Estimativas do Primeiro Autovalor do Laplaciano e Caracterização de Hipersuperfícies Isoparamétricas em $\mathbb{S}^{n+1}$

José Nelson Bastos Barbosa

A meus pais, José e Solange, a meu irmão Paulo e em memória dos meus irmãos Marcelo e Cristina.

A Kássia Maria, alguém muito especial na minha vida.

AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho contou com a colaboração, consciente ou inconsciente, de um amplo conjunto de professores, colegas e familiares, aos quais presto meus sinceros agradecimentos:

Aos meus pais, meus irmãos e minha filha, essência de minha energia, persistência e luta.

Às grandes amigas Letícia Batista Costa e Maria das Graças Batista Costa pelo carinho e por terem me encorajado a estudar Matemática em um momento decisivo da minha vida.

Ao Professor Abdênago Alves de Barros que, tanto na qualidade de orientador quanto na qualidade de amigo, soube conduzir-me, com competência e compreensão, no decorrer da realização deste trabalho.

Aos Professores Aldir Brasil e Ézio Costa pela amizade e pelas conversas de Matemática que resultaram em alguns tópicos deste trabalho.

Ao Professor Antonio Gervasio Colares que me incentivou e apoiou em momentos difíceis.

Aos colegas e amigos Jorge Herbert Lira, Pedro Hinojosa e Isaac Lázaro pela amizade e pelas conversas de Matemática, que muito contribuíram para o meu aprendizado.

Aos professores Hilário Alencar e Luís José Alías por aceitarem compor a banca examinadora.

Aos professores Marco Antônio Nogueira Fernandes e Enaldo Vergasta pelo constante incentivo.

Lembro outras pessoas importantes que, por atitudes ou apoio, direta ou indiretamente, beneficiaram a realização deste trabalho: Professor Sebastião Almeida, Professor Levi Lopes Lima, Professor João Lucas M. Barbosa, Professor Abdou Garba, Professor Gregório Pacelli Bessa, Professor Plácido Andrade, Andréa Costa Dantas, Fernando Espinoza.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Enfim, meus agradecimentos a esta Universidade e seus professores, responsáveis por minha formação.

Resumo

Este trabalho consiste de três capítulos abordando diferentes assuntos sobre hipersuperfícies compactas da esfera Euclidiana unitária S^{n+1}. No primeiro capítulo, provaremos que uma hipersuperfície compacta de S^{n+1} com curvatura de Ricci não negativa e grupo fundamental infinito é isométrico a um toro de curvatura média constante. Em seguida, trataremos de hipersuperfícies de S^{n+1} com duas curvaturas principais distintas e também abordaremos um caso em que uma curvatura principal tem o sinal diferente das demais. No segundo capítulo, aplicaremos a fórmula da expansão do núcleo do calor de Minakshisundaram-Pleijel para caracterizar hipersuperfícies compactas de S^{n+1} através dos espectros do Laplaciano das p-formas, para alguns valores de p. Finalmente, no terceiro capítulo, usaremos a fórmula de Bochner-Lichnerowicz para obter estimativas da norma da segunda forma fundamental de uma hipersuperfície mínima compacta de S^{n+1} em função do primeiro autovalor do Laplaciano e da dimensão de M^n, e, usando a fórmula de Reilly, obtemos uma estimativa para o primeiro autovalor do Laplaciano de uma hipersuperfície fechada e mergulhada de uma variedade Riemanniana compacta, cuja curvatura de Ricci é limitada inferiormente por uma constante positiva.

Sumário

Introdução

Seja $\varphi : M^n \hookrightarrow S^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemmaniana compacta de dimensão n na esfera Euclidiana unitária S^{n+1}. Se φ é mínima e $0 \leq S \leq n$, J. Simons [31] provou que $S = 0$ ou $S = n$, onde S denota o quadrado da norma da segunda forma fundamental de M^n. Posteriormente, S. Chern, M. do Carmo and S. Kobayashi [14] e B. Lawson [22] mostraram, independentemente, que uma hipersuperfície mínima de S^{n+1} com $S = n$ é um toro de Clifford. Por outro lado, H. Alencar e M. do Carmo [1] provaram que se φ tem curvatura média constante H e $S - nH^2 \leq B_H$, onde B_H é uma constante que depende de H e n, então $S - nH^2 = 0$ ou $S - nH^2 = B_H$. Eles também mostraram que o toro $S^{n-1}(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2}) \hookrightarrow S^{n+1}$ com curvatura média constante H, satisfazendo $r^2 \leq \frac{n-1}{n}$, é a única hipersuperfície de S^{n+1} com curvatura média constante H e $S - nH^2 = B_H$. Em vista destes resultados, uma questão natural é a caracterização de toros $S^{n-m}(r) \times S^m(\sqrt{1-r^2})$, $1 \leq m \leq (n-1)$, com curvatura média constante H, conhecidos como $H(r)$-toros. Observemos que um toro $S^{n-1}(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2})$ tem curvatura de Ricci não negativa e grupo fundamental infinito, enquanto que um toro $S^{n-m}(r) \times S^m(\sqrt{1-r^2})$, $2 \leq m \leq (n-1)$, tem curvatura de Ricci positiva e grupo fundamental finito. Isto induz a perguntar se a curvatura de Ricci e o grupo fundamental caracterizam $H(r)$-toros. Com respeito a esta questão, provaremos inicialmente, no Capítulo 1, o seguinte teorema do autor em colaboração com A. Brasil Jr., E. Costa e I. Lázaro [4]:

Teorema 1.3. *Seja $\varphi : M^n \to S^{n+1}$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície fechada e orientável. Se a curvatura de Ricci de M^n é não negativa e o grupo fundamental $\pi_1(M^n)$ de M^n é infinito, então $\varphi(M^n)$ é isométrico a um $H(r)$-toro $S^{n-1}(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2})$.*

Sejam, agora, M^n uma variedade Riemanniana completa, orientada, de dimensão n, e $\varphi : M^n \to S^{n+1}$ uma imersão isométrica de M^n na esfera Euclidiana unitária S^{n+1}. Quando $n = 3$ e φ é mínima em S^4, T. Hasanis and D. Koutroufiotis provaram em [20] que $\sup \mathrm{Ric} \geq \frac{3}{2}$ e que, caso M^3 seja compacta, a igualdade ocorre se, e somente se, $\varphi(M^3)$ é isométrica ao toro de Clifford $S^1(\frac{1}{\sqrt{3}}) \times S^2(\sqrt{\frac{2}{3}})$. Por outro lado, na tentativa de estender este resultado para dimensões maiores que três, T. Hasanis e T. Vlachos [18] mostraram que se φ é mínima, então $\sup \mathrm{Ric} \geq n-2$. Além disso, em dimensão par $n = 2m$, eles mostraram que a igualdade ocorre se, e somente se, $\varphi(M^n)$ é isométrica ao toro de Clifford $S^m(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times S^m(\frac{1}{\sqrt{2}})$. No caso ímpar $n = 2m+1$, os autores obtiveram um resultado topológico. Mais precisamente, demonstraram que o recobrimento universal de M^n é homeomorfo a S^n, desde que $\sup \mathrm{Ric} = n-2$. Também no Capítulo 1, provaremos teoremas de rigidez na direção dos resultados acima, quando φ tem curvatura média limitada, não necessariamente constante, e duas curvaturas principais distintas. Provaremos, em particular, o seguinte resultado:

Teorema 1.4. *Sejam M^n, $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana completa e orientada de dimensão n, e $\varphi : M^n \to S^{n+1}$ uma imersão isométrica cuja curvatura média H satisfaz $|H| \leq H_0$, para uma certa constante H_0. Suponhamos, além disso, que φ tem duas curvaturas principais distintas λ e μ, com multiplicidades 1 e $n-1$, respectivamente. Então,*

$$\sup \mathrm{Ric} \geq \inf f(H) \tag{1}$$

onde

$$f(H) = \frac{n(n-2)}{n-1}\left[1 + \frac{n}{2(n-1)}H^2 - \frac{1}{2(n-1)}\sqrt{n^2H^4 + 4(n-1)H^2}\right].$$

Se M^n é compacta, a igualdade em (1) ocorre se, e somente se,

$$\varphi(M^n) = S^{n-1}(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2}), \quad r^2 \geq \frac{n-1}{n}.$$

Sejam k_i, $i = 1, ..., n$, e H_r, $r = 1, ..., n$, respectivamente, as curvaturas principais e as r-ésimas curvaturas médias de φ. Mais precisamente, $H_r = \binom{n}{r}^{-1}\sigma_r$, onde σ_r são os polinômios simétricos de grau r das curvaturas principais. Provaremos, ainda no Capítulo 1, um teorema com a mesma conclusão do Teorema 1.4, ao substituirmos a hipótese de duas curvaturas principais distintas pelas hipóteses

$$k_1 k_j \leq 0, \quad j = 2, ..., n, \quad \text{e} \quad H_{n-2} = cH_n,$$

onde c é uma constante não negativa.

Suponhamos, agora, que M^n é compacta e que φ tem duas curvaturas principais distintas de multiplicidades 1 e $n-1$. Neste caso, se φ é mínima,

T. Hasanis e T. Vlachos provaram em [19] que, se o quadrado da norma da segunda forma fundamental S de φ satisfaz $S \geq n$, então $\varphi(M^n)$ é isométrico ao toro de Clifford $S^{n-1}(\sqrt{n-1/n}) \times S^1(\sqrt{1/n})$. Convém observar que T. Otsuki [28] construiu toros com S assumindo valores menores e maiores que n. Finalizando o Capítulo 1, generalizaremos o resultado de T. Hasanis e T. Vlachos, caracterizando um $H(r)$-toro, prescindindo da hipótese de que φ tem curvatura média constante. Mais precisamente, obteremos

Teorema 1.6. *Sejam M^n, $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana compacta e orientada de dimensão n, e $\varphi : M^n \to S^{n+1}$ uma imersão isométrica. Suponhamos que φ tem duas curvaturas principais distintas λ e μ, com multiplicidades 1 e $n-1$, respectivamente, e que o quadrado da norma da sua segunda forma fundamental S satisfaz $S \geq S(H)$, onde*

$$S(H) = n + \frac{n^3}{2(n-1)}H^2 + \frac{n(n-2)}{2(n-1)}\sqrt{n^2H^4 + 4(n-1)H^2}\,.$$

Então, H é constante, $S = S(H)$ e

$$\varphi(M^n) = S^{n-1}(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2})\,, \quad r^2 \geq \frac{n-1}{n}\,.$$

No Capítulo 2, iremos abordar o problema de estabelecer condições para que variedades Riemannianas M^n compactas, sem bordo, isoespectrais, sejam isométricas. Sob condições gerais, este é um problema difícil em Geometria Riemanniana. A existência de toros planos que são isoespectrais mas não isométricos (veja [7]) é um contra exemplo para a validade geral de uma resposta positiva para esta questão. O principal ingrediente utilizado para tratar este problema tem sido a fórmula da expansão assintótica do núcleo do calor de Minakshisundaram-Pleijel (veja [7] ou [29]) dada por

$$\sum_{i=1}^{\infty} e^{-(\lambda_i^p)t} \sim (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}(a_{0,n}^p + a_{1,n}^p t + a_{2,n}^p t^2 + \ldots), \quad t \to 0^+\,,$$

onde $a_{i,n}^p$ são constantes geométricas que dependem de M^n e λ_i^p são os autovalores do Laplaciano das p-formas em M^n, cujo espectro denotaremos por $\mathrm{Spec}^p(M^n)$, i. e.,

$$\mathrm{Spec}^p(M^n) := \{0 \leq \lambda_0^p \leq \lambda_1^p \leq \ldots \uparrow +\infty\}, \; p = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Contudo, se considerarmos uma imersão isométrica de M^n na esfera Euclidiana S^{n+1} com algumas propriedades geométricas adicionais, este problema torna-se menos complexo. Por exemplo, Q. Ding [17] provou que, se M^3

é uma hipersuperfície mínima fechada e orientável de S^4 e $\mathrm{Spec}^p(M^3) = \mathrm{Spec}^p({M_0}^3)$, para um dado $p \in \{0,1,2,3\}$, onde ${M_0}^3$ é a esfera totalmente geodésica, o toro de Clifford $S^1(\sqrt{1/3}) \times S^2(\sqrt{2/3})$, ou a hipersuperfície mínima de Cartan, então M^3 é isométrica a ${M_0}^3$. Por outro lado, J. Wang [34] mostrou que se M^3 e ${M_0}^3$ são hipersuperfícies fechadas e orientadas de S^4 com a mesma curvatura média constante H_0, onde ${M_0}^3$ é isoparamétrica, e $\mathrm{Spec}^p(M^3) = \mathrm{Spec}^p({M_0}^3)$, $\forall p \in \{0,1\}$, então M^3 é isométrica a ${M_0}^3$.

Na direção destes resultados, provaremos o resultado principal do Capítulo 2.

Teorema 2.1. *Sejam $M, M_0 \hookrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 3$, hipersuperfícies fechadas e orientadas de S^{n+1} com curvaturas médias H e H_0, e curvaturas escalares ρ e ρ_0, respectivamente. Exijamos que uma das curvaturas H ou H_0 é não identicamente nula e que ρ_0 é constante. Suponhamos, além disso, que*

(i) $\mathrm{Spec}^p(M) = \mathrm{Spec}^p(M_0)$, $\forall p \in \{0,1\}$, *se* $n = 3$;

(ii) $\mathrm{Spec}^p(M) = \mathrm{Spec}^p(M_0)$, $\forall p \in \{0,1,2\}$, *se* $n \geq 4$.

Então $\rho = \rho_0$, isto é, M tem a mesma curvatura escalar, constante, de M_0. Além disso, valem as seguintes igualdades integrais:

$$\int_M H\sigma_3 \mathrm{d}v = \int_{M_0} H_0 \sigma_3^0 \mathrm{d}v_0 \,, \quad se \quad n \geq 3 \,,$$

$$\int_M \sigma_4 \mathrm{d}v = \int_{M_0} \sigma_4^0 \mathrm{d}v_0 \,, \quad se \quad n \geq 4 \,,$$

onde σ_m^0 e $\mathrm{d}v_0$ denotam os valores σ_m e $\mathrm{d}v$ correspondentes a M_0, respectivamente. Em particular, se S_0 denota o quadrado da norma da segunda forma fundamental de M_0, temos que

$$n^2 H^2 - S = n^2 H_0^2 - S_0 \,.$$

Uma conseqüência dos cálculos na prova do teorema acima é o seguinte resultado com respeito ao caso $H = H_0 = 0$, cuja prova segue de técnicas similares apresentadas antes por Q. Ding em seu trabalho [17].

Teorema 2.2. *Sejam $M, M_0 \hookrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 3$, hipersuperfícies mínimas fechadas e orientáveis de S^{n+1} cujas curvaturas escalares são ρ e ρ_0, respectivamente, com ρ_0 constante. Suponhamos que*

(i) $\mathrm{Spec}^p(M) = \mathrm{Spec}^p(M_0)$, *para algum* $p \in \{0,1,2,3\}$, *se* $n = 3$;

(ii) $\operatorname{Spec}^p(M) = \operatorname{Spec}^p(M_0)$, $\forall p \in \{0, 1\}$, *se* $n \geq 4$.

Então $\rho = \rho_0$. *Além disso, para* $n \geq 4$, *temos*

$$\int_M \sigma_4 \mathrm{d}v = \int_{M_0} \sigma_4^0 \mathrm{d}v_0 .$$

Aplicando o Teorema 2.1, mostraremos que no teorema provado por J. Wang, previamente mencionado, não é necessária a hipótese de M^3 e ${M_0}^3$ terem a mesma curvatura média constante. Por outro lado, com as mesmas hipóteses do Teorema 2.1, se $n \geq 4$ e ${M_0}^n$ é isoparamétrica, demonstramos, utilizando este teorema e a fórmula de Simons, que M^n é também isoparamétrica e, como caso particular, obteremos alguns resultados de rigidez de esferas e de toros de curvatura média constante. Para tanto, usaremos também um teorema de M. do Carmo e H. Alencar [1]. Finalmente, no Capítulo 2, mostraremos que, se M^n tem curvatura seccional não-negativa e ${M_0}^n$ é uma esfera umbílica ou um toro com curvatura média constante e raio não muito grande, as igualdades dos p-espectros tal como no Teorema 2.1, implicam M^n e ${M_0}^n$ isométricas.

No terceiro e último capítulo, utilizaremos as técnicas de Bochner-Lichnerowicz para obtermos estimativas da norma da segunda forma fundamental de uma hipersuperfície mínima fechada M^n da esfera Euclidiana unitária em função do primeiro autovalor do Laplaciano e da dimensão de M^n. Inicialmente, consideramos uma imersão mínima $\varphi : M^n \to S^{n+p}$ de M^n na esfera Euclidiana unitária S^{n+p}. Um conhecido teorema de T. Takahashi [32] assegura que $\Delta\varphi + n\varphi = 0$, onde Δ denota o Laplaciano de M^n na métrica induzida por φ. Consequentemente, n é um autovalor de Δ. Neste contexto foi conjecturado por S. Yau [35] que para uma hipersuperfície mergulhada, n é, de fato, o primeiro autovalor λ_1 de Δ. H. Muto [24] provou que isto ocorre para algumas classes de hipersuperfícies mínimas isoparamétricas de S^{n+1}. É importante ressaltar que o primeiro resultado global na direção da Conjectura de Yau foi obtido por H. I. Choi e A. N. Wang [15], o qual afirma que $\lambda_1 \geq \frac{n}{2}$. A. Barros e G. Bessa [6] obtiveram, com técnicas similares às de Choi e Wang, que $\lambda_1 \geq \frac{n}{2} + \delta$, onde δ é uma constante que depende da extensão harmônica de uma primeira autofunção de M^n a uma das componentes conexas de $S^{n+1} \setminus M^n$. No entanto, as técnicas usadas na prova destes resultados aplicam-se somente para codimensão 1. Por outro lado, J. Simons [31] provou que, se o quadrado da norma S da segunda forma fundamental de uma imersão mínima $\varphi : M^n \to S^{n+p}$, onde M^n é compacta, satisfaz $0 \leq S \leq \frac{n}{1-\frac{2}{p}}$, então $S \equiv 0$ ou $S = \frac{n}{1-\frac{2}{p}}$. Além disso, foi mostrado independentemente por S. S. Chern, M. do Carmo, S. Kobayashi [14] e B.

Lawson [22] que para $S = \frac{n}{1-\frac{2}{p}}$, M^n é um toro de Clifford. Nesta direção, P. F. Leung [23] provou que $S \geq n - \lambda_1$, quando S é constante. No Capítulo 3, melhoraremos o resultado de Leung para hipersuperfícies. Mais precisamente, provaremos que se f é uma autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1, então

$$\int_M S|\nabla f|^2 \geq \frac{m_0(n-1)}{n}(n-\lambda_1)\int_M |\nabla f|^2$$

onde $\frac{n}{n-1} \leq m_0 \leq n$. Esta constante m_0 depende do mínimo do número de componentes não nulas de ∇f com respeito aos referenciais principais ao longo de M^n ou do máximo da dimensão do núcleo da segunda forma fundamental sobre M^n quando o núcleo é não trivial em todo ponto. Observemos que se $S < \frac{m_0(n-1)}{2}$, então $\lambda_1 > \frac{n}{2}$, o que melhora o resultado de Choi-Wang. Finalizando este trabalho, no Capítulo 3, generalizaremos o resultado de A. Barros e G. Bessa, previamente mencionado, para uma hipersuperfície fechada e mergulhada de uma variedade Riemanniana compacta, cuja curvatura de Ricci é limitada inferiormente por uma constante positiva.

Capítulo 1

Caracterização de Toros em $\mathbb{S}^n$

1.1 Introdução

Neste primeiro capítulo, provaremos que uma hipersuperfície de S^{n+1} com curvatura de Ricci não negativa e grupo fundamental infinito é isométrico a um toro $S^{n-1}(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2})$ com curvatura média constante. Em seguida, aplicaremos este resultado para tratarmos de hipersuperfícies de S^{n+1} com duas curvaturas principais distintas, assim como abordaremos um caso onde exige-se que o sinal de uma curvatura principal seja diferente das demais. Na seção seguinte iremos estabelecer notações e citar alguns resultados que serão utilizados na prova dos teoremas.

1.2 Preliminares

1.2.1 Os H(r)-toros

Dado $r \in (0,1)$ e $m \in \{1, \dots, n-1\}$, consideremos as imersões canônicas $S^{n-m}(r) \subset \mathbb{R}^{n-m+1}$ e $S^m(\sqrt{1-r^2}) \subset \mathbb{R}^{m+1}$ de esferas com raios r e $\sqrt{1-r^2}$ e dimensões $n-m$ e m, respectivamente. Em seguida, tomemos o produto de imersões

$$S^{n-m}(r) \times S^m(\sqrt{1-r^2}) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n-m+1} \times \mathbb{R}^{m+1}.$$

Consequentemente, a hipersuperfície obtida tem curvaturas principais e curvatura média H, respectivamente, dadas ora pelas constantes

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-m} = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}, \tag{1.1}$$

$$\lambda_{n-m+1} = \cdots = \lambda_n = -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}, \tag{1.2}$$

e

$$H = \frac{n-m-nr^2}{nr\sqrt{1-r^2}}\,, \tag{1.3}$$

ora pelos simétricos destes valores, caso escolhamos a orientação oposta. Estas hipersuperfícies são chamadas de $H(r)$-toros. Denotamos um $H(r)$-toro do tipo acima por $M^r_{n-m,m}(H)$.

De (1.3), deduzimos que

$$r^2 = \begin{cases} \frac{2(n-m)+nH^2+\sqrt{n^2H^4+4m(n-m)H^2}}{2n(H^2+1)}\,, & \text{se } r^2 \geq \frac{n-m}{n} \\ \\ \frac{2(n-m)+nH^2-\sqrt{n^2H^4+4m(n-m)H^2}}{2n(H^2+1)}\,, & \text{se } r^2 \leq \frac{n-m}{n}\,. \end{cases} \tag{1.4}$$

Observemos que $H = 0$ se, e somente se, $r^2 = \frac{n-m}{n}$. Segue da fórmula de Gauss que a curvatura de Ricci de $M^r_{n-m,m}(H)$ na direção de e_i é dada por

$$\mathrm{Ric}(e_i) = n - 1 + nH\lambda_i - \lambda_i^2\,.$$

Logo, de (1.1), (1.2) e (1.3), concluímos que

$$\mathrm{Ric}(e_1) = ... = \mathrm{Ric}(e_{n-m}) = \frac{n-m-1}{r^2} \tag{1.5}$$

e

$$\mathrm{Ric}(e_{n-m+1}) = ... = \mathrm{Ric}(e_n) = \frac{m-1}{1-r^2}\,. \tag{1.6}$$

Notemos também que o quadrado da norma da segunda forma fundamental S é dada por

$$S = (n-m)\frac{1-r^2}{r^2} + m\frac{r^2}{1-r^2}\,.$$

Finalmente, podemos também escrever S e as curvaturas de Ricci nas direções principais em função de H, utilizando a expressão de r^2 dada em (1.4). Assim, obtemos

$$\mathrm{Ric}(e_i) = \tfrac{(n-m-1)n}{n-m}\left[1 + \tfrac{n}{2(n-m)}H^2 \mp \tfrac{1}{2(n-m)}\sqrt{n^2H^4 + 4m(n-m)H^2}\right],$$

$$\mathrm{Ric}(e_j) = \tfrac{(m-1)n}{m}\left[1 + \tfrac{n}{2m}H^2 \pm \tfrac{1}{2m}\sqrt{n^2H^4 + 4m(n-m)H^2}\right],$$

para $i = 1, ..., n-m$, $j = n-m+1, ..., n$, e

$$S = n + \frac{n^3}{2m(n-m)}H^2 \pm \frac{n-2m}{2m(n-m)}\sqrt{n^4H^4 + 4mn^2(n-m)H^2}\,,$$

onde, antes dos radicais, consideramos os sinais acima se $r^2 \geq \frac{n-m}{n}$, e os abaixo se $r^2 \leq \frac{n-m}{n}$.

1.2.2 Aplicação de Gauss para hipersuperfícies da esfera Euclidiana unitária

Seja M^n uma variedade Riemanniana orientada de dimensão n. Consideremos $\varphi : M^n \to S^{n+1}$ uma imersão isométrica de M^n na esfera Euclidiana unitária S^{n+1}. Denotemos por N o campo normal unitário de φ. A aplicação de Gauss $\eta : M^n \to S^{n+1}$ de φ é definida como segue: para cada $p \in M^n$, $\eta(p)$ é o ponto final do vetor obtido transladando-se $N(p)$ paralelamente em R^{n+2} de modo que seu ponto inicial é o centro de S^{n+1}. Identificando M^n e $\varphi(M^n)$ localmente, temos, para vetores tangentes X de M^n, que $(\nabla_X N)^\top = -AX$, onde ∇ é a conexão de S^{n+1}, A é o operador de Weingarten de φ e $v^\top$ indica a componente tangente a M^n de um vetor v tangente a S^{n+1}. Mostra-se facilmente que $d\eta(X) = -AX$. Segue deste fato que, se A é não singular, então a aplicação η é uma imersão isométrica ao munirmos M^n com a métrica $\langle\ ,\ \rangle_*$ dada por

$$\langle X, Y\rangle_* = \langle AX, AY\rangle\ ,$$

onde $\langle\ ,\ \rangle$ denota a métrica de M^n induzida por φ. Temos que:

Lema 1.1. *Se A é não singular, então o operador de Weingarten da imersão $\eta : M^n \to S^{n+1}$ é dado por A^{-1}.*

Além disso, considerando ainda A não singular, as igualdades

$$\langle A^{-1}X, Y\rangle_* = \langle X, AY\rangle = \langle AX, Y\rangle\ ,$$

implicam que as direções principais de η são as mesmas de φ. Mais precisamente, se $\{e_1, ..., e_n\}$ diagonaliza A, então $\{\frac{e_1}{\lambda_1}, ..., \frac{e_n}{\lambda_n}\}$ é uma base ortonormal que diagonaliza A^{-1}, onde $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são as curvaturas principais de φ. Consequentemente, as curvaturas principais de η são $\frac{1}{\lambda_1}, ..., \frac{1}{\lambda_n}$. Logo, as curvaturas seccionais k_* de $(M^n, \langle\ ,\ \rangle_*)$ com relação aos planos gerados pelas direções principais são dadas por

$$k_*(e_i, e_j) = 1 + \frac{1}{\lambda_i\lambda_j}\ , \quad i, j = 1, ..., n\ , \quad i \neq j\ .$$

Lema 1.2. *Seja M^n uma hipersuperfície orientada em S^{n+1}. Suponha que existam constantes H_0 e α, com $\alpha < n-1$, tais que a curvatura média H e a curvatura de Ricci de M^n satisfaçam em todo ponto $|H| \leq H_0$ e*

Ric $\leq \alpha\langle\ ,\ \rangle$. *Então, as curvaturas principais de M^n satisfazem $|\lambda_i| \geq \beta$, para alguma constante positiva β. Segue que se M^n é completa na métrica induzida por φ, então $\langle X, Y\rangle_* := \langle AX, AY\rangle$ é uma métrica completa em M^n.*

As demonstrações dos Lemas 1.1 e 1.2 podem ser encontradas no trabalho de T. Hasanis e D. Koutroufiotis [20].

1.3 Teoremas

Teorema 1.3. *Seja $\varphi : M^n \to S^{n+1}$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície fechada e orientável. Se a curvatura de Ricci de M^n é não negativa e o grupo fundamental $\pi_1(M^n)$ de M é infinito, então $\varphi(M^n)$ é isométrico a um $H(r)$-toro $S^{n-1}(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2})$.*

Prova. Seja $i : S^{n+1} \to R^{n+2}$ a aplicação de inclusão e $\overline{\varphi} : M^n \to R^{n+2}$ a imersão isométrica $\overline{\varphi} = i \circ \varphi$. Visto que $\pi_1(M^n)$ é infinito, aplicando-se o Teorema 1 de M. Noronha [25] para a imersão $\overline{\varphi}$, concluímos que M^n tem cuvaturas seccionais não negativas. Por outro lado, afirmamos que para cada $p \in M$, existe $v \in T_pM$, tal que $||v|| = 1$ e $\text{Ric}_p(v) = 0$. Com efeito, se em algum ponto de M^n a curvatura de Ricci é positiva, um resultado de T. Aubin ([3], p. 397) assegura que M^n admite uma métrica com curvatura de Ricci positiva e, consequentemente, pelo Teorema de Bonnet-Myers, $\pi_1(M^n)$ é finito. Uma contradição. Portanto, a afirmação está provada. Como a curvatura de Ricci atinge seus extremos absolutos em direções principais (veja [20], p. 182), podemos escolher um referencial ortonormal local $\{e_1, ..., e_n\}$ em uma vizinhança de p satisfazendo $Ae_i = \lambda_i e_i$, $i = 1, ..., n$, e $\text{Ric}(e_1) = 0$. Visto que as curvaturas seccionais k de M^n são não negativas, temos que $k(e_1, e_j) = 0$ para todo $j \geq 2$. Consequentemente, $1 + \lambda_1\lambda_j = 0$. Concluímos que φ tem somente duas curvaturas principais distintas λ e μ com multiplicidades 1 e $n-1$, respectivamente.

Se $n \geq 4$, pelo Teorema 7.11, p. 118, de M. Dajczer [16], M^n é conformemente plana. Se $n = 3$, M^3 é conformemente plana se é satisfeita a condição de Codazzi

$$(\nabla_X\gamma)(Y) = (\nabla_Y\gamma)(X)\,, \tag{1.7}$$

onde $\gamma : TM \to TM$ é definido como

$$\gamma(X) = Q(X) - \frac{\rho}{4}X\,,$$

$Q : TM \to TM$ é o operador de Ricci dado por $Q(X) = \sum_{i=1}^{3} R(X, X_i)X_i$ em uma base ortonormal $\{X_1, ..., X_n\}$, R é o tensor curvatura e ρ é a curvatura escalar de M^n.

Vamos provar que o tensor γ satisfaz (1.7). Observemos que $Q(e_i) = \mathrm{Ric}(e_i)e_i$. Pela Equação de Gauss temos

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(e_1) &= 2 + 2\lambda\mu\,, \\ \mathrm{Ric}(e_i) &= 2 + \lambda\mu + \mu^2\,,\ i = 2, 3\,, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} Q(e_1) &= (2 + 2\lambda\mu)e_1\,, \\ Q(e_i) &= (2 + \lambda\mu + \mu^2)e_i\,,\ i = 2, 3\,. \end{aligned}$$

Visto que

$$\rho = \mathrm{Ric}(e_1) + 2\mathrm{Ric}(e_2) = 6 + 4\lambda\mu + 2\mu^2\,,$$

obtemos

$$\gamma(e_1) = \Big[\frac{1}{2} + \mu(\lambda - \frac{\mu}{2})\Big]e_1$$

e

$$\gamma(e_i) = \Big[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu^2\Big]e_i, \quad i = 2, 3\,.$$

Consequentemente,

$$\gamma = \frac{1}{2}I + \mu(A - \frac{\mu}{2}I)\,.$$

Como μ tem multiplicidade constante maior que 1, segue do Teorema 4.4, p. 139 de [11], que a distribuição correspondente ao autovalor μ é integrável, e, consequentemente, $e_2(\mu) = e_3(\mu) = 0$. Usando este fato e a equação de Codazzi

$$(\nabla_{e_i}A)(e_j) = (\nabla_{e_j}A)(e_i),$$

obtemos (1). Logo, M^3 é conformemente plana.

Portanto, para qualquer $n \geq 3$, M^n é uma variedade compacta, orientável, conformemente plana e com curvatura de Ricci não negativa. Utilizando o Teorema 1 de M. Noronha [26] e a hipótese de que $\pi_1(M^n)$ é infinito, concluímos que o recobrimento universal $\widetilde{M}^n$ de M^n é isométrico a um cilindro $\mathbb{R} \times S^{n-1}(r_0)$ com sua métrica canônica. Consequentemente, $\widetilde{M}^n$ e M^n têm curvaturas seccionais constantes. Como $\lambda\mu = -1$ e $k(e_i, e_j) = 1+\mu^2$, $i, j > 1$, inferimos que λ e μ são ambos constantes. Logo, aplicando-se um teorema de M. do Carmo e M. Dajczer ([8],p. 701), concluímos que $\varphi(M^n)$ é isométrico a um $H(r)$-toro $S^{n-1}(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2})$. □

Teorema 1.4. *Sejam M^n, $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana completa e orientada de dimensão n, e $\varphi : M^n \to S^{n+1}$ uma imersão isométrica cuja curvatura média H satisfaz $|H| \leq H_0$, para uma certa constante H_0. Suponhamos, além disso, que φ tem duas curvaturas principais distintas λ e μ, com multiplicidades 1 e $n-1$, respectivamente. Então,*

$$\sup \mathrm{Ric} \geq \inf f(H)\,, \tag{1.8}$$

onde

$$f(H) = \frac{n(n-2)}{n-1}\Big[1 + \frac{n}{2(n-1)}H^2 - \frac{1}{2(n-1)}\sqrt{n^2H^4 + 4(n-1)H^2}\Big]$$

Se M^n é compacta, a igualdade em (1.8) ocorre se, e somente se,

$$\varphi(M^n) = S^{n-1}(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2})\,, \quad r^2 \geq \frac{n-1}{n}\,.$$

Prova. Observemos que $\inf f(H) < \infty$, visto que $f(H) > 0$. Ponha $\alpha = \sup \mathrm{Ric}$ e vamos assumir que $\alpha < \infty$. Caso contrário, nada há a demonstrar. Suponhamos, por absurdo, que

$$\alpha < \inf f(H) \leq f(H)\,. \tag{1.9}$$

Utilizando (1.9) verifica-se que $\alpha < n-1$. Consequentemente, podemos aplicar o Lema 1.2 e concluir que as curvaturas principais λ e μ de φ são diferentes de zero, e que $(M^n, \langle\ ,\ \rangle_*)$ é completa. Denotemos por $e_1, ..., e_n$ as direções principais das curvaturas principais $\lambda_1 = \lambda$ e $\lambda_2, ..., \lambda_n = \mu$, respectivamente. Como

$$\mathrm{Ric}(e_i) = n - 1 + nH\lambda_i - \lambda_i^2$$

e $\mathrm{Ric} \leq \alpha$, segue que

$$\begin{aligned} \lambda_i &\geq \frac{n}{2}H + \sqrt{\frac{n^2}{4}H^2 + n - 1 - \alpha} \qquad \text{ou} \\ \lambda_i &\leq \frac{n}{2}H - \sqrt{\frac{n^2}{4}H^2 + n - 1 - \alpha}\,. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Afirmamos que, a menos de uma troca de orientação, podemos supor

$$\lambda \geq \frac{n}{2}H + \sqrt{\frac{n^2}{4}H^2 + n - 1 - \alpha} \tag{1.11}$$

e

$$\mu \leq \frac{n}{2}H - \sqrt{\frac{n^2}{4}H^2 + n - 1 - \alpha}\,. \tag{1.12}$$

Com efeito, primeiro observamos que

$$\frac{n}{2}H - \sqrt{\frac{n^2}{4}H^2 + n - 1 - \alpha} < H < \frac{n}{2}H + \sqrt{\frac{n^2}{4}H^2 + n - 1 - \alpha}\,. \tag{1.13}$$

Visto que $(\lambda - H) + (n-1)(\mu - H) = 0$, a menos de ordenação das direções principais, temos dois casos possíveis:

1º Caso) $\lambda \geq H$ e $\mu \leq H$.

Nestas condições, temos $\lambda \geq \frac{n}{2}H + \sqrt{\frac{n^2}{4}H^2 + n - 1 - \alpha}$. De outro modo, por (1.10) e (1.13), teríamos $\lambda \leq \frac{n}{2}H - \sqrt{\frac{n^2}{4}H^2 + n - 1 - \alpha} < H$, o que é uma contradição. Um argumento análogo permite mostrar que μ satisfaz (1.12).

2º Caso) $\lambda \leq H$ e $\mu \geq H$.

Neste caso, pelo mesmo argumento anterior, temos

$$\lambda \leq \frac{n}{2}H - \sqrt{\frac{n^2}{4}H^2 + n - 1 - \alpha} \quad \text{e} \quad \mu \geq \frac{n}{2}H + \sqrt{\frac{n^2}{4}H^2 + n - 1 - \alpha}\,.$$

Fazendo uma mudança na orientação de M^n, temos que a curvatura média $\tilde{H} = -H$ e as curvaturas principais $\tilde{\lambda} = -\lambda$, $\tilde{\mu} = -\mu$ de φ nesta orientação satisfazem

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda} &= -\lambda \geq -\frac{n}{2}H + \sqrt{\frac{n^2}{4}H^2 + n - 1 - \alpha}\\ &= \frac{n}{2}\tilde{H} + \sqrt{\frac{n^2}{4}\tilde{H}^2 + n - 1 - \alpha}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\tilde{\mu} &= -\mu \leq -\frac{n}{2}H - \sqrt{\frac{n^2}{4}H^2 + n - 1 - \alpha}\\ &= \frac{n}{2}\tilde{H} - \sqrt{\frac{n^2}{4}\tilde{H}^2 + n - 1 - \alpha}\,.\end{aligned}$$

Logo, a afirmação está provada e, portanto, podemos assumir que as desigualdades (1.11) e (1.12) são válidas. Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}\lambda &= nH-(n-1)\mu \\ &\geq nH-\frac{n(n-1)}{2}H+(n-1)\sqrt{\frac{n^2}{4}H^2+n-1-\alpha} \qquad (1.14)\\ &= -\frac{n(n-3)}{2}H+(n-1)\sqrt{\frac{n^2}{4}H^2+n-1-\alpha}\,.\end{aligned}$$

Assim, (1.12) e (1.14) acarretam

$$\begin{aligned}\lambda\mu \leq &\Big(-\frac{n(n-3)}{2}H+(n-1)\sqrt{\frac{n^2}{4}H^2+n-1-\alpha}\Big)\\ &\times\Big(\frac{n}{2}H-\sqrt{\frac{n^2}{4}H^2+n-1-\alpha}\Big) \qquad (1.15)\\ &= -\,c(H)\,,\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}c(H) = (n-1)^2-(n-1)\alpha+\frac{n^2(n-2)}{2}H^2\\ -n(n-2)H\sqrt{\frac{n^2}{4}H^2+n-1-\alpha}>0\,.\end{aligned}$$

Consequentemente, obtemos de (1.15) que as curvaturas seccionais k_* da aplicação de Gauss η da imersão φ com relação aos planos gerados por e_1 e e_j, $j>1$, satisfazem

$$k_*(e_1,e_j)=1+\frac{1}{\lambda\mu}\geq 1-\frac{1}{c(H)}=\frac{c(H)-1}{c(H)}\,. \qquad (1.16)$$

Afirmamos que $c(H)-1>0$, isto é,

$$\begin{aligned}n(n-2)-(n-1)\alpha+\frac{n^2(n-2)}{2}H^2\\ -n(n-2)H\sqrt{\frac{n^2}{4}H^2+n-1-\alpha} &> 0 \qquad (1.17)\end{aligned}$$

Com efeito, se $H<0$, o fato de que $\alpha<f(H)\leq\frac{n(n-2)}{n-1}$ implica que (1.17) vale. Consideremos, agora, $H\geq 0$. Novamente, como $\alpha<\frac{n(n-2)}{n-1)}$, temos que

$$n(n-2)-(n-1)\alpha+\frac{n^2(n-2)}{2}H^2>0\,.$$

Usando este fato, podemos garantir que a desigualdade (1.17) vale se, e somente se,

$$\left(n(n-2) - (n-1)\alpha + \frac{n^2(n-2)}{2}H^2\right)^2$$
$$> n^2(n-2)^2H^2(\frac{n^2}{4}H^2 + n - 1 - \alpha) ,$$

ou, equivalentemente,

$$A\alpha^2 + B\alpha + C > 0 , \tag{1.18}$$

onde

$$\begin{aligned} A &= (n-1)^2 , \\ B &= -n(n-2)[2(n-1) + nH^2] , \\ C &= n^2(n-2)^2(H^2+1) . \end{aligned}$$

Verifica-se facilmente que $f(H)$ é a menor raiz da equação $Ax^2+Bx+C=0$, em x. Portanto, se $x < f(H)$, temos que $Ax^2+Bx+C > 0$. Em particular, isto ocorre para $x = \alpha$. Assim, garantimos que (1.18) é válido, e portanto (1.17) também o é. Consequentemente $c(H) - 1 > 0$ e a afirmação está provada.

Agora, como $c(H)$ é positivo e H é limitada, segue que

$$\frac{c(H)-1}{c(H)} \geq \delta > 0 .$$

Portanto, $k_*(e_1, e_j) \geq \delta > 0$. Por outro lado, para $j > i > 1$, temos que

$$k_*(e_i, e_j) = 1 + \frac{1}{\mu^2} > 1 .$$

Como as curvaturas seccionais de uma hipersuperfície de uma forma espacial atinge seus extremos absolutos em planos gerados por direções principais, segue que todas as curvaturas seccionais de $(M^n, \langle\ ,\ \rangle_*)$ são limitadas inferiormente por uma constante positiva, e consequentemente, pelo teorema de Bonnet-Myers, M^n é compacta e $\pi_1(M^n)$ é finito.

Por outro lado, para $n \geq 4$, como η possui somente duas curvaturas principais de multiplicidades 1 e $n-1$, concluímos que $(M^n, \langle\ ,\ \rangle_*)$ é conformemente plana (veja Teorema 7.11, p. 118 de [16]) e sem pontos umbílicos.

Consequentemente, visto que M^n é compacta, do Teorema 1.4 de M. do Carmo, M. Dajczer e F. Mercuri [9], segue que M^n é homeomorfa a um produto de esferas $S^{n-1}(r_1) \times S^1(r_2)$. Portanto, $\pi_1(M^n)$ é infinito, o que implica uma contradição. Para $n = 3$, conclui-se o mesmo, visto que η tem somente duas curvaturas principais, sem pontos umbílicos. Isto prova a primeira parte do teorema.

Agora, vamos supor que M^n é compacta e que $\sup \mathrm{Ric} = \inf f(H)$, ou seja,

$$\mathrm{Ric}(X) \leq \alpha \leq f(H) \ , \quad \forall X \in TM \ , \quad |X| = 1 \ .$$

Assim, temos que $\alpha < n-1$ e de maneira análoga ao que foi feito na primeira parte da prova do teorema, concluímos que

$$k_*(e_1, e_j) = 1 + \frac{1}{\lambda\mu} \geq \frac{c(H) - 1}{c(H)} \geq 0 \ , \quad j > 1 \ .$$

No entanto, observemos que pode ocorrer $c(H) - 1 = 0$ uma vez que, agora, temos $\alpha \leq f(H)$. Por outro lado, temos também que

$$k_*(e_i, e_j) = 1 + \frac{1}{\mu^2} > 1 \ , \quad j > i > 1 \ . \tag{1.19}$$

Segue que a curvatura de Ricci de η é não negativa. O fato de M ser compacta e η ter duas curvaturas principais distintas de multiplicidades 1 e $n-1$, implica, pelo mesmo argumento da primeira parte da prova, que $\pi_1(M)$ é infinito. Podemos, então, aplicar o Teorema 1.3 para η e concluir que $\eta(M^n)$ é um toro $S^{n-1}(r_0) \times S^1(\sqrt{1 - r_0{}^2})$ com curvatura média constante. Em particular, teremos que as curvaturas principais $1/\lambda$ e $1/\mu$, de η, são constantes. Assim, λ, μ e H são constantes. Concluímos que $\varphi(M^n)$ é um $H(r)$-toro $S^{n-1}(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2})$. Como $\sup \mathrm{Ric} = f(H)$, segue que $r^2 \geq (n-1)/n$ (conforme subsecção 1.2.1), o que completa a prova do teorema. □

Para uma hipersuperfície M^n de S^{n+1} com curvaturas principais $\lambda_1, ..., \lambda_n$, consideremos as r-ésimas curvaturas médias H_r dadas por

$$H_r = \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{\substack{i_1,...,i_r=1 \\ i_1<...<i_r}}^{n} \lambda_{i_1} ... \lambda_{i_r} \ .$$

Supondo M compacta, orientada, e contida em um hemisfério aberto de S^{n+1}, se $H_l \neq 0$ em todo ponto de M e H_k/H_l é constante, para $k, l \in \{0, 1, ..., n\}$, S. Koh provou em [21] que M é isométrica a uma esfera umbílica. Com uma hipótese semelhante a esta para as curvaturas principais, evitando, porém, a hipótese de inclusão no hemisfério aberto, provaremos o seguinte resultado:

Teorema 1.5. *Sejam M^n, $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana completa e orientada de dimensão n, e $\varphi : M^n \to S^{n+1}$ uma imersão isométrica tal que sua curvatura média H satisfaz $|H| \leq H_0$, para uma certa constante H_0. Suponhamos que as curvaturas principais λ_i, $i = 1, ..., n$, de φ satisfazem $\lambda_1 \lambda_j \leq 0$, para todo $j > 1$ e que, além disso, existe uma constante c não negativa tal que $H_{n-2} = cH_n$. Então*

$$\sup \mathrm{Ric} \geq \inf f(H) \,. \tag{1.20}$$

Se M^n é compacta, a igualdade em (1.20) ocorre se, e somente se,

$$\varphi(M^n) = S^{n-1}(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2}) \,, \quad r^2 \geq \frac{n-1}{n} \,.$$

Prova. Como na prova do teorema anterior, denotaremos $\alpha = \sup \mathrm{Ric}$ e assumiremos que $\alpha < \infty$.

Suponhamos, por contradição, que $\alpha < f(H)$. Assim, temos $\alpha < n-1$. Consequentemente, podemos aplicar o Lema 1.2 e concluir que todas as curvaturas principais λ_i de φ são diferentes de zero, e que $(M^n, \langle\ ,\ \rangle_*)$ é completa. Do mesmo modo que na prova do Teorema 1.4 podemos assumir que, a menos de uma troca de orientação,

$$\lambda_1 \geq \frac{n}{2}H + \sqrt{\frac{n^2}{4}H^2 + n - 1 - \alpha}$$

e

$$\lambda_j \leq \frac{n}{2}H - \sqrt{\frac{n^2}{4}H^2 + n - 1 - \alpha} \,, \quad j \geq 2 \,.$$

Observemos que o quociente H_{n-2}/H_n é invariante com relação a mudança de orientação. Como na prova do teorema anterior, obtemos também desigualdades análogas a (1.14) e (1.15), i. e.,

$$\lambda_1 \geq -\frac{n(n-3)}{2}H + (n-1)\sqrt{\frac{n^2}{4}H^2 + n - 1 - \alpha} \,,$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_j \leq & \left(-\frac{n(n-3)}{2}H + (n-1)\sqrt{\frac{n^2}{4}H^2 + n - 1 - \alpha} \right) \\ & \times \left(\frac{n}{2}H - \sqrt{\frac{n^2}{4}H^2 + n - 1 - \alpha} \right) \\ = & - c(H) \,, \end{aligned}$$

e, do mesmo modo, concluímos que as curvaturas seccionais k_* da aplicação de Gauss η com relação aos planos gerados por e_1 e e_j, $j > 1$, satisfazem

$$k_*(e_1, e_j) = 1 + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_j} \geq \frac{c(H) - 1}{c(H)} \geq \delta > 0 \,, \quad j > 1 \,. \tag{1.21}$$

Por outro lado, temos, além disso, que $k_*(e_i, e_j) > 1$, se $j > i > 1$. Assim, pelo Teorema de Bonnet-Myers, M^n é compacta.

Agora, denotemos por ρ_* a curvatura escalar de $(M^n, \langle\ ,\ \rangle_*)$. Então

$$\begin{aligned} \rho_* &= \sum_{i \neq j} k_*(e_i, e_j) \\ &= \sum_{i \neq j} \left(1 + \frac{1}{\lambda_i \lambda_j}\right) \\ &= n(n-1) + 2 \sum_{i<j} \frac{1}{\lambda_i \lambda_j} \\ &= n(n-1)\left(1 + \frac{H_{n-2}}{H_n}\right) \\ &= n(n-1)(1+c) \,. \end{aligned}$$

Concluímos, então, que $\eta(M^n)$ é uma hypersuperfície compacta de S^{n+1}, com curvaturas seccionais positivas e curvatura escalar normalizada constante maior ou igual a 1. Podemos aplicar o Teorema 2 de S. Cheng e S. Yau [13] para concluir que $\eta(M^n)$ é totalmente umbílica ou é o produto de duas subvariedades totalmente umbílicas de curvaturas seccionais constantes. A primeira possibilidade não pode ocorrer porque as curvaturas principais não têm o mesmo sinal. A segunda também não pode ocorrer, pois, caso contrário, existiriam planos com curvatura seccional nula. Isto completa a prova da primeira parte do teorema.

Suponhamos, agora, M^n compacta e $\sup \mathrm{Ric} = \inf f(H)$. De forma semelhante à prova do Teorema 1.4, concluímos que $k_*(e_1, e_j) \geq 0$, para todo $j > 1$, uma vez que, $\alpha \leq f(\alpha)$ e $k_*(e_i, e_j) > 1$, para $j > i > 1$. Visto que $\rho_* = n(n-1)(1+c)$, podemos aplicar novamente o teorema sobrecitado de S. Cheng e S. Yau [13], como anteriormente. Observemos que $\eta(M^n)$ não pode ser totalmente umbílica pelo mesmo motivo que antes. Porém, a outra possibilidade pode ocorrer, isto é, $\eta(M^n)$ é um toro de curvatura média constante em S^{n+1}. Segue que as curvaturas principais $1/\lambda_i$ de η são constantes. Visto que $\lambda_1 \lambda_j \leq 0$, para $j > 1$, temos que $\eta(M^n)$ é um toro $S^{n-1}(r_0) \times S^1(\sqrt{1 - r_0{}^2})$. Agora temos $k_*(e_1, e_j) = 0$, quando $j > 1$, o que implica $\lambda_j = -1/\lambda_1$, $j > 1$. Consequentemente, φ tem duas curvaturas principais distintas e constantes com multiplicidades 1 e $n-1$. Logo, H é constante e $\varphi(M^n)$ é um $H(r)$-toro $S^{n-1}(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2})$. Como $\sup \mathrm{Ric} = f(H)$, temos $r^2 \geq (n-1)/n$. Isto completa a prova do teorema. $\square$

A seguir vamos provar um teorema que generaliza um resultado obtido por T. Hasanis e T. Vlachos [19] para hipersuperfícies mínimas de S^{n+1}. Entretanto, não exigiremos nenhuma hipótese sobre a curvatura média da hipersuperfície considerada.

Teorema 1.6. *Sejam M^n, $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana compacta e orientada de dimensão n, e $\varphi : M^n \to S^{n+1}$ uma imersão isométrica. Suponhamos que φ tem duas curvaturas principais distintas λ e μ, com multiplicidades 1 e $n-1$, respectivamente, e que o quadrado da norma da sua segunda forma fundamental S satisfaz $S \geq S(H)$, onde*

$$S(H) = n + \frac{n^3}{2(n-1)}H^2 + \frac{n(n-2)}{2(n-1)}\sqrt{n^2H^4 + 4(n-1)H^2}\,.$$

Então, H é constante, $S = S(H)$ e

$$\varphi(M^n) = S^{n-1}(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2})\,, \quad r^2 \geq \frac{n-1}{n}\,.$$

Prova. Temos que $\lambda \neq 0$ e $\mu \neq 0$, caso contrário as igualdades

$$\lambda + (n-1)\mu = nH \tag{1.22}$$

e

$$S = \lambda^2 + (n-1)\mu^2 \tag{1.23}$$

implicariam $S = \frac{n^2}{n-1}H^2$, se $\lambda = 0$, ou $S = n^2H^2$, se $\mu = 0$. Em ambos os casos, teríamos $S < S(H)$, e, portanto, uma contradição. Logo, o operador de Weingarten de φ é não singular. Consequentemente, a aplicação de Gauss η de φ está bem definida e $\langle\ ,\ \rangle_*$ é uma métrica em M^n. Vamos escrever

$$S(H) = \frac{n}{n-1}\{n - 1 + \frac{n^2}{2}H^2 + \frac{n-2}{2}a(H)\}\,,$$

onde $a(H) = \sqrt{n^2H^4 + 4(n-1)H^2}$. De (1.22) e (1.23) deduzimos que

$$S = \frac{n}{n-1}\{\lambda^2 - 2H\lambda + nH^2\}\,,$$

e, visto que $S \geq S(H)$, temos

$$\lambda^2 - 2H\lambda + nH^2 \geq n - 1 + \frac{n^2}{2}H^2 + \frac{n-2}{2}a(H)\,,$$

que podemos reescrever como

$$(\lambda - H)^2 \geq b(H)^2 \,, \tag{1.24}$$

onde

$$b(H) = \sqrt{n - 1 + \frac{n^2 - 2n + 2}{2} H^2 + \frac{n-2}{2} a(H)} \,.$$

Assim, por (1.24), temos

$$\lambda \geq H + b(H) \quad \text{ou} \quad \lambda \leq H - b(H) \,.$$

É fácil verificar que, a menos de uma troca de orientação, podemos assumir que $\lambda \geq H + b(H)$, o que implica, usando (1.22), que $\mu \leq H - \frac{1}{n-1} b(H)$. Observemos que $H + b(H) > 0$, enquanto que $H - \frac{1}{n-1} b(H) < 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \lambda\mu &\leq (H + b(H))(H - \frac{1}{n-1} b(H)) \\ &= H^2 + \frac{n-2}{n-1} H b(H) - \frac{1}{n-1} b(H)^2 \\ &= -d(H) \,, \end{aligned}$$

onde

$$d(H) = \frac{1}{n-1} b(H)^2 - \frac{n-2}{n-1} H b(H) - H^2 > 0 \,.$$

Consequentemente, as curvaturas seccionais de η com relação aos planos gerados por e_1 e e_j, $j > 1$, satisfazem

$$k_*(e_1, e_j) = 1 + \frac{1}{\lambda\mu} \geq 1 - \frac{1}{d(H)} = \frac{d(H) - 1}{d(H)} \,. \tag{1.25}$$

Por um cálculo direto verifica-se que $d(H) - 1 \geq 0$ e, portanto, $k_*(e_1, e_j)$ é não negativa, para $j > 1$. Por outro lado, temos $k_*(e_i, e_j) = 1 + 1/\mu^2 > 1$, para $j > i > 1$. Consequentemente, $\mathrm{Ric}_* \geq 0$. Pelos mesmos argumentos utilizados na prova do Teorema 1.4, a compacidade de M e o fato de que η tem duas curvaturas principais distintas de multiplicidades 1 e $n-1$ implicam $\pi_1(M)$ infinito. Procedendo-se ainda como no final da prova do Teorema 1.4, concluímos que H é constante e que $\varphi(M^n)$ é isométrico a um $H(r)$-toro $S^{n-1}(r) \times S^1(\sqrt{1 - r^2})$. Conforme a Subsecção 1.2.1, se $r^2 < (n-1)/n$, então

$$S = n + \frac{n^3}{2(n-1)} H^2 - \frac{n(n-2)}{2(n-1)} \sqrt{n^2 H^4 + 4(n-1) H^2} < S(H) \,.$$

Logo, $r^2 \geq (n-1)/n$ e $S = S(H)$. Isto conclui a prova do teorema. $\square$

Capítulo 2

Hipersuperfícies Isoespectrais em Esferas Euclidianas

2.1 Introdução

O objetivo principal deste capítulo é aplicar a fórmula da expansão do núcleo do calor de Minakshisundaram-Pleijel para caracterizarmos hipersuperfícies compactas da esfera Euclidiana unitária através dos espectros do Laplaciano das p-formas, para alguns valores de p. A fim de enunciar o teorema principal deste capítulo, vamos estabelecer algumas notações.

Para uma variedade Riemanniana M^n compacta e sem bordo, de dimensão n, denotaremos o espectro do Laplaciano das p-formas por

$$\mathrm{Spec}^p(M) := \{0 \leq \lambda_0^p \leq \lambda_1^p \leq \ldots \uparrow +\infty\}, \quad p = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Para uma hipersuperfície imersa $M \hookrightarrow S^{n+1}$, denotaremos por k_i, $i = 1, ..., n$, as curvaturas principais. Desse modo, as funções simétricas de k_i são definidas por

$$\sigma_m = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_m=1 \\ i_1<\cdots<i_m}}^{n} k_{i_1} \ldots k_{i_m}\,,$$

com $m = 1, ..., n$. O quadrado da norma da segunda forma fundamental é dado por

$$S = \sum_{i=1}^{n} k_i^2\,.$$

Finalmente, dv representa o elemento de volume de M.

Estamos, então, em condições de apresentar o principal teorema deste capítulo:

Teorema 2.1. *Sejam $M, M_0 \hookrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 3$, hipersuperfícies fechadas e orientadas de S^{n+1} com curvaturas médias H e H_0, e curvaturas escalares ρ e ρ_0, respectivamente. Exijamos que uma das curvaturas H ou H_0 é não identicamente nula e que ρ_0 é constante. Suponhamos, além disso, que*

(i) $\mathrm{Spec}^p(M) = \mathrm{Spec}^p(M_0)$, $\forall p \in \{0, 1\}$, *se* $n = 3$;

(ii) $\mathrm{Spec}^p(M) = \mathrm{Spec}^p(M_0)$, $\forall p \in \{0, 1, 2\}$, *se* $n \geq 4$.

Então $\rho = \rho_0$, isto é, M tem a mesma curvatura escalar, constante, de M_0. Além disso, valem as seguintes igualdades integrais:

$$\int_M H\sigma_3 \mathrm{d}v = \int_{M_0} H_0 \sigma_3^0 \mathrm{d}v_0 \,, \quad se \quad n \geq 3\,, \tag{2.1}$$

$$\int_M \sigma_4 \mathrm{d}v = \int_{M_0} \sigma_4^0 \mathrm{d}v_0 \,, \quad se \quad n \geq 4\,,$$

onde σ_m^0 e $\mathrm{d}v_0$ denotam os valores σ_m e $\mathrm{d}v$ correspondentes a M_0, respectivamente. Em particular, se S_0 denota o quadrado da norma da segunda forma fundamental de M_0, temos que

$$n^2H^2 - S = n^2H_0^2 - S_0\,. \tag{2.2}$$

Uma conseqüência dos cálculos na prova do teorema acima é o seguinte resultado com respeito ao caso $H = H_0 = 0$, cuja prova segue de técnicas similares apresentadas antes por Q. Ding em seu trabalho [17].

Teorema 2.2. *Sejam $M, M_0 \hookrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 3$, hipersuperfícies mínimas fechadas e orientáveis de S^{n+1} cujas curvaturas escalares são ρ e ρ_0, respectivamente, com ρ_0 constante. Suponhamos que*

(i) $\mathrm{Spec}^p(M) = \mathrm{Spec}^p(M_0)$, *para algum* $p \in \{0, 1, 2, 3\}$, *se* $n = 3$;

(ii) $\mathrm{Spec}^p(M) = \mathrm{Spec}^p(M_0)$, $\forall p \in \{0, 1\}$, *se* $n \geq 4$.

Então $\rho = \rho_0$. Além disso, para $n \geq 4$, temos

$$\int_M \sigma_4 \mathrm{d}v = \int_{M_0} \sigma_4^0 \mathrm{d}v_0\,.$$

Na seção seguinte, apresentaremos alguns pré-requisitos para a prova do Teorema 2.1 e na última seção deste capítulo provaremos alguns resultados decorrentes deste teorema e do Teorema 2.2.

2.2 Preliminares

Seja $M^n \subset S^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada com curvatura média H. Vamos escolher um referencial local ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Seja $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ o co-referencial dual correspondente. Consideremos o tensor segunda forma fundamental

$$h = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}\omega_i\omega_j .$$

Sejam R e $\widetilde{R}$, respectivamente, os tensores de curvatura e curvatura de Ricci de M e denotemos por R_{ijkl} e $\widetilde{R}_{ij}$, $i, j, k, l = 1, \ldots, n$, suas respectivas componentes com respeito ao referencial escolhido. Se escolhermos $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de modo que $h_{ij} = k_i\delta_{ij}$, então

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i ,$$

$$R_{ijkl} = (1 + k_ik_j)(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) , \tag{2.3}$$

$$\widetilde{R}_{ij} = [(n - 1) + nHk_i - k_ik_j]\delta_{ij} . \tag{2.4}$$

Sejam ρ e S, respectivamente, a curvatura escalar de M e o quadrado da norma da segunda forma fundamental h. A fórmula de Gauss assegura que

$$\rho = n(n-1) + n^2H^2 - S \tag{2.5}$$

e, utilizando (2.3) e (2.4), obtemos

$$|R|^2 = 2S^2 - 2f_4 + 4n^2H^2 - 4S + 2n(n-1) , \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} |\widetilde{R}|^2 &= n^2H^2S + f_4 + n(n-1)^2 - 2nHf_3 + \\ &\quad + 2n^2(n-1)H^2 - 2(n-1)S , \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde

$$f_m = \sum_{i=1}^{n} k_i^m .$$

As expressões de f_m podem ser calculadas usando-se as fórmulas (veja [33], p. 101)

$$\begin{aligned} &f_m - f_{m-1}\sigma_1 + f_{m-2}\sigma_2 - \cdots + \\ &\quad + (-1)^{m-1}f_1\sigma_{m-1} + (-1)^m m\sigma_m = 0, \quad \text{para } m \leq n , \end{aligned}$$

$$f_m - f_{m-1}\sigma_1 + \cdots + (-1)^n f_{m-n}\sigma_n = 0, \quad \text{para } m > n\,.$$

Quando $n = 3$, temos

$$f_3 = \frac{9}{2}HS - \frac{27}{2}H^3 + 3\sigma_3\,, \tag{2.8}$$

$$f_4 = \frac{1}{2}S^2 + 9H^2S - \frac{81}{2}H^4 + 12H\sigma_3\,,$$

e para $n \geq 4$,

$$f_3 = \frac{3n}{2}HS - \frac{n^3}{2}H^3 + 3\sigma_3\,, \tag{2.9}$$

$$f_4 = \frac{1}{2}S^2 + n^2H^2S - \frac{n^4}{2}H^4 + 4nH\sigma_3 - 4\sigma_4\,.$$

Utilizaremos nas demonstrações dos Teoremas 2.4 e 2.5 da última secção, a fórmula de Simons para M quando H é constante, ou seja,

$$\frac{1}{2}\Delta S = |\nabla h|^2 + S(n - S) - n^2H^2 + nHf_3\,. \tag{2.10}$$

A compacidade de M nos permite utilizar a fórmula da expansão assintótica do núcleo do calor de Minakshisundaram-Pleijel e escrever, para cada $p \in \{0, 1, ..., n\}$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} e^{-(\lambda_i^p)t} \sim (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}(a_{0,n}^p + a_{1,n}^p t + a_{2,n}^p t^2 + \ldots), \quad t \to 0^+\,, \tag{2.11}$$

onde

$$a_{0,n}^p = \binom{n}{p}\mathrm{vol}(M)\,, \qquad a_{1,n}^p = \left[\frac{1}{6}\binom{n}{p} - \binom{n-2}{p-1}\right]\int_M \rho \mathrm{d}v\,,$$

$$a_{2,n}^p = \int_M (E_n^p\rho^2 + F_n^p|\widetilde{R}|^2 + G_n^p|R|^2)\,\mathrm{d}v\,,$$

e

$$E_n^p = \frac{1}{72}\binom{n}{p} - \frac{1}{6}\binom{n-2}{p-1} + \frac{1}{2}\binom{n-4}{p-2}$$

$$F_n^p = -\frac{1}{180}\binom{n}{p} + \frac{1}{2}\binom{n-2}{p-1} - 2\binom{n-4}{p-2}$$

$$G_n^p = \frac{1}{180}\binom{n}{p} - \frac{1}{12}\binom{n-2}{p-1} + \frac{1}{2}\binom{n-4}{p-2}\,,$$

onde $\mathrm{d}v$ e $\mathrm{vol}(M)$ representam, respectivamente, a forma de volume e o volume de M, com relação à métrica Riemanniana induzida de S^{n+1}. Ressaltemos que estes coeficientes foram calculados por U. K. Patodi em [29]. Convém observar que estamos considerando $\binom{l}{q} = 0$ se $l < 0$, $q < 0$ ou $l < q$.

2.3 Prova do teorema principal

Consideraremos a mesma notação para os dados geométricos de M como na secção anterior. Os dados correspondentes de M_0, serão discriminados por um índice "0".

Prova do Teorema 2.1. Visto que $\mathrm{Spec}^p(M) = \mathrm{Spec}^p(M_0)$, $\forall p \in \{0,1\}$, se $n = 3$, ou para $p \in \{0,1,2\}$, se $n \geq 4$, temos que as fórmulas da expansão assintótica do núcleo do calor de M e M_0 coincidem para tais valores de p. Assim, as quantidades $a^p_{0,n}$, $a^p_{1,n}$ e $a^p_{2,n}$ para M e M_0 são iguais e, portanto, podemos escrever

$$\mathrm{vol}(M) = \mathrm{vol}(M_0)\,, \tag{2.12}$$

$$\int_M \rho \mathrm{d}v = \int_{M_0} \rho_0 \mathrm{d}v_0 \tag{2.13}$$

e

$$\int_M (E^p_n\,\rho^2 + F^p_n\,|\widetilde{R}|^2 + G^p_n\,|R|^2)\,\mathrm{d}v = \int_{M_0} (E^p_n\,\rho_0^2 + F^p_n\,|\widetilde{R}_0|^2 + G^p_n\,|R_0|^2)\,\mathrm{d}v_0\,. \tag{2.14}$$

Consequentemente, por (2.5) e (2.13), obtemos

$$\int_M [n(n-1) + n^2H^2 - S]\mathrm{d}v = \int_{M_0} [n(n-1) + n^2H_0^2 - S_0]\mathrm{d}v_0$$

Uma vez que

$$\int_M \mathrm{d}v = \mathrm{vol}(M) = \mathrm{vol}(M_0) = \int_{M_0} \mathrm{d}v_0\,,$$

concluímos que

$$\int_M (n^2H^2 - S)\mathrm{d}v = \int_{M_0} (n^2H_0^2 - S_0)\mathrm{d}v_0\,. \tag{2.15}$$

Inicialmente, consideremos o caso $n \geq 4$. Substituindo as expressões de f_3 e f_4 em (2.6) e (2.7), temos que

$$\begin{aligned} |R|^2 &= (n^2H^2 - S)^2 + 4(n^2H^2 - S) \\ &\quad -8nH\sigma_3 + 2n(n-1) + 8\sigma_4\,, \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} |\widetilde{R}|^2 &= \frac{1}{2}(n^2H^2 - S)^2 + 2(n-1)(n^2H^2 - S) \\ &\quad -2nH\sigma_3 + n(n-1)^2 - 4\sigma_4\,. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Portanto, para $p \in \{0,1,2\}$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_M (E_n^p \rho^2 + F_n^p |\widetilde{R}|^2 + G_n^p |R|^2)\,\mathrm{d}v = \\
&\quad E_n^p \int_M [(n^2H^2 - S)^2 + 2n(n-1)(n^2H^2 - S) + n^2(n-1)^2]\mathrm{d}v \\
&\quad + F_n^p \int_M [\frac{1}{2}(n^2H^2 - S)^2 + 2(n-1)(n^2H^2 - S) - 2nH\sigma_3 \\
&\qquad\qquad + n(n-1)^2 - 4\sigma_4]\mathrm{d}v \\
&\quad + G_n^p \int_M [(n^2H^2 - S)^2 + 4(n^2H^2 - S) - 8nH\sigma_3 \\
&\qquad\qquad + 2n(n-1) + 8\sigma_4]\mathrm{d}v\,.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Analogamente, temos uma identidade similar para M_0. Logo, considerando estas equações sobre a igualdade (2.14) e usando (2.15), derivamos o sistema de equações

$$\alpha_n^p \mathbf{X} + \beta_n^p \mathbf{Y} + \gamma_n^p \mathbf{Z} = 0\,, \quad p = 0,1,2\,,$$

onde

$$\alpha_n^p = (E_n^p + \frac{1}{2}F_n^p + G_n^p), \quad \beta_n^p = -2n(F_n^p + 4G_n^p), \quad \gamma_n^p = -4(F_n^p - 2G_n^p)$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} &:= \int_M (n^2H^2 - S)^2\mathrm{d}v - \int_{M_0} (n^2H_0^2 - S_0)^2\mathrm{d}v_0\,, \\
\mathbf{Y} &:= \int_M H\sigma_3\mathrm{d}v - \int_{M_0} H_0\sigma_3^0\mathrm{d}v_0\,, \\
\mathbf{Z} &:= \int_M \sigma_4\mathrm{d}v - \int_{M_0} \sigma_4^0\mathrm{d}v_0\,.
\end{aligned}$$

Agora, um cálculo direto, utilizando as expressões para E_n^p, F_n^p e G_n^p, implica

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_n^0 & \beta_n^0 & \gamma_n^0 \\ \alpha_n^1 & \beta_n^1 & \gamma_n^1 \\ \alpha_n^2 & \beta_n^2 & \gamma_n^2 \end{pmatrix} \neq 0\,.$$

Donde, concluímos que $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = \mathbf{Z} = 0$. Consequentemente,

$$\int_M (n^2H^2 - S)^2\mathrm{d}v = \int_{M_0} (n^2H_0^2 - S_0)^2\mathrm{d}v_0\,, \tag{2.19}$$

$$\int_M H\sigma_3 \mathrm{d}v = \int_{M_0} H_0\sigma_3^0 \mathrm{d}v_0 \qquad \text{e} \qquad \int_M \sigma_4 \mathrm{d}v = \int_{M_0} \sigma_4^0 \mathrm{d}v_0 \,.$$

Como ρ_0 é constante, temos que $n^2H_0^2 - S_0$ é constante. Então combinando (2.15), (2.19) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} |n^2H_0^2 - S_0|\mathrm{vol}(M_0) &= \left|\int_M (n^2H^2 - S)\mathrm{d}v\right| \\ &\leq \left[\int_M (n^2H^2 - S)^2\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_M \mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= |n^2H_0^2 - S_0|\mathrm{vol}(M_0)\,. \end{aligned}$$

Logo, $n^2H^2 - S = n^2H_0^2 - S_0$, o que é equivalente a $\rho = \rho_0$. Isto conclui a prova do teorema para $n \geq 4$.

No caso $n = 3$, os cálculos são inteiramente análogos. De fato, a fórmula similar a (2.18) é dada por

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_M (E_3^p\rho^2 + F_3^p\,|\widetilde{R}|^2 + G_3^p\,|R|^2)\,\mathrm{d}v = \\ &\qquad E_3^p \int_M [(9H^2 - S)^2 - 12(9H^2 - S) + 36]\mathrm{d}v \\ &\qquad + F_3^p \int_M [\frac{1}{2}(9H^2 - S)^2 + 4(9H^2 - S) - 6H\sigma_3 + 12]\mathrm{d}v \\ &\qquad + G_3^p \int_M [(9H^2 - S)^2 + 4(9H^2 - S) - 24H\sigma_3 + 12]\mathrm{d}v\,, \end{aligned} \tag{2.20}$$

cujo sistema de equações correspondente é

$$\alpha_3^p\tilde{\mathbf{X}} + \beta_3^p\tilde{\mathbf{Y}} = 0\,, \quad p = 0, 1\,,$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{X}} &:= \int_M (9H^2 - S)^2\mathrm{d}v - \int_{M_0} (9H_0^2 - S_0)^2\mathrm{d}v_0\,, \\ \tilde{\mathbf{Y}} &:= \int_M H\sigma_3\mathrm{d}v - \int_{M_0} H_0\sigma_3^0\mathrm{d}v_0\,. \end{aligned}$$

É facilmente verificado que

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_3^0 & \beta_3^0 \\ \alpha_3^1 & \beta_3^0 \end{pmatrix} \neq 0\,.$$

Assim, procedendo como no caso $n \geq 4$, concluímos a prova do teorema para n=3. Consequentemente o teorema está provado. □

2.4 Aplicações do teorema principal

Seja $\mathcal{F}_H$ o conjunto de todas as hipersuperfícies isoparamétricas em S^4 com curvatura média H. E. Cartan provou em [10] que se $M \in \mathcal{F}_H$, então M é totalmente umbílica, um $H(r)$-toro $M^r_{3-k,k}(H)$, ou a hipersuperfície de Cartan (ou seja, a hipersuperfície isoparamétrica obtida da hipersuperfície mínima de Cartan). Utilizando o Teorema 2.1, mostraremos que prescindimos da hipótese $H = H_0$ no teorema provado por J. Wang [34] acima mencionado. Mais precisamente, provaremos o seguinte resultado:

Teorema 2.3. *Sejam $M^3 \hookrightarrow S^4$ uma hipersuperfície fechada e orientada com curvatura média H constante em S^4, e $M_0 \in \mathcal{F}_{H_0}$. Se* $\mathrm{Spec}^p(M) = \mathrm{Spec}^p(M_0)$, *para $p \in \{0, 1\}$, então $H = H_0$ e M é isométrica a M_0.*

Prova. Segue do Teorema 2.1 que $\rho = \rho_0$ e que (2.2) vale, i. e., $9H^2 - S = 9H_0^2 - S_0$. Visto que H é constante, S é também constante. Podemos, então, usar os resultados de S. Almeida, F. Brito [2] e S. Chang [12] para concluir que M é isoparamétrica e pertence a $\mathcal{F}_H$. Em particular, σ_3 é também constante. Considerando (2.1) e (2.12), concluímos que

$$H\sigma_3 = H_0\sigma_3^0. \tag{2.21}$$

Vamos analisar separadamente três casos:

1º Caso) M_0 é uma hipersuperfície de Cartan.

É conhecido que $S_0 = 6 + 9H_0^2$ e $\sigma_3^0 = -3H_0$ (veja [10]). Assim, usando (2.2), temos que $S = 6 + 9H^2$ e, por Cartan [10], M é uma hipersuperfície de Cartan. Pela igualdade (2.21), obtemos $-3H^2 = H\sigma_3 = H_0\sigma_3^0 = -3H_0^2$, isto é, $H = \pm H_0$. Usamos então o mesmo teorema de Cartan [10] para concluir que $M = M_0$.

2º Caso) M_0 é totalmente umbílica.

Visto que $S_0 = 3H_0^2$ e $\sigma_3^0 = H_0^3$, as expressões (2.2) e (2.21) produzem

$$S = 9H^2 - 6H_0^2\,, \tag{2.22}$$

$$H\sigma_3 = H_0^4\,. \tag{2.23}$$

Pelo 1º Caso , segue que M não pode ser uma hipersuperfície de Cartan, pois, de outro modo, M_0 também o é. Como $M \in \mathcal{F}_H$, M é um $H(r)$-toro

$M_{2,1}^r(H)$ ou totalmente umbílica. Suponha por absurdo que $M = M_{2,1}^r(H)$, para algum r. Então as curvaturas principais de M são

$$k_1 = k_2 = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}, \qquad k_3 = -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}},$$

ou os simétricos destes valores para a orientação oposta. Por outro lado, podemos ver facilmente que, independentemente da escolha da orientação, H e S satisfazem

$$H^2 = \frac{9r^4 - 12r^2 + 4}{9r^2(1-r^2)}, \qquad S = \frac{3r^4 - 4r^2 + 2}{r^2(1-r^2)}, \tag{2.24}$$

$$H\sigma_3 = \frac{3r^2 - 2}{3r^2}. \tag{2.25}$$

Assim, usando (2.22) e (2.24), concluímos que $r^2 = \frac{1}{3(H_0^2+1)} < \frac{2}{3}$. Logo, (2.25) implica que $H\sigma_3 < 0$. Contudo, isto é uma contradição com (2.23). Segue que M é totalmente umbílica e $S = 3H^2 = 9H^2 - 6H_0^2$. Portanto, $H = \pm H_0$ e similarmente $M = M_0$.

3º Caso) M_0 é um $H_0(r_0)$-toro.

Suponhamos que $M_0 = M_{2,1}^{r_0}(H_0)$. Pelos 1º e 2º casos, M não é totalmente umbílica e não é uma hipersuperfície de Cartan. Assim, M é um $H(r)$-toro $M_{2,1}^r(H)$. Segue de (2.25) que

$$H\sigma_3 = \frac{3r^2 - 2}{3r^2} \quad \text{e} \quad H_0\sigma_3^0 = \frac{3r_0^2 - 2}{3r_0^2}.$$

Como H é constante, (2.1) e (2.12) implicam $H\sigma_3 = H_0\sigma_3^0$, donde concluímos que $r = r_0$. Isto finaliza a prova do teorema. $\square$

Para dimensão $n \geq 4$, derivamos também do Teorema 2.1 o seguinte resultado:

Teorema 2.4. *Seja $M^n \hookrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 4$, uma hipersuperfície fechada e orientada em S^{n+1} com a mesma curvatura média constante H_0 de uma hipersuperfície isoparamétrica M_0 em S^{n+1}. Se* $\mathrm{Spec}^p(M) = \mathrm{Spec}^p(M_0)$, *$\forall p \in \{0,1,2\}$, então M é também isoparamétrica. Além disso,*

(i) Se M_0 é totalmente umbílica ou o $H_0(r)$-toro $M_{n-1,1}^r(H_0)$ com $r^2 \leq \frac{n-1}{n}$, então $M = M_0$.

(ii) Quando $n = 4$, as curvaturas principais de M e M_0 coincidem.

Prova. Primeiro, vamos considerar quando $H_0 \neq 0$. Usando o Teorema 2.1 com $n \geq 4$ e $H = H_0$ obtemos que $S = S_0$,

$$\int_M \sigma_3 \mathrm{d}v = \int_{M_0} \sigma_3^0 \mathrm{d}v_0 , \tag{2.26}$$

$$\int_M \sigma_4 \mathrm{d}v = \int_{M_0} \sigma_4^0 \mathrm{d}v_0 . \tag{2.27}$$

Agora utilizaremos a fórmula (2.9) para escrever

$$f_3 = \frac{3n}{2} H_0 S_0 - \frac{n^3}{2} H_0^3 + 3\sigma_3 ,$$

$$f_3^0 = \frac{3n}{2} H_0 S_0 - \frac{n^3}{2} H_0^3 + 3\sigma_3^0 .$$

De (2.26) e do fato que $\mathrm{vol}(M) = \mathrm{vol}(M_0)$, deduzimos que

$$\int_M f_3 \mathrm{d}v = \int_{M_0} f_3^0 \mathrm{d}v_0 . \tag{2.28}$$

Como $H = H_0$, $S = S_0$ e $\nabla h_0 = 0$ (h_{ij}^0 são constantes, $i, j = 1, \ldots, n$) as respectivas fórmulas de Simons (2.10) para M e M_0 são

$$0 = \frac{1}{2} \Delta S_0 = |\nabla h|^2 + S_0(n - S_0) - n^2 H_0^2 + n H_0 f_3 ,$$

$$0 = \frac{1}{2} \Delta S_0 = S_0(n - S_0) - n^2 H_0^2 + n H_0 f_3^0 ,$$

donde inferimos que

$$\int_M |\nabla h|^2 = n H_0 \left(\int_M f_3 \mathrm{d}v - \int_{M_0} f_3^0 \mathrm{d}v_0 \right) = 0 .$$

Quando $H_0 = 0$, o Teorema 2.2 garante que $S = S_0$ e as fórmulas de Simons para M e M_0 ainda implicam que $\int_M |\nabla h|^2 = 0$. Portanto, qualquer que seja o valor de H_0, temos $\nabla h = 0$, ou seja, $h_{ijk} = 0$, para $i, j, k = 1, \ldots, n$. Visto que M é uma hipersuperfície, em S. S. Chern, M. do Carmo e S. Kobayashi ([14], fórmula (2.10)) demonstra-se que

$$\sum_{k=1}^{n} h_{ijk} \omega_k = \mathrm{d}h_{ij} - \sum_{l=1}^{n} h_{il} \omega_{jl} - \sum_{l=1}^{n} h_{lj} \omega_{il} .$$

Como $h_{ij} = k_i\delta_{ij}$ e $h_{ijk} = 0$, $i, j, k = 1, \ldots, n$, temos

$$0 = dh_{ij} + (k_i - k_j)\omega_{ij}\,,$$

e pondo $i = j$, concluímos que $dk_i = dh_{ii} = 0$. Consequentemente, k_i é constante, $i = 1, \ldots, n$, e M é isoparamétrica.

Por outro lado, o Teorema 1.5 de H. Alencar e M. do Carmo [1] garante que as hipersuperfícies totalmente umbílicas em S^{n+1} e os $H(r)$-toros $M^r_{n-1,1}(H)$, com $r^2 \leq (n-1)/n$, são caracterizados pela curvatura média constante e o quadrado da norma da segunda forma fundamental. Logo, visto que $H = H_0$ e $S = S_0$, podemos aplicar o teorema de H. Alencar e M. do Carmo para concluir (i).

Vamos supor, agora, que $n = 4$ para provar (ii). O fato que M é isoparamétrica implica σ_3 e σ_4 constantes. Pelas igualdades integrais (2.26), (2.27) e do fato que $\mathrm{vol}(M) = \mathrm{vol}(M_0)$, obtemos $\sigma_3 = \sigma_3^0$ e $\sigma_4 = \sigma_4^0$. Por outro lado,

$$\sigma_1 = nH = nH_0 = \sigma_1^0, \qquad \sigma_2 = \frac{16H^2 - S}{2} = \frac{16H_0^2 - S_0}{2} = \sigma_2^0\,.$$

Consequentemente, as quatro funções simétricas para M e M_0 são iguais, donde deduzimos que $k_i = k_i^0$, para $i = 1, \ldots, 4$, o que conclui (ii) e, consequentemente, a prova do Teorema 2.4. □

Teorema 2.5. *Sejam $M \hookrightarrow S^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada de S^{n+1} com curvatura seccional não-negativa e M_0 uma hipersuperfície de S^{n+1} totalmente umbílica ou um $H_0(r_0)$-toro $M^{r_0}_{n-1,1}(H_0)$ com $r_0 \leq \frac{n-2}{n}$. Suponhamos que*

(i) $\mathrm{Spec}^p(M) = \mathrm{Spec}^p(M_0)$, $\forall p \in \{0, 1\}$, *se* $n = 3$ *;*

(ii) $\mathrm{Spec}^p(M) = \mathrm{Spec}^p(M_0)$, $\forall p \in \{0, 1, 2\}$, *se* $n \geq 4$.

Então $M = M_0$.

Prova. Pelo Teorema 2.1, temos que $\rho = \rho_0$ e valem (2.1) e (2.2). Se M_0 é totalmente umbílica, então $\rho_0 = n(n-1)(H_0^2 + 1)$. Se $M_0 = M^{r_0}_{n-1,1}(H_0)$, temos pelas fórmulas (1.5) e (1.6) que

$$\rho_0 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ric}(e_i) = \frac{(n-1)(n-2)}{r_0^2}\,.$$

Em ambos os casos, segue que $\rho_0 \geq n(n-1)$, isto é, a curvatura escalar normalizada de M_0, e portanto de M, é constante e maior ou igual a 1. Este fato e a hipótese de M ter curvatura seccional não-negativa implicam, pelo Teorema 2 de S. Cheng e S. Yau [13], que M é totalmente umbílica ou um produto de subvariedades totalmente umbílicas de curvaturas seccionais constantes. Neste último caso, M é um $H(r)$-toro. Assim, H, S e σ_3 são constantes, e $\nabla h = 0$. Como na prova do Teorema 2.1, temos que $\mathrm{vol}(M) = \mathrm{vol}(M_0)$, e por (2.1), segue que $H\sigma_3 = H_0\sigma_3^0$. Agora, notemos que as fórmulas de Simons (2.10) para M e M_0 são dadas por

$$0 = S(n-S) - n^2H^2 + nHf_3$$

e

$$0 = S_0(n-S_0) - n^2H_0^2 + nH_0f_3^0\ .$$

Usando as relações (2.8) e (2.9) para M e M_0, podemos reescrever estas fórmulas como

$$0 = S(n-S) - n^2H^2 + \frac{3}{2}n^2H^2S - \frac{1}{2}n^4H^4 + 3nH\sigma_3$$

e

$$0 = S_0(n-S_0) - n^2H_0^2 + \frac{3}{2}n^2H_0^2S_0 - \frac{1}{2}n^4H_0^4 + 3nH_0\sigma_3^0\ .$$

Combinando estas duas últimas fórmulas, usando a relação (2.2) e o fato que $H\sigma_3 = H\sigma_3^0$, concluímos que $H = H_0$. Recorrendo novamente a (2.2), temos que $S = S_0$. Agora, utilizamos o Teorema 1.5 de H. Alencar e M. do Carmo [1], anteriormente mencionado, para concluir a prova do teorema. $\square$

Capítulo 3

Aplicações da Fórmula de Bochner-Lichnerowicz para Hipersuperfícies

3.1 Introdução

Neste capítulo, aplicaremos a fórmula de Bochner-Lichnerowicz para obter estimativas para a norma da segunda forma fundamental de uma hipersuperfície mínima compacta da esfera Euclidiana unitária em função do primeiro autovalor do Laplaciano, as quais melhoram a estimativa obtida por P. F. Leung [22] no Teorema 3 do seu trabalho, bem como a estimativa obtida recentemente por A. Barros [5]. Obteremos, também, uma estimativa para o primeiro autovalor do Laplaciano de uma hipersuperfície fechada e mergulhada de uma variedade Riemanniana compacta, cuja curvatura de Ricci é limitada inferiormente por uma constante positiva, generalizando o resultado obtido em [6].

3.2 Preliminares

Para uma função diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$ de uma variedade Riemanniana M na reta $\mathbb{R}$, vale a fórmula de Bochner-Lichnerowicz

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) = \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + |\mathrm{Hess} f|^2, \tag{3.1}$$

onde Hess denota a forma Hessiana, Ric o tensor de Ricci de M, e a norma de um operador T considerada aqui é a Euclidiana, que é dada por

$|T|^2 = \text{tr}(TT^*)$. Para a prova desta fórmula, veja [7] ou [30].

Seja f uma autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1 do Laplaciano de M, isto é, $\triangle f + \lambda_1 f = 0$. Vamos agora obter uma estimativa da norma da forma Hessiana em função de λ_1, a fim de empregá-la na fórmula (3.1) para os cálculos posteriores. Se I representa o operador identidade sobre TM, temos que para todo $t \in \mathbb{R}$, a seguinte expressão é válida:

$$\begin{aligned} |\text{Hess} f - tfI|^2 &= |\text{Hess} f|^2 - 2tf\triangle f + nt^2 f^2 \\ &= |\text{Hess} f|^2 + (2t\lambda_1 + nt^2) f^2 . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Integrando (3.2) e usando o Teorema de Stokes, obtemos

$$\int_M |\text{Hess} f - tfI|^2 = \int_M |\text{Hess} f|^2 + (2t + \frac{n}{\lambda_1} t^2) \int_M |\nabla f|^2 .$$

Em particular, pondo $t = -\frac{\lambda_1}{n}$, temos

$$\int_M |\text{Hess} f|^2 = \int_M |\text{Hess} f + \frac{\lambda_1}{n} fI|^2 + \frac{\lambda_1}{n} \int_M |\nabla f|^2 . \tag{3.3}$$

Portanto, temos a estimativa

$$\int_M |\text{Hess} f|^2 \geq \frac{\lambda_1}{n} \int_M |\nabla f|^2 . \tag{3.4}$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, M é isométrica a esfera $S^n(\sqrt{\frac{\lambda_1}{n}})$. Veja o Teorema A de M. Obata [27].

Consideremos, agora, Ω^{n+1} uma variedade Riemanniana compacta com bordo $\partial\Omega = M$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Sejam φ a restrição de f a M, ν o normal unitário exterior ao bordo M, B e H, respectivamente, a segunda forma fundamental e a curvatura média de $M \hookrightarrow \Omega$. Denotemos por $\overline{\nabla}$, $\overline{\Delta}$, $\overline{\text{Ric}}$ e $\overline{\text{D}}^2$, o gradiente, o Laplaciano, o tensor de Ricci e a forma Hessiana de Ω, respectivamente. A integração da fórmula de Bochner-Lichnerowicz, junto com o Teorema de Stokes, produz a fórmula de Reilly [15]

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\overline{\Delta} f)^2 &= \int_\Omega |\overline{\text{D}}^2 f|^2 + \int_\Omega \overline{\text{Ric}}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f) + 2 \int_M \frac{\partial f}{\partial \nu} \Delta\varphi \\ &\quad + \int_M B(\nabla\varphi, \nabla\varphi) + n \int_M H\Big(\frac{\partial f}{\partial \nu}\Big)^2 . \end{aligned} \tag{3.5}$$

Demonstraremos, agora, dois lemas que serão utilizados nas demonstrações dos teoremas da próxima secção.

Lema 3.1. *Seja $T : V \to V$ um operador linear simétrico de traço nulo, definido sobre um espaço vetorial de dimensão n. Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base ortonormal que diagonaliza T, isto é, $Te_i = \mu_i e_i$, $i = 1, ..., n$. Se $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ é um vetor em V, seja l o número de componentes não nulas de v. Então*

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 v_i^2 \leq \frac{1}{k_0} |T|^2 |v|^2 ,$$

onde

$$k_0 = \begin{cases} \frac{n}{n-1} , & se \quad l = 1 \\ l , & se \quad l \geq 2 . \end{cases}$$

Prova. Usaremos o método dos multiplicadores de Lagrange para a função

$$F : (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2 ,$$

com os vínculos

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = |T|^2 , \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = |v|^2 , \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$y_1, \ldots, y_l \neq 0 \qquad \text{e} \qquad y_{l+1} = \cdots = y_n = 0 \,, \text{ se } l < n \,.$$

Obtemos, então, o seguinte sistema

$$\begin{cases} x_i y_i^2 &= \alpha x_i + \gamma \\ x_i^2 y_i &= \beta y_i \end{cases} , \qquad i = 1, ..., n . \tag{3.6}$$

Se multiplicarmos as n primeiras equações de (3.6) por x_i, as n últimas por y_i e somarmos, temos que

$$F = \alpha |T|^2 = \beta |v|^2 . \tag{3.7}$$

Assumiremos que $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$, caso contrário, tem-se $F = 0$ por (3.7). Se $l = n$, segue das equações $x_i^2 y_i = \beta y_i$, $i = 1, ..., n$, que $\beta = x_1^2 = ... = x_n^2$, $|T|^2 = n x_1^2 = n\beta$ e, portanto,

$$F = \frac{1}{n} |T|^2 |v|^2 .$$

Supondo $l < n$, do sistema (3.6), inferimos

$$\beta = x_1^2 = \cdots = x_l^2$$

e

$$x_{l+1} = \cdots = x_n = -\frac{\gamma}{\alpha}\,.$$

Quando $l = 1$, temos que $\beta = x_1^2$ e, como $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, segue que

$$x_2 = \ldots = x_n = -\frac{1}{n-1}x_1\,.$$

Se $\gamma = 0$, então $x_n = 0$, o que implica que $x_1 = 0$ e $F = 0$. Caso contrário, temos

$$|T|^2 = x_1^2 + (n-1)x_n^2 = x_1^2 + \frac{1}{n-1}x_1^2 = \frac{n}{n-1}\beta\,.$$

Assim,

$$F = \beta|v|^2 = \frac{n-1}{n}|T|^2|v|^2\,.$$

Vamos supor, agora, $2 \leq l < n$. Neste caso, $|T|^2 = lx_1^2 + (n-l)x_n^2$. Observemos, no entanto, que podemos ter $x_n = 0$ sem que F se anule (como no caso $l = 1$). Temos, então, que $|T|^2 \geq lx_1^2 = l\beta$ e, consequentemente,

$$F \leq \frac{1}{l}|T|^2|v|^2\,.$$

Isto conclui a prova do lema. □

Lema 3.2. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão n e $T : V \to V$ um operador linear não nulo, simétrico e de traço nulo, tal que seu núcleo* $\ker T$ *é não trivial. Seja, ainda, $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base ortonormal que diagonaliza T, isto é, $Te_i = \mu_i e_i$, $i = 1, ..., n$. Se $k = \dim\ker T$, então, dado um vetor não nulo $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$, temos que*

$$\sum_{i=1}^n \mu_i^2 v_i^2 \leq \frac{1}{n-k}|T|^2|v|^2\,.$$

Prova. Sem perda de generalidade podemos supor que $\mu_1 = \ldots = \mu_k = 0$ e $\mu_{k+1}, ..., \mu_n \neq 0$. Como no lema anterior, vamos usar o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar o máximo da função

$$G : (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2\,,$$

com as restrições

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = |v|^2\,, \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = |T|^2\,, \quad \sum_{i=1}^n x_i = 0\,,$$

$$x_1 = \cdots = x_k = 0 \qquad \text{e} \qquad x_{k+1}, \ldots, x_n \neq 0\,.$$

Assim, teremos que encontrar soluções do sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_i y_i^2 & = & \alpha x_i + \gamma \\ x_i^2 y_i & = & \beta y_i \end{array} \right. , \qquad i = 1, ..., n\,. \tag{3.8}$$

Usando o mesmo argumento do lema anterior, multiplicamos as n primeiras equações de (3.8) por x_i, as n últimas por y_i para obter

$$G = \alpha |T|^2 = \beta |v|^2 \tag{3.9}$$

Suporemos que $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$, caso contrário, por (3.9), $G = 0$. Assim, segue de (3.8) e do fato que $x_i = 0$, para $i = 1, ..., k$, que $y_1 = ... = y_k = 0$ e $\gamma = 0$. Consequentemente, temos $x_i y_i^2 = \alpha x_i$, para $i = k+1, ..., n$. Portanto, $y_{k+1}, ..., y_k \neq 0$ e das equações, $x_i^2 y_i = \beta y_i$, $i = k+1, ..., n$, deduzimos que

$$\beta = x_{k+1}^2 = \cdots = x_n^2\,.$$

Logo, $|T|^2 = (n-k)x_n^2 = (n-k)\beta$. Concluímos que

$$G \leq \frac{1}{n-k} |T|^2 |v|^2$$

e o lema está provado. □

3.3 Teoremas

Como nos capítulos anteriores, para uma hipersuperfície M da esfera Euclidiana unitária S^{n+1}, denotaremos ainda por S o quadrado da norma da segunda forma fundamental. O operador de forma associado à segunda forma fundamental será denotado por A.

Teorema 3.3. *Seja M uma hipersuperfície mínima fechada e orientável de S^{n+1} e considere f uma autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1 do Laplaciano de M. Seja $l(p)$ o número de componentes não-nulas de ∇f com relação a um referencial principal $E_p = \{e_1(p), ..., e_n(p)\}$ em $p \in M$. Se $l_0 = \min_{p \in M}\{l(p) \mid \nabla f(p) \neq 0\}$, então*

$$\int_M S|\nabla f|^2 \geq \frac{k_0(n-1)(n-\lambda_1)}{n} \int_M |\nabla f|^2\,,$$

onde

$$k_0 = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{n}{n-1}\,, & se\ l_0 = 1 \\ l_0\,, & se\ l_0 \geq 2\,. \end{array} \right. \tag{3.10}$$

Em particular, se S é constante, temos que $S \geq \frac{k_0(n-1)(n-\lambda_1)}{n}$.

Prova. Dado $p \in M$, sejam k_i, $i = 1, ..., n$, as curvaturas principais de M, em p, segundo o referencial E_p, i.e., $Ae_i = k_i e_i$, $i = 1, ..., n$, em p. A equação de Gauss implica

$$\mathrm{Ric}(e_i, e_j) = 0, \quad i \neq j$$

e

$$\mathrm{Ric}(e_i, e_i) = n - 1 - k_i^2 .$$

Seja f uma autofunção associada ao autovalor λ_1, isto é, $\Delta f + \lambda_1 f = 0$. Escrevendo $\nabla f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$, em p, temos

$$\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) = (n-1)|\nabla f|^2 - \sum_{i=1}^{n} k_i^2 f_i^2 .$$

Assim, usando o Lema 3.1 em cada ponto de M, obtemos a desigualdade

$$\sum_{i=1}^{n} k_i^2 f_i^2 \leq \frac{1}{k_0} S |\nabla f|^2 ,$$

onde k_0 é dado por (3.10). Consequentemente,

$$\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) \geq (n-1)|\nabla f|^2 - \frac{1}{k_0} S |\nabla f|^2 . \tag{3.11}$$

Da fórmula de Bochner-Lichnerowicz (3.1) e do fato que $\Delta f = -\lambda_1 f$ temos que

$$\frac{1}{2}\Delta |\nabla f|^2 = |\mathrm{Hess} f|^2 + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) - \lambda_1 |\nabla f|^2 . \tag{3.12}$$

Logo, integrando (3.12) e usando as estimativas (3.4) e (3.11), segue que

$$0 \geq \frac{\lambda_1}{n} \int_M |\nabla f|^2 + (n-1) \int_M |\nabla f|^2 - \frac{1}{k_0} \int_M S |\nabla f|^2 - \lambda_1 \int_M |\nabla f|^2 .$$

Consequentemente, obtemos

$$\int_M S |\nabla f|^2 \geq \frac{k_0(n-1)(n-\lambda_1)}{n} \int_M |\nabla f|^2 ,$$

o que conclui a prova do teorema. □

Teorema 3.4. *Seja M uma hipersuperfície mínima fechada e orientável de S^{n+1} e considere f uma autofunção do primeiro autovalor λ_1 do Laplaciano de M. Suponha que o núcleo* $\ker A$ *da segunda forma fundamental é não trivial em todo ponto de M. Se $k = \max \dim \ker A$, então*

$$\int_M S|\nabla f|^2 \geq \frac{(n-n_0)(n-1)(n-\lambda_1)}{n}\int_M |\nabla f|^2,$$

onde

$$n_0 = \begin{cases} k\,, & se \quad k \leq n-2 \\ n-2\,, & se \quad k = n-1 \ \ ou \ \ k = n \end{cases}$$

Em particular, se S é constante, temos que $S \geq \frac{(n-n_0)(n-1)(n-\lambda_1)}{n}$.

Prova. Escolhendo-se um referencial ortonormal local em $\{e_1, ..., e_n\}$ em M tal que $Ae_i = k_i e_i$, para $i = 1, ..., n$, temos

$$\mathrm{Ric}(e_i, e_j) = (n-1-k_i^2)\delta_{ij}\,.$$

Seja f uma autofunção associada ao autovalor λ_1, isto é, $\Delta f + \lambda_1 f = 0$. Escrevendo $\nabla f = \sum_{i=1}^n f_i e_i$ e usando o Lema 3.2, prova-se neste caso que

$$\sum_{i=1}^n k_i^2 f_i^2 \leq \frac{1}{n-n_0} S|\nabla f|^2\,.$$

Observemos no entanto que, pela minimalidade de M, nos pontos onde $\dim\ker A = n-1$, tem-se que $A \equiv 0$. É claro que isto também acontece se $\dim\ker A = n$. Desta maneira, garante-se que $n_0 \leq n-2$. Consequentemente,

$$\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) \geq (n-1)|\nabla f|^2 - \frac{1}{n-n_0} S|\nabla f|^2 \tag{3.13}$$

e a prova segue como no teorema anterior. □

Sejam M^n e $\overline{M}^{n+1}$ variedades Riemannianas compactas e orientáveis de modo que M^n é uma hipersuperfície mergulhada de $\overline{M}^{n+1}$. Suponhamos, além disso, que a curvatura de Ricci de $\overline{M}^{n+1}$ é limitada por baixo por uma constante positiva. Neste caso, o primeiro número de Betti de $\overline{M}^{n+1}$ é zero e, pela hipótese de orientabilidade, M^n divide $\overline{M}^{n+1}$ em duas componentes conexas Ω e Ω', tais que $\partial\Omega = \partial\Omega' = M$. Doravante, suponhamos que φ é uma autofunção do primeiro autovalor do Laplaciano de M^n e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é a solução do Problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta f = 0\,, & \text{em } \Omega \\ f = \varphi\,, & \text{em } M\,. \end{cases} \tag{3.14}$$

Nestas condições, podemos estimar o primeiro autovalor λ_1 do Laplaciano de M, conforme o seguinte resultado:

Teorema 3.5. *Seja M^n uma hipersuperfície de dimensão n, mínima, fechada e mergulhada de uma variedade Riemanniana compacta $\overline{M}^{n+1}$, onde M^n e $\overline{M}^{n+1}$ são orientáveis. Suponhamos, além disso, que a curvatura de Ricci de $\overline{M}^{n+1}$ satisfaz $\overline{\mathrm{Ric}} \geq c$, onde c é uma constante positiva. Então*

$$\lambda_1 > \frac{c}{2} + \frac{c}{2}\delta(f)\,, \tag{3.15}$$

onde

$$\delta(f) = \frac{2n\|\,\overline{\nabla} f\,\|_2{}^2 - c(n+1)\|\,f\,\|_2{}^2 - 2n\|\,\overline{\nabla} f\,\|_2{}^2\sqrt{1-\frac{c(n+1)}{n}\frac{\|f\|_2{}^2}{\|\overline{\nabla} f\|_2{}^2}}}{c(n+1)\|\,f\,\|_2{}^2}$$

e $\|\;\;\|_2$ denota a norma em $\mathrm{L}^2(\Omega)$.

Prova. Para $t \neq 0$, consideremos o Problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \overline{\Delta} g &= f\,, & \text{em } \Omega \\ g &= t\varphi\,, & \text{em } M\,, \end{cases}$$

onde f é a solução do problema (3.14).

Utilizando a fórmula de Reilly (3.5) para g e o fato de que $\Delta\varphi + \lambda_1\varphi = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega f^2 &= \int_\Omega |\overline{\mathrm{D}}^2 g|^2 + \int_\Omega \overline{\mathrm{Ric}}(\overline{\nabla} g, \overline{\nabla} g) \\ &\quad - 2t\int_M \varphi\frac{\partial g}{\partial\nu} + t^2\int_M B(\nabla\varphi, \nabla\varphi)\ . \end{aligned} \tag{3.16}$$

Por outro lado, obtemos da Fórmula de Green que

$$\begin{cases} \int_M \varphi\frac{\partial f}{\partial\nu} &= \int_\Omega |\overline{\nabla} f|^2 \\ t\int_M \varphi\frac{\partial f}{\partial\nu} &= \int_\Omega \langle\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} g\rangle \\ \int_M \varphi\frac{\partial g}{\partial\nu} &= \int_\Omega f^2 + \int_\Omega \langle\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} g\rangle\ . \end{cases} \tag{3.17}$$

De (3.17), temos

$$\int_\Omega \langle\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} g\rangle = t\int_\Omega |\overline{\nabla} f|^2\,, \tag{3.18}$$

que, junto com a desigualdade de Cauchy-Schwarz, acarreta

$$\int_\Omega |\overline{\nabla} g|^2 \geq t^2 \int_\Omega |\overline{\nabla} f|^2 . \tag{3.19}$$

Utilizando (3.18) e a terceira identidade de (3.17), obtemos

$$t \int_M \varphi \frac{\partial g}{\partial \nu} = t \int_\Omega f^2 + t^2 \int_\Omega |\overline{\nabla} f|^2 \tag{3.20}$$

Por outro lado, temos

$$\int_\Omega |\overline{D}^2 g|^2 \geq \frac{1}{n+1} \int_\Omega (\overline{\Delta} g)^2 = \frac{1}{n+1} \int_\Omega f^2 . \tag{3.21}$$

A hipótese de $\overline{\mathrm{Ric}} \geq c$ e a fórmula (3.19) fornece

$$\int_\Omega \overline{\mathrm{Ric}}(\overline{\nabla} g, \overline{\nabla} g) \geq c \int_\Omega |\overline{\nabla} g|^2 \geq c t^2 \int_\Omega |\overline{\nabla} f|^2 . \tag{3.22}$$

Trocando-se o domínio Ω por Ω', se necessário, podemos assumir que

$$\int_M B(\nabla \varphi, \nabla \varphi) \geq 0 . \tag{3.23}$$

Utilizamos, agora, (3.20),(3.21),(3.22) e (3.23) na fórmula (3.16) para obter a desigualdade

$$\frac{n}{n+1} \int_\Omega f^2 \geq c t^2 \int_\Omega |\overline{\nabla} f|^2 - 2\lambda_1 \Big(t \int_\Omega f^2 + t^2 \int_\Omega |\overline{\nabla} f|^2 \Big) ,$$

ou, equivalentemente,

$$(2\lambda_1 - c) \| \overline{\nabla} f \|_2{}^2 t^2 + 2\lambda_1 \| f \|_2{}^2 t + \frac{n}{n+1} \| f \|_2{}^2 \geq 0 . \tag{3.24}$$

É claro que, para $t = 0$, esta desigualdade é trivial. Temos, então, um polinômio quadrático em t, não-negativo. Consequentemente, seu discriminante é não-positivo. Isto significa que

$$(2\lambda_1 - c) \geq \frac{n+1}{n} \lambda_1{}^2 \frac{\| f \|_2{}^2}{\| \overline{\nabla} f \|_2{}^2} , \tag{3.25}$$

o que implica (3.15). Isto conclui a prova do teorema. □

Observação. Segue da desigualdade (3.25) que

$$\frac{c(n+1)}{n} \frac{\| f \|_2^2}{\| \nabla f \|_2^2} \leq \frac{(2\lambda_1 - c)c}{\lambda_1^2} \leq 1$$

e, portanto, $\delta(f)$ está bem definido. Observe, também, que $0 \leq \delta(f) \leq 1$ e, além disso, $\delta(f) = 1$ se, e somente se,

$$\frac{c(n+1)}{n} \frac{\| f \|_2^2}{\| \nabla f \|_2^2} = 1\,.$$

Referências Bibliográficas

[1] H. Alencar e M. do Carmo, *Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 4, 1223-1229.

[2] S. Almeida e F. Brito, *Closed 3-dimensional hypersurfaces with constant mean curvature and constant scalar curvature*, Duke Math. J. **61** (1990), 195-206.

[3] T. Aubin, *Metriques Riemanniene et courbure*, J. Diff. Geom. **4** (1970), 385-424.

[4] J. N. Barbosa, A. Brasil Jr, E. Costa e I. Lázaro, *Hypersurfaces of the Euclidean sphere with nonnegative Ricci curvature*, Preprint (2002).

[5] A. Barros, *Applications of Bochner formula to minimal submanifolds of the sphere*, a ser publicado no Journal of Geometry and Physics.

[6] A. Barros e G. Bessa, *Estimates of the first eigenvalue of minimal hypersurfaces of S^{n+1}*, Matemática Contemporânea, vol. 17, X Escola de Geometria Diferencial, (1999), 71-75.

[7] M. Berger, P. Gauduchon e E. Mazet, *Le Spectre d'une Variété Riemannienne*, Lecture Notes in Mathematics, **194**, Springer-Verlag, 1971.

[8] M. do Carmo e M. Dajczer, *Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 685-709.

[9] M. do Carmo, M. Dajczer e F. Mercuri, *Compact conformally flat hypersurfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **288** (1985), 189-203.

[10] E. Cartan, *Sur des familles remarquables d'hypersurfaces isoparamétriques dans les espaces sphériques*, Math. Z. **45** (1939), 335-367.

[11] Cecil T. E., Ryan, P. J., *Tight and Taut Immersions of Manifolds*, Pitman, London, 1985.

[12] S. Chang, *A closed hypersurface with constant scalar and mean curvature in S^4 is isoparametric*, Communications in Analysis and Geometry **1** (1993), 71-100.

[13] S. Cheng e S. Yau, *Hypersurfaces with constant scalar curvature*, Math. Ann. **225** (1977), 195-204.

[14] S. S. Chern, M. do Carmo e S. Kobayashi, *Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length*, Functional Analysis and Related Fields, Springer-Verlag, New York (1970), 59-75.

[15] H. I. Choi e A. N. Wang, *A first eingenvalue estimate for minimal hypersurfaces*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 559-562.

[16] M. Dajczer, at. al., *Submanifolds and Isometric Immersions*, Mathematics Lecture Series, Vol. 13, Publish or Perish, Inc., Houston (1990).

[17] Q. Ding, *On spectral characterization of minimal hypersurfaces in a sphere*, Kodai Math. J. **17** (1994), 320-328.

[18] T. Hasanis e T. Vlachos, *Ricci curvature and minimal submanifolds*, Pacific J. of Math. **197** (2001), 1, 13-24.

[19] T. Hasanis e T. Vlachos, *A pinching theorem for minimal hypersurface in a sphere*, Arch. Math. **75** (2000), 469-471.

[20] T. Hasanis e D. Koutroufiotis, *Applications of the Gauss mapping for hypersurfaces of the sphere*, Lecture Notes in Math., Vol. 1156, Springer-Verlag, 180-193.

[21] S. Koh, *Sphere Theorem by means of ratio of mean curvature functions*, Glasgow Math. J. **42** (2000), 91-95.

[22] B. Lawson, *Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces*, Ann. of Math. **89** (1969), 187-197.

[23] P. F. Leung, *Minimal submanifolds in a sphere*, Math. Z. **183** (1983), 75-83.

[24] H. Muto, *The first eingenvalue of the Laplacian of an isoparametric hypersurface in a unit sphere*, Math. Z. **197** (1988), 531-549.

[25] M. Noronha, *A note of the first Betti number of submanifolds with nonnegative Ricci curvature in codimension 2*, Manuscripta Math. **73** (1991), 335-339.

[26] M. Noronha, *Some compact conformally flat manifolds with nonnegative scalar curvature*, Geom. Dedicata **47** (1993), 225-268.

[27] M. Obata, *Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere*, J. Math. Soc. Japan **14** (1962), 333-340.

[28] T. Otsuki, *Minimal hypersurfaces in a Riemannian manifold of constant curvature*, Amer. J. Math. **92** (1970), 145-173.

[29] U.K. Patodi, *Curvature and the fundamental solution of the heat operator*, J. Indian Math. Soc. **34** (1970), 269-285.

[30] R. Schoen e S. Yau, *Lectures on Differential Geometry*, International Press, 1994.

[31] J. Simons, *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. of Math. **88** (1968), 62-105.

[32] T. Takahashi, *Minimal immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan **18** (1966), 380-385.

[33] B.L. van der Waerden, *Algebra*, Vol. 1, Springer-Verlag, New York (1991).

[34] J. Wang, *On spectral characterizations of isoparametric hypersurfaces in* S^4, J. Math. Exposition **17** (1997), 496-500.

[35] S. Yau,*Problem Section, Seminar on Differential Geometry*, Princeton,1982.