEATÓRIO DE ARCOS

2.1 - Conceituação. Pseudo-Inversas.

Nos Espaços Métricos é possível considerar os conceitos geométricos de caminho, arco, segmento e outros. Aqui, vamos estendê-los aos Espaços Métricos Probabilísticos (EMP). Veremos que as extensões propostas são coerentes com os mesmos conceitos considerados nos Espaços Métricos. Nós nos basearemos em trabalho de *Xavier* (1980).

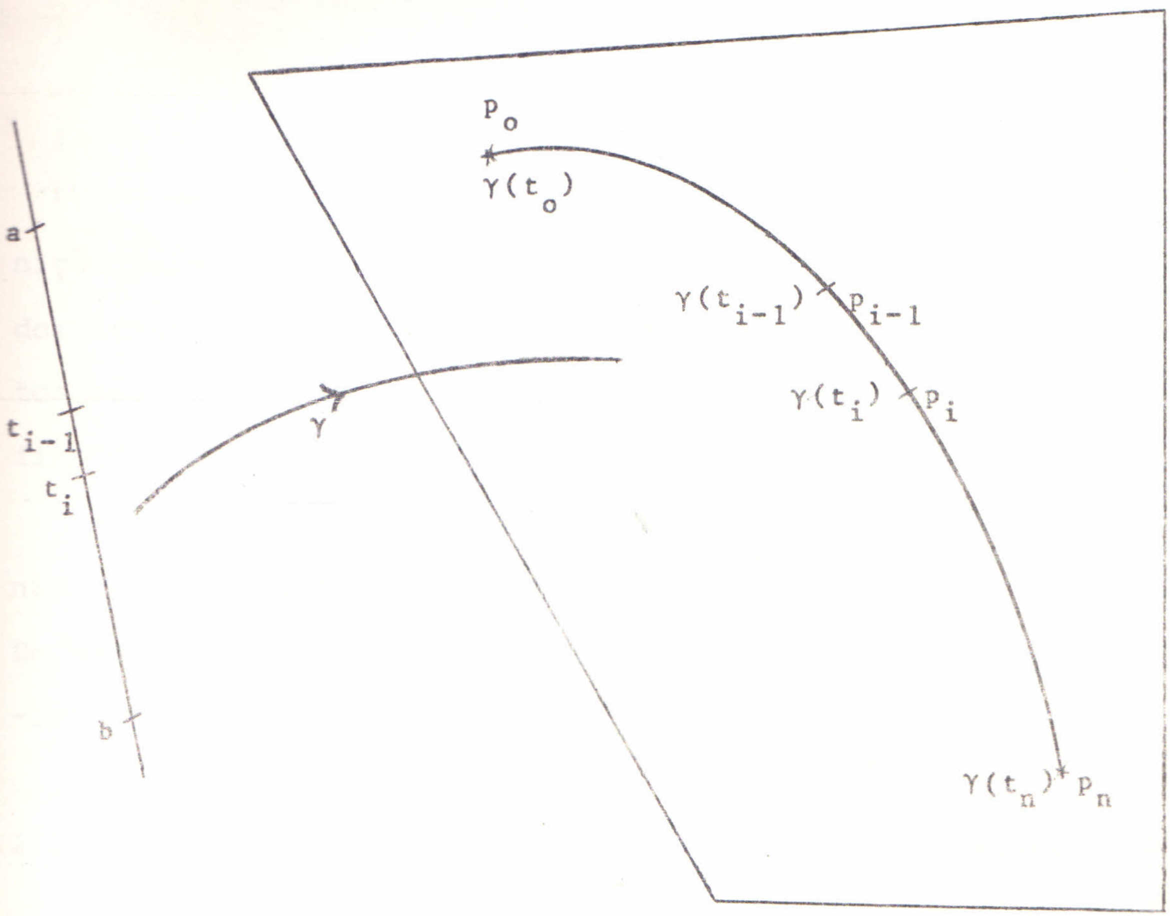
Dado um E M P (S, F), podemos sempre considerar uma certa topologia; aqui, consideraremos a topologia gerada pelas vizinhanças esféricas de que tratamos em 1.6. Chamamos de *arco*, no Espaço S, a toda aplicação $\gamma:[a, b] \longrightarrow S$ que seja contínua e injetiva. Vamos trabalhar com arcos onde $\gamma(a) \neq \gamma(b)$.

No intervalo $[a, b]$ consideremos *partições* π que notaremos $\pi = \{t_o = a, t_1, \ldots, t_n = b\}$. Chamamos de *Norma da partição* π (representada por $\varepsilon(\pi)$) ao maior dos números $t_i - t_{i-1}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. E dizemos que uma partição π_1 é *mais fina* que outra partição π_2 se $\pi_1 \supset \pi_2$. Naturalmente $\varepsilon(\pi_1) \leq \varepsilon(\pi_2)$.

Dado um arco γ de $[a, b]$ em S e feita uma partição em $[a, b]$ temos em S um *polígono sobre o arco* γ que é o conjunto das imagens da partição π; isto é:

$$p = \gamma(\pi) = \{\gamma(t_o), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_n)\} = \{p_o, p_1, \ldots, p_n\}.$$

Ora, como em S conhecemos F_{pq} para todo p e q de S, então, naturalmente, estamos em condições de trabalhar com as $F_{p_{i-1}p_i}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.



Necessário se faz, aqui, trabalhar com as funções inversas das $F \in \Delta^+$. Como porém estas funções nem sempre são injetivas, vamos trabalhar com as Pseudo-Inversas que definiremos a seguir. Teremos necessidade de considerar certa extensão $\mathcal{D}$ de Δ^+. Assim, $\mathcal{D}$ será a classe das funções $\phi:\mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$, não decrescentes, contínuas à esquerda, com inf = 0 e sup $\leq$ 1, tais que $\phi(0) = 0$ (designadas como *quase-funções de distribuição*).

2.1.1 - Definição: Para cada $\phi \in \mathcal{D}$, sua *Pseudo-Inversa* $\phi^*: [0, 1] \longrightarrow [0, +\infty] = \bar{\mathbb{R}}_+$ é tal que :

$\phi^*(t) = \sup\{x \geq 0 \mid \phi(x) < t\}$, ou

$\phi^*(t) = \inf\{x \geq 0 \mid \phi(x) \geq t\}$, para

$0 \leq t \leq 1$.

Note-se que pelo menos um dos dois conjuntos da definição acima é não vazio e, portanto, a definição faz sentido; ademais, $\phi^*(t)$ é bem definida, pois se ambos os conjuntos são não vazios, o supremo do primeiro coincide com o ínfimo do segundo. Pela definição acima, tem-se $\phi^*(0) = 0$.

Seja agora E o conjunto das funções $\psi: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ não decrescentes, contínuas à esquerda, e tais que $\psi(0) = 0$. De maneira análoga podemos definir para cada ψ a sua Pseudo--Inversa:

2.1.2 - Definição: Seja $\psi \in E$ então a *Pseudo-Inversa* de ψ é a função ψ^* definida em $\mathbb{R}_+$ tal que:

$\psi^*(x) = \sup\{t \geq 0 \mid \psi(t) < x\}$; ou

$\psi^*(x) = \sup\{t \geq 0 \mid \psi(t) \geq x\}$

Vale aqui a mesma observação que segue a definição 2.1.1.

As propriedades principais, que vamos utilizar ao longo de nosso trabalho, das Pseudo-Inversas, queremos enunciá-las no lema abaixo.

2.1.3 - Lema: Sejam $\phi, \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}$ e $\psi \in E$ então:

(i) $\phi^* \in E \quad \psi^* \in \mathcal{D}$;

(ii) $\phi_1 \leq \phi_2 \iff \phi_1^* \geq \phi_2^*$;

(iii) $(\phi^*)^* = \phi$;

(iv) $\psi(b) \geq t \iff b \geq \phi^*(t)$;

(v) $\phi(\phi^*(t)) \leq t$, se $\phi^*(t) < +\infty$

[ademais, segue-se a igualdade se e só se t é não singular relativamete a ϕ].

(vi) $\phi^*(\phi(b)) \leq b$, se $\phi(b) > 0$

[do mesmo modo, a igualdade vale se e somente se b é não singular relativamente a ϕ^*].

(vii) $\phi \in \Delta^+ \iff \phi^*(t) < +\infty, \quad \forall \quad t < 1$;

(viii) $H_a^* = \psi_a$, se $a \geq 0$, onde $\psi_a(0) = 0$ e

$\psi_a(t) = a$, se $0 < t \leq 1$.

Em (v) e (vi) fala-se de um ponto singular relativamente a ϕ; segue a definição respectiva:

2.1.4 - <u>Definição</u>: $t \in [0, \sup \phi]$ diz-se um *ponto singular relativamente à função* ϕ, quando:

(i) não existe $x \geq 0$ tal que $\phi(x) = t$

(ii) existem infinitos pontos x tais que $\phi(x) = t$.

$t \in [0, \sup \phi]$ diz-se um *ponto não singular relativamente à função* ϕ, quando existe um único ponto $x \geq 0$ tal que $\phi(x) = t$.

Consideremos agora as $\ell_i = \left[F_{p_{i-1}p_i}\right]^* \varepsilon\ E$, ou seja, Pseudo-Inversas das $F_{p_{i-1}p_i}$ ao longo de todo o polígono p. Para cada ℓ_i e para cada $t \ \varepsilon\ [0,\ 1]$ temos que $\ell_i(t)$ é um "comprimento" correspondente a t. Sem nenhum problema podemos somar as ℓ_i e assim obtemos $L_p = L_{\gamma(\pi)} = \sum_{i=1}^{n} \ell_i$. Chamamos de *comprimento aleatório do polígono* p à aplicação $F_p = L_p^* \ \varepsilon\ \mathcal{D}$, a Pseudo-Inversa de L_p.

No conjunto C de todas as partições do intervalo $[a,\ b]$ chamamos de *cadeia de partições* a um conjunto C de partições π_n satisfazendo às seguintes condições:

(i) $\pi_n \supset \pi_{n-1}$ para todo $n = 1,\ 2,\ \ldots$

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(\pi_n) = 0$.

Para cada cadeia C consideremos as subcadeias $C_j = \{\pi_j,\ \pi_{j+1},\ \ldots\}$ com $j = 1,\ 2,\ \ldots$ e consideremos

$$[1] \qquad L_{\gamma,C} = \lim_{j\to\infty} \left(\sup_{\pi\in C_j} L_{\gamma(\pi)} \right)$$

2.1.5 - Definição: Dado um arco $\gamma : [a,\ b] \longrightarrow S$ chamamos de *comprimento aleatório superior do arco* γ à Quase Função de Distribuição $\overline{F_\gamma} = \left[\sup\limits_{C\varepsilon C} L_{\gamma,C}\right]^*$ e igualmente de *comprimento aleatório inferior do arco* γ a $\underline{F_\gamma} = \left[\inf\limits_{C\varepsilon C} L_{\gamma,C}\right]^*$ e, finalmente, falamos de *comprimento aleatório do arco* γ quando $\overline{F_\gamma} = \underline{F_\gamma}$ e representamos por F_γ.

Observe-se, inicialmente que $\overline{F_\gamma} \leq \underline{F_\gamma}$.

Observe-se ainda que dissemos $\overline{F_\gamma}$, $\underline{F_\gamma}$ e F_γ serem quase funções de Distribuição e não propriamente funções de Distribuição pois $F_\gamma(+\infty)$ pode ser menor do que 1. Deste modo F_γ pertence a $\mathcal{D}$ e não necessariamente a Δ^+.

A interpretação que podemos apresentar para comprimento aleatório de arco é a seguinte: Supondo que F_γ existe e pensando no comprimento aleatório de arco γ como uma variável aleatória Λ_γ, segue-se que F_γ pode ser interpretado pela seguinte relação:

$$F_\gamma(x) = \text{Prob}\{\Lambda_\gamma < x\}$$

2.2 - Arcos Equivalentes

As funções $\overline{F_\gamma}$, $\underline{F_\gamma}$ e F_γ não dependem da particular parametrização do arco γ. É o que veremos neste parágrafo.

2.2.1 - Definição: Dados os arcos $\gamma_1 : [a, b] \longrightarrow S$ e $\gamma_2 : [c, d] \longrightarrow S$, dizemos que são equivalentes (escreveremos $\gamma_1 \sim \gamma_2$) se existe uma aplicação bicontínua $\theta : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ tal que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \theta$.

2.2.2 - Proposição: Se $\gamma_1 \sim \gamma_2$ então $\overline{F_{\gamma_1}} = \overline{F_{\gamma_2}}$ e $\underline{F_{\gamma_1}} = \underline{F_{\gamma_2}}$

Demonstração: Como θ é bicontínua então para cada cadeia $C = \{\pi_n\}$ em $[a, b]$ corresponde uma cadeia $C^1 = \{\theta(\pi_n)\} = \{\pi_n^1\}$ e vice-versa. Deste modo $p_j = \gamma_1(\pi_j) = \gamma_2(\pi_j^1)$ para todo $j = 1, 2, \dots$. Logo $L_{\gamma_1, C} = L_{\gamma_2, C}$ e a conclusão da proposição segue.

■

2.2.2a - Corolário: Se $\gamma_1 \sim \gamma_2$ e F_{γ_1} existe, então existe igualmente $F_{\gamma_2} = F_{\gamma_1}$.

2.3 - Condição de Regularidade

A condição de regularidade em S é uma propriedade importante que nos pode simplificar bastante os cálculos envolvendo lim, Sup e Inf.

2.3.1 - Definição: No Espaço S vale a *Condição de Regularidade* quando, para qualquer arco γ, se $\pi_1 \supset \pi_2$ então $L_{\gamma(\pi_1)} \geq L_{\gamma(\pi_2)}$.

O resultado imediato desta regularidade é a simplificação de que falamos anteriormente:

2.3.2 - Proposição: Se em S vale a condição de regularidade então

(i) $L_{\gamma, C} = \sup_{\pi \in C} L_{\gamma(\pi)} = \lim_{n \to +\infty} L_{\gamma(\pi_n)}$;

(ii) se $\overline{F_\gamma} = \underline{F_\gamma} = F_\gamma$ então $F_\gamma = \left[L_{\gamma, C}\right]^*$

Demonstração: Pela condição de regularidade temos

$L_{\gamma(\pi_n)} \le L_{\gamma(\pi_{n+1})}$ para $n = 1, 2, \ldots$ então

$\sup_{\pi\in C} L_{\gamma(\pi)} = \sup_{\pi\in C} L_{\gamma(\pi)}$ deste modo, $L_{\gamma,C} = \lim_{n\to+\infty} (\sup_{\pi\in C} L_{\gamma(\pi)}) =$

$= \sup_{\pi\in C} L_{\gamma(\pi)} = \lim_{n\to+\infty} L_{\gamma(\pi_n)}$. A demonstração de (ii) segue imediata.

■

Queremos agora apresentar um exemplo de um Espaço onde não vale a condição de regularidade. Com este exemplo queremos mostrar o acerto da definição que apresentamos para $L_{\gamma,C}$ em [1] (pag. 37).

2.3.3 - Exemplo: Em $\mathbb{R}$ tomemos (i) $F_{pp} = H_o$ e

$$\text{(ii)}\ F_{pq}(x) = \begin{cases} F^1_{pq}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ \exp(-|p-q|/x) & \text{se } x > 0 \end{cases} & \text{para } 0<|p-q|<1 \\ F^2_{pq}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ \exp(-2|p-q|/x) & \text{se } x > 0 \end{cases} & \text{para } |p-q|\ge 1 \end{cases}$$

Aqui temos um E M P onde a desigualdade triangular vale por vacuidade uma vez que $F_{pq}(x) < 1$ para todo x em $\mathbb{R}$.

Consideremos agora o arco identidade em [0, 2] e as seguintes partições do mesmo intervalo [0, 2]:

$\pi_o = \{0, 1, 2\}$

$\pi_1 = \{0, 1/n, 2/n, \ldots, n/n, 2n/n\}$

$\pi_2 = \{0, 1/n, \ldots, n/n, n+1/n, \ldots, 2n/n\}$

Observemos que como F^i_{pq} para $i = 1, 2$ é função injetiva para todo $x \geq 0$ a sua pseudo-inversa coincide com a sua inversa ou seja: $\left[F^i_{pq}\right]^*(t) = -i|p-q|/\ln t$ para $0 < t < 1$. Deste modo temos:

$$L_{\gamma(\pi_o)}(t) = \sum_{i=1}^{2} \ell_i(t) = -2/\ln t + -2/\ln t = -4/\ln t$$

$$L_{\gamma(\pi_1)}(t) = \sum_{i=1}^{n} (-1/n.\ln t) + -2/\ln t = -3/\ln t$$

$$L_{\gamma(\pi_2)}(t) = \sum_{i=1}^{2n} (-1/n.\ln t) = -2/\ln t .$$

Observemos que $\pi_2 \supset \pi_1$ e no entanto $L_{\gamma(\pi_2)} < L_{\gamma(\pi_1)}$ isto é: não vale a condição de regularidade.

Mas $\sup_{C\varepsilon C} L_{\gamma,C} = \inf_{C\varepsilon C} L_{\gamma,C} = L_{\gamma(\pi_2)}$; logo, existe F_γ com $F_\gamma(x) = \exp(-2/x)$ e no entanto $\left[\sup_{\pi\varepsilon C} L_{\gamma(\pi)}\right]^*(x) = \exp(-4/x)$.

Vamos agora examinar alguns dos E M P que conhecemos e verificar em qual deles vale a condição de regularidade. Por exemplo, nos Espaços de Menger com a Norma $T = \mathrm{Min}$ vale sempre esta condição de regularidade. Para provarmos isto comecemos com o lema seguinte:

2.3.4 - Lema: Seja (S, F, T) um Espaço de Menger; então $\ell_{pq}(T(t,t)) \leq \ell_{pr}(t) + \ell_{rq}(t)$ para todo p, q e r em S e todo $t \in [0, 1]$.

Demonstração: Se $t = 0$ então vale a igualdade. Vejamos então para $0 < t \leq 1$. Consideremos dois casos:

caso 1: $\ell_{pr}(t)$ e $\ell_{rq}(t)$ são pontos não singulares de F_{pr} e F_{rq} respectivamente. Deste modo as Pseudo-Inversas coincidem com as respectivas inversas conforme o lema 2.1.3 e $F_{pr}(\ell_{pr}(t)) = F_{rq}(\ell_{rq}(t)) = t$ e aplicando a desigualdade triangular estocástica (P4m) temos:

$$F_{pq}(\ell_{pr}(t) + \ell_{rq}(t)) \geq T(F_{pr}(\ell_{pr}(t)), F_{rq}(\ell_{rq}(t))) = T(t,t)$$

logo $\quad \ell_{pr}(t) + \ell_{rq}(t) \geq \ell_{pq}(T(t, t))$

caso 2: $\ell_{pr}(t)$ e $\ell_{rq}(t)$ são pontos singulares de F_{pr} e F_{rq} respectivamente. Então tomamos sequências $\{\eta_k\}$ e $\{\xi_k\}$ de modo que:

(i) cada $\ell_{pr}(\eta_k)$ e $\ell_{rq}(\xi_k)$ é ponto não singular e de continuidade de F_{pr} e F_{rq} respectivamente.

(ii) $\eta_1 \leq \eta_2 \leq \cdots \leq \eta_k \leq \cdots < t$

$\xi_1 \leq \xi_2 \leq \cdots \leq \xi_k \leq \cdots < t$

(iii) $\lim\limits_{k\to+\infty} \eta_k = \lim\limits_{k\to+\infty} \xi_k = t$

Deste modo o lema vale para cada η_k e para cada ξ_k isto é:

$$\ell_{pq}(T(\eta_k, \xi_k)) \leq \ell_{pr}(\eta_k) + \ell_{rq}(\xi_k) .$$

Queremos então mostrar que vale no limite; isto é:

$$\lim_{k\to+\infty} \ell_{pq}(T(\eta_k, \xi_k)) \leq \lim_{k\to+\infty} \ell_{pr}(\eta_k) + \lim_{k\to+\infty} \ell_{rq}(\xi_k) .$$

Mas como $\ell_{pq}(a) = \left[F_{pq}\right]^*(a) = \operatorname{Sup}\{x \mid F_{pq}(x) < a\}$ então podemos inverter os limites e obtemos a desigualdade desejada.

Observemos que a imposição (ii) sobre as sequências é importante para justificar o uso do limite dentro da T-Norma.

■

2.3.4a - Corolário: Se $T = \text{Min}$ então $\ell_{pq}(t) \leq \ell_{pt}(t) + \ell_{rq}(t)$ para todo p, q e r em S e todo $t \in [0,1]$.

2.3.5 - Proposição: Sejam (S, F, T) um Espaço de Menger com $T = \text{Min}$ e $\gamma: [a, b] \longrightarrow S$, um arco, então

(i) vale a condição de regularidade em S.

(ii) $L_{\gamma, C} = \lim_{n \to +\infty} L_{\gamma(\pi_n)}$ para cada cadeia C.

Demonstração: (i) É suficiente observar que o corolário 2.3.4a é a condição de regularidade para três pontos. Por indução podemos ampliar para duas partições de $[a, b]$.

(ii) É o que nos afirma a proposição 2.3.2.

∎

Quanto a outros espaços observemos, inicialmente, que $T = \text{Min}$ é a mais forte T-Norma; assim sendo, se vale a condição de regularidade para um Espaço de Menger com $T = \text{Min}$, então vale a mesma condição de regularidade para um Espaço de Menger com qualquer outra T-Norma, de vez que esta condição é consequência do corolário 2.3.4a e $\ell_{pq}(T(t, t)) \leq \ell_{pq}(\text{Min}(t, t)) \leq \ell_{pr}(t) + \ell_{rq}(t)$.

No que se refere aos E M P G temos então que todos aqueles que têm um correspondente Espaço de Menger gozam da condição de regularidade; portanto, todos os Espaços com funções τ_T para qualquer T-Norma. Igualmente, vale nos Espaços de Wald (ver 1.3).

2.4 - Comprimento de Arcos nos Espaços Métricos

Vimos no capítulo anterior que os E M P generalizam os Espaços Métricos, no sentido que dado um Espaço Métrico $(S,\ d)$ sempre temos associado a ele um E M P onde $F_{pq} = H_{d(p,q)}$. Naturalmente, nosso conceito de comprimento aleatório de arcos será consistente com os Espaços Métricos se, dado um arco retificável em S, tivermos $F_\gamma = H_{\lambda(\gamma)}$. Isto é o que provaremos a seguir.

2.4.1 - Teorema: Seja (S,d) um Espaço Métrico e $\gamma:[a,b]\longrightarrow S$ um arco cujo comprimento é $\lambda(\gamma) < \infty$. Então, no E M P associado $(S,\ F_d)$ existirá o comprimento aleatório de arco $F_\gamma = H_{\lambda(\gamma)}$.

Demonstração: Seja $\gamma:[a,\ b] \longrightarrow S$; então, $\lambda(\gamma) =$

$$= \operatorname*{Sup}_{\pi}\{\sum d(\gamma(t_{i-1}),\ \gamma(t_i))\} = \operatorname*{Sup}_{\pi}\{\sum d(p_{i-1},p_i)\}$$

e $\quad \ell_i(t) = \operatorname{Sup}\ \{x \mid F_{p_{i-1}p_i}(x) < t\}$

$$= \operatorname{Sup}\ \{x \mid H(x - d(p_{i-1},\ p_i)) < t\}$$

$$= d(p_{i-1},\ p_i) \quad \text{para todo} \quad 0 < t \le 1\ ;$$

logo, $L_{\gamma(\pi)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \ell_i(t) = \sum_{i=1}^{n} d(p_{i-1},\ p_i)$.

Ora, $H_{\lambda(\gamma)}(x) = H(x - \lambda(\gamma))$ e

$$\left[H_{\lambda(\gamma)}\right]^*(t) = \operatorname{Sup}\ \{x \mid H(x - \lambda(\gamma)) < t\} = \lambda(\gamma)\ .$$

Assim, concluimos ser $L_{\gamma,C} = \left[H_{\lambda(\gamma)}\right]^*$.

E como vale a condição de regularidade, temos finalmente

$$F_\gamma = \left[L_{\gamma, C}\right]^* = \left[H^*_{\lambda(\gamma)}\right]^* = H_{\lambda(\gamma)}.$$

■

2.5 - "Aditividade" de arcos

Vamos agora verificar que, sob a condição de regularidade, algum tipo de aditividade é válida para comprimento aleatório de arcos. Antes, alguns detalhes de notação.

Consideremos $a < r < b$ e $C_{[a, b]}$ a coleção de todas as cadeias de partições de $[a, b]$.

$C^r \subset C$ é uma subcoleção de cadeias tal que, a partir de um certo n_o, todas as partições π_n têm o número r como um dos seus termos, ou seja: $c = \{\pi_n\} \in C^r$ se existe n_o tal que $r = t_i$ para algum $i = 1, 2, \ldots, n-1$, para todo $n \geq n_o$. Seja $C^1 = C_{[a, r]}$ e $C^2 = C_{[r, b]}$; então, $c \in C^r$ se e somente se existe $c^1 \in C^1$ com $c^1 = \{\pi_n^1\}$ e $c^2 = \{\pi_n^2\} \in C^2$, tais que $\{\pi_n\} = \{\pi_n^1\} \cup \{\pi_n^2\}$ para todo $n \geq n_o$ e escrevemos simplesmente $c = c^1 + c^2$.

Após estas notações podemos anunciar e provar a "aditividade":

2.5.1 - Proposição: Seja $\gamma: [a, b] \longrightarrow S$, um arco. Seja $\gamma_1 = \gamma\big|_{[a, r]}$ e $\gamma_2 = \gamma\big|_{[r, b]}$ com $a < r < b$. Supondo válida a condição de regularidade, então:

[1] $L_{\gamma,C} = L_{\gamma_1,C^1} + L_{\gamma_2,C^2}$, onde $C = C^1 + C^2$, conforme observações acima;

[2] $\left[\overline{F_\gamma}\right]^* = \left[\overline{F_{\gamma_1}}\right]^* + \left[\overline{F_{\gamma_2}}\right]^*$;

[3] $\left[\underline{F_\gamma}\right]^* \leq \left[\underline{F_{\gamma_1}}\right]^* + \left[\underline{F_{\gamma_2}}\right]^*$;

e existindo F_γ, também existem F_{γ_1} e F_{γ_2}, de modo que

[4] $\left[F_\gamma\right]^* = \left[F_{\gamma_1}\right]^* + \left[F_{\gamma_2}\right]^*$.

Demonstração: Valendo a condição de regularidade temos

$$L_{\gamma,C} = \lim_{n\to\infty} L_{\gamma(\pi_n)} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq n_o}} L_{\gamma(\pi_n)} =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq n_o}} \left\{\sum_{i=1}^{n} \ell_{\gamma_1}(s_{i-1})\gamma_1(s_i) + \sum_{j=1}^{n} \ell_{\gamma_2}(t_{j-1})\gamma_2(t_j)\right\}$$

$$= L_{\gamma_1,C^1} + L_{\gamma_2,C^2}$$ mostrando [1] .

Seja $C = \{\pi_n\} \in \mathcal{C} - \mathcal{C}^r$ e $C' = \{\pi_n'\} = \{\pi_n\} \cup \{r\} \in \mathcal{C}^r$.

Então, pela condição de regularidade, temos $L_{\gamma(\pi_n')} \leq L_{\gamma(\pi_n)}$ e, deste modo, $\sup_{C\in\mathcal{C}} L_{\gamma,C} = \sup_{C\in\mathcal{C}^r} L_{\gamma,C}$;

logo, teremos $\left[\overline{F_\gamma}\right]^* = \sup_{C\in\mathcal{C}} L_{\gamma,C} = \sup_{C\in\mathcal{C}^r} L_{\gamma,C}$

$$= \sup_{C\in\mathcal{C}} \{L_{\gamma_1,C^1} + L_{\gamma_2,C^2}\},$$

donde se conclui [2].

Como $C^r \subset C$, temos $\inf_{C \in C} L_{\gamma,C} \leq \inf_{C \in C^r} L_{\gamma,C}$;

logo,

$$\left[\underline{F}_{\gamma}\right]^* = \inf_{C \in C} L_{\gamma,C}$$

$$\leq \inf_{C \in C^r} L_{\gamma,C}$$

$$= \inf_{C \in C^r} \{L_{\gamma_1,C_1} + L_{\gamma_2,C_2}\}$$

$$= \left[\underline{F}_{\gamma_1}\right]^* + \left[\underline{F}_{\gamma_2}\right]^*,$$ o que mostra [3]

Finalmente, existindo F_{γ}, teremos

$$\left[F_{\gamma}\right]^* = \left[\overline{F}_{\gamma}\right]^* = \left[\underline{F}_{\gamma}\right]^*; \qquad [\,A\,]$$

logo,

$$\left[\overline{F}_{\gamma_1}\right]^* + \left[\overline{F}_{\gamma_2}\right]^* \leq \left[\underline{F}_{\gamma_1}\right]^* + \left[\underline{F}_{\gamma_2}\right]^*$$

Por outro lado,

$$\left[\overline{F}_{\gamma_1}\right]^* \geq \left[\underline{F}_{\gamma_1}\right]^* \quad e \quad \left[\overline{F}_{\gamma_2}\right]^* \geq \left[\underline{F}_{\gamma_2}\right]^* ;$$

destas três últimas desigualdades temos que concluir

$$\left[\overline{F}_{\gamma_1}\right]^* = \left[\underline{F}_{\gamma_1}\right]^* = \left[F_{\gamma_1}\right]^* \qquad [\,B\,]$$

e

$$\left[\overline{F}_{\gamma_2}\right]^* = \left[\underline{F}_{\gamma_2}\right]^* = \left[F_{\gamma_2}\right]^* \qquad [\,C\,]$$

Substituindo [A], [B] e [C] em [2], temos exatamente [4]

■

2.6 - Comprimento Aleatório de Arcos nos E N P

Nos E N P (Espaços Normados Probabilísticos: Ver 1.4.3) temos uma norma aleatória de vetor que é a aplicação N_p. Para que a nossa definição de comprimento aleatório de arcos seja consistente, então um "arco de extremos u e v" deve ter comprimento aleatório coincidindo com a norma aleatória do vetor $v - u$. É exatamente isto o que provaremos na proposição seguinte.

2.6.1 - Proposição: Seja (S, N) um E N P e u e v vetores em S. Seja $\gamma = \gamma_{u,v}: [0, 1] \longrightarrow S$ dado por $\gamma(t) = u + t(v-u)$. Então, existe $F_{\gamma_{u,v}} = N_{v-u}$.

Demonstração: Seja $\pi = \{0=t_o, t_1, t_2, \ldots, t_n=1\}$ uma partição qualquer do intervalo $[0, 1]$ e $p = \gamma(\pi) = \{\gamma(t_i)\} = \{u_i\}$, onde $u_i = u + t_i(v - u)$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Deste modo,
$$\ell_i = \ell_{u_{i-1}, u_i} = \left[F_{u_{i-1}u_i}\right]^*$$
$$= \left[N_{u_i - u_{i-1}}\right]^*$$
$$= \left[N_{(t_i - t_{i-1})(v - u)}\right]^*$$
$$= (t_i - t_{i-1}) \left[N_{v-u}\right]^*$$

Verifiquemos esta última igualdade:

dado $\alpha \in (0, 1]$, então $\left[N_{\alpha v}\right]^*(t) = \operatorname{Sup}\{x \mid N_{\alpha v}(x) < t\}$

$$= \operatorname{Sup}\{x \mid N_v(x/\alpha) < t\}$$

onde, fazendo a mudança de variáveis $x/\alpha = y$, obtemos:

$$\left[N_{\alpha v}\right]^*(t) = \operatorname{Sup}\{\alpha y \mid N_v(y) < t\}$$

$$= \alpha \cdot \operatorname{Sup}\{y \mid N_v(y) < t\}$$

$$= \alpha \cdot \left[N_v\right]^*(t).$$

Então, $$L_{\gamma(\pi)} = \sum_{i=1}^{n} \ell_i = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \left[N_{v-u}\right]^*$$

$$= \left[N_{v-u}\right]^*;$$

portanto, para qualquer partição π, $L_{\gamma,C}$ coincide com $\left[N_{v-u}\right]^*$ e, assim, existe $F_\gamma = \left[L_{\gamma,C}\right]^* = \left[N_{v-u}^{\ *}\right]^* = N_{v-u}$.

■

2.7 - Exemplos

Vejamos a operacionalidade da definição que apresentamos para comprimento aleatório de arco calculando este comprimento para alguns espaços já conhecidos.

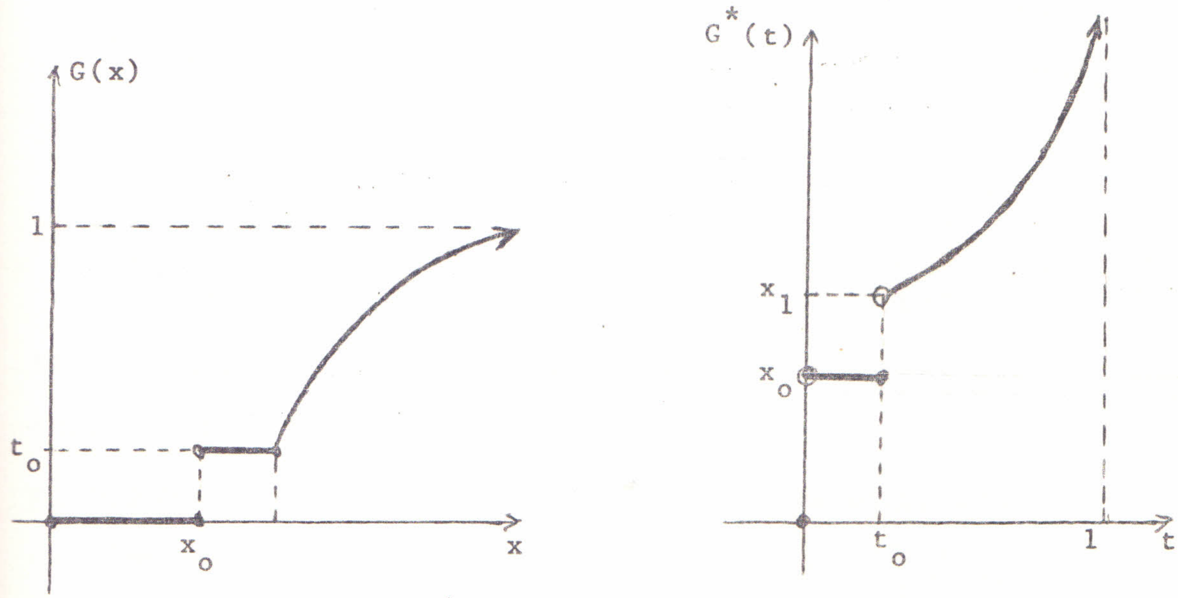
2.7.1 - Espaço Equilátero:

Dado (S, F), um Espaço Equilátero, seja $\gamma: [a,b] \to S$ um arco em S e tomemos uma partição π de $[a, b]$. Temos que $L_{\gamma(\pi)} = \sum_{i=1}^{n} \ell_i = \sum_{i=1}^{n} G^* = n \cdot G^*$, isto é, vale a condição de regularidade; então:

$$L_{\gamma,C} = \lim_{k\to} L_{\gamma(\pi_n)} = \lim_{k\to\infty} n_k \cdot G^* .$$

a) Examinaremos, inicialmente, o comportamento de G^*.

Seja $x_o = \sup\{x \mid G(x) = 0\}$ e $t_o = \lim_{x\to x_o^+} G(x)$. Tem-se: $G^*(0) = 0$; $G^*(t) = x_o$, se $0 < t \leq t_o$; $G^*(x) > t_o$, se $t > t_o$. Na figura abaixo, tem-se um possível gráfico para G, à esquerda, e o gráfico de G^*, à direita



b) Vejamos, agora, como se comporta $L_{\gamma,C} = \lim_{k\to\infty} x_k\ G^*$; consideraremos dois casos.

<u>caso 1</u>: $x_o = t_o$ ou $x_o > 0$

Então, $L_{\gamma,C}(t) = +\infty$, se $t > 0$

donde, existe $F_\gamma = \left[L_{\gamma,C}\right]^* \equiv 0$; isto é, o arco γ possui comprimento infinito, com certeza, desde que $F_\gamma(x) = \text{Prob}(\Lambda_\gamma < x) = 0$, para todo x real.

<u>caso 2:</u> $x_o = 0$ e $t_o > 0$

Então, $L_{\gamma,C}(t) = 0$, se $0 \leq t \leq t_0$;

$L_{\gamma,C}(t) = +\infty$, se $t > t_o$;

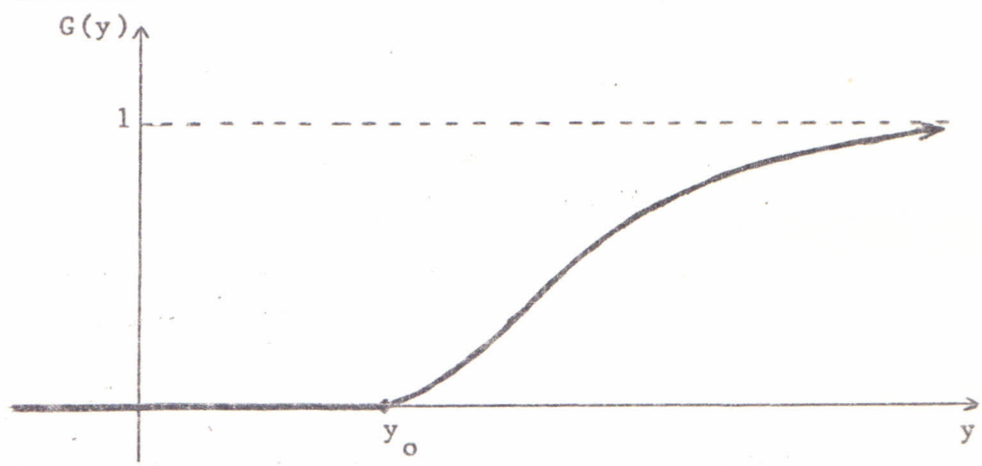
donde, existe F_γ, tal que:

$$F(x) = \left[L_{\gamma,C}\right]^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \leq 0 \\ t_o, & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

isto é, o arco possui comprimento infinito, com probabilidade $1 - t_o$, desde que $F(x) = \text{Prob}(\Lambda_\gamma < x) = t_o$, para todo x real.

2.7.2 - Espaço Simples

Seja (S, F) um Espaço Simples gerado pelo Espaço Métrico (S, d) e pela função $F \neq H_o$. Vamos trabalhar com uma função contínua e crescente em $[y_o, +\infty)$ onde $y_o = \text{Sup}\{y \mid G(y) < 0\} \geq 0$. Seja, por exemplo, uma G com o gráfico abaixo:



Observemos que $G^*(0) = 0$ e $G^*(t) = G^{-1}(t)$ para $0 < t \leq 1$ onde G^{-1} é a inversa de G, restrita ao intervalo $[y_o, +\infty)$. Para $p \neq q$ Seja $\theta_{pq}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\theta_{pq}(x) = y = x/d(p,q)$; desde modo $F_{pq} = G \circ \theta_{pq}$ e $F^*_{pq} = \theta^{-1}_{pq} \circ G^*$; isto é:

$F_{pq}^*(t) = d(p,q) \cdot G^{-1}(t)$ para $0 < t < 1$.

Seja, agora, $\gamma : [a, b] \longrightarrow S$ um arco retificável de comprimento $\lambda(\gamma) = \mathrm{Sup}\{\sum d(p_{i-1}, p_i)\} < +\infty$. Ora $L_{\gamma(\pi)} = \sum \ell_i =$

$$= \sum \left[F_{p_i p_{i-1}}\right]^* = \sum d(p_{i-1}, p_i) \cdot G^{-1} ;$$

então, $L_{\gamma,C}(t) = \lambda(\gamma) \cdot G^{-1}(t)$ e $F_\gamma = \left[L_{\gamma,C}\right]^*$.

$$\text{Logo, } F_\gamma(x) = \left[L_{\gamma,C}\right]^*(x) = \mathrm{Sup}\{t \mid L_{\gamma,C}(t) < x\}$$

$$= \mathrm{Sup}\{t \mid G^{-1}(t) < x/\lambda(\gamma)\}$$

$$= \mathrm{Sup}\{t \mid t < G(x/\lambda(\gamma))$$

$$= G(x/\lambda(\gamma))$$

2.7.3 - Um exemplo em $\mathbb{R}$

Seja $(\mathbb{R}, F)$ onde $F_{pq}(x) = \exp(-1/(x|p-q|))$ para $p \neq q$ e $x > 0$. Seja, ainda, $\gamma : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ o arco identidade. Ora, $F_{pq}^*(t) = -1/(\ln t \cdot |p-q|)$ com $0 < t < 1$; e

$$L_p(t) = \sum_{i=1}^{n} \ell_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[F_{p_i p_{i-1}}\right]^*(t) =$$

$$= (-1/\ln t) \cdot \sum_{i=1}^{n} (1/|p_i - p_{i-1}|),$$

o que nos assegura valer a condição de regularidade. Então, $L_{\gamma,C}(t) = \left[\mathrm{Sup}_{\pi \in C} L_{\gamma(\pi)}\right](t) = \mathrm{Sup}_{\pi \in C} (-1/\ln t) \cdot \sum_{i=1}^{n} (1/|p_i - p_{i-1}|)$

$= \psi_{+\infty}(t)$, o que nos leva a concluir:

$F_\gamma = \left[\psi_{+\infty}\right]^* = 0$; ou seja, o comprimento do arco γ alcança valor $+\infty$.

Observemos, finalmente, que neste espaço vale apenas a desigualdade triangular fraca, por vacuidade, de vez que F_{pq} não alcança o valor 1.

2.7.4 - Um Espaço de Menger com $\overline{F_{\gamma}} \neq \underline{F_{\gamma}}$

Sejam $S = \mathbb{R}$, $F^1_{pp} = F^2_{pp} = H_o$,

$$F^1_{pq}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq |p-q| \\ \exp(-|p-q|/x) & \text{se } x > |p-q| \end{cases}$$

e $$F^2_{pq}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \exp(-|p-q|/x) & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Se definirmos

$$G^1(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 1 \\ e^{-1/y} & \text{se } y > 1 \end{cases}$$

e $G^2(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 0 \\ e^{-1/y} & \text{se } y > 0 \end{cases}$ é evidente que $F^i_{pq}(x) = G^i(x/|p-q|)$ para $i = 1, 2$; e deste modo vemos que (S, F^i) são espaços simples e em consequência são Espaços de Menger com $T = \text{Min}$, o que implica ainda mais, que vale em cada um deles a condição de regularidade.

Vamos agora construir um novo Espaço $(S; F)$ do seguinte modo: $S = \mathbb{R}$, $F_{pp} = H_o$, $F_{pq} = F^1_{pq}$ para $p \neq q$ e p ou q racionais; e $F_{pq} = F^2_{pq}$ para $p \neq q$ e p e q não racionais. Note-se que o espaço obtido não é de Menger, para $T = \text{Min}$; ou, mesmo, para $T = \text{Prod}$.

Seja, agora, $\gamma:[0,\ 1] \longrightarrow [0,\ 1]$ o arco identidade.

Seja, ainda, $C_1 = \{\pi_n\}$ onde cada partição é formada unicamente por pontos racionais; então, para os pontos p_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ temos $F_{p_i p_{i-1}}(x) = F^1_{p_i p_{i-1}}(x) =$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq p_i - p_{i-1} \\ \exp(p_{i-1} - p_i / x) & \text{se } x > p_i - p_{i-1} \end{cases}$$

$$\text{e} \quad \left[F_{p_i p_{i-1}}\right]^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t = 0 \\ p_i - p_{i-1} & \text{se } 0 < t \leq e^{-1} \\ (p_i - p_{i-1})/\ln t & \text{se } e^{-1} < t < 1 \end{cases}$$

Observemos os gráficos:

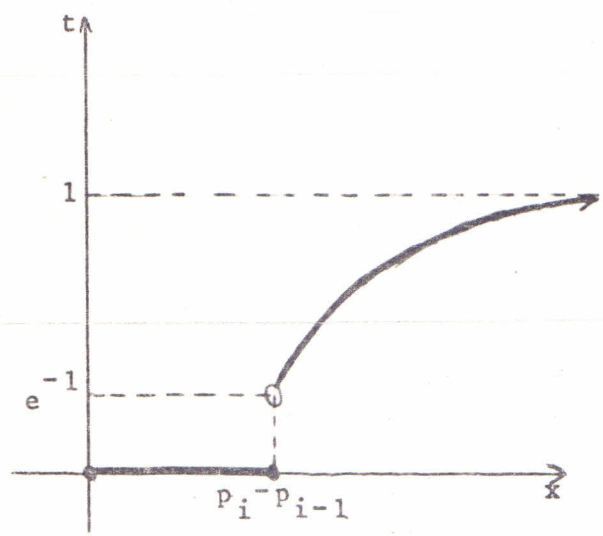


Gráfico de $t = F_{p_i p_{i-1}}(x)$

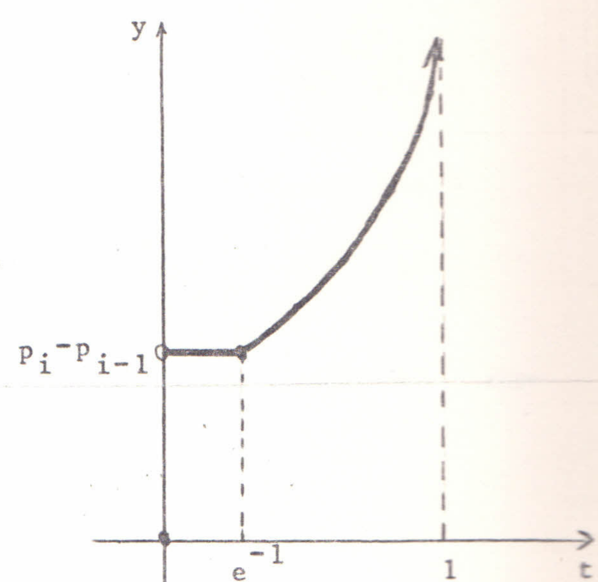


Gráfico de $y = \left[F_{p_i p_{i-1}}\right]^*(t)$

Encontramos, ainda:

$$L_{\gamma(\pi)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[F_{p_i p_{i-1}}\right]^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t = 0 \\ 1 & \text{se } 0 < t \leq e^{-1} \\ -1/\ln t & \text{se } e^{-1} < t \leq 1 \end{cases}$$

e, finalmente, $L_{\gamma,C_1} = \lim_{n\to\infty} L_{\gamma(\pi_n)} = (G^1)^*$.

Consideremos agora $C_2 = \{\pi_n\}$ onde cada partição tem todos os seus termos irracionais, exceto naturalmente p_o e p_n. Então, para $i = 1, 2, \ldots, n-1$, segue-se:

$$F_{p_i p_{i-1}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \exp(p_{i-1} - p_i/x) & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

e $$\left[F_{p_i p_{i-1}}\right]^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t = 0 \\ (p_{i-1} - p_i)/\ln t & \text{se} \quad 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

donde $$L_{\gamma(\pi_n)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[F_{p_i p_{i-1}}\right]^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t = 0 \\ -1/\ln & \text{se} \quad t > 0 \end{cases}$$

e concluimos $L_{\gamma,C_2} = \lim_{n\to\infty} L_{\gamma(\pi_n)} = (G^2)^*$.

Seja, agora, $C \in \mathcal{C}_{[0,\,1]}$ a coleção de todas as cadeias em $[0, 1]$; temos $L_{\gamma,C_2} \leq L_{\gamma,C} \leq L_{\gamma,C_1}$.

Logo, $\operatorname{Sup} L_{\gamma,C} = L_{\gamma,C_1}$ e $\operatorname{Inf} L_{\gamma,C} = L_{\gamma,C_2}$

o que nos fornece $\overline{F_\gamma} = \left[L_{\gamma,C_1}\right]^* = G^1$

e $$\underline{F_\gamma} = \left[L_{\gamma,C_2}\right]^* = G^2$$

3 - INTERMEDIARIDADE

3.1 - Introdução

Intermediaridade é um conceito geométrico de grande importância. Em termos de Espaço Métrico Probabilístico (E M P) já o próprio *Menger* (1942) e *Wald* (1943) apresentaram as primeiras idéias sobre como um ponto de um E M P está entre outros dois.

Neste capítulo veremos o conceito geométrico de intermediaridade nos Espaços Métricos e suas propriedades, e quatro versões da intermediaridade nos E M P. Inicialmente, são consideradas generalizações das idéias de Wald e de Menger; em seguida, apresentaremos a Intermediaridade Probabilística, para depois concluirmos com algumas idéias sobre a Intermediaridade tomando por base o Comprimento Aleatório de Arcos.

3.1.1 - Definição: Seja (S, d) um Espaço Métrico. Dizemos que o ponto q está entre os pontos p e r (escrevemos $\overline{pqr}$) se p, q e r são pontos distintos e

$$d(p, r) = d(p, q) + d(q, r).$$

As principais propriedades da Intermediaridade Métrica podem ser resumidas no Teorema seguinte.

3.1.2 - Teorema: Sendo (S, d) um Espaço Métrico e dados p, q, r e s em S, a Intermediaridade Métrica tem as seguintes propriedades:

(I1) Simetria dos pontos exteriores:

Se $\overline{pqr}$ então $\overline{rqp}$.

(I2) Unicidade do ponto interior:

Se $\overline{pqr}$ então nem $\overline{prq}$, nem $\overline{qpr}$.

(I3) Transitividade: Se $\overline{prq}$ e $\overline{prs}$

então a) $\overline{pqs}$ e b) $\overline{qrs}$.

(I4) Fechamento: $\bar{B}(p,r) = B(p,r) \cup \{p, r\}$ é fechado na topologia métrica, onde $B(p, r) = \{q \in S \mid \overline{pqr}\}$.

Demonstração:

(I1): Simetria: evidente, em vista da simetria da métrica d.

(I2): Unicidade: $\overline{pqr}$ implica $d(p,r) = d(p,q) + d(q,r)$; vamos supor $\overline{prq}$ o que implica $d(p,q) = d(p, r) + d(r, q)$; somando esta duas igualdades temos $2.d(r, q) = 0$, que é um absurdo pois os pontos são distintos. Igualmente podemos supor $\overline{qpr}$, com idêntico absurdo.

(I3): Transitividade: $\overline{pqr}$ implica $d(p,r)=d(p,q)+d(q,r)$ e $\overline{prs}$ implica $d(p,s) = d(p,r) + d(r,s)$; somando as duas igualdades e usando a desigualdade triangular obtemos:

[*] $d(p,s) = d(p,q) + d(q,r) + d(r,s) \geq d(p,q) + d(q,s)$;

logo, temos $d(p,q) + d(q,s) \leq d(p,s) \leq d(p,q) + d(q,s)$, ou seja, $d(p,s) = d(p,q) + d(q,s)$; isto é: $\overline{pqs}$.

Assim, [*] pode ser escrito:

$d(p, q) + d(q, r) + d(r, s) = d(p, q) + d(q, s)$ ou seja, $\overline{qrs}$.

(I4): Fechamento: Seja $\{q_n\} \subset \overline{B}(p, r)$ com $\lim_{n\to\infty} q_n = q \in S$; então, temos $d(p,q_n) + d(q_n,r) = d(p,r) \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$; como d é contínua na topologia métrica, segue-se que

$\lim_{n\to\infty} d(p, q_n) + \lim_{n\to\infty} d(q_n, r) = \lim_{n\to\infty} d(p, r)$ que também se escreve $d(p, \lim_{n\to\infty} q_n) + d(\lim_{n\to\infty} q_n, r) = d(p, r)$, ou seja,

$d(p, q) + d(q, r) = d(p, r)$; donde: $q \in \overline{B}(p, r)$.

■

3.2 - Intermediaridade de Wald

Wald (1943) usando a função triangular convolução (ver 1.3) assim definiu a intermediaridade: "q está entre p e r se e só se $F_{pr} = F_{pq} * F_{qr}$". Pretendemos utilizar uma generalização desta definição para qualquer função τ, conforme *Moynihan & Schweizer* (1979).

3.2.1 - Definição: Seja (S, F, τ) um E M P G. Se p, q e r são pontos distintos de S, então q está entre p e r, segundo Wald (vamos escrever $W(pqr)$) se $F_{pr} \neq H_{+\infty}$ e $F_{pr} = \tau(F_{pq}, F_{qr})$.

Como temos $\tau(H_{+\infty}, F) = H_{+\infty}$ para toda F então podemos concluir que também F_{pq} e F_{qr} são diferentes de $H_{+\infty}$ e recordamos também, que sendo os pontos todos distintos, temos F_{pr}, F_{pq} e F_{qr} diferentes de H_o.

Antes de vermos as condições nas quais a Intermediaridade de Wald goza das propriedades vistas no Teorema 3.1.2, precisamos de alguns conceitos relativos às funções triangulares.

3.2.2 - Definição: Seja τ uma função triangular e $\mathcal{D} \subset \Delta^+$; então $\mathcal{D}_\tau$, o *τ-fecho de $\mathcal{D}$*, é o menor subconjunto de Δ^+ que contém $\mathcal{D}$ e é fechado para a função τ.

3.2.3 - Definição: Seja τ uma função triangular, então para $F, G, H \in \mathcal{D}_\tau$ com $F \neq H_{+\infty}$, dizemos que τ é:

(i) *cancelativa*, se $\tau(F, G) = \tau(F, H)$ implica $G = H$;

(ii) *estritamente crescente*, se $G < H$ implica $\tau(F, G) < \tau(F, H)$;

(iii) *Arquimediana*, se $\tau(F, G) < F$, com $G \neq H_o$.

Estas propriedades estão relacionadas entre si de acordo com o Lema abaixo:

3.2.4 - Lema: Sejam τ uma função triangular e as afirmações:

(i) τ é cancelativa

(ii) τ é estritamente crescente.

(iii) τ é Arquimediana. Então:

(a) (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) .

(b) (iii) implica que τ não tem elemento idempotente não trivial.

(c) Sendo τ contínua, então vale a recíproca de (b).

Demonstração:

(a) : (i) $\Longrightarrow$ (ii): Como $G < H$, então $\tau(F,G) \leq \tau(F,H)$; contudo, não podemos ter $\tau(F,G) = \tau(F,H)$, pois por (i) teríamos $G = H$; logo, $\tau(F,G) < \tau(F,H)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Como $G < H_o$, então $\tau(F, G) < \tau(F, H_o) = F$.

(b) : Como $\tau(F, G) < F$ qualquer que sejam F e G em $\mathcal{D}_\tau$, então, fazendo $F = G$, temos $\tau(F, F) < F$; logo $\tau(F, F) \neq F$.

(c) : Para cada G em Δ^+, seja $G^n = \tau(G, G^{n-1})$, para $n \geq 2$. Então, se $G \neq H_o$, temos $H_o > G > G^2 > \cdots > G^n > \cdots$; seja $H = \lim\limits_{n\to\infty} G^n$. De imediato, $H \neq H_o$; como τ é contínua

$$\tau(H, H) = \tau(\lim_{n\to\infty} G^n, \lim_{n\to\infty} G^n) = \lim_{n\to\infty} \tau(G^n, G^n) = \lim_{n\to\infty} G^{2n} = H .$$

Deste modo, H é idempotente. Como, por hipótese, τ não possui elemento idempotente não trivial, então $H = H_{+\infty}$.

Agora, vamos supor τ não Arquimediana, isto é, existem $F \neq H_{+\infty}$ e $G \neq H_o$ tais que $\tau(F, G) = F$. Assim:

$$F = \tau(F, G) = \tau(\tau(F, G), G)$$
$$= \tau(F, G^2)$$
$$= \quad \ldots$$
$$= \tau(F, G^n)$$
$$= \quad \ldots$$
$$= \tau(F, \lim_{n\to+\infty} G^n)$$
$$= (F, H_{+\infty}) = H_{+\infty}$$

Esta contradição prova (c). ∎

Vejamos, agora, em que condições as propriedades do Teorema 3.1.2 são válidas para a Intermediaridade de Wald.

3.2.5 - Proposição: Seja (S, F, τ) um E M P G; então $W(pqr)$

(i) satisfaz sempre (I1) e (I3a) ;

(ii) satisfaz (I2) se τ é contínua e não tem elemento idempotente não trivial;

(iii) satisfaz (I2) e (I3b) se τ é estritamente crescente;

(iv) satisfaz (I4) com relação à ε,λ-topologia, se τ é contínua.

Demonstração:

(i) : (I1): Evidente.

(I3a):

$W(pqr)$ implica $F_{pr} = \tau(F_{pq}, F_{qr})$ e $W(prs)$ implica $F_{ps} = \tau(F_{pr}, F_{rs})$; pela desigualdade triangular (P4w) temos

$F_{qs} \geq \tau(F_{qr}, F_{rs})$ e $F_{ps} \geq \tau(F_{pq}, F_{qs})$, donde:

$$\begin{aligned} F_{ps} &= \tau(F_{pr}, F_{rs}) \\ &= \tau(\tau(F_{pq}, F_{qr}), F_{rs}) \\ &\leq \tau(F_{pq}, F_{qs}) \\ &\leq F_{ps} \quad \text{logo} \quad F_{ps} = \tau(F_{pq}, F_{qs}). \end{aligned}$$

(ii) : (I2):

Como $W(pqr)$, então F_{pr}, F_{pq} F_{rq} são diferentes de H_o e de $H_{+\infty}$ e

$$\begin{aligned} \tau(F_{qr}, F_{rp}) &= \tau(F_{qr}, \tau(F_{pq}, F_{qr})) \\ &= \tau(F_{pq}, \tau(F_{qr}, F_{qr})) \\ &\leq \tau(F_{pq}, \tau(F_{qr}, H_o)) \\ &= \tau(F_{pq}, F_{qr}) \\ &< F_{pq}\text{; logo, não vale } W(qrp). \end{aligned}$$

Lembremos que podemos escrever esta última desigualdade porque τ é Arquimediana, como nos garante o lema 3.2.4c.

A demonstração de que $W(rpq)$ também não vale é idêntica.

(iii) : (I2):

Sendo τ estritamente crescente, é também Arquimediana; portanto, a demonstração feita em (ii) contínua válida.

(I3b):

Vamos supor $F_{qs} > \tau(F_{qr}, F_{rs})$ e, como já vimos em (i) que $F_{ps} = \tau(F_{pq}, \tau(F_{qr}, F_{rs}))$, decorre:

$$F_{ps} < \tau(F_{pq}, F_{qs}) \leq F_{ps} .$$

Este absurdo nos leva a concluir que:

$F_{qs} \leq \tau(F_{qr}, F_{rs})$; com a desigualdade triangular (P4w) $F_{qs} \geq \tau(F_{qr}, F_{rs})$, obtem-se $F_{qs} = \tau(F_{qr}, F_{rs})$; ou seja , $W(qrs)$.

(iv) : (I4) :

Seja $\{q_n\}$ uma sequência em $\overline{B}(p, r)$ tal que q_n converge para q_o, um ponto de S. Se $q_o = p$ ou $q_o = r$ nada resta a fazer; então, vamos supor p, q_o e r todos distintos.

Como $W(pq_n r)$ qualquer que seja n e como $F_{q_o q_n}$ converge para H_o, então:

$$\begin{aligned} F_{pr} &\geq \tau(F_{pq_o}, F_{q_o r}) \\ &\geq \tau(\tau(F_{pq_n}, F_{q_n q_o}), \tau(F_{q_o q_n}, F_{q_n r})) \\ &= \tau(\tau(F_{pq_n}, F_{q_n r}), \tau(F_{q_o q_n}, F_{q_o q_n})) \\ &= \tau(F_{pr}, \tau(F_{q_o q_n}, F_{q_o q_n})) \; ; \end{aligned}$$

como a expressão do lado direito da última igualdade converge para $\tau(F_{pr}, H_o) = F_{pr}$, então concluimos que:

$F_{pr} = \tau(F_{pq_o}, F_{q_o r})$, isto é, $W(pq_o r)$; ou ainda, $q_o \in \overline{B}(p,r)$. ∎

3.2.6 - Exemplos.

3.2.6.1 - No Espaço de Wald:

Como a convolução é contínua e cancelativa em Δ^+, pelo Lema 3.2.4 é também estritamente crescente, Arquimediana e não tem elemento idempotente não trivial; assim a intermediaridade de Wald goza de todas as propriedades (I1) a (I4) no Espaço de Wald.

3.2.6.2 - No Espaço Equilátero:

Seja τ uma função triangular com elemento idempotente não trivial; isto é, existe $G \in \Delta^+$ tal que $\tau(G, G) = G$ com $G \neq H_o$. Seja agora o Espaço Equilátero onde $F_{pq} = G$ para todo $p \neq q$. Deste modo, $W(pqr)$ vale sempre, em qualquer ordem, para quaisquer três pontos distintos de S; isto é, falha (I2).

3.2.6.3 - No Espaço Simples:

Seja (S, F) o Espaço Simples gerado pelo Espaço Métrico (S, d) e por $G \in \Delta^+$; então já sabemos que $F_{pq}(x) = G(x/d(p, q))$ e que (S, F, Min) é Menger, donde (S, F, τ_{Min}) é um E M P G; neste caso "estar entre Wald" e "estar entre métrico" são equivalentes, como podemos ver facilmente.

Começamos com:

$$\begin{aligned} F_{pr}(x) &= \tau_{Min}(F_{pq}, F_{qr})(x) \\ &= \mathrm{Sup}\{\mathrm{Min}\{F_{pq}(u), F_{qr}(v)\} u + v = x\} \\ &= \mathrm{Sup}\{\mathrm{Min}\{G(u/d(p, q)), G(v/d(q, r))\} u + v = x\} \\ &= \mathrm{Sup}\{G(\mathrm{Min}\{u/d(p, q), v/d(q, r)\}) : u + v = x\} \\ &\leq \mathrm{Sup}\{G((u + v)/(d(p, q) + d(q, r))) : u + v = x\} \\ &= G(x/(d(p, q) + d(q, r))) ; \end{aligned}$$

assim, temos $F_{pr}(x) = G(x/d(p, r)) \leq G(x/(d(p, q) + d(q, r)))$

ou seja, $d(p, r) \geq d(p, q) + d(q, r)$; como pela desigualdade triangular $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$ podemos concluir que $d(p, r) = d(p, q) + d(q, r)$.

No outro sentido, queremos provar que se $d(p, r) = d(p, q) + d(q, r)$ então, $F_{pr} = \tau_{Min}(F_{pq}, F_{qr})$.

Vamos supor que fosse $F_{pr} < \tau_{Min}(F_{pq}, F_{qr})$; então, teríamos $G(x/d(p, r)) < G(x/(d(p, q) + d(q, r)))$ ou $d(p, r) > d(p, q) + d(q, r)$, o que é um absurdo, ficando portanto provada nossa asserção.

3.2.6.4 - Um exemplo onde falha a lei do cancelamento no semigrupo (Δ^+, τ_{Prod})

Seja $S = \{p, q, r, s\}$; notaremos $\tau = \tau_{Prod}$. Além disso, sejam as funções:

$$F_{pq}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } 0 < x \leq 1; \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases} \qquad F_{rs}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1/2 & \text{se } 0 < x \leq 1{,}45; \\ 1 & \text{se } x > 1{,}45 \end{cases}$$

$F_{qr} = H_1$; $F_{pr} = \tau(F_{pq}, F_{qr})$; $F_{ps} = \tau(F_{pr}, F_{rs})$; $F_{qs} = \tau(F_{qr}, F_{rs})$.

Pela Proposição 3.2.5 temos que $W(pqr)$ e $W(prs)$ implicam em $W(pqs)$ e, deste modo, constatamos que no E M P G (S, F, τ_{Prod}) a Intermediaridade de Wald goza de todas as propriedades do Teorema 3.1.2.

Seja $G \in \Delta^+$, assim definida: $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1 \\ 0{,}5 & \text{se } 1 < x \leq 2{,}4 \\ 0{,}55 & \text{se } 2{,}4 < x \leq 2{,}45 \\ 1 & \text{se } x > 2{,}45 \end{cases}$

Observemos que $F_{qs}(x) = \tau(F_{qr}, F_{rs})(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1 \\ 0,5 & \text{se } 1 < x \leq 2,45 \\ 1 & \text{se } x > 2,45 \end{cases}$

e, portanto, $G > F_{qs}$.

É fácil verificar que $\tau(F_{pq}, F_{qs}) = \tau(F_{pq}, G)$; deste modo, não vale a lei do cancelamento.

Se definirmos $F^1_{qs} = G$, deixando as demais funções como antes, teremos um novo E M P G (S, F^1, τ_{Prod}) onde continua válido que $W(pqr)$ e $W(prs)$ implicam $W(pqs)$; porém , como construimos $F^1_{qs} = G > F_{qs}$ não vale $W(qrs)$ e, assim falha (I3b) do teorema 3.1.2.

3.3 - Intermediaridade de Menger

A primeira definição de Intermediaridade para os E M P foi apresentada por *Menger* (1942). Nesta definição ele afirmava que o ponto q está entre os pontos p e r se

$$1 - F_{pr}(x + y) \geq T(1 - F_{pq}(x), 1 - F_{qr}(y)) \qquad [*]$$

para todo x e y no intervalo $(0, +\infty)$ e onde T é uma T-Norma Triangular; notaremos, nesse caso, $M(pqr)$. Para esta definição podemos dar a seguinte interpretação:

"[A Probabilidade da distância entre p e r ser maior do que $x + y$] é maior do que ou igual a [uma função T da probabilidade de que a distância entre p e q seja maior do que x e da Probabilidade de que a distância entre q e r seja maior do que y]."

Verifiquemos, de início, que esta definição é consistente com a intermediaridade métrica:

3.3.1 - Teorema: Seja (S, F, Min) o Espaço Simples gerado pelo Espaço Métrico (S, d) e pela função H_1; então, dados p, q e r em S, temos $M(pqr)$ se e somente se $\overline{pqr}$.

Demonstração: $M(pqr) \Longrightarrow \overline{pqr}$:

Vamos supor que $\overline{pqr}$ não vale; isto é:

$$d(p, r) > d(p, q) + d(q, r) .$$

Seja $x = d(p, q)$ e $y = d(q, r)$; então:

$$\begin{aligned} 1-F_{pr}(x+y) &= 1-H_o((x+y)/d(p,r)-1) \\ &= 0 < 1 = \\ &= Min\{1-H_o(x/d(p,q)-1),\ 1-H_o(y/d(q,r)-1)\} \\ &= Min\{1 - F_{pq}(x),\ 1 - F_{qr}(y)\} , \end{aligned}$$

contrariando a hipótese; logo, $\overline{pqr}$.

$\overline{pqr} \Longrightarrow M(pqr)$:

$\overline{pqr}$ significa $d(p, r) = d(p, q) + d(q, r)$; então, se $d(p, q) \leq x$ ou $d(q, r) \leq y$, segue-se:

$$\begin{aligned} 1-F_{pr}(x+y) &\geq 0 \\ &= Min\{1-H_o(x/d(p,q)-1),\ 1-H_o(y/d(q,r)-1)\} \\ &= Min\{1 - F_{pq}(x),\ 1 - F_{qr}(y) ; \end{aligned}$$

se $d(p, q) > x$ e $d(q, r) > y$ então $d(p, r) > x + y$,

donde: $1 - F_{pr}(x + y) = 1 - H_o((x + y)/d(p, r) - 1) = 1$

$$\geq Min\{1 - F_{pq}(x),\ 1 - F_{qr}(y)\} .$$

■

Agora, vamos dar uma nova versão à definição de Menger.

Inicialmente seja T^* a *co-norma de T*, ou seja, a função definida em $[0, 1] \times [0, 1]$ da seguinte maneira: $T^*(a, b) = 1 - T(1 - a, 1 - b)$.

Deste modo, a definição [*] dada anteriormente passa a ter a seguinte formulação: $F_{pr}(x+y) \leq T^*(F_{pq}(x), F_{qr}(y))$.

Seja agora a operação binária $\overline{\tau}_{T^*}$ definida em Δ^+ por:

$\overline{\tau}_{T^*}(F, G)(x) = \text{Inf}\{T^*(F(u), G(v)) \mid u + v = x\}$.

Sendo T^* contínua então $\overline{\tau}_{T^*}$ é uma função triangular e assim, podemos, finalmente, apresentar a seguinte versão para a Intermediaridade de Menger:

3.3.2 - Definição: Seja (S, F, τ_T) um Espaço de Menger. Sejam p, q e r pontos de S. Então q está entre p e r, no sentido de Menger se $F_{pr} \leq \overline{\tau}_{T^*}(F_{pq}, F_{qr})$; e continuaremos a notar $M(pqr)$.

Observemos primeiramente que se $M(pqr)$ então $\overline{\tau}_{T^*}(F_{pq}, F_{qr})$ é um limite superior de F_{pr}. Em segundo lugar, como $\overline{\tau}_T \leq \overline{\tau}_{T^*}$ esta reformulação é consistente com a desigualdade triangular (P4g) $F_{pr} \geq \tau_T(F_{pq}, F_{qr})$ onde se vê que $\tau_T(F_{pq}, F_{qr})$ é um limite inferior para F_{pr}.

Podemos comparar a Intermediaridade de Wald com a de Menger e constatamos que esta é em geral mais fraca do que a primeira:

3.3.3 - **Proposição:** (i) No Espaço de Menger a Intermediaridade de Wald implica na Intermediaridade de Menger.

(ii) No espaço de Menger com T = Min, as duas Intermediaridades se equivalem.

Demonstração:

(i) : $W(pqr) \Longrightarrow F_{pr} = \tau_T(F_{pq}, F_{qr})$

$$\leq \bar{\tau}_{T^*}(F_{pq}, F_{qr}) \Longrightarrow M(pqr)$$

(ii): Se T = Min então temos T^* = Max e, usando os conceitos de Sup e de Inf, segue-se $\tau_T = \bar{\tau}_{T^*}$; logo,

$$F_{pr} \leq \bar{\tau}_{T^*}(F_{pq}, F_{qr}) = \tau_T(F_{pq}, F_{qr}) ,$$

que combinando com a desigualdade triangular (P4g) nos permite concluir:

$$F_{pr} = \tau_T(F_{pq}, F_{qr}), \text{ ou seja } W(pqr)$$

∎

3.3.3a - **Corolário:** No Espaço Simples a Intermediaridade de Menger coincide com a Intermediaridade de Wald.

Também no Espaço de Wald, as duas intermediaridades se equivalem:

3.3.4 - **Proposição:** No Espaço de Wald a intermediaridade de Wald coincide com a intermediaridade de Menger.

Demonstração: Note-se que nos basta provar que a intermediaridade de Menger implica a de Wald. (A implicação contrária já vale pela proposição 3.3.3, tendo em vista que todo Espaço de Wald é também de Menger.)

A intermediaridade de Menger, em termos probabilísticos, pode escrever-se:

$$1 - F_{pr}(x) = \text{Prob}\,\{d(p,\ r) \geq x\}$$

$$\geq \text{Prob}\,\{d(p,\ q) + d(q,\ r) \geq x\}$$

ou seja, $F_{pr} \leq F_{pq} * F_{qr}$;

combinando este resultado com a desigualdade triangular (P4w) $F_{pr} \geq F_{pq} * F_{qr}$, segue-se $F_{pr} = F_{pq} * F_{qr}$, ou seja $W(pqr)$. ∎

No Espaço Pseudo-Metricamente Gerado, que é um Espaço de Menger com $T = T_m$, a Intermediaridade de Menger é mais fraca do que a Intermediaridade métrica, no sentido de que esta implica na primeira, e não na direção inversa.

Antes de provarmos isto, vamos calcular $T_m{}^*$:

$$T_m{}^*(a,\ b) = 1 - T_m(1 - a,\ 1 - b)$$

$$= 1 - \text{Max}\,\{1 - a + 1 - b - 1,\ 0\}$$

$$= 1 - \text{Max}\,\{1 - (a + b),\ 0\}$$

$$= \text{Min}\,\{a + b,\ 1\}$$

3.3.5 - Proposição: Seja $(S,\ \mathcal{F})$ um Espaço Pseudo-Metricamente Gerado e sejam p, q e r em S, tais que q está entre p e r para quase todas as métricas d em $\mathcal{D}$; então q está entre p e q no sentido de Menger: $M(pqr)$.

Demonstração:

Seja $x > 0$; consideremos, então, $u, v \geq 0$, tais que $u + v = x$.

Como, por hipótese, q está entre p e r para quase todas as métricas $d \in \mathcal{D}$, então $\mu(\Delta) = 1$, onde $\Delta = \{d \mid d(p, r) = d(p, q) + d(q, r)\}$.

Sejam os conjuntos: $A_x = \{d \in \Delta \mid d(p, r) < x\}$;

$$B_u = \{d \in \Delta \mid d(p, q) < u\};$$

$$C_v = \{d \in \Delta \mid d(q, r) < v\};$$

desde que $d(p, q) + d(q, r) = d(p, r) < x$ temos $d(p,q) < u$ ou $d(q, r) < v$; $A_x \subset B_u \cup C_v$.

Portanto: $F_{pr}(x) = \mu\{d \in \Delta \mid d(p, r) < x\}$

$$= \mu(A_x)$$

$$\leq \mu(B_u \cup C_v)$$

$$\leq \mu(B_u) + \mu(C_v)$$

$$= F_{pq}(u) + F_{qr}(v);$$

ou seja, $\overline{\tau}_{T^*}(F_{pq}, F_{qr})(x) =$

$$= \text{Inf}\{\text{Min}(F_{pq}(u) + F_{qr}(v), 1);\ u + v = x\} \geq F_{pr}(x).$$

Como já acenamos, o inverso desta proposição é falso. Vamos considerar como exemplo o Espaço (L, F), das funções mensuráveis a Lebesgue em $[0, 1]$ com F_{fg} dada por $F_{fg}(x) = \lambda\{t \in [0, 1] \mid |f(t) - g(t)| < x\}$.

Sejam agora as funções em L: $f(t) = t$; $h(t) = 0$ e

$$g(t) = \begin{cases} 1/8 & \text{se} \quad 0 \leq t \leq 1/8 \\ t & \text{se} \quad 1/8 < t \leq 1/2 \\ 0 & \text{se} \quad 1/2 < t \leq 1 \end{cases}$$

Observemos que $g(t) > f(t) + h(t)$, para $0 \leq t < 1/8$; logo, g não está entre f e h para $t \in [0, \frac{1}{8}]$. No entanto, podemos verificar que $M(fgh)$ pois:

$$F_{fg}(u) = \lambda\{t \mid |f(t) - g(t)| < u\} =$$

$$= \begin{cases} \lambda\{t \mid 1/8 - t < u\} & \text{para } 0 \leq t \leq 1/8 \\ \lambda\{t \mid t - t < u\} & \text{para } 1/8 < t \leq 1/2 \\ \lambda\{t \mid t < u\} & \text{para } 1/2 < t \leq 1 \ ; \end{cases}$$

$$F_{gh}(v) = \lambda\{t \mid g(t) < v\} =$$

$$= \begin{cases} \lambda\{t \mid 1/8 < v\} & \text{para } 0 \leq t \leq 1/8 \\ \lambda\{t \mid t < v\} & \text{para } 1/8 < t \leq 1/2 \\ \lambda\{t \mid 0 < v\} & \text{para } 1/2 < t \leq 1 \end{cases}$$

Finalmente $F_{fh}(x) = \lambda\{t \mid t < x\} = \lambda([0, x)) = x$.

Então:

$$\tau_{T^*}(F_{fg}, F_{gh})(x) = \mathrm{Inf}\{\mathrm{Min}\{F_{fg}(u) + F_{gh}(v), 1\} \ u + v = x\}$$
$$\geq x$$
$$= F_{fh}(x);$$

ou seja $M(fgh)$.

3.4 - Intermediaridade Probabilística

As noções de Intermediaridade vistas nos parágrafos anteriores são deterministas; isto é, dados três pontos distintos, um deles está ou não está entre os outros dois. É de se esperar, contudo, uma noção probabilística para a Intermediaridade. *Sherwood* (1970) apresentou tal noção para os

E-Espaços, onde podemos falar da probabilidade de um ponto estar entre outros dois. Vejamos um pouco como estas idéias são desenvolvidas.

3.4.1 - Definição: Seja (S, F) um E-Espaço com base no Espaço de Probabilidade (Ω, U, P) e sobre o Espaço Métrico (M, d); para três pontos p, q e r de S, a probabilidade do ponto q estar entre p e r é o número $B(pqr)$ dado por $B(pqr) = P\{t \in \Omega \mid d(p(t), r(t)) = d(p(t), q(t)) + d(q(t), r(t))\}$

Quanto às propriedades da Intermediaridade, que vimos no Teorema 3.1.2, podemos apresentar uma formulação análoga:

3.4.2 - Proposição: Sendo (S, F) um E-Espaço com base em (Ω, U, P) e sobre o Espaço Métrico (M, d) e p, q, r e s em S, então temos:

(I1) $B(pqr) = B(rqp)$;

(I2) $B(pqr) + B(prq) + B(qpr) \leq 1 + B(pqp) + B(qrq) + B(rpr)$;

(I3) a) $B(pqs) \geq T_m(B(pqr), B(prs))$

b) $B(qrs) \geq T_m(B(pqr), B(prs))$

(I4) $C_{pr}(t) = \{q \in S \mid B(pqr) \geq t\}$ é um subconjunto fechado de S na ε,λ-topologia, para todo $t \in [0,1]$.

Demonstração:

(I1) Evidente.

(I2) Sejam os conjuntos:

$A = \{t \mid d(p(t), q(t)) + d(q(t), r(t)) = d(p(t), r(t))\}$

$B = \{t \mid d(q(t), p(t)) + d(p(t), r(t)) = d(q(t), r(t))\}$

$C = \{t \mid d(p(t), r(t)) + d(r(t), q(t)) = d(p(t), q(t))\}$

$D = \{t \mid d(p(t), q(t)) = 0\}$

$E = \{t \mid d(q(t), r(t)) = 0\}$

$F = \{t \mid d(r(t), p(t)) = 0\}$;

assim temos: $B(pqr) = P(A)$; $B(qpr) = P(B)$; $B(prq) = P(C)$;

$B(pqp) = P(D)$; $B(qrq) = P(E)$ e $B(rpr) = P(F)$.

Queremos provar que

$$P(A) + P(B) + P(C) \leq 1 + P(D) + P(E) + P(F) .$$

Observemos que $A \cap B \subset D$ e, consequentemente, $A \cap B \cap C \subset D$ e $P(A \cap B \cap C) \leq P(D)$ ou

[1] $P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cup B \cup C) \leq P(D)$;

igualmente, como $A \cap C \subset E$ e $B \cap C \subset F$, concluimos:

[2] $P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cup B \cup C) \leq P(E)$ e

[3] $P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cup B \cup C) \leq P(F)$;

Somando [1], [2] e [3], obtemos:

$$3.(P(A) + P(B) + P(C) - 1) \leq P(D) + P(E) + P(F) ,$$

donde $P(A) + P(B) + P(C) \leq 1 + P(D) + P(E) + P(F)$.

(I3) Sejam os conjuntos:

$A = \{t \mid d(p(t), q(t)) + d(q(t), s(t)) = d(p(t), s(t))\}$

$B = \{t \mid d(p(t), q(t)) + d(q(t), r(t)) = d(p(t), r(t))\}$

$C = \{t \mid d(p(t), r(t)) + d(r(t), s(t)) = d(p(t), s(t))\}$

Observemos que $B \cap C \subset A$ e assim

$$B(pqs) = P(A) \geq P(B \cap C) \geq P(B) + P(C) - 1$$

$$= B(pqr) + B(prs) - 1 ;$$

e como $B(pqs) \geq 0$ temos $B(pqs) \geq \mathrm{Max}\{B(pqr) + B(prs) - 1, 0\}$

$$= T_m(B(pqr), B(prs)).$$

A demonstração da desigualdade (b) segue o mesmo esquema. É suficiente tomarmos o conjunto D abaixo, em vez do conjunto A:

$$D = \{t \mid d(q(t), r(t)) + d(r(t), s(t)) = d(q(t), s(t))\}.$$

(I4) se, $x = 0$, então:

$C_{pr}(0) = \{q \mid B(pqr) \geq 0\} = S$, que é fechado.

Consideremos, pois, $x \in]0, 1]$. Neste caso, se $q \in S - C_{pr}(x)$, então $B(pqr) < x$. Queremos mostrar que $S - C_{pr}(x)$ é aberto, ou seja, existe uma vizinhança $N(q)$ de $q \in S - C_{pr}(x)$ completamente contida neste conjunto.

Seja $D = \{t \mid d(p(t),q(t)) + d(q(t),r(t)) > d(p(t),r(t))\}$ e $P(D) > 1 - x$; logo, podemos escolher $\lambda > 0$ tal que $P(D) > 1 - x + \lambda$.

Para cada inteiro n seja o conjunto

$D_n = \{t \mid d(p(t),q(t)) + d(q(t),r(t)) \geq d(p(t),r(t)) + 1/n\}$;

então D_n é uma sequência de conjuntos tais que $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ e deste modo $P(D) = \lim_{n\to\infty} P(D_n)$, donde existe $m \in Z$ tal que, $P(D_m) > 1 - x + \lambda/2$.

Vamos supor $s \in N(q) = N_q(1/2m, \lambda/2)$ uma vizinhança de q com $\varepsilon = 1/2m$ e $\lambda = \lambda/2$.

Sejam, agora, $V = \{t \mid d(q(t), s(t)) < 1/2m\}$ e $K = \{t \mid d(p(t), s(t)) + d(s(t), r(t)) > d(p(t), r(t))\}$; então, $D_m \cap V \subset K$ e

$$\begin{aligned} P(K) &\geq P(D_m) + P(V) - 1 \\ &> (1 - x + \lambda/2) + (1 - \lambda/2) - 1 \\ &= 1 - x . \end{aligned}$$

Mas $P(K) + B(psr) = 1$ logo $B(psr) < x$ então temos que $s \in S - C_{pr}(x)$ $\forall s \in N(q)$ ou seja $N(q) \subset S - C_{pr}(x)$.

$\blacksquare$

Podemos relacionar a Intermediaridade Probabilística com a Intermediaridade de Menger:

3.4.3 - Proposição: Seja (S, F, T_m) um E-Espaço com base em $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ e sobre (M, d); se p, q e r são pontos de S tais que $B(pqr) = 1$, então $M(pqr)$.

Demonstração: Se $B(pqr) = 1$, então para todo $x, y \geq 0$ temos:

$$\begin{aligned} 1-F_{pr}(x+y) &= 1-P\{t \mid d(p(t),r(t)) < x+y\} \\ &\geq 1-P\{t \mid d(p(t),q(t))+d(q(t),r(t)) < x+y\} \\ &\geq 1-P\{t \mid d(p(t),q(t)) < x\} - P\{t \mid d(q(t),r(t)) < y\} \\ &= 1-F_{pq}(x)-F_{qr}(y) = (1-F_{pq}(x))+(1-F_{qr}(y))-1 ; \end{aligned}$$

como $1 - F_{pr}(x+y) \geq 0$, então:

$$1 - F_{pr}(x+y) \geq T_m(1 - F_{pq}(x),\ 1 - F_{qr}(y)),$$ ou seja, $M(pqr)$.

∎

O inverso desta proposição é falso. Aliás, a Intermediaridade de Menger é tão fraca que podemos ter $M(pqr)$, mesmo que a probabilidade de q estar entre p e r seja 0. É o que veremos no exemplo a seguir.

3.4.4 - Exemplo: Seja S um conjunto com ao menos três elementos. Seja G a função assim definida:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ 1-e^{-x} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}.$$

Sejam $\Omega = (0, +\infty)$ e $\mathcal{A}$ a coleção dos subconjuntos de Ω mensuráveis a Lebesgue; para $A \in \mathcal{A}$ definimos $P(A) = \int_A dG(x)$.

Para todo $t \in \Omega$ seja $\delta_t : S \times S \longrightarrow \mathbb{R}$ assim definida:

$$\delta_t(p, q) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad p = q \\ 1 & \text{se} \quad p \neq q \end{cases}$$

Então, $F_{pq}(x) = P\{t \in \Omega \mid \delta_t(p, q) < x\}$

$$= P\{t \mid t < x\}$$

$$= \int_0^x dG(t) = G(x),$$ para $p \neq q$ e $F_{pq} = H_o$, se $p = q$.

Deste modo, (S, F) é metricamente gerado e portanto, (S, F, T_m) é um Espaço de Menger, isométrico a E-Espaço.

Sejam p, q e r pontos distintos de S ; então

$$
\begin{aligned}
B(pqr) &= P\{t \mid \delta_t(p, q) + \delta_t(q, r) = \delta_t(p, r)\} \\
&= P\{t \mid 2t = t\} \\
&= P(\emptyset) \\
&= 0 .
\end{aligned}
$$

Sejam, agora, $x, y > 0$, como $1 - e^{-y} \geq 0$ e $1 \geq e^{-x}$, então $1 - e^{-y} \geq e^{-x} - e^{-x-y}$ ou $e^{-x-y} \geq e^{-x} + e^{-y} - 1$, o que é equivalente a $1 - F_{pr}(x + y) \geq (1 - F_{pq}(x)) + (1 - F_{qr}(y)) - 1$; como $1 - F_{pr}(x + y) \geq 0$, então $1 - F_{pr}(x + y) \geq T_m(1 - F_{pq}(x), 1 - F_{qr}(y))$, ou seja, $M(pqr)$.

A proposição 3.4.3 possui uma inversa parcial que apresentaremos sem demonstração (tal demonstração se encontra, aliás, bem detalhada em *Sherwood* (1970).)

3.4.3 - Proposição: Seja $(S, \mathcal{F}, T_m)$ um E-Espaço com base em $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ e sobre (M, d); se para p e r em S existe $a > 0$ de modo que $F_{pr} = H_a$ então para todo q de S $M(pqr)$ se e somente se $B(pqr) = 1$.

3.5 - Intermediaridade do Comprimento Aleatório de Arco

No capítulo 2 tratamos de Comprimento Aleatório de Arcos que definimos como sendo uma função de distribuição F_γ associada ao arco γ. Vamos agora apresentar um conceito de Intermediaridade usando o Comprimento Aleatório de Arcos.

Antes, observemos, que dados p e q em S, tem-se uma função de distribuição F_{pq}, cuja interpretação probabilística já é conhecida:

$$F_{pq}(x) = \text{Prob}\{d(p, q) < x\}$$

Deste modo, a desigualdade $F_{pq}(x) \geq F_{rs}(x)$ para qualquer x, corresponde à desigualdade métrica $d(p, q) \leq d(r, s)$, desde que estas distâncias de fato, pudessem ser conhecidas.

Neste contexto, vamos agora, definir a Intermediaridade do Comprimento Aleatório de Arcos.

3.5.1 - Definição: Seja (S, F) um E M P; sejam p, q e r em S; então dizemos que o ponto q *está entre* p *e* r *pelo comprimento de arco* (e escrevemos $C(pqr)$) se:

(i) existe um arco retificável γ_q unindo os pontos p e r e passando por q ;

(ii) para qualquer outro arco retificável γ unindo os pontos p e r tem-se $F_\gamma \leq F_{\gamma_q}$.

A condição (ii) significa ser o arco γ_q o "menor" arco unindo os pontos p e r, o que nos pode dar margem para um estudo posterior, envolvendo o conceito de geodésica nos E M P.

Inicialmente, vamos constatar que esta definição é consistente com a generalização dos Espaços Métricos para os E M P:

3.5.2 - Proposição: Seja (S, d) um Espaço Métrico convexo e (S, F_d) o E M P associado; isto é: $F_{pq} = H_{d(p,\, q)}$ para todo p e q em S. Então C(pqr) se e somente se $\overline{pqr}$.

Demonstração: Inicialmente observemos que pelo Teorema 2.4.1 tem-se $F_\gamma = H_{\lambda(\gamma)}$ para toda curva γ; e deste modo $F_{\gamma_q} \geq F_\gamma$ é equivalente à $\lambda(\gamma_q) \leq \lambda(\gamma)$.

Mostremos a primeira parte da proposição:

($\Longrightarrow$) C(pqr) significa existir um arco γ_q, unindo p a r e passando por q, tal que $F_{\gamma_q} \geq F_\gamma$ para qualquer outro arco γ unindo p a r.

Como o Espaço é convexo, podemos considerar um arco γ', unindo p a r, tal que $\lambda(\gamma') = d(p, r)$. Segue-se $d(p, r) = \lambda(\gamma') \geq \lambda(\gamma_q) \geq d(p, q) + d(q, r)$; o que, junto à desigualdade triangular, nos leva a concluir:

$$d(p, r) = d(p, q) + d(q, r).$$

($\Longleftarrow$) No outro sentido:

$\overline{pqr}$ significa $d(p, r) = d(p, q) + d(q, r)$.

Ora o arco γ_q, unindo p a r, tal que $\lambda(\gamma_q) = d(p, r)$ satisfaz as condições da definição 3.5.1.

∎

Quanto às propriedades da Intermediaridade vistas no teorema 3.1.2, podemos constatar a validade para a Intermediaridade do Comprimento Aleatório de Arcos:

2.5.3 - Proposição: Sejam p, q, r e s pontos de (S, F) um E M P onde vale a condição de regularidade; então:

(I1) $C(pqr) \Longrightarrow C(rqp)$;

(I2) Se $C(pqr)$ então nem $C(prq)$, nem $C(rqp)$;

(I3) Se $C(pqr)$ e $C(prs)$ então $C(pqs)$ e $C(qrs)$;

(I4) Se $C(pqr)$ e γ_q é o arco considerado na definição 3.5.1, então para qualquer $s \in \gamma_q$, com $p \neq s \neq r$, tem-se também $C(psr)$

Demonstração:

(I1) Se $C(pqr)$ então existe $\gamma_q : [a, b] \longrightarrow S$ com $\gamma_q(a) = p$, $\gamma_q(b) = r$ e $\gamma_q(t_o) = q$ com $t_o \in (a, b)$; e para qualquer γ unindo p a r temos $F_\gamma \leq F_{\gamma_q}$.

Seja agora $\gamma : [0, 1] \longrightarrow S$, assim definida:

$\gamma(t) = \gamma_q(ta + (1-t)b)$; logo, $\gamma(0) = \gamma_q(b) = r$, $\gamma(1) = \gamma_q(a) = p$ e, para $t_1 = (b - t_o)/(b - a)$, temos $0 < t_1 < 1$ e

$\gamma(t_1) = \gamma_q(t_o) = q$. Como $\phi:[0, 1] \longrightarrow [a, b]$ tal que $\phi(t) = at + (1-t)b$ é bicontínua, então $\gamma_q \sim \gamma$ e pelo corolário 2.2.2a existe $F_\gamma = F_{\gamma_q}$; deste modo, concluimos por $C(rqp)$.

(I2)

Se $C(pqr)$, então existem γ_q e F_{γ_q}, como em (I1); pela aditividade de arcos, $\left[F_{\gamma_q}\right]^* = \left[F_{\gamma_{pq}}\right]^* + \left[F_{\gamma_{qr}}\right]^*$.

Vamos supor $C(prq)$; logo, existe γ_r, um arco unindo p a q e passando por r, tal que $F_{\gamma_r} \geq F_\gamma$, onde γ é qualquer arco de p a q; e, ainda pela aditividade de arcos, $\left[F_{\gamma_r}\right]^* =$
$= \left[F_{\gamma_{pr}}\right]^* + \left[F_{\gamma_{rq}}\right]^*$

Ora, pelo lema 2.1.3 (ii), $\left[F_{\gamma_r}\right]^* \leq \left[F_\gamma\right]$; portanto, $\left[F_{\gamma_{pr}}\right]^* < \left[F_{\gamma_r}\right]^* \leq \left[F_{\gamma_{pq}}\right]^* < \left[F_{\gamma_q}\right]^*$, que nos leva ao absurdo $F_{\gamma_{pr}} > F_{\gamma_q}$.

(I3)

$C(pqr)$ significa que existe γ_q como em (I1) tal que $F_{\gamma_q} \geq F_\gamma$ para qualquer γ unindo p a r; e pela aditividade de arcos temos

$$\left[F_{\gamma_q}\right]^* = \left[F_{\gamma_{pq}}\right]^* + \left[F_{\gamma_{qr}}\right]^* \leq \left[F_\gamma\right].$$

Igualmente para $C(prs)$ temos $F_{\gamma_r} \geq F_{\gamma'}$, onde γ' é qualquer arco unindo p a s e ainda

$$\left[F_{\gamma_r}\right]^* = \left[F_{\gamma_{pr}}\right]^* + \left[F_{\gamma_{rs}}\right]^* \leq \left[F_{\gamma'}\right]^*.$$

Evidentemente temos $\left[F_{\gamma_{qr}}\right]^* \leq \left[F_{\gamma_2}\right]^*$ para qualquer γ^2 unindo q a r e $\left[F_{\gamma_{rs}}\right]^* \leq \left[F_{\gamma_3}\right]^*$ para qualquer γ^3 unindo r a s.

Como podemos "somar" os arcos γ_{qr} e γ_{rs} obtemos

$$\left[F_{\gamma_{qr}}\right]^* + \left[F_{\gamma_{rs}}\right]^* = \left[F_{\gamma_{qrs}}\right]^* \leq \left[F_{\gamma_4}\right]^*$$

onde γ_4 é qualquer caminho unindo q a s; o que nos leva finalmente a concluir $F_{\gamma_{qrs}} \geq F_{\gamma_4}$ ou seja $C(qrs)$.

A demonstração de $C(pqs)$ é idêntica, usando os arcos γ_{pq} de γ_q e γ_{qrs}.

(I4) Evidente

Observemos que (I4) é uma forma fraca do fechamento.

BIBLIOGRAFIA

BLUMENTHAL, L.M. - Theory and Applications of Distance Geometry, London, Oxford Univers. Press., 347p. (1953).

FISZ, M. - Probability Theory and Mathematical Statistics , New York, John Wiley & Sons, 677p. (1965).

KINGMAN, J.F.C. - Metric for Wald Spaces, *Journal London Mathematical Society*, *39* : 129-130, (1964).

LIMA, E.L. - Espaços Métricos, Rio de Janeiro, IMPA, 382p. (1977).

MENGER, K. - Statistical Metrics, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, *28*: 535-537, (1942).

MOYNIHAN, R. & SCHWEIZER, B. - Betweenness Relations in Probabilistic Metric Spaces, *Pacific Journal of Mathematics*, *81* : 175-196, (1979).

NISHIURA, E. - Constructive Methods in Probabilistic Metric Spaces, *Fundamenta Mathematicae*, *67* : 115-124, (1970).

RHODES, F. - Convexity in Wald's Statistical Metric Spaces, *Journal London Mathematical Society*, *39* : 117-128, (1964).

SCHWEIZER, B. & SKLAR, A. - Statistical Metric Spaces, *Pacific Journal of Mathematics*, *10* : 313-334, (1960).

SCHWEIZER, B. - Multiplications on the Spaces of Probability Distribution Functions, *Aequationes Mathematicae*, *12* : 156-183, (1975).

SCHWEIZER, B. & SKLAR, A. - Probabilistic Metric Spaces, New York, North-Holland, 275p. (1983).

SERSTNEV, A.N. - The Notion of Random Normed Spaces, *Soviet Mathematics*, *04* : 388-391, (1963).

SHERWOOD, H. - On E-Spaces and their Relation to other Classes of Probabilistic Metric Spaces, *Journal London Mathematical Society*, *44* : 441-448, (1969).

SHERWOOD, H. - Betweenness in Probabilistic Metric Spaces , *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, *15* : 1061-1068, (1970).

STEVENS, R. - Metrically Generated Probabilistic Metric Spaces, *Fundamenta Mathematicae*, *61* : 259-269, (1968).

WALD, A. - On a Statistical Generalization of Metric Spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, *29* : 196-199, (1943).

XAVIER, A.F.S. - Comprimento Aleatório de Arcos nos Espaços Métricos Probabilísticos, Fortaleza, UFC, 58p. (1979). [com. Atas do XII Colóquio Brasileiro de Matemática-1979, Poços de Caldas, IMPA, Vol II : 548-550, (1981)].

XAVIER, A.F.S. - Contribuição ao Estudo dos Espaços Métricos Probabilísticos, Fortaleza, UFC, 58 p. (1980).