UM ESTUDO SOBRE A INFORMAÇÃO DE FISHER DE GRAU q DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA E SUAS RELAÇÕES COM A INFORMAÇÃO LOGARÍTMICA

MARIA AUXILIADORA BENTO MOREIRA

22

22

MONOGRAFIA SUBMETIDA À COORDENAÇÃO DO
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA, COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

FORTALEZA - 1984

UM ESTUDO SOBRE A INFORMAÇÃO DE FISHER DE GRAU q DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA E SUAS RELAÇÕES COM A INFORMAÇÃO LOGARÍTMICA

MONOGRAFIA APROVADA

EM, 21 DE SETEMBRO DE 1984

Dr. FRANQUIBERTO S. PESSOA
(ORIENTADOR)

Dr. GUR DIAL

Dr. RAIMUNDO TOMPSON GONÇALVES

Ao meu esposo

Rogério e

Aos meus filhos

Marcos, Mônica e Francisco

AGRADECIMENTOS

Para que chegássemos à elaboração deste trabalho, tivemos o apoio e incentivo de várias pessoas e entidades que viabilizaram nossa iniciativa, a todas elas, quero registrar meus agradecimentos de modo particular:

– À Secretaria da Educação e Cultura do Estado do Amazonas por ter concedido a licença para cursarmos o Mestrado, especialmente à equipe do Ensino Supletivo da qual fazíamos parte que nos incentivaram a prosseguir estudos.

– À Universidade Federal do Ceará, através do Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em Matemática, de modo especial aos mestres e colegas de curso com quem tivemos o privilégio de conviver.

– Aos meus queridos pais e irmãos, particularmente à Glória, que tratou de nossos interesses em Manaus. Aos meus sogros e cunhados pelo apoio que sempre nos dispensaram. À Idalina (tia Rosa) pelo carinho com que nos tratou em Fortaleza.

– Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro que nos foi dado no decorrer do curso.

Finalmente meus agradecimentos ao Professor Franquiberto dos Santos Pessoa, meu orientador por todos os ensinamentos sobre a Teoria da Informação, das Probabilidades e acima de tudo, por sua constante orientação e estímulo em todos estágios deste trabalho.

Os originais foram datilografados de maneira competente Por José Alves Ferreira a quem agradeço particularmente.

APRESENTAÇÃO

Este trabalho, orientado pelo professor Franquiberto dos Santos Pessoa, objetiva complementar requisitos exigidos pelo Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará à concessão do grau de Mestre em Matemática Pura. Trata-se de um estudo no caso discreto da Informação Logaritmica de grau q ligada a uma extensão da Informação de Fisher que B. Bouchon e F. Pessoa [1] desenvolveram para o caso contínuo.

Será considerado o espaço probabilizado (Ω, Q, P) onde Ω é um espaço euclideano de dimensão finita, Q é a σ-álgebra de Borel de Ω e P é a lei de probabilidade sobre Q de uma variável aleatória discreta X dada por $p_i(\theta)$, $i \in I$, onde I é um conjunto finito ou enumerável de índices e θ um parâmetro real desconhecido.

Com a finalidade de estimar uma função $g(\theta)$ do parâmetro θ consideraremos uma estatística T e procuraremos mostrar as qualidades deste estimador através de desigualdades de tipo Cramér-Rao e, necessariamente limites inferiores que são funções da Informação de Fisher isto num contexto bem mais geral do que a fórmula clássica de Cramér-Rao.

As condições de regularidade para validade da desigualdade de Cramér-Rao serão quase sempre requeridas, entretanto, obteremos também resultados sem a exigência de tais condições.

O trabalho está dividido em três capítulos e um apêndice.

No Capítulo I definimos a informação de Fisher de grau q, $q \in 2\mathbb{N}^*$ onde a utilização da desigualdade de Holder nos permite encontrar um limite inferior do momento de ordem r, $r = \dfrac{q}{q-1}$ do estimador T em função desta informação. Em seguida, definimos a informação média de Fisher de grau q no caso onde o parâmetro θ é também considerado aleatório, dando uma nova extensão à desigualdade de Cramér-Rao. Definimos ainda a informação logarítmica de grau q da variável aleatória θ, evidenciando propriedades de não-aditividade relacionando a informação de Fisher com a informação média de Fisher e a informação logarítmica de grau q. Analisamos em seguida a informação logarítmica de grau q como uma medida de informação intrínseca da variável aleatória θ e estudamos a influência de uma transformação afim de θ ou de seu condicionamento sobre outra variável aleatória.

No Capítulo II definimos a informação logarítmica conjunta de duas variáveis aleatórias e exibimos um limite inferior desta quantidade envolvendo duas medidas de informação logarítmicas de grau q.

No Capítulo III estabelecemos um limite inferior do momento de ordem r do estimador sem desvio T de $g(\theta)$ utilizando uma lei de probabilidade intermediária entre duas leis de probabilidade dadas com parâmetros θ e θ' sem condições de regularidade. Estudamos ainda a aproximação da informação de Fisher de grau q com o auxílio de uma φ-divergência para duas leis de probabilidade com parâmetros vizinhos θ e θ'.

No apêndice evidenciamos resultados conhecidos tais como a Desigualdade de Holder e a Desigualdade de Minkowski usadas neste trabalho com adaptações necessárias aos nossos resultados.

CAPÍTULO I

A INFORMAÇÃO DE FISHER

No §1 deste capítulo, definiremos a informação de Fisher de grau q, $q \in 2\,\mathbb{N}^*$ de uma variável aleatória discreta X e destacaremos um limite inferior de um estimador em função desta informação. No § 2 definiremos a informação média de Fisher de grau q e obteremos uma generalização da desigualdade de Cramér-Rao. No §3 relacionaremos as definições dos parágrafos anteriores por propriedades de não-aditividade evidenciando para tanto a definição de informação logarítmica de grau q como uma medida de informação intrínseca das variáveis aleatórias de tipo contínuo e estudaremos o efeito produzido por uma transformação afim e seu condicionamento por outra variável aleatória no § 4.

§ 1 - *A informação de Fisher de grau q.*

A lei de probabilidade da variável aleatória discreta X é dada por $p_i(\theta)$, $i \in I$, onde I é um conjunto finito ou enumerável dependendo do parâmetro θ, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$. Vamos supor o parâmetro θ desconhecido e estimar uma função $g(\theta)$ deste parâmetro com o auxílio de uma estatística T.

No caso de um estimador sem desvio, isto é, quando $g(\theta) = E(T(X))$ as qualidades de T podem ser avaliadas utilizando a desigualdade de Cramér-Rao que fornece um limite inferior da variância deste estimador em função da informação de Fisher

$$I_X(\theta) = \sum_{i \in I} \left(\frac{\partial \log p_i(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 p_i(\theta) \tag{1}$$

A desigualdade de Cramér-Rao é geralmente obtida quando certas condições de regularidade relativas a lei de probabilidade $p_i(\theta)$ são satisfeitas, em particular, a possibilidade de derivar sob o sinal de somatório.

A quantidade $I_X(\theta)$ mede a informação sobre $g(\theta)$ contida na observação de X e deduzida a partir da utilização de T.

Definição 1 - Para $q \in 2\,\mathbb{N}^*$ a informação de Fisher de grau q da variável aleatória discreta X é definida por

$$I_X^q(\theta) = \sum_{i \in I} \left(\frac{\partial \log p_i(\theta)}{\partial \theta} \right)^q p_i(\theta)$$

De acordo com (1), temos $I_X^2(\theta) = I_X(\theta)$

Teorema 1 - Sob a condição de derivabilidade sob o sinal de somatório, o estimador T da função $g(\theta)$ verifica

$$(E_{X/\theta}|T-g(\theta)|^r)^{\frac{1}{r}} \geq \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} E_{X/\theta}(T)}{I_X^q(\theta)^{\frac{1}{q}}} \tag{2}$$

com $r > 1$ e tal que $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$

Demonstração

Temos

$$(E_{X/\theta}|T-g(\theta)|^r)^{\frac{1}{r}}\ I_X^q(\theta)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i \in I} |T(x_i) - g(\theta)|^r\ p_i(\theta) \right)^{\frac{1}{r}} \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{i \in I} \left(\frac{\partial \log p_i(\theta)}{\partial \theta} \right)^q p_i(\theta) \right)^{\frac{1}{q}}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos:

$$(E_{X/\theta}|T-g(\theta)|^r)^{\frac{1}{r}} \cdot I_X^q(\theta)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{i \in I} (T(x_i) - g(\theta)) \frac{\partial \log p_i(\theta)}{\partial\theta} p_i(\theta) =$$

$$= \sum_{i \in I} (T(x_i) - g(\theta)) \frac{\partial p_i(\theta)}{\partial\theta} = \sum_{i \in I} T(x_i) \cdot \frac{\partial p_i(\theta)}{\partial\theta} - \sum_{i \in I} g(\theta) \frac{\partial p_i(\theta)}{\partial\theta}$$

Por hipótese, estamos impondo a condição de derivabilidade sob o sinal de somatório, que é o caso por exemplo, quando a série

$$\sum_{i \in I} (T(x_i) - g(\theta)) \, p_i(\theta)$$

converge num ponto $\theta_o \in \Theta$ e a série

$$\sum_{i \in I} (T(x_i) - g(\theta)) \frac{\partial p_i(\theta)}{\partial\theta}$$

converge uniformemente em Θ. Obtemos assim

$$(\sum_{X/\theta}|T-g(\theta)|^r)^{\frac{1}{r}} \cdot I_X^q(\theta)^{\frac{1}{q}} \geq \frac{\partial}{\partial\theta} \sum_{i \in I} T(x_i) \, p_i(\theta) -$$

$$- g(\theta) \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \sum_{i \in I} p_i(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} E_{X/\theta}(T)$$

No caso de T ser um estimador sem desvio de $g(\theta)$ e $\sigma^r(\theta) = E_{X/\theta}|T-g(\theta)|^r$ obtemos um limite inferior do desvio de ordem r de T

$$\sigma^r(\theta) \geq \frac{g'(\theta)^r}{I_X^q(\theta)^{\frac{r}{q}}}$$

Quando $q = 2$, $(r = 2)$, encontramos a desigualdade de Cramer-Rao.

Segundo Boekee [2], a igualdade em (2) é verificada se e somente se

$$M(\theta)(T-g(\theta)) = K(\theta)\left|\frac{\partial \log p_i(\theta)}{\partial\theta}\right|^{\frac{1}{r-1}} \text{sinal}\left(\frac{\partial \log p_i(\theta)}{\partial\theta}\right) \quad \text{q.p.p.}$$

onde $M(\theta)$ e $K(\theta)$ são duas funções positivas que não se anulam simultâneamente.

§ 2 - *A Informação Média de Fisher de Grau q.*

Vamos supor agora que o parâmetro θ seja também uma variável aleatória de densidade $\xi(\theta)$ para $\theta \in \Theta = [a,b] \subset \mathbb{R}$.

Definição 2: Para $q \in 2\mathbb{N}^*$ a informação média de Fisher de grau q da variável aleatória discreta X é definida por

$$J^q(X) = \int_\Theta \sum_{i\in I} \left(\frac{\partial \log p_i(\theta)\,\xi(\theta)}{\partial\theta}\right)^q p_i(\theta)\,\xi(\theta)d\theta$$

Esta definição nos fornece uma generalização da desigualdade de Cramér-Rao através do seguinte teorema:

Teorema 2 - Seja X uma variável aleatória discreta cuja lei de probabilidade é dada por $p_i(\theta)$, $i \in I$, I um conjunto discreto ou enumerável de índices e θ uma variável aleatória de densidade $\xi(\theta)$. Sob certas condições de regularidade toda estatística T verifica a seguinte desigualdade:

$$\left(\int_\Theta \sum_{i\in I} |T-g(\theta)|^r\, p_i(\theta)\,\xi(\theta)d\theta\right)^{\frac{1}{r}} \geq \frac{B + E_\theta(g'(\theta))}{J^q(X)^{\frac{1}{q}}} \tag{3}$$

onde $B = \lim_{\theta\to b^-} \xi(\theta)E_{X/\theta}(T-g(\theta)) - \lim_{\theta\to a^+} \xi(\theta)E_{X/\theta}(T-g(\theta))$ e $r > 0$ é tal que $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$.

Demonstração

Seja

$$K = \left(\int_{\Theta}\sum_{i\in I}|T-g(\theta)|^r\, p_i(\theta)\xi(\theta)d\theta\right)^{\frac{1}{r}}\cdot\left(\int_{\Theta}\sum_{i\in I}\left(\frac{\partial\log p_i(\theta)\xi(\theta)}{\partial\theta}\right)^q p_i(\theta)\xi(\theta)d\theta\right)^{\frac{1}{q}}$$

A desigualdade de Hölder nos dá

$$K \geq \left(\int_{\Theta}\sum_{i\in I}(T-g(\theta))\,\frac{\partial\log p_i(\theta)\,\xi(\theta)}{\partial\theta}\,p_i(\theta)\xi(\theta)d\theta\right.$$

$$= \int_{\Theta}\sum_{i\in I}(T-g(\theta))\,\frac{\partial p_i(\theta)\,\xi(\theta)}{\partial\theta}\,d\theta\ .$$

Admitindo-se que a série $\sum_{i\in I}|T-g(\theta)|\,\frac{\partial p_i(\theta)\,\xi(\theta)}{\partial\theta}$ seja uniformemente convergente temos:

$$K \geq \sum_{i\in I}\int_{\Theta}(T-g(\theta))\,\frac{\partial p_i(\theta)\,\xi(\theta)}{\partial\theta}\,d\theta = \sum_{i\in I}(T-g(\theta))\,p_i(\theta)\,\xi(\theta)\Big]_{\theta=a}^{b} -$$

$$-\sum_{i\in I}\int_{\Theta}\frac{\partial(T-g(\theta))}{\partial\theta}\,p_i(\theta)\,\xi(\theta)d\theta = B - \sum_{i\in I}\int_{\Theta}\frac{\partial T(x_i)}{\partial\theta}\,p_i(\theta)\,\xi(\theta)d\theta +$$

$$+\sum_{i\in I}\int_{\Theta}\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta}\,p_i(\theta)\,\xi(\theta)d\theta\ .$$

Admitindo-se ainda que a série $\sum_{i\in I}\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta}\,p_i(\theta)\,\xi(\theta)$ seja uniformemente convergente concluimos que

$$K \geq B + E_{\theta}(g'(\theta))$$

Com a notação do Teorema 2 e sob a hipótese de que $\lim \xi(\theta)E_{X/\theta}(T-g(\theta))$ existe para $\theta \to a^+$ e $\theta \to b^-$ segue-se (3)

Este resultado pode ainda ser escrito sob a forma:

$$(E_\theta(E_{X/\theta}|T-g(\theta)|^r))^{\frac{1}{r}} \geq \frac{B + E_\theta(g'(\theta))}{(E_\theta(E_{X/\theta}(\frac{\partial \log p_i(\theta)\xi(\theta)}{\partial\theta})^q))^{\frac{1}{q}}}$$

onde $E_{X/\theta}$ representa a esperança relativamente a X condicionada a θ, com lei de probabilidade $p_i(\theta)$ e E_θ a esperança relativa a θ com função densidade de probabilidade $\xi(\theta)$.

Quando T é um estimador sem desvio de $g(\theta)$ e com a notação introduzida no § 1, obtemos:

$$(E_\theta(\sigma^r(\theta)))^{\frac{1}{r}} \geq \frac{E_\theta(g'(\theta))}{J^q(X)^{\frac{1}{q}}}$$

§ 3 - *Não Aditividade*

Mostraremos agora que podemos ligar a informação de Fisher de grau q com a informação média de Fisher por uma propriedade de não aditividade.

Definição 3 - Para $q \in 2\,\mathbb{N}^*$, a informação logarítmica de grau q da variável aleatória θ com densidade $\xi(\theta)$ é definida por:

$$H^q(\theta) = \int_\Theta \left(\frac{\partial \log \xi(\theta)}{\partial\theta}\right)^q \xi(\theta)d\theta \qquad (4)$$

Teorema 3 - Se $q \in 2\,\mathbb{N}^*$ e se $\xi(\theta)$ e $p_i(\theta)$ são funções não decrescentes de θ para todo $i \in I$ e para todo $\theta \in \Theta$ então a informação de Fisher de grau q e as respectivas informações média e logarítmica satisfazem a seguinte desigualdade

$$J^q(X) \geq E_\theta(I_X^q(\theta)) + H^q(\theta) \qquad (5)$$

Demonstração

$$J^q(X) = \int_\Theta \sum_{i \in I} \left(\frac{\partial \log p_i(\theta)\,\xi(\theta)}{\partial\theta}\right)^q p_i(\theta)\xi(\theta)d\theta$$

$$= \int_\Theta \sum_{i \in I} \left(\frac{\partial \log p_i(\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial \log \xi(\theta)}{\partial\theta}\right)^q p_i(\theta)\xi(\theta)d\theta$$

$$= \int_\Theta \sum_{i \in I} \left(\frac{\partial \log p_i(\theta)}{\partial\theta}\right) p_i(\theta)\xi(\theta)d\theta + \int_\Theta \sum_{i \in I} \left(\frac{\partial \log \xi(\theta)}{\partial\theta}\right)^q p_i(\theta)\xi(\theta)d\theta + F$$

onde F é a soma dos outros termos do desenvolvimento binomial.

$$F = \sum_{j=1}^{q-1} C_q^j \int_\Theta \sum_{i \in I} \left(\frac{\partial \log p_i(\theta)}{\partial\theta}\right)^j \left(\frac{\partial \log \xi(\theta)}{\partial\theta}\right)^{q-j} p_i(\theta)\,\xi(\theta)d\theta$$

logo

$$J^q(X) = \int_\Theta I_X^q(\theta)\,\xi(\theta)d\theta + \int_\Theta \left(\frac{\partial \log \xi(\theta)}{\partial\theta}\right)^q \xi(\theta) \sum_{i \in I} p_i(\theta)d\theta + F$$

assim

$$J^q(X) = E_\theta(I_X^q(\theta)) + H^q(\theta) + F$$

F é positivo desde que $\xi(\theta)$ e $p_i(\theta)$ são funções não decrescentes de θ logo a desigualdade é verificada em (5).

Para $q = 2$ temos

$$F = 2\int_\Theta \sum_{i \in I} \left(\frac{\partial \log p_i(\theta)}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial \log \xi(\theta)}{\partial\theta}\right) p_i(\theta)\,\xi(\theta)d\theta$$

$$= 2\int_\Theta \frac{\partial \log \xi(\theta)}{\partial\theta}\,\xi(\theta) \cdot \sum_{i \in I} \frac{\partial p_i(\theta)}{\partial\theta}\,d\theta\,.$$

$$F = 2\int_\Theta \frac{\partial \log \xi(\theta)}{\partial\theta}\,\xi(\theta) \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \sum_{i \in I} p_i(\theta)d\theta$$

A hipótese da série $\sum_{i \in I} p_i(\theta)$ ser uniformemente convergente justifica a última igualdade, F é então nulo, daí a igualdade em (5).

Reciprocamente para $q \neq 2$ podemos evidenciar valores $p_i(\theta)$ e $\xi(\theta)$ tais que esta igualdade não seja verificada.

Por exemplo, se

$$p_i(\theta) = \begin{cases} \theta^i(1-\theta)^{1-i} & \text{se } i \in I = \{0,1\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$\xi(\theta) \begin{cases} 4\theta & \text{se } \theta \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

então

$$J^q(X) = \frac{2^{3q-4}(3^{3-q} - 1)}{3 - q}$$

$$I_X^q(\theta) = \frac{1}{(1-\theta)^{q-1}} + \frac{1}{\theta^{q-1}}$$

$$E_\theta(I_X^q(\theta)) = \frac{2^{2q-2}(3^{2-q} - 1)}{2 - q} = H^q(\theta)$$

É fácil então verificar que

$$J^q(X) > E_\theta(I_X^q(\theta)) + H^q(\theta)$$

Com efeito, desde que $q \in 2\,\mathbb{N}^*$ e $q \neq 2$ temos necessariamente $q \geq 4$, logo $2^{q-3} > 1$ e portanto basta mostrar que

$$\frac{1 - \frac{1}{3^{q-3}}}{q - 3} > \frac{1 - \frac{1}{3^{q-2}}}{q - 2}$$

ou seja, que a função

$f(x) = \dfrac{1 - \frac{1}{3^x}}{x}$ ou $f(x) = \dfrac{3^x - 1}{3^x \cdot x}$ é decrescente no seu domínio de definição.

Ora desde que $f'(x) = \dfrac{3^x(1 - 3^x + x \log 3)}{3^{2x}\, x^2}$ basta mostrar que a função $h(x) = 1 - 3^x + x \log 3$ é negativa para todo $x \neq 0$. Mas isto é evidente desde que a função 3^x é convexa e dessa maneira sua tangente $y = x\log 3+1$ em qualquer um de seus pontos está graficamente abaixo da função, ou seja, para todo $x \neq 0$, $1-3^x + x \log 3 < 0$. Em consequência para $q \geq 4$ a desigualdade acima é verificada.

Corolário - Para $q \in 2\,\mathbb{N}^*$ e sob a condição de podermos derivar sob o sinal de somatório, a informação de Fisher de grau q e as informações média e logarítmica correspondentes satisfazem a seguinte propriedade de aditividade.

$$J^q(X) = E_\theta(I_X^q(\theta)) + H^q(\theta) \tag{6}$$

quaisquer que sejam as leis $p_i(\theta)$ e $\xi(\theta)$ se e somente se $q = 2$.

Observamos entretanto que no caso de $q \neq 2$ a igualdade em (6) pode acontecer para certas leis de probabilidade, por exemplo.

Se

$$p_i(\theta) = \begin{cases} \theta^i(1 - \theta)^{1-i} & \text{se} \quad I = \{0,1\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\xi(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \Theta = [0,1] \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

temos

$$J^q(X) = \frac{(\frac{2}{3})^{q-2} - 2^{q-2}}{2 - q} = E_\theta(I_X^q(\theta))$$

$$H^q(\theta) = 0$$

A desigualdade de Minkowski nos permite obter outra desigualdade relativa às informações de grau q, através do seguinte teorema:

Teorema 4 - Para $q \in 2\mathbb{N}^*$ a informação de Fisher de grau q e as respectivas informações média e logarítmica satisfazem a seguinte desigualdade

$$J^q(X)^{\frac{1}{q}} \leq (E_\theta(I_X^q(\theta))^{\frac{1}{q}} + H^q(\theta)^{\frac{1}{q}}$$

A igualdade se verificando se e somente se θ tem distribuição uniforme.

Demonstração

$$J^q(X)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_\Theta \sum_{i \in I} \left(\frac{\partial \log p_i(\theta)\cdot\xi(\theta)}{\partial\theta}\right)^q p_i(\theta)\ \xi(\theta)d\theta\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\int_\Theta \sum_{i \in I} \left(\frac{\partial \log p_i(\theta)}{\partial\theta} + \frac{\log \xi(\theta)}{\partial\theta}\right)^q p_i(\theta)\ \xi(\theta)d\theta\right)^{\frac{1}{q}}$$

Aplicando a desigualdade de Minkoswski obtemos

$$J^q(X)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_\Theta \sum_{i \in I} \left(\frac{\partial \log p_i(\theta)}{\partial\theta}\right)^q p_i(\theta)\ \xi(\theta)d\theta\right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ \left(\int_\Theta \sum_{i \in I} \left(\frac{\partial \log \xi(\theta)}{\partial\theta}\right)^q p_i(\theta)\ \xi(\theta)d\theta\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\int_\Theta I_X^q(\theta)\ \xi(\theta)d\theta\right)^{\frac{1}{q}} + H^q(\theta)^{\frac{1}{q}}$$

$$= E_\theta(I_X^q(\theta))^{\frac{1}{q}} + H^q(\theta)^{\frac{1}{q}}$$

A igualdade se verificando se e somente se

$$\frac{\partial \log p_i(\theta)}{\partial\theta} = k\,\frac{\partial \log \xi(\theta)}{\partial\theta} \,,$$

para todo $i \in I$ e $k > 0$.

Segue-se daí que $p_i(\theta) = \xi(\theta)^k\, c(x_i)$, onde $c(x_i)$ não depende de θ. Donde, somando ambos os membros obtemos:

$$\xi(\theta) = \left(\frac{1}{\sum\limits_{i\in I} c(x_i)} \right)^{\frac{1}{k}}$$

logo, $\xi(\theta)$ é uma constante.

§ 4 - *Propriedades da Informação Logarítmica de grau q.*

Na informação logarítmica de grau q definida em (4) observamos que a variável e o parâmetro se confundem. Assim, tal informação não pode ser considerada como uma informação de Fisher. Entretanto, a importância de tal informação pode ser avaliada pelos Teoremas 3, 4 e seus corolários demonstrados anteriormente.

É claro que $H^q(\theta) \geq 0$ e que $H^q(\theta) = 0$ se e somente se $\frac{\partial \log \xi(\theta)}{\partial\theta} = 0$, para todo $\theta \in \Theta$ ou seja, quando θ tem distribuição uniforme. Além disso, se as variáveis aleatórias são independentes, a informação logarítmica de grau q satisfaz a propriedade de aditividade verificada nos teoremas acima citados.

Estas duas qualidades associadas, tornam esta quantidade uma medida de informação intrínseca das variáveis aleatórias de tipo contínuo.

Verificaremos aqui o efeito produzido na informação logarítmica por uma transormação afim $h(y) = cy + d$ onde $c \in \mathbb{R}^*$ e $d \in \mathbb{R}$. Se

$v = h(\theta)$ é a nova variável aleatória com densidade $n(v) = \frac{1}{c}\zeta(\theta)$, temos:

Teorema 5 - Para $q \in 2\mathbb{N}^*$, a informação logarítmica de grau q da variável aleatória verifica a igualdade:

$$H^q(v) = \frac{1}{c^q} H^q(\theta).$$

Demonstração

$$H^q(v) = \int_\Theta \left(\frac{\partial \log n(v)}{\partial v} \right)^q n(v)dv .$$

$$H^q(v) = \int_\Theta \left(\frac{\partial \log \xi(\theta)}{\partial \theta} \frac{d\theta}{\partial v} \right)^q \frac{1}{c} \xi(\theta)\, c d\theta$$

$$= \frac{1}{c^q} \int_\Theta \left(\frac{\partial \log \xi(\theta)}{\partial \theta} \right)^q \xi(\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{c^q} H^q(\theta)$$

Mostraremos agora uma propriedade de sub-aditividade da informação logarítmica de grau q e para isto, vamos supor que a variável aleatória θ seja condicionada por uma segunda variável aleatória α, de densidade $\omega(\alpha)$ definida num conjunto aberto $A \subseteq \mathbb{R}$. Seja $\zeta(\theta/\alpha)$ sua densidade condicional.

Definição 4 - Para $q \in 2\mathbb{N}^*$, chamamos informação logarítmica de grau q de θ condicionada a α, a seguinte quantidade

$$H^q(\theta/\alpha) = \int_A \int_\Theta \left(\frac{\partial \log \zeta(\theta/\alpha)}{\partial\theta}\right)^q \zeta(\theta/\alpha)\omega(\alpha)d\alpha d\theta \ .$$

Teorema 6 - Sob a condição de poder derivar sob o sinal de integração a informação logarítmica de grau q da variável aleatória condicionada a α,

$$H^q(\theta) \leq H^q(\theta/\alpha) \ . \qquad (7)$$

A igualdade sendo verificada se e somente se θ e α são independentes.

Demonstração

Temos que

$$\xi(\theta) = \int_A \zeta(\theta/\alpha)\,\omega(\alpha)d\alpha \quad \text{para todo} \quad \theta \in \Theta$$

Assim

$$H^q(\theta) = \int_\Theta \left(\frac{\partial \log \xi(\theta)}{\partial\theta}\right)^q \xi(\theta)d\theta = \int_\Theta \left(\frac{\dfrac{\partial \int_A \zeta(\theta/\alpha)\omega(\alpha)d\alpha}{\partial\theta}}{\int_A \zeta(\theta/\alpha)\omega(\alpha)d\alpha}\right)^q \xi(\theta)d\theta$$

$$= \int_\Theta \left(\frac{\int_A \dfrac{\partial\zeta(\theta/\alpha)}{\partial\theta}\,\omega(\alpha)d\alpha}{\int_A \zeta(\theta/\alpha)\omega(\alpha)d\alpha}\right)^q \xi(\theta)d\theta = \int_\Theta \left(\int_A \frac{\dfrac{\partial\zeta(\theta/\alpha)}{\partial\theta}}{\zeta(\theta/\alpha)} \cdot \frac{\zeta(\theta/\alpha)\omega(\alpha)d\alpha}{\int_A \zeta(\theta/\alpha)\omega(\alpha)d\alpha}\right)\xi(\theta)d\theta$$

Fazendo $\mu(\alpha/\theta) = \dfrac{\zeta(\theta/\alpha)\ \omega(\alpha)}{\int_A \zeta(\theta/\alpha)\omega(\alpha)d\alpha}$, obtemos

$$H^q(\theta) = \int_\Theta \left(\int_A \frac{\frac{\partial \zeta(\theta/\alpha)}{\partial \theta}}{\zeta(\theta/\alpha)} \mu(\alpha/\theta) d\alpha \right)^q \xi(\theta) d\theta$$

Aplicando a desigualdade de Jensen, obtemos

$$H^q(\theta) \leq \int_\Theta \left(\int_A \left(\frac{\partial \log \zeta(\theta/\alpha)}{\partial \theta} \right)^q \mu(\alpha/\theta) d\alpha \right) \xi(\theta) d\theta$$

$$= \int_\Theta \left(\int_A \left(\frac{\partial \log \zeta(\theta/\alpha)}{\partial \theta} \right)^q \frac{\zeta(\theta/\alpha)\omega(\alpha)}{\xi(\theta)} d\alpha \right) \xi(\theta) d\theta$$

$$= \int_\Theta \int_A \left(\frac{\partial \log \zeta(\theta/\alpha)}{\partial \theta} \right)^q \zeta(\theta/\alpha)\, \omega(\alpha) d\alpha d\theta = H^q(\theta/\alpha)$$

Agora, θ e α são independentes se e somente se $\zeta(\theta/\alpha) = \xi(\theta)$, logo:

$$H^q(\theta/\alpha) = \int_\Theta \int_A \left(\frac{\partial \log \zeta(\theta/\alpha)}{\partial \theta} \right)^q \zeta(\theta/\alpha)\, \omega(\alpha) d\alpha d\theta$$

$$= \int_\Theta \int_A \left(\frac{\partial \log \xi(\theta)}{\partial \theta} \right)^q \xi(\theta)\, \omega(\alpha) d\alpha d\theta$$

$$= \int_A \omega(\alpha) d\alpha \int_\Theta \left(\frac{\partial \log \xi(\theta)}{\partial \theta} \right)^q \xi(\theta) d\theta = H^q(\theta)$$

C A P Í T U L O II

A INFORMAÇÃO LOGARÍTMICA CONJUNTA

Neste capítulo definiremos a informação logarítmica conjunta de duas variáveis aleatórias e exibiremos um limite inferior desta quantidade envolvendo duas medidas de informação logarítmica de grau q.

Sejam θ e α duas variáveis aleatórias de densidade $\xi(\theta)$ e $\omega(\alpha)$ respectivamente com $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ e $\alpha \in A \subseteq \mathbb{R}$. Representaremos por $\rho(\theta,\alpha)$ a densidade de sua lei conjunta.

Definição 5 - Para $q \in 2\mathbb{N}^*$, a informação logarítmica conjunta de grau q de duas variáveis aleatórias θ e α é definida por

$$L^q(\theta,\alpha) = \int_A \int_\Theta \left[\left(\frac{\partial \log \rho(\theta,\alpha)}{\partial\theta} \right)^q + \left(\frac{\partial \log \rho(\theta,\alpha)}{\partial\alpha} \right)^q \right] \rho(\theta,\alpha)\, d\theta\, d\alpha \qquad (8)$$

Se considerarmos $H^q(\theta/\alpha)$ e $H^q(\alpha/\theta)$ respectivamente a informação logarítmica de grau q de θ condicionada a α e a informação logarítmica de grau q de α condicionada a θ, é fácil verificar que:

$$L^q(\theta,\alpha) = H^q(\theta/\alpha) + H^q(\alpha/\theta)$$

No teorema abaixo enunciaremos uma propriedade de supra aditividade verificada na informação logarítmica conjunta de grau q em relação a informação logarítmica de grau q.

Teorema 7 - Sob a hipótese de derivação sob o sinal de integração, a informação logarítmica conjunta de grau q de duas variáveis aleatórias θ e α com suas respectivas informações logarítmica e condicional de grau q satisfazem a seguinte desigualdade

$$L^q(\theta,\alpha) \geq H^q(\alpha) + H^q(\theta/\alpha) \qquad (9)$$

A igualdade se verificando se e somente se θ e α são independentes.

Demonstração

$$H^q(\theta/\alpha) = \int_A \left(\int_\Theta \left(\frac{\partial \log \zeta(\theta/\alpha)}{\partial\theta} \right)^q \zeta(\theta/\alpha)d\theta \right)\omega(\alpha)d\alpha$$

$$= \int_A \int_\Theta \left(\frac{\partial \log \rho(\theta,\alpha)}{\partial\theta} \right)^q \rho(\theta,\alpha)d\theta d\alpha \qquad (10)$$

Por outro lado, como $\omega(\alpha) = \int_\Theta \rho(\theta,\alpha)d\theta$, temos

$$H^q(\alpha) = \int_A \left(\frac{\partial \log \omega(\alpha)}{\partial\alpha}\right)^q \omega(\alpha)d\alpha = \int_A \left(\frac{\int_\Theta \frac{\partial \rho(\theta,\alpha)}{\partial\alpha}}{\int_\Theta \rho(\theta,\alpha)d\theta} \right)^q \omega(\alpha)d\alpha$$

$$= \int_A \left(\int_\Theta \frac{\frac{\partial \rho(\theta,\alpha)}{\partial\alpha}}{\rho(\theta,\alpha)} \cdot \frac{\rho(\theta,\alpha)}{\int_\Theta \rho(\theta,\alpha)d\theta} d\theta \right)^q \omega(\alpha)d\alpha$$

Aplicando a desigualdade de Jensen, temos

$$H^q(\alpha) \leq \int_A \int_\Theta \left(\frac{\frac{\partial \rho(\theta,\alpha)}{\partial \alpha}}{\rho(\theta,\alpha)} \right)^q \frac{\rho(\theta,\alpha)}{\int_\Theta \rho(\theta,\alpha) d\theta} \, \omega(\alpha) d\theta d\alpha \, .$$

$$= \int_A \int_\Theta \left(\frac{\partial \log \rho(\theta,\alpha)}{\partial \alpha} \right)^q \rho(\theta,\alpha) d\theta d\alpha \qquad (11)$$

Reagrupando os resultados (8), (10) e (11) obtemos (9).

Finalmente, θ e α são independentes se e somente se $\rho(\theta,\alpha) = \xi(\theta)\,\omega(\alpha)$, assim

$$L^q(\theta,\alpha) = \int_A \int_\Theta \left[\left(\frac{\partial \log \rho(\theta,\alpha)}{\partial \theta} \right)^q + \left(\frac{\partial \log \rho(\theta,\alpha)}{\partial \alpha} \right)^q \right] \rho(\theta,\alpha) d\theta d\alpha$$

$$= \int_A \int_\Theta \left[\left(\frac{\partial \log \xi(\theta)}{\partial \theta} \right)^q + \left(\frac{\partial \log \omega(\alpha)}{\partial \alpha} \right)^q \right] \xi(\theta)\, \omega(\alpha) d\theta d\alpha$$

$$= \int_A \int_\Theta \left[\left(\frac{\partial \log \zeta(\theta/\alpha)}{\partial \theta} \right)^q \zeta(\theta/\alpha)\, \omega(\alpha) d\theta d\alpha \right. +$$

$$+ \int_A \left(\frac{\partial \log \omega(\alpha)}{\partial \alpha} \right)^q \omega(\alpha) \left(\int_\Theta \xi(\theta) d\theta \right) d\alpha$$

$$= H^q(\theta/\alpha) + H^q(\alpha)$$

A partir dos resultados (7) e (9) segue-se imediatamente o seguinte colorário.

Corolário - Sob a hipótese de derivação sob o sinal de integração a informação logarítmica conjunta de grau q de duas variaveis aleatórias θ e α com suas informações logarítmica e condicional correspondentes satisfazem a seguinte desigualdade

$$L^q(\theta,\alpha) \geq H^q(\theta) + H^q(\alpha)$$

A igualdade se verificando se e somente se θ e α são independentes.

C A P Í T U L O III

A INFORMAÇÃO DE FISHER DE GRAU q E φ-DIVERGÊNCIA

No § 1 vamos estabelecer um limite inferior do momento de ordem r do estimador sem desvio T de $g(\theta)$, utilizando uma lei de probabilidade intermediária entre duas leis de probabilidade dadas, sem condições de regularidade. No § 2 estudaremos a aproximação da informação de Fisher de grau q com o auxílio de uma φ-divergência para duas leis de probabilidade com parâmetros vizinhos. No § 3 encontraremos um limite inferior do momento centrado de ordem r de um estimador.

§ 1 - *Informação de Fisher de Grau q de Uma Lei de Probabilidade Intermediária*

Definição 5 - Se $\{p_i(\theta),\ i \in I\}$ e $\{p_i(\theta'),\ i \in I\}$ são leis de probabilidade discretas correspondentes aos parâmetros θ e θ' de Θ e se $0 \leq \alpha \leq 1$ definiremos uma lei de probabilidade intermediária das leis $p_i(\theta)$ e $p_i(\theta')$ por

$$\overset{\alpha}{p_i}(\theta,\theta') = (1-\alpha)\ p_i(\theta) + \alpha p_i(\theta') \tag{12}$$

No caso contínuo, utilizando densidades intermediárias Vincze [3] demonstrou uma desigualdade de Cramer-Rao sem hipótese de regularidade.

Obteremos aqui um resultado análogo para a informação de Fisher de grau q de uma variável aleatória discreta considerando o estimador sem desvio $\hat{\alpha}$ de α definido por

$$\hat{\alpha} = \frac{T(x) - g(\theta)}{g(\theta') - g(\theta)}$$

onde x é um valor genérico da variável aleatória X e T(x) um estimador sem desvio de $g(\theta)$.

Teorema 8. - Seja $q \in 2\mathbb{N}^*$. A informação de Fisher de grau q da variável aleatória discreta X, tendo lei de probabilidade $p_i^\alpha(\theta,\theta')$ definido em (12) verifica

$$(E_\alpha |\hat{\alpha} - \alpha|^r)^{\frac{1}{r}} \geq \frac{1}{I_X^q(\alpha)^{\frac{1}{q}}} \tag{13}$$

onde $r > 0$ é tal que $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ e E_α representa a esperança relativamente a lei de probabilidade $p_i^\alpha(\theta,\theta')$.

Demonstração

Temos que

$$(E_\alpha |\hat{\alpha} - \alpha|^r)^{\frac{1}{r}} \cdot I_X^q(\alpha)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= (\sum_{i\in I} |\hat{\alpha} - \alpha|^r \; p_i^\alpha(\theta,\theta'))^{\frac{1}{r}} \cdot (\sum_{i\in I} (\frac{\partial \log p_i^\alpha(\theta,\theta')}{\partial\alpha})^q \; p_i^\alpha(\theta,\theta'))^{\frac{1}{q}} .$$

Pela desigualdade de Hölder obtemos:

$$(E_\alpha |\hat{\alpha} - \alpha|^r)^{\frac{1}{r}} \cdot I_X^q(\alpha)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{i\in I} |\hat{\alpha} - \alpha| \frac{\partial p_i^\alpha(\theta,\theta')}{\partial\alpha} =$$

$$= \sum_{i\in I} |\hat{\alpha}-\alpha| [p_i(\theta') - p_i(\theta)] = \sum_{i\in I} \frac{T(x_i) - g(\theta) - \alpha g(\theta') + \alpha g(\theta)}{g(\theta') - g(\theta)} = 1$$

Segue-se então a desigualdade (13).

Podemos ainda majorar $E_\alpha|\hat{\alpha} - \alpha|^r$ por uma função dos momentos centrais.

$$\sigma^r(\theta) = \sum_{i \in I} |T(x_i) - g(\theta)|^r p_i(\theta) \quad \text{e}$$

$$\sigma^r(\theta') = \sum_{i \in I} |T(x_i) - g(\theta')|^r p_i(\theta')$$

Com efeito,

$$E_\alpha|\hat{\alpha} - \alpha|^r = \sum_{i \in I} \left| \frac{T(x_i) - g(\theta)}{g(\theta') - g(\theta)} - \alpha \right|^r (1 - \alpha) p_i(\theta) +$$

$$+ \sum_{i \in I} \left| \frac{T(x_i) - g(\theta)}{g(\theta') - g(\theta)} - \alpha \right|^r \alpha p_i(\theta')$$

$$= \sum_{i \in I} \left| \frac{T(x_i) - g(\theta)}{g(\theta') - g(\theta)} - \alpha \right|^r (1 - \alpha) p_i(\theta) +$$

$$+ \sum_{i \in I} \left| \frac{T(x_i) - g(\theta')}{g(\theta') - g(\theta)} + 1 - \alpha \right|^r \alpha p_i(\theta')$$

então, como $r > 0$.

$$(E_\alpha|\hat{\alpha} - \alpha|^r)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{i \in I} \left| \frac{T(x_i) - g(\theta)}{g(\theta') - g(\theta)} - \alpha \right|^r (1 - \alpha) p_i(\theta) \right)^{\frac{1}{r}} +$$

$$+ \left(\sum_{i \in I} \left| \frac{T(x_i) - g(\theta')}{g(\theta') - g(\theta)} + 1 - \alpha \right|^r \alpha p_i(\theta') \right)^{\frac{1}{r}}$$

Aplicando a desigualdade de Minkowski a ambas as parcelas obtemos

$$(E_\alpha|\hat{\alpha} - \alpha|)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{i \in I} \left| \frac{T(x_i) - g(\theta)}{g(\theta') - g(\theta)} \right|^r (1 - \alpha) p_i(\theta) \right)^{\frac{1}{r}} +$$

$$+ \Big(\sum_{i\in I} \alpha^r (1-\alpha)\, p_i(\theta)\Big)^{\frac{1}{r}} + \Big(\sum_{i\in I} \Big| \frac{T(x_i) - g(\theta')}{g(\theta') - g(\theta)} \Big|\, \alpha\, p_i(\theta')\Big)^{\frac{1}{r}} +$$

$$+ \Big(\sum_{i\in I} (1-\alpha)^r\, \alpha p_i(\theta')\Big)^{\frac{1}{r}} = \frac{1}{|g(\theta')-g(\theta)|} \Big[(1-\alpha)^{\frac{1}{r}}\, \sigma^r(\theta)^{\frac{1}{r}} + \alpha^{\frac{1}{r}} \sigma^r(\theta')^{\frac{1}{r}} \Big] +$$

$$+ \alpha(1-\alpha)^{\frac{1}{r}} + (1-\alpha)\, \alpha^{\frac{1}{r}} .$$

Quando o momento de ordem r de T é independente de θ e igual a $\sigma^r(\theta) = \sigma^r(\theta') = \sigma_r$, temos

$$\sigma_r^{\frac{1}{r}} \geq \sup_{\alpha} \sup_{\theta'} \Big[\frac{1}{I_X^q(\alpha)^{\frac{1}{q}}} - \alpha(1-\alpha)^{\frac{1}{r}} - (1-\alpha)\alpha^{\frac{1}{r}} \Big] \frac{|g(\theta') - g(\theta)|}{(1-\alpha)^{\frac{1}{r}} + \alpha^{\frac{1}{r}}} . \tag{14}$$

§ 2 - *Informação de Fisher de grau q e φ-divergência.*

Agora, vamos considerar a φ-divergência entre duas leis de probabilidade $p_i(\theta)$ e $p_i(\theta')$, θ e $\theta' \in \Theta$ apresentadas por Csiszar [3] e Perez [6], por meio de uma função real φ-convexa a qual supõe-se (q+1) vezes derivável, definida por

$$G_\varphi(\theta' || \theta) = \sum_{i\in I} \varphi\Big(\frac{p_i(\theta')}{p_i(\theta)}\Big)\, p_i(\theta) \tag{15}$$

No teorema abaixo, damos uma versão da aproximação da Informação de Fisher de grau q para o caso discreto.

Teorema 9 - Suponhamos $q \in 2\,\mathbb{N}^*$. Seja φ uma função real convexa (q + 1) vezes derivável das quais as q-1 primeiras derivadas são nulas no ponto x = 1, a q-ésima não a sendo. Se a lei de probabilidade $p_i(\theta)$ é derivável em relação a θ, então a informação de Fisher de grau q da variável aleatória discreta X verifica

$$I_X^q(\theta) = \frac{q\,!}{\varphi^{(q)}(1)} \lim_{\theta' \to \theta} \left[\frac{1}{(\theta'-\theta)^q} (G_\varphi(\theta'||\theta) - \varphi(1)) \right] \quad (16)$$

Demonstração

Seja $\Delta\theta = \theta' - \theta$, com $\theta < \theta'$ e $p_i'(\theta) = \dfrac{\partial p_i(\theta)}{\partial\theta}$

Um desenvolvimento de Taylor de ordem 1 da função p na vizinhança de θ nos dá.

$$G_\varphi(\theta'||\theta) = \sum_{i \in I} \varphi\left(1 + \frac{p_i'(\theta)}{p_i(\theta)} \Delta\theta + 0(\theta^2)\right) p_i(\theta)$$

Fazendo $u = \dfrac{p_i'(\theta)}{p_i(\theta)} \Delta\theta + 0(\theta^2)$ e desenvolvendo φ na vizinhança de 1 até a ordem q, obtemos

$$\varphi(1+u) = \varphi(1) + \varphi'(1).u + \frac{1}{2!}\varphi''(1)u^2 + \cdots + \frac{1}{q!}\varphi^{(q)}(1)u^q + 0(\Delta\theta^{q+1})$$

como as (q-1) primeiras derivadas são nulas por hipótese, temos

$$G_\varphi(\theta+\Delta\theta||\theta) = \varphi(1) + \frac{1}{q!} \sum_{i \in I} \left(\frac{p_i'(\theta)}{p_i(\theta)} \Delta\theta + 0(\Delta\theta^2)\right)^q \varphi^q(1) + 0(\Delta\theta^{q+1})\Big] p_i(\theta)$$

$$= \varphi(1) + \frac{(\Delta\theta)^q}{q\,!} \varphi^{(q)}(1)\, I_X^q(\theta) + 0(\Delta\theta)^{q+1}$$

Assim

$$\frac{q!}{\varphi^{(q)}(1)} \left[G_\varphi(\theta'||\theta) - \varphi(1) \right] = (\Delta\theta)^q\, I_X^q(\theta).$$ Segue então (16)

Damos a seguir alguns exemplos de função φ que são aproximadas por informações de Fisher de grau q.

$$\varphi_1(u) = (u-1)^q, \qquad u \in \mathbb{R}_+$$

$$\varphi_2(u) = e^{(u-1)^q}, \qquad u \in \mathbb{R}_+$$

$$\varphi_\alpha^q(u) = \frac{(u-1)^q}{((1-\alpha)+\alpha u)^{q-1}}, \quad u \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ \alpha \in [0,1]$$

§ 3 - *Limite Inferior do Momento Centrado de Ordem r de um Estimador*

A partir dos resultados obtidos no § 1 deste capítulo, mais precisamente das desigualdades (13) e (14) obtemos, quando α tende a zero, o seguinte resultado relativo ao momento centrado de ordem r do estimador sem desvio T de $g(\theta)$:

$$\sigma^r(\theta) \geq \sup_{\theta'} \frac{|g(\theta')-g(\theta)|^r}{\lim\limits_{\alpha\to 0} I_X^q(\alpha)^{r-1}} \tag{17}$$

Como consequência obtemos um limite inferior do momento centrado de ordem r do estimador sem desvio T de $g(\theta)$.

Teorema 10 - Se $G_{\varphi_1}(\theta||\theta')$ e $G_{\varphi_1}(\theta'||\theta)$ são finitos então o momento centrado de ordem r do estimador sem desvio T de $g(\theta)$, satisfaz a desigualdade

$$\sigma^r(\theta) \geq \sup_{\theta'} \frac{|g(\theta')-g(\theta)|^r}{G_{\varphi_1}(\theta'||\theta)^{r-1}}$$

Demonstração

A partir de (16) basta mostrar que

$$\lim_{\alpha \to 0} I_X^q(\alpha) = G_{\varphi_1}(\theta' || \theta)$$

para isto, verificaremos primeiramente que a série

$$\sum_{i \in I} \left| \frac{\partial \log p_i^\alpha(\theta,\theta')}{\partial \alpha} \right|^q p_i(\theta,\theta') \tag{18}$$

é uniformemente convergente. Com efeito seja

$$a_i = \left| \frac{\partial \log p_i^\alpha(\theta,\theta')}{\partial \alpha} \right|^q p_i^\alpha(\theta,\theta')$$

o termo geral da série em (18). Então

$$|a_i| = \left| \frac{\partial \log[(1-\alpha)p_i(\theta) + \alpha p_i(\theta')]}{\partial \alpha} \right|^q |(1-\alpha)p_i(\theta) + \alpha p_i(\theta')|$$

$$= \left| \frac{p_i(\theta') - p_i(\theta)}{(1-\alpha)\, p_i(\theta) + \alpha p_i(\theta')} \right|^q |(1-\alpha)\, p_i(\theta) + \alpha p_i(\theta')|$$

$$= (p_i(\theta') - p_i(\theta))^q \cdot \frac{1}{|(1-\alpha)\, p_i(\theta) + \alpha p_i(\theta')|^{q-1}}$$

$$\leq \left(\frac{p_i(\theta') - p_i(\theta)}{p_i(\theta')} \right)^q p_i(\theta')\, 1_A + \left(\frac{p_i(\theta') - p_i(\theta)}{p_i(\theta)} \right) p_i(\theta)\, 1_B$$

onde $A = \{i \,;\, p_i(\theta) \geq p_i(\theta')\}$

$B = \{i \,;\, p_i(\theta) < p_i(\theta')\}$

Donde

$$|a_i| \leq \left(1 - \frac{p_i(\theta)}{p_i(\theta')}\right)^q p_i(\theta')\, 1_A + \left(1 - \frac{p_i(\theta')}{p_i(\theta)}\right)^q p_i(\theta)\, 1_B \tag{19}$$

Como por hipótese $G_{\varphi_1}(\theta' || \theta)$ e $G_{\varphi_1}(\theta || \theta')$ são finitos, a desigualdade (19) mostra que a série (18) é uniformemente convergente em α.

Assim

$$\lim_{\alpha \to o} I_X^q(\alpha) = \lim_{\alpha \to o} \sum_{i \in I} \left(\frac{\partial \log p_i^{\alpha}(\theta,\theta')}{\partial \alpha} \right)^q p_i^{\alpha}(\theta,\theta')$$

$$= \sum_{i \in I} \lim_{\alpha \to o} \left(\frac{p_i(\theta') - p_i(\theta)}{(1-\alpha)\, p_i(\theta) + \alpha p_i(\theta')} \right)^q \left[(1-\alpha)p_i(\theta) + \alpha p_i(\theta')\right]$$

$$= \sum_{i \in I} \left(\frac{p_i(\theta')}{p_i(\theta)} - 1 \right)^q p_i(\theta)$$

$$= G_{\varphi_{|1}}(\theta' || \theta)$$

A P Ê N D I C E

Destacaremos aqui alguns resultados conhecidos tais como a Desigualdade de Hölder e a Desigualdade de Minkowski usados nos Teoremas 2 e 4 respectivamente de um modo um pouco diferente daquelas normalmente encontrados, a fim de se adaptarem aos nossos resultados.

Teorema I - (Desigualdade de Hölder) Sejam $f_i(\theta)$ e $g_i(\theta)$ leis de probabilidade de tipo discreto dependendo de um parâmetro θ, $\theta \in \Theta$. Então quando

$$\int_{\Theta} \sum_{i \in I} f_i(\theta)d\theta < +\infty \quad \text{e} \quad \int_{\Theta} \sum_{i \in I} g_i(\theta)d\theta < +\infty$$

onde I é um conjunto finito ou enumerável, tem-se

$$\int_{\Theta} \sum_{i \in I} f_i(\theta)g_i(\theta)d\theta \leq \left(\int_{\Theta} \sum_{i \in I} f_i^p(\theta)d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Theta} \sum_{i \in I} g_i^p(\theta)d\theta \right)^{\frac{1}{q}}$$

onde $p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Demonstração

Se $a, b > 0$ e $p > 1$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ é fácil verificar que $a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$ (ver por exemplo [5]).

Fazendo

$$a = \frac{f_i^p(\theta)}{\int_\Theta \sum_{i\in I} f_i^p(\theta)d\theta} \quad e \quad b = \frac{g_i^q(\theta)}{\int_\Theta \sum_{i\in I} g_i^q(\theta)d\theta}$$

obtemos

$$\frac{f_i(\theta)\ g_i(\theta)}{\left(\int_\Theta \sum_{i\in I} f_i^p(\theta)d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Theta \sum_{i\in I} g_i^q(\theta)d\theta\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p}\frac{f_i^p(\theta)}{\int_\Theta \sum_{i\in I} f_i^p(\theta)d\theta} + \frac{1}{q}\frac{g_i^q(\theta)}{\int_\Theta \sum_{i\in I} g_i^q(\theta)d\theta}.$$

Então

$$\frac{\sum_{i\in I} f_i(\theta)\ g_i(\theta)}{\left(\int_\Theta \sum_{i\in I} f_i^p(\theta)d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Theta \sum_{i\in I} g_i^q(\theta)d\theta\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p}\frac{\sum_{i\in I} f_i^p(\theta)}{\int_\Theta \sum_{i\in I} f_i^p(\theta)d\theta} + \frac{1}{q}\frac{\sum_{i\in I} g_i^q(\theta)}{\int_\Theta \sum_{i\in I} g_i^q(\theta)d\theta}$$

Donde

$$\frac{\int_\Theta \sum_{i\in I} f_i(\theta)g_i(\theta)d\theta}{\left(\int_\Theta \sum_{i\in I} f_i^p(\theta)d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Theta \sum_{i\in I} g_i^q(\theta)d\theta\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p}\frac{\int_\Theta \sum_{i\in I} f_i^p(\theta)d\theta}{\int_\Theta \sum_{i\in I} f_i^p(\theta)d\theta} + \frac{1}{q}\frac{\int_\Theta \sum_{i\in I} g_i^p(\theta)d\theta}{\int_\Theta \sum_{i\in I} g_i^p(\theta)d\theta}$$

Assim

$$\int_\Theta \sum_{i\in I} f_i(\theta)g_i(\theta)d\theta \leq \left(\int_\Theta \sum_{i\in I} f_i^p(\theta)d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Theta \sum_{i\in I} g_i^q(\theta)d\theta\right)^{\frac{1}{q}}$$

Teorema II - (Desigualdade de Minkowski) - Sejam $f_i(\theta)$ e $g_i(\theta)$ leis de probabilidade de tipo discreto dependendo de um parâmetro $\theta, \theta\in\Theta$, então quando

$$\int_{\Theta}\sum_{i\in I} f_i(\theta)d\theta < +\infty \quad e \quad \int_{\Theta}\sum_{i\in I} g_i(\theta)d\theta < +\infty$$

onde I é um conjunto discreto ou enumerável, temos

$$\left(\int_{\Theta}\sum_{i\in I}(f_i(\theta) + g_i(\theta))^q d\theta \le \left(\int_{\Theta}\sum_{i\in I} f_i^q(\theta)d\theta\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_{\Theta}\sum_{i\in I} g_i^q(\theta)d\theta\right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{com } q > 1.$$

Demonstração

$$\int_{\Theta}\sum_{i\in I}(f_i(\theta) + g_i(\theta))^q d\theta =$$

$$= \int_{\Theta}\sum_{i\in I}\left[f_i(\theta)(f_i(\theta) + g_i(\theta))^{q-1} + g_i(\theta)(f_i(\theta) + g_i(\theta))^{q-1}\right] d\theta =$$

$$= \int_{\Theta}\sum_{i\in I} f_i(\theta)(f_i(\theta) + g_i(\theta))^{q-1} d\theta + \int_{\Theta}\sum_{i\in I} g_i(\theta)(f_i(\theta) + g_i(\theta))^{q-1} d\theta$$

Aplicando a desigualdade de Hölder a cada parcela, obtemos

$$\int_{\Theta}\sum_{i\in I}(f_i(\theta)+g_i(\theta))^q d\theta \le \left(\int_{\Theta}\sum_{i\in I} f_i^q(\theta)d\theta\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\Theta}\sum_{i\in I}(f_i(\theta) + g_i(\theta))^q d\theta\right)^{\frac{q-1}{q}} +$$

$$+ \left(\int_{\Theta}\sum_{i\in I} g_i^q(\theta)d\theta\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_{\Theta}\sum_{i\in I}(f_i(\theta) + g_i(\theta))^q d\theta\right)^{\frac{q-1}{q}}$$

donde

$$\int_{\Theta}\sum_{i\in I}(f_i(\theta) + g_i(\theta))^q d\theta \le$$

$$\le \left[\left(\int_{\Theta}\sum_{i\in I} f_i^q(\theta)d\theta\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_{\Theta}\sum_{i\in I} g_i^q(\theta)d\theta\right)^{\frac{1}{q}}\right]\left(\int_{\Theta}\sum_{i\in I}(f_i(\theta) + g_i(\theta))^q d\theta\right)^{\frac{q-1}{q}}$$

logo

$$\left(\int_0 \sum_{i\in I} (f_i(\theta)+g_i(\theta))^q d\theta\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_0 \sum_{i\in I} f_i^q(\theta)d\theta\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0 \sum_{i\in I} g_i^q(\theta)d\theta\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Teorema III - Se $a,b > 0$ e $0 \leq \alpha \leq 1$ então $(a+b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha$

Demonstração

Se $a,b > 0$ e $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ é evidente o resultado.

Para $a,b > 0$ e $0 < \alpha < 1$, temos $(a + b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha$ se e somente se $(1 + \frac{b}{a})^\alpha \leq 1 + (\frac{b}{a})^\alpha$.

Façamos $x = \frac{b}{a}$ e consideremos a função $g(x) = 1 + x^\alpha - (1+x)^\alpha$.

Devemos mostrar então que $g(x) \geq 0$, para todo $x > 0$.

Se $0 < \alpha < 1$, g é crescente para todo $x > 0$, e visto que $g(0) = 0$, conclui-se o resultado.

REFERÊNCIAS

[1] B. BOUCHON and F. PESSOA - Logarithmic Information of degree q Linked with an extension of Fisher's Information, Fortaleza - Ce, 1983.

[2] D.E. BOEKEE - Generalized Fisher informations with application to estimation problems; in Information and Systems, Proc. IFAC Workshop, Compiègne 1977, pp. 75-82, Pergamon, 1978.

[3] I. VINCZE - On the Cramér-Fréchet-Rao inequality in the non regular case, in Contributions to statistics, Hajer Memorial Volume pp. 253-262, Academia, Prague, 1979.

[4] I. CSISZÁR - Information-type measures of difference of probability distributions and indirect observations studia Sci. Math. Hungar, nº 2, pp. 299-316, 1967.

[5] E.F. BECKENBACH and B. RICHARD - Inequalities, pg. 15, Spring-Verlag - Berlin, 1965.

[6] A. PEREZ - Risk estimates in term of generalized f-entropies. Proc. Coll. Information theory, Debrecen-Hungary, 1967.

[7] N.L. AGGARWAL - Measures d'information et questionnaires arborescents, Thèse, Besançon, 1974.

[8] P.E. FERREIRA - Miscellanea, extending Fisher's measure of information, Biometrika 68, 3, pp. 695-698, 1981

[9] J.J. GART - An extension of de Cramér-Rao inequality; Ann. Math. Stat. 30, pp. 367-379, 1958.

[10] I. VAJDA - χ^{α} - divergence and generalized Fisher's information; Trans. $6^{\underline{ta}}$ Prague Conf. on Inf. Th. 1971, pp. 873-886 (Acad., Prague, 1973).