



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**  
**CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA**

**JORGE LUIZ COELHO DOMINGOS**

**UMA ANÁLISE DO PROCESSO DE MODELAGEM COMPUTACIONAL  
APLICADA AO ENSINO DE TÓPICOS DE MECÂNICA TEÓRICA COM O  
USO DO *SOFTWARE MODELLUS***

FORTALEZA-CE  
2010

**JORGE LUIZ COELHO DOMINGOS**

**UMA ANÁLISE DO PROCESSO DE MODELAGEM COMPUTACIONAL  
APLICADA AO ENSINO DE TÓPICOS DE MECÂNICA TEÓRICA COM O  
USO DO *SOFTWARE MODELLUS***

Monografia apresentada à Coordenação do Curso de Licenciatura em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito final para a obtenção do grau de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Ms. Francisco Herbert Lima Vasconcelos.

FORTALEZA-CE  
2010

D716a Domingos, Jorge Luiz Coelho  
Uma análise do processo de modelagem computacional aplicada ao ensino de tópicos de mecânica teórica com uso do software *Modellus* / Jorge Luiz Coelho Domingos. – Fortaleza: [s.n], 2010.  
82 f. : il. ; enc.

Orientador: Prof. Ms. Francisco Herbert Lima Vasconcelos  
Monografia (Graduação) - Universidade Federal do Ceará,  
Fortaleza, 2010.

1. Modelagem. 2. Mecânica teórica. 3. Informática na educação.

CDD 371.344

**UMA ANÁLISE DO PROCESSO DE MODELAGEM COMPUTACIONAL  
APLICADA AO ENSINO DE TÓPICOS DE MECÂNICA TEÓRICA COM O  
USO DO *SOFTWARE MODELLUS***

Monografia submetida à Coordenação do Curso de Licenciatura em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito final para obtenção do grau de Licenciado em Física.

Aprovada em \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

Banca Examinadora

---

Prof.Ms. Francisco Herbert Lima Vasconcelos (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará

---

Prof.Dr. José Ramos Gonçalves  
Universidade Federal do Ceará

---

Prof.Dr. Wandemberg Paiva Ferreira  
Universidade Federal do Ceará

A Deus, fonte de tudo de bom na minha vida.  
Aos meus pais, Jorge Vasconcelos e Izabel  
Cristina.  
A Francisco Evandro (*in memoriam*).

## AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais Jorge Vasconcelos e Izabel Cristina pela dedicação e preocupação com a minha formação profissional e moral. Obrigado por não acreditarem em mim quando dizia que estava com dor de barriga como desculpa para não ir à escola.

À minha irmã, Francisca Tatiane Coelho Domingos, pela paciência em liberar o computador para eu poder digitar a monografia, compensarei com vários vídeos da Avril Lavigne.

À minha tia Terezinha Vasconcelos por se preocupar bastante com a minha formação pessoal e profissional, chegando a me tratar até como a um filho.

Ao meu “primirmão” Romero Moreira Filho, por desempenhar a função de irmão o qual nunca tive.

Ao professor Ms. Francisco Herbert Lima Vasconcelos, pela orientação, amizade e por me inserir em um universo ao qual eu não conhecia, me motivando quando estava bastante desmotivado com o curso.

Aos professores Dr. José Ramos Gonçalves e Dr. Wandemberg Paiva Ferreira, por terem aceitado o convite de participar da banca, em especial a este último por também ter me aceitado como um dos seus estudantes de iniciação científica.

Ao professor Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho, por ter me aceitado como aluno ouvinte da disciplina Introdução à Mecânica Teórica I, a qual me deu suporte teórico para a realização deste trabalho.

Ao professor Dr. Afrânio de Araújo Coelho pelo apoio concedido ao longo desses anos de UFC.

Aos meus companheiros de curso, Thomaz (“Pará”), Marcus Vinícius (“Jimmy”), Rafael Anderson (“Frajola”), Robney Fiúza (“Tio Neney”) Ricardo (“Cadim”) e José Clidenor (“Zé das turbinas”), do laboratório de IC: Jardel (metralha 1), Rilder (metralha 2), Paulo Victor (Barbie), Marcelo (Chico Marcelo), Tiago, Ricardo e Antônio Rodrigues

(obrigado “toin” pela solidariedade prestada durante meu período de dificuldades), a todos estes a minha gratidão pelos momentos de descontração e profissionalismo acadêmico.

Aos meus companheiros do Laboratório de Sistemas de Baixa Dimensionalidade (LSBD), Leandro, Tiago, Wagner, Levi, Jorge Luiz, Jorge André, Davi, e em especial ao Diego Rabelo pela colaboração em diversos aspectos deste trabalho.

Aos demais professores, secretários, alunos e colegas do Curso de Licenciatura em Física do Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará, pelo profissionalismo.

Ao CNPq pelo apoio financeiro concedido a mim através do projeto PIBIC.

E claro a minha namorada Maria Hiatanara Braga Pinto pela tremenda paciência, compreensão, dedicação e carinho, fazendo com que eu alcançasse o meu melhor desempenho na execução deste trabalho. Irei compensar todos os dias em que estive ausente. Prometo.

Enfim, agradeço a toda e qualquer pessoa que porventura tenha contribuído de alguma forma com este trabalho.

“A grandeza do homem está em ele se reconhecer como miserável. Uma árvore não se dá conta da sua miséria.”

(Blaise Pascal)



## RESUMO

Este trabalho relata a viabilidade da modelagem para o ensino de tópicos de Física na área da Mecânica Teórica por meio de atividades de modelagem utilizando como ferramenta o ambiente *Modellus*. Descreve uma análise baseada na correspondência do desenvolvimento do modelo com as etapas de modelagem propostas por Pietrocola (1999). Enfatiza três problemas clássicos que fazem parte da grade de disciplinas relacionadas com a mecânica clássica, onde usaremos o formalismo newtoniano. O primeiro problema analisado é o oscilador bidimensional, o segundo são os osciladores acoplados e o último trata do movimento de uma partícula carregada na presença de um campo eletromagnético. Basicamente, o desenvolvimento destes problemas no ambiente de modelagem *Modellus*, sugere, a fim de corresponder às etapas propostas, uma nova visão de classificação de atividade de modelagem.

**Palavras-chave:** Modelagem. Mecânica Teórica. Informática educativa.

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Tabela dos dados referentes às posições, velocidades e amplitudes nas direções x e y, no caso sem amortecimento. ....	57
Tabela 2. Valores de $x_1$ , $x_2$ e $j$ : em dois casos: acoplamento fraco e acoplamento forte. ....	65
Tabela 3. Valores de y e z referente ao Gráfico - 7 , 8 e 9 .....	72

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Classificação dos Modelos. ....	20
Figura 2 Dinâmica da Metodologia Científica .....	25
Figura 3 Figura esquemática do problema do plano inclinado .....	35
Figura 4 Esquema da força no plano horizontal. ....	36
Figura 5 Tela da área de trabalho do Ambiente WLinkIt. ....	37
Figura 6 Esquema da simulação no Ambiente WLinkIt .....	38
Figura 7 Sistema Massa-Mola .....	39
Figura 8 Esquema de oscilador bidimensional. ....	40
Figura 9 Possíveis trajetórias do oscilador bidimensional sem amortecimento. ....	40
Figura 10 Esquema de osciladores acoplados .....	41
Figura 11 Trajetória de uma partícula submetida a um campo eletromagnético .....	44
Figura 12 Layout do ambiente Modellus .....	49
Figura 13 Mapa Cognitivo sobre o <i>Modellus</i> .....	50
Figura 14 Ferramenta onde se insere o modelo matemático do fenômeno estudado.....	51
Figura 15 Interface gráfica intuitiva e múltipla .....	52
Figura 16 Modelo Matemático do Oscilador Harmônico Bidimensional .....	53
Figura 17 Indicadores de Nível para os parâmetros d, O, P e S.....	54
Figura 18 Trajetórias da Partícula oscilando bidimensionalmente.....	58
Figura 19 Modelo matemático para os osciladores acoplados.....	60
Figura 20 Indicadores de Nível para alguns parâmetros mutáveis para os osciladores acoplados. ....	60
Figura 21 Oscilação sob dois regimes distintos: acoplamento forte, acoplamento fraco. ....	66
Figura 22 Modos normais de vibração em dois regimes: oscilações para baixas frequências, oscilações para altas frequências.....	67

Figura 23 Modelo matemático do movimento da partícula carregada em um campo eletromagnético. ....	68
Figura 24 Indicadores de nível para os parâmetros mutáveis $B$ , $E$ , $q$ , $m$ , $V_{0y}$ , $V_{0z}$ e $K$ . ....	69
Figura 25 Trajetória da partícula nos casos correspondentes da Tabela - 3. ....	73

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1. Gráfico da posição $x$ e $y$ e amplitudes em $x$ e $y$ versus o tempo, com amortecimento. ....	55
Gráfico 2. Gráfico da posição $x$ e $y$ e amplitudes (eixo vertical) em $x$ e $y$ versus o tempo (eixo horizontal), sem amortecimento.....	56
Gráfico 3 Oscilação onde o regime de acoplamento é fraco. ....	62
Gráfico 4 Oscilação onde o regime de acoplamento é forte. ....	63
Gráfico 5 Modos normais de vibração para altas frequências .....	64
Gráfico 6 Modos normais para baixas frequências. ....	64
Gráfico 7 Posição da partícula no eixo $y$ e $z$ em que a partícula começa na origem e no repouso. ....	70
Gráfico 8 Posição da partícula no eixo $y$ e $z$ em que a partícula começa na origem e velocidades iniciais não-nulas. ....	71
Gráfico 9 Posição da partícula no eixo $y$ e $z$ para $K = 1$ e $v_{0z} = 0$ . ....	71

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\alpha$	Alfa
$\omega$	Ômega
$\kappa$	Capa
$\Delta$	Delta

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>UMA PERSPECTIVA DA MODELAGEM COMPUTACIONAL PARA O ENSINO DE FÍSICA.....</b>	<b>20</b>
2.1	Modelo.....	20
2.2	Classificação e caracterização da modelagem computacional .....	21
2.3	Modelagem computacional para o ensino .....	23
2.4	O Ensino de Física mediado pela modelagem matemática computacional .....	25
<b>3</b>	<b>CONCEITOS PRELIMINARES DE MECÂNICA.....</b>	<b>29</b>
3.1	Aspectos históricos e conceituação inicial .....	29
3.2	Propostas didáticas para o ensino de mecânica .....	31
3.2.1	Concepções espontâneas em mecânica .....	31
3.2.1.1	Repouso de um objeto .....	31
3.2.1.2	Força e movimento .....	32
3.2.1.3	Estratégias para favorecer a mudança conceitual .....	32
3.2.2	Resolução literal como ferramenta didática no Ensino de Física .....	34
3.2.2.1	Exemplo de aplicação de metodologia da resolução literal .....	34
3.2.3	A modelagem do sistema massa-mola no ambiente WLinkIt .....	36
3.3	Aspectos conceituais da mecânica teórica .....	39
3.3.1	Oscilador Harmônico Bidimensional .....	39
3.3.2	Osciladores Acoplados .....	41
3.3.3	Movimento de uma carga sobre um campo eletromagnético .....	44
<b>4</b>	<b>PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS .....</b>	<b>47</b>
4.1	Etapas do processo de modelagem .....	47
4.2	Ferramenta utilizada na investigação – <i>Modellus</i> .....	49
<b>5</b>	<b>ANÁLISE DOS RESULTADOS .....</b>	<b>53</b>
<b>5.1</b>	<b>Problema 1- Oscilador Harmônico bidimensional .....</b>	<b>53</b>
5.1.1	Modelo matemático do oscilador bidimensional .....	53
5.1.2	Apresentação do resultado gráfico do modelo do oscilador bidimensional .....	55
5.1.3	Resultado da tabela do oscilador bidimensional .....	57
5.1.4	Visualização da simulação dos osciladores acoplados.....	58
<b>5.2</b>	<b>Problema 2- Osciladores acoplados .....</b>	<b>59</b>

5.2.1 Modelo matemático dos osciladores acoplados .....	60
5.2.2 Apresentação do resultado gráfico dos osciladores acoplados.....	62
5.2.3 Resultado da tabela dos osciladores acoplados .....	65
5.2.4 Visualização da simulação dos osciladores acoplados.....	66
<b>5.3 Problema 3- Movimento de uma partícula em um campo eletromagnético .....</b>	<b>68</b>
5.3.1 Modelo matemático do movimento de uma partícula em um campo eletromagnético .....	68
5.3.2 Apresentação do resultado gráfico do movimento de uma partícula em um campo eletromagnético.....	70
5.3.3 Resultado da tabela do movimento de uma partícula em um campo eletromagnético .....	72
5.3.4 Visualização da simulação de uma partícula em um campo eletromagnético.....	73
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>75</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>79</b>



## 1. INTRODUÇÃO

Diversos trabalhos de pesquisa têm apresentado resultados que discutem a importância do uso da modelagem computacional no ensino (MCE) de Física; (IVES, S. ARAÚJO *et al* (2004), SAMPAIO (2009), PIETROCOLA (1999), VASCONCELOS (2008).) A modelagem computacional desenvolvida no ambiente educacional, dependendo da proposta pedagógica utilizada pelo professor, pode ser um instrumento de motivação para alunos e professores, trazendo para debate e reflexões, problemas não só de Física como das mais diversas áreas.

Ao expor suas idéias na forma de modelos e testar suas hipóteses a partir da simulação, os alunos têm a chance de rever, comparar e avaliar os conceitos envolvidos no fenômeno estudado, permitindo uma construção e reconstrução do conhecimento.

Minha trajetória acadêmica com este tema ocorreu no sétimo período de minha graduação quando cursei a disciplina de Métodos de Ensino para a Física Moderna, ministrada pelo Professor Francisco Herbert do Instituto UFC Virtual. A disciplina tinha como enfoque o uso de novas metodologias de ensino abordando as novas tecnologias digitais como auxílio à interpretação de fenômenos dessa área da Física. A partir de então, trabalhei na perspectiva das simulações computacionais como mediador do processo de abstração que esse assunto requeria. Como trabalho final desta disciplina, foi solicitado um projeto de ensino que visasse o uso da informática no contexto do ensino da Física Moderna. A equipe da qual fazia parte elaborou uma proposta de uso das simulações como laboratórios virtuais. Tal trabalho foi aperfeiçoado e em novembro de 2009 foi apresentado no XXVII Encontro de Físicos do Norte Nordeste, realizado em Belém-PA. Seu título foi: *Uma Proposta Metodológica por Meio de Atividades Didáticas Mediadas por Simulações Computacionais no Contexto da Física Moderna*.

Através desta experiência, fiquei bastante entusiasmado com a proposta, a ponto de aceitar o convite realizado pelo mesmo professor para me matricular na disciplina Informática Educativa no semestre seguinte. O enfoque da disciplina era praticamente o mesmo, porém numa escala não somente restrita à Física Moderna, mas em diversas áreas do conhecimento. Foi então, nesta disciplina, onde efetivamente comecei a estudar o processo de modelagem como ferramenta didática ao ensino.

No mesmo semestre, estava cursando, como ouvinte, a disciplina Introdução à Mecânica Teórica I, e percebi que alguns problemas se encaixavam perfeitamente no *software* de modelagem *Modellus*. Foi então, com base no que estava estudando na disciplina de Informática Educativa, que notei a viabilidade do uso deste ambiente como agente mediador do processo de aprendizagem em conteúdos da Mecânica Teórica ensinados no curso de Física.

Novamente como trabalho final da disciplina, foi solicitado um projeto que tinha como objetivo geral o uso da informática como ferramenta didática. Então, fiz um trabalho baseado nessa proposta, intitulado: *O Uso do Modellus como Ferramenta ao Estudo de Sistemas de Osciladores Bidimensionais e Acoplados*. Este trabalho tinha como enfoque avaliar o potencial pedagógico do ambiente de modelagem ao estudo dos sistemas acima. Foi então, que o professor Herbert Lima aceitou em me orientar no trabalho de conclusão de curso utilizando essa mesma proposta.

Este trabalho tem como objetivo geral implementar a modelagem no ensino de tópicos de Física na área da Mecânica Teórica.

Como objetivos específicos, podemos destacar:

- Elaborar atividades didáticas voltadas para o Ensino de Física em Mecânica Teórica, a partir de uma metodologia de modelagem aplicada ao ensino propostas por Pietrocola (1999)
- Avaliar limites e possibilidades do uso do ambiente computacional *Modellus* como *software* de modelagem aplicada ao ensino de Física em Mecânica Teórica.

Como justificativa para a realização deste trabalho, destaca-se a necessidade da difusão da aplicabilidade dos ambientes de modelagem computacional no ensino de Física, uma vez que existem diversas pesquisas que comprovam os benefícios dessa metodologia.

Com o advento das TEDIC (Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação) surgem diversos recursos educacionais digitalizados. Entre eles os ambientes de modelagem computacional. Apesar das numerosas pesquisas que relatam a viabilidade no sentido positivo do seu uso no ensino de Física, a prática da modelagem como ferramenta metodológica é pouco utilizada. Muitos tópicos de disciplinas de Mecânica Clássica em

cursos universitários ocorrem a necessidade de uma ferramenta que possa viabilizar o processo de aprendizagem do conteúdo estudado. Como exemplo, podemos citar a visualização das trajetórias formadas por osciladores bidimensionais submetidos a certas condições de contorno ou mesmo a análise dos modos normais de vibração de osciladores acoplados. Acreditamos que, através do uso do ambiente de modelagem *Modellus*, é possível dinamizar essa análise visualizando não só gráficos ou tabelas, mas a própria simulação do fenômeno. Tal metodologia dificilmente é encontrada nas salas de aula destas disciplinas.

Acreditamos que o uso dos ambientes de modelagem poderá contribuir de forma significativa a formulação de conceitos por parte dos estudantes que cursam disciplinas de Mecânica Clássica. Por fim, acreditamos que por si só uma ferramenta de modelagem não teria contribuições significativas no âmbito do entendimento de algumas situações físicas. São necessárias certas etapas que possam fundamentar a prática pedagógica das atividades de modelagem. Tais etapas, propostas por Pietrocola (1999), serão norteadoras para as atividades realizadas neste trabalho.

A estrutura do trabalho pode ser especificada da seguinte forma:

O **segundo capítulo** abordará alguns aspectos teóricos da modelagem para o ensino de Física. Neste capítulo serão tratadas algumas definições de modelo, processo de modelagem e MCE de Física.

O **terceiro capítulo** trará alguns conceitos didáticos e preliminares de Mecânica Teórica bem como a discussão dos problemas os quais utilizamos como atividade de modelagem neste trabalho.

No **quarto capítulo** serão abordados os procedimentos metodológicos que nortearam o presente trabalho, onde será feito o uso da proposta de modelagem apresentando o ambiente utilizado nesta investigação do trabalho, o *software Modellus 4.0*, bem como a apresentação de algumas situações investigadas no ensino da Mecânica Clássica.

Os resultados dos procedimentos metodológicos serão tratados no **quinto capítulo** o qual apresentará análise qualitativa e quantitativa de cada ferramenta do ambiente em todos os problemas utilizados no trabalho.

Por fim, no **sexto capítulo** apresentaremos as considerações finais do estudo, propondo investigações posteriores.

Esperamos com esse trabalho, contribuir ao universo acadêmico, em especial ao ensino de Física, de forma a difundir e aprimorar utilização da prática da modelagem para o ensino, como ferramenta facilitadora do processo de ensino aprendizagem.

## 2. UMA PERSPECTIVA DA MODELAGEM COMPUTACIONAL PARA O ENSINO DE FÍSICA

Neste capítulo, explicitaremos sobre modelagem e sua aplicabilidade no âmbito do ensino de Física. Iniciaremos com a definição de modelo. Em seguida descreveremos a modelagem e sua classificação. No final, será relatada a relação da modelagem computacional com o ensino de Física.

### 2.1 Modelo

Para que haja o entendimento do significado dos processos de modelagem, pode-se iniciar pela definição de modelo:

Um modelo é a representação simplificada da realidade ou das principais características de um sistema. Ele é composto por um conjunto de relações que podem ser expressas sob a forma de palavras, diagramas, tabelas de dados, gráficos, equações matemáticas ou qualquer combinação desses elementos e que possibilite a simulação de fenômenos observados empiricamente ou não. (MOREIRA, 2001, p.17).

De maneira geral podemos dizer que um modelo se trata de uma representação de um fenômeno que se queira estudar. Esta representação se dá por meio de símbolos. Estes, por sua vez, variam de acordo com o recurso ou ferramenta disponível, podendo ser simples ou altamente complexos, conforme o grau de fidelidade exigido do modelo criado, e com o nível de abstração desejado.

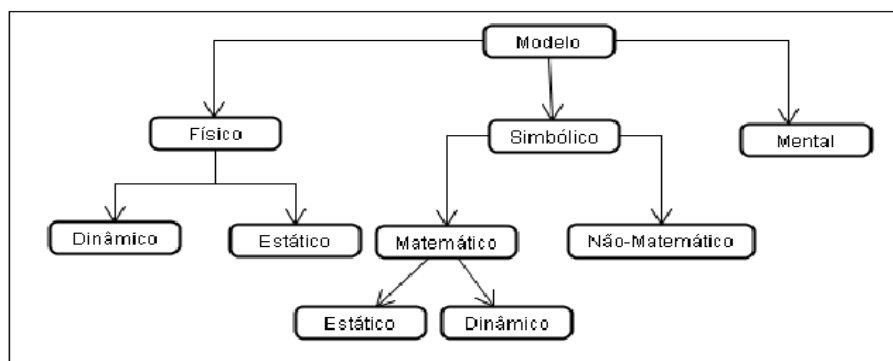


Figura-1 Classificação dos Modelos. Fonte: SILVA (2006 *apud* VASCONCELOS, 2008)

Segundo Neelamkavil (*apud* KURTZ DOS SANTOS, 1994) os modelos podem ser agrupados de acordo com a Figura-1 onde são representadas de forma simplificada as classificações de modelo. Dessa forma, este autor afirma que os modelos podem ser divididos em físicos, simbólicos e mentais, sendo que os modelos simbólicos podem ser classificados em matemáticos e não matemáticos.

Quanto à evolução cronológica, os modelos físicos podem ser classificados em estáticos e dinâmicos. Os modelos físicos são representações do mundo físico, e são estruturados em componentes tangíveis e mensuráveis. Normalmente são protótipos de um sistema mais complexo, construídos com a finalidade de se avaliar em alguns aspectos do sistema original (PEDRO, 2006). Quando esses modelos não sofrem influência do tempo sobre os seus elementos os classificamos como **modelos físicos estáticos**, caso contrário as mudanças do comportamento são refletidas ao longo do tempo e essas mudanças, segundo Ford (1999), podem ser de *crescimento*, *deterioração* ou *oscilação*. Desta forma os definimos como **modelos físicos dinâmicos**.

Já os **modelos simbólicos matemáticos**, segundo Bassanezi (1994), designam um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam o objeto estudado, o qual expressa e interpreta uma ou mais hipóteses de maneira qualitativa, residindo sua importância no fato de possibilitar a expressão de nossas idéias de maneira clara, em uma linguagem concisa e universal.

Os **modelos simbólicos não – matemáticos** podem ser constituídos de: (1) uma descrição lingüística – a explicação detalhada de um projeto elétrico, por exemplo, ou (2) um gráfico – a representação de um comportamento quantitativo em um plano cartesiano, exemplos: um organograma de uma empresa, um cronograma de um projeto e assim por diante. (SILVA, 2006).

Os **modelos mentais** de um indivíduo representam abstrações criadas a partir da sua experiência, por meio de um processo individual de filtragem e de organização do pensamento (KURTZ DOS SANTOS, 2002; LAIRD, 1983).

## 2.2 Classificação e caracterização da modelagem computacional.

Ao criarmos, manipularmos e implementarmos um modelo, estamos realizando um processo de modelagem (VASCONCELOS, 2008). Existe uma infinidade de possibilidades de modelos para um mesmo fenômeno ou objeto. Essa grande variedade se dá devido aos aspectos que são considerados pra quem modela, se dá também pelo grau de

fidelidade que o modelador pode proporcionar tendo como base suas habilidades e seus conhecimentos em relação ao que se quer modelar.

Partindo do contexto do fenômeno físico, a modelagem pode ser pensada como um processo cognitivo de construção de um modelo científico para descrevê-lo. Segundo Halloun (1996), este processo é denominado como modelagem esquemática. Os modelos científicos são esquemáticos no sentido de que como outros esquemas científicos (conceitos, leis e outras estruturas compartilhadas pelos cientistas): (i) utilizam um número limitado de características básicas quase independentes das idiossincrasias individuais dos cientistas; e (ii) são desenvolvidos e aplicados seguindo esquemas genéricos de modelagem.

Desta forma, podemos afirmar que o processo de modelagem possui uma característica fundamental que é selecionar elementos importantes da realidade e decidir que relações entre esses elementos importantes da realidade, que relações entre esses elementos devem ser relevantes, para que se possa melhor compreender, prever e efetuar deduções (VASCONCELOS, 2008).

O grau de fidelidade que se quer obter entre os elementos reais e os elementos representacionais é determinado em como se dá o processo de seleção dos elementos relevantes que possam “imitar” o fenômeno. Como já discutido, esse processo pode ser laborioso quando o nível de abstração e complexidade exige um grau de conhecimento de quem modela adequado.

Existem diversos *softwares* que possuem ferramentas que viabilizam esse processo, desta forma o classificamos como ambiente de modelagem (VASCONCELOS, 2008). *Softwares* de modelagem permitem a representação de estruturas significantes e eventos de um determinado mundo, onde contêm um conjunto de regras que governam o funcionamento de suas partes, podendo ser utilizados para comparar e descrever diferentes representações (SOWA, 1984).

Quando um dos componentes do *software* objetiva imitar o comportamento de um certo domínio de algum fenômeno em questão, associamos essa idéia à **simulação computacional** (SAMPAIO, 2009). Neste contexto, Steed (1992 *apud* SAMPAIO 2009, p.2) diferencia os modelos das simulações: “modelos são uma representação de estruturas,

enquanto que a simulação infere um processo de interação entre as estruturas que compõem o modelo com o objetivo de criar um comportamento”. Podemos então, com esta definição, afirmar que um ambiente (ou sistema) de modelagem pode ser utilizado tanto para criar modelos, quanto para simulações.

Sampaio (2009, p.2) acrescenta que: “Em outras palavras pode-se dizer que as simulações focam os resultados (saídas) gerados pela execução do modelo (a qual o usuário não tem acesso) que elas contêm.”

### **2.3 Modelagem computacional para o ensino**

Ambientes de modelagem possuem ferramentas que contribuem significativamente para processos de modelização. Facilitando por demais sua criação, dinamizando a sua manipulação e contribuindo para a sua validação. Através de suas ferramentas, os estudantes podem criar modelos a partir de suas próprias concepções sobre o fenômeno estudado ou até mesmo explorar modelos já prontos.

Segundo Weeb & Hassen (1988 *apud* VEIT; TEODORO 2002, p.88) a inserção da modelagem no ensino pode trazer as seguintes contribuições:

- Elevar o nível do processo cognitivo, exigindo que os estudantes pensem em um nível mais elevado, generalizando conceitos e relações;
- Exigir que os estudantes definam suas idéias mais precisamente;
- Propiciar oportunidades para que os estudantes testem seus próprios modelos cognitivos, detectem e corrijam inconsistências.

Podemos perceber que o uso das ferramentas de modelagem pode proporcionar o aumento da compreensão do conteúdo curricular, construção de relações e significados, aumento da definição de idéias e correção e teste dos modelos cognitivos.

Para Bliss & Ogborn (1990) são dois, os modos distintos, porém complementares de utilização de uma ferramenta computacional de modelagem:



- **Modo Exploratório (MO):** neste modo o aluno é levado a utilizar no *software* um modelo, desenvolvido anteriormente por um especialista;

- **Modo Expressivo (ME):** neste modo o aluno é solicitado a desenvolver um modelo na ferramenta sugerida.

Segundo Pedro (2006), as ferramentas de modelagem permitem que o aluno utilize o ambiente de modelagem tanto do MO como do ME, podendo criar modelos e explorá-los ou apenas simulá-los, se forem criados anteriormente por outro usuário.

Seja qual for o modo, as atividades envolvem, naturalmente, a atividade de raciocínio. Desta forma, Bliss & Ogborn (1990) sugerem que o raciocínio pode ser concebido a partir de três dimensões: **qualitativa, quantitativa e semiquantitativa**. Segundo estes pesquisadores, o raciocínio quantitativo envolve fazer distinções categóricas, usar habilidades de descrição e conceituar as propriedades e grandezas relevantes em um determinado fenômeno analisado. Já o raciocínio qualitativo pode manipular uma variedade de aspectos desde o reconhecimento de relações numéricas simples até a utilização de relações algébricas. Neste caso, normalmente a ferramenta solicita que as relações entre os elementos do modelo sejam descritas por meio de uma linguagem matemática. Por último, o raciocínio semiquantitativo envolve a identificação das relações de causa e efeito entre os elementos do modelo matemático, utilizando expressões ordinárias para descrever esse comportamento. Um exemplo simples seria: se A aumenta então B também aumenta, ou, se A aumenta, então B diminui e assim por diante. Porém, nesse tipo de atividade de raciocínio, não se sabe o quanto se aumenta ou diminui conseqüentes da relação dos parâmetros.

Para SAMPAIO (2009, p.6), a questão da modelagem no ensino pode ser abordada a partir de pelo menos três perspectivas: a construção do conhecimento em Ciências, a explicação do refinamento das representações mentais sobre um conhecimento, e a percepção do mundo a partir de uma visão de dinâmica de sistemas.

A construção do conhecimento se insere na idéia de que o primeiro objetivo das ciências é o de tentar entender e explicar fenômenos que ocorrem no mundo real. Os modelos têm papel fundamental neste processo, sendo utilizados pelos cientistas como importantes “ferramentas do pensamento” no auxílio ao desenvolvimento de suas atividades. Dentro desta perspectiva, a atividade (ou metodologia) científica pode ser vista como o ciclo apresentado na Figura - 2.

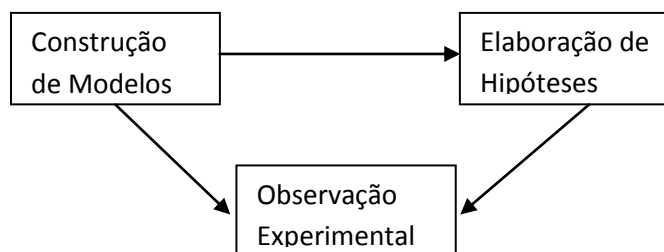


Figura- 2 Dinâmica da Metodologia Científica. Fonte: SAMPAIO, (2009)

A explicitação das representações mentais geralmente é feita através do lápis e papel, permitindo a externalização dos conceitos criando um modelo concreto do que antes era mental. O ambiente de modelagem - permite aos estudantes ir além da exploração destes conhecimentos, investigando as relações entre diferentes objetos, formulando e testando hipóteses, etc. (MELLAR *et all* 1994).

A percepção do mundo a partir de uma visão dinâmica dos sistemas é uma perspectiva que pode ser entendida como uma “nova” forma de entender fenômenos dinâmicos que ocorrem no nosso dia-a-dia, levando em conta não apenas as relações causais entre pares de variáveis, mas o comportamento do sistema como um todo. Do ponto de vista educacional, o entendimento e aplicação destes conceitos abrem aos estudantes a possibilidade de entender sistemas dinâmicos complexos, focando tanto nas formas de um determinado sistema, como também o como e o porquê de tais sistemas mudarem com o passar do tempo (ROBERTS, 1996; MANDINACH e CLINE, 1994; *apud* SAMPAIO 2009).

## 2.4 O Ensino De Física mediado pela modelagem matemática computacional

Grande parte dos alunos, até mesmo os universitários da área das exatas, apresenta muitas dificuldades de aprendizado em tópicos relacionados à Física. Vasconcelos (2008) acredita que estas dificuldades estão associadas à metodologia pela qual essa ciência, muitas vezes, é apresentada:

[...] o conhecimento científico, e mais especificamente o conhecimento em Física, é constituído por teorias que se estruturam e dinamizam através de modelos matemáticos. Esta relação pode ser vista de forma equivocada no ensino de Física por meio apenas de uma estreita necessidade de aprender e decorar fórmulas. Por outro lado, ela pode ser pensada como uma oportunidade de se trabalhar com atividades que explorem a equação matemática (modelo), tornando assim o conceito físico melhor compreendido. (VASCONCELOS, 2008, p.47).

A modelagem introduzida como atividade metodológica no processo ensino/aprendizagem tende a quebrar essa mistificação. Essa inserção possibilita uma melhor compreensão do conteúdo, contribuindo assim para o desenvolvimento cognitivo em geral, pois a modelagem viabiliza a construção de relações e significados (VEIT & TEODORO, 2002).

Dentre as habilidades preconizadas pelas Diretrizes Curriculares para o Ensino Superior (2001) a serem desenvolvidas pelos estudantes de graduação em Física, se destacam:

1. Utilizar a matemática como uma linguagem para a expressão dos fenômenos naturais;
2. Resolver problemas experimentais, desde seu reconhecimento e a realização de medições, até à análise de resultados;
3. Propor, elaborar e utilizar modelos físicos, reconhecendo seus domínios de validade;
4. Concentrar esforços e persistir na busca de soluções para problemas de solução elaborada e demorada;
5. Utilizar a linguagem científica na expressão de conceitos físicos, na descrição de procedimentos de trabalhos científicos e na divulgação de seus resultados;
6. Utilizar os diversos recursos da informática, dispondo de noções de linguagem computacional;

As atividades de modelagem através de um ambiente computacional de modelagem auxiliam de forma bastante significativa o desenvolvimento das habilidades citadas acima de acordo com o que até agora foi discutido.

Uma ferramenta de modelagem é útil, na medida em que facilita tanto o processo de manipulação de um modelo quanto o teste deste. A finalidade do modelo é de poder ser utilizado para a análise e entendimento do fenômeno original, tornando mais simples esse processo de estudo e aprendizagem (PEDRO, 2006).

Segundo Vasconcelos (2008), não é suficiente a existência de um ambiente de modelagem em si. É preciso que a atividade de modelização seja executada em um processo claro e metodológico de abordagem. Como exemplo de um processo existente, no contexto da

Física é a modelagem esquemática (HALLOUN, 1996). Este último afirma que a modelagem de sistemas físicos é um processo cognitivo de construção e seguiria uma proposta com cinco estágios que apresentam as seguintes características:

1. **Seleção:** escolha de um modelo físico apropriado semelhante ao que se deseja modelar.
2. **Construção:** criação dos modelos matemáticos baseadas em leis e relações teóricas que ajudam a resolver matematicamente o problema.
3. **Validação:** comparação do modelo estudado analisando sua consistência em relação ao sistema físico tomado como referência.
4. **Análise do Modelo:** verificação dos propósitos desejados com a construção do modelo com os propósitos contemplados pela sua manipulação.
5. **Expansão do Modelo:** aprimoração do conhecimento do fenômeno em estudo através da experiência da modelagem utilizada.

Através desses estágios o autor pressupõe que os modelos não só físicos, mas científicos de uma maneira geral utilizam um número limitado de características básicas quase independentes das idiossincrasias individuais dos cientistas e são desenvolvidos e aplicados seguindo esquemas genéricos de modelagem.

Quando modelamos fenômenos físicos voltados para o ensino no computador, estamos transferindo a resolução dinâmica de um problema para que os computadores possam realizar cálculos numéricos e algébricos, desta forma, liberando para os estudantes mais tempo para pensar nas hipóteses assumidas, interpretações de gráficos e soluções, na análise da validade de modelos e possíveis generalizações e expansões do modelo que podem ser realizadas (ARAUJO and VEIT, 2005).

Como será verificado neste trabalho, o ambiente de modelagem adotado permitirá todos esses benefícios acrescentando a possibilidade da visualização da simulação do problema. Possibilitando que o aluno verifique o comportamento fenomenológico desta

simulação quando o sistema de alguma forma é alterado.

Portanto as atividades de modelagem compreendem duas formas: modelagem exploratória, e modelagem expressiva. A partir dessa atividade se busca manipular um modelo do fenômeno real. Essa atividade deve ser norteada por uma série de estágios bem definidos.

No próximo capítulo serão abordados alguns conceitos relacionados com a mecânica clássica. Serão tratados aspectos históricos, algumas propostas alternativas de ensino de mecânica e o tratamento matemático dos problemas de mecânica abordados neste trabalho.

### 3. CONCEITOS PRELIMINARES DE MECÂNICA

Neste capítulo abordaremos alguns aspectos da Mecânica abrangendo desde a história aos aspectos teóricos. A primeira seção será reservada para algumas temáticas históricas abrangendo a mecânica. Na segunda serão apresentados exemplos de trabalhos pesquisa propondo algumas alternativas para o ensino deste tema. Na última seção será tratado o modelo matemático dos problemas temáticos deste trabalho: Oscilador harmônico bidimensional, Oscilador Acoplado e Movimento de uma carga em um campo eletromagnético.

#### 3.1 Aspectos históricos e conceituação inicial

A Mecânica Clássica se refere às três principais formulações da mecânica pré-relativística: a mecânica newtoniana, a mecânica lagrangeana e a mecânica hamiltoniana. É a parte da Física que analisa o movimento, as variações de energia e as forças que atuam sobre um corpo.

O pensamento grego foi de fundamental importância no desenvolvimento do conhecimento científico efetuado durante a Idade Média, particularmente do pensamento de Aristóteles (ZANETIC, 1988). O pensamento de filósofos gregos tal como de Tales de Mileto (624 a.C.-547 a.C.) em relação à composição do Universo a Astronomia grega no que se refere ao movimento das suas esferas de cristal, carregando os corpos celestes. Somando-se com a idéia da imobilidade da Terra no centro do universo e a concepção do movimento local de Aristóteles com as categorias de movimento natural e violento. Enfim todos esses pensamentos gregos foram transferidos como herança para físicos medievais como Galileu (1564-1642), Kepler (1571-1630) e Descartes (1596-1650).

A formulação newtoniana é o principal fundamento da mecânica clássica, e é assim chamada em homenagem a Sir Isaac Newton (1642-1727), que a desenvolveu no século XVII, complementando o trabalho de Galileu.

A mecânica newtoniana é embasada sobre as conhecidas três leis de Newton.

1. Todo corpo permanece em estado de repouso ou de movimento uniforme, em linha reta, a menos que seja obrigado a mudá-lo por forças aplicadas sobre ele.
2. A taxa de variação de momento linear é proporcional à força resultante aplicada, e na direção em que a força age.
3. Para cada ação existe sempre uma reação igual em intensidade, na mesma direção e em sentido oposto atuando em corpos distintos.

Symon (1982, p.26) salienta que as leis de Newton não se referem simplesmente ao fato de que a força resultante é igual ao produto da massa pela aceleração. Isto não é nada mais do que a definição de força resultante. Newton propôs que as leis da Física podem ser mais claramente expressas em termos do conceito de força.

A mecânica de Lagrange ou mecânica lagrangeana, nomeada em honra ao seu conceptor, Joseph-Louis de Lagrange, é uma formulação da mecânica clássica que combina a conservação do *momentum* com a conservação da energia. Exposta pela primeira vez no livro *Mécanique Analytique* em 1788, a formulação é provida de uma potente ferramenta matemática e é equivalente a qualquer outra formulação da mecânica, como, por exemplo, o formalismo newtoniano.

Na mecânica lagrangeana, a trajetória de um sistema de partículas é obtida resolvendo as equações de Lagrange em uma de suas duas formas, chamadas equações de Lagrange de primeira espécie. Elas tratam as restrições explicitamente como equações adicionais, geralmente utilizando os multiplicadores de Lagrange. As equações de Lagrange de segunda espécie incorporam as restrições diretamente na escolha das coordenadas generalizadas. O lema fundamental do cálculo de variações mostra que resolver as equações de Lagrange é equivalente a encontrar o caminho que minimiza o funcional ação, uma quantidade que é a integral da função de Lagrange no tempo.

Mecânica hamiltoniana é uma reformulação da mecânica clássica que foi desenvolvida em 1833 pelo matemático irlandês William Rowan Hamilton. Originou-se da mecânica lagrangeana. Ela pode, entretanto ser formulada sem recorrer à mecânica lagrangiana, usando espaços simpléticos. O método hamiltoniano difere do lagrangeano em que ao invés de expressar confinamentos diferenciais de segunda ordem sobre um espaço coordenado  $n$ -dimensional, ela expressa confinamentos de primeira ordem sobre um espaço de fases  $2n$ -dimensional.

Como a mecânica lagrangeana, as equações de Hamilton fornecem uma maneira nova, porém equivalente de olhar mecanismos clássicos. Estas equações fornecem introspecções mais profundas na estrutura geral de mecanismos clássicos e em sua conexão aos mecânicos quânticos como compreendidos através dos mecânicos hamiltonianos, assim como suas conexões a outras áreas da ciência.

### 3.2 Propostas didáticas para o ensino de mecânica

#### 3.2.1 Concepções espontâneas em mecânica.

As concepções espontâneas, também chamadas de erros conceituais segundo VIENNOT, *apud* PIETROCOLA (1999) possuem dentre as suas características:

- a) São idéias diferentes das expressas através dos conceitos, leis e teorias que os alunos têm que aprender;
- b) São muito difíceis de serem mudadas e resistem ao ensino de conceitos que conflitam com elas;
- c) São responsáveis, em parte, pelas dificuldades que os alunos encontram em disciplinas aos quais eles possuem certa concepção.
- d) Apresentam semelhanças com as idéias de pensamento encontradas na evolução de teorias físicas (na Mecânica: física aristotélica e a física do *ímpetus*<sup>1</sup>, por exemplo), o que oferece uma forte evidência de que estes erros não são simplesmente indícios de ignorância.

##### 3.2.1.1 Repouso de um objeto

Segundo Pietrocola (1999) no estudo da Dinâmica, tanto no ensino médio quanto no ensino superior, situações de repouso de um objeto recebem tradicionalmente pouca ênfase em sala de aula. Peduzzi (1984) relatam os resultados de uma pesquisa efetuada com estudantes universitários do curso de engenharia que tal explicação típica sobre o repouso está longe de ser óbvia para eles.

O resultado dessa pesquisa foi que vários estudantes não compreendiam como um objeto inanimado, tal como uma mesa ou uma mola, poderia “exercer força sobre outro

---

1 – A física aristotélica se refere as suas concepções de movimento: natural e violento.

A física do *ímpetus* se refere a uma concepção de que o movimento só se mantinha sob ação permanente de uma força. Ver Zanetic (1988).



corpo”.

### 3.2.1.2 Força e movimento

PIETROCOLA (1999) sintetiza as concepções alternativas mais comuns envolvendo o movimento dos corpos:

- i) Para que um objeto se mantenha em movimento é necessário que uma força atue continuamente sobre ele.
- ii) O sentido da força aplicada coincide sempre com o sentido do movimento.
- iii) Sob a influência de uma força constante, um objeto se movimenta com velocidade constante.
- iv) A intensidade da força aplicada é proporcional à intensidade da velocidade.

Este acrescenta que a observação diária induz o indivíduo a pensar que um corpo se detém quando cessa a força que o empurra, estabelecendo assim uma relação direta entre a força e a velocidade.

### 3.2.1.3 Estratégias para favorecer a mudança conceitual.

Existe na literatura um relativo consenso a respeito das estratégias que devem ser utilizadas de modo que favoreça a mudança conceitual das suas concepções espontâneas para as concepções aceitas na ciência. Para que isso possa acontecer Pietrocola (1999) cita a importância de que:

- a) Os alunos se conscientizem de suas próprias concepções alternativas.
- b) Suas concepções sejam analisadas e discutidas em sala de aula.

Para isso, pode-se fazer uso:

- De experiências de laboratório, tanto em nível qualitativo quanto quantitativo CLEMENT, (*apud* PIETROCOLA, 1999).

- Da apresentação de exemplos e contra-exemplos MIGUEL (1986, *apud* PIETROCOLA)

- Da resolução de problemas - não na forma como normalmente são propostos

nas tradicionais listas de problemas, como simples exercícios de aplicação da teoria, mas como um meio através do qual o aluno possa discutir mais a situação física envolvida e seus possíveis modelos alternativos a respeito GIL PÉREZ & MARTINEZ, 1983; PEDUZZI, 1987 *apud* PIETROCOLA, 1999).

- Da discussão de aspectos ligados à História da Ciência como forma de estabelecer um paralelismo entre algumas concepções espontâneas dos estudantes e importantes idéias mantidas no passado e também para o aluno perceber a evolução de conceitos e o desenvolvimento de teorias (DRIVER, 1979; GILBERT & ZYLBERSTAJN, 1985; PEDUZZI, 1998 *apud* PIETROCOLA, 1999).

c) O modelo científico e o alternativo sejam comparados quanto ao seu poder explicativo e suas limitações.

d) O modelo científico seja aplicado em situações conhecidas e novas.

Tomando como base o pensamento de que a aprendizagem é um processo que envolve compreender e aceitar idéias que sejam inteligíveis e racionais STRIKE *et al* (1982 *apud* PIETROCOLA,1999) postulam-se quatro condições necessárias para favorecer a mudança conceitual:

- Deve haver descontentamento com as condições existentes;

O estudante deve perceber que o seu modelo não pode explicar todos os fenômenos relacionados com o seu modelo.

- Uma idéia ou conceito novo deve ser inteligível;

Para que o estudante possa enxergar a aplicabilidade do novo conceito é necessário que este conceito seja bem compreendido.

- Uma idéia ou conceito novo deve parecer inicialmente plausível.

Deve haver consistência entre as novas idéias e as idéias que o indivíduo já possui.

- Uma idéia ou conceito novo deve ser útil;

A nova idéia ou conceito novo deve servir para explicar as anomalias encontradas na tentativa de descrever certa situação em que o antigo modelo não conseguia explicá-lo.

### 3.2.2 Resolução literal como ferramenta didática no Ensino de Física.

No ensino de Física tanto no ensino Médio quanto no superior as listas de exercícios/problemas cumprem um importante papel no aprendizado do aluno. Servindo de método de avaliação de muitos professores que julgam a capacidade da aplicação da teoria na resolução destas listas. Segundo PIETROCOLA (1999), as pressões que os alunos sentem pela forma e dimensão destas listas faz com que os alunos não leiam os livros didáticos, acreditando que as suas anotações em sala de aula são suficientes para se introduzir com sucesso nessa atividade. Isto contribui amplamente com as resoluções mecânicas e sem uma avaliação crítica necessária para se concretizar o aprendizado.

“O aluno acaba acumulando noções e procedimentos indevidos em relação à resolução de problemas ao longo de boa parte de sua formação [...]” PIETROCOLA (1999). Tais noções podem ser descritas devida a ausência de algumas discussões essenciais (PEDUZZI, 1999) como:

- A distinção entre problemas e exercícios;
- O intercâmbio entre problemas e teoria;
- O papel de estratégias gerais e específicas na resolução de problemas;
- Resolução significativa *versus* resolução mecânica de problemas;
- Resolução individual e resolução em grupo: vantagens e desvantagens;
- A questão dos problemas abertos no Ensino da Física.

Neste contexto Peduzzi (1997) procurou mostrar através de alguns exemplos, que a resolução literal de problemas de enunciados fechados e abertos pode se constituir em um instrumento bastante útil para estimular o estudante a desenvolver certas ações indispensáveis à resolução significativa de problemas. Mostraremos a seguir um destes exemplos de aplicação. Através de suposições, diga-se até absurdas, o aluno é levado a refletir tais situações.

#### 3.2.2.1 Exemplo de aplicação de metodologia da resolução literal.

Exemplo 1: Um corpo de massa  $m$  sobe um plano inclinado de um ângulo  $\theta$ . Com uma aceleração  $a$ , empurrado por uma força paralela à base do plano. Encontre a intensidade da força mencionada, sabendo ainda que o coeficiente de atrito cinético é  $\mu_c$  e que a intensidade da aceleração da gravidade é  $g$ . Estude os casos particulares da relação obtida.

**Solução:**

Dados e incógnita:

$m$

$\theta$

$a$

$\mu_c$

$g$

$F = ?$

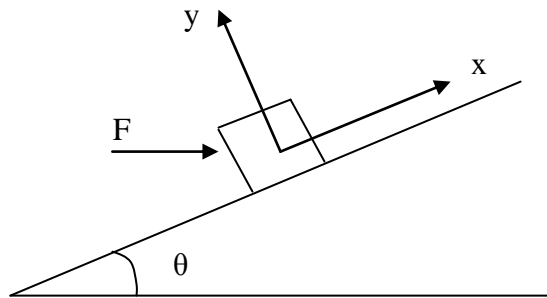


Figura – 3 Figura esquemática do problema do plano inclinado.

Aplicando a Segunda Lei de Newton para essa situação, obtém-se.

$$\Sigma F_x = ma,$$

$$F \cos \theta - mg \sin \theta - \mu_c N = ma \quad (1)$$

e

$$\Sigma F_y = 0,$$

$$N - mg \cos \theta - F \sin \theta = 0$$

$$N = mg \cos \theta + F \sin \theta \quad (2)$$

De (2) em (1), resulta:

$$F = \frac{m[a + g(\sin \theta + \mu_c \cos \theta)]}{\cos \theta - \mu_c \sin \theta} \quad (3)$$

Discussão:

a) Se  $a = 0$ ,

$$F = \frac{mg(\sin \theta + \mu_c \cos \theta)}{\cos \theta - \mu_c \sin \theta} \quad (4)$$

b) Para  $a = 0$ , e  $\mu_c$  (atrito desprezível), a eq. (4) se reduz a:

$$F = \frac{mg \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \quad (5)$$

Isto é, o componente da força  $x$  aplicada é igual ao componente  $x$  da força peso. Nesse caso, o corpo está parado ou em movimento com velocidade constante.

A seguir mais suposições, algumas absurdas, sobre essa temática:

- c) Para  $\theta = 0$ , o movimento se dá ao longo de um plano horizontal (Fig. 3.2). Nestas condições, a partir da eq.(3), resulta:

$$F - \mu_c mg = ma$$

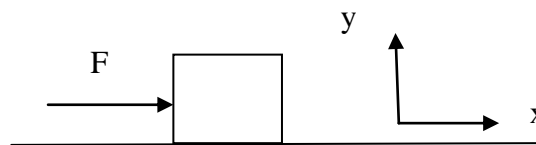


Figura - 4 Esquema da força no plano horizontal.

Se  $F > \mu_c mg$ , a aceleração é constante e maior que zero, e a velocidade do corpo é aumentada com o tempo (MRUA).

Se  $F < \mu_c mg$ , o corpo desloca-se em movimento retilíneo uniformemente retardado.

Se  $F = \mu_c mg$ , o corpo percorre distâncias iguais em intervalos de tempo iguais.

- d) E se  $\theta = 90^\circ$ ?

Nesse caso, a relação (3) se reduziria a

$$F = \frac{m(g + a)}{-\mu_c} \quad (6)$$

Esta relação provavelmente causará dificuldades ao aluno para interpretá-la. Isto é, ele precisa perceber, aqui, que “há alguma coisa errada”. De fato a relação (6) não é válida como um caso particular de (3) porque quando  $\theta = 90^\circ$ , não há componente de  $F$  na direção do movimento.

### 3.2.3 A modelagem do sistema massa-mola no Ambiente WLinkIt.

O uso de novas tecnologias na educação e em especial no Ensino de Física vem ganhando bastante interesse através de trabalhos desenvolvidos e vem sendo uma constante nas publicações em periódicos especializados na área, como a Revista Brasileira de Ensino de Física. Um destes trabalhos, ao qual estaremos descrevendo, analisa a modelagem de um sistema massa-mola no Ambiente Wlinkt a fim de analisar o quão promissora é este tipo de abordagem de temas de Física.

O WLinkIt é um Ambiente de Modelagem Computacional baseado na Metáfora de Ícones para a construção e simulação de modelos dinâmicos em nível semiquantitativo. Nele, é possível construir modelos que representam relações causais entre variáveis relevantes de fenômenos, eventos, objetos do mundo a ser modelado (Sampaio, 1996).

Através do ambiente de modelagem WLinkIt, Camiletti & Ferracioli (2002), propuseram a elaboração de um sistema massa-mola de modo que esse processo obedecesse a sete passos propostos por Camiletti (2001): i) Definição do *sistema* a ser estudado; ii) Escolha do *fenômeno* de interesse; iii) Listagem das *variáveis relevantes*; iv) Construção de modelos através de *Diagramas Causais*; v) *Representação do modelo* no ambiente WLinkIt; vi) *Simulação* do modelo construído; vii) *Validação do modelo*.

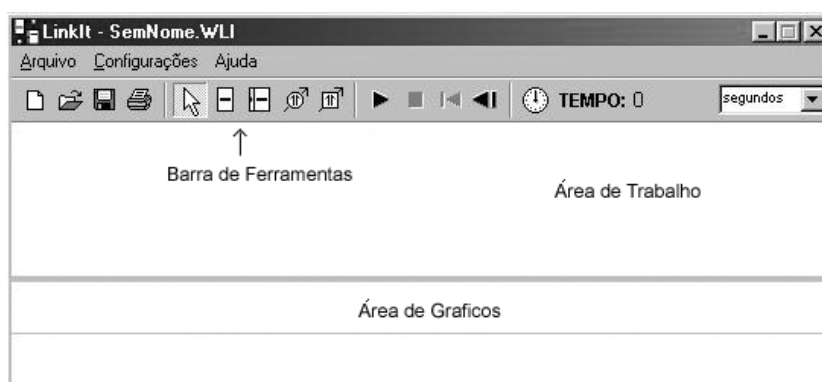


Figura – 5 Tela da área de trabalho do Ambiente WLinkIt. Fonte Camiletti (2002).

O desenvolvimento da investigação desse trabalho foi baseado na elaboração de um curso de extensão intitulado: “*Modelagem e Representação de Sistemas Físicos com Ambientes de modelagem Computacional*”, ministrado em dois módulos instrucionais. O primeiro teve o objetivo de introduzir os estudantes no raciocínio em Nível de Sistemas

(FORESTER, 1968) e ao Ambiente WLinkIt através de atividades de modelagem exploratória. O Segundo teve o objetivo de levar os estudantes a desenvolverem atividades de modelagem expressiva sobre o Sistema Massa-Mola utilizando o ambiente WLinkIt.

As atividades propostas levaram os estudantes universitários que fizeram parte do público-alvo, a desenvolverem este sistema no Ambiente de Modelagem e a partir daí discutirem sobre a validação do que a simulação estava informando.

Baseado no processo de modelagem proposto por Camiletti (2001) o sistema a ser estudado é o bloco preso a uma mola, o fenômeno de interesse é o movimento do bloco, as variáveis relevantes para o movimento do bloco são a posição, a velocidade e a aceleração, a construção do modelo diretamente no Ambiente WLinkIt e o resultado da simulação foi dada através as saída gráfica mostrado na Figura - 6:

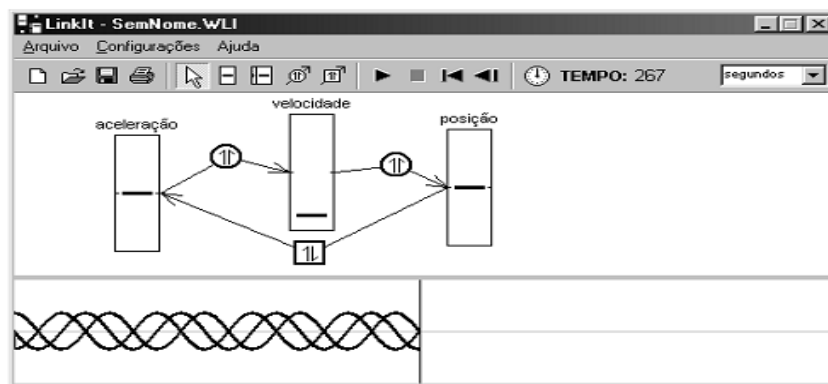


Figura – 6 Esquema da simulação no Ambiente WLinkIt.

Neste modelo pode ser analisada, qualitativamente, a seguinte suposição (CAMILETTI, 2001), a aceleração é vista como a causa da velocidade, e esta como causa da posição. A aceleração depende da posição de modo que quanto maior, positivamente, for a posição, maior, negativamente, é a aceleração. Assim, a aceleração, assumindo valores negativos, faz a velocidade diminuir e esta por sua vez, faz a posição diminuir, a qual, por sua vez, faz a aceleração aumentar gerando, assim, um movimento oscilatório.

A construção do sistema massa-mola neste Ambiente demanda do estudante um raciocínio em nível semiquantitativo. Assim, não é necessário conhecer as relações matemáticas entre as variáveis para a construção de um modelo no Ambiente WLinkIt, pois os cálculos necessários para que ele possa ser simulado são estabelecidos internamente por

procedimentos computacionais, livrando o estudante da carga cognitiva exigida pela programação e pelo conhecimento matemático.

Camiletti & Ferracioli (2002) identificaram a partir da análise dos dados obtidos em pesquisas, que o uso do ambiente e principalmente a utilização das saídas gráficas gerados pelo *software* contribuíram para que vários estudantes identificassem eventuais erros nos seus modelos.

### 3.3 Aspectos conceituais de alguns problemas mecânica teórica

#### 3.3.1 Oscilador Harmônico Bidimensional

Na Figura – 7, é ilustrado o sistema massa – mola, definindo o oscilador harmônico unidimensional.

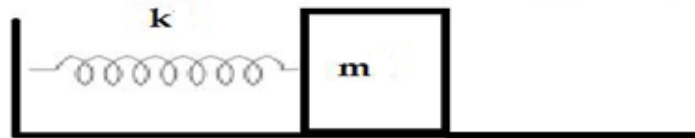


Figura - 7 Sistema Massa-Mola

Para um oscilador em uma dimensão é conhecida a sua equação do movimento através da Lei de Hooke:

$$m\ddot{x} = -kx \quad (1)$$

Onde  $\ddot{x}$  representa a derivada segunda da posição  $x$  em relação ao tempo, portanto a aceleração do bloco,  $m$  a massa do sistema (que é igual a do bloco, pois a massa da mola é desprezível), e

A solução dessa equação é simplesmente:

$$x(t) = A \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t + \theta \right) \quad (2)$$

Onde  $A$  e  $\theta$  são constantes a determinar pelas condições iniciais do problema.

Para o caso bidimensional teremos uma equação do movimento para cada direção ( $x$  e  $y$ ).

$$m\ddot{x} = -k_x x \quad (3)$$



$$m\ddot{y} = -k_y y \quad (4)$$

De modo análogo temos que a solução do movimento em cada dimensão será:

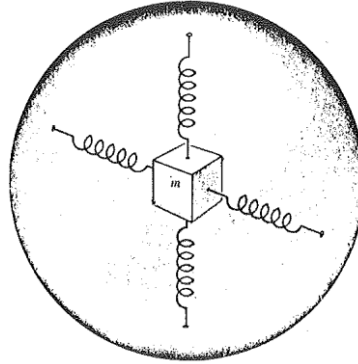


Figura - 8 Esquema de oscilador bidimensional. Fonte: SYMON (1982, p. 134) (adaptada).

$$x(t) = A_x \cos \left( \sqrt{\frac{k_x}{m}} t + \theta_x \right) \quad (5)$$

$$y(t) = A_y \cos \left( \sqrt{\frac{k_y}{m}} t + \theta_y \right) \quad (6)$$

Portanto o movimento será uma composição dos movimentos nas direções x e y. Se  $k_x = k_y$  dizemos que o oscilador é isotrópico caso contrário será anisotrópico. Dependendo da razão entre as constantes de mola e das fases  $\theta_x$  e  $\theta_y$  temos as possíveis trajetórias do oscilador ilustradas na Figura - 9.

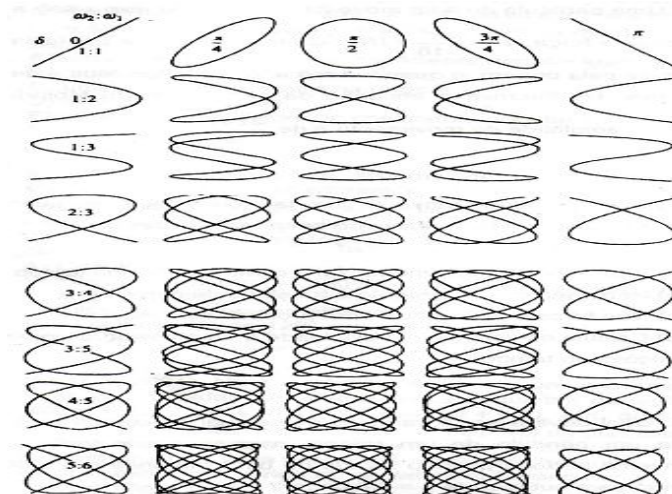


Figura - 9 Possíveis trajetórias do oscilador bidimensional sem amortecimento.

No caso da oscilação ter algum elemento dispersivo, a oscilação é dita amortecida.

Analogamente ao caso anterior, o movimento se resumirá em uma composição dos movimentos na direção x e em y.

A equação do movimento do oscilador harmônico amortecido é na direção x e y:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + k_x x = 0 \quad (7)$$

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + k_y y = 0 \quad (8)$$

Onde a b é o fator de amortecimento em cada direção.

A solução do movimento acima será para o caso em que  $\frac{k}{m} > \left(\frac{b}{2m}\right)^2$

(subamortecido):

$$x(t) = A_x e^{-\gamma t} \cos(\omega_{1x} t + \theta_x) \quad (9)$$

$$y(t) = A_y e^{-\gamma t} \cos(\omega_{1y} t + \theta_y) \quad (10)$$

Onde  $\omega_{1x} = \sqrt{\frac{k_x}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$ ;  $\omega_{1y} = \sqrt{\frac{k_y}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$ ;  $\gamma = \frac{b}{2m}$ ; e  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $\theta_x$  e  $\theta_y$  são

constantes a determinar pelas condições iniciais.

### 3.3.2 Osciladores acoplados

Um tipo de sistema mecânico encontrado comumente é aquele em que há interação entre vários osciladores.

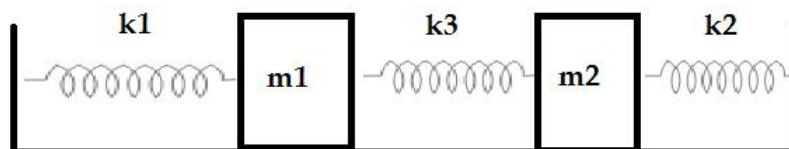


Figura - 10 Esquema de osciladores acoplados

A Figura - 10 ilustra um exemplo didático simples onde duas massas diferentes estão ligadas a suportes e entre elas por meio de molas. Neste esquema, as massas deslizarão sem atrito. Se as mola  $k_3$  não estivesse presente os blocos vibrariam independentemente em movimento harmônico simples com frequências angulares:

$$\omega_{10}^0 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \quad (11)$$

$$\omega_{20}^0 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad (12)$$

As equações do movimento das massas  $m_1$  e  $m_2$  são:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_3 (x_1 + x_2) \quad (13)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - k_3 (x_1 + x_2) \quad (14)$$

Podemos reescrever as equações acima como:

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1' x_1 + k_3 x_2 = 0 \quad (15)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2' x_2 + k_3 x_1 = 0 \quad (16)$$

Onde  $k_1' = k_1 + k_3$  e  $k_2' = k_2 + k_3$ .

Se não existissem os terceiros termos das equações acima, o movimento era independente uma da outra sendo também independentes as oscilações com frequências:

$$\omega_{10} = \sqrt{\frac{k_1'}{m_1}} \quad (17)$$

$$\omega_{20} = \sqrt{\frac{k_2'}{m_2}} \quad (18)$$

Estas são as frequências com que cada massa vibraria se a outra permanecesse fixa. Logo, o primeiro efeito do acoplamento é mudar a frequência de oscilações independentes de cada massa. Nos valendo de métodos de resolução de equações diferenciais

acopladas, encontramos as seguintes soluções:

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) - \frac{\Delta\omega^2}{2\kappa^2} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) \quad (19)$$

$$x_2(t) = \frac{\Delta\omega^2}{2\kappa^2} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) \quad (20)$$

Onde:

$$\kappa = \sqrt{\frac{k_3}{\sqrt{m_1 m_2}}} \quad (21)$$

$$\Delta\omega^2 = (\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2) \left[ \sqrt{\left(1 + \frac{4\kappa^4}{(\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2)^2}\right)} - 1 \right] \quad (22)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_{10}^2 + \frac{1}{2}\Delta\omega^2} \quad (23)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_{20}^2 - \frac{1}{2}\Delta\omega^2} \quad (24)$$

Esta é a solução envolvendo quatro constantes arbitrárias  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Pode-se verificar que o movimento de cada coordenada é a superposição de duas vibrações harmônicas com frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . Se  $A_1$  ou  $A_2$  são iguais a zero, aparecerá somente uma frequência. Desta forma, o movimento resultante é chamado *modo normal de vibração*. O parâmetro  $\kappa$  é chamado de fator de acoplamento.

### 3.3.3 Movimento de uma carga sobre um campo eletromagnético

Submetendo uma carga  $q$  de massa  $m$  numa região de campo magnético e elétrico (Uniformes) a partícula se movimenta como ilustrado na figura:

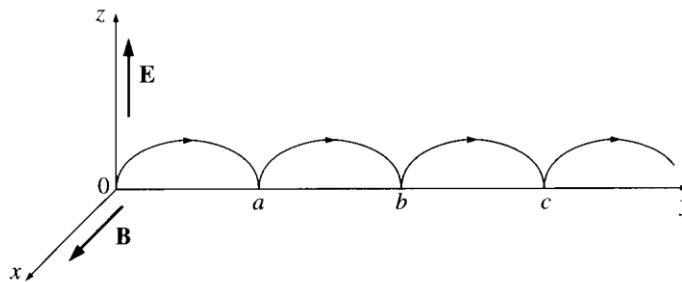


Figura - 11 Trajetória de uma partícula submetida a um campo eletromagnético. Fonte (Griffiths 2007, p.206).

A equação do movimento para o movimento da partícula ilustrada acima será uma superposição dos movimentos em  $y$  e em  $z$ :

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = qB \frac{dz}{dt} \quad (25)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = qE - qB \frac{dy}{dt} \quad (26)$$

Podemos também escrever:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \omega \frac{dz}{dt} \quad (27)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \omega \left( \frac{E}{B} - \frac{dy}{dt} \right) \quad (28)$$

Onde,  $\omega$  é a frequência angular e é dado pela relação:

$$\omega = \frac{qB}{m} \quad (29)$$

As soluções gerais para as equações do movimento são:

$$y(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \left(\frac{E}{B}\right)t + C_3 \quad (30)$$

$$z(t) = C_2 \cos(\omega t) - C_1 \sin(\omega t) + C_4 \quad (31)$$

Supondo que a carga  $q$  inicie seu movimento na origem e com velocidades iniciais (no eixo  $z$  e em  $y$ ) diferentes de zero as constantes arbitrárias assumem valores de modo as equações do movimento ficam:

$$y(t) = \frac{v_{0z}}{\omega} (1 - \cos(\omega t) + \sin(\omega t)) + \frac{E}{B\omega} (\omega t - \sin(\omega t)) \quad (32)$$

$$z(t) = \left(\frac{v_{0y}}{\omega} - \frac{E}{B\omega}\right) (\cos(\omega t) - 1) + \frac{v_{0z}}{\omega} \sin(\omega t) \quad (33)$$

Para o caso em que as velocidades iniciais são nulas as equações acima se reduzem a:

$$y(t) = \frac{E}{B\omega} (\omega t - \sin(\omega t)) \quad (34)$$

$$z(t) = \frac{E}{B\omega} (1 - \cos(\omega t)) \quad (35)$$

A partir desse resultado, podemos concluir que o raio da cicloide formada pelo movimento da partícula é:

$$R = \frac{E}{B} \quad (37)$$

Eliminando os cossenos e senos das equações do movimento pela relação fundamental da trigonometria, temos:

$$(y - R\omega t)^2 + (z - R)^2 = R^2 \quad (38)$$

Esta é a fórmula de um círculo de raio  $R$ , cujo centro  $(0, R\omega t, R)$  se desloca com uma velocidade na direção de  $y$ :

$$v = \omega R = \frac{E}{B} \quad (39)$$

Basicamente este capítulo mostrou que existem trabalhos que enfatizam o uso de propostas alternativas para o ensino de mecânica. Uma destas propostas se baseou na utilização de um *software* de modelagem computacional para tratar o sistema massa-mola.

O tratamento matemático de três problemas foi discutido neste capítulo. Estes problemas serão implementados em um software de modelagem. Este software será discutido no capítulo seguinte, bem como os procedimentos metodológicos.

## 4 PROCEDIMENTOS METODÓLOGICOS

Neste capítulo discutiremos os processos metodológicos que nortearam esse trabalho. Serão expostas as etapas do processo de modelagem propostas por Pietrocola (1999). Estas etapas serão investigadas durante a modelagem dos problemas, citados no capítulo anterior, em um *software* de modelagem que será tratado na seção 4.2

### 4.1 Etapas do processo de modelagem.

Segundo Pietrocola (1999), uma atividade de modelagem deve ser aquela em que os estudantes tenham como fundamento a atividade experimental, no sentido de que os mesmos possam ter domínio e saibam, por exemplo, as três formas de representação de uma função, estabelecendo o que ele chama de *modelo explicativo* para um determinado evento. Segundo este autor, o aluno deve participar de uma manipulação experimental de um recurso, que pode ser concreto ou não. Para o caso do processo de modelagem é necessário como dito anteriormente (VASCONCELOS, 2008) que este seja acompanhado por um processo claro e metodológico de abordagem, obedecendo a etapas bem definidas.

Pietrocola (1999) propõe algumas etapas que devem perfazer o processo de modelagem.

- **Etapa 1 - Motivação:** ocorre quando se apresenta ao aluno um problema significativo ou uma questão que se relaciona com suas experiências anteriores. É nesse momento que se orienta a atenção do estudante para “as coisas que mudam” ou “objetos mutáveis”, ou seja, para identificação das grandezas que se relacionam com regularidade.
- **Etapa 2 - Formulação das hipóteses:** solicitam-se ao aluno que sejam levantadas grandezas e qualidades que podem ser atribuídas ao modelo a partir da percepção da existência dos “objetos mutáveis” e regularidades presentes no fenômeno. Essa etapa corresponde a uma *aposta*, pré-teoria ou ainda, uma previsão de comportamento para o objeto - modelo. Nesse momento, explicitam-se as expectativas teóricas que se têm a respeito dessas mudanças.



- **Etapa 3 - Validação das hipóteses:** é iniciada pela experimentação. É o ato de atribuir e obter dados quantitativos dos objetos que mudam, Isto é, das grandezas que pareceram, *a priori*, relacionadas ou dependentes entre si. O modo de apresentação de dados- a tabela- caracteriza-se como uma das formas de representação de uma função. Para a análise dos dados, utiliza-se a construção do gráfico.
- **Etapa 4 - Sistematização (Novos questionamentos):** esta etapa ocorrerá por meio da passagem do modelo conceitual para o modelo matemático propriamente dito (as equações). Para que isso ocorra algumas medidas poderão ser tomadas a fim de sistematizar as etapas anteriores. Neste momento os alunos serão solicitados a observar todos os dados disponíveis até o momento, identificar a relação entre as grandezas, fazer previsões com base nas idealizações formuladas.
- **Etapa 5 - Formalização:** É a etapa conclusiva da atividade experimental onde há comparação entre o modelo empírico, os dados experimentais e as expectativas teóricas da aposta. Nesse momento, além de uma formulação verbal do modelo construído, devem-se provocar discussões a respeito da generalização desse modelo e de sua aplicabilidade em outros contextos.

Considerando que a atividade de modelagem contemple todas as etapas descritas, dizemos que o aluno construiu um modelo explicativo para o fenômeno (VASCONCELOS, 2008).

Nossa proposta é avaliar em quais etapas sugeridas acima se insere cada ferramenta e/ou processo de construção do modelo dos problemas, citados na seção 3.3, utilizando a nosso instrumento de investigação que será descrita a seguir.

## 4.2 Ferramenta utilizada na investigação – *Software Modellus*

Para que seja haja o processo de construção do modelo optamos pela ferramenta computacional *software Modellus 4.01*, concebido por Vitor Duarte Teodoro com a colaboração de João Paulo Duque e Felipe Costa Clérigo – *Faculty of Sciences and Technology – Nova University Lisbon, Lisboa-Portugal*.

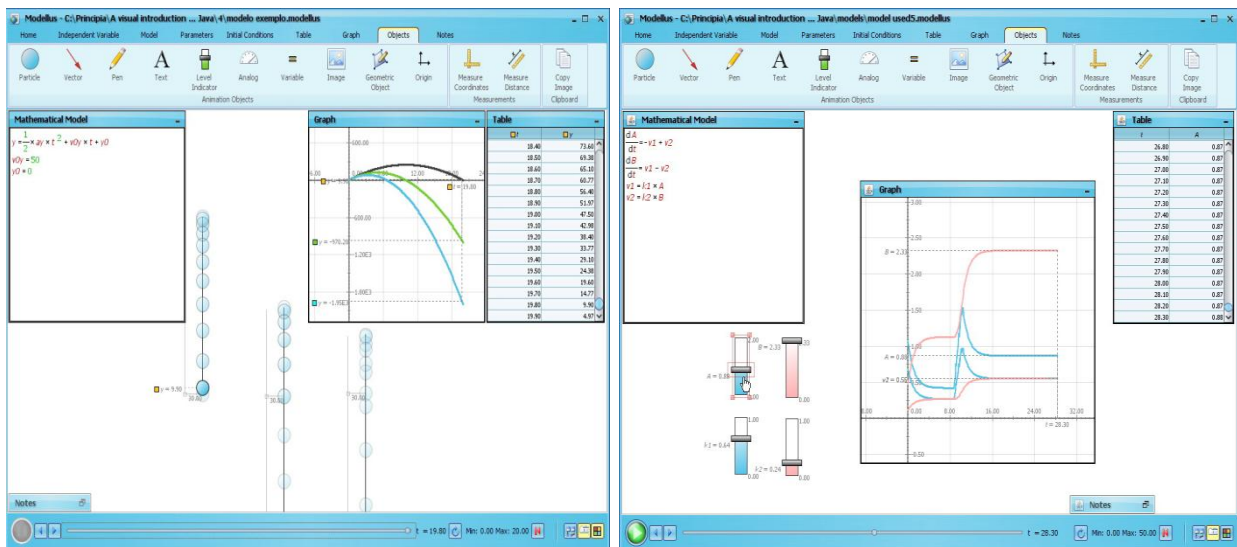


Figura - 12 Layout do ambiente Modellus.

Características Técnicas:

- Nome: Modellus<sup>TM</sup> 4.01- *Interacting Modelling with Mathematics*.
- Versão 4.01 para o Windows.
- Versão para download <http://modellus.fct.unl.pt/>

Para Veit&Teodoro (2002) *Modellus* é uma ferramenta cognitiva para auxiliar a internalização de conhecimento simbólico, preferencialmente em contexto de atividades de grupo e de classe, em que discussão, a conjectura e o teste de idéias são atividades dominantes, em oposição ao ensino direto por parte do professor. Porém, isto não significa que os estudantes reinventam o conhecimento quando constroem ou exploram modelos com o *Modellus*. Ou seja, ninguém pode aprender explorando sem conhecimento relevante sobre o campo de exploração.

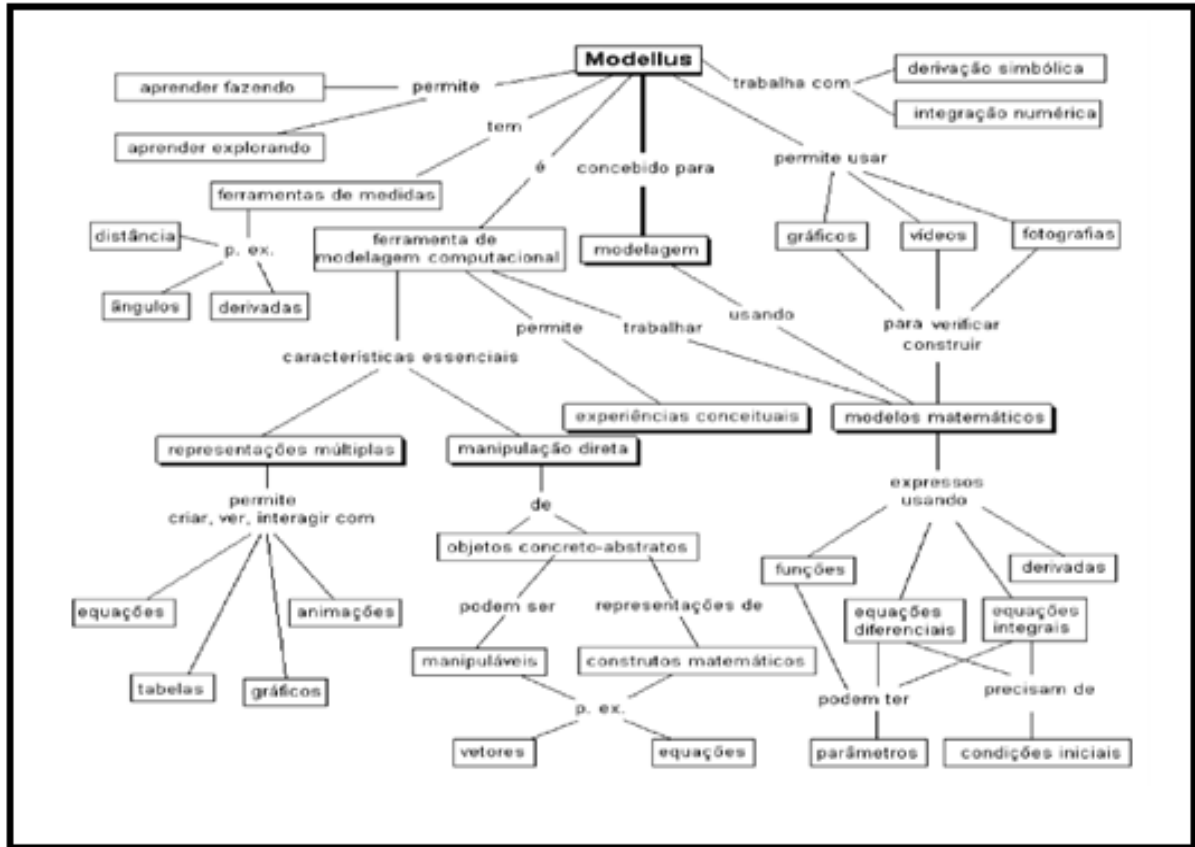


Figura - 13 Mapa Cognitivo sobre o *Modellus*. Fonte (VEIT & TEODORO, 2002)

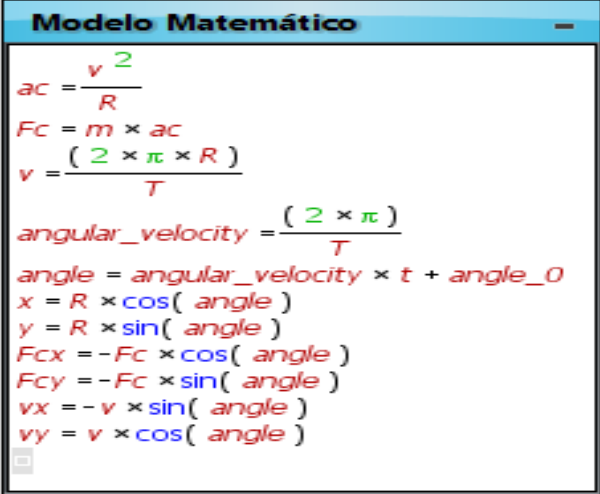
Como sintetizado no mapa cognitivo na Figura – 13, o modellus, como outras ferramentas computacionais permite ao usuário fazer e refazer representações explorando-as sobre as mais diversas perspectivas.

Esta ferramenta possibilita a aprendizes e professores a construção de modelos virtuais interativos dinâmicos, utilizando as equações da Física não apenas como modelos matemáticos, mas definindo ações e procedimentos (inerentes aos conceitos da Física) executados na interatividade das condições iniciais, oportunizando que cada parâmetro escolhido gere novas situações, novas descrições. Torna possível ainda a reprodução virtual destes modelos de experimentos científicos ou fenômenos da Física, onde a *design* pode ser contemplado com o pensamento criativo, de forma a possibilitar ao usuário adentrar no universo do conhecimento científico nas formas de incorporações de informações e também na construção do conhecimento como produção de nossos processos cognitivos. Como justificativa da escolha e uso do *Modellus*, levantamos algumas características relevantes inerentes ao mesmo que podem contribuir de forma positiva para inovação da prática pedagógica.

(LUNA, 2005, p.54)

Sintetizando as características desse ambiente de modelagem Ives (2004) destaca:

- **Modelagem matemática direta:** Estudantes e professores podem fazer experimentos conceituais utilizando os modelos matemáticos definidos a partir de funções, derivadas, taxas de variação, equações diferenciais escritos de forma direta, ou seja, sem a necessidade de metáforas simbólicas, ou conhecimento em alguma linguagem de programação.



The screenshot shows a window titled "Modelo Matemático" containing the following equations:

$$ac = \frac{v^2}{R}$$

$$Fc = m \times ac$$

$$v = \frac{(2 \times \pi \times R)}{T}$$

$$angular\_velocity = \frac{(2 \times \pi)}{T}$$

$$angle = angular\_velocity \times t + angle\_0$$

$$x = R \times \cos(angle)$$

$$y = R \times \sin(angle)$$

$$Fcx = -Fc \times \cos(angle)$$

$$Fcy = -Fc \times \sin(angle)$$

$$vx = -v \times \sin(angle)$$

$$vy = v \times \cos(angle)$$

Figura - 14 Ferramenta onde se insere o modelo matemático do fenômeno estudado.

Observe que as equações matemáticas que descrevem o modelo são tais como aprendemos em sala de aula, sem a necessidade de uma linguagem específica.

- **Representação múltipla:** o usuário pode criar ver e interagir com as representações analíticas, analógicas e gráficas dos objetos matemáticos.

Como podemos ver na Figura - 15 uma vez implementado no ambiente Modellus é possível analisar a desenvolvimento do mesmo a partir de gráficos, tabelas e animação do fenômeno.

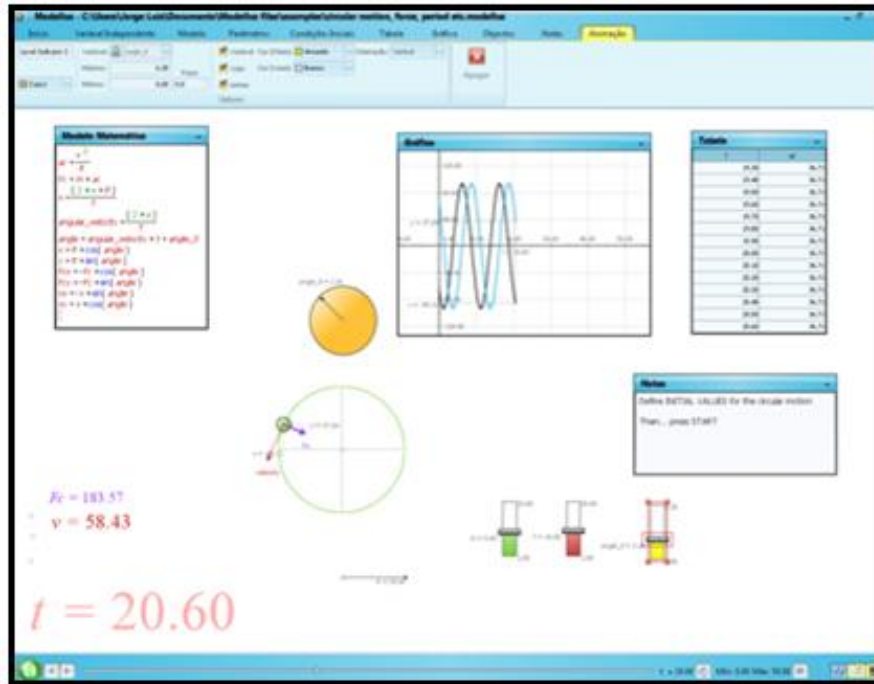


Figura - 15 Interface gráfica intuitiva e múltipla

- **Interface gráfica intuitiva:** o que vem a facilitar a interação dos estudantes com modelos em tempo real e a análise de múltiplas representações desses modelos, permitindo também, observar múltiplos experimentos (conceituais) simultaneamente.

Teodoro (2002 *apud* IVES 2004) o analisa sobre dois pontos de vista:

1) Computacional

“... o programa pode ser visto como um micromundo no computador para uso tanto dos estudantes quanto dos professores, não sendo baseado numa metáfora de programação...”

2) Educacional

“... o usuário pode escrever modelos matemáticos, quase sempre da mesma forma que a manuscrita dia-a-dia, dispensando o aprendizado de uma nova linguagem para elaboração desses modelos...”

Os problemas discutidos na seção 3.3 serão tratados no *Modellus* e discutiremos quais etapas propostas por Pietrocola (1999) compreendem o processo de modelagem nesse ambiente. No próximo capítulo será exposta a análise dos resultados destas atividades de modelagem.

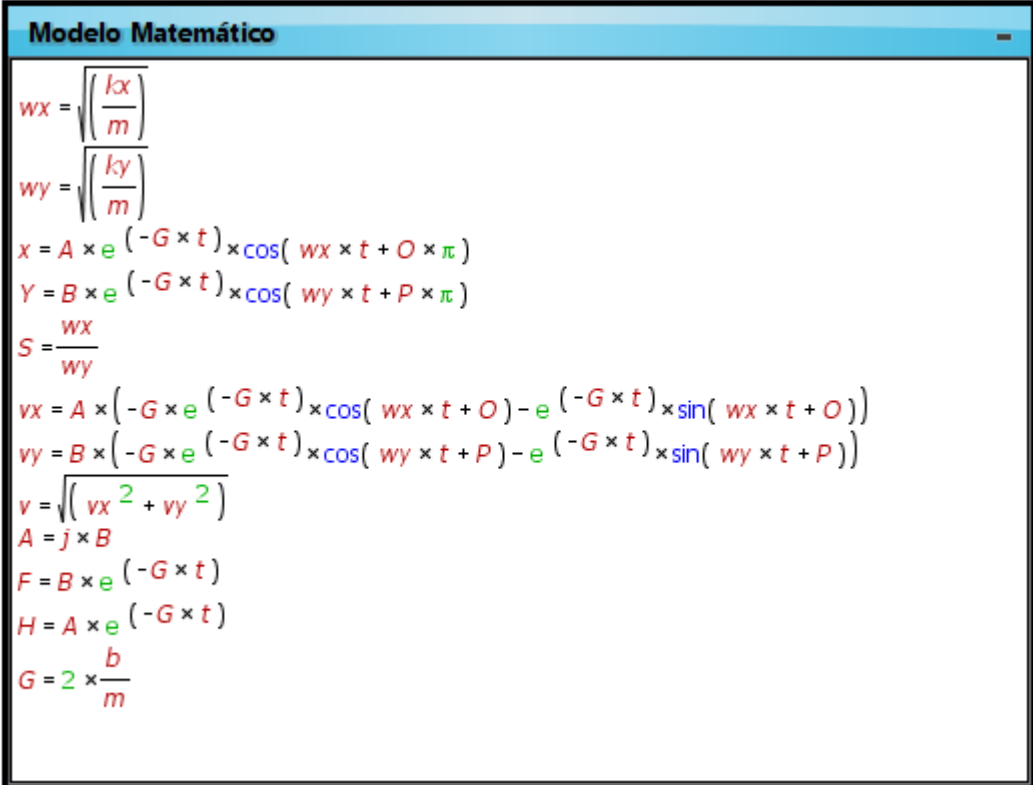
## 5. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo apresentaremos os resultados obtidos da implementação das situações investigadas no ensino da mecânica teórica mediadas pelo ambiente computacional de modelagem *Modellus* a partir das etapas propostas por Pietrocola (1999), discutidas no capítulo anterior, no que diz respeito ao desenvolvimento do modelo.

### 5.1 Problema 1 – Oscilador Harmônico Bidimensional

Nesta seção iremos descrever o primeiro problema modelado. Este trata de um oscilador bidimensional. A descrição matemática do modelo, já discutido na seção 3.3.1, foi desenvolvida de modo que se torne possível analisar o oscilador com amortecimento no regime subamortecido. Foi analisado quando o mesmo fosse isotrópico e posteriormente anisotrópico.

#### 5.1.1 Modelo matemático do oscilador bidimensional



The image shows a screenshot of a software window titled "Modelo Matemático". The window contains the following mathematical equations:

$$\omega_x = \sqrt{\frac{k_x}{m}}$$

$$\omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}}$$

$$x = A \times e^{-G \times t} \times \cos(\omega_x \times t + O \times \pi)$$

$$Y = B \times e^{-G \times t} \times \cos(\omega_y \times t + P \times \pi)$$

$$S = \frac{\omega_x}{\omega_y}$$

$$v_x = A \times (-G \times e^{-G \times t}) \times \cos(\omega_x \times t + O) - e^{-G \times t} \times \sin(\omega_x \times t + O)$$

$$v_y = B \times (-G \times e^{-G \times t}) \times \cos(\omega_y \times t + P) - e^{-G \times t} \times \sin(\omega_y \times t + P)$$

$$v = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}$$

$$A = j \times B$$

$$F = B \times e^{-G \times t}$$

$$H = A \times e^{-G \times t}$$

$$G = 2 \times \frac{b}{m}$$

Figura - 16 Modelo Matemático do Oscilador Harmônico Bidimensional

As equações estão na forma da solução geral de um oscilador bidimensional subamortecido. A fim de adequação ao ambiente, algumas alterações foram feitas em relação à solução geral mostrada na seção 3.3.1. O valor de  $G^1$  corresponde ao valor de  $\gamma$ . Foram definidos alguns parâmetros pelo mesmo motivo. O valor de  $O$  e de  $P$  definem a fase inicial do movimento nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente, seus valores podem ser alterados através da ferramenta *indicador de nível*. A ferramenta *indicador de nível* permite que a variação dos parâmetros representados por estes, seja facilitada. Não somente neste problema, mas nos demais, o intervalo de variação de cada indicador é posto de forma que o valor mínimo é zero e o máximo é arbitrário, obedecendo à conveniência do parâmetro. Todos os valores serão reais.

O parâmetro  $S$  e  $j$  foram definidos de forma a representarem as razões entre as frequências  $w_x$  e  $w_y$  e as constantes  $A$  e  $B$ . Portanto o valor de  $S$  irá determinar se o oscilador é isotrópico ou anisotrópico. Finalmente os valores de  $F$  e  $H$  são basicamente as amplitudes dos movimentos na direção  $y$  e  $x$  respectivamente.

Neste momento a relação entre as grandezas devem ser identificadas de modo que as adequações feitas nas equações correspondam ao comportamento do fenômeno.

Durante o desenvolvimento do modelo matemático é possível fazer alguns questionamentos, no que diz respeito à variação e significado de alguns parâmetros. “De quais parâmetros a trajetória da partícula é dependente?”; “Será que é necessário definir uma razão entre as grandezas  $A$  e  $B$  a fim de perceber alguma alteração na trajetória de oscilação?” ou “como posso definir uma grandeza que com sua mudança o oscilador passe de isotrópico para anisotrópico?”. Esses questionamentos aparecem justamente quando se está interessado em associar um indicador de nível a certo parâmetro cuja variação seja importante para as características do comportamento do fenômeno.

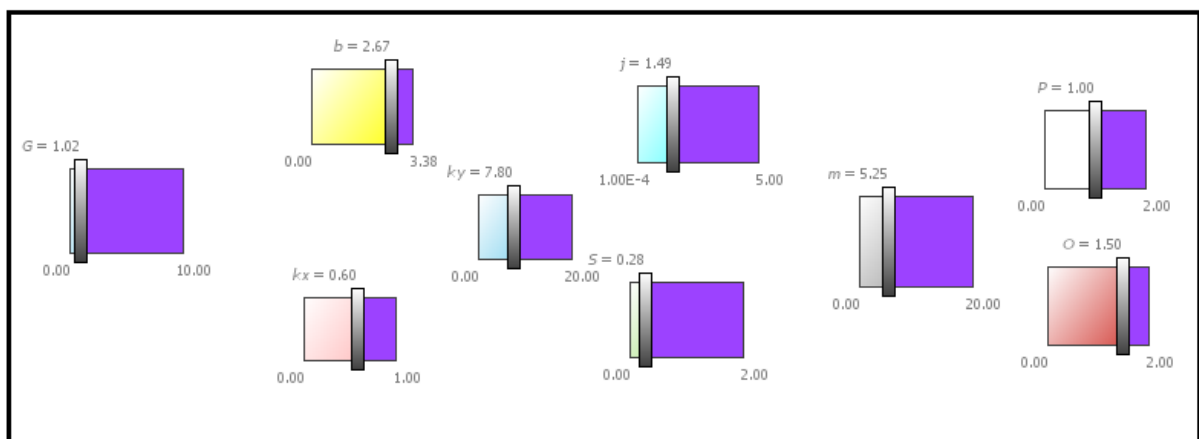


Figura - 17 Indicadores de Nível para alguns parâmetros mutáveis.

<sup>1</sup> Ao mostrar os parâmetros coloridos, estamos nos referindo aos parâmetros implementados no *Modellus*.

Estas características nos fazem associar essa fase de manipulação das equações com a etapa 1, a motivação.

Até este momento nenhum dado foi gerado, pois o progresso da simulação não foi iniciado. Entre o desenvolvimento do modelo matemático e o início da simulação levantamos algumas hipóteses para os questionamentos levantados acima, correspondendo a etapa 2 proposta por Pietrocola (1999): levantamento de hipóteses. Tais hipóteses resultaram em uma primeira formação do modelo matemático e nos indicadores de nível. A composição do modelo matemático e dos *indicadores de nível* dispostos nas Figuras 16 e 17 se encontram no estágio concluído da etapa de modelagem.

### 5.1.2 Apresentação do resultado gráfico do modelo do oscilador bidimensional.

A ferramenta *Gráfico* exibe os valores progressivos com a variável independente, que no nosso caso é o tempo. Abaixo ilustra-se o gráfico da posição e amplitude versus o tempo, quando o oscilador está sob o regime de subamortecimento.

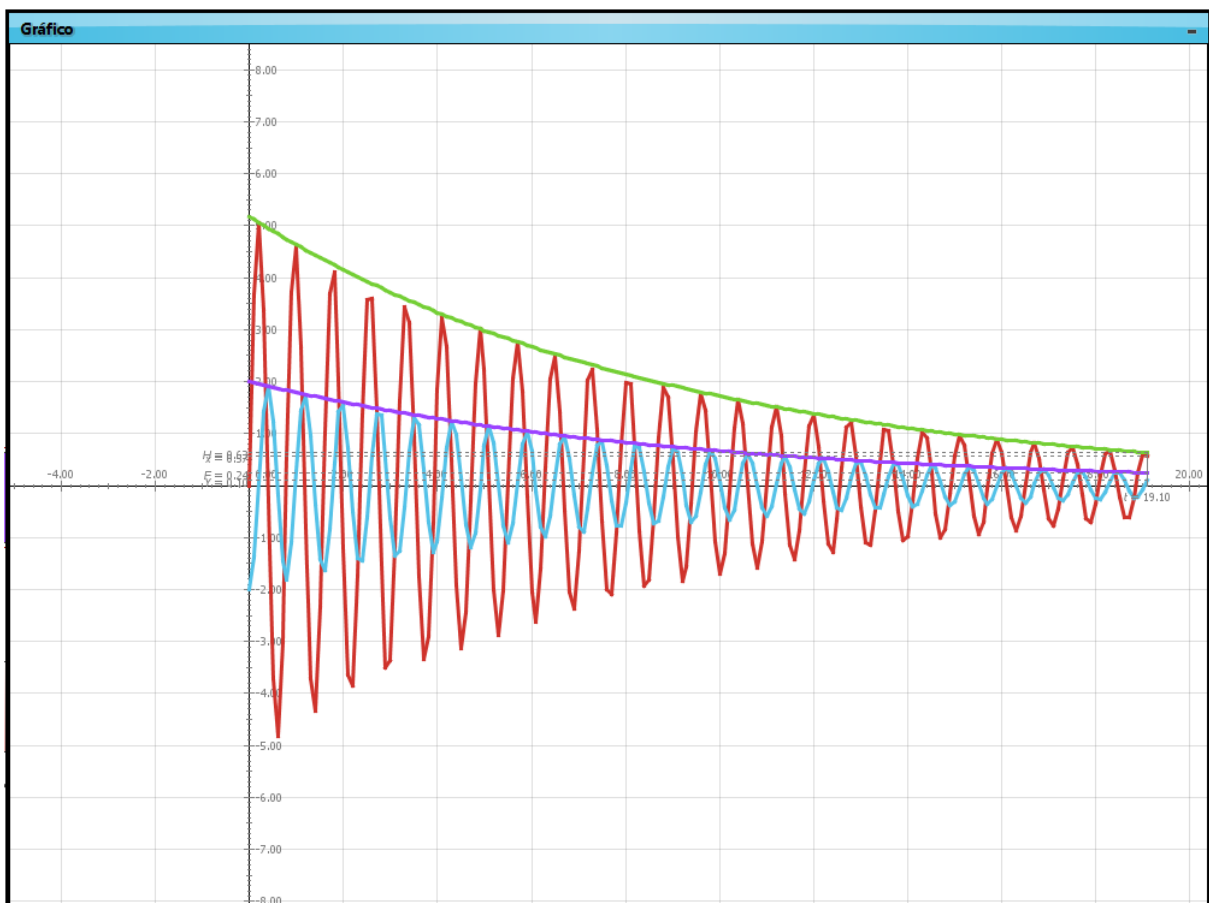


Gráfico - 1. Gráfico da posição x(vermelho) e y(azul) e amplitudes em x e y(verde e roxo) versus o tempo, com amortecimento.



O gráfico vermelho exibe a posição e o verde ilustra amplitude ambos na direção de x. O gráfico azul e roxo representam o movimento e a amplitude respectivamente, em y versus o tempo. O fato de haver amortecimento, a energia do oscilador diminui. Como essa energia depende da amplitude, por consequência esta diminuir com o tempo. Representamos todos

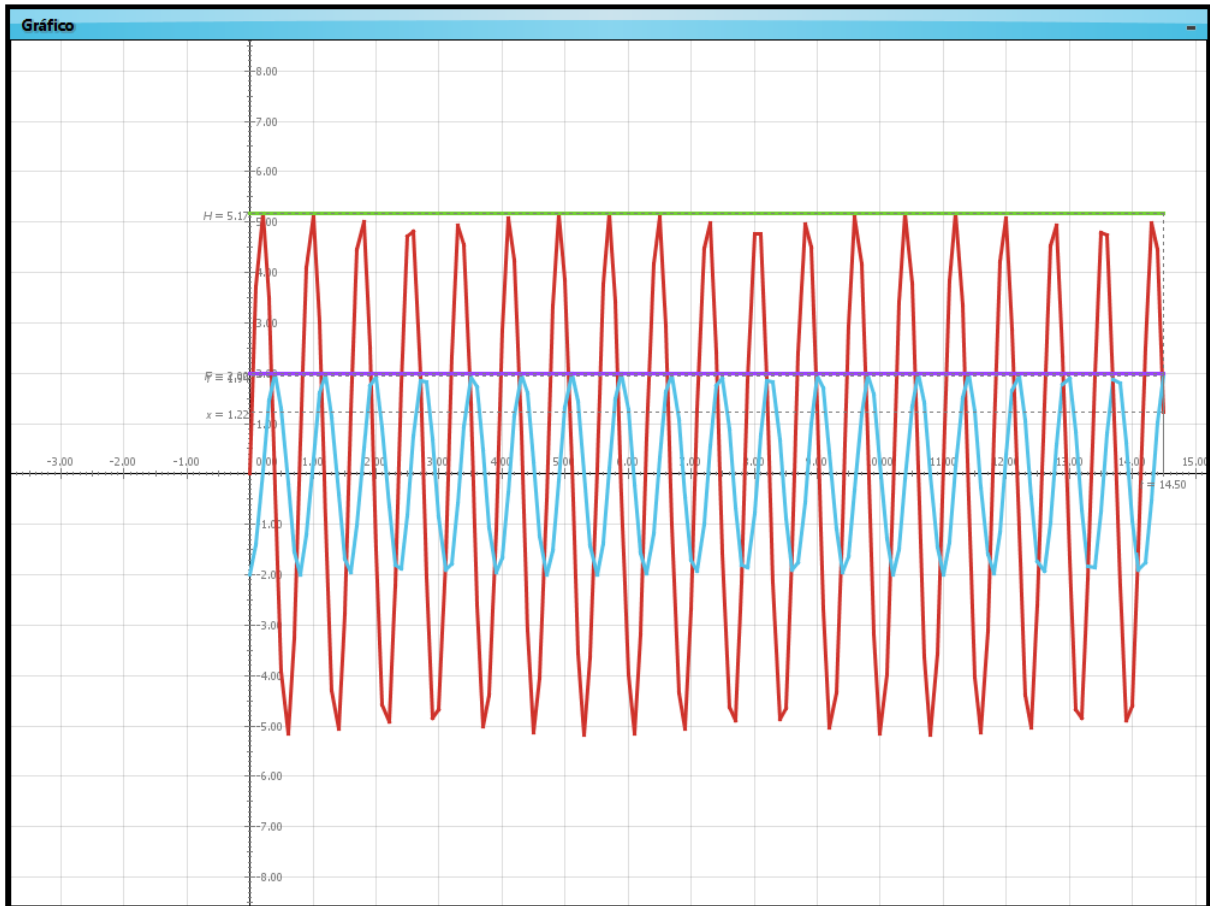


Gráfico - 2. Gráfico da posição x e y e amplitudes (eixo vertical) em x e y versus o tempo (eixo horizontal), sem amortecimento.

aqueles parâmetros que sua mudança produza uma consequência da na forma de *indicador de nível*.

Neste momento podemos validar algumas hipóteses qualitativamente, no que diz respeito à forma do gráfico. Foram ilustrados nos Gráficos 1 e 2, a forma que estes ficam em dependência do amortecimento. Portanto, é importante representar como *indicador de nível*, os parâmetros que constituem o fator **G**. Os outros parâmetros como a massa, as fases iniciais, as constantes de amplitude produziram mudanças no gráfico com as suas variações. O primeiro em regime de amortecimento é inversamente proporcional à **G**, e diretamente

proporcional a frequência e o resultado é um gráfico “achatado” ou “alargado” horizontalmente. O segundo é responsável por aumentar os picos das amplitudes. Já o terceiro pela defasagem do gráfico.

Portanto a análise dos gráficos é uma ferramenta que ajuda a validar o modelo. Logo é razoável concluir que essa etapa corresponde à etapa 3, validação.

### 5.1.3 RESULTADO DA TABELA DO OSCILADOR BIDIMENSIONAL

Acreditamos que, da mesma forma que o gráfico, a tabela corresponde à etapa 3 da modelagem. A diferença é que neste caso a tabela dá uma informação quantitativa mais visível. A análise das informações que a tabela oferece, exige um maior conhecimento prévio do que no caso anterior. Uma vez que os dados devem ser analisados com muito mais rigor a fim de se retirar alguma conclusão.

Tabela - 1 Tabela dos dados referentes às posições, velocidades e amplitudes nas direções x e y, no caso sem amortecimento.

Tabela										
t	x	y	vy	vx	H	F				
10.90	-3.58	-1.44	-0.47	-3.47	5.17	2.00				
11.00	0.18	-2.00	-1.72	-5.17	5.17	2.00				
11.10	3.84	-1.34	-1.93	-3.73	5.17	2.00				
11.20	5.16	0.13	-0.97	-0.03	5.17	2.00				
11.30	3.36	1.52	0.58	3.69	5.17	2.00				
11.40	-0.48	1.99	1.78	5.17	5.17	2.00				
11.50	-4.03	1.25	1.90	3.52	5.17	2.00				
11.60	-5.13	-0.25	0.87	-0.27	5.17	2.00				
11.70	-3.12	-1.59	-0.69	-3.89	5.17	2.00				
11.80	0.78	-1.98	-1.83	-5.16	5.17	2.00				
11.90	4.21	-1.16	-1.86	-3.29	5.17	2.00				
12.00	5.09	0.36	-0.76	0.57	5.17	2.00				
12.10	2.88	1.66	0.80	4.09	5.17	2.00				
12.20	-1.08	1.96	1.87	5.12	5.17	2.00				
12.30	-4.38	1.06	1.81	3.05	5.17	2.00				
12.40	-5.02	-0.48	0.65	-0.87	5.17	2.00				
12.50	-2.62	-1.72	-0.90	-4.26	5.17	2.00				
12.60	1.37	-1.93	-1.91	-5.07	5.17	2.00				
12.70	4.53	-0.96	-1.76	-2.80	5.17	2.00				
12.80	4.94	0.59	-0.54	1.17	5.17	2.00				
12.90	2.35	1.78	1.01	4.43	5.17	2.00				
13.00	-1.66	1.89	1.94	5.00	5.17	2.00				
13.10	-4.67	0.86	1.70	2.54	5.17	2.00				
13.20	-4.85	-0.70	0.43	-1.46	5.17	2.00				
13.30	-2.08	-1.83	-1.11	-4.58	5.17	2.00				
13.40	1.95	-1.85	-1.97	-4.92	5.17	2.00				
13.50	4.79	-0.75	-1.63	-2.28	5.17	2.00				
13.60	4.73	0.81	-0.31	1.75	5.17	2.00				
13.70	1.80	1.87	1.20	4.71	5.17	2.00				
13.80	-2.22	1.81	1.98	4.82	5.17	2.00				
13.90	-4.90	0.64	1.56	2.00	5.17	2.00				
14.00	-4.60	-0.91	0.19	-2.03	5.17	2.00				
14.10	-1.52	-1.91	-1.29	-4.83	5.17	2.00				
14.20	2.49	-1.75	-2.00	-4.70	5.17	2.00				
14.30	4.99	-0.53	-1.49	-1.72	5.17	2.00				
14.40	4.46	1.01	-0.08	2.30	5.17	2.00				
14.50	1.22	1.94	1.38	4.93	5.17	2.00				
14.60	-2.75	1.69	2.00	4.56	5.17	2.00				

Como se observa na Tabela - 1, o ambiente fornece uma interface gráfica de modo que os dados poderão ser analisados qualitativamente, observando certo padrão dos comportamentos de certas grandezas que foram levantados como hipótese na fase de motivação. Em exemplo, na Tabela - 1 colunas 6 e 7, pode-se observar que no regime de não amortecimento as amplitudes (H e F) permanecem com o mesmo valor.

#### 5.1.4 Visualização da simulação do oscilador bidimensional.

Uma partícula de massa  $m$  que oscila bidimensionalmente realiza um movimento cuja trajetória depende das condições iniciais impostas no problema. No nosso problema a trajetória da partícula depende das amplitudes iniciais nas direções  $x$  e  $y$ , das constantes de mola  $k_x$  e  $k_y$ , das fases iniciais e da constante de amortecimento. A simulação oferece a informação visual de maneira prática as respectivas trajetórias correspondentes às condições

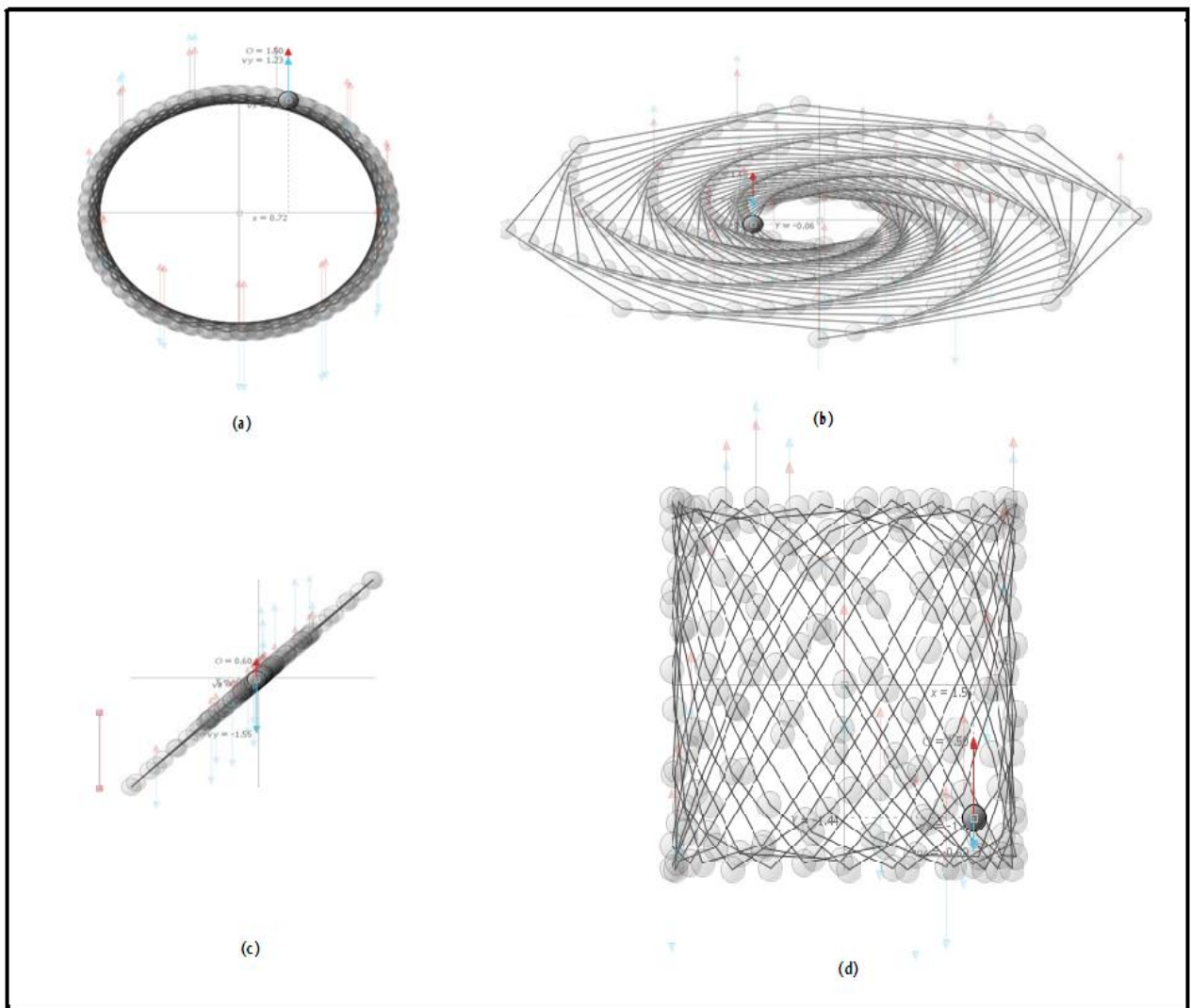


Figura - 18 Trajetórias da Partícula oscilando bidimensionalmente. (a) Trajetória circular sem amortecimento. (b) Trajetória elíptica com amortecimento. (c) Trajetória retilínea inclinada com amortecimento. (d) Oscilador anisotrópico (Figura de Lissajous).

iniciais do problema. Desta maneira, o estudante não precisará realizar a difícil tarefa de identificar que tipo de gráfico  $y(x)$  (trajetória) terá o movimento de acordo com certos valores destas grandezas citadas.

Como o gráfico e a tabela, com a simulação é possível responder aos questionamentos à priori feitos, tais como: “É possível a partícula realizar um movimento perfeitamente retilíneo?”; “Quais as condições necessárias para que o corpo se movimente em uma trajetória circular?”, “Como se comporta a trajetória do oscilador submetido a um amortecimento?” A dinâmica da simulação permitiu visualizar o fenômeno de maneira em que foi possível tirar alguma conclusão em relação ao que foi esperado. Partindo dessa premissa, surgiram novos questionamentos frente aos resultados expostos pela simulação tais como: “É necessário representar cada grandeza componente de  $G$ ? Ou simplesmente representando este parâmetro já é possível obter um resultado satisfatório?”. O que nos faz concluir que até este momento com todos os dados disponíveis, esses novos questionamentos correspondem à fase 4, sistematização, propondo então novos ajustes no modelo matemático.

Vale salientar que a sistematização está presente em todas as ferramentas que possuem o potencial de validação. Apesar das ferramentas *gráfico, tabela e simulação* terem sido discutidas na ordem apresentada, as análises foram feitas simultaneamente, uma vez que o *Modellus* possui essa característica (ver seção 4.2).

Após os ajustes realizados após a etapa de sistematização o modelo é concluído, resultando na constituição do *modelo matemático* e dos *indicadores de nível* apresentados nas Figuras – 16 e 17, chegando então à etapa 5, formalização.

## 5.2 Problema 2 - Osciladores acoplados.

Nesta seção iremos descrever o segundo problema. Este se trata de duas massas ligadas entre si por uma mola e simultaneamente ligadas a anteparos. Seu tratamento matemático foi descrito na seção 3.3.2.

### 5.2.1 Modelo matemático dos osciladores acoplados.

**Modelo Matemático**

$$x1 = A1 \times \cos(w1 \times t + o \times \pi) - \frac{R^2}{(2 \times j^2)} \times \sqrt{\frac{m1}{m1}} \times A2 \times \cos(w2 \times t + p \times \pi)$$

$$x2 = \frac{R^2}{(2 \times j^2)} \times \sqrt{\frac{m1}{m2}} \times A1 \times \cos(w1 \times t + o \times \pi) + A2 \times \cos(w2 \times t + p \times \pi)$$

$$w10 = \sqrt{\frac{(k1 + k3)}{m1}}$$

$$w20 = \sqrt{\frac{(k2 + k3)}{m2}}$$

$$w1 = \sqrt{w10^2 + \frac{1}{2} \times R^2}$$

$$w2 = \sqrt{w20^2 - \frac{1}{2} \times R^2}$$

$$j = \sqrt{\frac{k3}{(m1 \times m2)}}$$

$$R = \sqrt{(w10^2 + w20^2) \times \left( \sqrt{1 + 4 \times \frac{j^4}{(w10^2 + w20^2)}} - 1 \right)}$$

Figura - 19 Modelo matemático para os osciladores acoplados

Comparando com o modelo matemático na seção 3.3.2, algumas mudanças foram feitas a fim de adequação ao ambiente *Modellus*. Os parâmetros  $\theta_1$  e  $\theta_2$  foram alterados para  $o \times \pi$  e  $p \times \pi$ , as constantes  $R$  e  $j$  correspondem às grandezas  $\Delta\omega$  e  $\kappa$  respectivamente. Através da ferramenta *indicador de nível* foi possível alterar os valores de alguns parâmetros cuja variação é de interesse para a análise comportamental do modelo.

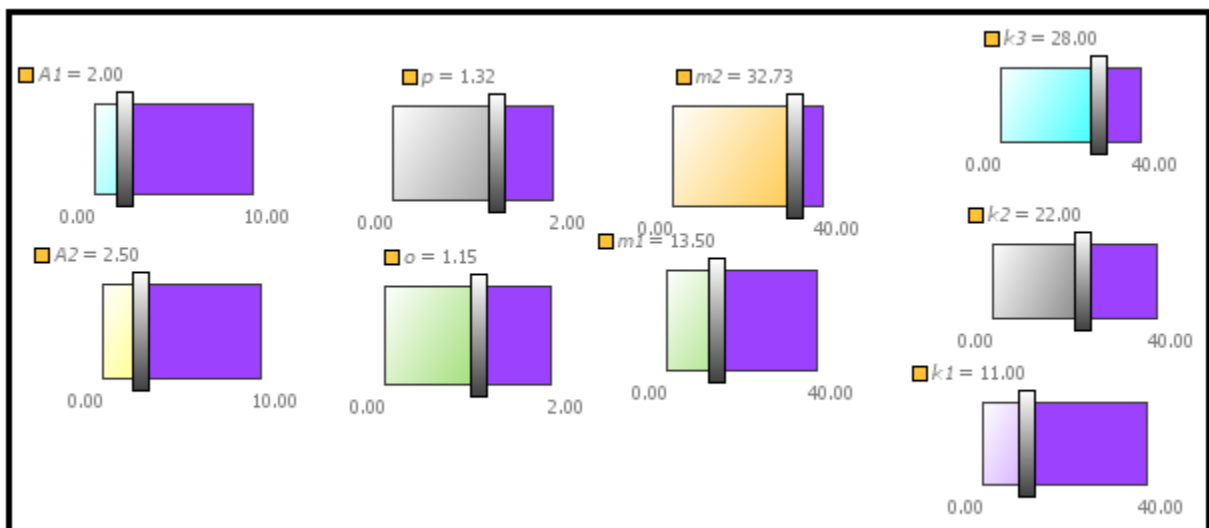


Figura - 20 Indicadores de Nível para alguns parâmetros mutáveis para os osciladores acoplados.

Na fase do desenvolvimento do modelo matemático foi necessário se verificar quais constantes deveriam ser analisados a sua variação. Os objetos mutáveis (variáveis) foram representados conforme a Figura - 20. Alguns questionamentos foram levantados neste momento: “Em que sentido a variação das massas é importante para a o comportamento das oscilações?”; “O fator de acoplamento deverá ser indicado pela ferramenta *indicador de nível*, ou simplesmente indicar cada fator que o componha traz resultados desejados?”; “ $k_3$  poderá assumir qualquer valor?” “Quais os fatores que precisamos analisar, conseqüentemente representá-lo em um *indicador de nível*, para que seja possível desenvolver no oscilador o regime de oscilação dos modos normais?”. Podemos então associar essas características da transposição das equações matemáticas e seus respectivos objetos mutáveis à fase de motivação (enunciado e avaliação dos parâmetros).

Como no problema anterior, foram levantadas algumas hipóteses entre a fase de construção do modelo matemático e o início do progresso da simulação na tentativa de responder aos questionamentos citados acima. Essas hipóteses resultaram em uma primeira formação do *modelo matemático* e na escolha dos *indicadores de nível*. Essas características correspondem à etapa 2.

### 5.2.2 Apresentação do resultado gráfico do modelo dos osciladores acoplados.

Abaixo se ilustra o gráfico das posições das partículas ao decorrer do tempo. As curvas vermelhas representam a posição da partícula 1 ( $x_1$ ) e a curva roxa a partícula 2 ( $x_2$ ). Ilustramos dois casos diferentes nos Gráficos - 3 e 4. O primeiro representa o caso em que o acoplamento é fraco e as massas são idênticas. O segundo representa o caso em que o acoplamento é forte.

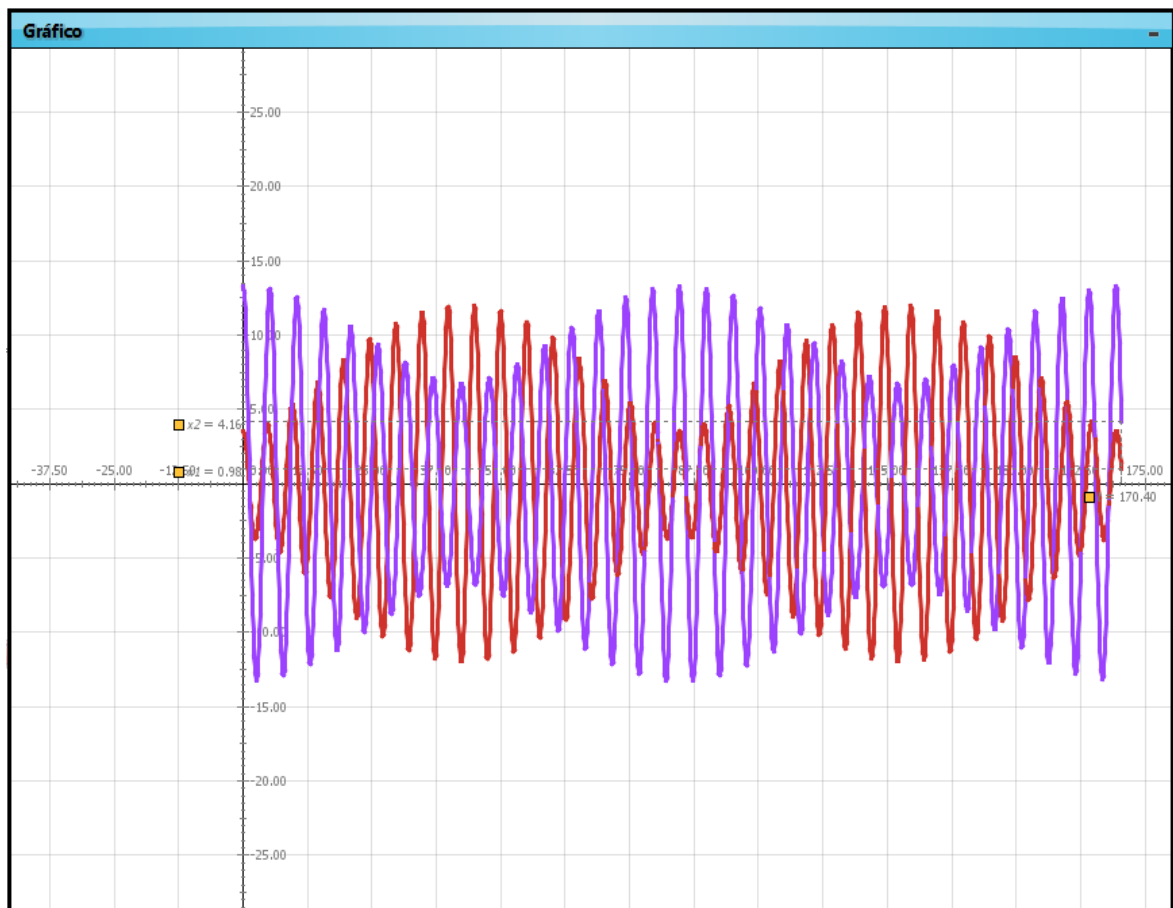


Gráfico - 3 Oscilação onde o regime de acoplamento é fraco.

Neste momento são validadas as hipóteses feitas entre a fase de desenvolvimento do modelo matemático. Por exemplo, os valores das massas contribuem significativamente para o regime de acoplamento, além de  $k_1$  e  $k_2$  uma vez que para variar o tipo de oscilação ilustrado no Gráfico - 3 para a situação ilustrada no Gráfico - 4, foi necessário também alterar seus valores além do valor de  $k_3$ . A explicação para isso é que  $k_3$  não pôde assumir certos valores.

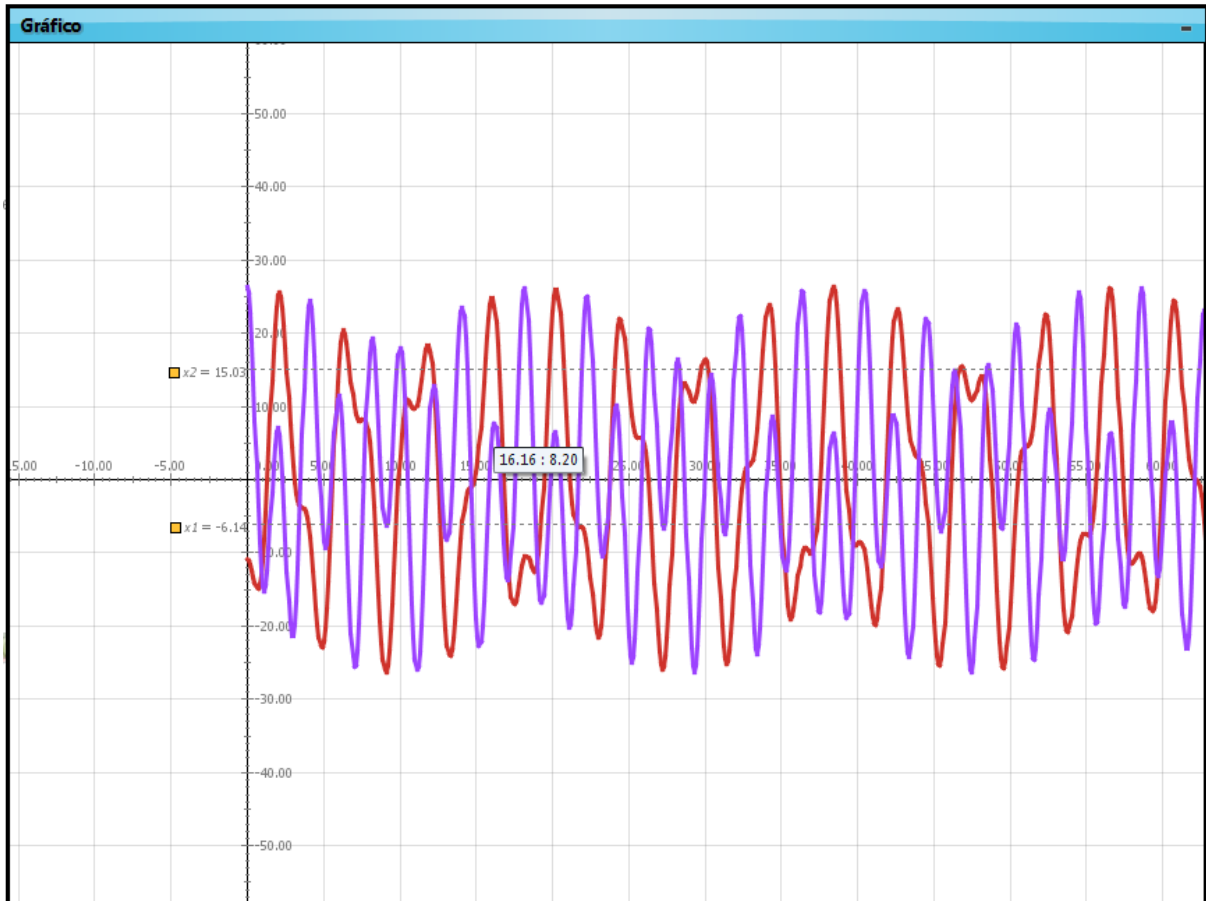


Gráfico - 4 Oscilação onde o regime de acoplamento é forte.

Acrescentando a esta verificação, podemos generalizar a conclusão do fato em que certas combinações de valores de  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  não foram permitidas no que diz respeito à perpetuação da oscilação.

Os Gráficos - 5 e 6 indicam os modos normais de vibração para altas e baixas frequências respectivamente. No primeiro caso bastou-se fazer  $A_2 = 0$  e no segundo  $A_1 = 0$ , de modo que o sistema oscilasse somente com uma frequência de oscilação.

Do que foi apresentado sobre as informações obtidas devido a essa ferramenta, podemos concluir que o gráfico foi um importante meio de validação das hipóteses. Pois indicou se a composição do modelo matemático e dos indicadores de nível estavam adequadas para a perpetuação da oscilação.



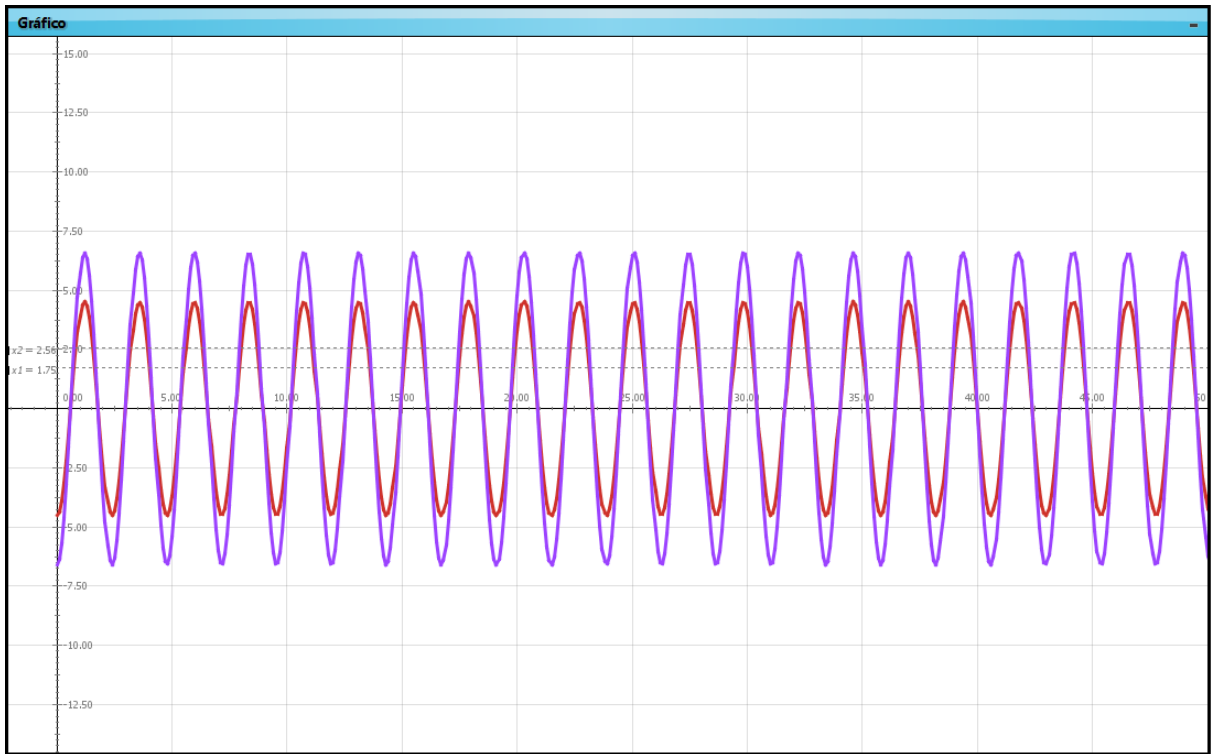


Gráfico - 5 Modos normais de vibração para altas frequências.

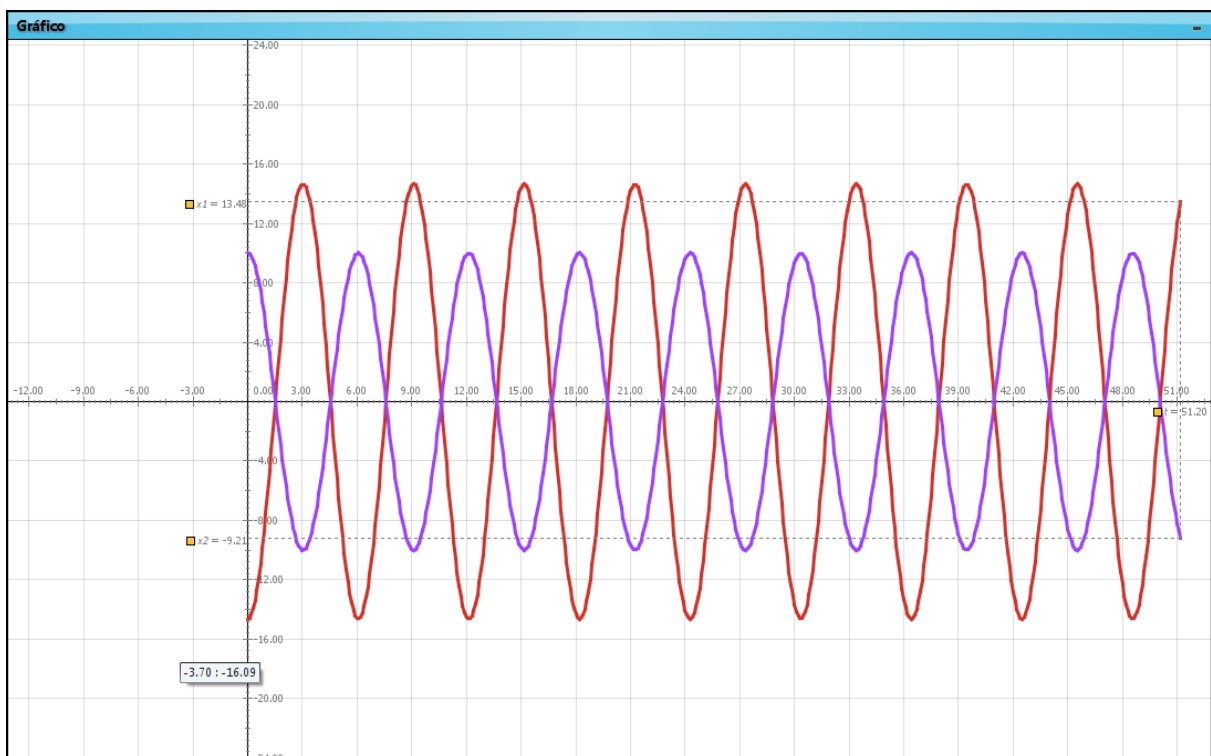


Gráfico - 6 Modos normais para baixas frequências.

### 5.2.3 Resultado da tabela para os osciladores acoplados.

Tabela - 2 Valores de  $x_1$ ,  $x_2$  e  $j$ : em dois casos: acoplamento fraco, (vermelho, roxo e azul); acoplamento forte, (rosa, cinza e laranja).

$x_1$	$x_2$	$j$	$x_1$	$x_2$	$j$
-2.81	-1.32	0.84	3.58	-9.29	1.88
-3.43	-0.35	0.84	3.78	-7.67	1.88
-3.89	0.66	0.84	4.13	-5.00	1.88
-4.18	1.67	0.84	4.52	-1.74	1.88
-4.29	2.64	0.84	4.76	1.57	1.88
-4.23	3.54	0.84	4.70	4.37	1.88
-3.99	4.31	0.84	4.21	6.21	1.88
-3.61	4.94	0.84	3.24	6.82	1.88
-3.09	5.39	0.84	1.80	6.14	1.88
-2.46	5.65	0.84	-0.01	4.37	1.88
-1.76	5.69	0.84	-2.02	1.89	1.88
-1.01	5.51	0.84	-4.01	-0.79	1.88
-0.25	5.12	0.84	-5.77	-3.14	1.88
0.49	4.52	0.84	-7.11	-4.66	1.88
1.18	3.73	0.84	-7.89	-5.05	1.88
1.79	2.79	0.84	-8.06	-4.20	1.88
2.31	1.72	0.84	-7.64	-2.24	1.88
2.71	0.56	0.84	-6.75	0.48	1.88
2.99	-0.63	0.84	-5.55	3.49	1.88
3.13	-1.82	0.84	-4.24	6.22	1.88
3.15	-2.96	0.84	-3.00	8.17	1.88
3.04	-4.00	0.84	-1.99	8.94	1.88
2.82	-4.89	0.84	-1.28	8.36	1.88
2.51	-5.61	0.84	-0.90	6.49	1.88
2.11	-6.12	0.84	-0.76	3.60	1.88
1.65	-6.39	0.84	-0.75	0.18	1.88
1.17	-6.41	0.84	-0.71	-3.24	1.88
0.66	-6.18	0.84	-0.49	-6.09	1.88
0.17	-5.71	0.84	0.03	-7.93	1.88
-0.30	-5.00	0.84	0.91	-8.47	1.88
-0.73	-4.09	0.84	2.13	-7.68	1.88

A tabela informa mais claramente os resultados numéricos dos fenômenos de interesse. No caso da Tabela - 2 são ilustrados os dados numéricos que foram destacados graficamente nos gráficos 5 e 4. Podemos observar claramente que o fator de acoplamento  $j$ , é maior quando o acoplamento é forte, mostrando a relação da intensidade do acoplamento e seu movimento consequente.

Portanto, como no caso anterior podemos concluir que esta ferramenta foi usada a fim de completar a análise que os gráficos proporcionaram. Em outras palavras, a tabela se constitui uma ferramenta de validação de hipóteses tal como os gráficos.

### 5.2.4 Visualização da simulação dos osciladores acoplados

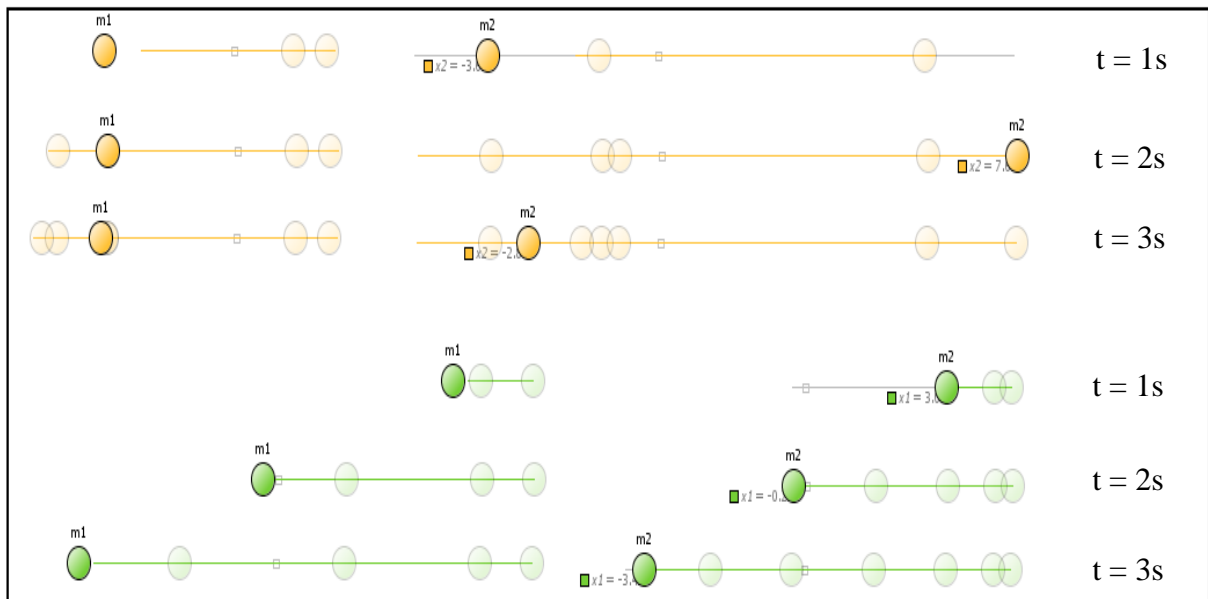


Figura - 21 Oscilação sob dois regimes distintos: acoplamento forte (laranja) acoplamento fraco (verde).

Na Figura - 21 observamos o movimento dos osciladores acoplados sob dois regimes. O primeiro caso (laranja) é classificado como acoplamento forte e o segundo é classificado como acoplamento fraco (verde). Em ambos os casos as partículas são idênticas (respectivamente) e as demais condições iniciais também o são, exceto o valor de  $k_3$  de modo que o regime de acoplamento mude de fraco para forte. Para cada caso colocamos a evolução temporal do movimento. Para que ficasse claro fizemos com que a partícula marcasse sua trajetória a cada cinco passos. Estes passos representam o progresso da simulação com o tempo.

Os movimentos são bem distintos, como se pode observar. O grau de acoplamento ( $j$ ) da oscilação foi determinante para que isso ocorresse. Como comentado anteriormente,  $k_3$  não pôde assumir qualquer valor para um determinado conjunto de condições iniciais. Caso contrário a partícula ficava parada, demonstrando a não perpetuação da oscilação. Neste momento a simulação concede um aspecto mais dinâmico no que diz respeito à validação de hipóteses usando em conjunto com os gráficos e com as tabelas.

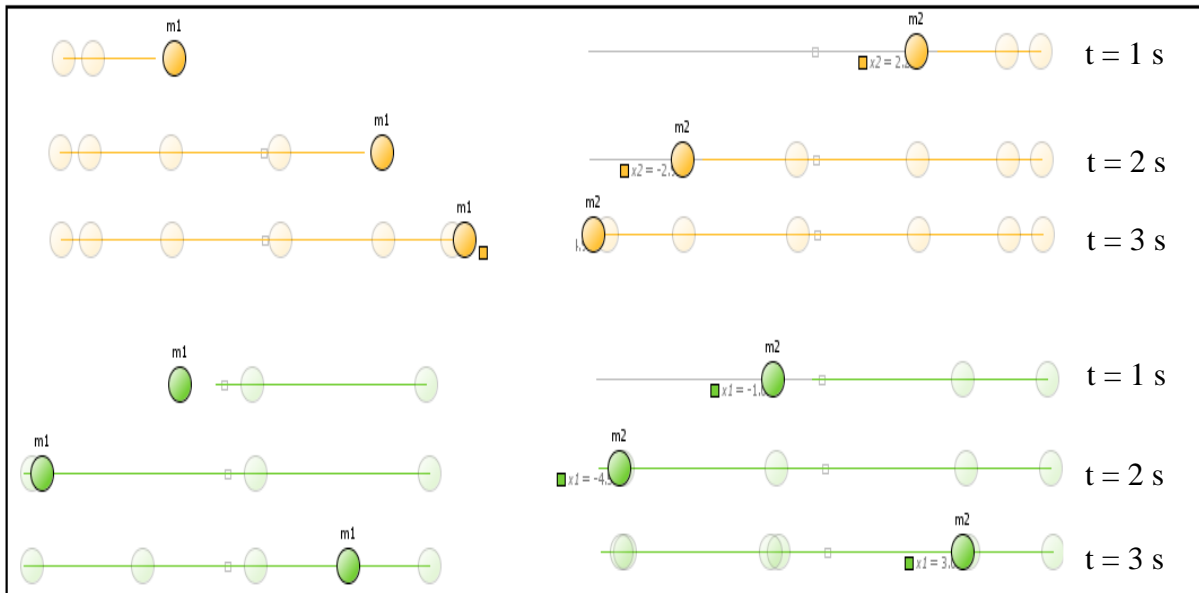


Figura - 22 Modos normais de vibração em dois regimes: oscilações para baixas frequências (laranja), oscilações para altas frequências (verde).

Na Figura - 22 está ilustrado o regime dos modos normais de vibração. O movimento para altas frequências aconteceu em fase, já o movimento para baixas frequências aconteceu fora de fase. Aos seus movimentos estão associados os Gráficos - 5 e 6 (altas e baixas frequências, respectivamente). Podemos perceber que para o caso dos modos normais de associados às altas frequências o movimento aconteceu em fase, ao contrário dos modos associados às baixas frequências. Neste momento a simulação concede um aspecto mais dinâmico no que diz respeito à validação de hipóteses usando em conjunto com os gráficos e com as tabelas.

Para podermos colocar o oscilador nos estados ilustrados na Figura - 5.10 e 5.11, foram levantados novos questionamentos, a fim de que fosse analisada a validade do modelo no que diz respeito às propriedades visualizadas nos resultados gráficos, numéricos e dinâmicos (simulação) o que caracteriza a etapa de sistematização.

Da mesma forma que na análise do problema anterior, a etapa de formalização não se adéqua à nossa proposta, uma vez que toda essa análise partiu-se de um modelo concluído.

### 5.3 PROBLEMA 3: MOVIMENTO DE UMA PARTÍCULA CARREGADA EM UM CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Nesta última seção deste capítulo descreveremos o último problema restante. Trata-se basicamente de uma partícula de massa  $m$  carregada que se movimenta na presença de um campo elétrico e um campo magnético. Veremos como se comportará o movimento desta sob essas condições, analisando principalmente sua trajetória no plano  $yz$ .

#### 5.3.1 MODELO MATEMÁTICO PARA O MOVIMENTO DA PARTÍCULA EM UM CAMPO ELETROMAGNÉTICO

**Modelo Matemático**

$$w = q \times \frac{B}{m}$$

$$y = \left( \frac{v_{0z}}{w} \right) \times (1 - \cos(w \times t) + \sin(w \times t)) + \left( \frac{E}{B} \right) \times \left( t - \frac{\sin(w \times t)}{w} \right)$$

$$z = \left( \frac{v_{0y}}{w} - \frac{E}{(w \times B)} \right) \times (\cos(w \times t) - 1) + \frac{v_{0z}}{w} \times \sin(w \times t)$$

$$A = \frac{v_{0y}}{w}$$

$$C = \frac{E}{(w \times B)}$$

$$K = \frac{A}{C}$$

Figura - 23 Modelo matemático do movimento da partícula carregada em um campo eletromagnético.

Na Figura - 23 é ilustrado o modelo matemático de uma partícula carregada que se movimenta em um campo elétrico na direção do eixo  $z$  e um campo magnético na direção do eixo  $x$ , tal como ilustrado na Figura - 11. Comparado com o tratamento já discutido na seção 3.3.3, não houve mudanças nas denominações dos parâmetros. Exceto a alteração de  $\omega$  por  $w$ , pois no *Modellus* não se trabalha com letras gregas. Como se pode observar foi definido um parâmetro  $K$  de modo que fosse possível analisar o movimento na direção de  $z$  de forma mais efetiva, pois como se pode observar, para os casos em que  $v_{0z}$  é nulo, o movimento no eixo  $z$  depende somente da combinação dos valores de  $v_{0y}$ ,  $\omega$ ,  $E$  e  $B$ .

Como nos problemas anteriores nos deparamos com questionamentos durante a fase de desenvolvimento do modelo matemático em torno da escolha e significado dos parâmetros mutáveis que deveríamos representá-los na forma de indicadores de nível: “É melhor representar a velocidade angular  $\omega$  ou cada um dos parâmetros que a constitui?”;” Há alguma vantagem em definir algum parâmetro que represente a proporcionalidade dos campos elétrico e magnético ao invés de representar cada um destes?”.

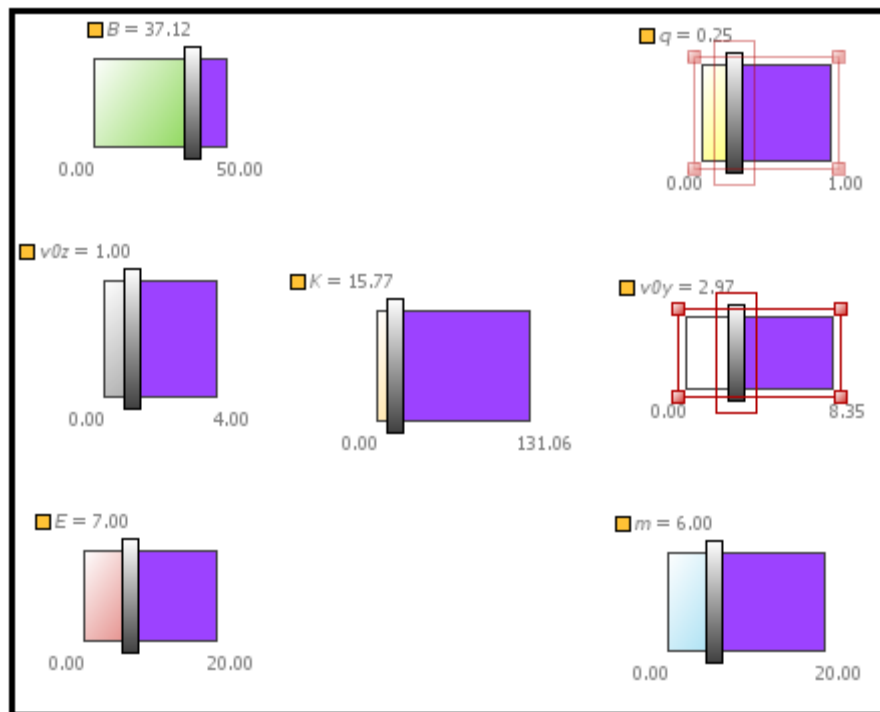


Figura - 24 Indicadores de nível para os parâmetros mutáveis  $B$ ,  $E$ ,  $q$ ,  $m$ ,  $V_{0y}$ ,  $V_{0z}$  e  $K$

Essas características da transposição das equações matemáticas e seus respectivos objetos mutáveis são correspondentes à fase de motivação (enunciado e avaliação dos parâmetros).

Na Figura - 24 são ilustrados os parâmetros mutáveis escolhido para analisar o comportamento da partícula. A escolha destes indicadores de nível juntamente com formulação do modelo matemático, é resultado do levantamento de hipóteses realizado para responder os questionamentos que nos deparamos na fase de motivação. Tal etapa corresponde ao de levantamento de hipóteses.

### 5.3.2 RESULTADO GRÁFICO PARA O MOVIMENTO DA PARTÍCULA EM UM CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Como nos problemas anteriores analisaremos a evolução temporal, aproximadamente seis segundos, do movimento da partícula. Abaixo, no Gráfico - 7 é ilustrada a posição da partícula ao decorrer do tempo. O gráfico azul exibe a posição no eixo y enquanto o preto a posição no eixo z. Esse movimento tem como característica a permanência da partícula no quadrante positivo ( $y, z \geq 0$ ). Uma das razões seria que neste caso a partícula começou seu movimento do repouso e na origem.

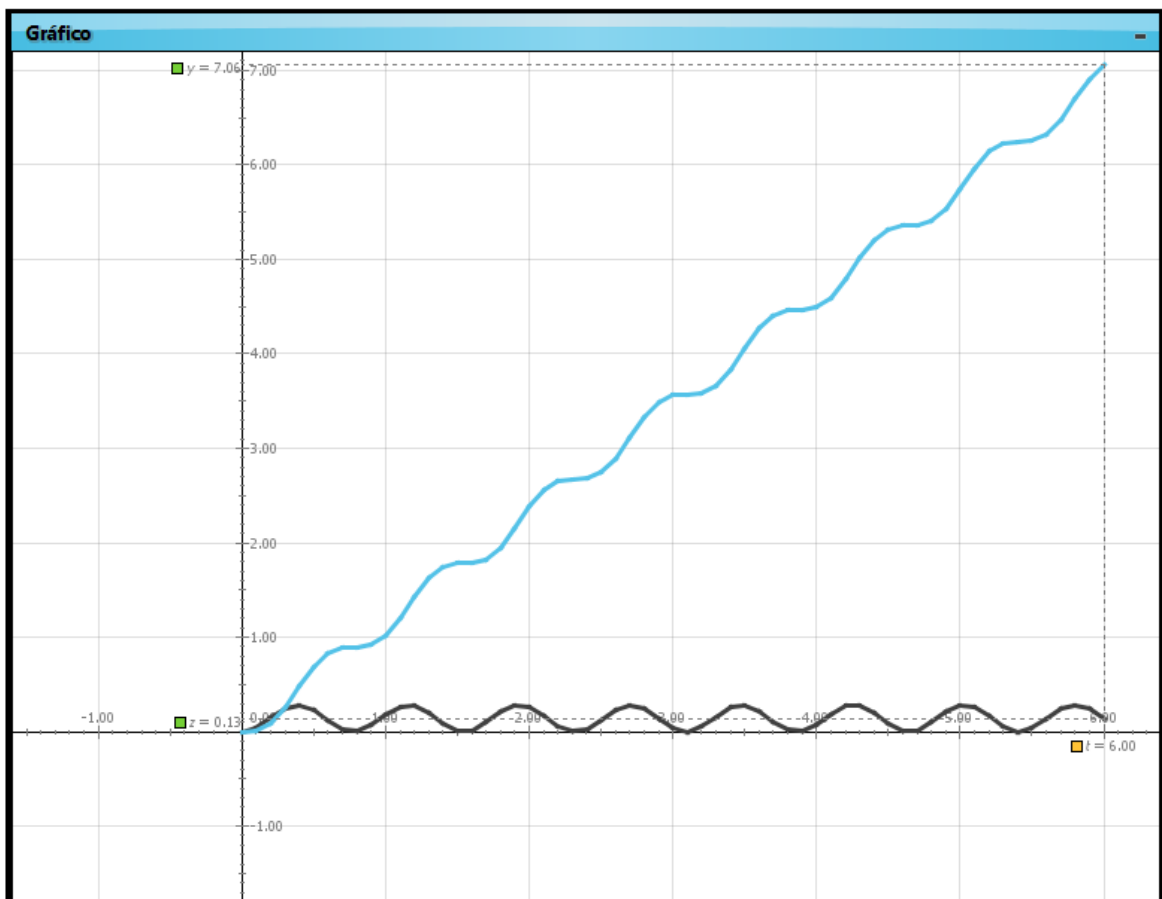


Gráfico - 7 Posição da partícula no eixo y (azul) e z (preto) em que a partícula começa na origem e no repouso.

No Gráfico - 8 é ilustrado o caso em que a partícula possui componentes da velocidade inicial não nula na direção y e z. Podemos observar que neste caso o movimento já contempla valores tanto positivos quanto negativos de y e de z.

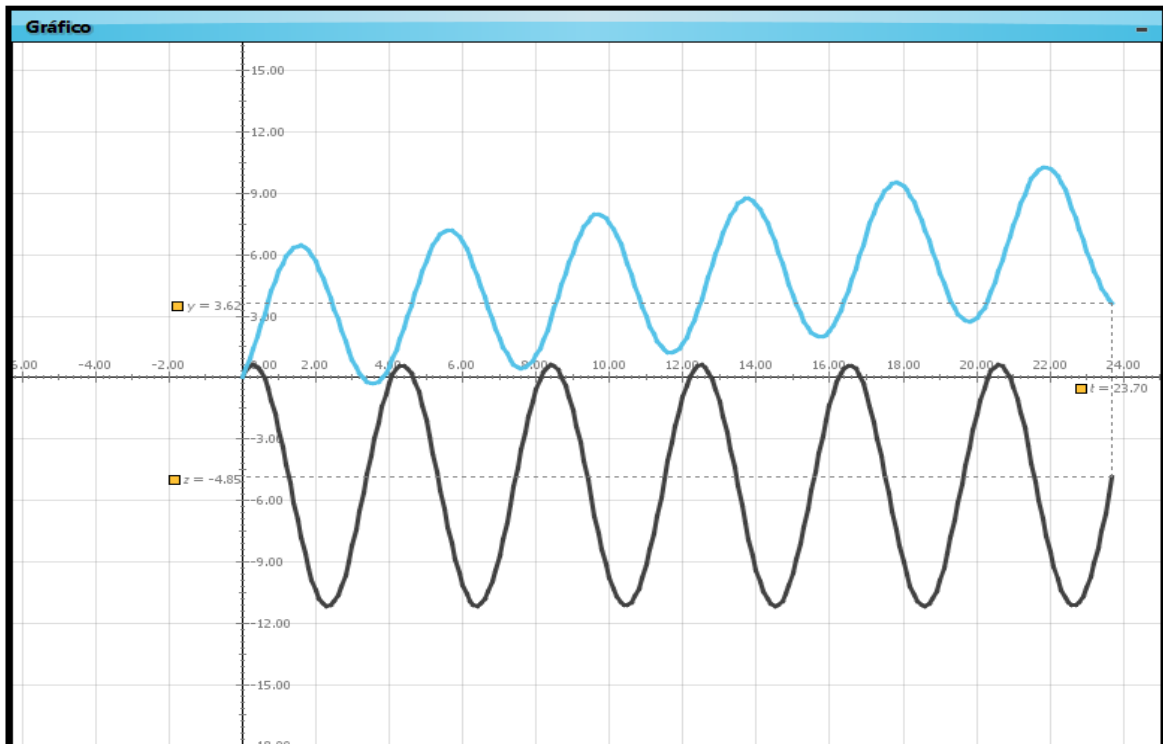


Gráfico - 8 Posição da partícula no eixo y (azul) e z (preto) em que a partícula começa na origem e velocidades iniciais não-nulas.

Os gráficos se constituem como uma ferramenta de validação de hipóteses. Pois é possível comprovar a eficiência da escolha da formulação do modelo matemático e dos indicadores de nível. Como exemplo, temos a escolha do parâmetro  $K$  que nos auxiliou para forçássemos a partícula a se movimentar somente na direção de  $y$ . Este movimento é ilustrado no Gráfico - 9.

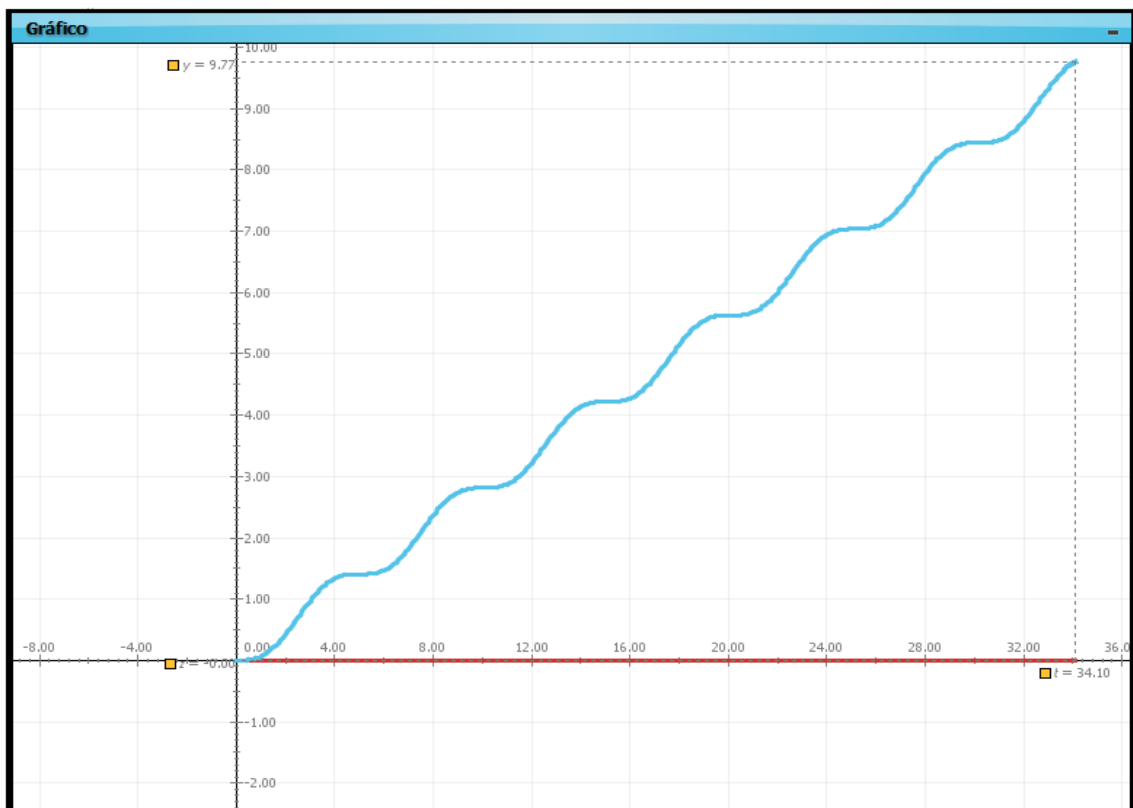


Gráfico - 9 Posição da partícula no eixo y (azul) e z (vermelho) para  $K = 1$  e  $v_{0z} = 0$ .



### 5.3.3 Resultado da tabela para o movimento da partícula em um campo eletromagnético

Tabela - 3 Valores de y e z referente ao Gráfico - 7 (caso verde), 5.8 (caso azul) e 5.9 (caso laranja).

z	y	y	z	y	z	t
-0.00	0.29	0.29	0.34	19.30	-5.07	1.70
-0.00	0.33	0.33	0.36	19.58	-6.44	1.80
-0.00	0.38	0.38	0.39	19.69	-7.83	1.90
-0.00	0.43	0.43	0.40	19.62	-9.22	2.00
-0.00	0.48	0.48	0.42	19.38	-10.59	2.10
-0.00	0.53	0.53	0.43	18.98	-11.91	2.20
-0.00	0.58	0.58	0.44	18.41	-13.17	2.30
-0.00	0.64	0.64	0.45	17.69	-14.35	2.40
-0.00	0.70	0.70	0.45	16.83	-15.42	2.50
-0.00	0.75	0.75	0.45	15.84	-16.37	2.60
-0.00	0.81	0.81	0.44	14.74	-17.19	2.70
-0.00	0.86	0.86	0.43	13.55	-17.86	2.80
-0.00	0.92	0.92	0.42	12.28	-18.38	2.90
-0.00	0.97	0.97	0.41	10.96	-18.73	3.00
-0.00	1.02	1.02	0.39	9.61	-18.91	3.10
-0.00	1.07	1.07	0.37	8.24	-18.91	3.20
-0.00	1.11	1.11	0.35	6.88	-18.74	3.30
-0.00	1.15	1.15	0.32	5.56	-18.40	3.40
-0.00	1.19	1.19	0.30	4.29	-17.90	3.50
-0.00	1.23	1.23	0.27	3.09	-17.24	3.60
-0.00	1.26	1.26	0.24	1.99	-16.42	3.70
-0.00	1.29	1.29	0.22	0.99	-15.48	3.80
-0.00	1.31	1.31	0.19	0.12	-14.41	3.90
-9.69E-4	1.33	1.33	0.16	-0.61	-13.24	4.00
-8.10E-4	1.35	1.35	0.13	-1.18	-11.99	4.10
-6.60E-4	1.37	1.37	0.11	-1.60	-10.67	4.20
-5.20E-4	1.38	1.38	0.09	-1.85	-9.30	4.30
-3.94E-4	1.39	1.39	0.07	-1.92	-7.91	4.40
-2.82E-4	1.40	1.40	0.05	-1.83	-6.52	4.50
-1.88E-4	1.40	1.40	0.03	-1.55	-5.15	4.60
-1.11E-4	1.40	1.40	0.02	-1.11	-3.81	4.70
-5.39E-5	1.41	1.41	0.01	-0.51	-2.55	4.80
-1.69E-5	1.41	1.41	0.00	0.25	-1.36	4.90
-7.44E-7	1.41	1.41	1.23E-4	1.15	-0.27	5.00
-5.70E-6	1.41	1.41	9.43E-4	2.17	0.70	5.10

Como vimos nos problemas anteriores, a tabela se constitui como uma ferramenta de validação de hipóteses tal como o gráfico. A diferença é que o potencial quantitativo, ou seja as informações de valores, da tabela se sobrepõe ao do gráfico que nos concede informações basicamente qualitativas.

Podemos reafirmar as informações obtidas com o gráfico desta vez numericamente. Portanto a tabela se insere na etapa 4 do desenvolvimento do modelo.

### 5.3.4 Visualização da simulação do movimento da partícula em um campo eletromagnético

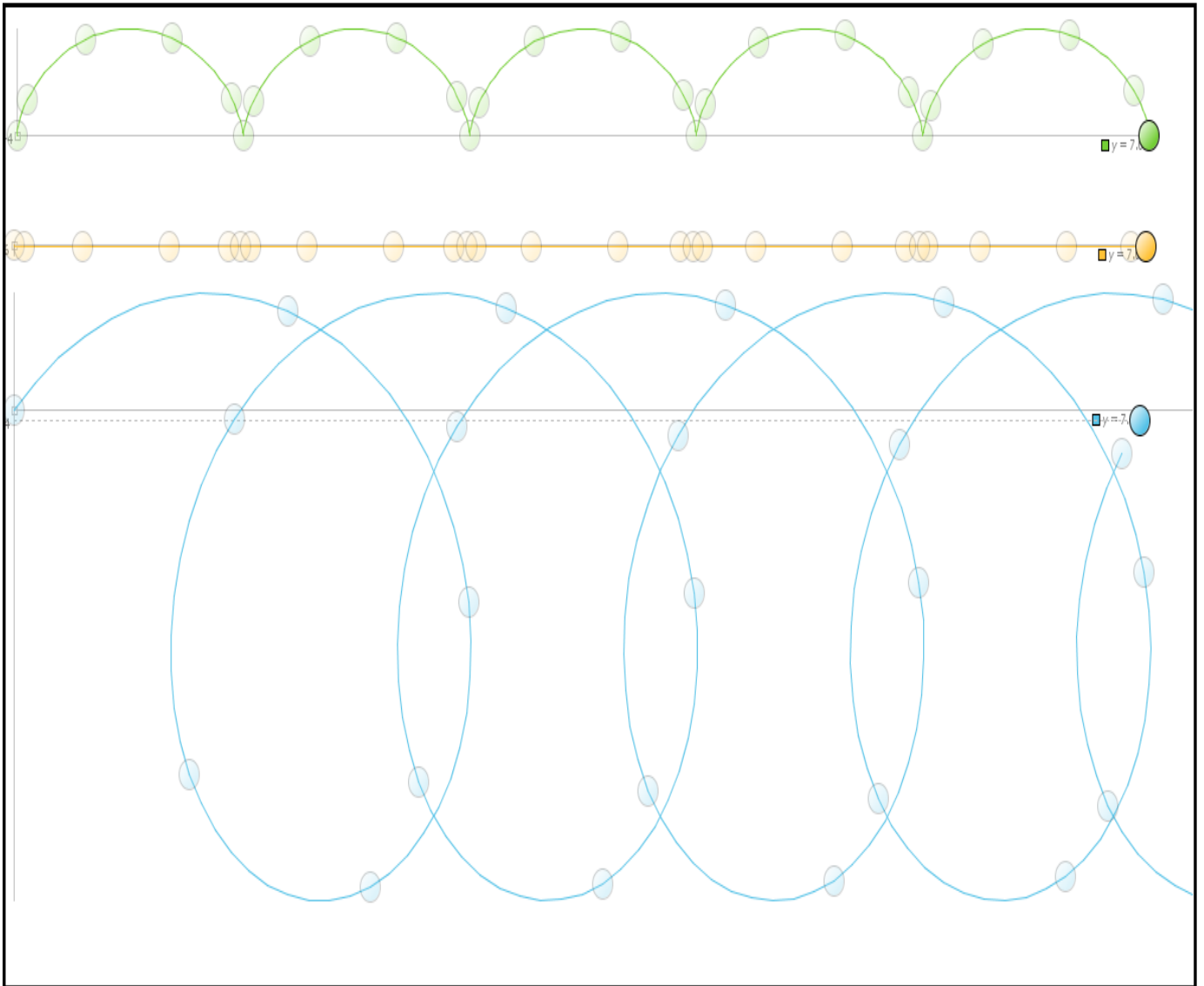


Figura - 25 Trajetória da partícula nos casos correspondentes da Tabela - 3

Na Figura - 25 é esquematizada a simulação do problema para os três casos discutidos anteriormente. A evolução dinâmica acontece de modo que no eixo horizontal se dá o movimento no eixo  $y$  e no eixo vertical o movimento no eixo  $z$ . A simulação completa o conjunto de ferramentas que possuem a capacidade da validação do modelo.

A grandeza  $K$  só foi definida após a validação do modelo. Isso aconteceu porque na simulação percebemos, ao acaso, que era possível restringir o movimento da partícula

somente no eixo  $y$ . Neste momento surgiu um novo questionamento: “Como posso definir um novo parâmetro de modo que seja possível restringir o movimento em  $y$ ?” Um outro novo questionamento diz respeito a manter a partícula se movimentando somente na parte positiva de  $y$  e de  $z$ . Esses novos questionamentos nos fizeram rever as relações entre as grandezas e entender melhor o fenômeno. Essas características correspondem à etapa de sistematização.

Após a etapa de sistematização, onde neste momento revemos as relações entre as grandezas de modo que obtemos os resultados desejáveis, ajustamos o modelo matemático e a representação dos objetos mutáveis. Alcançamos então a etapa final da modelagem que é a formalização. Onde neste momento é possível com o modelo dito criado, fazermos generalizações e trabalharmos o mesmo sob outras perspectivas. Como por exemplo, utilizá-lo em uma atividade de modelagem exploratória.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio da realização deste trabalho, constatamos que há muito ainda a se pesquisar e avaliar no que diz respeito a atividades de modelagem não só voltados para o Ensino de Física, mas como em diversas outras áreas. Este trabalho se restringiu a uma pequena porção de um universo imenso de aplicabilidade.

O objetivo geral deste trabalho foi verificar a implementação da modelagem no ensino de tópicos de Física na área da Mecânica Teórica por meio de atividades de modelagem. Especificamente, o objetivo era elaborar atividades didáticas voltadas para o Ensino de Física em Mecânica Teórica a partir de uma metodologia de modelagem aplicada ao ensino, e simultaneamente avaliar limites e possibilidades do uso do ambiente computacional *Modellus* como *software* de modelagem aplicada ao ensino de Física, verificando desta forma como este ambiente de modelagem pode contribuir efetivamente para a concepção de conceitos físicos.

Como vimos no capítulo 2 e 3, a modelagem deve ser norteada por um processo bem concreto de modo que o conhecimento adquirido por este método seja significativo e não efêmero. Nesta premissa, Pietrocola (1999) propôs uma série de etapas que, segundo este, deveria abranger o processo de modelagem. São elas: Motivação, Levantamento de Hipóteses, Validação, Sistematização e Formalização. Portanto a viabilidade do ambiente *Modellus* na análise dos problemas de mecânica foi então avaliada verificando se o processo de criação do modelo dos problemas neste ambiente obedece a estas etapas.

Estas etapas basicamente são direcionadas a um tipo de modelagem, a expressiva. Este tipo de modelagem se baseia na idéia do modelador escolher um problema e, através da análise de parâmetros e significados, este criar uma formalização matemática que expresse o comportamento do fenômeno.

O aspecto inovador deste trabalho se tratou de pegarmos uma representação matemática já pronta de uma temática pouco tratada, que é a Mecânica Teórica, no aspecto das atividades de modelagem, e realizarmos uma atividade de modelagem exploratória, analisando o desenvolvimento desta com etapas pertencentes essencialmente ao modo

expressivo de atividade de modelagem, PIETROCOLA (1999).

Tratamos de três problemas comuns a qualquer estudante que curse uma disciplina de mecânica clássica. O primeiro foi o oscilador bidimensional, em que vimos as relações entre as grandezas de modo que obtivemos várias trajetórias possíveis. O segundo foi o oscilador acoplado, onde analisamos o comportamento das massas de acordo com o grau de acoplamento entre as massas. Finalmente o terceiro problema foi a análise do movimento de uma partícula carregada em um campo eletromagnético.

Depois da análise de todos os problemas, percebemos que a correspondência das etapas propostas por Pietrocola ao desenvolvimento do modelo no ambiente não aconteceu de forma direta, ou seja, em muitos momentos durante a atividade de modelagem surgiram vários questionamentos sobre qual etapa se ajusta a um determinado momento da atividade de modelagem.

Tal dificuldade pode ser explicada devido o fato de estas etapas compreenderem a atividade de modelagem expressiva. Porém no nosso caso realizamos uma modelagem exploratória no sentido de que pegamos equações já prontas, ou seja, produto de um estudo que representasse o fenômeno.

Analisando mais rigorosamente a metodologia deste trabalho, a atividade de modelagem que desempenhamos segue um modelo híbrido dos dois tipos citados anteriormente. Basicamente o que fizemos foi utilizar de uma formalização matemática já consolidada para os três problemas aqui tratados, porém a fim de contemplarmos estes problemas no *Modellus*, nós moldamos o modelo matemático, analisando a relação entre as grandezas e os objetos mutáveis, desenvolvemos simulações e ajustamos as ferramentas tabela e gráfico, para que os resultados almejados. Após todos estes ajustes e desenvolvimento de simulação, obtemos a formalização do problema no ambiente, temos então o modelo.

Então este modelo híbrido ao qual propomos está relacionado com a implementação de um sistema físico já definido, o que caracteriza a modelagem exploratória, no ambiente de *Modellus*. Mas para ocorrer esta implementação é necessário que o modelador analise as relações entre as variáveis, represente os objetos mutáveis e monte a simulação os gráficos e as tabelas. Concluído tudo isso é dito que está construído o modelo.

Tal característica se refere à modelagem expressiva.

Portanto nossa abordagem de atividade de modelagem se refere, sob nosso ponto de vista, ao modo expressivo e exploratório de atividades de modelagem. Denominamos então de modo híbrido de atividades de modelagem.

A etapa de motivação foi observada no sentido da escolha do problema e como se deu todo o ajuste das equações matemáticas de modo que se adéqüe ao ambiente. A escolha das grandezas para serem representadas nos indicadores de nível, também se enquadra nesta etapa. Para este desenvolvimento nos deparamos com questionamentos a partir dos quais levantamos hipóteses. Disto resulta o primeiro modelo matemático formado também pelos indicadores de nível da nossa simulação. Portanto, vimos que esta fase da modelagem contempla a etapa de levantamento de hipóteses.

Quando a simulação é então posta para progredir no tempo, foi então possível de validar se os ajustes no modelo matemático e as grandezas representadas nos indicadores corresponderiam às informações desejadas. Neste momento os dados das ferramentas *Gráfico* e *Tabela* são também gerados. Esta etapa correspondeu então a etapa de validação de hipóteses.

Inevitavelmente ao visualizarmos os dados serem gerados simultaneamente com simulação, novos questionamentos foram feitos acerca dos limites e possibilidades do que foi desenvolvido até então. A partir destes novos questionamentos fizemos novas alterações tanto nos indicadores de nível quanto no modelo matemático, levantando assim novas hipóteses, realizando assim um novo ciclo. Este momento da fase de modelagem correspondeu à etapa de sistematização.

A conclusão da etapa de modelagem aconteceu quando o modelo já abrange os resultados esperados correspondendo assim com o modelo real. Desta forma o modelo pode ser generalizado para se obter resultados diversos ao que estávamos procurando sendo possível utilizar os modelos construídos para realizar atividades de modelagem de caráter puramente exploratório.

Por fim, este estudo gerou resultados que podem contribuir para a inserção desta prática de modelagem no ensino de física não só no ensino de física universitário, mas como

também no nível secundário, abrindo um leque de possibilidades de outros trabalhos futuros, como sugestão a aplicação destes modelos em uma turma de alunos de alguma disciplina de mecânica teórica, e então analisar as correspondências do processo de modelagem destes indivíduos com as etapas propostas por Pietrocola (1999).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BASSANEZI, R. **A modelagem matemática**. *Dynamis*, Blumenau/SC, v.1, n.7, p.55-83, abr./jun.1994.

BLISS, J.; OGBORN, J. Tool for exploratory learning. **Oxford**, v.5, n.1, p. 35-50, mar. 1990.

BRASIL. **DIRETRIZES NACIONAIS CURRICULARES PARA OS CURSOS DE FÍSICA**. Conselho Nacional de Educação. Diário Oficial da União de 7/12/2001, Seção 1, p. 25.

CAMILETTI, G. & FERRACIOLI, L (2002) A Utilização da Modelagem Computacional Quantitativa no Aprendizado Exploratório de Física. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, 24(2): 110-123.

CAMILETTI, G. (2001) **Modelagem computacional Semiquantitativa no Estudo de Tópicos de Ciências: Um Estudo Exploratório com Estudantes Universitários**. Dissertação de Mestrado – Departamento de Física- Universidade Federal do Espírito Santo-UFES.

FORD, A. **Modeling the Environment: an Introduction to System Dynamics Models of Environmental Systems** Covelo. CA: Island Press, 1999.

FORRESTER, J. **Principles of Systems**. Cambridge, Ma: Wright-Allen Press. 1968



HALLOUN, I. Schematic modeling for meaningful learning of physics. **Journal of Research of Physics**, New York, v.33, n.9, p. 1019-1041, nov. 1996.

Ives, S. ARAÚJO. *et al* (2004): Atividades de modelagem computacional no auxílio à interpretação de gráficos de cinemática. **Revista Brasileira de Ensino de Física** 24(2): 179-184.

KURTZ DOS SANTOS, A.C. (1994). **Introdução à Modelagem Computacional na Educação**. Porto Alegre. FURG.

MANDINACH, E. B., & CLINE, H. F. **Classroom Dynamics: Implementing a Technology -Based Learning Environment**. Hillsdale, N.J: Lawrence Erlbaum Associates. 1994.

MOREIRA, G.S. (2001). **A Utilização de um Ambiente de Modelagem Computacional no Ensino/Aprendizagem de Economia**. Dissertação de Mestrado IM-NCE: Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ/DCC/IM/NCE.

Pedro, M. V. (2006). **JLinkIt: Desenho e implementação de um ambiente de modelagem computacional para o ensino**. Dissertação de Mestrado IM-NCE: Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ/DCC/IM/NCE.

PEDUZZI, L.O.Q.(1997): Sobre a resolução de problemas no Ensino da Física. **Caderno Catarinense de Ensino de Física**. 14(3): 229-253.

PIETROCOLA, M. Modelização de Variáveis: uma maneira de caracterizar o papel estruturador da Matemática no conhecimento científico. In: **Ensino de Física: conteúdo, metodologia e epistemologia numa concepção integradora**. Florianópolis: Ed. da UFSC, 2001. p. 33-52.

ROBERTS, N. **Introduction to Computer Simulation - A system dynamics modelling approach** (1st. ed.). Productivity Press. 1996.

SAMPAIO, F.F. (1996). **LINKIT: Design Development and Testing of a Semi Quantitative Computer Modeling Tool**. Tese de Doutorado - Departamento de Ciência e Tecnologia, Instituto de Educação da Universidade de Londres, Inglaterra.

\_\_\_\_\_. (2009). **Modelagem Dinâmica Computacional e o Processo de Ensino-Aprendizagem: Algumas Questões para Reflexão**. In: Conferência Internacional de Informática e Educação do Chile – TISE'98 – Santiago, Chile

SILVA, L.C. (2006) **Modelos de Simulação** Boletim Técnico MS: 02/06 – UFES Departamento de Engenharia Rural – disponível em:  
[http://www.agais.com/ms0206\\_modelos\\_simulacao.pdf](http://www.agais.com/ms0206_modelos_simulacao.pdf) Acessado em: 16 jan. 2010.

SOWA, J. F. **Conceptual Structures Information Processing in Mind and Machine**. MA: Addison-Wesley Publishing Company. 1984.

STEED, M. STELLA, A Simulation Construction Kit: Cognitive Process and Educational Implications. **Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching**, 11, 39-52. 1992.

SYMON, Keith R, **Mechanics**. Massachusetts, 1971. Addison Wesley Longman.

VASCONCELOS, F.H.L. (2008). **Objeto de Aprendizagem como Ferramenta de Modelagem Computacional Exploratória Aplicada ao Ensino de Física**. Dissertação de Mestrado – Departamento de Computação, Universidade Federal do Ceará – UFC.

VEIT, E.A.; TEODORO, V.D.(2002): Modelagem no Ensino/Aprendizagem de Física e os Novos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: *Revista Brasileira de Ensino de Física* 24(2): 87-96

WEBB, M.; HASSEN, D. **Opportunities for computer based modelling and simulation in secondary education**. In: LOVIS, F.; TAGG, E. D. (Eds.). Computers in education. Amsterdam: North-Holland, 1988.