

O Príncipe de Omori-Yau para os  
operadores  $L_r$  e aplicações

Barnabé Pessoa Lima <sup>1</sup>

|CONSULTA LOCAL|

<sup>1</sup>Departamento de Matemática da Universidade Federal do Piauí

À minha esposa Maria Helena e  
aos meus filhos Juliana Helena e João Gabriel.

# Agradecimentos

O meu muito obrigado:

Ao meu orientador, Luquésio Petrola de Melo Jorge, sou grato não só pela orientação, mas também pela amizade e o crédito em minha capacidade de aprender matemática;

Ao professor Carlos Augusto S. Isnard, orientador de Mestrado, pela indicação para este curso, pelas aulas de Análise Funcional e o exemplo de profissionalismo;

À minha turma: Isaac, Miguel, Pedro e o Vicente pela amizade e a matemática que com eles aprendi;

Ao Jocelino Sato e sua esposa Cristina, obrigado pela amizade e grande colaboração;

Ao Luiz Mendes, um amigo exemplar, companheiro da última grande jornada visando um exame de qualificação, e às mentes privilegiadas do Caminha, Feliciano, Jorge Herbert e do Nandinho;

Ao corpo docente do Departamento de Matemática da UFC, especialmente àqueles integrados na Pós-Graduação, pela forma: cordial, amigável, mas muito profissional, com que me trataram em todo este período;

Aos professores: Francesco Mercuri(UNICAMP), Walcy Santos(UFRJ), Lucas Barbosa(UFC) e Fábio Montenegro(UFC), por terem aceito o convite para fazer parte da banca examinadora na defesa deste trabalho;

Aos funcionários da Pós-graduação em Matemática da UFC, Deca, Tavares, Andréia, Catarina, Adriano e o Marcio, pelo bom tratamento que me dispensaram nestes últimos quatro anos;

À UFPI, UFC e CAPES, pela oportunidade de fazer doutorado perto de casa;

Aos bons companheiros e amigos do Departamento de Matemática da UFPI, pelo apoio irrestrito e a grande torcida;

Aos muitos piauienses, que nos últimos quatro anos passaram pela Pós-graduação em Matemática da UFC, que suavizaram a saudade do transcendente Piauí, particularmente:

Ao Ezequias Esteves, por um longo período em que dividimos despesas, dúvidas e moradia.

Ao João Xavier da Cruz Neto, pela grande amizade, o espírito de

liderança, capacidade de trabalho e dedicação ao desenvolvimento da Matemática no Piauí;

A Liane Feitosa, que mesmo envolvida com a conclusão do mestrado, ingresso no Doutorado e com o noivado, fez algumas cuidadosas leituras na versão preliminar deste trabalho;

Aos meus amigos de Beneditinos-PI, terra onde nasci, que sempre e de forma muito sincera, manifestaram apreço por minha pessoa;

Aos meus pais, Antonio Pessoa Lima e Benedita Maria de Lima, pela vida e o ensinamento de princípios básicos necessários a qualquer cidadão de bem;

Aos meus filhos, Juliana Helena e João Gabriel, que durante todo esses anos, viveram sem a presença paterna.

À minha esposa Maria Helena, devo dizer que, diante da impossibilidade de enumerar as razões pelas quais gostaria de lhe dizer obrigado, agradeço a Deus por ter permitido a união das nossas vidas.

Finalmente não posso deixar de registrar o espontâneo e importante apoio técnico que recebi dos alunos Paulo César(PC), Humberto, Lindeval, Cecília e Cristiane.

As minhas sinceras desculpas àqueles que injustamente não foram aqui referidos.

# Capítulo 1

## Introdução

Em 1967, H. Omori [Om] provou um princípio do máximo para, funções definidas em variedades Riemannianas completas, que possuem curvatura seccional limitada inferiormente. Tal princípio generaliza o bem conhecido fato: uma função contínua num conjunto compacto, necessariamente, possui um ponto de máximo." Mais precisamente ele provou que:

**Teorema 1.1 (Omori).** *Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada superiormente, definida em uma variedade Riemanniana  $M$ , completa, com curvatura seccional limitada inferiormente. Então, dada uma sequência de números reais positivos  $\{\epsilon_k\}$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0$ , existe uma sequência  $\{x_k\} \subset M$  satisfazendo:  $f(x_k) \rightarrow \sup_M f$ ,  $|\text{grad } f(x_k)| \leq \epsilon_k$ ,  $\Delta f(x_k) \leq \epsilon_k$ , onde  $\Delta$  é o Laplaciano.*

Para se aplicar o princípio de Omori precisamos escolher uma função  $f$  conveniente, isto é, uma função cujo Laplaciano nos dê informações geométricas da variedade, por exemplo, a função distância. Como ilustração do seu resultado, Omori provou que não existe imersão mínima, com curvatura seccional limitada inferiormente, no  $\mathbb{R}^{n+p}$ ,  $p \geq 1$ , contida em um cone não degenerado. A denominação "O Princípio de Omori-Yau" deve-se ao fato, que em 1975, Yau [Y] e Cheng-Yau em [C-Y1] deram uma elegante prova do resultado de Omori, com uma hipótese mais fraca. Eles substituíram a limitação inferior na curvatura seccional por limitação inferior na curvatura de Ricci e obtiveram resultados do tipo Liouville e estimativa de autovalor. Destacamos algumas aplicações relacionadas com o Princípio de Omori-Yau:

1. Cheng-Yau [C-Y1] Estudaram a desigualdade diferencial do tipo  $\Delta u \geq f(u)$  em uma variedade Riemanniana  $M$  com curvatura de Ricci limitada inferiormente, encontrando condições suficiente para que  $u$  seja limitada superiormente (v. Theorem 8).
2. Yau em [Y] Mostrou que uma variedade Riemanniana  $M$  com curvatura de Ricci limitada inferiormente por  $\frac{(dimM+\epsilon)}{r^2}$  onde  $r$  é a função distancia a um ponto fixado  $x_0$  de  $M$  e  $\epsilon$  uma constante real positiva,  $M$  não admite função sepheramônica positiva (Theorem 3 Corollary 1).
3. Yau em [Y], Provou um principio do máximo do tipo Omori para imersões própria no espaço euclidiano, com curvatura média uniformemente limitada e sem a hipótese na curvatura de Ricci (v.Theorem 2, Corollary 1).
4. Jorge-Xavier em [J-X] provaram desigualdades que imersões isométricas limitadas são obrigadas a satisfazer. Estes tipos de resultados revelam obstruções geométricas para a existência de imersões isométricas. Resultados similares encontram-se em [J-K] usando como uma das ferramentas o teorema de Omori-Yau. Outras aplicações similares aparecem em [C-X], [R-R-S], [T].

O Objetivo deste trabalho é estabelecer um teorema do tipo Omori-Yau para os operadores  $L_r$ , (v. Teorema 3.1), visto que tais operadores são uma generalização natural do Laplaciano e mediante as condições deste teorema, deduzir algumas aplicações tais como: O teorema do tipo Jorge-Xavier [J-X]) para as curvaturas de ordem maior que um, (Teorema 4.1); Não existência de hipersuperfícies do  $\mathbb{R}^{n+1}$  com  $H_{r+1}$  identicamente nula (Theorem 4.2); Estudamos a desigualdade  $L_r u \geq \text{traço}(P_r)f(u)$  a qual é uma versão mais geral da desigualdade  $\Delta u \geq f(u)$ , estudada por Yau [Y] conforme o Teorema (4.3); Por último, obtivemos um resultado similar ao obtido por Yau mencionado no item (2).

## Capítulo 2

### Preliminares

As variedades Riemannianas consideradas neste trabalho serão, completas, conexas, denotadas por  $M$  e  $\overline{M}$  de dimensão  $n$  e  $(n + 1)$  respectivamente, exceto se afirmado o contrário. Seja  $\varphi : M \rightarrow \overline{M}$  uma imersão isométrica. Associada à segunda forma fundamental  $A$  da imersão  $\varphi$ , existem as funções simétricas  $S_r$  das curvaturas principais,  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , dadas por:

$$S_r(x) = \sum_{i_1 < \dots < i_r} k_{i_1} \dots k_{i_r}, \quad x \in M \quad (2.1)$$

Uma outra forma de definir estas funções simétricas associadas à segunda forma fundamental  $A$  é através do seu polinômio característico, vejamos:

$$\det(tI - A) = \sum_{r=0}^n (-1)^r S_r t^{n-r}. \quad (2.2)$$

As transformações de Newton  $P_r : T_x M \rightarrow T_x M$ ,  $r = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ , são definidas recursivamente por:

$$\begin{aligned} P_0 &= I \\ P_1 &= S_1 I - A \\ &\vdots \\ P_r &= S_r I - A P_{r-1}. \end{aligned}$$

Cada  $P_r$  é um operador auto-adjunto e possui os mesmos autovetores de  $A$ . Conseqüentemente,  $A$  e  $P_r$ , podem ser diagonalizados simultaneamente. Consideraremos, em todo o texto, um referencial ortonormal  $\{e_i\}_{i=1}^n$  o qual diagonaliza  $A$  e  $P_r$  para  $r = 0, \dots, n-1$ . Representando por  $A_i$  a restrição de  $A$  ao subespaço normal a  $e_i$ , a  $r$ -ésima função simétrica de  $A_i$  por  $S_r(A_i)$  e as curvaturas principais por  $k_i$  temos a seguinte proposição:

**Proposição 2.1.** Para cada  $r$ ,  $1 \leq r \leq n-1$ , são verdadeiras:

- (a)  $P_r(e_i) = S_r(A_i)e_i$ ;
- (b)  $\text{traço}(P_r) = (n-r)S_r$ ;
- (c)  $\text{traço}(AP_r) = (r+1)S_{r+1}$ .

A prova desta proposição pode ser encontrada em [B-C].

**Definição 2.2.** Dado  $r$ ,  $0 \leq r \leq n-1$ , definimos os seguintes operadores diferenciais de segunda ordem em  $M^n$

$$L_r f(x) = \text{div}[P_r(\text{grad}(f))](x) \quad (2.3)$$

$$\square_r f(x) = \text{traço}(P_r \cdot \text{Hess } f)(x), \quad (2.4)$$

onde  $\text{grad}(f)$  e  $\text{Hess } f$  são, respectivamente, o gradiente e o hessiano de  $f$  em  $M^n$ .

Os operadores  $L_r$  definidos em termos da transformada de Newton  $P_r$  aparecem naturalmente no estudo da estabilidade de hipersuperfícies com  $S_{r+1} = \text{constante}$ , dos espaços de formas de curvatura seccional constante. Tais operadores são elípticos se  $P_r$  for definido positivo. Além disso,  $L_r$  é o Laplaciano quando  $r = 0$ . Usando diretamente as definições dos operadores acima obtemos:

$$L_r f(x) = \square_r f(x) + \text{traço}(\nabla P_r) \text{grad}(f)(x), \quad (2.5)$$

isto é,

$$L_r f(x) = \sum_{i=1}^n \langle P_r(\nabla_{e_i} \text{grad}(f)), e_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{e_i} P_r) \text{grad}(f), e_i \rangle, \quad (2.6)$$

onde  $\{e_i\}$  é um referencial ortonormal em  $M$ .

**Lema 2.3.** Considere  $\varphi : M \rightarrow \overline{M}$  uma imersão isométrica, cuja curvatura seccional  $K_M$  de  $M$  satisfaz

$$K_M(x) \geq -C [1 + \rho^2(x) \log^2(\rho(x) + 2)], \quad (2.7)$$

onde  $\rho(x)$ ,  $x \in M$ , é a distância a um ponto fixado de  $M$ . Suponha ainda que  $P_r$  é definido positivo. Então,

$$\square_r \rho(x) \leq \text{traço} P_r \left[ \frac{1 + \sqrt{c(1 + \rho^2(x) \log^2(\rho(x) + 2))}}{\rho(x)} \right].$$

**Demonstração:** Seja  $\{e_i\}_{i=1}^n$  um referencial que diagonaliza  $A$  e  $P_r$ , ( $P_r e_i = \mu_i^r e_i$ ). Usando a definição do operador  $\square_r$  e a simetria de  $P_r$  temos:

$$\begin{aligned} \square_r \rho(x) &= \sum_{i=1}^n \langle P_r (\nabla_{e_i} \text{grad}(\rho)), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_i^r \langle \nabla_{e_i} \text{grad}(\rho), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_i^r \text{Hess} \rho(x)(e_i, e_i). \end{aligned}$$

Pelo teorema de comparação de Hessiano, veja [G-W], obtemos a seguinte desigualdade:

$$\square_r \rho(x) \leq \sum_{i=1}^n \mu_i^r \frac{\sqrt{f(\rho(x))} \rho(x) \coth(\sqrt{f(\rho(x))} \rho(x))}{\rho(x)}, \quad (2.8)$$

onde  $f(\rho(x)) = C[1 + \rho^2(x) \log^2(\rho(x) + 2)]$ .

Então,

$$\square_r \rho(x) \leq \text{traço} P_r \left[ \frac{1 + \sqrt{f(\rho(x))} \rho(x)}{\rho(x)} \right], \quad (2.9)$$

pois,

$$\sqrt{f(\rho(x))} \rho(x) \coth(\sqrt{f(\rho(x))} \rho(x)) \leq 1 + \sqrt{f(\rho(x))} \rho(x).$$

□

**Teorema 2.4.** *Seja  $\phi : M \rightarrow \bar{M}$  uma imersão isométrica. Então, para cada  $r \in \{1, \dots, n-1\}$  e qualquer campo suave  $Y$  em  $M$ , vale a seguinte fórmula:*

$$\text{traço} \left( X \rightarrow (\nabla_X P_r) Y \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} k_i^{j-1} \langle \bar{R}(e_i, P_{r-j} Y) \xi, e_i \rangle,$$

onde  $\xi$  é normal a  $M$  e  $\bar{R}$  é o tensor curvatura de  $\bar{M}$ .

**Demonstração:** A prova deste teorema será feita em duas etapas. Inicialmente consideremos a etapa 1: *Etapa 1.* A seguinte identidade é verdadeira

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_{e_i} P_r) Y, e_i \rangle &= e_i(S_r) Y_i - P_{r-1} Y(k_i) + \langle \bar{R}(e_i, P_{r-1} Y) \xi, e_i \rangle \\ &\quad - k_i \langle (\nabla_{e_i} P_{r-1}) Y, e_i \rangle \\ &= \sum_{j=1}^r [e_i(S_{r-j+1}) k_i^{j-1} Y_i (-1)^{j-1}] + \sum_{j=1}^r (-1)^j P_{r-j} Y \left( \frac{1}{j} k_i^j \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} k_i^{j-1} \langle \bar{R}(e_i, P_{r-j} Y) \xi, e_i \rangle \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde:

$$Y_i = \langle Y, e_i \rangle.$$

**Prova da etapa 1:** Vamos utilizar o argumento de indução em  $r$ . Para  $r = 1$ , usando a equação de Codazzi, obtemos a identidade desejada, ou seja:

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_{e_i} P_1) Y, e_i \rangle &= \langle (\nabla_{e_i} S_1 I) Y, e_i \rangle - \langle (\nabla_{e_i} A) Y, e_i \rangle \\ &= e_i(S_1) Y_i + \langle e_i, Y \rangle \xi, e_i - \langle (\nabla_Y A) e_i, e_i \rangle \\ &= e_i(S_1) Y_i + \langle \bar{R}(e_i, Y) \xi, e_i \rangle - Y(k_i). \end{aligned}$$

Seja  $r \in \mathbb{N}$  e suponha que a identidade (2.10) seja verdadeira para  $r - 1$ . Novamente usando a equação de Codazzi, obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle (\nabla_{e_i} P_r) Y, e_i \rangle &= e_i(S_r) Y_i - P_{r-1} Y(k_i) \\
&+ \langle \bar{R}(e_i, P_{r-1} Y) \xi, e_i \rangle \\
&- k_i \langle (\nabla_{e_i} P_{r-1}) Y, e_i \rangle.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Aplicando a hipótese de indução ao quarto termo do lado direito da equação (2.11) obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle (\nabla_{e_i} P_r) Y, e_i \rangle &= e_i(S_r) Y_i - P_{r-1} Y(k_i) \\
&+ \langle \bar{R}(e_i, P_{r-1} Y) \xi, e_i \rangle - k_i \sum_{j=1}^{r-1} e_i(S_{r-j}) k_i^{j-1} Y_i (-1)^{j-1} \\
&- k_i \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^j P_{r-1-j} Y \left( \frac{1}{j} k_i^j \right) \\
&- \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^{j-1} k_i^j \langle \bar{R}(e_i, P_{r-1-j} Y) \xi, e_i \rangle \\
&= \sum_{j=1}^r e_i(S_{r+1-j}) k_i^{j-1} Y_i (-1)^{j-1} \\
&+ \sum_{j=1}^r (-1)^j P_{r-j} Y \left( \frac{1}{j} k_i^j \right) \\
&+ \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} k_i^{j-1} \langle \bar{R}(e_i, P_{r-j} Y) \xi, e_i \rangle
\end{aligned} \tag{2.12}$$

E assim concluímos a etapa 1. Passando ao traço na identidade obtida na etapa 1 temos:

$$\begin{aligned}
\text{traço}(X \rightarrow (\nabla_X P_r)Y) &= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{e_i} P_r)Y, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r e_i (S_{r+1-j}) k_i^{j-1} (-1)^{j-1} Y_i \\
&+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (-1)^j P_{r-j} Y \left( \frac{1}{j} k_i^j \right) \\
&+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} k_i^{j-1} \langle \bar{R}(e_i, P_{r-j}Y)\xi, e_i \rangle.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Podemos reescrever (2.13) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\text{traço}(X \rightarrow (\nabla_X P_r)Y) &= \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} \langle \text{grad}(S_{r+1-j}), A^{j-1}Y \rangle \\
&+ \sum_{j=1}^r (-1)^j \langle P_{r-j}Y, \frac{1}{j} \text{grad}(t_j) \rangle \\
&+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} k_i^{j-1} \langle \bar{R}(e_i, P_{r-j}Y)\xi, e_i \rangle,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

onde  $t_j = \sum_{i=1}^n k_i^j$ .

*Etapa 2.* A soma dos dois primeiros termos do segundo membro de (2.14) é igual a zero, isto é:

$$T_1 + T_2 = 0, \tag{2.15}$$

onde

$$T_1 = \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} \langle \text{grad}(S_{r+1-j}), A^{j-1}Y \rangle$$

e

$$T_2 = \sum_{j=1}^r (-1)^j \langle P_{r-j}Y, \frac{1}{j} \text{grad}(t_j) \rangle$$

**Prova da etapa 2:** Para cada  $j \in \{1, \dots, r\}$ , segue-se da definição dos  $P_r$ 's que:

$$P_{r-j} = \sum_{l=1}^{r-j+1} (-1)^{l-1} S_{r-j+1-l} A^{l-1} \quad (2.16)$$

Substituindo 2.16 em  $T_2$  e reordenando seus termos, temos:

$$\begin{aligned} T_2 &= \sum_{j=1}^r (-1)^j \langle P_{r-j} Y, \frac{1}{j} \text{grad}(t_j) \rangle \\ &= \sum_{j=1}^r (-1)^j \langle \sum_{l=0}^{r-j} (-1)^l S_{r-j-l} A^l Y, \frac{1}{j} \text{grad}(t_j) \rangle \\ &= \sum_{k=1}^r \langle A^{k-1} Y, \sum_{j=1}^{r-k+1} (-1)^{k-1} \frac{(-1)^j}{j} S_{r-k-j+1} \text{grad}(t_j) \rangle \quad (2.17) \end{aligned}$$

Conseqüentemente, se mostrarmos que

$$\text{grad}(S_{r+1-k}) = \sum_{j=1}^{r-k+1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} S_{r-k-j+1} \text{grad}(t_j), \quad (2.18)$$

então teremos a etapa 2, porque (2.17) reduz-se a

$$\sum_{j=1}^r (-1)^j \langle P_{r-j} Y, \frac{1}{j} \text{grad}(t_j) \rangle = - \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} \langle \text{grad}(S_{r+1-j}), A^{j-1} Y \rangle$$

$$\begin{aligned} T_2 &= \sum_{j=1}^r (-1)^j \langle P_{r-j} Y, \frac{1}{j} \text{grad}(t_j) \rangle \\ &= - \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} \langle \text{grad}(S_{r+1-j}), A^{j-1} Y \rangle \quad (2.19) \end{aligned}$$

Mostrar (2.18) é equivalente a mostrar que

$$\text{grad}(S_r) = \sum_{j=1}^r \frac{(-1)^{j-1}}{j} S_{r-j} \text{grad}(t_j). \quad (2.20)$$

Mostraremos a igualdade acima usando indução sobre  $r$  e a seguinte identidade de Jacobi:

$$S_r = \frac{1}{r} \sum_{l=1}^r (-1)^{l-1} S_{r-l} t_l. \quad (2.21)$$

É claro que para  $r = 1$  a identidade 2.20 é verdadeira. Calculando o gradiente de  $S_r$  na expressão (2.21) temos:

$$\text{grad}(S_r) = \frac{1}{r} \sum_{l=1}^{r-1} (-1)^{l-1} \text{grad}(S_{r-l}) t_l + \frac{1}{r} \sum_{l=1}^r (-1)^{l-1} S_{r-l} \text{grad}(t_l). \quad (2.22)$$

Dado  $r \in \{1, \dots, n\}$ , suponha que a igualdade (2.20) seja verdadeira para todo  $j \in \{1, \dots, r-1\}$ . Denotemos os dois termos de (2.22) por

$$I := \frac{1}{r} \sum_{l=1}^{r-1} (-1)^{l-1} \text{grad}(S_{r-l}) t_l \quad \text{e} \quad II := \frac{1}{r} \sum_{l=1}^r (-1)^{l-1} S_{r-l} \text{grad}(t_l). \quad (2.23)$$

Pela hipótese de indução temos que

$$I = \frac{1}{r} \sum_{l=1}^{r-1} (-1)^{l-1} \left[ \sum_{j=1}^{r-l} \frac{(-1)^{j-1}}{j} S_{r-l-j} \text{grad}(t_j) \right] t_l. \quad (2.24)$$

Reordenando os termos da equação (2.24) obtemos

$$I = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \left[ \frac{(-1)^{k-1}}{k} (r-k) S_{r-k} \right] \text{grad} t_k. \quad (2.25)$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
I + II &= \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \left[ \frac{r-k}{k} + 1 \right] S_{r-k} \text{grad}(t_k) \\
&= \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \frac{1}{k} S_{r-k} \text{grad}(t_k).
\end{aligned}$$

E assim a demonstração do Teorema 2.4 está concluída.  $\square$

**Corolário 2.5.** *Sejam  $\phi : M \rightarrow \overline{M}(k)$  uma imersão isométrica, e  $f$  uma função de classe  $C^2$  em  $M$ , onde  $\overline{M}(k)$  é um espaço de forma de curvatura seccional constante e igual a  $k$ . Então,*

$$L_r f(x) = \square_r f(x).$$

Uma demonstração do Corolário 2.5, sem fazer do uso do Teorema 2.4, pode ser encontrada em [Ro].

**Lema 2.6.** *Sejam  $\phi : M \rightarrow \overline{M}$  uma imersão isométrica e  $f$  uma função de classe  $C^2$  em  $M$ . Se  $x_0$  é um ponto de máximo local de  $f$  então*

(a)  $P_r(\text{grad}(f)(x_0)) = 0;$

(b)  $\square_r f(x_0) = L_r f(x_0) \leq 0$ , se  $P_r$  é positivo definido.

**Demonstração:** a) Se  $x_0$  é um ponto de máximo local então  $\text{grad}f(x_0) = 0$ . e como  $P_r(x_0) : T_{x_0}M^n \rightarrow T_{x_0}M^n$  é uma aplicação linear temos

$$P_r(\text{grad}f(x_0)) = 0.$$

**Demonstração do item (b):** Usando a equação 2.6 temos:

$$L_r f(x_0) = \sum_{i=1}^n \mu_i^r \text{Hess}f(x_0)(e_i, e_i) + \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{e_i} P_r) \text{grad}(f)(x_0), e_i \rangle. \quad (2.26)$$

O segundo termo da equação acima é nulo, pois,  $\text{grad}f(x_0) = 0$ , usando a hipóteses que  $P_r$  é definido positivo e que o  $x_0$  é ponto de máximo local temos que o primeiro termo é não-negativo.  $\square$

**Lema 2.7.** *Sejam  $\phi : M \rightarrow \overline{M}$  uma imersão isométrica,  $\alpha$  a segunda forma fundamental de  $M$  e  $g$  uma função de classe  $C^2$  definida em  $\overline{M}$ . Se  $u : M \rightarrow \overline{M}$  é a restrição da função  $g$  a  $M$  então vale a seguinte fórmula:*

$$\square_r u(x) = \sum_{i=1}^n \langle P_r(\nabla_{e_i}^{grad(g)}), e_i \rangle + \langle grad(g), \sum_{i=1}^n \alpha(e_i, P_r e_i) \rangle. \quad (2.27)$$

**Demonstração:** Indicaremos por  $\nabla$  e  $\overline{\nabla}$  as conexões de Levi-Civita de  $M$  e  $\overline{M}$ , respectivamente. Dado qualquer ponto  $x \in M$  vale a seguinte decomposição para o gradiente de  $g$ :

$$gradg(x) = gradu(x) + (gradg)^\perp. \quad (2.28)$$

Usando a definição de Hessiano e a fórmula de Gauss:

$$\begin{aligned} Hessu(x)(X, Y) &= \langle \nabla_X gradu(x), Y \rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X gradg(x) - \alpha(X, gradu(x)), Y \rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X gradg(x), Y \rangle \\ &= X \langle gradu(x), Y \rangle - \langle gradu(x), \overline{\nabla}_X Y \rangle \end{aligned}$$

Substituindo a equação 2.28 na equação acima temos:

$$\begin{aligned} Hessu(x)(X, Y) &= \langle \overline{\nabla}_X gradg(x), Y \rangle + \langle (gradg(x))^\perp, \overline{\nabla}_X Y \rangle \\ &= Hessg(x)(X, Y) + \langle (gradg(x))^\perp, \alpha(X, Y) \rangle \\ &= Hessg(x)(X, Y) + \langle gradg(x), \alpha(X, Y) \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, terminamos de provar que dados  $x \in M$  e campos  $X, Y$  suaves em  $M$ , a seguinte expressão é verdadeira:

$$Hessu(x)(X, Y) = Hessg(x)(X, Y) + \langle gradg(x), \alpha(X, Y) \rangle. \quad (2.29)$$

Para concluir a prova do lema, basta usar a equação 2.29 e a definição do operador  $\square_r$ , vejamos:

$$\begin{aligned} \square_r u(x) &= \sum_{i=1}^n \langle P_r(\nabla_{e_i} gradu(x)), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle P_r(\nabla_{e_i} gradg(x)), e_i \rangle + \langle gradg(x), \sum_{i=1}^n P_r \alpha(e_i, e_i) \rangle \end{aligned}$$

O Lema 2.7 será utilizado no Capítulo 4. Além disso nos permite dar uma prova simples do seguinte teorema devido a R. Reilly em [Re].

**Teorema 2.8.** (Reilly) Uma hipersuperfície  $M^n$  do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^{n+1}$  possui  $H_{r+1} \equiv 0$  se, e somente se,  $L_r h(x) \equiv 0$ , qualquer que seja a função altura  $h$  em  $M^n$ .

**Demonstração:** Sejam  $g : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida por  $g(x) = \langle \nu, x \rangle$  onde  $\nu$ , um vetor fixo do  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $h$  a restrição de  $g$  a  $M^n$ . Pelos Lemas 2.5 e 2.7 temos:

$$L_r h(x) = \sum_{i=1}^n \langle P_r(\nabla_{e_i}^{grad(g)}), e_i \rangle + \langle grad(g), \sum_{i=1}^n \alpha(e_i, P_r e_i) \rangle \quad (2.30)$$

Como  $Hessg(X, Y) \equiv 0$ , o primeiro termo do lado direito da equação acima é nulo, e aplicando o item c da Proposição 2.1 ao segundo termo, concluímos que

$$L_r h(x) = (r+1)S_{r+1}\langle \nu, \xi \rangle, \quad (2.31)$$

onde  $\xi$  é a normal a  $M^n$ .

Assim concluímos a prova do teorema, pois, a equação 2.31, é válida qualquer que seja o vetor  $\nu \in \mathbb{R}^{n+1}$ .  $\square$

## Capítulo 3

# Princípio do máximo de Omori-Yau

Nesta seção, anunciamos e provamos um princípio do máximo para o operador  $L_r$ . Observe que  $L_0$  é o Laplaciano, e portanto, esse operador generaliza o Laplaciano.

**Teorema 3.1.** *Seja  $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$  uma imersão isométrica, onde  $M$  e  $\bar{M}$  são variedades Riemannianas completas de dimensão  $n$  e  $(n+1)$ , com curvaturas seccionais  $K_M$  e  $K_{\bar{M}}$  respectivamente, satisfazendo,*

$$\begin{aligned} K_M(x) &\geq -C [1 + \rho^2(x)] \log^2(\rho(x) + 2), \\ |K_{\bar{M}}(x)| &= O(\log(\bar{\rho}^2(x) + 2))^{\frac{1}{3}}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde  $\bar{\rho}$  é a função distância em  $\bar{M}$  a um ponto fixado  $x \in M$ . Suponha que

$$\begin{aligned} i) & P_r \text{ seja definido positivo, } r \text{ fixado;} \\ ii) & \|A(x)\|^r = O(\log(\rho^2(x) + 2))^{\frac{1}{3}}, \text{ quando } \rho(x) \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Se  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^2$  limitada superiormente, então, existe uma seqüência de pontos  $\{x_k\}$  em  $M$  tal que

- a)  $f(x_k) \rightarrow \sup_M f$ ;
- b)  $\|P_r \text{ grad}(f)(x_k)\| \rightarrow 0$  e  $\|\text{grad}(f)(x_k)\| \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ ;
- c)  $\square_r f(x_k) \leq \frac{2}{k}$  traço  $P_r$  e traço  $(\nabla P_r) \text{ grad}(f)(x_k) \rightarrow 0$ , quando  $k \rightarrow \infty$

c')  $L_r f(x_k) \leq \frac{2}{k} \text{traço} P_r + \eta_k$  onde  $\eta_k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow +\infty$ .  
Aqui, os operadores diferenciais  $L_r$  e  $\square_r$  são definidos em (2.3), (2.4).

**Demonstração:** Como em [C-X] e [C-Y2], para cada inteiro positivo  $k$ , definimos uma função  $g_k : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$g_k(x) = \frac{f(x) - f(x_0) + 1}{(\log(\rho^2(x) + 2))^{\frac{1}{k}}}.$$

Temos  $\lim_{\rho(x) \rightarrow +\infty} g_k(x) = 0$ , pois  $f$  é limitada superiormente, assim,  $g_k$  tem um ponto de máximo  $x_k$ . Vamos provar que a seqüência  $x_k$  satisfaz as condições do teorema. Para isso, é conveniente definir a função:

$$h(x) = (\log(\rho^2(x) + 2))^{\frac{1}{k}}.$$

Então,

$$g_k(x) = \frac{f(x) - f(x_0) + 1}{h(x)}.$$

Nós omitimos a demonstração do item (a), a qual se faz exatamente como em [C-X] e [C-Y2].

**Demonstração do item (b):**

$$\text{grad}(g)(x_k) = \frac{1}{h(x_k)} \left[ \text{grad}(f)(x_k) - \frac{2(f(x_k) - f(x_0) + 1)\rho(x_k)\text{grad}(\rho)(x_k)}{k \log(\rho^2(x_k) + 2)(\rho^2(x_k) + 2)} \right].$$

Como  $x_k$  é ponto de máximo da função  $g_k$ , a equação acima implica que

$$\text{grad}(f)(x_k) = \frac{2(f(x_k) - f(x_0) + 1)\rho(x_k)\text{grad}(\rho)(x_k)}{k \log(\rho^2(x_k) + 2)(\rho^2(x_k) + 2)} \quad (3.3)$$

Da equação 3.3 segue-se:

$$\|\text{grad}(f)(x_k)\| \rightarrow 0, \quad \text{quando } k \rightarrow +\infty$$

Usando a definição da transformação  $P_r$  e a hipóteses (3.2) temos que

$$\|P_r(x)\|^r = O(\log(\rho^2(x) + 2))^{\frac{1}{3}} \quad (3.4)$$

Da equação 3.4 e do fato que o gradiente da função distância possui norma um, segue-se que

$$\|P_r \text{grad}(f)(x_k)\| \leq \frac{2(f(x_k) - f(x_0) + 1)\rho(x_k)\|P_r(x_k)\|}{k(\log(\rho^2(x_k) + 2))(\rho^2(x_k) + 2)}$$

Isto é,

$$|P_r \text{grad}(f)(x_k)| \leq \frac{2c}{k}.$$

Portanto,

$$|P_r \text{grad}(f)(x_k)| \rightarrow 0, \text{ quando } k \rightarrow +\infty.$$

O que conclui a demonstração do item (b).

**Demonstração do item (c):**

Segue diretamente da definição do operador  $L_r$  que:

$$\begin{aligned} L_r f(x_k) &= L_r(g_k \cdot h)(x_k) \\ &= g_k(x_k)L_r h(x_k) + h(x_k)L_r g_k(x_k) \\ &\quad + \langle P_r \text{grad}(h)(x_k), \text{grad}(g)(x_k) \rangle \\ &\quad + \langle \text{grad}(h)(x_k), P_r \text{grad}(g)(x_k) \rangle. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 2.6 temos que:

$$\begin{aligned} L_r f(x_k) &\leq g_k(x_k)L_r h(x_k) \\ &= (\square_r h(x_k))g_k(x_k) + g_k(x_k)\text{traço}[(\nabla P_r)\text{grad}(h)(x_k)]. \end{aligned}$$

**Afirmção 1:**  $g_k(x_k)\square_r h(x_k) \leq \frac{2}{k}\text{traço}P_r$ , para  $k$  suficientemente grande.

**Demonstração da afirmação 1:** Observando que:

$$g_k(x_k)\square_r h(x_k) = g_k(x_k) \sum_{i=1}^n \mu_i^r \text{Hess}h(x_k)(e_i, e_i).$$

Calculando o Hessiano de  $h$ :

$$\begin{aligned} \text{Hess}h(x)(e_i, e_i) &= \frac{2h(x)\rho(x)\text{Hess}\rho(x)(e_i, e_i)}{k \log(\rho^2(x_k) + 2)(\rho^2(x) + 2)} \\ &\quad + e_i \left[ \frac{2}{k}(\log(\rho^2(x) + 2))^{\frac{1}{k}-1} \right] \frac{\rho(x)e_i\rho(x)}{\rho^2(x) + 2} \\ &\quad + \frac{2}{k} \frac{h(x)e_i(\rho(x))^2}{(\rho^2(x) + 2) \log(\rho^2(x) + 2)} \\ &\quad - \frac{4h(x)\rho^2(x)(e_i\rho(x))^2}{\log(\rho^2(x) + 2)(\rho^2(x) + 2)^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$g_k(x_k) \square_r h(x_k) \leq \frac{2(f(x_k) - f(x_0) + 1)\rho(x_k) \square_r \rho(x_k)}{k \log(\rho^2(x_k) + 2)(\rho^2(x_k) + 2)} + \frac{2(f(x_k) - f(x_0) + 1) \sum_{i=1}^n \mu_i^r(e_i(\rho(x_k)))^2}{k \log(\rho^2(x_k) + 2)(\rho^2(x_k) + 2)}.$$

Do Lema 2.3 e da igualdade  $\|grad(\rho)\| \equiv 1$ , temos:

$$g(x_k) \square_r h(x_k) \leq \frac{2(f(x_k) - f(x_0) + 1)}{k \log(\rho^2(x_k) + 2)(\rho^2(x_k) + 2)} (\text{traço } P_r) + \frac{(f(x_k) - f(x_0) + 1) \sqrt{c(1 + \rho^2(x_k)(\log^2(\rho(x_k) + 2))}}{k \log(\rho^2(x_k) + 2)(\rho^2(x_k) + 2)} (\text{traço } P_r) + \frac{2}{k} (f(x_k) - f(x_0)) (\text{traço } P_r).$$

Tomando  $k$  suficientemente grande obtemos:

$$g(x_k) \square_r h(x_k) \leq \frac{2}{k} \text{traço } P_r.$$

Assim, concluímos a demonstração da afirmação. Usando esta afirmação obtemos a desigualdade:

$$L_r f(x_k) \leq \frac{2}{k} \text{traço } P_r + g_k(x_k) [\text{traço}(\nabla P_r) grad(h)(x_k)]. \quad (3.5)$$

**Observação:** Quando  $\overline{M}^{n+1}$  é um espaço de curvatura constante, o traço do diferencial covariante  $(\nabla P_r)$  é identicamente nulo, para todo campo  $Y \in X(M)$ .

**Afirmação 2:**  $\text{traço}(X \rightarrow (\nabla_X P_r) grad(\rho)) = O(\log(\rho^2(x)) + 2)$ , quando  $\rho(x) \rightarrow +\infty$ .

**Demonstração da afirmação 2:** Escrevendo  $grad(\rho)$  como combinação linear do referencial  $\{e_s\}$ , obtemos:

$$P_r(grad(\rho)(x_k)) = \sum_{s=1}^n e_s(\rho) \mu_s^r e_s. \quad (3.6)$$

Segue-se do Teorema 2.4 e da equação 3.6:

$$\text{traço}(\nabla P_r)\text{grad}(\rho) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^n (-1)^{j-1} k_i^{j-1} (\mu_s^r) e_s(\rho) \langle \bar{R}(e_i, e_s) \xi, e_i \rangle. \quad (3.7)$$

Usando as propriedades do tensor curvatura  $\bar{R}$ :

$$\begin{aligned} 2\langle \bar{R}(e_i, e_s) \xi, e_i \rangle &= \langle \bar{R}(e_i, (e_s + \xi))(e_s + \xi), e_i \rangle - \langle \bar{R}(e_i, e_s) e_s, e_i \rangle \\ &\quad - \langle \bar{R}(e_i, \xi) \xi, e_i \rangle. \end{aligned} \quad (3.8)$$

As equações 3.7, 3.8 e as hipóteses sobre  $K_{\bar{M}}$  implica:

$$|\text{traço}(X \rightarrow (\nabla_X P_r)\text{grad}(\rho))| \leq C \|P_r\| \quad (3.9)$$

e

$$|\text{traço}(X \rightarrow (\nabla_X P_r)\text{grad}(\rho))| \leq C(\log(\rho^2(x) + 2)). \quad (3.10)$$

Portanto, a prova da afirmação 2 está concluída. Para concluir a demonstração do teorema é suficiente aplicar a afirmação 2 ao lado direito da desigualdade 3.5, para obter:

$$\begin{aligned} L_r f(x_k) &\leq \frac{2}{k} \text{traço} P_r + g_k(x_k) \text{traço}[(\nabla P_r)\text{grad}(h)] \\ &= \frac{2}{k} \text{traço} P_r \\ &\quad + \left( \frac{f(x_k) - f(x_0) + 1}{h(x_k)} \right) \left( \frac{2h(x_k)\rho(x_k) \text{traço}[(\nabla P_r)\text{grad}(\rho)]}{k \log(\rho^2(x_k + 2)(\rho^2(x_k) + 2))} \right) \\ &\leq \frac{2}{k} \text{traço} P_r + \frac{2C}{k}. \end{aligned}$$

□

**Observação:** Ressaltamos que existem exemplos onde as hipóteses do Teorema 3.1 são facilmente verificadas, os quais não são imersões isométricas compactas e possuem dimensão superior a 2. Enumeramos abaixo alguns destes exemplos.

- 1) Hounie e Leite em [H-L] mostram a existência de uma família Hipersuperfícies rotacionais e completas do  $\mathbb{R}^{n+1}$  com  $H_r \equiv 0$ ,  $1 \leq r < n$  e  $n = 2r$  gerada pelo gráfico da curva  $x_{n+1} = f(x_1 = \cosh(x_1))$  (v. Lemma 2.1).
- 2) Hipersuperfícies do  $\mathbb{R}^{2p+2}$  invariantes pela ação de  $O(p+1)XO(p+1)$ ,  $p > 1$  construídas por Sato em [S] (v. Teorema 2.3.2 item 5).

# Capítulo 4

## Aplicações

Como primeira aplicação do Teorema 3.1, provamos a seguinte versão do teorema de Jorge-Xavier [J-X][Teorema 1] para a  $r$ -ésima curvatura média  $H_r$ .

**Teorema 4.1.** *Seja  $\phi : M \rightarrow B_R(y_0) \subset \bar{M}$  uma imersão isométrica, onde  $M$  e  $\bar{M}$  são variedades Riemannianas completas de dimensão  $n$  e  $n + 1$ , respectivamente, com curvaturas seccionais satisfazendo (3.1) e  $\phi$  satisfazendo (3.2) e  $B_R(y_0)$  é bola normal de  $\bar{M}$ . Além disso, suponha que:*

$$\frac{|S_{r+1}|}{S_r} \leq C_0, \quad C_0 \text{ constante};$$

Então se  $K_1 = \sup_{B_R(y_0)} K_{\bar{M}}$  as seguintes desigualdades são verdadeiras.

1.  $R \geq \frac{1}{\sqrt{K_1}} \arctg \left( \frac{(n-r)\sqrt{K_1}}{(r+1)C_0} \right)$ , se  $K_1 > 0$
2.  $R \geq \left( \frac{n-r}{(r+1)C_0} \right)$ , se  $K_1 = 0$ ;
3.  $R \geq \frac{1}{\sqrt{-K_1}} \operatorname{arctgh} \left( \frac{(n-r)\sqrt{-K_1}}{(r+1)C_0} \right)$ , se  $K_1 < 0$ .

**Demonstração:** Usaremos as mesmas técnicas usadas por Chen e Xin (veja [C-X]). O caso  $K_1 > 0$  e  $R > \frac{\pi}{2\sqrt{K_1}}$  é provado facilmente por um argumento de contradição, portanto, restam três casos a serem considerados:

$$K_1 < 0, \quad K_1 = 0 \quad \text{e} \quad (K_1 > 0 \quad \text{e} \quad R \leq \frac{\pi}{2\sqrt{K_1}})$$

No caso  $K_1 > 0$  e  $R \leq \frac{\pi}{2\sqrt{K_1}}$  consideramos a função auxiliar de classe  $C^2$   $g : \bar{M}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$g(x) = 1 - \cos(\sqrt{K_1}\bar{\rho}(x)).$$

É fácil ver que

$$\text{grad}(g)(x) = \sqrt{K_1} \sin(\sqrt{K_1}\bar{\rho}(x)) \text{grad}(\bar{\rho})(x). \quad (4.1)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \text{Hess}g(x)(e_i, e_i) &= \sqrt{K_1} \sin(\sqrt{K_1}\bar{\rho}(x)) \text{Hess}\bar{\rho}(x)(e_i, e_i) \\ &\quad + K_1 \cos(\sqrt{K_1}\bar{\rho}(x)) (e_i \bar{\rho}(x))^2. \end{aligned}$$

Usando o teorema de comparação de Hessiano (ver [G-W]) obtemos

$$\begin{aligned} \text{Hess}g(x)(e_i, e_i) &\geq K_1 \sin(\sqrt{K_1}\bar{\rho}(x)) \cotg(\sqrt{K_1}\bar{\rho}(x)) \\ &\quad + K_1 \cos(\sqrt{K_1}\bar{\rho}(x)) (e_i \bar{\rho}(x))^2. \end{aligned}$$

A desigualdade acima juntamente com a hipótese  $R < \frac{\pi}{2\sqrt{K_1}}$  e o fato que  $\|\text{grad}(\bar{\rho})\| \equiv 1$ , nos dá:

$$\text{Hess}g(x)(e_i, e_i) \geq K_1 \cos(\sqrt{K_1}\bar{\rho}(x)). \quad (4.2)$$

Agora, considerando  $u = g|_{M^n}$  e aplicando o Lema 2.7 obtemos:

$$\square_r u(x) = \sum_{i=1}^n \langle P_r(\nabla_{e_i}^{\text{grad}(g)}), e_i \rangle + \langle \text{grad}(g), \sum_{i=1}^n \alpha(e_i, P_r e_i) \rangle. \quad (4.3)$$

Combinando a desigualdade (4.2) com a Proposição 2.1, obtemos:

$$\begin{aligned} \square_r u(x) &\geq \text{traço} P_r(K_1 \cos(\sqrt{K_1}\bar{\rho}(x))) \\ &\quad + \sqrt{K_1} \sin(\sqrt{K_1}\bar{\rho}(x)) \langle \text{grad}(\bar{\rho}), (n-r)S_{r+1}N \rangle. \end{aligned}$$

onde  $N$  é um campo normal a  $M^n$ . Agora, usando a hipótese  $\frac{|S_{r+1}|}{S_r} \leq C_0$ ,  $C_0$  constante, temos:

$$\square_r u(x) \geq (\text{traço} P_r) K_1 \left[ 1 - \frac{(r+1)}{(n-r)\sqrt{K_1}} \cot g(\sqrt{K_1} R) \right]. \quad (4.4)$$

Por outro lado, do Teorema 3.1 segue que existe uma sequência  $\{x_k\}$  tal que:

$$\square_r f(x_k) \leq \frac{2}{k} \text{traço} P_r \quad (4.5)$$

Combinando as desigualdades 4.4 e 4.5 temos:

$$\left[ 1 - \frac{(r+1)C_0}{(n-r)\sqrt{K_1}} \tan(\sqrt{K_1} R) \right] \leq 0,$$

isto é,

$$R \geq \frac{1}{\sqrt{K_1}} \arctan \left( \frac{(n-r)\sqrt{K_1}}{(r+1)C_0} \right).$$

Isto prova o caso  $K_1 > 0$ . Para os casos  $K_1 = 0$  e  $K_1 < 0$  usamos um argumento similar, considerando, respectivamente, as funções

$$g(x) = \frac{1}{2} \|\bar{\rho}(x)\|^2 \quad e \quad g(x) = 1 + \cos h(\sqrt{-K_1} \bar{\rho}(x)).$$

□

**Teorema 4.2.** *Considere uma imersão isométrica  $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , satisfazendo as mesmas hipóteses do teorema 3.1. Se  $H_{r+1} \equiv 0$  então  $\phi(M^n)$  não está contido em um cone não degenerado.*

**Demonstração:** Suponhamos, por absurdo, que  $\phi(M^n)$  esteja contida em um cone não degenerado. Assim, podemos supor que existe um número real  $\delta$  e um vetor unitário  $\eta \in \mathbb{R}^{n+1}$  tal que:

$$\left\langle \frac{\phi(x)}{\|\phi(x)\|}, \eta \right\rangle \geq \delta > 0, \forall x \in M^n.$$

Sem perda de generalidade podemos assumir:

1.  $\eta = E_{n+1} = (0, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ;
2.  $(\langle \phi(x), \eta \rangle)^2 - a^2[(\langle \phi(x), \phi(x) \rangle)^2 - (\langle \phi(x), \eta \rangle)^2] \geq 1$ , com  $0 < a < \delta$ .

Consideremos  $f_a(x) = -\langle \phi(x), \eta \rangle + \sqrt{a^2[\|\phi(x)\|^2 - \langle \phi(x), \eta \rangle^2] + 1}$ . Fixando  $x_0 \in M^n$ , o conjunto  $\{\phi(x) : f_a(x) \geq f_a(x_0)\}$  está contido em algum compacto e, conseqüentemente, podemos escolher  $a \in (0, \delta)$  tal que  $a^2\|\phi(x)\|^2 \leq \frac{1}{2}$  para todo  $x \in M^n$ , satisfazendo  $f_a(x) \geq f_a(x_0)$ . Seja  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  definida por

$$f(x) = f_a(x) - f_a(x_0).$$

Observemos que  $f$  é limitada superiormente, e assim, satisfaz as condições do Teorema 3.1.  $u = g|_{M^n}$  onde  $g : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por

$$g(x) = -x_{n+1} + \sqrt{(\|x\|^2 - x_{n+1}^2)a^2 + 1} + \langle x_0, \eta \rangle \\ + \sqrt{(\|x_0\|^2 - \langle x_0, \eta \rangle^2)a^2 + 1}.$$

Aplicando a Proposição 2.1 e o Lema 2.7 concluímos que:

$$L_r u = \sum_{i=1}^n \mu_i^r \text{Hess}g(e_i, e_i), \text{ desde que, } S_{r+1} \equiv 0.$$

Seja  $\{E_i\}_{i=1}^{n+1}$  a base canônica do  $\mathbb{R}^{n+1}$  e denotemos por  $g_i = E_i(g)$ ,  $1 \leq i \leq n+1$  e  $g_{ij} = E_i E_j(g)$ ,  $1 \leq i, j \leq n+1$  onde,

$$g_{i,j} = 0 \text{ se } i \text{ ou } j = n+1$$

isto é,

$$g_i = \frac{a^2 x_i}{\sqrt{a^2[\|x\|^2 - (x_{n+1})^2] + 1}}, \\ g_{ii} = \frac{a^4[\|x\|^2 - (x_{n+1})^2] + a^2 - a^4 x_i^2}{\left(\sqrt{a^2[\|x\|^2 - (x_{n+1})^2] + 1}\right)^3};$$

$$g_{ij} = \frac{-a^4 x_i x_j}{(a^2[||x||^2 - (x_{n+1})^2] + 1)^{3/2}}.$$

Agora, escrevendo cada elemento nessa base  $(e_k) = \sum_{j=1}^{n+1} A_{kj} E_j$ , onde  $E_{n+1} = \eta$ , temos:

$$Hessg(x)(e_k, e_k) = \sum_{j=1}^n A_{kj}^2 g_{jj} + 2 \sum_{j \neq s} A_{kj} A_{ks} g_{js}$$

$$Hessg(x)(e_k, e_k) = \frac{a^2 \sum_{j=1}^n A_{kj}^2(x)}{(a^2[||x||^2 - x_{n+1}^2] + 1)^{3/2}} + \frac{a^4}{(a^2[||x||^2 - x_{n+1}^2] + 1)^{3/2}} \sum_{j=1}^n (A_{kj} x_s - A_{ks} x_j)^2. \quad (4.6)$$

Consideramos a seqüência  $\{x_n\}$  como no Teorema 3.1, isto é:

$$f(x_n) \rightarrow \sup f$$

$$||grad(f)(x_n)|| \rightarrow 0$$

e ainda

$$L_r f(x_n) \leq \frac{2}{n} \text{traço} P_r.$$

**Afirmação:** Existe  $\delta' > 0$  tal que  $Hessg(x_n)(e_k, e_k) \geq \delta'$ .

**Demonstração da afirmação:** Suponha que afirmação é falsa. Assim, existe uma subseqüência  $\{y_m\}$  de  $\{x_n\}$  tal que:

$$Hessg(y_m)(e_k, e_k) \rightarrow 0.$$

A convergência acima, juntamente com (4.6), significa que

$$\sum_{j=1}^n A_{kj}^n(y_m)$$

tende a zero. Assim,  $e_k(y_m) \rightarrow \eta\{e_k\}$  quando  $\{e_k(y_m)\}$  é o referencial  $\{e_k\}$  em  $y_m \in M^n$ . Por outro lado, temos que:

$$(e_k(f))_{(y_m)} = -\langle e_k(y_m), \eta \rangle + \frac{2[\langle e_k, \phi(x) \rangle - 2\phi_3 \langle e_k, \eta \rangle]}{\sqrt{a^2[\|x\|^2 - \langle \phi(x), \eta \rangle^2] + 1}} \rightarrow 1 \text{ quando } m \rightarrow \infty$$

mas isto contradiz a conclusão do Teorema 3.1, o qual afirma que

$$|\text{grad}(f)(y_m)| \rightarrow 0$$

□

**Teorema 4.3.** *Considere uma imersão isométrica  $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , satisfazendo as mesmas hipóteses do Teorema 3.1 e  $u$  uma função de classe  $C^2$  tal que:*

$$L_r u(x) \geq \text{traço} P_r f(u(x)).$$

*Uma condição suficiente para  $u$  ser limitada superiormente, em  $M$ , é que exista uma função contínua  $g$ , positiva em algum intervalo  $[a, \infty]$ , tal que*

$$\int_a^\infty \left( \int_a^t g(r) dr \right)^{-\frac{1}{2}} dt < \infty \text{ para algum } b \geq a,$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\left( \int_0^t g(r) dr \right)}{tg(t)} < \infty \text{ e } \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} > 0.$$

**Demonstração:** Seja  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função crescente de classe  $C^2$  com  $F'' \neq 0$ . Defina em  $M^n$  a seguinte função

$$g(x) = \frac{1}{F(u(x))}.$$

Um cálculo direto fornece as igualdades:

$$\begin{aligned}
\text{grad}(g)(x) &= -\frac{F'(u(x))}{F(u(x))^2} \text{grad}(u)(x) \\
\text{Hess}g(x)(e_i, e_i) &= -\frac{F'(u(x))}{(F'(u(x)))^2} \text{Hess}u(x)(e_i, e_i) \\
&\quad - e_i(u(x)) e_i \left( \frac{F'(u(x))}{(F(u(x)))^2} \right) \\
\text{Hess}g(x)(e_i, e_i) &= -\frac{F'(u(x))}{(F(u(x)))^2} \text{Hess}u(x)(e_i, e_i) \\
&\quad - (e_i(u(x)))^2 \frac{F''(u(x))}{(F(u(x)))^2} \\
&\quad + 2(e_i(u(x)))^2 \frac{(F'(u(x)))^2}{(F(u(x)))^3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_r g(x) &= \sum_{i=1}^n \mu_i^r \text{Hess}g(e_i, e_i) \\
&= -\frac{F'(u(x))}{(F(u(x)))^2} L_r u(x) - \left[ \sum_{i=1}^n \mu_i^r (e_i u(x))^2 \right] \cdot \left[ \frac{F''(u(x))}{(F(u(x)))^2} \right] \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^n \mu_i^r (e_i u(x))^2 \frac{(F'(u(x)))^2}{(F(u(x)))^3}.
\end{aligned}$$

Segue-se do Teorema 3.1 que existe uma seqüência  $\{x_k\}$  em  $M^n$  tal que

$$a) |\text{grad}(g)(x_k)|^2 = \frac{(F'(u(x_k))|\text{grad}(u)(x_k)|)^2}{(F(u(x_k)))^4} \leq \frac{1}{k^2};$$

$$b) L_r g(x_k) \geq \frac{-2}{k} \text{traço} P_r(x_k);$$

$$c) g(x_k) \longrightarrow \inf g.$$

Portanto:

$$\frac{(F'(u(x_k)))^2 L_r g(x_k)}{(F(u(x_k)))^2 |F''(u(x_k))|} \geq -\frac{2(F'(u(x_k)))^2 \text{traço} P_r}{k(F(u(x_k)))^2 |F''(u(x_k))|}. \quad (4.7)$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} \frac{(F'(u(x_k))^2 L_r(g_k(x_k)))}{(F(u(x_k)))^2 |F''u(x_k)|} &\leq \frac{-(F'u(x_k))^3 \text{traço}P_r f(u(x_k))}{(F(u(x_k)))^4 |F''u(x_k)|} & (4.8) \\ &+ \frac{(F')(u(x_k))^2 |\text{grad}(u)(x_k)|^2 \text{traço}P_r}{(F(x_k))^2} \\ &+ 2(\text{traço}P_r) \frac{F'(u(x_k))^2}{F(u(x_k))} \frac{(F'(u(x_k)))^2 |\text{grad}(u)(x_k)|^2}{(F(u(x_k)))^4 |F''(u(x_k))|}. \end{aligned}$$

Segue das equações (4.7), (4.8) e da hipótese que  $P_r$  é definido positivo:

$$\begin{aligned} \frac{2}{kF(u(x_k))} \frac{(F'(u(x_k)))^2}{F(u(x_k)) |F''(u(x_k))|} &= \frac{2}{k} \frac{(F'(u(x_k)))^2}{(F(u(x_k)))^2 |F''(u(x_k))|} \\ &\leq \frac{(F'(u(x_k)))^3 f(u(x_k))}{(F(u(x_k)))^4 |F''(u(x_k))|} \\ &+ |\text{grad}(g)(x_k)|^2 \\ &+ 2 \frac{|F'(u(x_k))|^2}{F(u(x_k)) |F''(u(x_k))|} |\text{grad}(g)(x_k)|^2 \end{aligned}$$

Suponha que seja possível escolher uma função positiva  $F$  tal que:

$$L = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{(F'(t))^2}{F(t) |F''(t)|} < \infty \quad (4.9)$$

e

$$l = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{(F'(t))^3 f(t)}{(F(t))^4 |F''(t)|} > 0. \quad (4.10)$$

**Afirmção A** Se uma tal  $F$  existe então,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} u(x_k) < \infty. \quad (4.11)$$

**Prova da Afirmção A** Suponhamos por contradição que a Afirmção A seja falsa, logo existe uma subsequencia da sequência  $\{x_k\}$ , a qual denotaremos também por  $\{x_k\}$ , satisfazendo a desigualdade 4.12 abaixo desde que,  $k$  seja suficientemente grande.

$$-\frac{2L}{kF(u(x_k))} \leq \frac{2L}{k^2} + \frac{1}{k^2} - l. \quad (4.12)$$

Da equação 4.12 segue-se que  $l \leq 0$ , uma contradição. Usando a "Afirmção A" concluímos que  $\inf g > 0$ , logo,  $u$  é necessariamente limitada superiormente. Para concluir a demonstração do Teorema 4.3 basta mostrarmos que tal  $F$  existe, vejamos. Definimos a função  $F$  da seguinte maneira:

$$F(s) = \int_b^s \left( \int_a^t g(r) dr \right)^{-\frac{1}{2}} dt + 1, \quad (4.13)$$

onde  $g$  é uma função contínua no intervalo  $[a, \infty)$  satisfazendo a seguinte condição:

$$\int_b^\infty \left( \int_a^t g(r) dr \right)^{-\frac{1}{2}} dt < \infty. \quad (4.14)$$

Consideremos uma extensão, da função  $F$  à toda reta real, de classe  $C^2$ , monótona e crescente, a qual também denotaremos por  $F$  e observamos que para esta função, as desigualdades (4.9) e (4.10) são, respectivamente, equivalentes a:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\left( \int_0^t g(s) ds \right)^{\frac{1}{2}}}{F(t)g(t)} < \infty \quad (4.15)$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{F(t)^4 g(t)} > 0, \quad (4.16)$$

desde que  $t$  seja suficientemente grande. Mas a equação 4.15 é equivalente a:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\left( \int_0^t g(r) dr \right)}{tg(t)} < \infty. \quad (4.17)$$

□

**Teorema 4.4.** *Seja  $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma imersão isométrica própria e completa. Suponha que exista  $r \in \{1, \dots, n-1\}$  para o qual  $P_r$  é positivo definido em  $M^n$ . Se  $u$  é uma função de classe  $C^2$  limitada superiormente em  $M^n$  então existe uma seqüência  $\{x_k\}$  em  $M^n$  tal que:*

i)  $\limsup u(x_k) = \sup u$  quando  $k \rightarrow +\infty$ ;

ii)

$$\|grad(u)(x_k)\| \leq \frac{2(u(x_k) - u(x_0) + 1)\gamma(x_k)}{k \log(\gamma^2(x_k) + 2)(\gamma^2(x_k) + 2)},$$

$$\|P_r grad(u)(x_k)\| \leq \frac{2(u(x_k) - u(x_0) + 1)\gamma(x_k)\|P_r(x_k)\|}{k(\gamma^2(x_k) + 2)(\log(\gamma^2(x_k) + 2))},$$

iii)

$$L_r u(x_k) \leq \frac{2(u(x_k) - u(x_0) + 1)[\text{traço}P_r + \langle \varphi(x_k) - \varphi(x_0), \text{traço}(AP_r)\xi \rangle]}{k(\gamma^2(x_k) + 2) \log(\gamma^2(x_k) + 2)}$$

$$-\frac{4(u(x_k) - u(x_0) + 1)\gamma(x_k)\langle P_r grad(\gamma)(x_k), grad(\gamma)(x_k) \rangle}{(k \log(\gamma^2(x_k) + 2))(\gamma^2(x_k) + 2)^2}.$$

**Demonstração:** Como na demonstração do Teorema 3.1, definimos, para todo inteiro positivo  $k$  a função

$$g_k(x) := \frac{u(x) - u(x_0) + 1}{(\log(\gamma^2(x) + 2))^{\frac{1}{k}}},$$

onde  $\gamma(x) = \|x - x_0\|$ . Segue do fato que  $\phi$  é uma imersão própria que  $g_k$  possui um ponto de máximo local em  $x_k \in M^n$ . Pelo Lema 2.6 temos:

$$g(x_k) = \sup g, \tag{4.18}$$

$$grad(g)(x_k) = 0, \tag{4.19}$$

$$L_r g(x_k) \leq 0. \tag{4.20}$$

É conveniente definir a função

$$h(x) = (\log(\gamma^2(x) + 2))^{\frac{1}{k}}.$$

Se  $x_k$  não pertence ao cut locus de  $x_0$ , então por um cálculo direto, obtemos:

$$L_r u(x_k) \leq \frac{2(u(x_k) - u(x_0) + 1)[\gamma(x_k)L_r(\gamma(x_k)) + \langle P_r \text{grad}(\gamma)x_k, \text{grad}(\gamma)(x_k) \rangle]}{\log(\gamma^2(x_2) + 2)(\gamma^2(x_k) + 2)}, \quad (4.21)$$

$$\frac{1}{2}L_r(\gamma(x_k)) = \gamma(x_k)L_r(\gamma(x_k)) + \langle P_r(\text{grad}(\gamma)(x_k), \text{grad}(\gamma)(x_k)) \rangle, \quad (4.22)$$

$$\frac{1}{2}L_r(\gamma^2(x_k)) = \text{traço}P_r + \langle \phi(x_k) - \phi(x_0), N \rangle \text{traço}(AP_r). \quad (4.23)$$

onde  $N$  é um campo normal a  $M^n$ . O item iii) segue das desigualdades (4.21), (4.22) e (4.23). Com o mesmo argumento usado na prova do Teorema 3.1 provamos os outros itens.  $\square$

**Corolário 4.5.** *Considere uma imersão isométrica  $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  satisfazendo as mesmas hipóteses do Teorema 4.4. Além disso, suponha que:*

- i)  $\frac{|H_{r+1}|}{H_r} \leq C_0$ ,  $C_0$  constante;
- ii)  $\|P_r(x)\| = O(\log(\rho^2(x) + 2))$ , quando  $\rho(x) \rightarrow +\infty$ .

Se  $u$  é uma função de classe  $C^2$  limitada superiormente em  $M^n$ , então existe uma seqüência  $\{x_k\}$  tal que:

- a)  $u(x_k) \rightarrow \sup u$ ;
- b)  $\|\text{grad}(u)(X_k)\| \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow +\infty$ ;
- c)  $L_r u(x_k) \leq \frac{C}{k} \text{traço} P_r$ .

**Corolário 4.6.** Considere  $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma imersão isométrica satisfazendo as mesmas hipóteses do Teorema 4.4. Seja  $f$  uma função de classe  $C^2$  limitada superiormente em  $M^n$ . Suponha que  $L_r f = \lambda f$  e  $f(x_0) > 0$ . Então,  $\lambda$  é não positivo em algum ponto de  $M$  ou podemos encontrar uma seqüência  $\{x_k\} \subset M$  tal que

$$\lambda(x_k) \leq \frac{2[\text{traço}P_r + \langle \varphi(x_k) - \varphi(x_0), \text{traço}(AP_r)\xi \rangle]}{k(\gamma^2(x_k) + 2)\log(\gamma^2(x_k) + 2)} - \frac{4\gamma(x_k)\langle P_r \text{grad}(\gamma)(x_k), \text{grad}(\gamma)(x_k) \rangle}{(k\log(\gamma^2(x_k) + 2))(\gamma^2(x_k) + 2)^2}.$$

**Teorema 4.7.** Considere uma imersão isométrica completa  $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  satisfazendo (3.2). Suponha que para algum ponto  $p \in M^n$  existe  $\epsilon > 0$ ,  $c > 0$ , tal que  $K_M(\rho(x)) \geq \frac{n+\epsilon}{(n-1)\rho(x)^2}$ . Então toda função positiva  $r$ -super-harmônica  $f$ , definida em  $M$  isto é,  $L_r(f(x)) \leq 0$ , é constante.

**Demonstração:** Como na prova do Teorema 3.1, temos que existe um seqüência  $\{x_k\} \subset M$  tal que:

$$\begin{aligned} L_r(f^2(x_k)) &\geq -\frac{2f^2(x_k)[\rho(x_k)L_r\rho(x_k) + \sum_{i=1}^n \mu_i^r e_i(\rho(x_k)^2)]}{k \log(\rho^2(x_k) + 2)(\rho^2(x_k) + 2)} \\ &+ \frac{4f^2(x_k)\rho^2(x_k)\langle P_r \text{grad}\rho(x), \text{grad}\rho(x_k) \rangle}{k \log(\rho^2(x_k) + 2)(\rho^2(x_k) + 2)^2}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} L_r(f^2) &= 2fL_r f^2 + 2\langle P_r \text{grad}f, \text{grad}f \rangle \\ &\leq 2\langle P_r \text{grad}f, \text{grad}f \rangle. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} 2\langle P_r \text{grad}f, \text{grad}f \rangle &\geq -\frac{2f^2(x_k)[\rho(x_k)L_r\rho(x_k) + \langle P_r \text{grad}f, \text{grad}f \rangle]}{k \log(\rho^2(x_k) + 2)(\rho^2(x_k) + 2)} \\ &+ \frac{4f^2(x_k)\rho^2(x_k)\langle P_r \text{grad}\rho(x_k), \text{grad}\rho(x_k) \rangle}{k \log(\rho^2(x_k) + 2)(\rho^2(x_k) + 2)^2}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\rho^2(x_k)\langle P_r \text{grad}\rho(x_k), \text{grad}\rho(x_k)\rangle}{k(\rho(x_k) + 2)\log(\rho^2(x_k) + 2)} &\geq -2\rho(x_k)L_r\rho(x_k) & (4.27) \\
&+ 2\langle P_r \text{grad}\rho(x_k), \text{grad}\rho(x_k)\rangle \\
&+ \frac{4\rho^2(x_k)\langle P_r \text{grad}\rho(x_k), \text{grad}\rho(x_k)\rangle}{\rho^2(x_k) + 2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\rho(x_k)L_r\rho(x_k) &\geq -\frac{\rho^2(x_k)\langle P_r \text{grad}\rho(x_k), \text{grad}\rho(x_k)\rangle}{k(\rho^2(x_k) + 2)(\log(\rho^2(x_k) + 2))} \\
&- 2\langle P_r \text{grad}\rho(x_k), \text{grad}\rho(x_k)\rangle \\
&+ \frac{4\rho^2(x_k)\langle P_r \text{grad}\rho(x_k), \text{grad}\rho(x_k)\rangle}{(\rho^2(x_k) + 2)}.
\end{aligned}$$

Fixe  $\epsilon > 0$  se  $\rho(x) \rightarrow +\infty$  quando  $k \rightarrow +\infty$  então  $2\rho(x_k)L_r\rho(x_k) \geq -\epsilon$  para todo  $k$  suficientemente grande. Mas, isso contradiz a hipótese sobre a curvatura seccional de  $M^n$ . Logo, concluímos que  $f^2$  possui um mínimo, pelo princípio do mínimo,  $f$  deve ser constante.  $\square$

## Referências Bibliográficas

- [B-C] Barbosa, J. L. and Colares, A. G., *Stability of hypersurfaces with constant  $r$ -mean curvature*, Ann. Global Anal. and Geom., **15**(1997): 177-197.
- [C-Y1] Cheng, S. Y. and Yau, S. T., *Differential equation on Riemannian manifolds and their geometric applications*, Comm. Pure Appl. Math., **28**(1975) : 333-354.
- [C-Y2] Cheng, S. Y. and Yau, S. T., *Hypersurfaces with constant scalar*, Math. Ann., **225**(1977) : 195-204.
- [C-X] Chen, Q. and Xin, Y. L., *A generalized maximum principle and its applications in geometry*, Amer. J. Math., **114** (1992) : 355-366.
- [G-W] Greene, R. E. and Wu, Y., *Function theory on manifolds which possess a pole*, Lecture Notes in Math 699, Springer Verlag.
- [H-L] Hounie, J. e Leite, M.L., *Uniqueness and Nonexistence Theorems for Hypersurfaces with  $H_r \equiv 0$* , Global Anal. and Geom., **17** (1999): 397-407.
- [J-K] Jorge, L. P. and Koutroufiotis, D., *An estimate for the curvature of bounded submanifolds*, Amer. J. Math, **103(04)** (1981) : 711-725.
- [J-X] Jorge, L.P. and Xavier, F., *An inequality between the exterior diameter and the mean curvature of bounded immersion*, Math. Z., **178**(1981) : 77-82.
- [Om] Omori, H., *Isometric immersion of Riemannian manifolds*, J. Japan, **19**(1967) : 205-214.

- [R-R-S] Ratto, A., Rigoli, M., Setti, G., *On the Omori-Yau maximum principle and its applications to differential equations and geometry*, J. Funct. Anal., **134** (1995), 486-510.
- [Re] Reilly, R., *Variational properties of functions of the mean curvature for hypersurfaces in space forms*, J. Diff. Geom., **8** 1973 : 465-477.
- [Ro] Rosenberg, H., *Hipersurfaces of constant curvature in spaces forms*, Bull. Sc. Math., **117(II)**(1973) : 211-239.
- [S] Sato, J., *Hipersuperfícies com curvatura escalar nula invariantes pela ação  $O(p+1) \times O(p+1)$* , Tese de Doutorado, Universidade Federal do Ceará, 02/2000.
- [T] Takegoshi, K. *A volume estimate for strong subharmonicity and maximum principle on complete Riemannian manifolds*, Nagoya, Math, J. **151**(1998) 25-36.
- [Y] Yau, S. T. *Harmonic function on complete Riemannian manifolds*, (1975), Comm. Pure Appl. Math. **28** : 205-228.