Imersões Isométricas k-umbílicas em Formas Espaciais

Fernando Enrique Echaiz Espinoza

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Gervasio Colares.

Fortaleza
Fevereiro de 2004

E21 i

Echaiz−Espinoza, Fernando Enrique
Imersões Isométricas k-umbílicas em Formas Espaciais
Fernando Enrique Echaiz Espinoza.− Fortaleza 2004.
ix, 129f.
Orientador: Prof. Dr. Antonio Gervasio Colares.
1. Geometria Diferencial.
2. Umbilicidade.
3. r-ésima curvatura média.

CDD 510

À meu Senhor e Salvador Jesus Cristo a quem pertence todo louvor por este trabalho.

Agradecimentos

Ao Senhor meu Deus em primeiro lugar, pelo sustento durante todo o curso de doutorado, pela força e presença diária, incentivo maior para a finalização desta tese.

A meus pais, em especial a minha mãe Violeta, que apesar da distância, sempre me deu muita força e apoio para continuar lutando aqui no Brasil, assim como meus irmãos German Alberto, José Luis e a minha irmã já falecida Teresina.

Ao Professor Antonio Gervásio Colares, mais que um orientador, um verdadeiro amigo. Um cavalheiro, sempre gentil nos momentos de maior tensão. Eu o considero um oleiro dos matemáticos da UFC, sempre ajudando a construir o conhecimento e a ética nos alunos que tem o privilégio de tê-lo como professor. Sou profundamente grato a ele por todo o apoio, incentivo e, principalmente, por não ter desistido de acreditar em mim e no meu trabalho. Agradeço, inclusive, seus puxões de orelha que me ajudaram a corrigir erros e a prosseguir no trabalho.

Aos Professores da Banca Examinadora pelas suas valiosas sugestões para melhorar esta tese, em especial aos Professores Levi Lopes de Lima, Tsasa Lusala e Renato Hyuda de Luna Pedrosa, bem como à CAPES pela minha bolsa de estudos.

Aos professores Luquésio Petrola de Melo Jorge, Abdênago Alves de Barros e Jõao Lucas Marques Barbosa enquanto coordenadores, pela força e comprensão durante todo o curso, como também ao Professor José Fábio Bezerra Montenegro como chefe do Departamento de Matemática por todo seu apoio logístico.

A todos os Professores da Pós-graduação da Universidade Federal do Ceará, Abdênago Alves de Barros, Aldir Chaves Brasil Junior, Fernando Antônio Amaral Pimentel, Gregório Pacelli Feitosa Bessa, João Lucas Marques Barbosa, Levi Lopes de Lima, Luquésio Petrola de Melo Jorge, Plácido Francisco de Assis Andrade e Sebastião Carneiro de Almeida, pelo conhecimento transmitido necessário à minha formação matemática.

Ao Professor Romildo José da Silva e aos bolsistas Ogeniz Façanha Costa e Márcio Pereira da Silva pela ajuda na área de informática.

Aos colegas do curso de doutorado Antonio Caminha Muniz Neto, Cleon da Silva Barroso, Henrique Fernandes de Lima, José Nelson Bastos Barbosa e ao meu conterrâneo Luis Antonio Pareja Herrera por sua amizade.

Aos funcionários da Biblioteca de Matemática da UFC, Rocilda Maria Cavalcante Sales Bezerra, Francisca Fernanda Freitas da Silva e Erivan Carneiro de Almeida por sua grande paciência e pela sua disposição constante em me ajudar no empréstimo de livros.

Aos funcionários da secretaria da Graduação Francisco de Assis Menezes Lacerda e Francisco Tavares da Rocha Neto, bem como aos funcionários da secretaria da Pos-Graduação, em especial, à Andréa Costa Dantas, pela imensurável ajuda desde o início do curso.

A funcionária D. Carmelita pelos seus chazinhos diários.

A Luiz Lacerda e Karl Dmitri Ramos Moura pela sua ajuda profissional tão importante para não desistir e seguir em frente neste trabalho.

Aos amigos e irmãos em Cristo, minha segunda família aqui no Brasil, que tanto me apoiaram nas horas mais difíceis e tanto torceram pela conclusão deste curso.

Finalmente, a minha querida esposa, Danielle, por permanecer sempre ao meu lado independente das circunstâncias, incentivando-me e, principalmente, por suportar tudo o que tivemos que sacrificar para chegar até aqui.

Resumo

Seja x uma imersão isométrica e A sua segunda forma fundamental. Os polinômios de Newton são definidos indutivamente por $P_0 = I$, $P_k = S_k\ I - A\ P_{k-1}$, onde S_k é a k-curvatura da imersão. Este trabalho define k-umbilicidade pela condição de que o produto de A pelo polinômio de Newton de ordem $k-1$ é um múltiplo da identidade. Como conseqüências gerais do conceito de k-umbilicidade demonstra que, se uma imersão isométrica k-umbílica tem uma curvatura principal nula, então tem $n-k+1$ curvaturas principais nulas e demonstra também que em toda imersão k-umbílica o operador L_k é eliptico sempre que S_k seja não nulo, considerando $L_k(f) = \text{traço}(P_k\ \text{Hess}(f))$ um operador diferencial de segunda ordem. Para o caso $k = 2$, demonstra que toda imersão 2-umbílica em formas espaciais tem S_2 constante. Classifica ainda parcialmente as hipersuperfícies 2-umbílicas fechadas na esfera unitária, exibindo uma família enumerável de tais imersões.

Abstract

Let x be an isometric immersion and A its second fundamental form. Newton's polynomials are inductively defined by $P_0 = I$, $P_k = S_k\, I - A\, P_{k-1}$, where S_k is the k-curvature of the immersion. In this work, we say that an immersion is k-umbilic when the product of A with its Newton polynomial of $k-1$ order is a multiple of the identity. As a general consequence of k-umbilicity we show that: if any k-umbilic immersion has a principal curvature null then there are others $n-k+1$ null principal curvatures and also that the operator L_k is always elliptic provided that S_k is non null, where $L_k(f) = \text{traço}(P_k\ \text{Hess}(f))$ is a differential second order operator. For the case $k = 2$ we show that every 2-umbilic immersion in any constant sectional curvature space has S_2 constant. We give a partial classification of all compact 2-umbilic immersions in the unitary sphere and we exhibit a family of examples.

Sumário

Introdução

Este trabalho se desenvolve partindo do conceito de polinômio simétrico $S_r(B)$ onde B é um operador. Para definirmos a função $S_r(B)$, consideramos o seguinte: seja V um espaço com produto interno real n-dimensional e $B \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear auto-adjunto. Denotemos por $e_1, \cdots, e_n$ a base ortonormal que diagonaliza B, isto é, $B e_i = \lambda_i e_i$. Assim, por definição, temos que $S_r(B) = S_r(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Nos artigos [Hsi] e [Tani], dentre outros, estas funções foram utilizadas para abordar problemas geométricos.

O propósito do estudo dos $S_r(B)$ é fornecer as bases necessárias para introduzir o conceito de $r-$ésimo operador de Newton, $P_r(B)$. Estes operadores foram estudados, numa série de artigos, por R. Reilly no caso H_r constante (neste caso, B é a segunda forma fundamental de uma hipersuperfície do $\mathbb{R}^{n+1}$ com H_r constante); veja por exemplo [Reilly].

Por outro lado, Barbosa J.L. e Colares A.G. em [BC], utilizaram o conceito de $S_r(B_i) := S_r\left(B|_{\text{span}\{e_i\}^{\perp}}\right)$ para estudar a estabilidade de hipersuperfícies com H_r constante. No estudo dos polinômios simétricos de um operador B, conhece-se muito pouco sobre as funções $S_r(B_i)$. No Capítulo 2 deste trabalho estenderemos a noção de $S_r(B_i)$ a $S_r(B_i, B_j)$ e para o caso geral $S_r(B_{i_1}, \cdots, B_{i_k})$.

Nosso primeiro resultado serve para encontrar as normas de $P_r(B)$ e $B\,P_{r-1}(B)$ para posteriormente aplicá-las à Geometria Diferencial.

Teorema 1 (Teorema 2.6, pag. 55). Seja V um espaço com produto interno real n dimensional e seja $B \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear auto-adjunto. Então:

a)
$$\|P_r(B)\|^2 = (n-r)S_r(B)^2 - (r+1)S_{r-1}(B)\,S_{r+1}(B) - \sum_{j=2}^{n}(r+j)S_{r-j}(B)\,S_{r+j}(B) + \sum_{j=2}^{n}(-1)^j S_{r-j}(B)\sum_{k=0}^{j-2}(-1)^k S_{r+1+k}(B)\text{traço}(B^{\,j-k-1});$$

b)
$$\text{traço}\left(B\,P_r(B)^2\right) = (r+1)S_r(B)S_{r+1}(B) + \sum_{j=2}^{r+1}(r+j)S_{r-j+1}(B)S_{r+j}(B) - \sum_{j=2}^{r+1}(-1)^j S_{r-j+1}(B)\left\{\sum_{k=0}^{j-2}(-1)^k S_{r+1+k}(B)\ \text{traço}(B^{j-k-1})\right\};$$

c) $$\|B\, P_r(B)\|^2 = -\sum_{j=2}^{r+2}(r+j)S_{r-j+2}(B)\; S_{r+j}(B) +$$
$$\sum_{j=2}^{r+2}(-1)^j S_{r-j+2}(B)\left\{\sum_{k=0}^{j-2}(-1)^k S_{r+1+k}(B)\ \text{traço}\left(B^{j-k-1}\right)\right\}.$$

Observemos que a medida que r cresce o problema se torna mais complexo. Nosso segundo resultado serve para encontrar de forma simples e fechada traço$\left[P_{r-1}(B)\; BP_k(B)\right]$ para quaisquer $r, k \in \mathbb{Z}$.

Teorema 2 (Teorema 2.11, pag. 62). Considere V um espaço com produto interno real n dimensional e $B \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear auto-adjunto. Para quaisquer inteiros r e k, temos:

$$\text{traço}\left[P_{r-1}(B)\; B\; P_k(B)\right] = \sum_{j=0}^{k}(r+k-2j)\; S_{r+k-j}(B)\; S_j(B).$$

Como corolário do teorema acima, obtemos as normas de $P_r(B)$ e $B\; P_{r-1}(B)$ de forma simples como combinação linear dos polinômios simétricos do operador B, isto é,

$$\|P_r(B)\|^2 = (n-r)\; S_r(B)^2 - 2\sum_{j=0}^{r-1}\,(r-j)\; S_j(B)\; S_{2r-j}(B);$$

$$\|B\; P_{r-1}(B)\|^2 = r\; S_r(B)^2 - 2\sum_{j=0}^{r-1}\,(r-j)\; S_j(B)\; S_{2r-j}(B).$$

Como uma aplicação damos uma estimativa da diferença entre as curvaturas de Ricci de uma hipersuperfície e de seu ambiente, $\mathbf{M}^{n+1}(c)$, uma variedade Riemanniana de curvatura constante c que envolve somente até o quarto polinômio simétrico.

Teorema 3 (Teorema 2.17, pag. 67). Cosidere $\overline{\mathbf{M}}^{n+1}$ uma variedade Riemanniana $(n+1)$-dimensional conexa e orientável. Dada uma hipersuperfície arbitrária, $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+1}$, valem as seguintes desigualdades:

a)
$$|H_1(A)| \leq \|\; A \;\| \leq \sqrt{(n-1)S_1(A)^2 - 2S_2(A)} \qquad ,\forall n \geq 2;$$

b)

$$|\ \text{Ricc}\ (X,Y) - \overline{Ricc}\ (X,Y) + \langle\ \overline{R}\ (X,\mathbf{N})\ Y,\ \mathbf{N}\ \rangle\ | \leq$$
$$\sqrt{2}\ \sqrt{S_2(A)^2 - S_1(A)S_3(A) - 2S_4(A)}\ \ \|\ X\ \|\ \|\ Y\ \| \qquad ,\forall n \geq 4$$

onde $\overline{R}$ é o tensor de curvatura do espaço ambiente, $\mathbf{N}$ é um campo vetorial unitário definido ao longo de $x(\mathbf{M})$, A é a segunda forma fundamental da imersão e para qualquer $X, Y \in T\mathbf{M}$.
Além do mais, esta cota não pode ser melhorada.

c) Em particular se $\overline{\mathbf{M}}^{n+1} = \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ é uma variedade Riemannina com curvatura seccional constante c, então

$$| \text{ Ricc } (X) - nc \mid \leq \sqrt{2} \sqrt{S_2(A)^2 - S_1(A)S_3(A) - 2S_4(A)} \qquad , \forall n \geq 4$$

para qualquer $X \in T\mathbf{M}$ unitário, onde A é a segunda forma fundamental da imersão.

Em [Reilly] é definido o operador linear $L_{r-1}(\Phi) = \text{div}(P_{r-1}(B) \text{ grad}\Phi)$, onde B é a segunda forma fundamental e é provado que $H_r = 0$ em $\mathbf{M}$ se e somente se $L_{r-1}(\Phi) = 0$, para qualquer função altura Φ. O operador L_r é diferencial linear de segunda ordem; em geral, L_r não é elíptico, por isto algumas condições devem ser estabelecidas para assegurar sua elipticidade. Por exemplo, R. Walter, [Walt] (na Proposição 4A) mostrou que se $H_{r+1} > 0$ e sendo a imersão convexa (isto é, B é semi-definido), L_r é elíptico. De forma mais geral, quando a imersão na esfera unitária não é necessariamente convexa, [BC] mostraram que se $H_{r+1} > 0$ e a imagem da imersão está contida num hemisfério aberto, então L_r é elíptico. Também [HouLei] chegam ao seguinte resultado:
"Seja M uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{n+1}$ com $S_r = 0$, $2 \leq r < n$. Então L_{r-1} é elíptico em $p \in M$ se e somente se traço$(P_{r-1}(A)\ A\ P_1(A))_{(p)} \neq 0$".

Nós obtemos outras condições para garantir a elipticidade de L_r; isto é, condição equivalente a $P_r(A)$ ser definido positivo .

Teorema 4 (Teorema 2.18, pag. 69). Dada uma hipersuperfície $x : \mathbf{M}^n \to \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$, considere A sua segunda forma fundamental. Dado qualquer $r \in \{1, \cdots, n-1\}$, as seguintes afirmativas são verdadeiras:

a) Se traço$\Big(P_{r-1}(A)\ B\ P_r(A)\Big) = 0$ e $S_r(A) > 0$ então os auto-valores de $P_r(A)$ são $> -(\sqrt{r} - 1)S_r(A)$;

b) Se traço$\Big(P_{r-1}(A)\ A\ P_r(A)\Big) = 0$ e $S_r(A) < 0$ então os auto-valores de $P_r(A)$ são $> (\sqrt{r} + 1)S_r(A)$;

Teorema 5 (Teorema 2.21, pag. 72). Dada uma hipersuperfície $x : \mathbf{M}^n \to \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$, considere A sua segunda forma fundamental.

a) Se existe um ponto $p \in \mathbf{M}$ tal que $S_r(A) > 0$ e $S_{r+1}(A) = 0$, então o operador L_r é não negativo em p (isto é, $L_r \geq 0$ em p);

b) Se existe um ponto $p \in \mathbf{M}$ tal que $S_r(A) < 0$ e $S_{r+1}(A) = 0$, então o operador L_r é não positivo em p (isto é, $L_r \leq 0$ em p) .

Por outro lado, define-se um $H_k(r)-$toro como sendo um toro de Cliford com H_k constante.

Teorema 6 (Classificação de $H_1(r)-$toros ; Teorema 3.2, pag. 77).

a) A única família mínima de $H_1(r)-$toros é dada por

$$S^{n-m}\left(\sqrt{\frac{n-m}{n}}\right) \times S^m\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right) \longrightarrow S^{n+1}(1).$$

E mais,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-m} &= \sqrt{\frac{m}{n-m}};\\
\lambda_{n-m+1} = \cdots = \lambda_n &= -\sqrt{\frac{n-m}{m}};\\
\|A\|^2 &= n;\\
\mathrm{Ricc}(e_i) &= \frac{n(n-m-1)}{n-m};\\
\mathrm{Ricc}(e_j) &= \frac{n(m-1)}{m};\\
S_k(A) &= \left(\frac{m}{n-m}\right)^{\frac{k}{2}} \binom{n-m}{k} \;{}_2F_1\left(-k,-m;n-m-k+1;-1\right).
\end{aligned}$$

b) A família de $H_1(r)-$toros com $H_1 \neq 0$ é dada por

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{\frac{2(n-m)+nH_1^2 \mp H_1\sqrt{n^2H_1^2+4m(n-m)}}{2n(1+H_1^2)}};\\
\|A\|^2 &= n + \frac{n^3}{2m(n-m)}H_1^2 \mp \frac{n(n-2m)}{m(n-m)}H_1\sqrt{n^2H_1^2+4m(n-m)};\\
\mathrm{Ricc}(e_i) &= \frac{n-m-1}{2(n-m)^2}\left(2n(n-m)+n^2H_1^2 \pm nH_1\sqrt{n^2H_1^2+4m(n-m)}\right);\\
\mathrm{Ricc}(e_j) &= \frac{m-1}{4m^2}\left(4mn+2n^2H_1^2 \mp \sqrt{n^2H_1^2+4m(n-m)}\right),
\end{aligned}$$

onde $i = 1,\cdots,n-m$ e $j = n-m+1,\cdots,n$.

Teorema 7 (Teorema 3.3, pag. 79). Todos os $H_2(r)$−toros são descritos como segue.

a)

$$S^{n-1}(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2}) \longrightarrow S^{n+1}(1),$$

com $r = \sqrt{\dfrac{n-2}{n(H_2+1)}}$. Ademais,

$$\begin{aligned} \|A\|^2 &= \frac{n}{n-2}\left(\frac{n(n-1)H_2^2 + 4(n-1)H_2 + n}{2+nH_2}\right); \\ \mathrm{Ricc}(e_i) &= n(1+H_2) \quad \text{onde } i = 1, \cdots, n-1; \\ \mathrm{Ricc}(e_n) &= 0. \end{aligned}$$

b)

$$S^{n-m}(r) \times S^m(\sqrt{1-r^2}) \longrightarrow S^{n+1}(1),$$

onde $m \in \{2, \cdots, n-2\}$ satisfaz

$$r = \sqrt{\frac{\dfrac{2(n-m)}{n} + H_2 \pm \sqrt{H_2^2 + \dfrac{4m(n-m)}{n(n-1)}\,H_2 + \dfrac{4m(n-m)}{n^2(n-1)}}}{2(H_2+1)}}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \|A\|^2 = {} & \frac{n(n-1)(n-2)}{2(n-m-1)(m-1)}H_2 + \frac{m(n-m)(n-2)}{(n-m-1)(m-1)} \pm \\ & \frac{(n-2m)\sqrt{n-1}}{2(n-m-1)(m-1)}\sqrt{n^2(n-1)H_2^2 + 4mn(n-m)H_2 + 4m(n-m)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Ricc}(e_i) &= (n-1) + \tfrac{n(n-1)}{2(n-m)}H_2 \mp \tfrac{\sqrt{n-1}}{2(n-m)}\sqrt{n^2(n-1)H_2^2 + 4mn(n-m)H_2 + 4m(n-m)}; \\ \mathrm{Ricc}(e_j) &= (n-1) + \tfrac{n(n-1)}{2m}H_2 \pm \tfrac{\sqrt{n-1}}{2m}\sqrt{n^2(n-1)H_2^2 + 4mn(n-m)H_2 + 4m(n-m)}, \end{aligned}$$

onde $i = 1, \cdots, n-m, \quad j = n-m+1, \cdots, n$.

Como outra aplicação do estudo dos $S_r(B_i, B_j)$ à Geometria Diferencial, trataremos as hipersuperfícies em espaços de formas com $H_2 = 0$.

Teorema 8 (Teorema 3.9, pag. 94). Dada uma hipersuperfície $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$, seja A a segunda forma fundamental da imersão x. Se $S_2(A) \equiv 0$ em M, então vale uma das seguintes alternativas:

1. a imersão é totalmente geodésica;
2. a imersão tem um valor próprio nulo de multiplicidade $n-1$;
3. a imersão é de rotação, isto é, as curvaturas principais são
   - $-\left(\frac{n-2}{2}\right)\lambda$ de multiplicidade algébrica 1
   - λ de multiplicidade algébrica $n-1$;
4. $\forall p \in M, \forall u \in T_pM : \quad \|u\| = 1$

$$Ricc(u,u) > c(n-1) + nH\langle Au, u\rangle - \left\{1 - \frac{4\,[nH - \lambda_k]}{[(n+2)nH - n\lambda_k]}\right\} n^2H^2.$$

Dando proseguimento a esta tese intruduzimos o conceito de uma imersão isométrica $k-$umbílica que generaliza o conceito já existente de imersões umbílicas (na nossa linguagem, imersões $1-$umbílicas).

Definição. Uma imersão isométrica $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{\,n+p}$ diz-se que é $k-$umbílica no ponto $q \in \mathbf{M}^n$, $k = 1, \cdots, n-1$, se

$$A_\eta P_{k-1}(A_\eta) = \lambda I, \quad \forall \eta \in T_q\mathbf{M}^\perp, \tag{1}$$

onde A é a segunda forma fundamental associada a imersão, $\lambda = \lambda(k,\eta)$ é uma função dependendo de k e η e I é a aplicação identidade em $T_q\mathbf{M}$.

Definição. Uma imersão isométrica $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{\,n+p}$ diz-se que é k-umbílica quando é k-umbílica em qualquer ponto de $\mathbf{M}$.

Definição. Uma imersão isométrica $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{\,n+p}$ é $k-$totalmente geodésica se

$$A_\eta\, P_{k-1}(A_\eta) = 0, \qquad \forall \eta \in TM^\perp .$$

Teorema 9 (Teorema 4.6, pag. 98). Seja $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{\,n+1}$ uma imersão isométrica k-umbílica no ponto $q \in \mathbf{M}^n$. Então

$$AP_{k-1}(A) \text{ é Codazzi} \Longleftrightarrow S_k(A) \text{ é constante.}$$

Em seguida, introduzimos o conceito de operador ϕ_k que mede quanto uma imersão deixa de ser $k-$umbílica. Este operador é uma generalização do operador $\phi = \phi_1$ definido em [AdC].

Definição. Dada uma hipersuperfície $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+1}$, sendo A sua segunda forma fundamental, define-se

$$\phi_k : T_p\mathbf{M} \longrightarrow T_p\mathbf{M}$$

da seguinte forma:

$$\phi_k(X) := \frac{k}{n} S_k(A)\, X - AP_{k-1}(A)\, X, \quad \forall X \in T_pM.$$

Obtivemos também formas equivalentes para reconhecer quando uma imersão é k-umbílica. Veja a Proposição 4.11 na página 102, a Proposição 4.12 na página 104 e a Proposição 4.14 na página 107.

Neste ponto, temos o seguinte teorema que nos fala das conseqüências de uma imersão ser $k-$umbílica.

Teorema 10 (Teorema 4.19, pag. 110).

a) A classe das imersões $1-$umbílicas está contida na classe das imersões $k-$umbílicas. (Logo, toda imersão $1-$totalmente geodésica é $k-$umbílica).

b) Dada a imersão isométrica $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{\,n+p}$, seja A_η sua segunda forma fundamental, com $\eta \in TM^\perp$. Se x é k-umbílica num ponto, então (neste ponto) são satisfeitas as seguintes identidades

b.1)

$$S_{k+1}(A_\eta) = \frac{n-k}{(k+1)n}\, S_1(A_\eta) S_k(A_\eta),$$

isto é,

$$\boxed{H_{k+1} = H_1\, H_k.}$$

Reciprocamente, se existe um ponto $q \in \mathbf{M}^n$ tal que $\lambda_i(q) \neq 0$, $\forall i$ e neste ponto $H_{k+1} = H_1 H_k$, então a imersão isométrica é $k-$umbílica em q.

b.2)

$$S_1(A_\eta)\, S_{k+1}(A_\eta) - (k+2)\, S_{k+2}(A_\eta) = \left(\frac{n-k}{n}\right) S_k(A_\eta)\, \|A_\eta\|^2.$$

Em seguida, relacionamos a $k-$umbilicidade com o operador L_k (veja a Proposição 4.25 na página 117).

A seguir apresentaremos uma classificação das curvaturas principais de hipersuperfícies $2-$umbílicas.

Teorema 11 (Classificação das curvaturas principais para hipersuperfícies 2-umbílicas; Teorema 4.27, pag. 120). As curvaturas principais de uma hipersuperfície 2-umbílica $x : \mathrm{M}^n \longrightarrow \overline{\mathrm{M}}^{n+1}$ $(n \geq 3)$ são da seguinte forma:

a)

$$\lambda_{i_1} = \cdots = \lambda_{i_r} = \left(\frac{n-(r+1)}{n-2r}\right) S_1$$

e

$$\lambda_{i_{r+1}} = \cdots = \lambda_{i_n} = -\left(\frac{r-1}{n-2r}\right) S_1,$$

onde $r \in \{0, 1, 2, \cdots, [\![\frac{n}{2}]\!]$ [1]$\}$ se n é ímpar e $r \in \{0, 1, 2, \cdots, \frac{n}{2} - 1\}$ se n é par.

b)

$$\lambda_{i_1} = \cdots = \lambda_{i_{\frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{n}}\,\sqrt{-S_2}$$

e

$$\lambda_{i_{\frac{n}{2}+1}} = \cdots = \lambda_{i_n} = -\sqrt{\frac{2}{n}}\,\sqrt{-S_2},$$

Tomando por base alguns resultados conseguimos exibir exemplos de imersões 2-umbílicas como por exemplo, a superfície de Veronese em S^4.

A seguir, temos um teorema que relaciona 2−umbilicidade com variedades de Einstein.

Teorema 12 (Caracterização de hipersuperfícies 2−umbílicas via curvatura de Ricci; Teorema 4.29, pag. 122) Dada uma imersão isométrica $x : \mathrm{M}^n \longrightarrow \overline{\mathrm{M}}^{n+1}(c)$, $n \geq 2$, para qualquer $X,\ Y \in T\mathrm{M}$ temos: a hipersuperfície x é 2−umbílica se e somente se

$$\mathrm{Ricc}(X,\ Y) - \overline{\mathrm{Ricc}}\,(X,\ Y) = \frac{2S_2(A)}{n}\,\langle X, Y\rangle.$$

Segue-se que toda hipersuperfície 2−umbílica imersa em qualquer espaço de forma sempre é Einstein.

Finalmente, exibimos exemplos de hipersuperfícies 2−umbílicas na esfera.

[1] $[\![x]\!]$ é o menor inteiro não menor que x.

Teorema 13 (Teorema 4.38, pag. 125). Existe uma família enumerável de hipersuperfícies 2-umbílicas na esfera Euclidiana $S^{n+1}(1)$: fixados $n \geq 3$ e $m \in \{2, \cdots, n-2\}$ a hipersuperfície de Clifford é 2−umbílica se e somente se, $r = \sqrt{\dfrac{n-m-1}{n-2}}$.
Ademais

$$
\begin{aligned}
S_k &= \left(\frac{m-1}{n-m-1}\right)^{\frac{k}{2}} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \left(\frac{n-m-1}{m-1}\right)^i \binom{n-m}{k-i} \binom{m}{i};\\
\|A\|^2 &= \frac{n+m(n-4)(n-m)}{(n-m-1)(m-1)};\\
\mathrm{Ricc}\,(e_j) &= n-2, \quad j = 1, 2, \cdots, n.
\end{aligned}
$$

Concluímos com uma classificação parcial das hipersuperfícies 2−umbílicas na esfera.

Teorema 14 (Classificação das hipersuperfícies compactas 2−umbílicas; Teorema 4.40, pag. 127) As imersões isométricas 2−umbílicas $x : \mathbf{M}^n \to S^{n+1}(1)$ tem a seguinte classificação:

a) $x(\mathbf{M})$ é 2−totalmente geodésica;

b) se $\mathbf{M}$ é compacta e x é um mergulho, então $x(\mathbf{M})$ é congruente a

$$S^k\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times S^k\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \hookrightarrow S^{2k+1}(1);$$

c) se $\mathbf{M}$ é compacta e x é uma imersão, então $x(\mathbf{M})$ é congruente a

$$S^{n-m}(r) \times S^m(\sqrt{1-r^2}) \hookrightarrow S^{n+1}(1),$$

onde $r = \sqrt{\frac{n-m-1}{n-2}}$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, introduziremos os pré-requisitos básicos que servirão de sustentação aos principais resultados .

1.1 Funções Simétricas

Uma *função simétrica* é uma função que não se altera em nenhuma permutação de suas variáveis independentes, isto é, $f(x_1, \ldots, x_n) = f(\pi(x_1, \ldots, x_n))$, onde π é uma permutação arbitrária de $(x_1, \ldots, x_n)$. São exemplos de funções simétricas: qualquer função constante, qualquer função de uma variável, também as funções

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\ x_1 x_2 \ldots x_n, \\ \max(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j. \end{gathered}$$

Qualquer função simétrica não constante depende essencialmente de todas as suas variáveis.

Para identificar uma função simétrica, precisamos conhecer de forma explícita todas as suas variáveis. Temos um critério simples para saber se uma função $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é simétrica: basta que verifiquemos

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n)$$

e

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(x_n, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

ou equivalentemente, que as $(n-1)$ equações sejam satisfeitas simultaneamente

$$f(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_n)$$

além de

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = f(x_n, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_1).$$

1.2 Polinômios Simétricos

Um polinômio f com coeficientes em um corpo ou em um anel associativo e comutativo $\mathbb{K}$, com uma unidade, é chamado de um *polinômio simétrico* se f é uma função simétrica nas suas variáveis, isto é, não varia mesmo diante de todas as permutações π das suas variáveis, ou seja,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)).$$

Os polinômios simétricos formam a álgebra $\mathbf{S}(x_1, \ldots, x_n)$ sobre $\mathbb{K}$. Os exemplos mais importantes de polinômios simétricos são os *polinômios simétricos elementares*:

$$S_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (1 \leq k \leq n)$$

$$S_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \begin{cases} 1 & k = 0, \\ \sum\limits_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} & \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \\ 0 & \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \cdots, n\}. \end{cases}$$

Em geral, $S_k(x_1, \ldots, x_n)$ é uma soma de $\binom{n}{k}$ monômios. Um polinômio onde o coeficiente de maior grau é 1 é chamado de *polinômio mônico*. O próximo resultado nos mostra que existem certas relações entre as raízes de um polinômio e seus coeficientes:

Teorema 1.1 (de Viète). *Seja $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n)$ um polinômio mônico de grau n com coeficientes em algum corpo $\mathbb{K}$, onde α_i são as raízes de $f(x)$. Então, as seguintes fórmulas de Viète se verificam:*

$$\begin{aligned} a_0 &= (-1)^n S_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \\ a_1 &= (-1)^{n-1} S_{n-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \\ a_2 &= (-1)^{n-2} S_{n-2}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \\ &\vdots \qquad \vdots \\ a_{n-2} &= S_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \\ a_{n-1} &= -S_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \end{aligned}$$

Demonstração: Veja [Turn]. ■

Definição 1.2. *As somas de potências $w_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, são definidas por*

$$w_r(\mathbf{X}) = w_r(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{i=1}^{n} (x_i)^r,$$

e observe que $w_0(\mathbf{X}) = n$.

A próxima proposição relacionará as funções $w_r(\mathbf{X})$ com as funções simétricas $S_k(\mathbf{X})$.

Proposição 1.3 (Identidades de Newton). *Dado* $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$, *então:*

$$\begin{aligned} w_1(\mathbf{X}) &= S_1(\mathbf{X}), \\ w_2(\mathbf{X}) &= S_1(\mathbf{X})w_1(\mathbf{X}) - 2S_2(\mathbf{X}), \\ w_3(\mathbf{X}) &= S_1(\mathbf{X})w_2(\mathbf{X}) - S_2(\mathbf{X})w_1(\mathbf{X}) + 3S_3(\mathbf{X}), \\ \vdots \quad & \quad\quad \vdots \end{aligned}$$

em geral,

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{r-1}(-1)^k S_k(\mathbf{X})w_{r-k}(\mathbf{X}) + (-1)^r r S_r(\mathbf{X}) = 0 & , \textit{se } 1 \leq r \leq n, \\ \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k S_k(\mathbf{X})w_{r-k}(\mathbf{X}) = 0 & , \textit{se } r > n. \end{cases}$$

Demonstração. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = \prod_{j=1}^{n}(1 + tx_j) = 1 + S_1(\mathbf{X})t + S_2(\mathbf{X})t^2 + \cdots + S_n(\mathbf{X})t^n,$$

onde $\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_n)$.

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{d}{dt}\log g(t) = \sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dt}\log(1 + tx_j) = \sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{1 + tx_j}\ ;$$

usando que $\dfrac{x_j}{1+tx_j} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,(x_j)^{k+1}\,t^k$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{g'(t)}{g(t)} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,(x_j)^{k+1}\,t^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,w_{k+1}(\mathbf{X})\,t^k. \end{aligned}$$

Donde,

$$g'(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,w_{k+1}(\mathbf{X})\,t^k\right)g(t).$$

Também temos,

$$g'(t) = S_1(\mathbf{X}) + 2S_2(\mathbf{X})t + \cdots + nS_n(\mathbf{X})t^{n-1}.$$

Comparando os coeficientes das potências de t^k obtemos as identidades de Newton. ∎

Observação 1.4. *Como aplicação imediata da Proposição 1.3 temos por exemplo:*

- $w_1 = S_1$,
- $w_2 = S_1^2 - 2S_2$,
- $w_3 = S_1^3 + 3S_3 - 3S_1S_2$,
- $w_4 = S_1^4 - 4S_4 + 4S_1S_3 - 4S_1^2S_2 + 2S_2^2$,
- $w_5 = S_1^5 + 5S_5 - 5S_1S_4 + 5S_1S_2^2 - 5S_2S_3 + 5S_1^2S_3 - 5S_1^3S_2$,
- $w_6 = S_1^6 - 6S_6 + 6S_1S_5 - 12S_1S_2S_3 + 9S_1^2S_2^2 - 2S_2^3 + 3S_3^2 - 6S_1^2S_4 + 6S_1^3S_3 - 6S_1^4S_2 + 6S_2S_4$.

Proposição 1.5. *Seja $S_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ o k-ésimo polinômio simétrico elementar, então:*

i) $\frac{\partial}{\partial x_j} S_k(x_1, \ldots, x_n) = S_{k-1}(x_1, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_n)$, *onde $\widehat{x}_j$ indica que o elemento x_j foi omitido;*

ii)

$$S_k(x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_n) - S_k(x_1, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_n) = (x_j - x_i)S_{k-1}(x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_n);$$

iii) $\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} S_k(x_1, \ldots, x_n) = kS_k(x_1, \ldots, x_n)$ ***(Identidade de Euler**[vdW]).*

Demonstração. (i) e (ii) decorrem diretamente da definição de S_k.

iii)Usando (i), temos que $\frac{\partial}{\partial x_j} S_r(x_1, \ldots, x_n)$ podem ser definidos indutivamente mediante a seguinte equação diferencial parcial:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_j} S_0(x_1, \ldots, x_n) = 0; \\
&\frac{\partial}{\partial x_j} S_1(x_1, \ldots, x_n) = 1; \\
&\frac{\partial}{\partial x_j} S_r(x_1, \ldots, x_n) = S_{r-1}(x_1, \ldots, x_n) - x_j \frac{\partial}{\partial x_j} S_{r-1}(x_1, \ldots, x_n).
\end{aligned}$$

e a partir destas relações, por indução, temos:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} S_{r+1}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k S_{r-k}(x_1, \ldots, x_n)\,(x_j)^k. \tag{1.1}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_j}S_r(x_1,\ldots,x_n) &= \sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k S_{r-1-k}(x_1,\ldots,x_n)\,(x_j)^k\\ &= \sum_{k=0}^{r-1}(-1)^{r-1-k} S_k(x_1,\ldots,x_n)\,(x_j)^{r-1-k}.\end{aligned}$$

Logo,

$$x_j\frac{\partial}{\partial x_j}S_r(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{k=0}^{r-1}(-1)^{r-1-k} S_k(x_1,\ldots,x_n)\,(x_j)^{r-k}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} x_j\frac{\partial}{\partial x_j}S_r(x_1,\ldots,x_n) &= \sum_{k=0}^{r-1}(-1)^{r-1-k} S_k(x_1,\ldots,x_n)\sum_{j=1}^{n}(x_j)^{r-k}\\ &= \sum_{k=0}^{r-1}(-1)^{r-1-k} S_k(x_1,\ldots,x_n)w_{r-k}(x_1,\ldots,x_n)\\ &= -(-1)^r\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k S_k(x_1,\ldots,x_n)w_{r-k}(x_1,\ldots,x_n),\end{aligned}$$

pela Proposição 1.3

$$= (-1)^r(-1)^r rS_r(x_1,\ldots,x_n).$$

Finalmente

$$\sum_{j=1}^{n} x_j\frac{\partial}{\partial x_j}S_r(x_1,\ldots,x_n) = rS_r(x_1,\ldots,x_n).$$

■

Já definimos indutivamente $\dfrac{\partial}{\partial x_j}S_r(x_1,\cdots,x_n)$, mediante:

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x_j}S_0(x_1,\ldots,x_n) &= 0;\\ \frac{\partial}{\partial x_j}S_1(x_1,\ldots,x_n) &= 1;\\ \frac{\partial}{\partial x_j}S_r(x_1,\ldots,x_n) &= S_{r-1}(x_1,\ldots,x_n) - x_j\,\frac{\partial}{\partial x_j}S_{r-1}(x_1,\ldots,x_n).\end{cases}$$

É claro,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} S_0(x_1,\ldots,x_n) = & 0; \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} S_1(x_1,\ldots,x_n) = & 0; \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} S_{r+2}(x_1,\ldots,x_n) = & \frac{\partial}{\partial x_i} S_{r+1}(x_1,\ldots,x_n) - \delta_{ij}\, \frac{\partial}{\partial x_j} S_{r+1}(x_1,\ldots,x_n) - \\ & x_j\, \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} S_{r+1}(x_1,\ldots,x_n). \end{cases}$$

De onde,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} S_2(x_1,\ldots,x_n) = 1 - \delta_{ij},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} S_3(x_1,\ldots,x_n) = (1-\delta_{ij})\, S_1(x_1,\ldots,x_n) + 2x_j\,\delta_{ij} - x_i - x_j.$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} S_r(x_1,\ldots,x_n) = 0 \qquad \forall r \in \mathbb{Z},\ \forall i \in \{1,\cdots,n\}, \tag{1.2}$$

(1.3)
$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} S_{r+2}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\partial}{\partial x_i} S_{r+1}(x_1,\ldots,x_n) - x_j\, \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} S_{r+1}(x_1,\ldots,x_n),\ \forall i \neq j.$$

Teorema 1.6 (Teorema Fundamental dos Polinômios Simétricos.).
Todo polinômio simétrico é um polinômio nos polinômios simétricos elementares e esta representação é única. Significa que os polinômios simétricos elementares são um conjunto de geradores livres para a álgebra $\mathbf{S}(x_1,\ldots,x_n)$.

1.3 Propriedades e Relações para S_k

Notação 1.7.
Para todo $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, *denota-se por* $\mathbf{X}_\downarrow = (x_{[1]}, x_{[2]}, \ldots, x_{[n]})$ *o reordenamento decrescente de* $\mathbf{X}$, *isto é,* $x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq \cdots \geq x_{[n]}$, *que representa as componentes de* $\mathbf{X}$ *em ordem descrescente. Por outro lado, denota-se por* $\mathbf{X}_\uparrow = (x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)})$ *o reordenamento crescente de* $\mathbf{X}$, *isto é,* $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$ *que representa as componentes de* $\mathbf{X}$ *em ordem crescente.*

Definição 1.8. *Definição de ordem de majoração para* $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{X} \prec \mathbf{Y} = \begin{cases} \sum_{i=1}^k x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^k y_{[i]} & k = 1, 2, \cdots, n-1 \\ \sum_{i=1}^n x_{[i]} = \sum_{i=1}^n y_{[i]}, \end{cases}$$

quando $\mathbf{X} \prec \mathbf{Y}$, diz-se que $\mathbf{X}$ está majorado por $\mathbf{Y}$ (ou $\mathbf{Y}$ majoriza $\mathbf{X}$) esta notação e terminologia foi introduzida por [HLP]

Observação 1.9. *No caso $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$, a ordem vetorial elementar $x_i \leq y_i$, $i = 1, \ldots, n$ é denotada por $\mathbf{X} \leq \mathbf{Y}$.*

Definição 1.10. *Seja $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto, $\mathbf{X} \prec \mathbf{Y}$ em $\mathbf{A}$ significa $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbf{A}$ e $\mathbf{X} \prec \mathbf{Y}$.*

Seja $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ um vetor que tem somente duas componentes não nulas e iguais a $\frac{1}{2}$, não é importante conhecer as posições das componentes não nulas. Sejam os $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ os vetores canônicos da base de $\mathbb{R}^n$. Então $\mathbf{X} \prec \mathbf{e}_i$, pois $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0) \prec (1, 0, 0, \ldots, 0)$.

Observação 1.11. *A definição de $\mathbf{X} \prec \mathbf{Y}$ pode ser enunciada da seguinte forma:*

$$\mathbf{X} \prec \mathbf{Y} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} x_{(i)} \geq \sum_{i=1}^{k} y_{(i)} & k = 1, 2, \ldots, n-1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_{(i)} = \sum_{i=1}^{n} y_{(i)}. \end{cases}$$

Definição 1.12. *Sejam $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto e $\Phi : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Então:*

- *Φ se diz que é Schur-convexa* [1] *em $\mathbf{A}$ se $\mathbf{X} \prec \mathbf{Y}$ em $\mathbf{A} \Longrightarrow \Phi(\mathbf{X}) \leq \Phi(\mathbf{Y})$;*
- *Φ se diz que é estritamente Schur-convexa em $\mathbf{A}$, se $\mathbf{X} \prec \mathbf{Y}$ em $\mathbf{A} \Longrightarrow \Phi(\mathbf{X}) < \Phi(\mathbf{Y})$ mas $\mathbf{X}$ não é uma permutação de $\mathbf{Y}$;*
- *Φ se diz que é Schur-côncava em $\mathbf{A}$ se $\mathbf{X} \prec \mathbf{Y}$ em $\mathbf{A} \Longrightarrow \Phi(\mathbf{X}) \geq \Phi(\mathbf{Y})$;*
- *Φ se diz que é estritamente Schur-côncava em $\mathbf{A}$, se $\mathbf{X} \prec \mathbf{Y}$ em $\mathbf{A} \Longrightarrow \Phi(\mathbf{X}) > \Phi(\mathbf{Y})$ mas $\mathbf{X}$ não é uma permutação de $\mathbf{Y}$.*

Observação 1.13. *Se $\mathbf{A} = \mathbb{R}^n$, simplesmente dizemos que Φ é Schur-convexa, estritamente Schur-convexa , etc.*

Proposição 1.14 ([Sc]).
Denotando por $S_k(\mathbf{X})$ o k-ésimo polinômio elementar simétrico de $\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_n)$, então as funções S_k são crescentes e Schur-côncavas[2] *em $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_i \geq 0, \forall i\}$. Se $k \neq 1$, S_k é estritamente Schur-côncava em $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_i > 0, \forall i\}$.*

Proposição 1.15. *Se $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_i \geq 0, \forall i\}$, então $\mathbf{X} \prec \mathbf{Y} \Rightarrow S_n(\mathbf{X}) \geq S_n(\mathbf{Y})$, com desigualdade estrita, salvo quando $\mathbf{X}$ for uma permutação de $\mathbf{Y}$.*

[1] O termo **Schur-Convexo** (ou algumas vezes **S-convexo**) parece inapropriado, pois sua definição expressa a preservação da ordem em lugar de convexidade (no sentido de Jensen). Considero que seria mais apropriado chamar a estas funções **"Schur crescentes"**, porém aceitaremos o termo **Schur convexo** pois historicamente foi aceito desta forma.

[2] Veja as definições 1.8 e 1.12.

Proposição 1.16 ([ML]).

1. $[S_k(\mathbf{X}+\mathbf{Y})]^{\frac{1}{k}} \geq [S_k(\mathbf{X})]^{\frac{1}{k}} + [S_k(\mathbf{Y})]^{\frac{1}{k}}$;

2. $\dfrac{S_k(\mathbf{X}+\mathbf{Y})}{S_{k-1}(\mathbf{X}+\mathbf{Y})} \geq \dfrac{S_k(\mathbf{X})}{S_{k-1}(\mathbf{X})} + \dfrac{S_k(\mathbf{Y})}{S_{k-1}(\mathbf{Y})}$;

3. $\dfrac{S_k}{S_{k-1}}$ *é côncava em* $\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n; x_i>0,\forall i\}$ *(de fato, é estritamente côncava salvo quando* $k=1$*). Portanto,* $\dfrac{S_k}{S_{k-1}}$ *é Schur-côncava em* $\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n; x_i>0,\forall i\}$*, para* $k=1,2,\ldots,n$.

Proposição 1.17. *A função* $\Phi(\mathbf{X}) = [S_k(\mathbf{X})]^{\frac{1}{k}}$ *é côncava e crescente em* $\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n; x_i\geq 0,\forall i\}$ *(de fato é estritamente côncava se* $k\neq 1$*). Portanto,* Φ *é Schur-côncava e crescente em* $\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n; x_i\geq 0,\forall i\}, k=1,\ldots,n$ *(e estritamente Schur-côncava se* $k\neq 1$*).*

Proposição 1.18 ([BM]). *Se* $1\leq p\leq k\leq n$*, então:*

$$F_{k,p}(\mathbf{X}) = \left[\frac{S_k(\mathbf{X})}{S_{k-p}(\mathbf{X})}\right]^{\frac{1}{p}},$$

é uma função côncava de $\mathbf{X}\in\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n; x_i>0,\forall i\}$*, portanto,* $F_{k,p}$ *é Schur-côncava em* $\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n; x_i>0,\forall i\}, 1\leq p\leq k\leq n$.

Proposição 1.19 ([Sc]).
Se $S_k(\mathbf{X})$ *é o k-ésimo polinômio elementar simétrico de* $\mathbf{X}=(x_1,\ldots,x_n)$*, então:*

$$\Phi(\mathbf{X}) = S_1^{n-v}(\mathbf{X})S_v(\mathbf{X}) - (n-2)^{n-v}(\frac{n-2}{v-2})S_n(\mathbf{X}),$$

é Schur-côncava em $\mathbf{X}\in\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n; x_i>0,\forall i\}, v=2,3,\ldots,n-1$.

1.4 A Função Hipergeométrica Complexa ${}_2F_1(a,b;c;z)$

Sendo a um parâmetro real ou complexo definese o símbolo de Pochhammer como

$$\begin{aligned}
(a)_k &= a(a+1)\cdots(a+k-1) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} \quad (k\geq 1);\\
(a)_{-k} &= \frac{1}{(a-1)\cdots(a-k)} = (-1)^k\,\frac{1}{(1-a)_k} \quad (k\geq 1);\\
(a)_0 &= 1;\\
(0)_0 &= 1.
\end{aligned}$$

Considerando n qualquer número inteiro positivo ou negativo, o símbolo $(a)_n$ tem as seguintes propriedades:

$$(a)_{m+n} = (a)_m \, (a+m)_n;$$
$$(2a)_{2n} = 2^{2n} \, (a)_n \left(a + \frac{1}{2}\right)_n;$$

$$(ka)_{kn} = k^{kn} \, (a)_n \left(a + \frac{1}{k}\right)_n \cdots \left(a + \frac{k-1}{k}\right)_n.$$

Para parâmetros $a_1, \ldots, a_p$ e $b_1, \ldots, b_q$ reais ou complexos define-se a função hipergeométrica generalizada

$${}_pF_q(a_1, \ldots, a_p;\, b_1, \ldots, b_q; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k \cdots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!},$$

onde z é uma variável complexa. ${}_pF_q$ é convergente numa vizinhança de 0 sempre que $p \leq q+1$.

Em particular estaremos interessados na função hipergeométrica

$${}_2F_1(a,b;c;z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k \, (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{z!} = 1 + \frac{ab}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{a(a+1)\cdots(a+j-1)b(b+1)\cdots(b+j-1)}{c(c+1)\cdots(c+j-1)} \frac{z^j}{j!} + \cdots$$

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{\Gamma(c+k)} \frac{z^k}{k!}.$$

Está série converge no disco unitário $|z| < 1$. O comportamento desta série em $|z| = 1$ é

a) divergente, em $\mathrm{Re}(a+b-c) \geq 1$;

b) absolutamente convergente, em $\mathrm{Re}(a+b-c) < 0$;

c) condicionalmente convergente, em $0 \leq \mathrm{Re}(a+b-c) < 1$, o ponto $z = 1$ fica excluído.

Quando a ou b é um número inteiro negativo $-n$, $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$, a série ${}_2F_1(a,b;c;z)$ reduz-se a um polinômio de grau n em z.
Está série não está definida para $c \in \{\cdots, -3, -2, -1, 0\}$. Alguns exemplos de funções hipergeométricas:

$$(1+z)^a = {}_2F_1(-a, b; b; -z);$$
$$\arcsin z = z \, {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right);$$
$$(1+z)^{-2a} + (1-z)^{-2a} = 2 \, {}_2F_1\left(a, a + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; z^2\right).$$

A função hipergeométrica ${}_2F_1(a,b,c;z)$ é uma solução (de fato a solução que é regular na origem) da equação diferencial hypergeométrica (veja [MOS], página 42),

$$z(1-z)\,\frac{d^2F}{dz^2} + \Big[c-(a+b+1)z\Big]\,\frac{dF}{dz} - ab\,F = 0. \tag{1.4}$$

A função hipergeométrica pode também ser escrita como uma integral:

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c+k)}\,\frac{\Gamma(b+k)}{\Gamma(b)}\,\frac{z^k}{k!};$$

usando que a função Beta satisfaz, $\beta(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$,

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\sum_{k=0}^{\infty}\beta(a+k,c-a)\,\frac{\Gamma(b+k)}{\Gamma(b)}\,\frac{z^k}{k!};$$

por definição, $\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad \mathrm{Re}(x), \mathrm{Re}(y) > 0.$

$$\begin{aligned}{}_2F_1(a,b;c;z) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^1 t^{a+k-1}(1-t)^{c-a-1}dt\right)\frac{\Gamma(b+k)}{\Gamma(b)}\,\frac{z^k}{k!};\\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(b+k)}{\Gamma(b)}\,\frac{(tz)^k}{k!}\right)dt;\end{aligned}$$

$${}_2F_1(a,b,c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{a-1}\,(1-t)^{c-a-1}\,(1-tz)^{-b}\,dt. \tag{1.5}$$

No caso em que $\mathrm{Re}(a+b-c) < 0$ e fazendo $z=1$ temos

$$\begin{aligned}{}_2F_1(a,b;c;1) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{a-1}\,(1-t)^{c-a-b1}\,dt;\\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\,\beta(a,c-a-b);\end{aligned}$$

logo,

$${}_2F_1(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}.$$

Proposição 1.20. *Sejam $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^+$. Dados n_1 valores de λ_1 e n_2 valores de λ_2, representemos por S_k a $k-$ésima função simétrica de todos os λ_1 e λ_2. Então,*

$$S_k = \begin{cases} 1 & , \text{ se } k = 0; \\ \binom{n_1}{k}\lambda_1^k + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{n_1}{k-i}\binom{n_2}{i}\lambda_1^{k-i}\lambda_2^i + \binom{n_2}{k}\lambda_2^k & , \text{ se } k \neq 0; \end{cases}$$

seguindo a convenção que $\binom{\alpha}{\beta} = 0$ se $\alpha < \beta$. Em outras palavras,

$$S_k = \lambda_1^k \binom{n_1}{k} \quad {}_2F_1\left(-k, -n_2; n_1 - k + 1; \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right).$$

Demonstração. Imediata, a partir da definição de função hipergeométrica ${}_2F_1$. ■

1.5 O Teorema Espectral

Notação 1.21. *Sejam V e W espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$. Denotaremos por $\mathcal{L}(V, W)$ o conjunto de todas as aplicações lineares de V em W, isto é,*

$$\mathcal{L}(V, W) := \{T : V \to W;\ T \text{ é aplicação linear}\}$$
$$\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V).$$

O espaço vetorial $\mathcal{L}(V)$ é uma álgebra, onde a multiplicação é a composição de funções. A aplicação identidade $\mathcal{I} \in \mathcal{L}(V)$ é a identidade multiplicativa e a aplicação zero $\mathcal{O} \in \mathcal{L}(V)$ é a identidade aditiva.

De agora em diante, consideraremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Um número complexo λ é chamado de um auto-valor (ou valor próprio) de $T \in \mathcal{L}(V)$, se $T - \lambda\mathcal{I}$ não é injetivo. Um vetor $v \in V$ é chamado de auto-vetor de $T \in \mathcal{L}(V)$ se $Tv = \lambda v$ para algum auto-valor λ. O conjunto de todos os auto-vetores associados a um valor próprio λ, incluindo o vetor zero, formam um subespaço de V, chamado autoespaço associado a λ. Denotaremos o autoespaço associado a um auto-valor λ por $\mathcal{E}_\lambda$. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ os auto-valores distintos de $T \in \mathcal{L}(V)$ com suas multiplicidades $\beta_1, \ldots, \beta_m$, respectivamente. O polinômio

$$(Z - \lambda_1)^{\beta_1} \ldots (Z - \lambda_m)^{\beta_m},$$

é chamado o polinômio característico do operador T.

$$\det(T - Z\mathcal{I}) := (Z - \lambda_1)^{\beta_1} \ldots (Z - \lambda_m)^{\beta_m}.$$

Um operador $T \in \mathcal{L}(V)$ é chamado diagonalizável se pode ser representado por uma matriz diagonal.

Um operador $T \in \mathcal{L}(V)$ é diagonalizável se e somente se existe uma base de V formada por os auto-vetores de T. Isto é,

$$T \in \mathcal{L}(V) \text{ é diagonalizável} \Leftrightarrow \dim(\mathcal{E}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_{\lambda_k}) = \dim(V),$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ são auto-valores distintos de T.

Um par de operadores $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V)$ são simultaneamente diagonalizáveis se existe uma base ordenada $\mathcal{B}$ para V tal que $[T_1]_{\mathcal{B}}$ e $[T_2]_{\mathcal{B}}$ são ambas diagonais.

Sejam $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V)$ dois operadores diagonalizáveis. Então:

$$T_1, T_2 \text{ são simultaneamente diagonalizáveis se e somente se } T_1T_2 = T_2T_1.$$

Sejam V e W espaços de dimensão finita munidos com produtos internos (sobre $\mathbb{K}$). Dado $T \in \mathcal{L}(V, W)$, então existe uma única aplicação linear $T^* : W \to V$ definida pela condição

$$\langle T(v), w\rangle = \langle v, T^*(w)\rangle \qquad \forall (v, w) \in V \times W.$$

Assim, temos que $T^* \in \mathcal{L}(W, V)$. T^* é chamado o *adjunto* de T. Seja $T \in \mathcal{L}(V)$, dizemos que T é *ortogonalmente diagonalizável* se existe uma base ortonormal para V onde a matriz de representação de T (nesta base) é uma matriz diagonal. Dado $T \in \mathcal{L}(V)$, dizemos :

- T é normal se $TT^* = T^*T$;
- T é auto-adjunto se $T^* = T$.

É evidente que se T é auto-adjunto então T é normal. Assim também,

- se T é auto-adjunto então todos seus auto-valores são reais;
- se $\lambda \neq \mu$ são auto-valores de um operador auto-adjunto, então $\mathcal{E}_\lambda \perp \mathcal{E}_\mu$;
- T é ortogonalmente diagonalizável se e somente se é auto-adjunto.

Teorema 1.22 (Teorema Espectral para Operadores Auto-adjuntos). [3]
Seja V um espaço vetorial com produto interno finito dimensional e seja $B \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear auto-adjunto, então:

1. *Todos os auto-valores de B são reais;*
2. *V tem uma base ortonormal de auto-vetores de B.*

Definição 1.23. *Seja E^n um espaço de Hilbert complexo de dimensão n e $(e_i)_{i=1}^n$ uma base ortonormal de E^n. Quando A é um endomorfismo linear de E^n (isto é, $A \in End(E^n)$), definimos o traço do operador A, denotado traço(A), como*

$$traço(A) := \sum_{i=1}^{n} \langle Ae_i, e_i\rangle,$$

que é independente da escolha da base em E^n.

Observe que se A e B são ambos operadores auto-adjuntos, então:

$$traço\ (AB) = traço\ (BA). \tag{1.6}$$

[3]O caso de operadores auto-adjuntos é importante, pois tais operadores são diagonalizáveis ainda no caso real.

1.6 r-ésimo Operador de Newton.

Definição 1.24. *Seja V um espaço vetorial com produto interno real n dimensional e seja $B \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear auto-adjunto. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os auto-valores de B. Definamos $S_r : \mathcal{L}(V) \to \mathbb{R}$ por*

$$S_r(B) := \begin{cases} 1 & r = 0, \\ S_r(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) & \forall r \in \{1, 2, \ldots, n\}, \\ 0 & \forall r \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \cdots, n\}. \end{cases}$$

como o r-ésimo polinômio simétrico elementar do operador B. $S_r(B)$ é uma soma de $\binom{n}{r}$ termos.

Já que $\det(B - \lambda\mathcal{I}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n)$, então pelo Teorema de Viète

$$\det(B - \lambda\mathcal{I}) = \lambda^n - S_1(B)\lambda^{n-1} + S_2(B)\lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}S_{n-1}(B)\lambda + (-1)^n S_n(B).$$

Definição 1.25. *Seja V um espaço vetorial com produto interno real n dimensional e seja $B \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear auto-adjunto. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os auto-valores de B. Definamos $w_r(B) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por*

$$w_r(B)(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i)^r,$$

como a $r-$ésima soma de potências dos auto-valores do operador B.

Definição 1.26. *Seja V um espaço vetorial com produto interno real n-dimensional e seja $B \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear auto-adjunto. Sejam $e_1, \cdots, e_n$ os auto-vetores, do operador B, associados a seus respectivos auto-valores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, isto é, $Be_i = \lambda_i e_i$. Adotaremos a notação de que*

$$span\{e_j\} := \phi, \qquad \forall j \in \mathbb{Z} \setminus \{1, \cdots, n\} \qquad (\text{de onde span } \{e_j\}^{\perp} = V)$$

e

$$\lambda_j := 0, \qquad \forall j \in \mathbb{Z} \setminus \{1, \cdots, n\}.$$

Definamos $S_r(B_i) := S_r\left(B|_{span\{e_i\}^{\perp}}\right)$, por

$$S_r(B_i) := \begin{cases} 0 & r \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \cdots, n\},\ i \in \mathbb{Z}, \\ 1 & r = 0,\ i \in \mathbb{Z}, \\ S_r(B) & r \in \{1, \cdots, n\},\ i \in \mathbb{Z} \setminus \{1, \cdots, n\}, \\ S_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \widehat{\lambda_i}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n) & r \in \{1, \cdots, n\},\ i \in \{1, \cdots, n\}, \end{cases}$$

onde $\widehat{\lambda_i}$ indica que o termo λ_i foi omitido, isto é,

$$S_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \widehat{\lambda_i}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n) := S_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, 0, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n).$$

É claro que $S_r(B_i)$ é uma soma de $\binom{n-1}{r}$ termos, quando $i = 1, 2, \cdots, n$.

Proposição 1.27. *Seja V um espaço vetorial com produto interno real n-dimensional e seja $B \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear auto-adjunto e sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, seus auto-valores, então:*

a) $S_n(B_i) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$;

b) $S_r(B_i) = \dfrac{\partial}{\partial \lambda_i} S_{r+1}(B)$;

c) $S_{r+1}(B_i) = S_{r+1}(B) - \lambda_i S_r(B_i)$;

d) $\dfrac{\partial}{\partial \lambda_j} S_r(B_i) = \dfrac{\partial}{\partial \lambda_i} S_r(B_j)$.

Demonstração.

a) Por definição $S_n(B)$ é um produto de n fatores. Analogamente, $S_n(B_i)$ é um produto de n fatores onde um deles é nulo. Logo, para qualquer i, temos que $S_n(B_i) = 0$.

b) A prova é feita no item(j) da Proposição 1.33.

c) Pela Proposição 1.5(i) temos que:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} S_{r+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = S_r(\lambda_1, \dots, \widehat{\lambda_i}, \dots, \lambda_n);$$

pela equação (1.1)

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} S_{r+2}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = S_{r+1}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) - \lambda_i \frac{\partial}{\partial \lambda_i} S_{r+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

assim, temos:

$$\begin{aligned} S_{r+1}(\lambda_1, \dots, \widehat{\lambda_i}, \dots, \lambda_n) &= S_{r+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) - \lambda_i S_r(\lambda_1, \dots, \widehat{\lambda_i}, \dots, \lambda_n); \\ S_{r+1}(B_i) &= S_{r+1}(B) - \lambda_i S_r(B_i). \end{aligned}$$

d) Pelo item (b),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} S_r(B_i) &= \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_i} S_{r+1}(B) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j} S_{r+1}(B) \right); \end{aligned}$$

novamente pelo item (b), segue-se

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_j} S_r(B_i) = \frac{\partial}{\partial \lambda_i} S_r(B_j).$$

■

Definição 1.28. *Seja V um espaço vetorial com produto interno real n-dimensional. Definamos:*

$$P_r : \{T \in \mathcal{L}(V);\ T \text{ é auto-adjunto}\} \longrightarrow \{T \in \mathcal{L}(V);\ T \text{ é auto-adjunto}\}$$

$$P_r(B) := \begin{cases} \mathcal{I} & r = 0, \\ \sum_{j=0}^{r} (-1)^j S_{r-j}(B) B^j & \forall r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, \\ \mathcal{O} & r \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \cdots, n\} \end{cases}$$

Chamamos a $P_r(B)$ o r-ésimo operador de Newton associado a B.

É evidente que $P_r(B) \in \mathcal{L}(V)$ pois $\mathcal{L}(V)$ é uma álgebra, que $P_r(B)$ é auto-adjunto é consequência das seguintes propriedades mais gerais dos operadores auto-adjuntos:

- $T_1 \in \mathcal{L}(V)$ é auto-adjunto e $r \in \mathbb{R}$, então rT_1 é auto-adjunto;
- $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V)$ são auto-adjuntos, então $T_1 + T_2$ é auto-adjunto;
- $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V)$ são auto-adjuntos. T_1T_2 é auto-adjunto se e somente se $T_1T_2 = T_2T_1$.

Proposição 1.29. $P_{r+1}(B) = S_{r+1}(B)\mathcal{I} - BP_r(B) \quad \forall r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Demonstração. Vamos provar a relação acima por indução em r.

- Para $r = 0$, a identidade acima é verificada pela própria definição de $P_1(B)$,
- suponhamos que para cada $k \in \{0, \ldots, q\}$, com $q < n-2$, verificamos $P_{k+1}(B) = S_{k+1}(B)\mathcal{I} - BP_k(B)$.
- Temos que mostrar que nossa hipótese indutiva é válida para $k+1$.

  Pela própria definição do operador $P_r(B)$,

  $$P_{k+2}(B) = \sum_{j=0}^{k+2} (-1)^j S_{(k+2)-j}(B) B^j.$$

  Fazendo mudança de índices, $j = i + 1$, temos:

  $$\begin{aligned} P_{k+2}(B) &= \sum_{i=-1}^{k+1} (-1)^{i+1} S_{(k+1)-i}(B) B^{i+1} \\ &= S_{k+2}(B)\mathcal{I} - \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i S_{(k+1)-i}(B) B B^i \\ &= S_{k+2}(B)\mathcal{I} - B \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i S_{(k+1)-i}(B) B^i. \end{aligned}$$

Pela própria definição do operador $P_r(B)$,

$$P_{k+2}(B) = S_{k+2}(B)\mathcal{I} - BP_{k+1}(B).$$

■

Observação 1.30. *Como $P_r(B)$ é um polinômio em B, é certo que $P_r(B)B = BP_r(B)$ e assim a proposição acima vale da seguinte forma:*

$$P_{r+1}(B) = S_{r+1}(B)\mathcal{I} - P_r(B)B.$$

Definição 1.31. *Dado um operador linear L, define-se a norma "Hilbert-Schmidt"de L, denotada por $\| L \|$, como sendo*

$$\| L \| := \sqrt{traço\Big(L^* \circ L\Big)},$$

onde L^* é o adjunto de L.

Proposição 1.32. *Seja V um espaço vetorial com produto interno real n dimensional e seja $B \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear auto-adjunto, então:*

a) $\| P_r(B) \| = \sqrt{traço\Big(P_r(B)^2\Big)}$;

b) $\| BP_r(B) \| = \sqrt{traço\Big(B^2 P_r(B)^2\Big)}$;

c) Se $P_r(B)$ é um operador positivo,[4]

$$\| \sqrt{P_r(B)} \| = \sqrt{traço\Big(P_r(B)\Big)} ;$$
$$\| \sqrt{P_r(B)}\, B \| = \sqrt{traço\Big(P_r(B)\, B^2\Big)} .$$

Demonstração. Imediata a partir da Definição 1.31. ■

Proposição 1.33. *Seja V um espaço vetorial com produto interno real n dimensional e seja $B \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear auto-adjunto, então:*

a) $P_n(B) = \mathcal{O}$;

b) traço $[BP_r(B)] = nS_{r+1}(B) -$ *traço* $(P_{r+1}(B))$;

[4]Diz-se que o operador $A \in \mathcal{L}(V)$ auto-adjunto é positivo se $\langle Av, v\rangle \geq 0$, $\forall v \in V$. Não há dúvida de que todo operador $A \in \mathcal{L}(V)$ auto-adjunto e positivo tem um único operador auto-adjunto e positivo $C = \sqrt{A}$ tal que $C^2 = A$. Se A é invertível, também o é o operador *raiz quadrada* C ([Hel]).

c) *traço* $[B^2 P_r(B)] =$ *traço* $[S_{r+1}(B)B] -$ *traço* $[BP_{r+1}(B)]$;

d)

$$\begin{aligned} traço(P_r(B)) &= (n-r)S_r(B) \\ &= \sum_{j=0}^{r}(-1)^j S_{r-j}(B)\ traço(B^j); \end{aligned}$$

e) *traço* $[BP_r(B)] = (r+1)S_{r+1}(B)$ *(Fórmula de Newton)*;

f) *traço* $[B^2P_r(B)] = S_1(B)S_{r+1}(B) - (r+2)S_{r+2}(B)$;

g) $P_r(B)$ *tem os mesmos auto-vetores que* B;

h) *os auto-valores de* $P_r(B)$ *são* $\dfrac{\partial}{\partial\lambda_j}S_{r+1}(B)$, *onde* λ_j *é auto-valor de* B $1 \leq j \leq n$.

i)

$$P_r(B)v_i = S_r(B_i)v_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\},$$

onde v_i *é autovetor do operador* B.

j) *traço* $(P_r(B)) = \sum\limits_{i=1}^{n} S_r(B_i)$;

k) *traço* $(B\ P_r(B)) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\ S_r(B_i)$;

l) *traço* $(B^2\ P_r(B)) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2\ S_r(B_i)$;

m) *Se existe um* $\alpha > 0$ *tal que* $\|Bx\| \geq \alpha\|x\|$, *então:*

$$\begin{aligned} traço\ (B^{-1}) &= \frac{S_{n-1}(B)}{S_n(B)}, \\ traço\ (B^{-2}) &= \frac{S_{n-1}(B) - 2S_n(B)S_{n-2}(B)}{(S_n(B))^2}; \end{aligned}$$

n)

$$\frac{\partial}{\partial t}S_r(B(t)) = \sum_{j=1}^{n} S_{r-1}(B_j(t))\frac{\partial}{\partial t}\lambda_j(t),$$

onde $\{B(t)\}_{t\in\Lambda}$ *é uma família de operadores auto-adjuntos;*

o)

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \frac{\partial}{\partial t} S_r\left(B_i(t)\right) = r \frac{\partial}{\partial t} S_{r+1}\left(B(t)\right),$$

onde $\{B(t)\}_{t\in\Lambda}$ *é uma família de operadores diferenciais auto-adjuntos*[5]*;*

p)

$$\text{traço}\left[B(t) \frac{\partial}{\partial t}\left(P_r\left(B(t)\right)\right)\right] = r \frac{\partial}{\partial t} S_{r+1}\left(B(t)\right),$$

onde $\{B(t)\}_{t\in\Lambda}$ *é uma família de operadores diferenciais auto-adjuntos;*

q)

$$\frac{\partial}{\partial t} S_{r+1}(B(t)) = \text{traço}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(B(t)\right)\ P_r\left(B(t)\right)\right) \quad \forall r \in \{0, 1, \ldots, n\},$$

onde $\{B(t)\}_{t\in\Lambda}$ *é uma família de operadores diferenciais auto-adjuntos.*

Demonstração.

a) Pelo Teorema de Viète,

$$\det(B - \lambda \mathcal{I}) = \lambda^n - S_1(B)\lambda^{n-1} + S_2(B)\lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} S_{n-1}(B)\lambda + (-1)^n S_n(B).$$

Pelo Teorema de Hamilton-Caley e pela definição 1.28 concluímos que $P_n(B) = \mathcal{O}$.

b) Da proposição 1.29, temos $BP_r(B) = S_{r+1}(B)\mathcal{I} - P_{r+1}(B)$. A afirmação segue-se quando tomamos o traço desta igualdade.

c) Com efeito, da Proposição 1.29, $BP_r(B) = S_{r+1}(B)\mathcal{I} - P_{r+1}(B)$. Multiplicando ambos os membros desta igualdade, à esquerda, por B, obtemos $B^2 P_r(B) = S_{r+1}(B)B - BP_{r+1}(B)$. Finalmente, toma-se o traço da última igualdade.

d) Considere $\{v_k\}_{k=1}^n$ uma base ortonormal de V que diagonaliza B, isto é, $Bv_k = \lambda_k v_k$, onde λ_k é seu auto-valor associado a v_k (B é auto-adjunto), assim, pela Definição 1.23, temos:

$$\text{traço }\left(P_r(B)\right) = \sum_{k=1}^{n} \langle P_r(B) v_k, v_k \rangle;$$

[5]Observe a grande semelhança desta igualdade com a Identidade de Euler (Proposição 1.5(iii))

pela Definição 1.28 podemos escrever

$$\begin{aligned}
\text{traço } (P_r(B)) &= \sum_{k=1}^{n} \langle \sum_{j=0}^{r} (-1)^j S_{r-j}(B) B^j v_k, v_k \rangle \\
&= \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \; S_{r-j}(B) \left(\sum_{k=1}^{n} \langle B^j v_k, v_k \rangle \right) \\
&= \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \; S_{r-j}(B) \left(\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k)^j \right) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \; S_{r-j}(B) w_j(B) \\
&= n S_r(B) + \sum_{j=1}^{r} (-1)^j \; S_{r-j}(B) w_j(B) \\
&= n S_r(B) + \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^{r-k} S_k(B) w_{r-k}(B) \\
&= n S_r(B) + (-1)^r \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k S_k(B) w_{r-k}(B).
\end{aligned}$$

Da Proposição 1.3, se vê que $\sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k S_k(B) w_{r-k}(B) = -(-1)^r r S_r(B)$. Logo

$$\text{traço } (P_r(B)) = n S_r(B) + (-1)^r (-1)(-1)^r r S_r(B) = (n-r) S_r(B).$$

Para conseguir a segunda igualdade usa-se somente a Definição 1.28 e depois se toma o traço nessa igualdade.

e) Basta fazer uso do item (b) e (d) desta proposição.

f) Basta fazer uso do item (c) e (e) desta proposição e o fato de que traço $(B) = S_1(B)$.

g) Seja λ_i um auto-valor de $B \in \mathcal{L}(V)$ e v_i auto-vetor associado a λ_i, isto é, $Bv_i = \lambda_i v_i$. Pela Definição 1.28

$$\begin{aligned}
P_r(B) v_i &= \left(\sum_{j=0}^{r} (-1)^j \; S_{r-j}(B) \; B^j \right) v_i \\
&= \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \; S_{r-j}(B) \; B^j \; v_i;
\end{aligned}$$

como $B^j v_i = (\lambda_i)^j v_i \quad \forall j \in \mathbb{N}$, segue-se

$$\begin{aligned}
P_r(B)v_i &= \sum_{j=0}^{r}(-1)^j\, S_{r-j}(B)\,(\lambda_i)^j v_i \\
&= \left(\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\, S_{r-j}(B)\,(\lambda_i)^j\right) v_i \\
&= \mu_i\, v_i.
\end{aligned}$$

onde $\mu_i = \sum\limits_{j=0}^{r}(-1)^j\, S_{r-j}(B)\,(\lambda_i)^j$. Portanto, $P_r(B)$ tem os mesmos auto-vetores que B e também os auto-valores de $P_r(B)$ são μ_i.

h) Seja λ_i um auto-valor de $B \in \mathcal{L}(V)$ e v_i auto-vetor associado a λ_i, isto é, $Bv_i = \lambda_i v_i$. Pela Definição 1.24,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} S_{r+1}(B) = \frac{\partial}{\partial \lambda_i} S_{r+1}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n);$$

pela equação 1.1,

$$= \sum_{k=0}^{r}(-1)^k S_{r-k}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,(\lambda_i)^k.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_i} S_{r+1}(B)\right) v_i &= \left(\sum_{k=0}^{r}(-1)^k S_{r-k}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,(\lambda_i)^k\right) v_i \\
&= \sum_{k=0}^{r}(-1)^k S_{r-k}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,(\lambda_i)^k\, v_i;
\end{aligned}$$

pela Definição 1.24,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_i} S_{r+1}(B)\right) v_i = \sum_{k=0}^{r}(-1)^k S_{r-k}(B)\,(\lambda_i)^k\, v_i;$$

como $B^k v_i = (\lambda_i)^k v_i \quad \forall k \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_i} S_{r+1}(B)\right) v_i &= \sum_{k=0}^{r}(-1)^k S_{r-k}(B) B^k v_i \\
&= \left(\sum_{k=0}^{r}(-1)^k S_{r-k}(B) B^k\right) v_i;
\end{aligned}$$

pela Definição 1.28,

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_i}S_{r+1}(B)\right)v_i = P_r(B)v_i,$$

isto mostra que $\frac{\partial}{\partial\lambda_i}S_{r+1}(B)$ é auto-valor de $P_r(B)$. Usando o item (g) podemos dizer ainda que $\frac{\partial}{\partial\lambda_i}S_{r+1}(B) = \mu_i = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j\, S_{r-j}(B)\,(\lambda_i)^j$.

i) Mostrar que $P_r(B)v_i = S_r(B_i)v_i$ equivale a provar que $\mu_i = S_r(B_i)$, Com efeito, no item (h), demostramos que $\mu_i = \frac{\partial}{\partial\lambda_i}S_{r+1}(B)$. O resultado segue-se imediatamente da Proposição 1.27(b).

j) Por definição,

$$\text{traço }(P_r(B)) = \text{soma dos auto-valores de } P_r(B).$$

Sejam λ_j os auto-valores de B, $1 \leq j \leq n$. Pelo item (h) os auto-valores de $P_r(B)$ são $\dfrac{\partial}{\partial\lambda_i}S_{r+1}(B)$. Então,

$$\text{traço }(P_r(B)) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\lambda_i}S_{r+1}(B);$$

pela Definição 1.24,

$$\text{traço }(P_r(B)) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\lambda_i}S_{r+1}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n);$$

pela Proposição 1.5(i):

$$\text{traço }(P_r(B)) = \sum_{i=1}^{n}S_r(\lambda_1,\ldots,\widehat{\lambda_i},\ldots,\lambda_n).$$

Finalmente, pela Definição 1.26,

$$\text{traço }(P_r(B)) = \sum_{i=1}^{n}S_r(B_i).$$

k) Sejam λ_j os auto-valores de B, $1 \leq j \leq n$. Pela Proposição 1.5(i),

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_i}S_{r+1}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = S_r(\lambda_1,\ldots,\widehat{\lambda_i},\ldots,\lambda_n);$$

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial}{\partial\lambda_i}S_{r+1}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i S_r(\lambda_1,\ldots,\widehat{\lambda_i},\ldots,\lambda_n);$$

pela Definição 1.26,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial \lambda_i} S_{r+1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_r(B_i).$$

Agora, pela identidade de Euler dada na página 13, temos:

$$(r+1)S_{r+1}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_r(B_i);$$

pela Definição 1.24,

$$(r+1)S_{r+1}(B) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_r(B_i);$$

pela fórmula de Newton dada na página 26, temos que:

$$\text{traço } (BP_r(B)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_r(B_i).$$

l) Sejam λ_j os auto-valores de B, $1 \leq j \leq n$. Pela Proposição 1.5(i),

$$S_r(\lambda_1, \ldots, \widehat{\lambda_i}, \ldots, \lambda_n) = \frac{\partial}{\partial \lambda_i} S_{r+1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n);$$

pela Definição 1.26,

$$S_r(B_i) = \frac{\partial}{\partial \lambda_i} S_{r+1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n);$$
$$\lambda_i^2 S_r(B_i) = \lambda_i^2 \frac{\partial}{\partial \lambda_i} S_{r+1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Por outro lado, pela identidade de Euler, Proposição 1.5(iii),

$$\lambda_i \frac{\partial}{\partial \lambda_i} S_{r+1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = S_{r+1}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) - \frac{\partial}{\partial \lambda_i} S_{r+2}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Logo,

$$\lambda_i^2 \frac{\partial}{\partial \lambda_i} S_{r+1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_i S_{r+1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) - \lambda_i \frac{\partial}{\partial \lambda_i} S_{r+2}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n);$$

pela Definição 1.24 e pela Proposição 1.27(b), temos

$$\lambda_i^2 S_r(B_i) = \lambda_i S_{r+1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) - \lambda_i \frac{\partial}{\partial \lambda_i} S_{r+2}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n);$$

novamente pela Definição 1.24,

$$\begin{aligned}
\lambda_i^2 S_r(B_i) &= \lambda_i S_{r+1}(B) - \lambda_i S_{r+1}(B_i); \\
\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 S_r(B_i) &= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) S_{r+1}(B) - \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_{r+1}(B_i) \right) \\
&= S_{r+1}(B) S_1(B) - \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i S_{r+1}(B_i) \right);
\end{aligned}$$

pelo item (k) temos que,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 S_r(B_i) = S_{r+1}(B) S_1(B) - \text{traço } \left(B P_{r+1}(B) \right);$$

pelo item (e), temos:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 S_r(B_i) = S_{r+1}(B) S_1(B) - (r+2) S_{r+2}(B).$$

Logo, pelo item (f),

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 S_r(B_i) = \text{traço } \left(B^2 P_r(B) \right).$$

m) Por nosso item (a) e pela Definição 1.28,

$$\mathcal{O} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j S_{n-j}(B) B^j = S_n \mathcal{I} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j S_{n-j}(B) B^j;$$

de onde,

$$\begin{aligned}
S_n(B)\mathcal{I} &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} S_{n-j}(B) B^j \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j S_{n-j-1}(B) B^{j+1};
\end{aligned}$$

nossa hipótese equivale a dizer que B é invertível, de onde multiplicando ambos os membros desta igualdade, à direita, por B^{-1}, obtemos

$$S_n(B)B^{-1} = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j S_{n-j-1}(B)B^j = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j S_{(n-1)-j}(B)B^j;$$

pela Definição 1.28,

$$S_n(B)B^{-1} = P_{n-1}(B);$$

finalmente, tomando o traço a ambos lados na igualdade acima e usando (d) temos,

$$S_n(B) \text{ traço}(B^{-1}) = S_{n-1}(B).$$

Primeiramente mostraremos que existe B^{-2}, com efeito, um operador linear é invertível se e somente se o composto com ele mesmo é invertível. A demonstração da outra identidade é quase igual a do caso anterior, não é difícil mostrar, usando nosso item (a) e a Definição 1.28 que,

$$S_n(B)B^{-2} = S_{n-1}(B)B^{-1} - P_{n-2}(B);$$

de onde,

$$P_{n-2}(B) = S_{n-1}(B)B^{-1} - S_n(B)B^{-2};$$

tomando o traço a ambos lados na igualdade acima e usando (d) temos,

$$\text{traço}\left(P_{n-2}(B)\right) = \text{traço}\left(S_{n-1}(B)B^{-1}\right) - \text{traço}\left(S_n(B)B^{-2}\right);$$

logo,

$$S_n(B) \text{ traço } (B^{-2}) = \frac{\left(S_{n-1}(B)\right)^2}{S_n(B)} - 2S_{n-2}(B).$$

n) Da Proposição 1.5(i), temos:

$$\sum_{j=1}^{n} S_{r-1}(B_j(t))\frac{\partial}{\partial t}\lambda_j(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} S_r(B(t))\, \frac{\partial}{\partial t}\lambda_j(t);$$

a igualdade segue-se, por definição, $\frac{\partial}{\partial t} S_r(B(t)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} S_r(B(t))\, \frac{\partial}{\partial t}\lambda_j(t)$.

o) Pelos itens (e) e (k): $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) S_r(B_i(t)) = (r+1) S_{r+1}(B(t))$. Diferenciando em relação a t temos,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t}\left[\lambda_i(t) S_r(B_i(t))\right] = (r+1)\frac{\partial}{\partial t} S_{r+1}(B(t));$$

de modo que,

$$\sum_{i=1}^{n} S_r(B_i(t)) \frac{\partial}{\partial t}\lambda_i(t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)\frac{\partial}{\partial t} S_r(B_i(t)) = (r+1)\frac{\partial}{\partial t} S_{r+1}(B(t));$$

pela Proposição 1.27(b):

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} S_{r+1}(B(t)) \frac{\partial}{\partial t}\lambda_i(t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)\frac{\partial}{\partial t} S_r(B_i(t)) = (r+1)\frac{\partial}{\partial t} S_{r+1}(B(t));$$

por definição,

$$\frac{\partial}{\partial t} S_{r+1}(B(t)) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)\frac{\partial}{\partial t} S_r(B_i(t)) = (r+1)\frac{\partial}{\partial t} S_{r+1}(B(t));$$

finalmente,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)\frac{\partial}{\partial t} S_r(B_i(t)) = r\frac{\partial}{\partial t} S_{r+1}(B(t)).$$

p)

Prova 1:
Para cada t fixado, $B(t)$ é um operador auto-adjunto. Pelo Teorema 1.22, existe uma base (para $V(t)$) ortonormal $\mathcal{B} = \{e_1(t), \ldots, e_n(t)\}$ de auto-vetores de $B(t)$ associados a seus auto-valores $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$, respectivamente.

Pelo item (i): $[P_r(B(t))]_{\mathcal{B}} = diag\,(S_r(B_i(t)))_{i=1}^{n}$, diferenciando em relação a t temos

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} P_r(B(t))\right]_{\mathcal{B}} = diag\left(\frac{\partial}{\partial t} S_r(B_i(t))\right)_{i=1}^{n};$$

sendo $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$ os auto-valores de $B(t)$, temos $[B(t)]_{\mathcal{B}} = diag\,(\lambda_i(t))_{i=1}^{n}$.

Como o traço de um operador independe da base (de $V(t)$), temos:

$$\begin{aligned}
\text{traço } \left[B(t)\frac{\partial}{\partial t}P_r\left(B(t)\right)\right] &= \text{traço } \left([B(t)]_{\mathcal{B}}\left[\frac{\partial}{\partial t}P_r\left(B(t)\right)\right]_{\mathcal{B}}\right)\\
&= \text{traço } \left[diag\left(\lambda_i(t)\frac{\partial}{\partial t}S_r\left(B_i(t)\right)\right)_{i=1}^{n}\right]\\
&= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)\frac{\partial}{\partial t}S_r\left(B_i(t)\right);
\end{aligned}$$

finalmente, pelo item (o)

$$\text{traço } \left[B(t)\frac{\partial}{\partial t}P_r\left(B(t)\right)\right] = r\frac{\partial}{\partial t}S_{r+1}\left(B(t)\right).$$

<u>Prova 2:</u>
Pela fórmula de Newton (item (e)),

$$(r+1)S_{r+1}\left(B(t)\right) = \text{traço } \left[B(t)P_r\left(B(t)\right)\right];$$

diferenciando, lado a lado em relação a t,

$$\begin{aligned}
(r+1)\frac{\partial}{\partial t}S_{r+1}\left(B(t)\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\text{ traço } \left[B(t)P_r\left(B(t)\right)\right]\\
&= \text{traço } \left[\frac{\partial}{\partial t}\left\{B(t)P_r\left(B(t)\right)\right\}\right]\\
&= \text{traço } \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(B(t)\right)P_r\left(B(t)\right)\right] + \text{traço } \left[B(t)\frac{\partial}{\partial t}P_r\left(B(t)\right)\right];
\end{aligned}$$

pelo item (q)

$$= \frac{\partial}{\partial t}S_{r+1}\left(B(t)\right) + \text{traço } \left[B(t)\frac{\partial}{\partial t}P_r\left(B(t)\right)\right];$$

portanto,

$$\text{traço } \left[B(t)\frac{\partial}{\partial t}P_r\left(B(t)\right)\right] = r\frac{\partial}{\partial t}S_{r+1}\left(B(t)\right).$$

q) Para cada t fixo, $B(t)$ é auto-adjunto. Pelo Teorema 1.22, existe uma base (para $V(t)$) ortonormal $\mathcal{B} = \{e_1(t),\ldots,e_n(t)\}$ de auto-vetores de $B(t)$ associados a seus auto-valores $\lambda_1(t),\ldots,\lambda_n(t)$, respectivamente. Pelo item (i):

$$[P_r(B(t))]_{\mathcal{B}} = diag\ \left(S_r(B_i(t))\right)_{i=1}^{n};$$

sendo $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$ os auto-valores de $B(t)$, temos:

$$[B(t)]_{\mathcal{B}} = diag\ (\lambda_i(t))_{i=1}^n,$$

diferenciando lado a lado, em relação a t,

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}B(t)\right]_{\mathcal{B}} = diag\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\lambda_i(t)\right)_{i=1}^n.$$

Como o traço de um operador independe da base (de V), temos:

$$\begin{aligned}
\text{traço}\ \left(\frac{\partial}{\partial t}B(t) \circ P_r(B(t))\right) &= \text{traço}\ \left(\left[\frac{\partial}{\partial t}B(t)\right]_{\mathcal{B}} [P_r(B(t))]_{\mathcal{B}}\right) \\
&= \text{traço}\ \left[diag\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\lambda_i(t)\ S_r(B_i(t))\right)_{i=1}^n\right] \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t}\lambda_i(t)\ S_r(B_i(t)) = \sum_{i=1}^n S_r(B_i(t))\ \frac{\partial}{\partial t}\lambda_i(t);
\end{aligned}$$

pela Proposição 1.27(b)

$$\text{traço}\ \left(\frac{\partial}{\partial t}B(t) \circ P_r(B(t))\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \lambda_i}; S_{r+1}(B_i(t))\ \frac{\partial}{\partial t}\lambda_i(t);$$

finalmente, por definição:

$$\text{traço}\ \left(\frac{\partial}{\partial t}B(t) \circ P_r(B(t))\right) =: \frac{\partial}{\partial t}S_{r+1}(B(t)).$$

■

Proposição 1.34. (Identidade de Jacobi) *Seja V um espaço vetorial com produto interno real n dimensional e seja $B \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear auto-adjunto. Afirmamos que:*

a) $(n-r)S_r(B) = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j S_{r-j}(B)\ w_j(B);$

b) $S_r(B) = \frac{1}{r}\ \sum_{j=1}^{r}\ (-1)^{j-1}\ \ S_{r-j}(B)\ w_j(B).$

Demonstração. a) Combinando a equação 1.1 e a Definição 1.24 temos,

$$S_r(B_i) = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j S_{r-j}(B)\,\lambda_i^j, \tag{1.7}$$

de onde,

$$\sum_{i=1}^{n} S_r(B_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{r}(-1)^j S_{r-j}(B)\,\lambda_i^j;$$

pela Proposição 1.33(j),

$$\text{traço}(P_r(B)) = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j S_{r-j}(B)\,\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^j;$$

pela Proposição 1.33(d),

$$(n-r)S_r(B) = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j S_{r-j}(B)\,\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^j,$$

finalmente,

$$(n-r)S_r(B) = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j S_{r-j}(B)\,w_j(B).$$

b) Combinando os itens (k) e (e) da Proposição 1.33,

$$rS_r(B) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,S_{r-1}(B_i);$$

pela equação 1.7,

$$\begin{aligned}
rS_r(B) &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,\left(\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k S_{r-1-k}(B)\lambda_i^k\right)\\
&= \sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k S_{r-1-k}(B)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{k+1}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k\,S_{r-1-k}(B)\,w_{k+1}(B)\\
&= \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\,S_{r-j}(B)\,w_j(B).
\end{aligned}$$

■

Observação 1.35. *Usando o item (a) ou (b) desta última afirmação, obtemos os mesmos resultados da observação 1.4.*

Proposição 1.36. *Seja V um espaço vetorial com produto interno real n dimensional e seja $B \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear auto-adjunto. Para qualquer $r \in \{1, \cdots, n\}$ temos que:*

$$grad\,(S_r(B)) = \sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^{j-1}}{j}\, S_{r-j}(B)\, grad\,(w_j).$$

Demonstração. Provaremos nossa identidade por indução sobre r.

- Trivialmente satisfeita para $r = 1$, pois $w_1 = S_1(B)$.
- Dado $r \in \{1, \cdots, n-1\}$, suponhamos que
$$\text{grad}\,(S_k(B)) = \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j}\, S_{k-j}(B)\, \text{grad}\,(w_j)$$
for válida para qualquer $k \in \{1, \cdots, r\}$.
- Temos que provar que a hipótese indutiva continua sendo válida para $k+1$. Com efeito, calculando o gradiente de $S_{k+1}(B)$ na Proposição 1.34(b) temos
$$\text{grad}\,(S_{k+1}) = \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j-1}\text{grad}\,(S_{k+1-j})w_j + \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j-1}S_{k+1-j}\,\text{grad}\,(w_j).$$
Denotemos cada termo da soma anterior por:
$$\text{A} := \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j-1}\,\text{grad}\,(S_{k+1-j})\; w_k = \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\,\text{grad}\,(S_{k+1-j})\; w_k$$
e
$$\text{B} := \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j-1}S_{k+1-j}\,\text{grad}\,(w_j).$$

Evidentemente $k+1-j \in \{1, \cdots, k\}$ quando $j \in \{1, \cdots, k\}$, de onde nossa hipótese indutiva vale para grad (S_{k+1-j}). Assim,

$$\text{A} = \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\Big[\sum_{i=1}^{k+1-j}\frac{(-1)^{i-1}}{i}S_{(k+1-j)-i}(B)\,\text{grad}\,(w_i)\Big]w_j;$$

reordenando os termos desta igualdade obtemos

$$\text{A} = \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}\Big[\frac{(-1)^{j-1}}{j}\;(k+1-j)\;S_{k+1-j}\Big]\,\text{grad}\,w_j.$$

A prova segue-se de somar esta expressão, para A, com a última igualdade para B. ∎

1.7 Operadores Lineares Elipticos de Segunda Orden

Seja Ω um conjunto aberto e não vazio de $\mathbb{R}^n$. Diz-se que um operador linear em derivadas parciais é de ordem dois, se é da forma:

$$L\,u(x) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\partial_j\big(a_{ij}(x)\,\partial_i\,u(x)\big) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\,\partial_i\,u(x) + c(x)\,u(x) \tag{1.8}$$

ou

$$L\,u(x) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\partial_i\partial_j\,u(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\,\partial_i\,u(x) + c(x)\,u(x), \tag{1.9}$$

onde $a_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}^{n^2}$, $b_i : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $c : \Omega \to \mathbb{R}$ são funções mensuráveis, $u \in C^2(\Omega)$ e $x \in \Omega$. O operador que é da forma (1.8) chama-se de operador na forma "divergente" e o operador que é da forma (1.9) chama-se de operador na forma "não divergente". Observamos ainda que se as funções a_{ij} são funções $C^1(\Omega)$, então um operador dado na forma divergente pode ser expressado na estrutura de não divergente, e reciprocamente.

Sem perda de generalidade, podemos supor que $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, de forma que a matriz

$$A(x) := \Big(a_{ij}\Big)_{i,j=1,\cdots,n}$$

é simétrica. L diz-se elíptico em Ω se $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j > 0$ para todo $x \in \Omega$ e para todo $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$. Para qualquer $x \in \Omega$ existe

$$\lambda(x) := \min\{a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j\ ;\ |\xi| = 1\},$$

$\lambda(x)$ deve ser positivo (na verdade é o menor auto-valor de $A(x)$). De modo que podemos expressar a elipticidade, na seguinte forma: o operador L é elíptico em $x \in \Omega$ se existe um número $\lambda(x) > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \geq \lambda(x)\,|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n;$$

diremos que L é elíptico em Ω, se é elíptico em cada $x \in \Omega$. Dizemos que o operador L é uniformemente elíptico em Ω, se existe uma constante $\lambda_0 > 0$ tal que $\lambda(x) \geq \lambda_0$ para cada $x \in \Omega$.

1.8 Operadores Diferenciais em Variedades Riemannianas

1.8.1 Gradiente

Sejam $(\mathbf{M}, g)$ uma variedade Riemanniana e $f : \mathbf{M} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Definimos o *gradiente* de f, denotado *grad* f ou $\nabla f \in \chi(\mathbf{M})$, como sendo o único campo vetorial sobre **M**, tal que:

$$g(grad\ f, \mathbf{X}) := \mathbf{X}f = df(\mathbf{X}) \quad , \forall \mathbf{X} \in \chi(\mathbf{M}).$$

Demonstra-se facilmente que:

- $grad(f_1 + f_2) = grad\ f_1 + grad\ f_2.$
- $grad(f_1 f_2) = f_2.\ grad\ f_1 + f_1.\ grad\ f_2.$
- se $\{E_i\}_{i=1}^n$ é um referencial geodésico numa vizinhança de $p \in \mathbf{M}$, então:

$$(grad\ f)_p = \sum_{i=1}^n E_i(f)E_i = \sum_{i=1}^n g(grad\ f, E_i)E_i.$$

1.8.2 Hessiano

Seja $(\mathbf{M}, g, D)$ uma variedade Riemanniana. O *Hessiano*, denotado por Hess é tal que Hess $\in Hom\,(C^\infty(M,\mathbb{R}), End(TM))$, mais precisamente, define-se por:

$$\begin{aligned} \text{Hess: } C^\infty(M,\mathbb{R}) &\longrightarrow \text{End}\,(TM) \\ f_p &\longmapsto Hess\ f_p \in End(T_pM) \end{aligned}$$

$$(\text{Hess } f_p)\xi := D_\xi\ grad\ f_p\ , \quad \xi \in T_pM.$$

Verifica-se que $g\left((Hess\ f_p)\,\xi, \eta\right) = g\left(\xi, (Hess\ f_p)\,\eta\right)$, conclui-se que o $Hess\ f_p$ é auto-adjunto e determina uma forma bilinear simétrica em $T_pM, p \in M$.

$$Hess\ f_p(\xi,\eta) := g\left(D_\xi\ grad\ f_p, \eta\right).$$

Visto desta forma, podemos ver o Hessiano de f como um tensor simétrico de tipo (2,0) definido como esta última relação.

1.8.3 Divergente de um campo vetorial

Seja $(\mathbf{M}, g, D)$ uma variedade Riemanniana. Para $\mathbf{X} \in \chi(\mathbf{M})$, definimos o *divergente* de **X**, denotado por *div* **X**, por:

$$\begin{aligned} div: \ & \chi(\mathbf{M}) \to && C^\infty(M,\mathbb{R}) \\ & X \mapsto && (div\ \mathbf{X})_{(p)} := \text{traço}(\mathbf{Y} \longmapsto D_\mathbf{Y}\mathbf{X}) \quad , \text{onde } \mathbf{Y} \in T_p\mathbf{M} \end{aligned}$$

- $div(\mathbf{X}+\mathbf{Y}) = div(\mathbf{X}) + div(\mathbf{Y}) \quad \forall\, \mathbf{X},\mathbf{Y} \in \chi(\mathbf{M});$

$$\begin{aligned} div(\mathbf{X}+\mathbf{Y})_{(p)} &= \text{traço}\ (\mathbf{Z} \longmapsto D_\mathbf{Z}(\mathbf{X}+\mathbf{Y}) \\ &= \text{traço}\ (\mathbf{Z} \longmapsto (D_\mathbf{Z}\mathbf{X} + D_\mathbf{Z}\mathbf{Y})) \\ &= \text{traço}\ (\mathbf{Z} \longmapsto D_\mathbf{Z}\mathbf{X}) + \text{traço}\ (\mathbf{Z} \longmapsto D_\mathbf{Z}\mathbf{Y}) \\ &= div(\mathbf{X})_{(p)} + div(\mathbf{Y})_{(p)}. \end{aligned}$$

- $div(f\mathbf{X}) = f\, div\, \mathbf{X} + \mathbf{X}f\,, \qquad \forall f \in C^\infty(\mathbf{M})\,,\ \forall \mathbf{X} \in \chi(\mathbf{M});$

$$\begin{aligned} div(f\mathbf{X})_{(p)} &= \text{traço } (\mathbf{Y} \longmapsto D_{\mathbf{Y}}(f\mathbf{X})) \\ &= \text{traço } (\mathbf{Y} \longmapsto (f\, D_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} + (\mathbf{Y}f)\mathbf{X})) \\ &= \text{traço } (\mathbf{Y} \longmapsto f\, D_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}) + \text{traço } (\mathbf{Y} \longmapsto (\mathbf{Y}f)\mathbf{X}) \\ &= f \text{ traço } (\mathbf{Y} \longmapsto D_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}) + \mathbf{X}f \\ &= f\, div\, \mathbf{X} + g\,(grad\, f, \mathbf{X})\,. \end{aligned}$$

- Se $\{E_i\}_{i=1}^n$ é um referencial geodésico numa vizinhança de $p \in \mathbf{M}$, então:

$$(div\mathbf{X})_{(p)} = \sum_{i=1}^{n} E_i(a_i),$$

  onde o campo vetorial $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} a_i E_i$.

1.8.4 O Operador de Laplace-Beltrami

O *operador de Laplace-Beltrami*, define-se por

$$\begin{array}{rccl} \Delta: & C^\infty(\mathbf{M};\mathbb{R}) & \rightarrow & C^\infty(\mathbf{M};\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & \Delta f := div\ (\ grad\, f\ ) \end{array}$$

Demonstra-se facilmente que:

- $\Delta(f + h) = \Delta f + \Delta h.$
- $\Delta(f\, h) = f\, \Delta h + h\, \Delta f + 2g(grad\, f,\ grad\, h).$
- $\Delta\ f =$traço ($Hess\ f$).

Observação 1.37. *É possível demonstrar que Δ é auto-adjunto relativo a $L^2(\mathbf{M}, g)$ e que é elíptico. Dado o problema de auto-valor*

$$\Delta F + \lambda F = 0 \quad F \in C^2(\mathbf{M}),$$

onde $\mathbf{M}$ *é uma variedade compacta; temos a seguinte proposição:*

Proposição 1.38. *O espectro de $-\Delta$ é discreto iniciando-se com o valor 0 e tem $+\infty$ como seu único ponto de acumulação, sendo que cada auto-valor neste espectro tem multiplicidade finita e as auto-funções associadas a eles são funções C^∞.*
Rotulemos os auto-valores com o índice j de modo que fiquem listados em ordem crescente, na seguinte forma: $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$, com repetições apropriadas para os casos degenerados. Considerando $\mathcal{E}_j$ o auto-espaço correspondente ao auto-valor λ_j, dizemos que $\dim \mathcal{E}_j < +\infty$ *e $\mathcal{E}_j$ é subspaço de $C^\infty(\mathbf{M})$.*
Do exposto, concluímos que podemos escolher os auto-espaços $\mathcal{E}_j$ de modo que formem uma base ortonormal para $L^2(\mathbf{M}, g)$ e a soma direta dos mesmos seja todo $L^2(\mathbf{M}, g)$.

1.8.5 O Operador L_r

Definição 1.39. *Considere* $\mathbf{M}^n$ *uma variedade orientável conexa e diferenciável e* $x : \mathbf{M}^n \to \overline{\mathbf{M}}^{n+1}$ *uma imersão isométrica. Define-se o operador diferencial de segunda ordem*

$$L_r : C^\infty(\mathbf{M}, \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbf{M}, \mathbb{R})$$

em cada ponto $p \in \mathbf{M}^n$*, como sendo:*

$$L_r(f)(p) = \begin{cases} traço\Big(\big(P_r(A)\ Hess(f)\big)(p)\Big) & , \ r \in \{0, \cdots, n-1\}; \\ 0 & , \ r \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \cdots, n-1\}; \end{cases}$$

onde A *é a segunda forma fundamental associada a um campo vetorial normal unitário* N *globalmente definido.*

Outra expressão equivalente para $L_r(f)$ *é uma conseqüência imediata da Proposição 1.29,*

$$L_r(f) = S_r(A)\ \Delta_{\mathbf{M}} f - traço(A\ P_{r-1}(A)\ Hess\ \ f). \tag{1.10}$$

Afirmação 1.40. *Sejam* $\mathbf{M}^n$ *uma variedade orientável conexa e diferenciável e* $x : \mathbf{M}^n \to \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ *uma imersão isométrica. Para qualquer número inteiro* $r \in [0, n-1]$ *e qualquer função diferenciável* $f : \mathbf{M}^n \to \mathbb{R}$ *tem-se*

$$L_r(f)(p) = div_{\mathbf{M}}\Big(\big(P_r(A) \quad grad_{\mathbf{M}}(f)\big)(p)\Big) \quad \forall p \in \mathbf{M},$$

onde A *é a segunda forma fundamental associada a um campo vetorial normal unitário* N *globalmente definido.*

Demonstração. Veja [Ros]. ■

Lema 1.41. *Considere a imersão isométrica* $x : \mathbf{M}^n \to \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ *e* $A : T_p\mathbf{M} \to T_p\mathbf{M}$ *sua segunda forma fundamental. Para qualquer* $f : \mathbf{M}^n \to \mathbb{R}$ *pelo menos duas vezes diferenciável, temos:*

a)

$$L_r(f) = S_r(A)\ \Delta_{\mathbf{M}} f + \langle grad_{\mathbf{M}} S_r\ , grad_{\mathbf{M}}\ f\rangle - traço(A\ P_{r-1}\ Hess\ f) - \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, (D_{grad_{\mathbf{M}} f}\ A) P_{r-1} e_i\rangle;$$

b)

$$\langle grad_{\mathbf{M}} S_r\ , grad_{\mathbf{M}}\ f\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, (D_{grad_{\mathbf{M}} f}\ A) P_{r-1} e_i\rangle.$$

Demonstração.

a) Pela Observação 1.30,

$$P_r(A) = S_r(A)\, I - P_{r-1}(A)\, A;$$

multiplicando ambos os membros desta igualdade, à direita, por $\mathrm{grad}_{\mathrm{M}} f$, temos

$$P_r(A)\, \mathrm{grad}_{\mathrm{M}} f = S_r(A)\, \mathrm{grad}_{\mathrm{M}} f - P_{r-1}(A)\, A\, \mathrm{grad}_{\mathrm{M}} f;$$

tomando $\mathrm{div}_{\mathrm{M}}$ de ambos os membros desta igualdade,

$$\mathrm{div}(\ P_r(A)\, \mathrm{grad}_{\mathrm{M}} f\ ) = \mathrm{div}(\ S_r(A)\, \mathrm{grad}_{\mathrm{M}} f\ ) - \mathrm{div}(\ P_{r-1}(A)\, A\, \mathrm{grad}_{\mathrm{M}} f\ ).$$

Pela afirmação 1.40, o lado esquerdo desta igualdade é $L_r(f)$; assim,

$$L_r(f) = \mathrm{div}(\ S_r(A)\, \mathrm{grad}_{\mathrm{M}} f\ ) - \mathrm{div}(\ P_{r-1}(A)\, A\, \mathrm{grad}_{\mathrm{M}} f\ );$$

usando as propriedades do divergente,

$$(1.11)\quad L_r(f) = S_r(A)\, \Delta_{\mathrm{M}}\, f + \langle \mathrm{grad}_{\mathrm{M}} S_r(A),\ \mathrm{grad}_{\mathrm{M}} f\rangle - \mathrm{div}(\ P_{r-1}(A)\, A\, \mathrm{grad}_{\mathrm{M}} f\ ).$$

Por outro lado, sabemos que

$$\mathrm{div}(\ P_{r-1}(A)\, A\, \mathrm{grad}_{\mathrm{M}} f\ ) := \mathrm{traço}\Big(Y \to D_Y\ P_{r-1}(A\, \mathrm{grad}_{\mathrm{M}} f)\Big).$$

Usando a relação (4.2) de [Ros], nesta expressão obtemos:

$$\mathrm{traço}\Big(Y \to D_Y\ P_{r-1}(A\, \mathrm{grad}_{\mathrm{M}} f)\Big) = \mathrm{traço}\Big(Y \to D_{P_{r-1}Y}\ A\, \mathrm{grad}_{\mathrm{M}} f\ \Big).$$

Por definição de derivada covariante de um operador,

$$\Big(\ D_{P_{r-1}Y}\ A\Big)\ \mathrm{grad}_{\mathrm{M}} f = D_{P_{r-1}Y}\ A\, \mathrm{grad}_{\mathrm{M}} f - A\Big(D_{P_{r-1}Y}\ \mathrm{grad}_{\mathrm{M}} f\Big),$$

de onde, obtemos

$$D_{P_{r-1}Y}\ A\, \mathrm{grad}_{\mathrm{M}} f = \Big(\ D_{P_{r-1}Y}\ A\Big)\ \mathrm{grad}_{\mathrm{M}} f + A\Big(D_{P_{r-1}Y}\ \mathrm{grad}_{\mathrm{M}} f\Big).$$

Por Codazzi,

$$D_{P_{r-1}Y}\ A\, \mathrm{grad}_{\mathrm{M}} f = \Big(\ D_{\mathrm{grad}_{\mathrm{M}} f}\ A\Big) P_{r-1}Y + A\Big(D_{P_{r-1}Y}\ \mathrm{grad}_{\mathrm{M}} f\Big).$$

Portanto,

$$\text{traço}\Big(Y \to D_{P_{r-1}Y}\ A\ \text{grad}_{\text{M}} f\ \Big) = \text{traço}\Big(Y \to \Big(\ D_{\text{grad}_{\text{M}} f}\ A\Big) P_{r-1} Y\Big) +$$
$$+\ \text{traço}\Big(Y \to A\Big(D_{P_{r-1}Y}\ \text{grad}_{\text{M}} f\Big)\Big).$$

Numa base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ ortonormal que diagonaliza A,

$$\text{traço}\Big(Y \to D_{P_{r-1}Y}\ A\ \text{grad}_{\text{M}} f\ \Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big\langle e_i,\ \Big(\ D_{\text{grad}_{\text{M}} f}\ A\Big) P_{r-1} e_i \Big\rangle +$$
$$\sum_{j=1}^{n} \Big\langle e_j,\ A\Big(D_{P_{r-1}e_j}\ \text{grad}_{\text{M}} f\Big)\Big\rangle;$$

por ser A auto-adjunta e pela Proposição 1.33(i),

$$\text{traço}\Big(Y \to D_{P_{r-1}Y}\ A\ \text{grad}_{\text{M}} f\ \Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big\langle e_i,\ \Big(\ D_{\text{grad}_{\text{M}} f}\ A\Big) S_{r-1}(A_i) e_i \Big\rangle +$$
$$\sum_{j=1}^{n} \Big\langle Ae_j,\ D_{S_{r-1}(A_j)e_j}\ \text{grad}_{\text{M}} f \Big\rangle.$$

Substituindo esta igualdade na equação 1.11 temos:

$$L_r(f) = S_r(A)\ \Delta_{\text{M}}\ f + \langle \text{grad}_{\text{M}} S_r(A),\ \text{grad}_{\text{M}} f\rangle - \sum_{i=1}^{n} \Big\langle e_i,\ \Big(\ D_{\text{grad}_{\text{M}} f}\ A\Big) S_{r-1}(A_i) e_i \Big\rangle$$
$$- \sum_{j=1}^{n} \lambda_j S_{r-1}(A_j) \Big\langle e_j,\ D_{e_j}\ \text{grad}_{\text{M}} f \Big\rangle;$$

pela definição de Hessiano,

$$L_r(f) = S_r(A)\ \Delta_{\text{M}}\ f + \langle \text{grad}_{\text{M}} S_r(A),\ \text{grad}_{\text{M}} f\rangle - \sum_{i=1}^{n} \Big\langle e_i,\ \Big(\ D_{\text{grad}_{\text{M}} f}\ A\Big) S_{r-1}(A_i) e_i \Big\rangle$$
$$- \sum_{j=1}^{n} \lambda_j S_{r-1}(A_j) \Big\langle e_j,\ (\text{ Hess f })\ e_j \Big\rangle,$$

de onde obtemos

$$L_r(f) = S_r(A)\ \Delta_{\text{M}}\ f + \langle \text{grad}_{\text{M}} S_r(A),\ \text{grad}_{\text{M}} f\rangle - \sum_{i=1}^{n} \Big\langle e_i,\ \Big(\ D_{\text{grad}_{\text{M}} f}\ A\Big) S_{r-1}(A_i) e_i \Big\rangle$$
$$- \sum_{j=1}^{n} \Big\langle e_j,\ \lambda_j S_{r-1}(A_j)\ (\text{ Hess f })\ e_j \Big\rangle.$$

Mas

$$\sum_{j=1}^{n}\Big\langle e_j,\ \lambda_j S_{r-1}(A_j)\ (\text{ Hess f })\ e_j\Big\rangle = \sum_{j=1}^{n}\Big\langle \lambda_j S_{r-1}(A_j)e_j,\ (\text{ Hess f })\ e_j\Big\rangle$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\Big\langle AP_{r-1}(A)e_j,\ (\text{ Hess f })\ e_j\Big\rangle.$$

Logo, na igualdade acima usamos o fato de que $AP_{r-1}(A)$ é auto-adjunto;

$$\sum_{j=1}^{n}\Big\langle e_j,\ \lambda_j S_{r-1}(A_j)\ (\text{ Hess f })\ e_j\Big\rangle = \sum_{j=1}^{n}\Big\langle e_j,\ (\ AP_{r-1}(A)\text{Hess f })\ e_j\Big\rangle.$$

Portanto,

$$L_r(f) = S_r(A)\ \Delta_{\mathrm{M}}\ f + \langle \operatorname{grad}_{\mathrm{M}} S_r(A),\ \operatorname{grad}_{\mathrm{M}} f\rangle - \sum_{i=1}^{n}\Big\langle e_i,\ \Big(D_{\operatorname{grad}_{\mathrm{M}} f}\ A\Big) S_{r-1}(A_i)e_i\Big\rangle$$
$$- \sum_{j=1}^{n}\Big\langle e_j,\ AP_{r-1}(A)\ (\text{ Hess f })\ e_j\Big\rangle;$$

finalmente, pela Definição 1.23

$$L_r(f) = S_r(A)\ \Delta_{\mathrm{M}}\ f + \langle \operatorname{grad}_{\mathrm{M}} S_r(A),\ \operatorname{grad}_{\mathrm{M}} f\rangle - \sum_{i=1}^{n}\Big\langle e_i,\ \Big(D_{\operatorname{grad}_{\mathrm{M}} f}\ A\Big) S_{r-1}(A_i)e_i\Big\rangle$$
$$- \text{traço}\Big(AP_{r-1}(A)\ (\text{ Hess f })\Big).$$

b) Multiplicando à direita, ambos os membros da igualdade dada na Proposição 1.29 por Hess$f$, vemos claramente que,

$$AP_{r-1}(A)\ \text{Hess}\ f = S_r(A)\ \text{Hess}\ f - P_r(A)\ \text{Hess}\ f.$$

Tomando o traço, obtemos

$$\text{traço}\Big(AP_{r-1}(A)\ \text{Hess}\ f\Big) = S_r(A)\ \text{traço}\Big(\text{Hess}\ f\Big) - \text{traço}\Big(P_r(A)\ \text{Hess}\ f\Big);$$

por propriedade do Laplaciano e pela Afirmação 1.40, isto nos dá

$$\text{traço}\Big(AP_{r-1}(A)\ \text{Hess}\ f\Big) = S_r(A)\ \Delta_{\mathrm{M}}\ f - L_r(f).$$

A identidade (b) segue-se ao substituir esta última igualdade no item (a) anterior.

■

Capítulo 2

Estimativas e Aplicações

2.1 $S_r(B_i, B_j)$

Definição 2.1. *Seja V um espaço vetorial com produto interno real n-dimensional e seja $B \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear auto-adjunto. Sejam $e_1, \ldots, e_n$ os auto-vetores do operador B associados a seus respectivos auto-valores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, isto é, $Be_i = \lambda_i e_i$. Adotaremos a notação:*

$$\begin{array}{lll} e_j := \phi, & \forall j \in \mathbb{Z} \setminus \{1, \cdots, n\} & (\textit{de onde } \ \textit{span}\ \{e_j\}^{\perp} = V) \\ \lambda_j := 0, & \forall j \in \mathbb{Z} \setminus \{1, \cdots, n\}. & \end{array}$$

Definamos

$$S_r(B_i, B_j) := S_r\left(\left(B_{|_{span\{e_i\}^{\perp}}}\right)_{|_{span\{e_j\}^{\perp}}}\right) = S_r\left(\left(B_{|_{span\{e_j\}^{\perp}}}\right)_{|_{span\{e_i\}^{\perp}}}\right) = S_r\left(B_{|_{span\{e_i, e_j\}^{\perp}}}\right)$$

por

$$S_r(B_i, B_j) := \begin{cases} 0 & , \textit{se } \ r \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \cdots, n\}, \ \forall (i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \\ 1 & , \textit{se } \ r = 0, \ \forall (i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \\ S_r(B) & , \textit{se } \ r \in \{1, \cdots, n\}, \ \forall i, j \in \mathbb{Z} \setminus \{1, \cdots, n\}, \\ S_r(B_i) & , \textit{se } \ r \in \{1, \cdots, n\}, \ \forall i = j \in \{1, \cdots, n\}, \\ S_r(\lambda_1, \cdots, \widehat{\lambda_i}, \cdots, \widehat{\lambda_j}, \cdots \lambda_n) & , \textit{se } \ r \in \{1, \cdots, n\}, \ \forall i \neq j \in \{1, \cdots, n\}, \end{cases}$$

onde $\widehat{\lambda_i}$ indica que o termo λ_i foi omitido, isto é,

$$S_r(\lambda_1, \cdots, \lambda_{i-1}, \widehat{\lambda_i}, \lambda_{i+1}, \cdots, \lambda_{j-1}, \widehat{\lambda_j}, \lambda_{j+1}, \cdots \lambda_n) = \\ S_r(\lambda_1, \cdots, \lambda_{i-1}, 0, \lambda_{i+1}, \cdots, \lambda_{j-1}, 0, \lambda_{j+1}, \cdots \lambda_n).$$

Evidentemente, quando $i \neq j$ temos que $S_r(B_i, B_j)$ é uma soma de $\binom{n-2}{r}$ termos.

Proposição 2.2. *Seja V um espaço vetorial com produto interno real n-dimensional, seja $B \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear auto-adjunto e sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, seus auto-valores, então:*

a) $S_r(B_i, B_j) = S_r(B_j, B_i)$;

b) $S_r(B_i, B_j) = \dfrac{\partial^2}{\partial\lambda_i \partial\lambda_j} S_{r+2}(B) \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$;

c) $S_{n-1}(B_i, B_j) = 0 = S_n(B_i, B_j) \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$;

d)

$$S_{r+1}(B_i, B_j) = S_{r+1}(B_i) - \lambda_j S_r(B_i, B_j)$$

e

$$S_{r+1}(B_i, B_j) = S_{r+1}(B_j) - \lambda_i S_r(B_i, B_j);$$

e) $[S_{r+1}(B_i) - S_{r+1}(B_j)] = (\lambda_j - \lambda_i) S_r(B_i, B_j)$;

f) $\displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i S_r(B_i, B_k) = (r+1) S_{r+1}(B_k)$ **(Identidade de Euler)**;

g)

$$\begin{aligned} S_{r+1}(B_i, B_j, B_k) &= S_{r+1}(B_i, B_j) - \lambda_k S_r(B_i, B_j, B_k), \\ S_{r+1}(B_i, B_j, B_k) &= S_{r+1}(B_i, B_k) - \lambda_j S_r(B_i, B_j, B_k), \\ S_{r+1}(B_i, B_j, B_k) &= S_{r+1}(B_j, B_k) - \lambda_i S_r(B_i, B_j, B_k); \end{aligned}$$

h) $S_{r+1}(B_i, B_k) - S_{r+1}(B_k, B_j) = (\lambda_j - \lambda_i) S_r(B_i, B_j, B_k)$;

i) Para qualquer $j \in \{1, \cdots, n\}$, $r \in \{0, \cdots, n\}$ *temos que*

$$[(n-1) - r]\, S_r(B_j) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} S_r(B_i, B_j);$$

j) Seja $\{B(t)\}_{t \in \Lambda}$ *uma família de operadores auto-adjuntos, então:*

$$\frac{\partial}{\partial t} S_r(B_i(t)) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} S_{r-1}(B_i(t), B_j(t)) \left(\frac{\partial}{\partial t} \lambda_j(t) \right)$$

(usando $S_r(B_0(t)) = S_r(B(t))$, esta relação generaliza a Proposição 1.33(n), pois

$$\frac{\partial}{\partial t} S_r(B(t)) = \sum_{j=1}^{n} S_{r-1}(B_0(t), B_j(t)) \left(\frac{\partial}{\partial t} \lambda_j \right) = \sum_{j=1}^{n} S_{r-1}(B_j(t)) \left(\frac{\partial}{\partial t} \lambda_j(t) \right)).$$

Demonstração.

a) Imediata a partir da Definição 2.1.

b) Temos

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}S_{r+2}(B) = \frac{\partial}{\partial\lambda_i}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_j}S_{r+2}(B)\right)$$

(pela Afirmação 1.27(c))

$$= \frac{\partial}{\partial\lambda_i}\left(S_{r+1}(B_j)\right)$$

(pela Definição 1.26)

$$= \frac{\partial}{\partial\lambda_i}\left(S_{r+1}\left(B|_{\mathrm{span}\{e_j\}^\perp}\right)\right)$$

(pela Definição 1.26)

$$= S_r\left(\left(B|_{\mathrm{span}\{e_i\}^\perp}\right)|_{\mathrm{span}\{e_j\}^\perp}\right)$$

(pela Definição 2.1)

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}S_{r+2}(B) = S_r(B_i, B_j).$$

c) Por nosso item (b),

$$S_n(B_i, B_j) = \frac{\partial^2}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}S_{n+2}(B)$$

(pela Definição 1.26)

$$= \frac{\partial^2}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}0 = 0.$$

Analogamente,

$$S_{n-1}(B_i, B_j) = \frac{\partial^2}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}S_{n+1}(B)$$

(pela Definição 1.26)

$$= \frac{\partial^2}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}0 = 0.$$

d) É uma aplicação imediata do operador $B|_{\text{span}\{e_i\}^\perp}$ e $B|_{\text{span}\{e_j\}^\perp}$ respectivamente, na Proposição 1.27(c).

e) Fazendo a diferença das duas igualdades no item (d), obtemos

$$0 = S_{r+1}(B_i) - \lambda_j\ S_r(B_i, B_j) - \Big[S_{r+1}(B_j) - \lambda_i\ S_r(B_i, B_j)\Big].$$

Finalmente agrupe adequadamente os termos.

f) É uma aplicação imediata do operador $B|_{\text{span}\{e_k\}^\perp}$ na Identidade de Euler.

g) São aplicações imediatas dos operadores $B|_{\text{span}\{e_i,e_j\}^\perp}$, $B|_{\text{span}\{e_i,e_k\}^\perp}$ e $B|_{\text{span}\{e_j,e_k\}^\perp}$ respectivamente, na Proposição 1.27(c).

h) No mesmo diapasão que a demonstração do item (e).

i) É uma aplicação imediata do operador $B|_{\text{span}\{e_j\}^\perp}$ na Proposição 1.33(e) e (k).

j) A prova será feita por indução sobre r:

- O caso $r = 1$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}S_1(B_i) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \cdots + \lambda_{i-1}(t) + \lambda_{i+1}(t) + \cdots + \lambda_n(t)\right]\\ &= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} 1\frac{\partial}{\partial t}\lambda_j(t) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} S_0(B_i(t), B_j(t))\frac{\partial}{\partial t}\lambda_j(t).\end{aligned}$$

- Suponhamos que $\frac{\partial}{\partial t}S_r(B_i(t)) = \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} S_{r-1}(B_i(t), B_j(t))\frac{\partial}{\partial t}\lambda_j(t)$.

- Pela Proposição 1.27(c): $S_{r+1}(B_i(t)) = S_{r+1}(B(t)) - \lambda_i(t)S_r(B_i(t))$;

  diferenciando em relação a t, temos

$$\frac{\partial}{\partial t}S_{r+1}(B_i(t)) = \frac{\partial}{\partial t}S_{r+1}(B(t)) - \frac{\partial}{\partial t}\lambda_i(t)\ S_r(B_i(t)) - \lambda_i(t)\frac{\partial}{\partial t}S_r(B_i(t));$$

  usando a hipótese indutiva, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}S_{r+1}(B_i(t)) &= \frac{\partial}{\partial t}S_{r+1}(B(t)) - \frac{\partial}{\partial t}\lambda_i(t)\ S_r(B_i(t)) - \lambda_i(t)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} S_{r-1}(B_i(t), B_j(t))\frac{\partial}{\partial t}\lambda_j(t)\\ &= \frac{\partial}{\partial t}S_{r+1}(B(t)) - \frac{\partial}{\partial t}\lambda_i(t)\ S_r(B_i(t)) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \lambda_i(t)S_{r-1}(B_i(t), B_j(t))\frac{\partial}{\partial t}\lambda_j(t);\end{aligned}$$

da Proposição 2.2(d) temos

$$\frac{\partial}{\partial t}S_{r+1}(B_i(t)) = \frac{\partial}{\partial t}S_{r+1}(B(t)) - \frac{\partial}{\partial t}\lambda_i(t)\ S_r(B_i(t))$$
$$- \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \{S_r(B_j(t)) - S_r(B_i(t), B_j(t))\}\ \frac{\partial}{\partial t}\lambda_j(t),$$

de onde obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}S_{r+1}(B_i(t)) = \frac{\partial}{\partial t}S_{r+1}(B(t)) - S_r(B_i(t))\frac{\partial}{\partial t}\lambda_i(t) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} S_r(B_j(t))\frac{\partial}{\partial t}\lambda_j(t)$$
$$+ \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} S_r(B_i, B_j)\frac{\partial}{\partial t}\lambda_j(t);$$

mas esta igualdade é equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial t}S_{r+1}(B_i(t)) = \frac{\partial}{\partial t}S_{r+1}(B(t)) - \sum_{j=1}^{n} S_r(B_j(t))\frac{\partial}{\partial t}\lambda_j(t) +$$
$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} S_r(B_i, B_j)\frac{\partial}{\partial t}\lambda_j(t);$$

logo, pela Proposição 1.33(n) concluímos que

$$\frac{\partial}{\partial t}S_{r+1}(B_i(t)) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} S_r(B_i(t), B_j(t))\frac{\partial}{\partial t}\lambda_j(t).$$

■

Lema 2.3.

$$\left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \lambda_i S_1(B_i, B_k)\right]^2 = \left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2\right]\left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \lambda_i^2\right] - \frac{1}{2}S_1(B_k)^2 \sum_{\substack{i,j=1\\ i,j\neq k}}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)^2$$
$$= \left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2\right]\left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \lambda_i^2\right] - S_1(B_k)^2 \sum_{\substack{1\leq i<j\leq n\\ i,j\neq k}} (\lambda_i - \lambda_j)^2.$$

Demostração.
Em primeiro lugar lembremos a identidade de Lagrange:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{1\leq i<j\leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

Como aplicação direta da identidade de Lagrange temos:

$$\left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \lambda_i S_1(B_i, B_k)\right]^2 = \left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \lambda_i^2\right]\left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2\right] - \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i,j\neq k}}^{n} \left[\lambda_i S_1(B_j, B_k) - \lambda_j S_1(B_i, B_k)\right]^2;$$

pela Proposição 2.2(d), $S_1(B_i, B_k) = S_1(B_k) - \lambda_i$, então

$$\lambda_j S_1(B_i, B_k) = \lambda_j S_1(B_k) - \lambda_i \lambda_j. \tag{2.1}$$

Analogamente, pela Proposição 2.2(d), $S_1(B_j, B_k) = S_1(B_k) - \lambda_j$, então

$$\lambda_i S_1(B_j, B_k) = \lambda_i S_1(B_k) - \lambda_i \lambda_j. \tag{2.2}$$

Fazendo a diferença das equações (2.2)−(2.1) temos

$$\lambda_i S_1(B_j, B_k) - \lambda_j S_1(B_i, B_k) = S_1(B_k)\Big(\lambda_i - \lambda_j\Big).$$

Assim,

$$\left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \lambda_i S_1(B_i, B_k)\right]^2 = \left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2\right]\left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \lambda_i^2\right] - \frac{1}{2} S_1(B_k)^2 \sum_{\substack{i,j=1\\ i,j\neq k}}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)^2;$$

ou, equivalentemente,

$$\left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \lambda_i S_1(B_i, B_k)\right]^2 = \left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2\right]\left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \lambda_i^2\right] - S_1(B_k)^2 \sum_{\substack{1\leq i<j\leq n\\ i,j\neq k}} (\lambda_i - \lambda_j)^2.$$

∎

Lema 2.4.

$$\frac{\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} S_1(B_i,B_k)^2}{4S_1(B_k)^2+\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} S_1(B_i,B_k)^2}=\frac{(n-2)S_1(B_k)^2-2S_2(B_k)}{(n+2)S_1(B_k)^2-2S_2(B_k)}.$$

Se $S_2(B)=0$ e $S_1(B_k)\neq 0$, então

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} S_1(B_i,B_k)^2}{4S_1(B_k)^2+\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} S_1(B_i,B_k)^2}&=1-\frac{4S_1(B_k)}{(n+2)S_1(B_k)+2\lambda_k}\\&=1-\frac{4\left[S_1(B)-\lambda_k\right]}{\left[(n+2)S_1(B)-n\lambda_k\right]}.\end{aligned}$$

Demonstração. Pela Proposição 2.2(d), $S_1(B_i,B_k)=S_1(B_k)-\lambda_i$, então

$$\begin{aligned}S_1(B_i,B_k)^2&=(S_1(B_k)-\lambda_i)^2\\&=S_1(B_k)^2-2S_1(B_k)\lambda_i+\lambda_i^2;\end{aligned}$$

de onde,

$$\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} S_1(B_i,B_k)^2=(n-1)S_1(B_k)^2-2S_1(B_k)\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\lambda_i+\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\lambda_i^2;$$

mas $\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i-\lambda_k=S_1(B)-\lambda_k$, e pela Proposição 2.2(d) concluímos que, $\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\lambda_i=$ $S_1(B_k)$. Assim, temos

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} S_1(B_i,B_k)^2&=(n-1)S_1(B_k)^2-2S_1(B_k)^2+\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\lambda_i^2\\&=(n-3)S_1(B_k)^2+\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\lambda_i^2.\end{aligned}$$

Sabemos que $\left(\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\lambda_i\right)^2 = \sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\lambda_i^2 + 2S_2(B_k)$, logo $\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\lambda_i^2 = S_1(B_k)^2 - 2S_2(B_k)$. De onde obtemos que

$$\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2 = (n-2)S_1(B_k)^2 - 2S_2(B_k).$$

Logo,

$$\frac{\displaystyle\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2}{4S_1(B_k)^2 + \displaystyle\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2} = \frac{(n-2)S_1(B_k)^2 - 2S_2(B_k)}{(n+2)S_1(B_k)^2 - 2S_2(B_k)}.$$

Pela Proposição 2.2(d), $S_2(B_k) = S_2(B) - \lambda_k S_1(B_k)$, e por hipótese $S_2(B) = 0$, então $S_2(B_k) = -\lambda_k S_1(B_k)$. Assim,

$$(n-2)S_1(B_k)^2 - 2S_2(B_K) = (n-2)S_1(B_k)^2 + 2\lambda_k S_1(B_k)$$

e

$$(n+2)S_1(B_k)^2 - 2S_2(B_K) = (n+2)S_1(B_k)^2 + 2\lambda_k S_1(B_k).$$

De onde,

$$\frac{(n-2)S_1(B_k)^2 - 2S_2(B_k)}{(n+2)S_1(B_k)^2 - 2S_2(B_k)} = \frac{S_1(B_k)\left[(n-2)S_1(B_k) + 2\lambda_k\right]}{S_1(B_k)\left[(n+2)S_1(B_k) + 2\lambda_k\right]};$$

e como $S_1(B_k) \neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{(n-2)S_1(B_k)^2 - 2S_2(B_k)}{(n+2)S_1(B_k)^2 - 2S_2(B_k)} &= \frac{\left[(n-2)S_1(B_k) + 2\lambda_k\right]}{\left[(n+2)S_1(B_k) + 2\lambda_k\right]}\\ &= 1 - \frac{4S_1(B_k)}{(n+2)S_1(B_k) + 2\lambda_k}\\ &= 1 - \frac{4\left[S_1(B) - \lambda_k\right]}{\left[(n+2)S_1(B) - n\lambda_k\right]}.\end{aligned}$$

■

2.2 Estimativas

Lema 2.5. *Seja V um espaço vetorial com produto interno real n dimensional e seja $B \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear auto-adjunto. Fixado um valor de r e para qualquer $j \geq 2$*

$$B^j P_r(B) = (-1)^{j-1} P_{r+j-1}(B)B + \sum_{k=0}^{j-2} (-1)^k S_{r+1+k}(B) B^{j-k-1}.$$

(Considerando que $\sum_{k=0}^{-1} (-1)^k S_{r+1+k}(B) B^{-k} = 0$, nossa igualdade será verdadeira para todo $j \geq 1$).

Demonstração. A prova será feita por indução em j; para isto provaremos o

Caso $j = 1$: significa mostrar que nossa hipótese indutiva é valida para $j = 1$. Com efeito,

$$BP_r(B) = 0 + (-1)^0 P_r(B)B.$$

De fato, a igualdade acima é satisfeita (veja a Observação 1.30).

Caso $j = 2$: significa mostrar que nossa hipótese indutiva é valida para $j = 2$. Com efeito,

$$\begin{aligned} B^2 P_r(B) &= \sum_{k=0}^{0} (-1)^k S_{r+1+k}(B) B^{1-k} + (-1)^1 P_{r+1}(B)B \\ &= S_{r+1}(B)B - P_{r+1}(B)B. \end{aligned}$$

Restá apenas mostrar a veracidade da igualdade acima; com efeito, usando a Proposição 1.29 temos

$$P_{r+1}(B) = S_{r+1}I - BP_r(B);$$

equivalentemente,

$$BP_r(B) = S_{r+1}I - P_{r+1}(B);$$

multiplicando ambos os membros desta igualdade, à esquerda, por B, obtemos

$$B^2 P_r(B) = S_{r+1}B - BP_{r+1}(B);$$

como $BP_{r+1}(B) = P_{r+1}(B)B$ (veja a Observação 1.30),

$$B^2 P_r(B) = S_{r+1}B - P_{r+1}(B)B.$$

<u>Caso $j = k$</u>: Suponhamos que nossa hipótese de indução seja verdadeira para $j = k$, isto é,

$$B^k P_r(B) = (-1)^{k-1} P_{r+k-1}(B)B + \sum_{l=0}^{k-2} (-1)^l S_{r+1+l}(B)B^{k-l-1}.$$

<u>Caso $j = k+1$</u>: pela comutatividade de qualquer $P_j(B)$ com B (veja a Observação 1.30), nossa hipótese de indução é equivalente a

$$B^k P_r(B) = (-1)^{k-1}\ B\ P_{r+k-1}(B) + \sum_{l=0}^{k-2} (-1)^l S_{r+1+l}(B)B^{k-l-1};$$

multiplicando ambos os membros desta igualdade, à esquerda, por B, obtemos

$$B^{k+1} P_r(B) = (-1)^{k-1} \left(B^2 P_{r+k-1}(B)\right) + \sum_{l=0}^{k-2} (-1)^l S_{r+1+l}(B)B^{k-l};$$

como nossa hipótese indutiva é valida para $j = 2$, então $B^2 P_{r+k-1}(B) = S_{r+k}(B)B - P_{r+k}(B)B$. Substituindo esta relação na igualdade acima,

$$\begin{aligned} B^{k+1} P_r(B) = (-1)^{k-1} &\left(S_{r+k}(B)B - P_{r+k}(B)B\right) \\ &+ \sum_{l=0}^{k-2} (-1)^l S_{r+1+l}(B)B^{k-l}; \end{aligned}$$

simplificando,

$$\begin{aligned} B^{k+1} P_r(B) = (-1)^k P_{r+k}(B)B &+ (-1)^{k-1} S_{r+k}(B)B \\ &+ \sum_{l=0}^{k-2} (-1)^l S_{r+1+l}(B)B^{k-l}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$B^{k+1} P_r(B) = (-1)^k P_{r+k}(B)B + \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l S_{r+1+l}(B)B^{k-l}.$$

∎

Teorema 2.6. *Seja V um espaço vetorial com produto interno real n dimensional e seja $B \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear auto-adjunto. Então:*

a) $$\|P_r(B)\|^2 = (n-r)S_r(B)^2 - (r+1)S_{r-1}(B)\ S_{r+1}(B) -$$
$$\sum_{j=2}^{n}(r+j)S_{r-j}(B)\ S_{r+j}(B) + \sum_{j=2}^{n}(-1)^j S_{r-j}(B)\sum_{k=0}^{j-2}(-1)^k S_{r+1+k}(B)\mathit{traço}(B^{\,j-k-1});$$

b) $$\mathit{traço}\left(B\ P_r(B)^2\right) = (r+1)S_r(B)S_{r+1}(B) + \sum_{j=2}^{r+1}(r+j)S_{r-j+1}(B)S_{r+j}(B)$$
$$-\sum_{j=2}^{r+1}(-1)^j S_{r-j+1}(B)\left\{\sum_{k=0}^{j-2}(-1)^k S_{r+1+k}(B)\ \mathit{traço}(B^{j-k-1})\right\};$$

c) $$\|B\ P_r(B)\|^2 = -\sum_{j=2}^{r+2}(r+j)S_{r-j+2}(B)\ S_{r+j}(B) +$$
$$\sum_{j=2}^{r+2}(-1)^j S_{r-j+2}(B)\left\{\sum_{k=0}^{j-2}(-1)^k S_{r+1+k}(B)\ \mathit{traço}\left(B^{j-k-1}\right)\right\}.$$

Demonstração.

a) Pela Definição 1.28,

$$P_r(B) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j S_{r-j}(B)\ B^j;$$

multiplicando ambos os membros desta igualdade, à direita, por $P_r(B)$, obtemos

$$P_r(B)^2 = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j S_{r-j}(B)\ B^j\ P_r(B).$$

Tomando o traço nesta última igualdade, temos:

$$\text{traço}\left(P_r(B)^2\right) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j S_{r-j}(B)\ \text{traço}\left(B^j\ P_r(B)\right),$$

logo,

$$\text{traço}\left(P_r(B)^2\right) = S_r(B)\text{traço}\left(P_r(B)\right) - S_{r-1}(B)\text{traço}\left(BP_r(B)\right) +$$
$$\sum_{j=2}^{n}(-1)^j S_{r-j}(B)\ \text{traço}\left(B^j\ P_r(B)\right).$$

Pelos items (d) e (e) da Proposição 1.33,

$$\text{(2.3)} \quad \text{traço}\left(P_r(B)^2\right) = (n-r)S_r(B)^2 - (r+1)S_{r-1}(B)\, S_{r+1}(B) + \sum_{j=2}^{n}(-1)^j S_{r-j}(B)\, \text{traço}\left(B^j\, P_r(B)\right).$$

Tomando o traço na expressão do Lema 2.5 e substituindo na última igualdade, obtemos

$$\text{traço}\left(P_r(B)^2\right) = (n-r)S_r(B)^2 - (r+1)S_{r-1}(B)\, S_{r+1}(B) +$$
$$\sum_{j=2}^{n}(-1)^j S_{r-j}(B)\left\{(-1)^{j-1}(r+j)\, S_{r+j}(B) + \sum_{k=0}^{j-2}(-1)^k S_{r+1+k}(B)\, \text{traço}\left(B^{j-k-1}\right)\right\};$$

finalmente,

$$\|P_r(B)\|^2 = (n-r)S_r(B)^2 - (r+1)S_{r-1}(B)\, S_{r+1}(B) - \sum_{j=2}^{n}(r+j)S_{r-j}(B)S_{r+j}(B)$$
$$+ \sum_{j=2}^{n}(-1)^j S_{r-j}(B)\left\{\sum_{k=0}^{j-2}(-1)^k S_{r+1+k}(B)\, \text{traço}(B^{j-k-1})\right\}.$$

b) Pela Definição 1.28

$$P_r(B) = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j\, S_{r-j}(B)\, B^j;$$

multiplicando ambos os membros desta igualdade, à direita, por $P_r(B)$, obtemos

$$P_r(B)^2 = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j\, S_{r-j}(B)\, B^j\, P_r(B);$$

multiplicando ambos os membros desta igualdade, à esquerda, por B, obtemos

$$B\, P_r(B)^2 = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j\, S_{r-j}(B)\, B^{j+1}\, P_r(B)$$
$$= S_r(B)\, B\, P_r(B) + \sum_{j=1}^{r}(-1)^j\, S_{r-j}(B)\, B^{j+1}\, P_r(B);$$

tomando o traço nesta última igualdade, temos

$$\text{traço}(B\, P_r(B)^2) = S_r(B)\text{traço}(B\, P_r(B)) + \sum_{j=1}^{r}(-1)^j\, S_{r-j}(B)\, \text{traço}(B^{j+1}\, P_r(B)),$$

pelo item (e) da Proposição 1.33

$$\text{traço}(B\ P_r(B)^2) = (r+1)S_r(B)S_{r+1}(B) + \sum_{j=1}^{r}(-1)^j\ S_{r-j}(B)\ \text{traço}(B^{j+1}\ P_r(B));$$

logo,
(2.4)

$$\text{traço}(B\ P_r(B)^2) = (r+1)S_r(B)S_{r+1}(B) - \sum_{j=2}^{r+1}(-1)^j\ S_{r-j+1}(B)\ \text{traço}(B^j\ P_r(B)).$$

Tomando o traço na expressão do Lema 2.5 e substituindo na última igualdade, obtemos

$$\text{traço}\left(B\ P_r(B)^2\right) = (r+1)S_r(B)S_{r+1}(B) -$$
$$\sum_{j=2}^{r+1}(-1)^j S_{r-j+1}(B)(-1)^{j-1}(r+j)\ S_{r+j}(B) + \sum_{k=0}^{j-2}(-1)^k S_{r+1+k}(B)\ \text{traço}\left(B^{j-k-1}\right);$$

finalmente,

$$\begin{aligned}\text{traço}\left(B\ P_r(B)^2\right) &= (r+1)S_r(B)S_{r+1}(B) + \sum_{j=2}^{r+1}(r+j)S_{r-j+1}(B)S_{r+j}(B)\\ &- \sum_{j=2}^{r+1}(-1)^j S_{r-j+1}(B)\left\{\sum_{k=0}^{j-2}(-1)^k S_{r+1+k}(B)\ \text{traço}(B^{j-k-1})\right\}.\end{aligned}$$

c) Pela Definição 1.28,

$$P_r(B) = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j\ S_{r-j}(B)\ B^j;$$

multiplicando ambos os membros desta igualdade, à direita, por $P_r(B)$, obtemos

$$P_r(B)^2 = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j\ S_{r-j}(B)\ B^j\ P_r(B);$$

multiplicando ambos os membros desta igualdade, à esquerda, por B^2, obtemos

$$B^2\ P_r(B)^2 = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j\ S_{r-j}(B)\ B^{j+2}\ P_r(B);$$

tomando o traço nesta última igualdade, temos

$$\text{traço}(B^2\, P_r(B)^2) = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j\, S_{r-j}(B)\, \text{traço}(B^{j+2}\, P_r(B)),$$

de onde,

$$\|B\, P_r(B)\|^2 = \sum_{j=2}^{r+2}(-1)^j\, S_{r-j+2}(B)\, \text{traço}(B^j\, P_r(B)). \tag{2.5}$$

Tomando o traço no Lema 2.5 e substituindo na última igualdade, tem-se

$$\|B\, P_r(B)\|^2 = \sum_{j=2}^{r+2}(-1)^j S_{r-j+2}(B)\Big\{(-1)^{j-1}(r+j)\, S_{r+j}(B) + \sum_{k=0}^{j-2}(-1)^k S_{r+1+k}(B)\, \text{traço}\left(B^{j-k-1}\right)\Big\}.$$

Logo,

$$\|B\, P_r(B)\|^2 = -\sum_{j=2}^{r+2}(r+j)S_{r-j+2}(B)\, S_{r+j}(B) + \sum_{j=2}^{r+2}(-1)^j S_{r-j+2}(B)\Big\{\sum_{k=0}^{j-2}(-1)^k S_{r+1+k}(B)\, \text{traço}\left(B^{j-k-1}\right)\Big\}.$$

∎

Observação 2.7. *Como aplicação do teorema anterior é fácil obter:*

$\|P_1(B)\|^2 = (n-1)S_1(B)^2 - 2S_2(B).$
$\|P_2(B)\|^2 = (n-2)S_2(B)^2 - 2S_1(B)S_3(B) - 4S_4(B).$
$\|P_3(B)\|^2 = (n-3)S_3(B)^2 - 2S_2(B)S_4(B) - 4S_1(B)S_5(B) - 6S_6(B).$
$\|P_4(B)\|^2 = (n-4)S_4(B)^2 - 2S_3(B)S_5(B) - 4S_2(B)S_6(B) - 6S_1(B)S_7(B) - 8S_8(B).$
$\|P_5(B)\|^2 = (n-5)S_5(B)^2 - 2S_4(B)S_6(B) - 4S_3(B)S_7(B) - 6S_2(B)S_8(B) - 8S_1(B)S_9(B) - 10S_{10}(B).$

Lema 2.8. *Seja V um espaço vetorial com produto interno real n dimensional e seja $B \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear auto-adjunto. Para quaisquer inteiros r e t, temos a seguinte identidade:*

$$\begin{aligned} \textit{traço}\Big(P_r(B)\, P_t(B)\Big) &= (n-t)\, S_r(B)\, S_t(B) - \textit{traço}\Big(P_{r-1}(B)\, B\, P_t(B)\Big) \\ &= (n-r)\, S_r(B)\, S_t(B) - \textit{traço}\Big(P_{t-1}(B)\, B\, P_r(B)\Big). \end{aligned}$$

Demonstração. Pela Observação 1.30,

$$P_r(B) = S_r(B)I - P_{r-1}(B)\ B;$$

multiplicando ambos os membros desta igualdade, à direita, por $P_t(B)$, obtemos

$$P_r(B)P_t(B) = S_r(B)P_t(B) - P_{r-1}(B)\ B\ P_t(B);$$

tomando o traço em ambos lados desta igualdade temos:

$$\text{traço}\Big(P_r(B)P_t(B)\Big) = S_r(B)\text{traço}\Big(P_t(B)\Big) - \text{traço}\Big(P_{r-1}(B)\ B\ P_t(B)\Big);$$

o resultado segue-se como conseqüência da Proposição 1.33(d), isto é,

$$\text{traço}\Big(P_r(B)P_t(B)\Big) = (n-t)\ S_r(B)\ S_t(B) - \text{traço}\Big(P_{r-1}(B)\ B\ P_t(B)\Big).$$

Se na igualdade acima trocamos os parâmetros r e t e notamos que $\text{traço}\Big(P_r(B)P_t(B)\Big) = \text{traço}\Big(P_t(B)P_r(B)\Big)$, conseguimos

$$\text{traço}\Big(P_r(B)\ P_t(B)\Big) = (n-r)\ S_r(B)\ S_t(B) - \text{traço}\Big(P_{t-1}(B)\ B\ P_r(B)\Big).$$

■

Corolário 2.9. *Seja V um espaço vetorial com produto interno real n dimensional e seja $B \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear auto-adjunto. Para quaisquer inteiros r e t, temos:*

$$\textit{traço}\Big(P_{r-1}(B)\ B\ P_t(B)\Big) - \textit{traço}\Big(P_{t-1}(B)\ B\ P_r(B)\Big) = (r-t)\ S_r(B)\ S_t(B).$$

Demonstração. Pela Observação 1.30,

$$P_t(B) = S_t(B)I - P_{t-1}(B)\ B;$$

multiplicando ambos os membros desta igualdade, à direita, por $P_r(B)$, obtemos

$$P_t(B)P_r(B) = S_t(B)P_r(B) - P_{t-1}(B)\ B\ P_r(B);$$

tomando o traço em ambos lados na igualdade acima temos:

$$\text{traço}\Big(P_t(B)P_r(B)\Big) = (n-r)\ S_t(B)\ S_r(B) - \text{traço}\Big(P_{t-1}(B)\ B\ P_r(B)\Big).$$

Agora, na demonstração do Lema 2.8 mostramos que

$$\text{traço}\Big(P_r(B)\ P_t(B)\Big) = (n-t)\ S_r(B)\ S_t(B) - \text{traço}\Big(P_{r-1}(B)\ B\ P_t(B)\Big).$$

Pela comutatividade de operadores auto-adjuntos podemos comparar estas duas últimas igualdades, para obter:

$$(r-t)\ S_r(B)\ S_t(B) = \text{traço}\Big(P_{r-1}(B)\ B\ P_t(B)\Big) - \text{traço}\Big(P_{t-1}(B)\ B\ P_r(B)\Big).$$

■

Corolário 2.10. *Seja V um espaço vetorial com produto interno real n dimensional e seja $B \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear auto-adjunto. Então:*

a) $$\textit{traço}\Big(P_{r-1}(B)\ B\ P_{r-k_0}(B)\Big) - \textit{traço}\Big(P_{r-k_0-1}(B)\ B\ P_r(B)\Big) = k_0\ S_{r-k_0}(B)\ S_r(B),$$

para quaisquer $r,\ k_0 \in \mathbb{Z}$;

b) $$\textit{traço}\Big(P_{r-1}(B)\ B\ P_1(B)\Big) = (r+1)S_{r+1}(B) + (r-1)S_1(B)\ S_r(B),$$

para todo $r \in \mathbb{Z}$;

c) $$\textit{traço}\Big(P_{r-2}(B)\ B\ P_r(B)\Big) = \textit{traço}\Big(BP_{r-1}(B)^2\Big) - S_{r-1}(B)\ S_r(B),$$

para todo $r \in \mathbb{Z}$;

d) $$\textit{traço}\Big(P_{r-1}(B)\ B\ P_2(B)\Big) = (r+2)S_{r+2}(B) + rS_1(B)S_{r+1}(B) + (r-2)S_2(B)\ S_r(B),$$

para todo $r \in \mathbb{Z}$;

e) $$S_r(B)S_t(B) = 0 \Longleftrightarrow \textit{traço}\Big(P_{r-1}(B)BP_t(B)\Big) = \textit{traço}\Big(P_{t-1}(B)BP_r(B)\Big),$$

para qualquer $t \neq r$.

Demonstração.

a) Basta fazermos $t = r - k_0$, no Corolário 2.9.

b) Fazendo $k_0 = r - 1$ no item (a), temos

$$\text{traço}\Big(P_{r-1}(B)\ B\ P_1(B)\Big) = \text{traço}\Big(P_0(B)\ B\ P_r(B)\Big) + (r-1)S_1(B)S_r(B);$$

o resultado segue-se pela Proposição 1.33(e).

c) Fazemos $t = r - 1$ no Corolário 2.9.

d) Fazendo $k_0 = r - 2$ no item (a), temos

$$\text{traço}\Big(P_{r-1}(B)\ B\ P_2(B)\Big) = \text{traço}\Big(P_1(B)\ B\ P_r(B)\Big) + (r-2)S_2(B)S_r(B);$$

como o resultado do item (b) é válido para qualquer r, segue-se que

$$\text{traço}\Big(P_r(B)\ B\ P_1(B)\Big) = (r+2)S_{r+2}(B) + rS_1(B)\ S_{r+1}(B).$$

Agora substitua esta expressão na igualdade acima.

e) É conseqüência imediata do Corolário 2.9.

■

Teorema 2.11. *Considere V um espaço vetorial com produto interno real n dimensional e $B \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear auto-adjunto. Para quaisquer inteiros r e k, temos:*

$$\textit{traço}\Big[P_{r-1}(B)\ B\ P_k(B)\Big] = \sum_{j=0}^{k}(r+k-2j)\ S_{r+k-j}(B)\ S_j(B).$$

Demonstração. Provaremos esta identidade por indução em k.

- No Corolário 2.10(b) foi verificada a validez de nossa hipótese indutiva para o caso $k=1$ e qualquer valor de $r \in \mathbb{Z}$.

- Suponhamos que para qualquer $r \in \mathbb{Z}$ e algum $k \in \mathbb{Z}$,

$$\text{traço}\Big[P_{r-1}(B)\ B\ P_k(B)\Big] = \sum_{j=0}^{k}(r+k-2j)\ S_{r+k-j}(B)\ S_j(B).$$

- Temos que mostrar que nossa hipótese indutiva é valida para $k+1$.
  Fazendo $t = k+1$ no Corolário 2.9 temos que

$$\text{traço}\Big[P_{r-1}(B)\ B\ P_{k+1}(B)\Big] = (r-k-1)S_r(B)S_{k+1}(B) + \text{traço}\Big[P_k(B)\ B\ P_r(B)\Big];$$

  como nossa hipótese indutiva é valida para qualquer $r \in \mathbb{Z}$, temos

$$\text{traço}\Big[P_{r-1}(B)\ B\ P_{k+1}(B)\Big] = (r-k-1)S_r(B)S_{k+1}(B) + \sum_{j=0}^{k}(r+1+k-2j)\ S_{r+1+k-j}(B)\ S_j(B).$$

  Logo,

$$\text{traço}\Big[P_{r-1}(B)\ B\ P_{k+1}(B)\Big] = \sum_{j=0}^{k+1}(r+1+k-2j)\ S_{r+1+k-j}(B)\ S_j(B).$$

■

Corolário 2.12. *Considere V um espaço vetorial com produto interno real n dimensional e $B \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear auto-adjunto. Para quaisquer inteiros r e t, temos:*

$$\begin{aligned}\textit{traço}\Big(P_r(B)\ P_t(B)\Big) &= (n-t)\ S_r(B)\ S_t(B) - \sum_{j=0}^{t}(r+t-2j)\ S_{r+t-j}(B)\ S_j(B)\\ &= (n-r)\ S_r(B)\ S_t(B) - \sum_{j=0}^{r}(r+t-2j)\ S_{r+t-j}(B)\ S_j(B).\end{aligned}$$

Demonstração. É conseqüência imediata do Teorema 2.11 e do Lema 2.8. ■

Corolário 2.13. *Considere V um espaço vetorial com produto interno real n dimensional e $B \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear auto-adjunto. Para qualquer inteiro r, temos:*

$$traço\Big[P_{r-1}(B)\ B\ P_r(B)\Big] = 2\sum_{j=0}^{r-1}(r-j)\ S_{2r-j}(B)\ S_j(B).$$

Demonstração. É somente considerar $k = r$ no Teorema 2.11. ■

Corolário 2.14. *Seja V um espaço vetorial com produto interno real n dimensional e seja $B \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear auto-adjunto. Para qualquer $r \in \{1, \cdots, n\}$, temos que*

$$\|P_r(B)\|^2 = (n-r)\ S_r(B)^2 - 2\sum_{j=0}^{r-1}(r-j)\ S_j(B)\ S_{2r-j}(B)\ .$$

Demonstração. Pela Observação 1.30,

$$P_r(B) = S_r(B)I - P_{r-1}(B)B;$$

multiplicando à direita ambos os membros da igualdade acima por $P_r(B)$, temos

$$P_r(B)^2 = S_r(B)P_r(B) - P_{r-1}(B)BP_r(B);$$

tomando o traço em ambos lados desta igualdade, temos

$$\text{traço}\Big(P_r(B)^2\Big) = S_r(B)\text{traço}\Big(P_r(B)\Big) - \text{traço}\Big(P_{r-1}(B)BP_r(B)\Big);$$

pela Proposição 1.33(d),

$$\text{traço}\Big(P_r(B)^2\Big) = (n-r)S_r(B)^2 - \text{traço}\Big(P_{r-1}(B)BP_r(B)\Big); \tag{2.6}$$

o resultado segue-se como conseqüência do Teorema 2.11. ■

Corolário 2.15. *Seja V um espaço vetorial com produto interno real n dimensional e seja $B \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear auto-adjunto. Para qualquer $r \in \{1, \cdots, n\}$, temos que*

$$\|B\ P_{r-1}(B)\|^2 = r\ S_r(B)^2 - 2\sum_{j=0}^{r-1}(r-j)\ S_j(B)\ S_{2r-j}(B)\ .$$

Demonstração. Usando a Proposição 1.29, temos

$$P_r(B) = S_r\ I - BP_{r-1}(B);$$

multiplicando ambos os membros desta igualdade por $P_r(B)$, temos

$$\begin{aligned}P_r(B)^2 &= (S_r\, I - BP_{r-1}(B)) \circ (S_r\, I - BP_{r-1}(B)) \\ &= S_r I \circ (S_r\, I - BP_{r-1}(B)) - BP_{r-1}(B) \circ (S_r\, I - BP_{r-1}(B)).\end{aligned}$$

Logo,

$$P_r(B)^2 = BP_{r-1}(B)BP_{r-1}(B) - 2S_r(B)\, BP_{r-1}(B) + S_r(B)^2 I.$$

Tomando o traço em ambos lados da última igualdade acima, temos

$$\text{traço}\left(P_r(B)^2\right) = \text{traço}\,(BP_{r-1}(B)BP_{r-1}(B)) - 2S_r(B)\text{traço}\,(BP_{r-1}(B)) + nS_r(B)^2;$$

pela Proposição 1.33(e), segue-se que

$$\text{traço}\left(P_r(B)^2\right) = \text{traço}\,(BP_{r-1}(B)BP_{r-1}(B)) + (n-2r)S_r(B)^2.$$

Agora pela Observação 1.30,

$$\text{traço}\left(P_r(B)^2\right) = \text{traço}\left(BP_{r-1}(B)^2 B\right) + (n-2r)S_r(B)^2$$

e por propriedade do traço, é claro que

$$\text{traço}\left(P_r(B)^2\right) = \text{traço}\left(B^2 P_{r-1}(B)^2\right) + (n-2r)S_r(B)^2.$$

Por outro lado, pela Definição 1.31

$$\|P_r(B)\|^2 = \|B\, P_{r-1}(B)\|^2 + (n-2r)S_r(B)^2. \tag{2.7}$$

O resultado agora segue-se aplicando-se o Corolário 2.14 a esta última equação. ∎

Corolário 2.16. *Seja V um espaço vetorial com produto interno real n dimensional e seja $B \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear auto-adjunto. Então*

$$\textit{traço}\Big(P_{r-1}(B)\; B\; P_r(B)\Big) \leq (n-r)S_r(B)^2$$

e

$$\textit{traço}\Big(P_{r-1}(B)\; B\; P_r(B)\Big) \leq rS_r(B)^2.$$

Logo,

$$\textit{traço}\Big(P_{r-1}(B)\; B\; P_r(B)\Big) \leq \min\{r,\ n-r\}\; S_r(B)^2.$$

Em particular, se $S_r(B) = 0$, então $\textit{traço}\Big(P_{r-1}(B)\; B\; P_r(B)\Big) \leq 0$.

Demonstração. Pela Observação 1.30,

$$P_r(B) = S_r(B)I - P_{r-1}(B)B;$$

multiplicando à direita ambos os membros da igualdade acima por $P_r(B)$, temos

$$P_r(B)^2 = S_r(B)P_r(B) - P_{r-1}(B)BP_r(B);$$

assim,

$$P_{r-1}(B)BP_r(B) = S_r(B)P_r(B) - P_r(B)^2.$$

Tomando o traço em ambos lados na igualdade acima, temos

$$\text{traço}\Big(P_{r-1}(B)BP_r(B)\Big) = S_r(B)\,\text{traço}\Big(P_r(B)\Big) - \text{traço}\Big(P_r(B)^2\Big);$$

usando a Proposição 1.33(d), temos

$$\text{traço}\Big(P_{r-1}(B)BP_r(B)\Big) = (n-r)S_r(B)^2 - \text{traço}\Big(P_r(B)^2\Big).$$

Assim conseguimos a primeira desigualdade. A segunda desigualdade segue-se utilizando-se a expressão (2.7) na igualdade acima; temos

$$\text{traço}\Big(P_{r-1}(B)BP_r(B)\Big) = (n-r)S_r(B)^2 - \parallel BP_{r-1}(B) \parallel^2 - (n-2r)S_r(B)^2,$$

logo

$$\text{traço}\Big(P_{r-1}(B)BP_r(B)\Big) = rS_r(B)^2 - \parallel BP_{r-1}(B) \parallel^2 . \tag{2.8}$$

■

2.3 Polinômios Simétricos da Composição de Operadores

Considere V um espaço vetorial com produto interno real n dimensional e sejam $A, B \in \mathcal{L}(V)$ operadores lineares auto-adjuntos e simultaneamente diagonalizáveis; seja $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base ortonormal para V formada pelos auto-vectores de A e B simultaneamente. Usaremos a notação $S_k(AB)$ como sendo o $k-$ésimo polinômio simétrico elementar do operador $A \circ B$. Considere $\parallel \cdot \parallel$ como sendo a norma, definida em V, conforme a Definição 1.31. Então:

a) $S_1(AB) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \, \eta_i;$

b) $S_2(AB) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mu_i \, \eta_i \, \mu_j \, \eta_j;$

c) $\|AB\|^2 = S_1(AB)^2 - 2S_2(AB);$

d) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \Big(\mu_i \, \eta_i - \mu_j \, \eta_j\Big)^2 = (n-1)\, \|AB\|^2 - 2S_2(AB).$

Demonstração. Segundo nossas hipóteses consideremos a seguinte notação

$$A \, e_i = \mu_i \, e_i;$$
$$B \, e_i = \eta_i \, e_i;$$
$$AB \, e_i = \mu_i \, \eta_i \, e_i.$$

a) Pela Definição 1.24

$$S_1(AB) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \, \eta_i.$$

b) Pela Definição 1.24

$$S_2(AB) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mu_i \, \eta_i \, \mu_j \, \eta_j.$$

c) Pela Definição 1.23

$$S_1(AB) = \sum_{i=1}^{n} \langle ABe_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \, \eta_i;$$

de onde,

$$\Big(S_1(AB)\Big)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \, \eta_i\right)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 \, \eta_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mu_i \, \eta_i \, \mu_j \, \eta_j.$$

Da Definição 1.31, é facil ver que

$$\Big(S_1(AB)\Big)^2 = \|AB\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mu_i \, \eta_i \, \mu_j \, \eta_j.$$

d) Vê-se imediatamente que

$$\Big(\mu_i\,\eta_i - \mu_j\,\eta_j\Big)^2 = \mu_i^2\,\eta_i^2 + \mu_j^2\,\eta_j^2 - 2\mu_i\,\eta_i\mu_j\,\eta_j;$$

assim,

$$\sum_{1\le i<j\le n}\Big(\mu_i\,\eta_i - \mu_j\,\eta_j\Big)^2 = \sum_{1\le i<j\le n}\Big(\mu_i^2\,\eta_i^2 + \mu_j^2\,\eta_j^2\Big) - 2\sum_{1\le i<j\le n}\mu_i\,\eta_i\mu_j\,\eta_j;$$

segundo nosso item (b),

$$\sum_{1\le i<j\le n}\Big(\mu_i\,\eta_i - \mu_j\,\eta_j\Big)^2 = \sum_{1\le i<j\le n}\Big(\mu_i^2\,\eta_i^2 + \mu_j^2\,\eta_j^2\Big) - 2S_2(AB);$$

é claro que

$$\sum_{1\le i<j\le n}\Big(\mu_i\,\eta_i - \mu_j\,\eta_j\Big)^2 = (n-1)\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2\,\eta_i^2 - 2S_2(AB).$$

■

2.4 Aplicações

2.4.1 Desigualdades

Teorema 2.17. *Cosidere $\overline{\mathbf{M}}^{n+1}$ uma variedade Riemanniana $(n+1)$-dimensional conexa e orientável. Dada uma hipersuperfície arbitrária, $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+1}$, valem as seguintes desigualdades:*

a)

$$|H_1(A)| \le \|\, A \,\| \le \sqrt{(n-1)S_1(A)^2 - 2S_2(A)} \qquad ,\forall n \ge 2;$$

b)

$$|\, Ricc\,(X,Y) - \overline{Ricc}\,(X,Y) + \langle\, \overline{R}\,(X,\mathbf{N})\,Y,\, \mathbf{N}\,\rangle \,| \le$$
$$\sqrt{2}\,\sqrt{S_2(A)^2 - S_1(A)S_3(A) - 2S_4(A)}\ \|\, X \,\|\ \|\, Y \,\| \qquad ,\forall n \ge 4$$

onde $\overline{R}$ é o tensor de curvatura do espaço ambiente, $\mathbf{N}$ é um campo vetorial unitário definido ao longo de $x(\mathbf{M})$, A é a segunda forma fundamental da imersão e para qualquer $X, Y \in T\mathbf{M}$.
Além do mais, esta cota não pode ser melhorada.

c) *Em particular se* $\overline{\mathrm{M}}^{n+1} = \overline{\mathrm{M}}^{n+1}(c)$ *é uma variedade Riemannina com curvatura seccional constante c, então*

$$| \ Ricc\,(X) - nc \ | \leq \sqrt{2}\,\sqrt{S_2(A)^2 - S_1(A)S_3(A) - 2S_4(A)} \qquad , \forall n \geq 4$$

para qualquer $X \in T\mathrm{M}$ *unitário, onde A é a segunda forma fundamental da imersão.*

Demonstração.

a) De fato, denotemos por $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ os valores principais da imersão num ponto; então

$$|S_1| = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq n\,\|A\|.$$

Por outro lado, da equação (2.7) temos

$$\|A\|^2 = \|P_1(A)\|^2 - (n-2)S_1^2 \leq \|P_1(A)\|^2;$$

pela Observação 2.7

$$\|A\|^2 \leq (n-1)S_1(A)^2 - 2S_2(A).$$

b) A partir da equação de Gauss e da definição do tensor de Ricci,

$$\mathrm{Ricc}(X,Y) = \overline{\mathrm{Ricc}}(X,Y) - \langle\, \overline{R}\,(X,\mathbf{N})\,Y,\ \mathbf{N}\,\rangle + nH\langle AX, Y\rangle - \langle AX, AY\rangle;$$

onde $\overline{R}$ é o tensor de curvatura do espaço ambiente, $\mathbf{N}$ é um campo vetorial unitário definido ao longo de $x(\mathrm{M})$, A é a segunda forma fundamental da imersão e para qualquer $X, Y \in T\mathrm{M}$.

Por ser A auto-adjunta,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ricc}(X,Y) &= \overline{\mathrm{Ricc}}(X,Y) - \langle\, \overline{R}\,(X,\mathbf{N})\,Y,\ \mathbf{N}\,\rangle + S_1(A)\langle AX, Y\rangle - \langle A^2X, Y\rangle \\ &= \overline{\mathrm{Ricc}}(X,Y) - \langle\, \overline{R}\,(X,\mathbf{N})\,Y,\ \mathbf{N}\,\rangle + \langle S_1(A)AX - A^2X, Y\rangle;\end{aligned}$$

mas, $AP_1(A) = A \circ (S_1(A)I - A) = S_1(A)A - A^2$ de onde obtemos

$$\mathrm{Ricc}(X,Y) = \overline{\mathrm{Ricc}}(X,Y) - \langle\, \overline{R}\,(X,\mathbf{N})\,Y,\ \mathbf{N}\,\rangle + \langle A\,P_1(A)X, Y\rangle.$$

Logo,

$$|\ \mathrm{Ricc}(X,Y) - \overline{\mathrm{Ricc}}(X,Y) + \langle\, \overline{R}\,(X,\mathbf{N})\,Y,\ \mathbf{N}\,\rangle\ | = |\ \langle A\,P_1(A)X, Y\rangle\ |;$$

de onde,

$$| \operatorname{Ricc}(X,Y) - \overline{\operatorname{Ricc}}(X,Y) + \langle\, \overline{R}\,(X,\mathbf{N})\,Y,\ \mathbf{N}\,\rangle\,| \leq \ \|\, A\, P_1(A)\,\|\ \|\, X\,\|\ \|\, Y\,\|;$$

pelo Corolário 2.15,

$$| \operatorname{Ricc}(X,Y) - \overline{\operatorname{Ricc}}(X,Y) + \langle\, \overline{R}\,(X,\mathbf{N})\,Y,\ \mathbf{N}\,\rangle\,| \leq \\ \sqrt{2S_2(A)^2 - 2S_1(A)S_3(A) - 4S_4(A)}\ \|\, X\,\|\ \|\, Y\,\|\,.$$

Que esta cota não pode ser melhorada é consequencia da definição de norma.

c) Quando $\overline{\mathbf{M}}^{n+1} = \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ é uma variedade Riemannina com curvatura seccional constante c, então $\overline{R}(X,Y)Z$ é tangente a $\mathbf{M}$ para qualquer $X,Y,Z \in T\mathbf{M}$ de modo que $\langle\, \overline{R}\,(X,\mathbf{N})\,Y,\ \mathbf{N}\,\rangle = 0$. Também sabemos que $\overline{\operatorname{Ricc}}\,(X,Y) = c\,n\,\langle X,Y\rangle$. O resultado é uma conseqüência imediata de nosso item (b).

■

2.4.2 Condições para que L_r seja Elíptico

Consideremos $\mathbf{M}^n$ uma variedade conexa e diferenciável e $x : \mathbf{M}^n \to \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ uma imersão isométrica, onde $\overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ é de curvatura seccional constante c. Na Definição 1.39 introduzimos o operador diferencial de segunda ordem L_r.

Dizemos que L_r é elíptico em $\mathbf{M}$ quando P_r for definido positivo em $\mathbf{M}$, isto é, se todos os auto-valores de P_r são positivos, então L_r é elíptico.

Em [Reilly] Reilly indaga em que condições $P_r(A)$ é definido positivo. É sabido que se todos os valores próprios de A são positivos, então, $P_r(A)$ é definido positivo. Mas, mesmo na presença de valores próprios negativos podemos ter $P_r(A)$ positivo definido. Assim, o operador $L_r(f)$, em geral não é elíptico; algumas condições devem ser estabelecidas para assegurar sua elipticidade, como mostra o seguinte resultado de [HouLei]:
"*Seja* $\mathbf{M}$ *uma hipersuperfície em* $\mathbb{R}^{n+1}$ *com* $H_{r+1} = 0$, $1 \leq r < n-1$. *Então* L_r *é elíptico em* $p \in \mathbf{M}$ *se e somente se* $H_{r+2}(p) \neq 0$".

Nós obtemos outras condições para garantir a elipticidade de L_r; isto é, condição equivalente a $P_r(A)$ ser positivo definido.

Teorema 2.18. *Dada uma hipersuperfície* $x : \mathbf{M}^n \to \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$, *considere* A *sua segunda forma fundamental. Dado qualquer* $r \in \{1,\cdots,n-1\}$, *as seguintes afirmativas são verdadeiras:*

a) *Se* $\text{traço}\Big(P_{r-1}(A)\ A\ P_r(A)\Big) = 0$ *e* $S_r(A) > 0$ *em* $\mathbf{M}$, *então os auto-valores de* $P_r(A)$ *são* $> -(\sqrt{r}-1)S_r(A)$;

b) *Se traço*$\Big(P_{r-1}(A)\ A\ P_r(A)\Big) = 0$ *e* $S_r(A) < 0$ *em* $\mathbf{M}$, *então os auto-valores de* $P_r(A)$ *são* $> (\sqrt{r}+1)S_r(A)$;

Demonstração. Considere $\{e_1, \cdots, e_n\}$ a base ortonormal que diagonaliza A e $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ seus autovalores associados. Sem dúvida, $P_r(A)$ é simultaneamente diagonalizável com A. Segue-se da Proposição 1.33(i) que os autovalores de $P_r(A)$ são $\{S_r(A_i)\}_{i=1,\cdots,n}$.

a) De nossa hipótese e da identidade (2.8), segue-se que

$$r\ S_r(A)^2 = \|\ AP_{r-1}(A)\ \|^2 \geq \lambda_i^2\ S_{r-1}(A_i)^2 \qquad \forall i \in \{1, \cdots, n\};$$
$$r\ S_r(A)^2 \geq \lambda_i^2\ S_{r-1}(A_i)^2 \qquad \forall i \in \{1, \cdots, n\};$$

de forma equivalente,

$$\Big(\sqrt{r}\ S_r(A) - \lambda_i S_{r-1}(A_i)\Big)\Big(\sqrt{r}\ S_r(A) + \lambda_i S_{r-1}(A_i)\Big) \geq 0 \qquad \forall i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Suponhamos que $\exists\ j_0 \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $\sqrt{r}\ S_r(A) - \lambda_{j_0}\ S_{r-1}(A_{j_0}) \leq 0$; usando este fato na desigualdade acima, obtemos que $\sqrt{r}\ S_r(A) + \lambda_{j_0}\ S_{r-1}(A_{j_0}) \leq 0$. Destas duas inequações temos,

$$\sqrt{r}\ S_r(A) \leq \lambda_{j_0}\ S_{r-1}(A_{j_0}) \leq -\sqrt{r}\ S_r(A),$$

de onde $2\sqrt{r}\ S_r(A) \leq 0$, uma contradição. Logo,

$$\sqrt{r}\ S_r(A) - \lambda_i\ S_{r-1}(A_i) > 0 \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\},$$

de onde obtemos

$$\lambda_i\ S_{r-1}(A_i) < \sqrt{r}\ S_r(A);$$
$$\lambda_i\ S_{r-1}(A_i) < S_r(A) + \Big(\sqrt{r}\ S_r(A) - S_r(A)\Big);$$
$$-(\sqrt{r}-1)S_r(A) < S_r(A) - \lambda_i\ S_{r-1}(A_i).$$

Portanto,

$$-(\sqrt{r}-1)S_r(A) < S_r(A_i) \qquad , \forall i \in \{1, \cdots, n\}.$$

b) De nossa hipótese e da identidade (2.8), segue-se que

$$r\ S_r(A)^2 = \|\ AP_{r-1}(A)\ \|^2 \geq \lambda_i^2\ S_{r-1}(A_i)^2 \qquad \forall i \in \{1, \cdots, n\};$$
$$r\ S_r(A)^2 \geq \lambda_i^2\ S_{r-1}(A_i)^2 \qquad \forall i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Portanto,

$$\Big(\sqrt{r}\ S_r(A) - \lambda_i S_{r-1}(A_i)\Big)\Big(\sqrt{r}\ S_r(A) + \lambda_i S_{r-1}(A_i)\Big) \geq 0 \qquad \forall i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Suponhamos que $\exists\ j_0 \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $\sqrt{r}\ S_r(A) + \lambda_{j_0}\ S_{r-1}(A_{j_0}) \geq 0$; usando este fato na desigualdade acima, obtemos que $\sqrt{r}\ S_r(A) - \lambda_{j_0}\ S_{r-1}(A_{j_0}) \geq 0$. Destas duas inequações temos:

$$-\sqrt{r}\ S_r(A) \leq \lambda_{j_0}\ S_{r-1}(A_{j_0}) \leq \sqrt{r}\ S_r(A);$$

de onde $2\sqrt{r}\ S_r(A) \geq 0$, uma contradição. Logo,

$$\sqrt{r}\ S_r(A) + \lambda_i\ S_{r-1}(A_i) < 0 \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\},$$

de onde

$$\lambda_i\ S_{r-1}(A_i) < -\sqrt{r}\ S_r(A);$$

assim,

$$\lambda_i\ S_{r-1}(A_i) < S_r(A) + \left(-\sqrt{r}\ S_r(A) - S_r(A)\right)$$

e obtemos

$$(\sqrt{r} + 1) S_r(A) < S_r(A) - \lambda_i\ S_{r-1}(A_i).$$

Portanto,

$$(\sqrt{r} + 1) S_r(A) < S_r(A_i) \qquad , \forall i \in \{1, \cdots, n\}.$$

■

Observação 2.19. *Em [AdCS] foi provado o seguinte: "Seja $x : \mathbf{M}^n \to S^{n+1}(1)$ uma hipersuperfície fechada e orientável com curvatura escalar $R = 1$ (isto equivale a dizer que $S_2 = 0$). Assuma que S_1 não muda de sinal e escolha uma orientação em $\mathbf{M}$ para o qual*

$$S_1 \geq 0 \quad e \quad \|\sqrt{P_1(A)}\ A\|^2 \leq \textit{traço}\ P_1(A).$$

Então

(i) $\|\sqrt{P_1(A)}\ A\|^2 = \textit{traço}\ P_1(A)$.

(ii) ou $\mathbf{M}^n$ é uma subvariedade totalmente geodésica , ou $\mathbf{M}^n = S^{n_1}(r_1) \times S^{n_2}(r_2) \subset S^{n+1}(1)$, onde $n_1 + n_2 = n$, $r_1^2 + r_2^2 = 1$ e $\beta = (fracr_2 r_1)^2$ satisfaz

$$n_1(n_1 - 1)\beta^2 - 2n_1 n_2 + n_2(n_2 - 1) = 0.$$

Por outro lado, fazendo $r = 1$ no Teorema 2.18(a) temos: se traço$(P_0(A)\ A\ P_1(A)) = 0$ e $S_1(A) > 0$ em $\mathbf{M}$, então os auto-valores de $P_1(A)$ são todos positivos. Mas $P_0(A) A P_1(A) = A\ P_1(A)$ e da Proposição 1.33(e) segue-se que se $S_2 = 0$ e $S_1(A) > 0$ em $\mathbf{M}$. Assim, os auto-valores de $P_1(A)$ são todos positivos e portanto existe $\sqrt{P_1(A)}$. Isto mostra a importância do Teorema 2.18.

Observação 2.20. *Outra forma de enunciar o Teorema [HouLei] é a seguinte:*
Seja $\mathbf{M}$ *uma hipersuperfície em* $\mathbb{R}^{n+1}$ *com* $S_r = 0$, $2 \leq r < n$. *Então* L_{r-1} *é elíptico em* $p \in \mathbf{M}$ *se e somente se* $traço(P_{r-1}(A)\ A\ P_1(A))_{(p)} \neq 0$.
De fato, a condição $S_r = 0$ *aplicada no Corolário 2.10(b), mostra que*

$$traço(P_{r-1}(A)\ A\ P_1(A))_{(p)} = (r+1)S_{r+1}.$$

Em outras palavras, o enunciado deste teorema é equivalente a dizer:
Seja $\mathbf{M}$ *uma hipersuperfície em* $\mathbb{R}^{n+1}$ *com* $S_r = 0$, $2 \leq r < n$. *Então* L_{r-1} *é elíptico em* $p \in \mathbf{M}$ *se e somente se* $S_{r+1}(p) \neq 0$.

Teorema 2.21. *Dada uma hipersuperfície* $x : \mathbf{M}^n \to \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$, *considere* A *sua segunda forma fundamental.*

a) Se existe um ponto $p \in \mathbf{M}$ *tal que* $S_r(A) > 0$ *e* $S_{r+1}(A) = 0$, *então o operador* $P_r(A)$ *é não negativo em* p *(isto é,* $P_r(A) \geq 0$ *em* p*) ou equivalentemente o operador* L_r *é não negativo em* p *(isto é,* $L_r \geq 0$ *em* p*);*

b) Se existe um ponto $p \in \mathbf{M}$ *tal que* $S_r(A) < 0$ *e* $S_{r+1}(A) = 0$, *então o operador* $P_r(A)$ *é não positivo em* p *(isto é,* $P_r(A) \leq 0$ *em* p*) ou equivalentemente o operador* L_r *é não positivo em* p *(isto é,* $L_r \leq 0$ *em* p*).*

Demonstração.

a) Vamos mostrar que para cada j temos $S_r(A_j) \geq 0$ em p. Para isto, suponha que existe algum j_0 tal que $S_r(A_{j_0}) < 0$.

Por outro lado, para cada i, pela Proposição 2.2(d),

$$S_r(A_i, A_{j_0}) = S_r(A_{j_0}) - \lambda_i S_{r-1}(A_i, A_{j_0});$$

somando em i, temos

$$\sum_{i=1}^{n} S_r(A_i, A_{j_0}) = nS_r(A_{j_0}) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_{r-1}(A_i, A_{j_0}),$$

de onde obtemos

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j_0}}^{n} S_r(A_i, A_{j_0}) + S_r(A_{j_0}, A_{j_0}) = nS_r(A_{j_0}) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j_0}}^{n} \lambda_i S_{r-1}(A_i, A_{j_0}) - \lambda_{j_0} S_{r-1}(A_{j_0}, A_{j_0}).$$

Pela Definição 2.1,

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j_0}}^{n} S_r(A_i, A_{j_0}) + S_r(A_{j_0}) = nS_r(A_{j_0}) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j_0}}^{n} \lambda_i S_{r-1}(A_i, A_{j_0}) - \lambda_{j_0} S_{r-1}(A_{j_0});$$

pelos itens (f) e (i) da Proposição 2.2,

$$(n-1-r)S_r(A_{j_0}) + S_r(A_{j_0}) = nS_r(A_{j_0}) - rS_r(A_{j_0}) - \lambda_{j_0}S_{r-1}(A_{j_0});$$

daqui obtemos,

$$\lambda_{j_0}S_{r-1}(A_{j_0}) = 0.$$

Agora, pela Proposição 1.27(c) obtemos: $S_r(A) = S_r(A_{j_0})$ e por hipótese $0 < S_r(A) = S_r(A_{j_0})$. Mas isto contradiz nosso suposto de $S_r(A_{j_0}) < 0$. Mas isto equivale a dizer que L_r é não negativo em p.

b) Neste caso, vamos mostrar que para cada j temos $S_r(A_j) \leq 0$ em p. A prova é totalmente analoga ao item (a).

■

Observação 2.22. *Utilizamos o Teorema 2.21 como um dos elementos na demonstração do resultado que se segue.*
Seja $x : \mathbf{M}^n \to S^{n+1}(1)$ *uma hipersuperfície fechada e orientável com* $S_{k+1} = 0$ *e* $S_k > 0$ *em* $\mathbf{M}$ *e se*

$$\|\sqrt{P_k(A)}\, A\|^2 \leq \textit{traço}\ P_k(A),$$

temos que:

(i) $\|\sqrt{P_k(A)}\, A\|^2 = \textit{traço}\ P_k(A)$*;*

(ii) ou $\mathbf{M}^n$ *é uma hipersuperfície totalmente geodésica , ou* $\mathbf{M}^n$ *é um* $H_{k+1}(r)-$*toro.*

A demonstração não será incluída aqui.

Capítulo 3

Hipersuperfícies com $S_2 \equiv 0$

3.1 $H_k(r)$−toros

Dados $r \in (0,1)$ e $m \in \{1, \cdots, n-1\}$, consideremos as imersões canônicas de esferas

$$S^{n-m}(r) \subset \mathbb{R}^{n-m+1} \qquad \text{e} \qquad S^m(\sqrt{1-r^2}) \subset \mathbb{R}^{m+1},$$

com raios r e $\sqrt{1-r^2}$ e dimensões $n-m$ e m, respectivamente.
Considere a imersão produto $S^{n-m}(r) \times S^m(\sqrt{1-r^2}) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n-m+1} \times \mathbb{R}^{m+1}$.

A hipersuperfície $S^{n-m}(r) \times S^m(\sqrt{1-r^2}) \longrightarrow S^{n+1}(1)$ tem as seguintes curvaturas principais:

$$\lambda_1 = \cdots \lambda_{n-m} = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}$$

e

$$\lambda_{n-m+1} = \cdots \lambda_n = \frac{-r}{\sqrt{1-r^2}} .$$

Aplicando a Proposição 1.20 nestas curvaturas principais, temos que suas k−ésimas funções simétricas são dadas por

$$\begin{aligned} S_k &= \left(\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}\right)^k \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n-m}{k-i}\binom{m}{i} \left(\frac{r^2}{1-r^2}\right)^i \\ &= \left(\frac{1-r^2}{r^2}\right)^{\frac{k}{2}} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n-m}{k-i}\binom{m}{i} \left(\frac{r^2}{1-r^2}\right)^i . \end{aligned}$$

Fazendo $\theta^2 := \dfrac{r^2}{1-r^2}$, a igualdade acima toma a forma

$$S_k = \frac{1}{\theta^k} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n-m}{k-i}\binom{m}{i} \theta^{2i}; \tag{3.1}$$

também podemos expressar esta igualdade em termos da função hipergeométrica ${}_2F_1$ (veja a seção 1.4) como segue:

$$S_k = \frac{1}{\theta^k}\binom{n-m}{k}\, {}_2F_1(-k, -m, n-m-k+1; -\theta^2). \tag{3.2}$$

Por outro lado, expressando a equação (3.1) em termos de sua curvatura normalizada, H_k, temos a seguinte equação polinomial de grau $2k$ em θ:

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n-m}{k-i}\binom{m}{i}\, \theta^{2i} - \binom{n}{k} H_k\, \theta^k = 0. \tag{3.3}$$

Define-se um $H_k(r)$ toro como sendo um toro de Clifford com $k-$ésima função curvatura média H_k constante em todo ponto, onde seu raio r é dado por $r^2 = \dfrac{\theta^2}{1+\theta^2}$ e θ é raiz da equação polinomial com coeficientes constantes (3.3). Usando a definição de θ podemos expressar as curvaturas principais de um $H_k(r)-$toro como sendo:

$$\lambda_1 = \cdots \lambda_{n-m} = \frac{1}{\theta}$$

e

$$\lambda_{n-m+1} = \cdots \lambda_n = -\theta\ .$$

Por outro lado, a partir da Fórmula de Gauss, deduzimos que em toda imersão isométrica da forma $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{\,n+1}(c)$ sua curvatura de Ricci satisfaz

$$\mathrm{Ricc}(e_i) = c(n-1) + nH\langle Ae_i, e_i\rangle - \langle Ae_i, Ae_i\rangle,$$

onde A representa a segunda forma fundamental da imersão e $Ae_i = \lambda_i e_i$.

Em particular, num $H_k(r)-$toro temos

$$\|A\|^2 = (n-m)\, \frac{1}{\theta^2} + m\, \theta^2; \tag{3.4}$$

$$\mathrm{Ricci}(e_1) = \cdots \mathrm{Ricci}(e_{n-m}) = (n-m-1)\, \frac{1+\theta^2}{\theta^2}; \tag{3.5}$$

$$\mathrm{Ricci}(e_{n-m+1}) = \cdots \mathrm{Ricci}(e_n) = (m-1)\, (1+\theta^2). \tag{3.6}$$

A partir destas duas últimas equações, temos

$$\mathrm{Ricci}(e_j) = \theta^2\, \frac{m-1}{n-m-1}\, \mathrm{Ricci}(e_i), \tag{3.7}$$

para $i = 1, \cdots, n-m,\ j = n-m+1, \cdots, n$.

Afirmação 3.1. *Para qualquer $k \in \mathbb{N}^*$ temos que*

a) cada $H_k(r)$ toro da forma $S^{n-1}(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2}) \to S^{n+1}(1)$, com $H_k \equiv 0$, tem por raio $r = \sqrt{\frac{n-k}{n}}$;

b) cada $H_k(r)$ toro da forma $S^{n-2}(r) \times S^2(\sqrt{1-r^2}) \to S^{n+1}(1)$, com $H_k \equiv 0$, tem por raio $r = \sqrt{\dfrac{n-k}{n} \pm \dfrac{1}{n}\sqrt{\dfrac{k(n-k)}{n-1}}}$;

Em geral, cada $H_k(r)$ toro da forma $S^{n-m}(r) \times S^m(\sqrt{1-r^2}) \to S^{n+1}(1)$, com $H_k \equiv 0$, tem m valores possíveis para o raio r.

Demonstração.

a) Para um $H_k(r)$ toro da forma $S^{n-1}(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2}) \to S^{n+1}(1)$, temos que $m = 1$ e a equação (3.3) toma a forma

$$\binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k-1}\theta^2 - \binom{n}{k} H_k\, \theta^k = 0;$$

usando, nesta igualdade, a identidade $\binom{n-1}{k} = \frac{n-k}{k}\binom{n-1}{k-1}$, a igualdade acima toma a forma,

$$\left\{\frac{n-k}{k} - \theta^2\right\}\binom{n-1}{k-1} - \binom{n}{k} H_k\, \theta^k = 0.$$

Por hipótese, $H_k = 0$, donde $r^2 = 1 - \frac{k}{n} < 1$.

b) Para um $H_k(r)$ toro da forma $S^{n-2}(r) \times S^2(\sqrt{1-r^2}) \to S^{n+1}(1)$, temos que $m = 2$ e a equação (3.3) toma a forma

$$\binom{n-2}{k} - 2\binom{n-2}{k-1}\theta^2 + \binom{n-2}{k-2}\theta^4 - \binom{n}{k} H_k\, \theta^k = 0.$$

Usando, nesta igualdade, as identidades:

$$\binom{n-2}{k-1} = \frac{n-k}{k-1}\binom{n-2}{k-2} \quad \text{e} \quad \binom{n-2}{k} = \frac{(n-k)(n-k-1)}{k(k-1)}\binom{n-2}{k-2},$$

a igualdade acima toma a forma:

$$\left\{\frac{(n-k)(n-k-1)}{k(k-1)} - 2\frac{n-k}{k-1}\theta^2 + \theta^4\right\}\binom{n-2}{k-2} - \binom{n}{k} H_k\, \theta^k = 0.$$

Por hipótese, $H_k = 0$, de modo que temos que resolver a seguinte equação:

$$\theta^4 - 2\left(\frac{n-k}{k-1}\right)\theta^2 + \frac{(n-k)(n-k-1)}{k(k-1)} = 0;$$

obtemos $\theta^2 = \frac{1}{k-1}\left(n-k \pm \sqrt{\frac{(n-1)(n-k)}{k}}\right).$

Portanto,

$$r^2 = \frac{n-k \pm \sqrt{\frac{(n-1)(n-k)}{k}}}{n-1 \pm \sqrt{\frac{(n-1)(n-k)}{k}}}.$$

Logo,

$$r = \sqrt{\frac{n-k}{n} \pm \frac{1}{n}\sqrt{\frac{k(n-k)}{n-1}}}.$$

■

3.2 $H_1(r)$−toros

Teorema 3.2. (Classificação de $H_1(r)$−toros)

a) A única família mínima de $H_1(r)$−toros é dada por

$$S^{n-m}\left(\sqrt{\frac{n-m}{n}}\right) \times S^m\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right) \longrightarrow S^{n+1}(1).$$

E mais:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-m} &= \sqrt{\frac{m}{n-m}};\\
\lambda_{n-m+1} = \cdots = \lambda_n &= -\sqrt{\frac{n-m}{m}};\\
\|A\|^2 &= n;\\
Ricc(e_i) &= \frac{n(n-m-1)}{n-m};\\
Ricc(e_j) &= \frac{n(m-1)}{m};\\
S_k(A) &= \left(\frac{m}{n-m}\right)^{\frac{k}{2}}\binom{n-m}{k}\ {}_2F_1\left(-k,-m;n-m-k+1;-1\right).
\end{aligned}$$

b) A família de $H_1(r)$−toros com $H_1 \neq 0$ é dada por

$$r = \sqrt{\frac{2(n-m) + nH_1^2 \mp H_1\sqrt{n^2H_1^2 + 4m(n-m)}}{2n(1+H_1^2)}};$$

$$\|A\|^2 = n + \frac{n^3}{2m(n-m)}H_1^2 \mp \frac{n(n-2m)}{m(n-m)}H_1\sqrt{n^2H_1^2 + 4m(n-m)};$$

$$Ricc(e_i) = \frac{n-m-1}{2(n-m)^2}\left(2n(n-m) + n^2H_1^2 \pm nH_1\sqrt{n^2H_1^2 + 4m(n-m)}\right);$$

$$Ricc(e_j) = \frac{m-1}{4m^2}\left(4mn + 2n^2H_1^2 \mp \sqrt{n^2H_1^2 + 4m(n-m)}\right),$$

onde $i = 1, \cdots, n-m$ e $j = n-m+1, \cdots, n$.

Demonstração. Todo $H_1(r)$−toro é da forma $S^{n-m}(r) \times S^m(\sqrt{1-r^2}) \longrightarrow S^{n+1}(1)$, com $r \in (0,1)$ e $m \in \{1, \cdots, n-1\}$.

Para achar o(s) valor(es) de θ é simplesmente fazer $k = 1$ na equação (3.3), para obter

$$m\theta^2 + nH_1\theta - (n-m) = 0,$$

de onde,

$$\theta = \frac{-nH_1 \pm \sqrt{n^2H_1^2 + 4m(n-m)}}{2m};$$

assim,

$$\theta^2 = \frac{4m(n-m) + 2n^2H_1^2 \mp 2nH_1\sqrt{n^2H_1^2 + 4m(n-m)}}{4m^2};$$

$$\frac{1}{\theta^2} = \frac{4m(n-m) + 2n^2H_1^2 \pm 2nH_1\sqrt{n^2H_1^2 + 4m(n-m)}}{4(n-m)^2};$$

portanto,

$$\frac{1+\theta^2}{\theta^2} = \frac{2n(n-m) + n^2H_1^2 \pm nH_1\sqrt{n^2H_1^2 + 4m(n-m)}}{2(n-m)^2}.$$

Pelas equações (3.4), (3.5) e (3.6) temos que

$$\|A\|^2 = n + \frac{n^3}{2m(n-m)}H_1^2 \mp \frac{n(n-2m)}{m(n-m)}H_1\sqrt{n^2H_1^2 + 4m(n-m)};$$

$$Ricc(e_i) = \frac{n-m-1}{2(n-m)^2}\left(2n(n-m) + n^2H_1^2 \pm nH_1\sqrt{n^2H_1^2 + 4m(n-m)}\right), \quad i = 1, \cdots, n-m;$$

$$Ricc(e_j) = \frac{m-1}{4m^2}\left(4mn + 2n^2H_1^2 \mp \sqrt{n^2H_1^2 + 4m(n-m)}\right), \quad j = n-m+1, \cdots, n.$$

Agora,

$$\theta = \frac{1}{2m}\sqrt{4m(n-m) + 2n^2H_1^2 \mp 2nH_1\sqrt{n^2H_1^2 + 4m(n-m)}};$$

como $r^2 = \dfrac{\theta^2}{1+\theta^2}$, obtemos

$$r = \sqrt{\frac{2(n-m) + nH_1^2 \mp H_1\sqrt{n^2H_1^2 + 4m(n-m)}}{2n(1+H_1^2)}}.$$

De onde concluímos:

a) se $H_1 = 0$, então

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{n-m}{n}}; \\ \|A\|^2 &= n; \\ \mathrm{Ricc}(e_i) &= \frac{n(n-m-1)}{n-m}; \\ \mathrm{Ricc}(e_j) &= \frac{n(m-1)}{m}. \end{aligned}$$

b) Se $H_1 \neq 0$, então

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{2(n-m) + nH_1^2 \mp H_1\sqrt{n^2H_1^2 + 4m(n-m)}}{2n(1+H_1^2)}}; \\ \|A\|^2 &= n + \frac{n^3}{2m(n-m)}H_1^2 \mp \frac{n(n-2m)}{m(n-m)}H_1\sqrt{n^2H_1^2 + 4m(n-m)}; \\ \mathrm{Ricc}(e_i) &= \frac{n-m-1}{2(n-m)^2}\left(2n(n-m) + n^2H_1^2 \pm nH_1\sqrt{n^2H_1^2 + 4m(n-m)}\right); \\ \mathrm{Ricc}(e_j) &= \frac{m-1}{4m^2}\left(4mn + 2n^2H_1^2 \mp \sqrt{n^2H_1^2 + 4m(n-m)}\right), \end{aligned}$$

onde $i = 1, \cdots, n-m$ e $j = n-m+1, \cdots, n$.

■

3.3 $H_2(r)$–toros

Teorema 3.3. *Todos os $H_2(r)$–toros são descritos como segue.*

a)

$$S^{n-1}(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2}) \longrightarrow S^{n+1}(1),$$

com $r = \sqrt{\dfrac{n-2}{n(H_2+1)}}$. *Ademais,*

$$\|A\|^2 = \frac{n}{n-2}\left(\frac{n(n-1)H_2^2 + 4(n-1)H_2 + n}{2+nH_2}\right);$$
$$Ricc(e_i) = n(1+H_2) \quad onde\ i = 1, \cdots, n-1;$$
$$Ricc(e_n) = 0.$$

b)

$$S^{n-m}(r) \times S^m(\sqrt{1-r^2}) \longrightarrow S^{n+1}(1),$$

onde $m \in \{2, \cdots, n-2\}$ *satisfaz*

$$r = \sqrt{\frac{\frac{2(n-m)}{n} + H_2 \pm \sqrt{H_2^2 + \frac{4m(n-m)}{n(n-1)}H_2 + \frac{4m(n-m)}{n^2(n-1)}}}{2(H_2+1)}}. \tag{3.8}$$

Além disso,

$$\|A\|^2 = \frac{n(n-1)(n-2)}{2(n-m-1)(m-1)}H_2 + \frac{m(n-m)(n-2)}{(n-m-1)(m-1)} \pm$$
$$\frac{(n-2m)\sqrt{n-1}}{2(n-m-1)(m-1)}\sqrt{n^2(n-1)H_2^2 + 4mn(n-m)H_2 + 4m(n-m)};$$

$$Ricc(e_i) = (n-1) + \tfrac{n(n-1)}{2(n-m)}H_2 \mp \tfrac{\sqrt{n-1}}{2(n-m)}\sqrt{n^2(n-1)H_2^2 + 4mn(n-m)H_2 + 4m(n-m)};$$
$$Ricc(e_j) = (n-1) + \tfrac{n(n-1)}{2m}H_2 \pm \tfrac{\sqrt{n-1}}{2m}\sqrt{n^2(n-1)H_2^2 + 4mn(n-m)H_2 + 4m(n-m)},$$

onde $i = 1, \cdots, n-m, \quad j = n-m+1, \cdots, n.$

Demonstração. De fato, qualquer $H_2(r)-$toro é da forma $S^{n-m}(r) \times S^m(\sqrt{1-r^2}) \longrightarrow S^{n+1}(1)$, com $r \in (0,1)$ e $m \in \{1, \cdots, n-1\}$.

Para achar o(s) valor(es) de θ simplesmente basta fazer $k = 2$ na equação (3.3), para obter

$$m(m-1)\theta^4 - \Big(n(n-1)H_2 + 2m(n-m)\Big)\theta^2 + (n-m)(n-m-1) = 0. \tag{$*$}$$

a) Neste caso vamos fazer $m = 1$ na equação (*) e obtemos

$$\theta^2 = \frac{n-2}{2+nH_2}.$$

Pelas equações (3.4), (3.5) e (3.6) teremos que

$$\begin{aligned} \|A\|^2 =& \frac{n}{n-2}\left(\frac{n(n-1)H_2^2 + 4(n-1)H_2 + n}{2+nH_2}\right); \\ \mathrm{Ricc}(e_i) =& n(1+H_2) \quad \text{onde } i = 1, \cdots, n-1; \\ \mathrm{Ricc}(e_n) =& 0. \end{aligned}$$

b) Neste caso $m \in \{2, \cdots, n-2\}$, de modo que temos que resolver a equação biquadrada (*) e obtemos

$$\theta^2 = \frac{n-m}{m-1} + \frac{n(n-1)}{2m(m-1)}H_2 \pm \frac{\sqrt{n-1}}{2m(m-1)}\sqrt{n^2(n-1)H_2^2 + 4mn(n-m)H_2 + 4m(n-m)}.$$

É implicito que $\mathcal{R} := n^2(n-1)H_2^2 + 4mn(n-m)H_2 + 4m(n-m) \geq 0$.
Para achar o raio use a identidade $r^2 = \frac{\theta^2}{1+\theta^2}$; portanto

$$r = \sqrt{\frac{\frac{2(n-m)}{n} + H_2 \pm \sqrt{H_2^2 + \frac{4m(n-m)}{n(n-1)}H_2 + \frac{4m(n-m)}{n^2(n-1)}}}{2(H_2+1)}}.$$

Para achar o quadrado da segunda forma fundamental, use a equação (3.4) e para achar as curvaturas de Ricci, use as equações (3.5) e (3.6).
Por outro lado,

$$\theta = \sqrt{\frac{n-m}{m-1} + \frac{n(n-1)}{2m(m-1)}H_2 \pm \frac{\sqrt{n-1}}{2m(m-1)}\sqrt{\mathcal{R}}}.$$

Segue-se que

$$\frac{1}{\theta} = \left(\frac{m}{n-m-1} + \frac{n(n-1)}{2(n-m)(n-m-1)}H_2 \mp \frac{\sqrt{n-1}}{2(n-m)(n-m-1)}\sqrt{\mathcal{R}}\right) \times$$

$$\sqrt{\frac{n-m}{m-1} + \frac{n(n-1)}{2m(m-1)}H_2 \pm \frac{\sqrt{n-1}}{2m(m-1)}\sqrt{\mathcal{R}}}.$$

Sabemos que $S_1 = \dfrac{n-m}{\theta} - m\theta$; substituindo os valores de θ e $\dfrac{1}{\theta}$ nesta expressão podemos obter, depois de alguns cálculos, a seguinte identidade:

$$\sqrt{\frac{n-m}{m-1} + \frac{n(n-1)}{2m(m-1)} H_2 \pm \frac{\sqrt{n-1}}{2m(m-1)} \sqrt{\mathcal{R}}} = \frac{m + \frac{n(n-1)}{2} H_2 \pm \frac{\sqrt{n-1}}{2} \sqrt{\mathcal{R}}}{mn[1+(n-1)H_2]} (-S_1).$$

A partir desta igualdade temos:

$$H_1 = \frac{-m\Big(1+(n-1)H_2\Big)}{\Big(m + \frac{n(n-1)}{2} H_2 \pm \frac{\sqrt{n-1}}{2}\sqrt{\mathcal{R}}\Big)} \sqrt{\frac{n-m}{m-1} + \frac{n(n-1)}{2m(m-1)} H_2 \pm \frac{\sqrt{n-1}}{2m(m-1)} \sqrt{\mathcal{R}}}\,;$$

$$\theta = -\left(\frac{m + \frac{n(n-1)}{2} H_2 \pm \frac{\sqrt{n-1}}{2}\sqrt{\mathcal{R}}}{m\Big(1+(n-1)H_2\Big)} \right) H_1.$$

■

Observação 3.4. *Fazendo $m = n-1$ na equação (*) segue-se que $\theta = 0$ ou $\theta^2 = \dfrac{nH_2+2}{n-2}$. Descartaremos o caso $\theta = 0$ por ser irrelevante, de modo que $r = \sqrt{\dfrac{nH_2+2}{n(1+H_2)}}$. Neste caso temos,*

$$\|A\|^2 = \frac{n}{n-2}\left(\frac{n(n-1)H_2^2 + 4(n-1)H_2 + n}{2+nH_2}\right);$$
$$Ricc(e_1) = 0;$$
$$Ricc(e_j) = n(H_2+1), \quad \textit{onde } j = 2, \cdots, n.$$

3.4 $H_2(r)-$toros com Curvatura Escalar Unitária

Sabemos que numa hipersuperfície na esfera unitária a hipótese de curvatura escalar 1 equivale a hipótese de $H_2 \equiv 0$. Toda esta seção é constituida de corolários do Teorema 3.3 do parágrafo anterior.

Corolário 3.5. *O $H_2(r)-$toro da forma $S^{n-1}(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2}) \longrightarrow S^{n+1}(1)$, com curvatura escalar unitária, satisfaz:*

$$r = \sqrt{\frac{n-2}{n}};$$
$$\|A\|^2 = \frac{n^2}{2(n-2)};$$
$$Ricc(e_i) = n, \quad \textit{onde } i = 1, \cdots, n-1;$$
$$Ricc(e_n) = 0.$$

Ademais, suas funções simétricas são dadas por

$$S_k = \begin{cases} 1 & , \textit{ se } k = 0, \\ \dfrac{n(2-k)}{2(n-k)}\dbinom{n-1}{k}\left(\sqrt{\dfrac{2}{n-2}}\right)^k & , \textit{ se } 1 \leq k < n, \\ -\left(\sqrt{\dfrac{2}{n-2}}\right)^{n-2} & , \textit{ se } k = n, \end{cases}$$

com

$$S_1 > 0, \; S_2 = 0 \quad e \quad S_k < 0, \forall k \in \{3, \cdots, n\}.$$

Demonstração. É suficiente fazer $H_2 = 0$ na Proposição 3.3(a). Para avaliar suas funções simétricas basta fazer uso da Proposição 1.20 e considerar que suas curvaturas principais são dadas por

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = \sqrt{\frac{2}{n-2}}$$

e

$$\lambda_n = -\sqrt{\frac{n-2}{2}}.$$

∎

Observação 3.6. *O $H_2(r)-$toro da forma $S^1(r) \times S^{n-1}(\sqrt{1-r^2}) \longrightarrow S^{n+1}(1)$, com curvatura escalar unitária, satisfaz:*

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{n-2}{n}}; \\ \|A\|^2 &= \frac{n^2}{2(n-2)}; \\ Ricc(e_1) &= 0; \\ Ricc(e_j) &= n, \qquad onde\ j = 2, \cdots, n. \end{aligned}$$

Suas funções simétricas são:

$$S_k = \begin{cases} 1 & , \textit{ se } k = 0; \\ (-1)^k \dfrac{n(2-k)}{2(n-k)}\dbinom{n-1}{k}\left(\sqrt{\dfrac{2}{n-2}}\right)^k & , \textit{ se } 1 \leq k < n; \\ (-1)^{n-1}\left(\sqrt{\dfrac{2}{n-2}}\right)^{n-2} & , \textit{ se } k = n. \end{cases}$$

E mais:

$$S_1 < 0,\ S_2 = 0\ ,\forall k \geq 2 : S_{2k-1} > 0\ , S_{2k} < 0.$$

Observe como o sinal destas funções simétricas mudam profundamente em relação as dadas no corolário anterior.

Para mostrar as igualdades referentes a norma de sua segunda forma fundamental e as curvaturas de Ricci é suficiente fazer $H_2 = 0$ na Observação 3.4. Para avaliar suas funções simétricas é somente fazer uso da Proposição 1.20 e considerar que suas curvaturas principais são:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{n-2}{2}}$$

e

$$\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = -\sqrt{\frac{2}{n-2}}.$$

Corolário 3.7. *Para todo $n \geq 4$, os $H_2(r)-$toro da forma $S^{n-m}(r) \times S^m(\sqrt{1-r^2}) \longrightarrow S^{n+1}(1)$, onde $m \in \{2, \cdots, n-2\}$, com curvatura escalar unitária, satisfazem:*

a)

$$r = \sqrt{\frac{n-m}{n} + \frac{1}{n}\sqrt{\frac{m(n-m)}{n-1}}}.$$

Além do mais, segue-se que $S_1 < 0$, $S_2 = 0$ e $S_3 > 0$;

b)

$$r = \sqrt{\frac{n-m}{n} - \frac{1}{n}\sqrt{\frac{m(n-m)}{n-1}}}.$$

E mais: $S_1 > 0$, $S_2 = 0$ e $S_3 < 0$.

Demonstração. Já que toda hipersuperfície na esfera unitária $S^{n+1}(1)$ com curvatura escalar unitária é equivalente à condição de $H_2 = 0$, consideremos:

a) o caso $H_2 = 0$ e escolhamos o sinal positivo para a equação (3.8) dada no Teorema 3.3. Desta forma, obtemos a expressão para o raio.

Substituindo este raio na igualdade $\theta^2 = \dfrac{r^2}{1-r^2}$, temos:

$$\theta^2 = \frac{\sqrt{m(n-m)(n-1)} - m(n-m)}{m(m-1)}.$$

Uma vez obtido o valor de θ^2, estamos em condições de calcular qualquer função simétrica S_k, veja a equação (3.2). Em particular quando $k = 1$, verificamos que:

$$ {}_2F_1(-1, -m, n-m; -\theta^2) = \frac{-n}{\sqrt{m(n-m)(n-1)} - (n-m)}; $$

assim,

$$ \binom{n-m}{1} {}_2F_1(-1, -m, n-m; -\theta^2) = \frac{-n(n-m)}{\sqrt{m(n-m)(n-1)} - (n-m)}. $$

Desde que $m > 1$, temos que o sinal do denominador da última igualdade é positivo. Analogamente, como $m < n$, temos que o sinal do numerador é negativo. A equação (3.2) nos mostra que $S_1 < 0$.

Considerando $k = 3$ na equação (3.2), verificamos que:

$$ {}_2F_1(-3, -m, n-m-2; -\theta^2) = \frac{2(n-1)\Big((m+1)\sqrt{m(n-1)(n-m)} + m(2n-m-1)\Big)}{m(m-1)^2(n-m-1)(n-m-2)}; $$

assim,

$$ \binom{n-m}{3} {}_2F_1(-3, -m, n-m-2; -\theta^2) = \frac{(n-1)(n-m)\Big((m+1)\sqrt{m(n-1)(n-m)} + m(2n-m-1)\Big)}{3m(m-1)^2}. $$

Desde que $2 \leq m \leq n-2$, temos que $2n - m - 1 > 0$, onde o numerador desta última igualdade é maior do que zero. A equação (3.2) nos mostra que $S_3 > 0$.

b) O caso $H_2 = 0$ e escolhamos o sinal negativo para a equação (3.8) dada no Teorema 3.3. Desta forma obteremos a expressão para o raio.

Substituindo este raio na igualdade $\theta^2 = \dfrac{r^2}{1-r^2}$, temos:

$$ \theta^2 = \frac{n(n-m)(n-m-1)}{\Big(m\sqrt{n-1} + \sqrt{m(n-m)}\Big)\Big((n-m)\sqrt{n-1} + \sqrt{m(n-m)}\Big)}. $$

Considerando $k = 1$ na equação (3.2), verifica-se que:

$$ {}_2F_1(-1, -m, n-m; -\theta^2) = \frac{n}{\sqrt{m(n-m)(n-1)} + (n-m)}; $$

assim,

$$\binom{n-m}{1} {}_2F_1(-1,-m,n-m;-\theta^2) = \frac{n(n-m)}{\sqrt{m(n-m)(n-1)}+(n-m)}.$$

A equação (3.2) nos mostra que $S_1 > 0$.

Considerando $k = 3$ na equação (3.2), temos que:

$$ {}_2F_1(-3,-m,n-m-2;-\theta^2) = $$
$$ \frac{-2n(n-1)}{(n-m-2)\Big((m+1)\sqrt{m(n-m)(n-1)}+m(2n-m-1)\Big)}; $$

assim,

$$\binom{n-m}{3} {}_2F_1(-3,-m,n-m-2;-\theta^2) = $$
$$ \frac{-n(n-1)(n-m)(n-m-1)}{3\Big((m+1)\sqrt{m(n-m)(n-1)}+m(2n-m-1)\Big)}; $$

Desde que $2 \leq m \leq n-2$, temos que $2n-m-1 > 0$, onde o denominador desta última igualdade é maior do que zero. A equação (3.2), nos mostra que $S_3 < 0$.

■

3.5 Principais Resultados

Lema 3.8. *Sejam V um espaço vetorial com produto interno real n dimensional e $B \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ um operador linear auto-adjunto. Pelo Teorema espectral, V tem uma base ortonormal $\{v_1, \cdots, v_n\}$ de auto-vetores de B e todos os auto-valores de B são reais, isto é,*

$$Bv_i = \lambda_i v_i, \quad \forall i.$$

Definamos,

$$\lambda_k^2 := \max_{1\leq i\leq n}\{\lambda_i^2\}.$$

a) Se $\lambda_k^2 = 0$, então $\lambda_i = 0 \quad \forall i$,
isto é, os valores próprios de B são 0 de multiplicidade algébrica n;

b) Se $\lambda_k \neq 0$, $\quad S_2(B) = 0$ e $S_1(B_k) = 0$, então os valores próprios de B são:

- *0 de multiplicidade algébrica $n-1$,*

- $\pm\lambda_k$ *de multiplicidade algébrica* 1;

c) Se $\lambda_k \neq 0, \quad S_2(B) = 0$ *e* $S_1(B_k) \neq 0$, *então para cada* $u \in V$

$$\langle B^2u, u\rangle \leq ||u||^2 \left\{ \frac{\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2}{4S_1(B_k)^2 + \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2} \right\} \text{ traço } (B^2);$$

d) Se $\lambda_k \neq 0, \quad S_2(B) = 0$ *e* $S_1(B_k) \neq 0$, *e se existe um* $w \in V \setminus \{0\}$ *tal que*

$$\langle B^2w, w\rangle = ||w||^2 \left\{ \frac{\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2}{4S_1(B_k)^2 + \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2} \right\} \text{ traço } (B^2),$$

então $\lambda_i = \lambda_j \quad \forall i, j \in \{1, \cdots, n\} \setminus \{k\}$. *Em outras palavras: os valores próprios de* B *são dados por*

- $\lambda \quad (= \lambda_i) \neq 0$ *de multiplicidade algébrica* $n-1$,
- $\pm\lambda_k$ *de multiplicidade algébrica* 1

Além disso,

$$Bw = \lambda_k\, w.$$

Demonstração.

(a) Por definição, $\lambda_i^2 \leq \lambda_k^2 \quad \forall i$; então

$$0 \leq \lambda_i^2 \leq \lambda_k^2 \quad \forall i,$$

por hipótese,

$$0 \leq \lambda_i^2 \leq 0 \quad \forall i,$$
$$\lambda_i = 0 \quad \forall i.$$

Logo o único valor próprio de B é 0 de multiplicidade algébrica n.

(b) Sabemos que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = S_1(B)^2 - 2S_2(B).$$

Por outro lado, pela Proposição 1.27(c), $S_1(B_k) = S_1(B) - \lambda_k$. Por hipótese, $S_1(B_k) = 0$, então $S_1(B) = \lambda_k$. De onde a igualdade acima toma a forma:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \lambda_k^2 - 2S_2(B).$$

Por hipótese, $S_2(B) = 0$, de onde obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \lambda_k^2;$$

de modo que

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i^2 = 0.$$

De onde, $\lambda_i = 0, \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\} \setminus \{k\}$. Portanto, os valores próprios de B são:

- 0 de multiplicidade algébrica $n-1$,
- $\pm\lambda_k$ de multiplicidade algébrica 1.

(c) Pela Proposição 2.2(f),

$$2S_2(B_k) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i S_1(B_i, B_k);$$

$$4S_2(B_k)^2 = \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i S_1(B_i, B_k) \right]^2.$$

Pela Proposição 1.27(c), $S_2(B_k) = S_2(B) - \lambda_k S_1(B_k)$; por hipótese, $S_2(B) = 0$, então $S_2(B_k) = -\lambda_k S_1(B_k)$. Por hipótese, $\lambda_k \neq 0$ e $S_1(B_k) \neq 0$, de onde $S_2(B_k) \neq 0$. De onde temos que $\lambda_k^2 S_1(B_k)^2 = S_2(B_k)^2$, isto é, $4\lambda_k^2 S_1(B_k)^2 = 4S_2(B_k)^2$. Logo

$$4\lambda_k^2 S_1(B_k)^2 = \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i S_1(B_i, B_k) \right]^2.$$

Pelo Lema 2.3,

$$4\lambda_k^2 S_1(B_k)^2 \leq \left[\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} S_1(B_i,B_k)^2\right] \sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} \lambda_i^2;$$

na desigualdade acima, somando a ambos lados $\lambda_k^2 \sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} S_1(B_i,B_k)^2$ temos

$$\lambda_k^2 \left\{ 4S_1(B_k)^2 + \sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} S_1(B_i,B_k)^2 \right\} \leq \left[\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} S_1(B_i,B_k)^2\right] \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$

Consideremos $v_1, \cdots, v_n$ base ortonormal de V diagonalizando o operador B, $u = \sum_{i=1}^n a_i v_i$, e $||u||^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 > 0$, $\forall u \in V \backslash \{0\}$. É facil ver que $\langle Bu, Bu\rangle = \sum_{i=1}^n a_i^2 \lambda_i^2$, por ser B auto-adjunta, $\langle Bu, Bu\rangle = \langle B^2u, u\rangle$. Assim,

$$\langle B^2u, u\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\lambda_i^2 \leq \lambda_k^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leq ||u||^2\lambda_k^2.$$

Como traço$(B^2) = \sum_{i=1}^{n} \langle B^2 v_i, v_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \langle v_i, v_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$,
temos, $\forall u \in V \setminus \{0\}$:

$$\langle B^2u, u\rangle \leq ||u||^2\lambda_k^2 \leq ||u||^2 \left\{ \frac{\displaystyle\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} S_1(B_i,B_k)^2}{\displaystyle 4S_1(B_k)^2 + \sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} S_1(B_i,B_k)^2} \right\} \text{traço}(B^2).$$

Observamos que esta última desigualdade continua sendo válida para $u = 0$.
Logo, $\forall u \in V$

$$\langle B^2u, u\rangle \leq ||u||^2\lambda_k^2 \leq ||u||^2 \left\{ \frac{\displaystyle\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} S_1(B_i,B_k)^2}{\displaystyle 4S_1(B_k)^2 + \sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} S_1(B_i,B_k)^2} \right\} \text{traço}(B^2). \tag{3.9}$$

(d) Seja $w \in V \setminus \{0\}$ um vetor tal que

$$\langle B^2 w, w\rangle = ||w||^2 \left\{ \frac{\displaystyle\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2}{4S_1(B_k)^2 + \displaystyle\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2} \right\} \text{traço}(B^2);$$

usando a relação (3.9) obtemos

$$\langle B^2 w, w\rangle = \|w\|^2 \lambda_k^2 = \|w\|^2 \left\{ \frac{\displaystyle\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2}{4S_1(B_k)^2 + \displaystyle\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2} \right\} \text{traço}(B^2),$$

logo

$$\|w\|^2 \lambda_k^2 = \|w\|^2 \left\{ \frac{\displaystyle\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2}{4S_1(B_k)^2 + \displaystyle\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2} \right\} \text{traço}(B^2);$$

como $w \in V \setminus \{0\}$, temos que

$$\lambda_k^2 = \left\{ \frac{\displaystyle\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2}{4S_1(B_k)^2 + \displaystyle\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2} \right\} \text{traço}(B^2).$$

Assim,

$$\left\{ 4S_1(B_k)^2 + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2 \right\} \lambda_k^2 = \left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2 \right) \text{traço}(B^2);$$

isto é,

$$4\lambda_k^2 S_1(B_k)^2 + \lambda_k^2 \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i,B_k)^2 = \left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i,B_k)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right);$$

logo,

$$\begin{aligned} 4\lambda_k^2 S_1(B_k)^2 &= \left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i,B_k)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right) - \left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i,B_k)^2\right)\lambda_k^2 \\ &= \left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i,B_k)^2\right)\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 - \lambda_k^2\right]. \end{aligned}$$

Em outras palavras,

$$4\lambda_k^2 S_1(B_k)^2 = \left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i,B_k)^2\right)\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\lambda_i^2\right).$$

Na identidade 1.27(c) fazemos $r=1$ e substituimos a hipótese $S_2(B)=0$ para obter $S_2(B_k) = -\lambda_k S_1(B_k)$. Isto é,

$$\lambda_k^2 S_1(B_k)^2 = S_2(B_k)^2.$$

Fazendo $r=1$ na identidade de Euler (Proposição 2.2(f)), e elevando ao quadrado essa expressão obtemos $4S_2(B_k)^2 = \left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \lambda_i S_1(B_i,B_k)\right]^2$.

A partir destas duas últimas igualdades podemos ver que

$$4\lambda_k^2 S_1(B_k)^2 = \left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \lambda_i S_1(B_i,B_k)\right]^2.$$

Portanto,

$$\left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \lambda_i S_1(B_i,B_k)\right]^2 = \left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i,B_k)^2\right]\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\lambda_i^2\right).$$

A partir desta igualdade e pelo Lema 2.3 obtemos:

$$S_1(B_k)^2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i,j\neq k}}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = 0;$$

por hipótese $S_1(B_k) \neq 0$, logo $\displaystyle\sum_{\substack{i,j=1 \\ i,j\neq k}}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = 0$;

isto é,

$$\lambda_i = \lambda_j \qquad \forall i,j \in \{1,\cdots,n\} \setminus \{k\}.$$

De modo que os dois auto-valores de B são λ_k e $\lambda (= \lambda_i)$.

- Agora mostraremos que este w é um vetor próprio de B.
  Já mostramos que

$$\langle B^2 w, w\rangle = \|w\|^2 \lambda_k^2 = \|w\|^2 \left\{ \frac{\displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2}{4S_1(B_k)^2 + \displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2} \right\} \text{traço}(B^2).$$

Sendo $v_1, \cdots, v_n$ base do espaço vetorial V, podemos escrever $w = \sum_{i=1}^n a_i v_i$; daqui temos que $\|w\|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$. A partir da igualdade $\langle B^2 w, w\rangle = \|w\|^2\lambda_k^2$, temos

$$\begin{aligned}
\|w\|^2\lambda_k^2 = \langle B^2 w, w\rangle &= \sum_{j=1}^{n} a_j^2\lambda_j^2 = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} a_j^2\lambda_j^2 + a_k^2\lambda_k^2 \\
&= \lambda^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} a_j^2 + a_k^2\lambda_k^2 = \lambda^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} a_j^2 + \lambda^2 a_k^2 - \lambda^2 a_k^2 + a_k^2\lambda_k^2 \\
&= \lambda^2 \sum_{j=1}^{n} a_j^2 + a_k^2\lambda_k^2 - \lambda^2 a_k^2 \\
&= \lambda^2\|w\|^2 - \lambda^2 a_k^2 + a_k^2\lambda_k^2.
\end{aligned}$$

De onde temos,

$$\left(\|w\|^2 - a_k^2\right)\lambda_k^2 = \lambda^2\left(\|w\|^2 - a_k^2\right).$$

i) Se $a_k^2 = \|w\|^2$, então a partir de $\|w\|^2 = \sum_{j=1}^n a_j^2 = \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} a_j^2 + a_k^2$, segue-se que $a_j^2 = 0$, $\forall j \neq k$. Resumindo: Se $a_k^2 = \|w\|^2$, então $a_j = 0$, $\forall j \neq k$.

Portanto

$$\begin{aligned} w &= \sum_{j=1}^{n} a_j v_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} a_j v_j + a_k v_k \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} 0 v_j + a_k v_k \\ &= a_k\ v_k. \end{aligned}$$

Usando que $a_k^2 = \|w\|^2 \Longrightarrow a_k = \pm\|w\|$, temos que

$$w = \pm\|w\| v_k.$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} Bw &= B\left(\pm\|w\|v_k\right) = \pm\|w\|Bv_k = \pm\|w\|\lambda_k v_k \\ &= \lambda_k\left(\pm\|w\|v_k\right). \end{aligned}$$

Usando que $w = \pm\|w\|v_k$, obtemos

$$Bw = \lambda_k\ w.$$

ii) Se $a_k^2 \neq \|w\|^2$, segue-se que $\lambda^2 = \lambda_k^2$. Pela hipótese sobre w, cada desigualdade na relação 3.9 torna-se uma igualdade e temos

$$\|w\|^2\lambda_k^2 = \|w\|^2 \left\{ \frac{\displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2}{4S_1(B_k)^2 + \displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2} \right\} \text{traço}(B^2);$$

sendo $w \neq 0$, temos, então

$$\begin{aligned} \lambda_k^2 &= \left\{ \frac{\displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2}{4S_1(B_k)^2 + \displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2} \right\} \text{traço}(B^2) \\ &= \left\{ \frac{\displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2}{4S_1(B_k)^2 + \displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2} \right\} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \lambda_i^2 + \lambda_k^2 \right). \end{aligned}$$

Como o operador B tem somente dois autovalores, obtemos

$$\lambda_k^2 = \left\{ \frac{\displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2}{4S_1(B_k)^2 + \displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2} \right\} \left((n-1)\lambda^2 + \lambda_k^2\right);$$

como estamos supondo que $\lambda^2 = \lambda_k^2$, temos, então

$$\lambda_k^2 = \left\{ \frac{\displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2}{4S_1(B_k)^2 + \displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2} \right\} \left(n\lambda_k^2\right).$$

De nossas hipóteses segue-se que $\dfrac{\displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2}{4S_1(B_k)^2 + \displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} S_1(B_i, B_k)^2} \neq 0$. Portanto $\lambda_k = 0$ e isto implica que todos os valores próprios de B são zero. Por outro lado, sendo $v_1, \cdots, v_n$ base do espaço vetorial V podemos escrever $w = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$; assim temos que

$$Bw = \sum_{i=1}^{n} a_i B(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i w_i;$$

como todos os $\lambda_i = 0$ temos que

$$Bw = 0.$$

Finalmente, como $\lambda_k = 0$, então $\lambda_k\, w = 0$. Logo,

$$Bw = \lambda_k\, w$$

■

Teorema 3.9. *Dada uma imersão isométrica $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$, seja A a sua segunda forma fundamental. Se $S_2(A) \equiv 0$ em $\mathbf{M}$, então vale uma das seguintes alternativas:*

1. a imersão é totalmente geodésica;

2. a imersão tem um valor próprio nulo de multiplicidade $n-1$;

3. a imersão é de rotação, isto é, as curvaturas principais são

- $-\left(\frac{n-2}{2}\right)\lambda$ *de multiplicidade algébrica* 1
- λ *de multiplicidade algébrica* $n-1$;

4. $\forall p \in \mathbf{M}$, $\forall u \in T_p\mathbf{M}$ *com* $\|u\| = 1$,

$$Ricc(u,u) > c(n-1) + nH\langle Au, u\rangle - \left\{1 - \frac{4\,[nH - \lambda_k]}{[(n+2)nH - n\lambda_k]}\right\} n^2H^2.$$

Demonstração. Seja A a segunda forma fundamental da imersão e considere $e_1, \cdots, e_n$ uma base ortonormal que diagonaliza A e $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ seus correspondentes auto-valores. Para cada $p \in \mathbf{M}$, considere $V = T_p\mathbf{M}$ no Lema 3.8. Definamos

$$\lambda_k^2 := \max_{1\le i\le n} \{\lambda_i^2\}.$$

Temos:

1. Caso $\lambda_k = 0$. O item (a) do Lema 3.8 nos garante que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Numa linguagem geométrica isto é equivalente a dizer que a imersão é totalmente geodésica;

2. Caso $\lambda_k \neq 0$ e $S_1(B_k) = 0$. O resultado segue-se do Lema 3.8(b).

3. Caso $\lambda_k \neq 0$ e $S_1(B_k) \neq 0$. Segue-se que sua curvatura média não é identicamente nula. Ademais, neste caso vamos supor que $S_1(B_i, B_k) = 0, \quad \forall i \neq k$. Pelo Lema 2.3 obtemos que

$$0 = S_1(B_k)^2 \sum_{\substack{i,j=1\\ i,j\neq k}}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)^2.$$

Está igualdade mostra que temos $n-1$ curvaturas principais iguais; denotemos este valor por λ; em outras palavras:

$$\begin{aligned} &\lambda_i = \lambda, \quad \text{para cada } i \neq k;\\ &\lambda_k \neq 0. \end{aligned}$$

Como por hipótese $S_2 = 0$, pela Proposição 1.20 temos que

$$0 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}\,\lambda^2 + (n-1)\lambda\,\lambda_k.$$

Sendo $n > 1$ e $\lambda \neq 0$, concluímos que

$$\lambda = \frac{-2\lambda_k}{n-2}.$$

O resultado segue-se do Teorema 4.2 de [DdC](pag. 701).

4. É uma aplicação do item (c) do Lema 3.8.

■

Observação 3.10. *A família de hipersupefícies dadas no item (3) inclue as "hipersuperfícies mergulhadas* $\mathbf{M}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *livre de "pontos flat", as quais são regulares no infinito e têm dois fins", as quais foram estudadas em [HouLei].*

Capítulo 4

k-umbilicidade

4.1 Definições

Definição 4.1. *Uma imersão isométrica $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{\,n+p}$ diz-se que é k-umbílica, no ponto $q \in \mathbf{M}^n$, $k = 1, \cdots, n-1$, se*

$$A_\eta P_{k-1}(A_\eta) = \lambda I, \quad \forall \eta \in T_q\mathbf{M}^\perp, \tag{4.1}$$

onde A_η é a segunda forma fundamental associada à imersão, $\lambda = \lambda(k, \eta)$ é uma função dependendo de k e η e I é a aplicação identidade em $T_q\mathbf{M}$.

Ainda que não se conheça, em princípio, nenhum elemento componente da Definição 4.1, é possível mostrar que $\lambda(k, \eta) = \frac{k}{n} S_k(A_\eta)$, tomando para isto o traço na igualdade (4.1) e a Proposição 1.33(e). Portanto, outra forma de definir $k-$umbilicidade seria:

$$A_\eta P_{k-1}(A_\eta) = \frac{k}{n} S_k(A_\eta)\ I, \qquad \forall \eta \in T_q\mathbf{M}^\perp. \tag{4.2}$$

Se nesta igualdade usarmos a Proposição 1.29, obteremos outra forma equivalente de definir k-umbilicidade:

$$P_k(A_\eta) = \left(1 - \frac{k}{n}\right) S_k(A_\eta)\ I, \qquad \forall \eta \in T_q\mathbf{M}^\perp. \tag{4.3}$$

Definição 4.2. *Uma imersão isométrica $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{\,n+p}$ diz-se que é k-umbílica quando é k-umbílica em qualquer ponto de $\mathbf{M}$.*

Definição 4.3. *Uma imersão isométrica $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{\,n+p}$ é $k-$totalmente geodésica se*

$$A_\eta\ P_{k-1}(A_\eta) = 0, \quad \forall \eta \in T\mathbf{M}^\perp\ .$$

Afirmação 4.4. *Considere $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{\,n+p}$ uma imersão isométrica arbitraria.*

$$x \text{ é } k-\text{totalmente geodésica} \Longleftrightarrow x \text{ é } k-\text{umbílica com } S_k(A_\eta) = 0.$$

Demonstração.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que x seja $k-$umbílica com $S_k(A_\eta)=0$, então a identidade (4.2) nos garante que x é $k-$totalmente geodésica.

($\Longrightarrow$) Suponhamos que x seja $k-$totalmente geodésica, daqui vemos que x é um multiplo da identidade, logo x é $k-$umbílica. A identidade (4.2) nos garante que $S_k(A_\eta)=0$. ■

Afirmação 4.5. *Não existe imersão isométrica $k-$totalmente geodésica com $S_k(A)\neq 0$.*

Teorema 4.6. *Seja $x : \mathrm{M}^n \longrightarrow \overline{\mathrm{M}}^{\,n+1}$ uma imersão isométrica k-umbílica no ponto $q\in \mathrm{M}^n$. Então*

$$AP_{k-1}(A) \text{ é Codazzi} \iff S_k(A) \text{ é constante.}$$

Demonstração. Para quaisquer X, Y tangentes a M^n

$$\Big(\nabla_X\, AP_{k-1}(A)\Big)(Y)=\nabla_X\Big(AP_{k-1}(A)\,(Y)\Big)-AP_{k-1}(A)\Big(\nabla_X Y\Big);$$

por ser a imersão $k-$umbílica

$$\Big(AP_{k-1}(A)\Big)(Y)=\frac{k}{n}\,S_k(A)\,Y$$

e

$$AP_{k-1}(A)\Big(\nabla_X Y\Big)=\frac{k}{n}\,S_k(A)\,\nabla_X Y.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\Big(\nabla_X\, AP_{k-1}(A)\Big)(Y)&=\nabla_X\Big(\frac{k}{n}\,S_k(A)\,Y\Big)-\frac{k}{n}\,S_k(A)\quad\nabla_X\,Y\\&=X\Big(\frac{k}{n}\,S_k(A)\Big)Y+\frac{k}{n}\,S_k(A)\quad\nabla_X\,Y-\frac{k}{n}\,S_k(A)\quad\nabla_X\,Y\\&=X\Big(\frac{k}{n}\,S_k(A)\Big)Y.\end{aligned}$$

De modo que

$$\Big(\nabla_X\, AP_{k-1}(A)\Big)(Y)-\Big(\nabla_Y\, AP_{k-1}(A)\Big)(X)=X\Big(\frac{k}{n}\,S_k(A)\Big)Y-Y\Big(\frac{k}{n}\,S_k(A)\Big)X. \tag{4.4}$$

($\Longrightarrow$) Se $AP_{k-1}(A)$ é Codazzi, então o lado esquerdo da igualdade (4.4) é zero. Assim,

$$X\Big(\frac{k}{n}\,S_k(A)\Big)Y-Y\Big(\frac{k}{n}\,S_k(A)\Big)X=0.$$

Se escolhermos X e Y linearmente independentes, seguirá que

$$X\Big(\frac{k}{n}\,S_k(A)\Big)=0=Y\Big(\frac{k}{n}\,S_k(A)\Big)$$

e portanto $\frac{k}{n}\,S_k(A)=0$ em cada ponto da variedade M^n; finalmente, sendo M^n conexa segue-se que $\frac{k}{n}\,S_k(A)$ é constante em M^n.

($\Longleftarrow$) Se $\frac{k}{n}\, S_k(A)$ é constante em $\mathbf{M}^n$, o lado direito da igualdade (4.4) é zero, isto é,

$$\Big(\nabla_X\, AP_{k-1}(A)\Big)(Y) - \Big(\nabla_Y\, AP_{k-1}(A)\Big)(X) = 0.$$

Logo, $AP_{k-1}(A)$ é Codazzi.

■

Definição 4.7. *Dada uma imersão isométrica $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{\,n+p}$ define-se o r-ésimo vetor curvatura média de x em $q \in \mathbf{M}$ como sendo*

$$\overrightarrow{H}_r(q) = \frac{1}{(n-r)\binom{n}{r}} \sum_{j=1}^{p} \textit{traço}\ (P_r(A_{\eta_j}))\ \eta_j,$$

para qualquer base ortonormal $\eta_1, \cdots, \eta_p \in T_q\mathbf{M}^{\perp}$.

A Proposição 1.33(d) mostra que também podemos definir o r-ésimo vetor curvatura média de uma imersão como sendo

$$\overrightarrow{H}_r(q) = \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{j=1}^{p} S_r(A_{\eta_j})\ \eta_j.$$

4.2 O operador ϕ_k

Definição 4.8. *Dada uma hipersuperfície $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+1}$, sendo A sua segunda forma fundamental, define-se*

$$\phi_k : T_p\mathbf{M} \longrightarrow T_p\mathbf{M}$$

da seguinte forma:

$$\phi_k(X) := \frac{k}{n}\, S_k(A)\, X - AP_{k-1}(A)\, X, \quad \forall X \in T_p\mathbf{M}.$$

Observação 4.9. *Substituindo, nesta definição, $P_{k-1}(A)$ pelo termo adequado, conforme a Proposição 1.29 temos*

$$\phi_k(X) = \frac{k}{n}\, S_k(A)\, X - S_{k-1}(A)\, A\, X + A^2\, P_{k-2}(A)\, X;$$

substituindo, nesta definição, $AP_{k-1}(A)$ pelo termo adequado, conforme a Proposição 1.29 temos

$$\phi_k(X) = P_k(A)\, X - \left(1 - \frac{k}{n}\right) S_k(A)\, X,$$

onde P_i é o $i-$ésimo operador de Newton, e $S_j(A)$ é a $j-$ésima função simétrica das curvaturas principais de A.

Observe que para $k = 1$ obtemos o operador $\phi_1(X) = \phi(X) = HX - AX$ usado em [AdC].

Proposição 4.10. *Considere* $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+1}$ *uma hipersuperfície e* A *sua segunda forma fundamental. Sendo* ϕ_k *conforme a Definição 4.8, temos que:*

a) ϕ_k *é auto-adjunta;*

b) ϕ_k *é simultaneamente diagonalizável com* A*. Além do mais, considerando* $\{e_1, \cdots, e_n\}$ *a base ortonormal que diagonaliza* A*, então* $\phi_k(e_i) = \mu_i e_i$*, sendo que*

$$\mu_i = S_k(A_i) - \left(1 - \frac{k}{n}\right) S_k;$$

c) *traço*$(\phi_k) = 0$*;*

d) *a derivada covariante de* ϕ_k *é auto-adjunta, isto é,*

$$\left\langle \left(\nabla_Z \phi_k\right) X, Y \right\rangle = \left\langle X, \left(\nabla_Z \phi_k\right) Y \right\rangle,$$

onde ∇ *é a derivada covariante em* $\mathbf{M}$*.*

Demonstração.

a) $\forall X,\ Y \in T_p\mathbf{M}$, temos

$$\begin{aligned}\langle \phi_k(X), Y\rangle =& \langle P_k(A)X - (1 - \frac{k}{n})S_k(A)X, Y\rangle \\ =& \langle P_k(A)X, Y\rangle - (1 - \frac{k}{n})S_k(A)\ \langle X, Y\rangle; \\ =& \langle X, P_k(A)Y\rangle - \langle X,\ (1 - \frac{k}{n})S_k(A)\ Y\rangle \\ =& \langle X, \phi_k(Y)\rangle.\end{aligned}$$

b) Como $Ae_i = \lambda_i\, e_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$,

$$\phi_k(e_i) = P_k(A)\, e_i - (1 - \frac{k}{n})S_k(A)\, e_i$$

(pela Proposição 1.33(i))

$$\begin{aligned} =& S_k(A_i)e_i - (1 - \frac{k}{n})S_k(A)\, e_i \\ =& \underbrace{\left[S_k(A_i) - (1 - \frac{k}{n})S_k(A)\right]}_{\mu_i} e_i.\end{aligned}$$

c) Sabemos que $Ae_i = \lambda_i\, e_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, onde $\{e_i\}$ é base ortonormal. Pela Definição 1.23,

$$\begin{aligned}
\text{traço}(\phi_k) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \phi_k(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \mu_i = \sum_{i=1}^{n} \left(S_k(A_i) - (1 - \frac{k}{n}) S_k(A) \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} S_k(A_i) \right) - (1 - \frac{k}{n}) n S_k(A);
\end{aligned}$$

pela Proposição 1.33(j),

$$\text{traço}(\phi_k) = \text{traço}(P_k(A)) - (n-k) S_k(A);$$

finalmente, pela Proposição 1.33(d),

$$\text{traço}(\phi_k) = 0.$$

d) O fato de que $\left(\nabla_Z \phi_k \right) X = \nabla_Z \phi_k X - \phi_k \left(\nabla_Z X \right)$, mostra que

$$\left\langle \left(\nabla_Z \phi_k \right) X, Y \right\rangle = \left\langle \nabla_Z \phi_k X - \phi_k \left(\nabla_Z X \right), Y \right\rangle;$$

(porque ∇ é compatível com a métrica)

$$= Z\langle \phi_k X, Y \rangle - \left\langle \phi_k X, \nabla_Z Y \right\rangle - \left\langle \phi_k \left(\nabla_Z X \right), Y \right\rangle;$$

por ser ϕ_k auto-adjunto,

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\nabla_Z \phi_k \right) X, Y \right\rangle &= Z\langle X, \phi_k Y \rangle - \left\langle X, \phi_k \left(\nabla_Z Y \right) \right\rangle - \left\langle \nabla_Z X,\ \phi_k Y \right\rangle \\
&= Z\langle X, \phi_k Y \rangle - \left\langle \nabla_Z X,\ \phi_k Y \right\rangle - \left\langle X, \phi_k \left(\nabla_Z Y \right) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Por ser ∇ compatível com a métrica, temos então

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\nabla_Z \phi_k \right) X, Y \right\rangle &= \left\langle X, \nabla_Z \phi_k Y \right\rangle - \left\langle X, \phi_k \left(\nabla_Z Y \right) \right\rangle \\
&= \left\langle X,\ \nabla_Z \phi_k Y - \phi_k \left(\nabla_Z Y \right) \right\rangle \\
&= \left\langle X,\ \left(\nabla_Z \phi_k \right) Y \right\rangle.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Proposição 4.11. *Considere $x : \mathrm{M}^n \longrightarrow \overline{\mathrm{M}}^{n+1}$ uma hipersuperfície e A sua segunda forma fundamental. Seja $\{e_1, \cdots, e_n\}$ a base ortonormal que diagonaliza A (isto é, $Ae_i = \lambda_i e_i$). Sejam ϕ_k e $\|\cdot\|$ conforme as Definições 4.8 e 1.31, respectivamente. Então*

1. $\|\phi_k\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2;$

2. $\|\phi_k\|^2 = \sum_{i=1}^{n} S_k(A_i)^2 - \frac{(n-k)^2}{n} S_k^2;$

3. $\|\phi_k\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 S_{k-1}(A_i)^2 - \frac{k^2}{n} S_k^2;$

4. $\|\phi_k\|^2 = \text{traço}\left(P_k^2 - \frac{(n-k)^2}{n^2}\, S_k^2\, I\right);$

5. $\|\phi_k\|^2 = \text{traço}\left(A^2 P_{k-1}^2 - \frac{k^2}{n^2}\, S_k^2\, I\right);$

6. $\|\phi_k\|^2 = \frac{k(n-k)}{n}\, S_k(A)^2 - \text{traço}(P_{k-1}(A)\; A\; P_k(A));$

7. $\|\phi_k\|^2 = \frac{k(n-k)}{n}\, S_k(A)^2 - 2\sum_{j=0}^{k-1} (k-j)\; S_j(A) S_{2k-j}(A);$

8. $\|\phi_k\|^2 = \frac{1}{n} \sum_{1 \le i < j \le n} \left(\lambda_i\; S_{k-1}(A_i) - \lambda_j\; S_{k-1}(A_j)\right)^2.$

$\frac{1}{2}\Delta|\phi_H|^2 \geq ??$

Demonstração. Por hipótese $\{e_1, \cdots, e_n\}$ é base ortonormal que diagonaliza A.

1. Pela Definição 1.31 e pela Proposição 4.10(a) temos:

$$\|\phi_k\|^2 = \text{traço}\,(\phi_k^* \circ \phi_k) = \sum_{i=1}^{n} \langle \phi_k^* \circ \phi_k e_i, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \phi_k e_i, \phi_k e_i\rangle;$$

pela Proposição 4.10(b),

$$\|\phi_k\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle \mu_i e_i, \mu_i e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2.$$

2. Por nosso item anterior e novamente pela Proposição 4.10(b),

$$\|\phi_k\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(S_k(A_i) - (1 - \frac{k}{n})\, S_k \right)^2$$
$$= (1 - \frac{k}{n})^2\, n\, S_k^2 - 2(1 - \frac{k}{n})\, S_k \sum_{i=1}^{n} S_k(A_i) + \sum_{i=1}^{n} S_k(A_i)^2;$$

o resultado segue-se da afirmação 1.33(j) e (d).

3. Pelo item (1) e pela Proposição 4.10(b),

$$\|\phi_k\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(S_k(A_i) - (1 - \frac{k}{n})\, S_k \right)^2;$$

pela Proposição 1.27(c),

$$\|\phi_k\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\, S_k - \lambda_i S_{k-1}(A_i) \right)^2$$
$$= \frac{k^2}{n} S_k^2 - \frac{2k}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_{k-1}(A_i) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 S_{k-1}(A_i)^2;$$

o resultado segue-se da afirmação 1.33(k) e (e).

4. Vê-se imediatamente que $\sum_{i=1}^{n} S_k(A_i)^2 = \text{traço}(P_k^2)$; o resultado segue-se ao substituir esta igualdade no item (2).

5. Vê-se imediatamente que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 S_k(A_i)^2 = \text{traço}(A^2 P_{k-1}^2)$; o resultado segue-se ao substituir esta igualdade no item (3).

6. Pelo item (4),

$$\|\phi_k\|^2 = \text{traço}(P_r(A)^2) - \frac{(n-k)^2}{n}\, S_k(A)^2;$$

pela identidade (2.6) temos

$$\|\phi_k\|^2 = \Big((n-k) S_k(A)^2 - \text{traço}(P_{k-1}(A)\; A\; P_k(A)) \Big) - \frac{(n-k)^2}{n}\, S_k(A)^2.$$

O resultado segue-se imediatamente após simplificar a igualdade acima.

7. É somente usar o Corolário 2.13 no item anterior.

8. De fato A e $P_{k-1}(A)$ são simultaneamente diagonalizáveis. Neste caso, $\mu_i = \lambda_i$ e pela Proposição 1.33(i) afirmamos que $\eta_i = S_{k-1}(A_i)$. Assim,

   o item (a) da Seção 2.3 tomaria a forma

$$S_1(AP_{k-1}(A)) = \text{traço}(A\ P_{k-1}(A));$$

   por nossa Proposição 1.33(e),

$$S_1(AP_{k-1}(A)) = kS_k(A).$$

   Do exposto e do item (c) da Seção 2.3, obtemos que

$$2S_2(AP_{k-1}(A)) = k^2 S_k(A)^2 - \|A\ P_{k-1}(A)\|^2.$$

   Finalmente, substituindo esta igualdade no item (d) da Seção 2.3, temos

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} \Big(\lambda_i\ S_{k-1}(A_i) - \lambda_j\ S_{k-1}(A_j)\Big)^2 = (n-1)\ \|A\ P_{k-1}(A)\|^2 - 2S_2(AB)$$

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} \Big(\lambda_i\ S_{k-1}(A_i) - \lambda_j\ S_{k-1}(A_j)\Big)^2 = (n-1)\ \|A\ P_{k-1}(A)\|^2 - \Big\{k^2 S_k(A)^2 - \|A\ P_{k-1}(A)\|^2\Big\};$$

   em outras palavras,

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} \Big(\lambda_i\ S_{k-1}(A_i) - \lambda_j\ S_{k-1}(A_j)\Big)^2 = n\|A\ P_{k-1}(A)\|^2 - k^2 S_k(A)^2; \tag{4.5}$$

   Finalmente, pela Proposição 4.11(3), concluímos que

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} \Big(\lambda_i\ S_{k-1}(A_i) - \lambda_j\ S_{k-1}(A_j)\Big)^2 = n\ \|\phi_k\|^2.$$

■

Convém observar que o operador ϕ_k mede quanto uma hipersuperfície deixa de ser $k-$umbílica, mais precissamente temos o seguinte:

Lema 4.12. *Seja $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Então x é $k-$umbílica se e somente se $\phi_k \equiv 0$.*

Demonstração. Considere um ponto qualquer $p \in T_p\mathbf{M}$. A sequir cada eqüivalência é válida somente no ponto p.
Temos:

$$\begin{aligned}
\|\phi_k\| = 0 &\iff \left(\frac{k}{n} S_k(A)v - AP_{k-1}(A)v\right) = 0 \quad \forall v \in T_p\mathbf{M};\\
&\iff \frac{k}{n} S_k(A)v = AP_{k-1}(A)v \quad \forall v \in T_p\mathbf{M};\\
&\iff \frac{k}{n} S_k(A)I = AP_{k-1}(A);
\end{aligned}$$

conferindo a equação (4.2), concluímos que, em p, temos:

$$\|\phi_k\| = 0 \iff \text{a hipersuperfície é } k-\text{umbílica.}$$

■

4.3 Desigualdades e $k-$umbilicidade

Afirmação 4.13. *Dada uma imersão isométrica $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+p}$, para qualquer $\eta \in T\mathbf{M}^{\perp}$ temos que:*

a)

$$\frac{n-k}{\sqrt{n}} \left|S_k(A_\eta)\right| \leq \left\|P_k(A_\eta)\right\| \qquad , \forall k \in \mathbb{Z}.$$

A igualdade ocorre se e somente se x é $k-$umbílica.

b)

$$\frac{k}{\sqrt{n}} \left|S_k(A_\eta)\right| \leq \left\|A_\eta \, P_{k-1}(A_\eta)\right\| \qquad , \forall k \in \mathbb{Z}.$$

A igualdade ocorre se e somente se x é $k-$umbílica.

c)

$$traço\Big(P_{k-1}(A)\; A \; P_k(A)\Big) \leq \frac{k(n-k)}{n} \, S_k(A)^2.$$

A igualdade ocorre se e somente se x é $k-$umbílica. Em outras palavras,

$$\sum_{j=0}^{k-1} (k-j) \; S_{2k-j}(A_\eta) \; S_j(A_\eta) \leq \frac{k(n-k)}{2n} \, S_k(A_\eta)^2.$$

A igualdade ocorre se e somente se x é $k-$umbílica.

d)

$$\Big\|A_\eta\, P_{k-1}(A_\eta)\Big\| \leq \Big\|P_k(A_\eta)\Big\| \qquad ,\forall k\in\Big(-\infty\,,\frac{n}{2}\Big]\cap\mathbb{Z}.$$

A igualdade ocorre se e somente se $S_k(A_\eta)=0$ *e* $k\neq\frac{n}{2}$, *ou*

a igualdade ocorre se e somente se $k=\frac{n}{2}$ *e qualquer valor de* $S_k(A_\eta)$.

e)

$$\frac{k}{\sqrt{n}}\,\Big|S_k(A_\eta)\Big| \leq \Big\|A_\eta\, P_{k-1}(A_\eta)\Big\| \leq \Big\|P_k(A_\eta)\Big\|, \forall k\in\Big(-\infty\,,\frac{n}{2}\Big]\cap\mathbb{Z}.$$

f)

$$\Big\|P_k(A_\eta)\Big\| \leq \Big\|A_\eta\, P_{k-1}(A_\eta)\Big\| \qquad ,\ \forall k\in\Big(\frac{n}{2}\,,+\infty\Big)\cap\mathbb{Z}.$$

g)

$$\sqrt{2k-n}\,\Big|S_k(A_\eta)\Big| \leq \Big\|A_\eta\, P_{k-1}(A_\eta)\Big\| \qquad ,\ \forall k\in\Big(\frac{n}{2}\,,+\infty\Big)\cap\mathbb{Z}.$$

Demonstração.

a) Pela Proposição 4.11(2),

$$\sum_{i=1}^{n} S_k(A_{\eta_i})^2 - \frac{(n-k)^2}{n}S_k(A_\eta)^2 = \|\phi_k\|^2 \geq 0;$$

logo,

$$\|P_k(A_\eta)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} S_k(A_{\eta_i})^2 \geq \frac{(n-k)^2}{n}S_k(A_\eta)^2.$$

Agora suponhamos que a igualdade seja válida, isto é,

$$\frac{n-k}{\sqrt{n}}\,\Big|S_k(A_\eta)\Big| = \Big\|P_k(A_\eta)\Big\|;$$

ou equivalentemente:

$$\frac{(n-k)^2}{n}\,\Big(S_k(A_\eta)\Big)^2 = \Big\|P_k(A_\eta)\Big\|^2;$$

é facil ver que $\Big\|P_k(A_\eta)\Big\|^2 = \sum_{i=1}^{n} S_k(A_{\eta_i})^2$, de modo que conferindo com a Proposição 4.11(2), a igualdade mostra que $\|\phi_k\|^2=0$. Finalmente o Lema 4.12 nos assegura que a imersão dada seria $k-$umbílica. Para mostrar que a desigualdade é válida para qualquer número k inteiro, é somente conferir as Definições 1.24 e 1.28.

b) Pela Proposição 4.11(3),

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 S_{k-1}(A_{\eta_i})^2 - \frac{k^2}{n} S_k(A_\eta)^2 = \|\phi_k\|^2 \geq 0;$$

logo,

$$\|A_\eta \ P_k(A_\eta)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 S_{k-1}(A_{\eta_i})^2 \geq \frac{k^2}{n} S_k(A_\eta)^2.$$

Para mostrar que se a desigualdade for igualdade então a imersão será $k-$umbílica deve seguir as idéias dada no nosso item (a). De forma análoga para verifivar a validez para qualquer k inteiro.

c) Segue-se, imediatamente, a partir dos itens (6) e (7) da Proposição 4.11.

d) Suponhamos que $k \in \big(-\infty, \frac{n}{2}\big] \cap \mathbb{Z}$; é imediato, neste caso, que $n - 2k \geq 0$, por conseqüência $(n - 2k) \ S_k(A_\eta)^2 \geq 0$. Portanto o resultado segue-se pela equação (2.7). Os outros resultados seguem-se, novamente, a partir da equação (2.7).

e) Decorre de nossos itens (a) e (c), dados acima.

f) Suponhamos que $k \in \big(\frac{n}{2}, +\infty\big] \cap \mathbb{Z}$; é imediato, neste caso, que $n - 2k \leq 0$, por conseqüência $(n - 2k) \ S_k(A_\eta)^2 \leq 0$. Portanto o resultado segue-se pela equação (2.7).

g) Suponhamos que $k \in \big(\frac{n}{2}, +\infty\big] \cap \mathbb{Z}$; é imediato, neste caso, que $n - 2k \leq 0$, por conseqüência $-(n - 2k) \ S_k(A_\eta)^2 \geq 0$. Portanto o resultado segue-se pela equação (2.7).

■

4.4 Equivalência de Imersões $k-$umbílicas

Proposição 4.14. *Considere uma imersão isométrica* $x : \mathrm{M}^n \longrightarrow \overline{\mathrm{M}}^{n+p}$ *e seja* A_η *sua segunda forma fundamental associada a* $\eta \in T\mathrm{M}^{\perp}$*. Denotemos por* $\{e_1, \cdots, e_n\}$ *a base ortonormal que diagonaliza* A_η*, isto é,* $A_\eta e_i = \lambda_i e_i$*. A imersão dada é* $k-$*umbílica no ponto* $q \in \mathrm{M}$ *se e somente se na Fórmula de Newton,* $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j S_{k-1}(A_{\eta_j}) = k S_k(A_{\eta_j})$ *(veja os itens (e) e (k) da Proposição 1.33) cada somando é igual a* $\frac{k}{n} \ S_k(A_{\eta_j})$*.*

Demonstração. Por (4.2), para cada $X \in T_q\mathrm{M}$ temos que

$$x : \mathrm{M}^n \longrightarrow \overline{\mathrm{M}}^{n+p} \text{é } k\text{-umbílica} \iff A_\eta P_{k-1}(A_\eta) X = \frac{k}{n} S_k(A_\eta) \ X;$$

de onde, para cada j

$$x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+p} \text{é } k\text{-umbílica} \iff A_\eta P_{k-1}(A_\eta)e_j = \frac{k}{n}S_k(A_\eta)\, e_j;$$

pela Proposição 1.33(i),

$$x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+p} \text{é } k\text{-umbílica} \iff \lambda_j S_{k-1}(A_{\eta_j})e_j = \frac{k}{n}S_k(A_\eta)\, e_j;$$

assim, para cada j

$$x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+p} \text{é } k\text{-umbílica} \iff \left(\lambda_j S_{k-1}(A_{\eta_j}) - \frac{k}{n}S_k(A_\eta)\right)\, e_j = 0;$$

sendo $\{e_1, \cdots, e_n\}$ linearmente independentes, logo para cada j temos

$$x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+p} \text{é } k\text{-umbílica} \iff \lambda_j S_{k-1}(A_{\eta_j}) = \frac{k}{n}S_k(A_\eta);$$

∎

Observação 4.15. *A partir desta proposição, se a imersão isométrica* $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+p}$ *é* $k-$*umbílica e* $S_{k-1}(A_{\eta_i}) \neq 0$, *então*

$$\lambda_i = \frac{k\; S_k(A_\eta)}{n\; S_{k-1}(A_{\eta_i})}\;, \qquad \forall i.$$

Corolário 4.16. *Considere uma imersão isométrica* $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+p}$, *seja* A_η *sua segunda forma fundamental associada a* $\eta \in T\mathbf{M}^\perp$. *Denotemos por* $\{e_1, \cdots, e_n\}$ *a base ortonormal que diagonaliza* A_η, *isto é,* $A_\eta e_i = \lambda_i e_i$. *A imersão dada é* $k-$*umbílica no ponto* $q \in \mathbf{M}$ *se e somente se*

$$\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\; S_j(A_\eta)\; \lambda_i^{k-j} + (-1)^k\, \frac{k}{n}\; S_k(A_\eta) = 0 \quad \text{em } q \in \mathbf{M}. \tag{4.6}$$

Demonstração. Na demonstração do item (g) da Proposição 1.33 vimos que o $i-$ésimo auto-valor de $P_k(A_\eta)$ é igual a $\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\; S_{k-j}(A_\eta)\; (\lambda_i)^j$. Mas, usando o item (i) daquela proposição, temos que

$$S_k(A_{\eta_i}) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\; S_{k-j}(A_\eta)\; (\lambda_i)^j. \tag{4.7}$$

Agora, pela proposição anterior, para cada i

$$x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+p} \text{é } k\text{-umbílica} \iff \lambda_i S_{k-1}(A_{\eta_i}) = \frac{k}{n} S_k(A_\eta).$$

Mas

$$\lambda_i S_{k-1}(A_{\eta_i}) = \frac{k}{n} S_k(A_\eta);$$

pela equação (4.7), temos

$$\lambda_i \left(\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \, S_{k-1-j}(A_\eta) \, (\lambda_i)^j \right) = \frac{k}{n} S_k(A_\eta);$$

isto é,

$$\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \, S_{k-1-j}(A_\eta) \, (\lambda_i)^{j+1} = \frac{k}{n} S_k(A_\eta);$$

fazendo mudança de índices,

$$\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-1+j} \, S_j(A_\eta) \, (\lambda_i)^{k-j} = \frac{k}{n} S_k(A_\eta);$$

logo

$$(-1)^{k-1} \left(\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \, S_j(A_\eta) \, (\lambda_i)^{k-j} \right) = \frac{k}{n} S_k(A_\eta);$$

e finalmente

$$(-1) \left(\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \, S_j(A_\eta) \, (\lambda_i)^{k-j} \right) = (-1)^k \frac{k}{n} S_k(A_\eta).$$

De onde obtemos o resultado desejado. ■

Observação 4.17. *Como conseqüência imediata deste corolário temos que uma hipersuperfície é*

- $1-$*umbílica se e somente se* $\lambda_i = \frac{1}{n} S_1$*;*
- $2-$*umbílica se e somente se* $\lambda_i^2 - S_1 \lambda_i + \frac{2}{n} S_2 = 0$*;*

- 3−*umbílica se e somente se* $\lambda_i^3 - S_1\lambda_i^2 + S_2\lambda_i - \frac{3}{n}S_3 = 0$.

Corolário 4.18. *Considere* M^k *uma variedade Riemanniana conexa, então toda imersão isométrica de* M^k *é uma imersão* $k-$*umbílica.*

Demonstração. Seja $x : \mathrm{M}^k \to \overline{\mathrm{M}}^m$ qualquer imersão isométrica (de fato $m \geq k$). Fixado $\eta \in T\mathrm{M}^\perp$ considere A_η como sendo sua segunda forma fundamental, e sejam $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ as curvaturas principais que diagonalizam A_η. Segue-se do Teorema 1.1 que estas curvaturas principais satisfazem a seguinte equação:

$$x^k - S_1(A_\eta)x^{k-1} + S_2(A_\eta)x^{k-2} - \cdots + (-1)^k S_k(A_\eta) = 0;$$
$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j S_j(A_\eta)x^{k-j} = 0.$$

Assim, para qualquer curvatura principal λ_i, temos

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j S_j(A_\eta)\lambda_i^{k-j} = 0;$$

ou equivalentemente,

$$\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j S_j(A_\eta)\lambda_i^{k-j} + (-1)^k S_k(A_\eta) = 0;$$

mudando índices

$$\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j S_j(A_\eta)\lambda_i^{k-j} + (-1)^k S_k(A_\eta) = 0,$$
$$\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j S_j(A_\eta)\lambda_i^{k-j} + (-1)^k \frac{k}{k} S_k(A_\eta) = 0,$$

Mas esta igualdade coincide com a identidade (4.6), quando $n = k$. ∎

4.5 Conseqüências da $k-$umbilicidade

Teorema 4.19.

a) *A classe das imersões* 1−*umbílicas está contida na classe das imersões* $k-$*umbílicas. (Logo, toda imersão* 1−*totalmente geodésica é* $k-$*umbílica).*

b) Dada a imersão isométrica $x : \mathrm{M}^n \longrightarrow \overline{\mathrm{M}}^{\,n+p}$, *seja* A_η *sua segunda forma fundamental, com* $\eta \in T\mathrm{M}^\perp$. *Se* x *é k-umbílica num ponto, então (naquele ponto) são satisfeitas as seguintes identidades*

b.1)

$$S_{k+1}(A_\eta) = \frac{n-k}{(k+1)n}\, S_1(A_\eta) S_k(A_\eta),$$

isto é,

$$H_{k+1} = H_1\, H_k.$$

Reciprocamente, se existe um ponto $q \in \mathrm{M}^n$ *tal que* $\lambda_i(q) \neq 0$, $\forall i$ *e neste ponto* $H_{k+1} = H_1 H_k$, *então a imersão isométrica é* $k-$*umbílica em* q.

b.2)

$$S_1(A_\eta)\; S_{k+1}(A_\eta) - (k+2)\; S_{k+2}(A_\eta) = \left(\frac{n-k}{n}\right) S_k(A_\eta)\; \|A_\eta\|^2.$$

Demonstração.

a) Considere a imersão isométrica $x : \mathrm{M}^n \longrightarrow \overline{\mathrm{M}}^{\,n+p}$ a qual é $1-$umbílica. Mostraremos que esta imersão satisfaz alguma das definições equivalentes de $k-$umbilicidade. Em particular vamos mostrar a validez da identidade (4.2). Com efeito, a Definição 1.28 nos garante que

$$P_{k-1}(A_\eta) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j\, S_{k-1-j}(A_\eta)\, A_\eta^j\ ;$$

multiplicando ambos os membros desta igualdade, à esquerda, por A_η, obtemos

$$A_\eta\, P_{k-1}(A_\eta) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j\, S_{k-1-j}(A_\eta)\, A_\eta^{j+1}\ ;$$

por hipótese $A_\eta = \frac{S_1(A_\eta)}{n}\, I$; não é difícil verificar que $A_\eta^{j+1} = \left(\frac{S_1(A_\eta)}{n}\right)^{j+1} I$; então

$$\begin{aligned} A_\eta\, P_{k-1}(A_\eta) &= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j\, S_{k-1-j}(A_\eta)\, \left(\frac{S_1(A_\eta)}{n}\right)^{j+1} I \\ &= \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j\, S_{k-1-j}(A_\eta)\, \left(\frac{S_1(A_\eta)}{n}\right)^{j+1} \right\} I; \end{aligned}$$

como por hipótese a imersão é 1−umbílica, então todas suas curvaturas principais são iguais a $\dfrac{S_1(A_\eta)}{n}$. De onde, é fácil ver que $S_r(A_\eta) = \binom{n}{r}\left(\dfrac{S_1(A_\eta)}{n}\right)^r$.

Logo

$$\begin{aligned}
A_\eta\, P_{k-1}(A_\eta) &= \Big\{\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j \binom{n}{k-1-j}\left(\frac{S_1(A_\eta)}{n}\right)^{k-1-j}\left(\frac{S_1(A_\eta)}{n}\right)^{j+1}\Big\}\, I\\
&= \left(\frac{S_1(A_\eta)}{n}\right)^k \Big\{\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j \binom{n}{k-1-j}\Big\}\, I\\
&= \left(\frac{S_1(A_\eta)}{n}\right)^k \Big\{\binom{n-1}{k-1}\Big\}\, I\\
&= \binom{n-1}{k-1}\left(\frac{S_1(A_\eta)}{n}\right)^k I;
\end{aligned}$$

ainda porque a imersão é 1−umbílica, temos que $\left(\frac{S_1(A_\eta)}{n}\right)^r = \dfrac{S_r(A_\eta)}{\binom{n}{r}}$. Logo a igualdade acima toma a forma

$$A_\eta\, P_{k-1}(A_\eta) = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}\; S_k(A)\, I = \frac{k}{n}\, S_k(A_\eta)\, I.$$

b) Sejam λ_i suas curvaturas principais em q.

b.1) Como a imersão isométrica é k-umbílica a Proposição 4.14 afirma que para qualquer j

$$\lambda_j\, S_{k-1}(A_{\eta_j}) = \frac{k}{n}\, S_k(A_\eta);$$

multiplicando ambos os membros por λ_j, obtemos

$$\lambda_j^2\, S_{k-1}(A_{\eta_i}) = \frac{k}{n}\, S_k(A_\eta)\, \lambda_j;$$

tomando o somatório em ambos os lados, temos

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2\, S_{k-1}(A_{\eta_j}) = \frac{k}{n}\, S_k(A_\eta)\,\Big(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\Big);$$

os itens (l) e (f) da Proposição 1.33 nos assegura que

$$S_1(A_\eta)\, S_k(A_\eta) - (k+1)S_{k+1}(A_\eta) = \frac{k}{n}\, S_1(A_\eta)\, S_k(A_\eta);$$

de modo que

$$\begin{aligned}(k+1)S_{k+1}(A_\eta) &= \left(\frac{n-k}{n}\right)\, S_1(A_\eta)\, S_k(A_\eta);\\ \binom{n}{k+1}\frac{S_{k+1}(A)}{\binom{n}{k+1}} &= \frac{n-k}{k+1}\left(\frac{S_1(A)}{n}\right)\frac{S_k(A)}{\binom{n}{k}}\binom{n}{k};\\ \binom{n}{k+1}H_{k+1} &= \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}H_1\, H_k;\end{aligned}$$

como $\frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$, segue-se que

$$H_{k+1} = H_1\, H_k.$$

Reciprocamente, suponhamos que exista um ponto $q \in \mathbf{M}$ onde $H_{k+1} = H_1\, H_k$; então

$$\begin{aligned}(k+1)S_{k+1}(A_\eta) &= \left(\frac{n-k}{n}\right)\, S_1(A_\eta)\, S_k(A_\eta)\\ &= \left(1-\frac{k}{n}\right)\, S_1(A_\eta)\, S_k(A_\eta);\end{aligned}$$

reordenando temos

$$S_1(A_\eta)\, S_k(A_\eta) - (k+1)S_{k+1}(A_\eta) = \frac{k}{n}\, S_1(A_\eta)\, S_k(A_\eta);$$

e pela Proposição 1.33(f),

$$\text{traço}\Big(A_\eta^2\, P_{k-1}(A_\eta)\Big) = \frac{k}{n}\, S_1(A_\eta)\, S_k(A_\eta)$$

pela Proposição 1.33(l),

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2\, S_{k-1}(A_{\eta_j}) &= \frac{kS_k(A_\eta)}{n}\, S_1(A_\eta)\\ &= \frac{kS_k(A_\eta)}{n}\,\sum_{j=1}^{n}\lambda_j;\end{aligned}$$

em outras palavras,

$$\sum_{j=1}^{n}\Big(\lambda_j^2\, S_{k-1}(A_{\eta_j}) - \lambda_j\frac{k}{n}\, S_k(A_\eta)\Big) = 0.$$

Seja $\{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base de $T_q\mathbf{M}$; formemos a seguinte combinação linear:

$$\sum_{j=1}^{n} \Big(\lambda_j^2\, S_{k-1}(A_{\eta_j}) - \lambda_j \frac{k}{n}\, S_k(A_\eta)\Big) v_j = 0.$$

Então para cada j teremos que $\lambda_j^2\, S_{k-1}(A_{\eta_j}) - \lambda_j \frac{k}{n}\, S_k(A_\eta) = 0$. Mas isto significa que $\lambda_j\Big(\lambda_j\, S_{k-1}(A_{\eta_j}) - \frac{k}{n}\, S_k(A_\eta)\Big) = 0 \quad \forall j$. Por hipótese, no ponto $q \in \mathbf{M}$, temos $\lambda_j \neq 0$. Isto implica que, para cada j temos, $\lambda_j\, S_{k-1}(A_{\eta_j}) - \frac{k}{n}\, S_k(A_\eta) = 0$, logo a Proposição 4.14 nos garante que a imersão isométrica dada será $k-$umbílica.

b.2) Denotemos por $\{e_1, \cdots, e_n\}$ a base ortonormal que diagonaliza A_η. Sendo a imersão isométrica k-umbílica, pela identidade (4.3) temos que para cada j,

$$P_k(A_\eta)e_j = \left(1 - \frac{k}{n}\right)\, S_k(A_\eta)\, e_j;$$

pela Proposição 1.33(i),

$$S_k(A_{\eta_j})\, e_j = \left(1 - \frac{k}{n}\right) S_k(A)\, e_j;$$

isto é,

$$S_k(A_{\eta_j}) = \left(1 - \frac{k}{n}\right) S_k(A);$$

multiplicando ambos os membros desta igualdade por λ_j^2, obtemos $\forall j$:

$$\lambda_j^2 S_k(A_{\eta_j}) = \left(1 - \frac{k}{n}\right) S_k(A)\, \lambda_j^2;$$

somando, temos

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 S_k(A_{\eta_j}) = \left(1 - \frac{k}{n}\right) S_k(A_\eta) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$

Por outro lado, pela Proposição 1.33(l) e (f),

$$S_1(A_\eta)\, S_{k+1}(A_\eta) - (k+2) S_{k+2}(A_\eta) = \left(1 - \frac{k}{n}\right) S_k(A_\eta) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$

O resultado decorre do fato que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \|A_\eta\|^2$.

$\blacksquare$

Proposição 4.20. *Toda imersão isométrica $k-$umbílica tendo uma curvatura principal nula tem $n-k+1$ curvaturas principais nulas.*

Demonstração.

• Vamos mostrar, a partir de nossa hipótese, que

$$S_j(A) = 0, \quad \forall j \geq k; \text{ e para qualquer } i, \text{ temos } S_j(A_i) = 0, \quad \forall j \geq k.$$

De fato, denotemos por $\lambda_\alpha = 0$ aquela curvatura principal nula. A identidade (4.6) continuará sendo válida, em particular, para $\lambda_i = \lambda_\alpha = 0$. Dai segue-se que

$$S_k(A) = 0.$$

Por outro lado, fazendo $S_k(A) = 0$ no Teorema 4.19(b.1) obtemos:

$$S_{k+1}(A) = 0.$$

Analogamente, fazendo $S_k(A) = 0 = S_{k+1}(A) = 0$ no Teorema 4.19(b.2) obtemos:

$$S_{k+2}(A) = 0.$$

Como vimos na Proposição 4.14, $\lambda_j\ S_{k-1}(A_j) = \dfrac{k}{n}\ S_k(A)$, para qualquer j; assim, $S_k(A) - \lambda_j\ S_{k-1}(A_j) = S_k(A) - \dfrac{k}{n}\ S_k(A)$. Da Proposição 1.27(c) deduzimos que

$$S_k(A_i) = 0, \quad \forall i.$$

Agora da Proposição 1.27(c), $S_{k+1}(A_i) = S_{k+1}(A) - \lambda_i S_k(A_i)$. Deduzimos, então a partir dos resultados obtidos anteriormente, que

$$S_{k+1}(A_i) = 0, \forall i.$$

Da Proposição 1.27(c) facilmente obtemos, $S_{k+2}(A_i) = S_{k+2}(A) - \lambda_i S_{k+1}(A_i)$. Deduzimos então a partir dos resultados obtidos anteriormente, que

$$S_{k+2}(A_i) = 0, \quad \forall i.$$

Vamos utilizar um processo recursivo.

Inicio do processo recursivo: Da Proposição 1.27(c), vemos que,

$$S_{k+3}(A_i) = S_{k+3}(A) - \lambda_i S_{k+2}(A_i),$$

deduzimos, a partir dos resultados obtidos anteriormente, que

$$S_{k+3}(A_i) = S_{k+3}(A), \quad \forall i.$$

Somando em i,

$$\sum_{i=1}^{n} S_{k+3}(A_i) = nS_{k+3}(A);$$

usando a Proposição 1.33 (e), facilmente obtemos:

$$S_{k+3}(A) = 0, \quad \forall i.$$

Lembrando que, $S_{k+3}(A_i) = S_{k+3}(A), \quad \forall i$, obtemos

$$S_{k+3}(A_i) = 0, \quad \forall i.$$

Fim do processo recursivo.
Usando as mesmas idéias do "bloco recursivo", nossa afirmação fica demonstrada.

• Agora vamos provar que existen $n-k+1$ curvaturas principais nulas.

i) Como $S_n(A) = 0$, então existe pelo menos uma curvatura principal nula, isto é, $\lambda_{j_1} = \lambda_\alpha = 0$.

ii) Como para qualquer j, temos $S_{n-1}(A_j) = 0$, em particular, $S_{n-1}(A_{j_1}) = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j_1}}^{n} \lambda_i = 0$, então existe pelo menos outra curvatura principal nula, isto é, $\lambda_{j_2} = 0$.

iii) Vamos mostrar que para quaisquer $r \leq n-2$ e θ, $S_r(A_{j_1}, A_\theta) = 0$. De fato, pela Proposição 2.2 (d), temos que, $S_r(A_{j_1}, A_\theta) = S_r(A_\theta) - \lambda_{j_1} S_{r-1}(A_{j_1}, A_\theta)$. Então, $S_r(A_{j_1}, A_\theta) = 0$. Em particular, $S_{n-2}(A_{j_1}, A_{j_2}) = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j_1,\, j_2}}^{n} \lambda_i = 0$ e, portanto, existe outra curvatura principal nula, isto é, $\lambda_{j_3} = 0$.

iv) Vamos mostrar que para quaisquer $r \leq n-3$ e θ, $S_r(A_{j_1}, A_{j_2}, A_\theta) = 0$. De fato, pela Proposição 2.2 (g), temos que, $S_r(A_{j_1}, A_{j_2}, A_\theta) = S_r(A_{j_2}, A_\theta) - \lambda_{j_1} S_{r-1}(A_{j_1}, A_{j_2}, A_\theta)$. Então, $S_r(A_{j_1}, A_{j_2}, A_\theta) = 0$. Em particular, $S_{n-3}(A_{j_1}, A_{j_2}, A_{j_3}) = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j_1,\, j_2,\, j_3}}^{n} \lambda_i = 0$

e, portanto, existe outra curvatura principal nula, isto é, $\lambda_{j_4} = 0$.

Proseguindo desta forma, mostra-se que pelo menos existem $n-k+1$ curvaturas principais identicamente nulas. ∎

Afirmação 4.21. *Toda imersão isométrica $k-$totalmente geodésica sempre tem um autovalor identicamente nulo.*

Demonstração. Da Proposição 4.4 e da identidade (4.6) segue-se que

$$\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\, S_j(A_\eta)\, \lambda_i^{k-j} = 0 \quad \text{em } q \in \mathbf{M};$$

$$\lambda_i \left(\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\, S_j(A_\eta)\, \lambda_i^{k-1-j}\right) = \lambda_i \left(\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k-j-1}\, S_{k-1-j}(A_\eta)\, \lambda_i^{j}\right) = 0.$$

Isto nos garante que a imersão isométrica tem um valor próprio nulo. ∎

Afirmação 4.22. *Toda imersão isométrica $k-$totalmente geodésica tem no mínimo $n-k+1$ curvaturas principais identicamente nulas.*

Afirmação 4.23. *Se uma imersão é $1-$totalmente geodésica então sempre é $k-$totalmente geodésica, a reciproca não é verdadeira.*

Corolário 4.24. *Considere uma hipersuperfície $2-$umbílica $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+1}$, $n \geq 3$. Se num ponto temos uma curvatura principal nula então nesse ponto temos no máximo uma curvatura principal não nula, i.e., se $H_n = 0$, então $H_k = 0$, $\forall k \geq 2$.*

Proposição 4.25. *Dada uma hipersuperfície $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+1}$, denotemos por A sua segunda forma fundamental. Então valem as afirmativas:*

a) Se x é $1-$umbílica, então para qualquer $r \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} L_r(f) &= S_r(A)\, \Delta_{\mathbf{M}} f - \frac{S_1(A)}{n}\, L_{r-1}(f) \\ &= \binom{n}{r} H_r\, \Delta_{\mathbf{M}} f - H_1\, L_{r-1}(f); \end{aligned}$$

b) Se x é $1-$umbílica, então para qualquer $r \in \mathbb{Z}$,

$$L_r(f) = \left(\frac{n-r}{n}\right) S_r(A)\, \Delta_{\mathbf{M}}\, f;$$

c) Se x é $k-$umbílica, então

$$L_k(f) = \left(\frac{n-k}{n}\right) S_k(A)\, \Delta_{\mathbf{M}}\, f.$$

(Segue-se daqui, que em toda imersão $k-$umbílica, o operador L_k é elíptico sempre que $S_k(A) > 0$).

Demonstração.

a) Pela equação (1.10),

$$L_r(f) = S_r(A)\ \Delta\ f - \text{traço}\Big(A\ P_{r-1}(A)\ \text{Hess}\ f\Big);$$

sendo a hipersuperfície 1−umbílica, então $A = \frac{S_1(A)}{n}\ I$ e temos:

$$\begin{aligned} L_r(f) &= S_r(A)\ \Delta\ f - \frac{S_1(A)}{n}\ \text{traço}\Big(P_{r-1}(A)\ \text{Hess}\ f\Big) \\ &= S_r(A)\ \Delta_{\mathrm{M}} f - \frac{S_1(A)}{n}\ L_{r-1}(f). \end{aligned}$$

Pela definição da r−ésima curvatura média normalizada, temos

$$L_r(f) = \binom{n}{r}\ H_r\ \Delta_{\mathrm{M}} f - H_1\ L_{r-1}(f).$$

b) Pela Definição 1.28,

$$P_r(A) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j\ S_{r-j}(A)\ A^j;$$

sendo a hipersuperfície 1−umbílica, então $A = \frac{S_1(A)}{n}\ I$ e vê-se imediatamente que $A^j = \left(\frac{S_1(A)}{n}\right)^j I$.

Logo

$$\begin{aligned} P_r(A) &= \sum_{j=0}^{r} (-1)^j\ S_{r-j}(A)\ \left(\frac{S_1(A)}{n}\right)^j I \\ &= \left\{ \sum_{j=0}^{r} (-1)^j\ S_{r-j}(A)\ \left(\frac{S_1(A)}{n}\right)^j \right\} I. \end{aligned}$$

Como a hipersuperfície é 1−umbílica, todas suas curvaturas principais são iguais a $\frac{S_1(A)}{n}$. É fácil ver que $S_i(A) = \binom{n}{i}\left(\frac{S_1(A)}{n}\right)^i$. A igualdade acima toma a forma

$$\begin{aligned}
P_r(A) &= \left\{\sum_{j=0}^{r}(-1)^j \binom{n}{r-j}\left(\frac{S_1(A)}{n}\right)^{r-j}\left(\frac{S_1(A)}{n}\right)^j\right\} I\\
&= \left(\frac{S_1(A)}{n}\right)^r \left\{\sum_{j=0}^{r}(-1)^j \binom{n}{r-j}\right\} I\\
&= \left(\frac{S_1(A)}{n}\right)^r \left\{\binom{n-1}{r}\right\} I\\
&= \binom{n-1}{r}\left(\frac{S_1(A)}{n}\right)^r I.
\end{aligned}$$

Por ser x 1−umbílica, $\left(\frac{S_1(A)}{n}\right)^i = \dfrac{S_i(A)}{\binom{n}{i}}$. A igualdade acima toma a forma

$$P_r(A) = \frac{n-r}{n}\, S_r(A)\, I.$$

Portanto, pela Definição 1.39

$$L_r(f) = \text{traço}\Big(P_r(A)\ \text{Hess}\ f\Big) = \frac{n-r}{n}\, S_r(A)\, \Delta_{\mathrm{M}}\, f.$$

c) Sendo a imersão k−umbílica, usando-se a identidade (4.3) temos

$$P_k(A) = \left(\frac{n-k}{n}\right) S_k(A)\, I;$$

multiplicando ambos os membros desta igualdade, à direita, por Hess(f), obtemos

$$P_k(A)\ \text{Hess}(f) = \left(\frac{n-k}{n}\right) S_k(A)\ \text{Hess}(f).$$

Finalmente, pela Definição 1.39, concluímos que

$$L_k(f) = \left(\frac{n-k}{n}\right) S_k(A)\, \Delta_{\mathrm{M}}\, f.$$

■

4.6 Imersões Isométricas 2−umbílicas

Afirmação 4.26. *Dada a imersão isométrica* $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+p}$*, seja* A_η *sua segunda forma fundamental, com* $\eta \in T\mathbf{M}^\perp$*. Então a imersão isométrica não pode ser* $2-$*umbílica, num ponto, quando tivermos que* $S_1(A_\eta)^2 < \frac{8}{n}\, S_2(A_\eta)$*, ou de forma equivalente,* $\|A_\eta\|^2 < 2\left(\frac{4-n}{n}\right) S_2(A_\eta)$*.*

Demonstração. Seja $\{e_1, \cdots, e_n\}$ a base ortonormal que diagonaliza A_η (isto é, $A_\eta e_i = \lambda_i e_i$). Fazendo $k = 2$ no Corolário 4.6, temos que $\lambda_i^2 - S_1(A_\eta)\lambda_i + \frac{2}{n} S_2(A_\eta) = 0$, de onde tiramos

$$\lambda_i = \frac{S_1 \pm \sqrt{S_1^2 - \frac{8}{n}\, S_2}}{2};$$

portanto, não existe hipersuperfície 2−umbílica quando $S_1^2 < \frac{8}{n}\, S_2$, ou equivalentemente, $\|A\|^2 < 2\left(\frac{4-n}{n}\right) S_2$. ■

Teorema 4.27. (Classificação das curvaturas principais para hipersuperfícies 2−umbílicas)
As curvaturas principais de uma hipersuperfície $2-$*umbílica* $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+1}$ $(n \geq 3)$ *são da seguinte forma:*

a)

$$\lambda_{i_1} = \cdots = \lambda_{i_r} = \left(\frac{n-(r+1)}{n-2r}\right) S_1$$

e

$$\lambda_{i_{r+1}} = \cdots = \lambda_{i_n} = -\left(\frac{r-1}{n-2r}\right) S_1,$$

onde $r \in \{0, 1, 2, \cdots, [\![\frac{n}{2}]\!]$ [1]$\}$ *se* n *é ímpar e* $r \in \{0, 1, 2, \cdots, \frac{n}{2} - 1\}$ *se* n *é par.*

b)

$$\lambda_{i_1} = \cdots = \lambda_{i_{\frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{n}}\, \sqrt{-S_2}$$

e

$$\lambda_{i_{\frac{n}{2}+1}} = \cdots = \lambda_{i_n} = -\sqrt{\frac{2}{n}}\, \sqrt{-S_2},$$

[1] $[\![x]\!]$ é o menor inteiro não menor que x.

Demonstração. Seja $\{e_1, \cdots, e_n\}$ a base ortonormal que diagonaliza A (isto é, $Ae_i = \lambda_i e_i$). Fazendo $k = 2$ no Corolário 4.6, temos que $\lambda_i^2 - S_1(A)\lambda_i + \frac{2}{n}S_2(A) = 0$, de onde concluímos que

$$\lambda_i = \frac{S_1 \pm \sqrt{S_1^2 - \frac{8}{n}\, S_2}}{2}.$$

Como esta hipersuperfície tem no máximo duas curvaturas principais, podemos supor que r curvaturas principais são iguais a $\dfrac{S_1 + \sqrt{S_1^2 - \frac{8}{n}\, S_2}}{2}$ e que $n - r$ curvaturas principais são iguais a $\dfrac{S_1 - \sqrt{S_1^2 - \frac{8}{n}\, S_2}}{2}$; isto é,

$$\lambda_{i_1} = \cdots = \lambda_{i_r} = \frac{S_1 + \sqrt{S_1^2 - \frac{8}{n}\, S_2}}{2}$$

e

$$\lambda_{i_{r+1}} = \cdots = \lambda_{i_n} = \frac{S_1 - \sqrt{S_1^2 - \frac{8}{n} S_2}}{2}.$$

somando temos:

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda_{i_j} = \frac{rS_1 + r\sqrt{S_1^2 - \frac{8}{n}\, S_2}}{2}$$

e

$$\sum_{j=r+1}^{n} \lambda_{i_j} = \frac{(n-r)S_1 - (n-r)\sqrt{S_1^2 - \frac{8}{n}\, S_2}}{2};$$

então

$$S_1 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i_j} = \frac{nS_1 + (2r-n)\sqrt{S_1^2 - \frac{8}{n}\, S_2}}{2}.$$

- Suponhamos que $r \neq \frac{n}{2}$. Então $\sqrt{S_1^2 - \frac{8}{n}\, S_2} = \dfrac{(n-2)S_1}{n-2r}$. Portanto,

  i) Se $n \geq 2$, $S_1 \geq 0$ e $r < \frac{n}{2}$, então suas curvaturas principais são dadas por

$$\lambda_{i_1} = \cdots = \lambda_{i_r} = \frac{S_1 + \frac{(n-2)S_1}{n-2r}}{2} = \left[\frac{n-(r+1)}{n-2r}\right] S_1$$

e

$$\lambda_{i_{r+1}} = \cdots = \lambda_{i_n} = \frac{S_1 - \frac{(n-2)S_1}{n-2r}}{2} = -\left(\frac{r-1}{n-2r}\right) S_1.$$

ii) $n \geq 2$, $S_1 \leq 0$ e $r > \frac{n}{2}$, então suas curvaturas principais são dadas por

$$\lambda_{i_1} = \cdots = \lambda_{i_r} = \frac{S_1 + \frac{(n-2)(-S_1)}{2r-n}}{2} = \left[\frac{n-(r+1)}{2r-n}\right](-S_1)$$

e

$$\lambda_{i_{r+1}} = \cdots = \lambda_{i_n} = \frac{S_1 - \frac{(n-2)(-S_1)}{2r-n}}{2} = -\left(\frac{r-1}{2r-n}\right)(-S_1).$$

- Finalmente, se $r = \frac{n}{2}$, então $(n-2)S_1 = 0$. De modo que para $n \geq 4$ temos:

$$\lambda_{i_1} = \cdots = \lambda_{i_{\frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{n}}\sqrt{-S_2}\,,$$

$$\lambda_{i_{\frac{n}{2}+1}} = \cdots = \lambda_{i_n} = -\sqrt{\frac{2}{n}}\sqrt{-S_2}\,.$$

■

Corolário 4.28. *Se $n \in \mathbb{N}$ é um número ímpar, então toda hipersuperfície $x : \mathrm{M}^n \longrightarrow \overline{\mathrm{M}}^{n+1}$ 2−umbílica e mínima é 1−totalmente geodésica,*

Teorema 4.29. (Caracterização de hipersuperfícies 2−umbílicas via curvatura de Ricci)
Dada uma imersão isométrica $x : \mathrm{M}^n \longrightarrow \overline{\mathrm{M}}^{n+1}(c)$, $n \geq 2$. Para qualquer X, $Y \in T\mathrm{M}$ temos: a hipersuperfície x é 2−umbílica se e somente se

$$Ricc(X,\ Y) - \overline{Ricc}\,(X,\ Y) = \frac{2S_2(A)}{n}\,\langle X, Y\rangle.$$

Demonstração. Como conseqüência da equação de Gauss, vimos na prova do Teorema 2.17 que

$$\mathrm{Ricc}(X,Y) = \overline{\mathrm{Ricc}}(X,Y) + \langle A\, P_1(A)X, Y\rangle;$$

o resultado segue-se de substituir a identidade (4.2) na igualdade acima. ■

Corolário 4.30. *Seja M^n uma variedade Riemanniana conexa e $x : \mathrm{M}^n \longrightarrow \overline{\mathrm{M}}^{n+1}(c)$, $n \geq 3$, é uma hipersuperfície 2−umbílica, então $S_2(A) = constante$ em M^n.*
Segue-se que toda hipersuperfície 2−umbílica imersa em qualquer espaço de forma sempre é uma variedade Einstein, com a métrica induzida.

Demonstração. Como $\overline{\mathrm{Ricc}}(X,Y) = c\, n\, \langle X, Y\rangle$, do teorema anterior segue-se que

$$\mathrm{Ricc}(X,Y) = c\, n\langle X,Y\rangle + \langle A\, P_1(A)X, Y\rangle;$$

por hipótese, x é $2-$umbílica então

$$\mathrm{Ricc}(X,Y) = c\, n\langle X,Y\rangle + \frac{2S_2(A)}{n}\,\langle X,Y\rangle;$$

de onde,

$$\mathrm{Ricc}(X,Y) = \left(c\, n + \frac{2S_2(A)}{n}\right)\,\langle X,Y\rangle;$$

isto significa que $\mathbf{M}^n$ é uma variedade Einstein e nestas condições temos que $\left(c\, n + \frac{2S_2(A)}{n}\right)$ é constante. Logo $S_2(A) =$ constante. ■

Observação 4.31. *Considere* $\mathbf{M}^n$ *uma variedade conexa de Einstein, com* $n \geq 3$. *Se* $\mathbf{M}^n$ *pode ser imersa isometricamente em um espaço de curvatura seccional constante, então* $S_2(A)$ *é constante em* $\mathbf{M}^n$.

Demonstração. Suponha que $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c),\ n \geq 3$ é uma imersão isométrica. Da equação de Gauss temos que

$$\mathrm{Ricc}(X,\ Y) - \overline{\mathrm{Ricc}}\,(X,\ Y) = \langle AP_1(A)X, Y\rangle;$$

como $\overline{\mathrm{Ricc}}\,(X,\ Y) = cn\langle X,\ Y\rangle$, temos

$$\langle AP_1(A)X, Y\rangle = \mathrm{Ricc}(X,\ Y) - cn\,\langle X,\ Y\rangle;$$

por ser $\mathbf{M}^n$ de Einstein, então $\mathrm{Ricc}(X,\ Y) = \lambda\langle X,\ Y\rangle$,

$$\langle AP_1(A)X, Y\rangle = (\lambda - cn)\,\langle X,\ Y\rangle.$$

Assim, $AP_1(A) = (\lambda - cn)\, I$, isto significa que x é $2-$umbílica, e o resultado é conseqüência do anterior corolário. ■

4.7 Exemplos de Hipersuperfícies $2-$umbílicas

Afirmação 4.32. *A hipersuperfície* $x : S^1(r) \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ *é* $2-$*totalmente geodésica, logo é* $2-$*umbílica.*

Proposição 4.33. *Toda hipersuperfície* $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$ $2-$*umbílica com* $S_2 = 0$ *classifica-se da seguinte forma:*

a) é $1-$totalmente geodésica, ou

b) tem $n-1$ curvaturas principais identicamente nulas e a outra curvatura principal é sua curvatura média (não nula).

Demonstração. Fazendo $k=2$ na identidade (4.6) e usando o fato de que $S_2=0$ temos:

$$\lambda_i(\lambda_i - S_1) = 0, \quad \forall i.$$

Suponhamos que $\lambda_i \neq 0, \quad \forall i$; então

$$\lambda_i = S_1;$$

somando em i, temos

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = nS_1 .$$

Assim, $S_1=0$, de onde obtemos que $\lambda_i=0, \quad \forall i$. Mas isto contradiz o fato de $\lambda_i \neq 0, \quad \forall i$. Logo, da Proposição 4.20, afirmamos que, pelo menos, existem $n-1$ curvaturas principais identicamente nulas. De onde a partir de que a soma dos valores próprios é S_1, obtemos que a outra curvatura principal deve ter o valor de S_1.
Se $S_1=0$ mostramos o caso (a), enquanto se $S_1\neq 0$ mostramos o caso (b). ■

Afirmação 4.34. *Toda hipersuperfície $2-$umbílica com curvatura média constante e não nula, $x : \mathbf{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c)$, $n \geq 3$, $x(\mathbf{M})$ está contida num "cilindro"(= tubo de raio constante em redor de uma sub-variedade totalmente geodésica) de $\overline{M}$, onde*

$$\overline{\mathbf{M}}^{n+1}(c) = \begin{cases} \mathbb{R}^{n+1} & , se \quad c=0 \\ \mathbb{S}^{n+1} & , se \quad c>0 \\ \mathbb{H}^{n+1} & , se \quad c<0 \end{cases}$$

Demonstração. Da identidade (4.6) observamos que toda imersão $2-$umbílica somente pode ter dois valores possíveis para suas curvaturas principais. Além disto, do Teorema 4.27, vemos que se S_1 é constante então estas duas curvaturas principais são constantes. Logo as hipóteses no Teorema de Cartan ([Cartan]) são satisfeitas e deduzimos daí a válidez de nossa afirmação; também pode consultar [Reck] (Teorema D, na página 87). ■

Afirmação 4.35. *A superfície de Veronese em $S^4(1)$ é $2-$umbílica.*
Considere a imersão isométrica

$$\Psi : S^2(\sqrt{3}) \to S^4(1)$$

definida por

$$\Psi(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(xy,\ xz,\ yz,\ \frac{x^2-y^2}{2},\ \frac{x^2+y^2-2z^2}{2\sqrt{3}} \Big).$$

Isto define um mergulho do plano projetivo real em $S^4(1)$. Este plano projetivo mergulhado em $S^4(1)$ chama-se a superfície de Veronese.

Demonstração. Imediata pelo Corolário 4.18. ■

4.8 Classificação das Hipersuperfícies Compactas 2-umbílicas

Definição 4.36. **(Hipersuperfícies de Clifford)**
Dados $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ e $r_1, r_2 > 0$. Considere

$$\begin{aligned} S^{n_1}(r_1) =& \{u \in \mathbb{R}^{n_1+1} \ : \ \|u\| = r_1\}; \\ S^{n_2}(r_2) =& \{u \in \mathbb{R}^{n_2+1} \ : \ \|u\| = r_2\}; \\ S^{n_1}(r_1) \times S^{n_2}(r_2) =& \{(u,v) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2+2} \ : \ u \in S^{n_1}(r_1), v \in S^{n_2}(r_2)\}. \end{aligned}$$

Para que $S^{n_1}(r_1) \times S^{n_2}(r_2)$ seja uma hipersuperfície de $S^{n_1+n_2+1}(1) \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2+2}$ necesariamente $r_1^2 + r_2^2 = 1$. Neste caso estas hipersuperfícies são chamadas de hipersuperfícies de Clifford.

Afirmação 4.37. *Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$, $0 < r < 1$ e $m \in \{1, \cdots, n-1\}$ fixados, a hipersuperfície de Clifford $S^{n-m}(r) \times S^m(\sqrt{1-r^2}) \longrightarrow S^{n+1}(1)$ tem curvaturas principais*

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-m} = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r},$$

$$\lambda_{n-m+1} = \cdots = \lambda_n = \frac{-r}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Assim, fixados $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \{1, \cdots, n-1\}$ existe um número não-enumerável de hipersuperfícies de Clifford.

Teorema 4.38. *Existe uma família enumerável de hipersuperfícies 2-umbílicas na esfera Euclidiana $S^{n+1}(1)$, isto é, variando $n \geq 4$ e para qualquer $m \in \{2, \cdots, n-2\}$ a hipersuperfície de Clifford*

$$S^{n-m}(r) \times S^m(\sqrt{1-r^2}) \hookrightarrow S^{n+1}(1) \quad \text{é 2−umbílica se e somente se} \quad r = \sqrt{\frac{n-m-1}{n-2}}.$$

Ademais

$$\begin{aligned} S_k =& \left(\frac{m-1}{n-m-1}\right)^{\frac{k}{2}} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \left(\frac{n-m-1}{m-1}\right)^i \binom{n-m}{k-i} \binom{m}{i}; \\ \|A\|^2 =& \frac{n + m(n-4)(n-m)}{(n-m-1)(m-1)}; \\ Ricc\,(e_j) =& n-2, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned}$$

Demostração. Fazendo uso da Afirmação 4.11(7), temos:

$$\|\phi_2\|^2 = \left(\frac{n-2}{n}\right) S_2(A_\eta)^2 - S_1(A_\eta)\, S_3(A_\eta) - 2S_4(A_\eta);$$

depois de muitos cálculos, obtemos

$$\|\phi_2\|^2 = \frac{-m(m-n)}{2nr^4(r^2-1)^2}\Big((n-2)r^2-(n-m-1)\Big).$$

O radio é obtido usando o Lema 4.12. As outras expressões são obtidas observando que

$$\begin{aligned}\theta^2 &= \frac{n-m-1}{m-1};\\ 1+\theta^2 &= \frac{n-2}{m-1};\\ \frac{1+\theta^2}{\theta^2} &= \frac{n-2}{n-m-1};\end{aligned}$$

e finalmente usando as identidades (3.4), (3.5) e (3.6). Vale a pena observar que,

$$\begin{aligned}S_1 =& \frac{2m-n}{m-1}\sqrt{\frac{m-1}{n-m-1}},\\ S_2 =& \frac{-n}{2!},\\ S_3 =& \frac{-(n-2)(2m-n)}{3!(m-1)}\sqrt{\frac{m-1}{n-m-1}},\\ S_4 =& \frac{-(n-2)(3n-8)}{4!(m-1)(n-m-1)}\left\{\frac{1}{4}(2m-n)^2-\frac{3n(n-2)^2}{4(3n-8)}\right\}.\end{aligned}$$

■

Observação 4.39. *Se no Teorema 4.38 fazemos $n = 2\eta$ e $m = \eta + j$ teremos a seguinte família de imersões 2−umbílicas*

$$S^{\eta-j}(r)\times S^{\eta+j}(\sqrt{1-r^2})\hookrightarrow S^{2\eta+1}(1),$$

onde $r = \sqrt{\frac{\eta-j-1}{2\eta-2}}$, $\eta \geq 2$ e $j \in \{0,1,2,\cdots,\eta-2\}$.
Neste caso, $S_1(A) = \dfrac{2j}{\eta+j-1}\sqrt{\dfrac{\eta+j-1}{\eta-j-1}}$.

Observe neste caso que $S_1(A) = 0 \iff j = 0 \iff r = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Portanto, Variando $\eta \in [2,\infty)\cap\mathbb{N}$ temos que

$$S^{\eta}(\frac{1}{\sqrt{2}})\times S^{\eta}(\frac{1}{\sqrt{2}}) \longrightarrow S^{2\eta+1}(1)$$

é uma família enumerável de hipersuperfícies 2−umbílicas. Ademais, para cada $j = 1,2,\cdots,\eta$

$$\begin{aligned}S_{2j-1}(A) &= 0;\\ S_{2j}(A) &= (1)^j\binom{\eta}{j}.\end{aligned}$$

Teorema 4.40. **(Classificação Parcial das hipersuperfícies compactas 2-umbílicas)** *As imersões isométricas* $2-$*umbílicas* $x : \mathrm{M}^n \to S^{n+1}(1)$ *tem a seguinte classificação:*

a) $x(\mathrm{M})$ *é* $2-$*totalmente geodésica;*

b) se M *é compacta e* x *é um mergulho, então* $x(\mathrm{M})$ *é congruente a*

$$S^k\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times S^k\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \hookrightarrow S^{2k+1}(1);$$

c) se M *é compacta e* x *é uma imersão, então* $x(\mathrm{M})$ *é congruente a*

$$S^{n-m}(r) \times S^m(\sqrt{1-r^2}) \hookrightarrow S^{n+1}(1),$$

onde $r = \sqrt{\frac{n-m-1}{n-2}}$.

Demonstração. O Teorema 4.27 de classificação das curvaturas principais para hipersuperfícies 2-umbílicas afirma que para conhecer qualquer hipersuperfície 2-umbílica precisamos conhecer $S_1(A)$ ou $S_2(A)$. De fato, as únicas possibilidades são

$$S_1(A)\, S_2(A) = 0 \qquad \text{ou} \qquad S_1(A)\, S_2(A) \neq 0,$$

onde A é a segunda forma fundamental de x. Analisemos, então, cada possibilidade:

a) se $S_2(A) = 0$, a Afirmação 4.4 nos garante que a imersão é $2-$totalmente geodésica. Observe que se também tivermos $S_1(A) = 0$ então nossa imersão seria $1-$totalmente geodésica e o Teorema 4.19(a) nos garantiria que a imersão seria $2-$totalmente geodésica.

b) se $S_2 \neq 0$ e $S_1 = 0$, neste caso afirmamos que o item (a) do Teorema 4.27 não pode acontecer. Supondo que isto seja verdade, então a segunda função simétrica $S_2(A)$ é um múltiplo da primeira função simétrica $S_1(A)$ e como estamos supondo que $S_1(A) = 0$, teríamos que $S_2(A) = 0$. Observe que o Teorema 4.27 nos garante que $S_2(A) < 0$. Como estamos no caso de um mergulho mínimo com duas curvaturas principais de multiplicidades ≥ 2, o resultado decorre do corolário dado na página 153 de [Ots] e do Teorema 4.38;

c) se $S_2 \neq 0$ e $S_1 \neq 0$, neste caso, certamente, o item (b) do Teorema 4.27 é impossível de acontecer. Supondo que isto seja verdade, teríamos $S_1(A) = 0$. Por outro lado, a partir do Teorema 4.27 (a) podemos deduzir que a segunda função simétrica $S_2(A)$ é um múltiplo de $S_1(A)$, mas o Corolário 4.30 afirma que $S_2(A)$ é constante e consequentemente $S_1(A)$ tambem é constante. Novamente pelo Teorema 4.27 (a), concluímos que todas as curvaturas principais (da hipersuperfície 2-umbílica em $S^{n+1}(1)$) são constantes. Portanto, neste caso, toda hipersuperfície 2-umbílica é isoparamétrica. Finalmente, Cartan [Cartan] mostrou que toda hipersuperficie isoparamétrica em $S^{n+1}(1)$ com duas curvaturas principais distintas são produtos de duas esferas.

■

Referências Bibliográficas

[AdC] Alencar, Hilário; do Carmo, Manfredo. Hypersurfaces with Constant Mean curvature in Spheres, Proc. Amer. Math. Soc. 120, $N°4$ (1994), 1223–1229.

[AdCS] Alencar, Hilário; do Carmo, Manfredo and Santos, Walcy. A Gap Theorem for Hypersuperfaces of the Sphere with Constant Scalar Curvature One, Comment. Math. Helv. 77 (2002), 549–562.

[BC] Barbosa, João Lucas; Colares, António Gervásio. Stability of Hypersurfaces with Constant $r-$mean Curvature, Annals of Global Analysis and Geometry, 15 (1997), 277–297.

[BM] Bullen, Peter and Marcus, Marvin. Symmetric means and matrix inequalities, Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961), 285–290.

[Cartan] Cartan, Elie. Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces á courbure constant, Annali di Mat. 17 (1938), 177–191.

[doCarmo] do Carmo, Manfredo. Riemannian Geometry. Translated by Francis Flaherty.Birkhäuser,Boston.Second Printing, 1993.

[DdC] Dajczer, Marcos and do Carmo, Manfredo. Rotation Hypersurfaces in Spaces of Constant Curvature, Proc. Amer. Math. Soc. 277 (1983), 685–709.

[HLP] Hardy, Godfrey; Littlewood John and Pólya George. Inequalities, 2nd Ed. Cambridge Univ. Press, 1989.

[Hel] Helmberg, Gilbert. Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space. North-Holland Publishing Company. Amsterdam, 1969.

[HouLei] Hounie, Jorge and Leite, Maria Luiza. Two-ended Hypersurfaces with Zero Scalar Curvature, Indiana University Math. J. 48, N° 3 (1999), 867–882.

[Hsi] Hsiung, Chuan-Chih. Some Integral Formulas for Closed Hypersurfaces, Math. Scand. 2 (1954), 286–294.

[ML] Marcus, Marvin and Lopes, L. : Inequalities for symmetric functions and Hermitian matrices, Canad. J. Math. 9 (1957), 305–312.

[MOS] Magnus, Wilhelm; Oberhettinger, Fritz and Soni, Raj Pal. Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics (Third enlarged Edition). Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 52. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1966.

[Ots] Otsuki, Tominosuke. Minimal Hypersurfaces in a Riemannian Manifold of Constant Curvature, Amer. J. Math. 92 (1970), 145–173.

[Reck] Reckziegel, Helmut. On the Problem whether the image of a given differentiable map into a Riemannian manifold is contained in a submanifold with parallel second fundamental form, J. Reine Angew. Math. 325 (1981), 87–104.

[Reilly] Reilly, Robert. Variational Properties of Functions of the Mean Curvatures for Hypersurfaces in Space Forms, J. Diff. Geom. 8 (1973), 465–477.

[Ros] Rosenberg, Harold. Hypersurfaces of constant curvature in space forms. Bulletin des Sciences Mathématiques, 2e série. 117 (1993), 211–239.

[Schouten] Schouten, Jan Arnoldus. Uber die konforme Abbildung $n-$dimensionaler Mannigfaltigkeiter mit quadratischer Maβ bestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer Maβ bestimmung, Math. Z. 11 (1921), 58–88.

[Sc] Schur, Issai. Collected Works (A.Brauer and H. Rohrbach, eds). Vol.II. Springer–Verlag, Berlin 1973, 416–427.

[Tani] Tani, Mariko. On Hypersurfaces with Constant $k-$th Mean Curvature, Kodai Math. Sem. Rep. 20 (1968),

[Turn] Turnbull, Herbert. Theory of Equations. Oliver and Boyd, 1946, Page 66.

[vdW] Van der Waerden, Bartel, Algebra, Vol. I.Springer-Verlag, 1991, page 84, exercise 5.2.

[Walt] Walter, Rolf. Compact Hypersurfaces with a Constant Higher Mean Curvature Function, Math. Ann. 270 (1985), 125–145.