

Este trabalho é dedicado ao meu pai  
José Francisco de Sousa.

# ÍNDICE

Introdução .....	1
Capítulo 1 - Superfícies do tipo Costa em $\mathbb{H}^3$ .....	5
1.1 Introdução .....	5
1.2 Imersões mínimas completas em $\mathbb{R}^3$ .....	5
1.3 Superfícies do tipo Costa em $\mathbb{R}^3$ .....	9
1.4 Superfícies do tipo Costa em $\mathbb{H}^3$ .....	12
1.4.1 As superfícies primas $M_{k,1}$ .....	13
1.4.2 As superfícies primas $M_{k,x}$ , $x > 1$ . .....	22
Capítulo 2 - Uma estimativa inferior para o índice .....	27
2.1 Introdução .....	27
2.2 Toros de Wente simétricos .....	27
2.3 Definição e resultados sobre índices .....	30
2.4 Estimativa inferior para os índices das superfícies $W_{l/n}$ .....	36
Referências .....	47

# Introdução

A teoria das superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$  constitui uma das mais fascinantes áreas da Matemática, representando um tópico cuja vitalidade não deixa de espantar seus praticantes. Historicamente, estas superfícies foram descobertas em 1776 por J. L. Lagrange. Mais precisamente, Lagrange logrou resolver o problema de determinar, dentre todas as superfícies no espaço com bordo dado por uma curva fixada, aquela que possui a *menor* área. Consta que Lagrange resolveu este problema no caso em que as superfícies em questão são gráficas sobre uma região do plano, aplicando para tanto métodos oriundos de suas famosas investigações no Cálculo das Variações e chegando assim a uma equação diferencial parcial que caracterizaria todas as soluções locais deste problema. Estas soluções correspondiam a superfícies *estacionárias* para o problema variacional considerado. Levando em conta, porém, a natureza complicada (não-linear) da equação, não é de admirar que, durante muito tempo, as superfícies mínimas conhecidas se resumissem a alguns poucos exemplos.

A situação mudou radicalmente no século passado, principalmente por conta dos esforços de A. Enneper, K. Weierstrass e H. A. Schwarz. Os dois primeiros desta lista estão diretamente envolvidos na descoberta de uma representação local, em termos de funções holóformas, para superfícies mínimas, o que possibilitou ampliar significativamente o universo de soluções da equação de Lagrange, ao passo que Schwarz desenvolveu um método de construção baseado em reflexões e estudou critérios garantindo a *estabilidade*, no sentido variacional, das soluções. Ainda assim, técnicas efetivas que permitissem construir exemplos globais (isto é, completos) e mergulhados ainda teriam que esperar algum tempo para serem formuladas.

Um marco decisivo aconteceu em 1982 quando Celso Costa, em sua Tese de Doutorado ([C1]), escreveu as equações do primeiro exemplo completo e mergulhado, e tendo ainda a propriedade adicional de ter curvatura Gaussiana total finita, exemplo este diferente do plano e do catenóide, que já eram classicamente conhecidos. Apoiando-se nos trabalhos pioneiros de R. Osserman ([O]) e L. Jorge-W. Meeks ([JM]), Costa usou a teoria das

funções elípticas para descrever um exemplo que tinha a topologia de um toro com três fins mergulhados. Embora não tenha conseguido provar que a parte central da superfície era também mergulhada, Costa e seu trabalho receberam a devida atenção da comunidade, de modo que pouco tempo depois D. Hoffman e W. Meeks, inspirados por uma notável investigação computacional, conseguiram verificar que a superfície de Costa era de fato mergulhada ([HM]). Mais tarde, estes autores juntamente com Karcher ([HK]), adaptaram o método desenvolvido por Costa e construíram famílias a um parâmetro de superfícies mínimas mergulhadas com gênero  $k$  e três fins, a qual denotaremos por  $M_{k,x}$ ,  $x \geq 1$ . A superfície  $M_{1,1}$  corresponde à descoberta por Costa.

Em 1985, R. Bryant ([Br]) realizou um estudo em que procurava determinar que classes de superfícies em formas espaciais de dimensão 3 admitiam uma representação local em termos de dados holomorfos, a exemplo do que havia sido feito por Enneper e Weierstrass no caso das superfícies mínimas. Como resultado de suas investigações, conclui-se que somente um novo caso aparecia, a saber, as superfícies com curvatura média constante igual a 1 (CMC 1) no espaço hiperbólico com curvatura seccional igual a  $-1$ . Classicamente, já se sabia que tais superfícies eram localmente isométricas a superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$  através da correspondência de Darboux-Lawson, mas Bryant foi além e mostrou que do ponto de vista global a analogia se mantinha no sentido que as superfícies CMC 1 também admitiam uma representação do tipo Enneper-Weierstrass. Em particular, ele mostrou que algumas superfícies mínimas clássicas, como o catenóide e a superfície de Enneper, possuíam correspondentes hiperbólicas, que ele chamou de "primas". A representação de Bryant posteriormente permitiu a construção de inúmeros exemplos globais, notadamente por W. Rossman, M. Umehara e K. Yamada. Em particular, em ([RUY]), estes autores mostraram que, partindo-se de uma superfície mínima satisfazendo um conjunto de condições geométricas naturais, era possível construir uma família a um parâmetro de superfícies CMC 1 e assim forneceram muitos outros exemplos de superfícies primas. Em função disto, é natural procurar verificar se essa construção pode ser levada a cabo partindo das superfícies de Costa-Hoffmann-Meeks-Karcher mencionadas acima. O objetivo da primeira parte deste trabalho é precisamente provar que o esquema pode de fato ser levado a cabo, gerando por conseguinte exemplos de primas das superfícies de Costa-Hoffman-

Meeks-Karcher. Mais precisamente, provamos o seguinte teorema:

**Teorema 1** *Se  $M_{k,x}$  denota a família de superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$  descrita acima, então*

*(i) Se  $x > 1$  existe (para todo  $k \geq 1$ ) uma família correspondente a um parâmetro de superfícies CMC 1 em  $\mathbb{H}^3$ .*

*(ii) Se  $x = 1$  existe (para  $k = 1$ ) a família correspondente de superfícies CMC 1 em  $\mathbb{H}^3$ .*

Quando  $x = 1$  e  $k > 1$  daremos evidência numérica das famílias de primas em  $\mathbb{H}^3$ .

Uma outra classe de superfícies em  $\mathbb{R}^3$  que, a exemplo das superfícies mínimas, admite uma interpretação variacional para o funcional área é aquela formada pelas superfícies de curvatura média constante (CMC). Nesse caso, porém, há que considerar tão-somente variações preservando o volume. É um fato bem conhecido que a construção, mesmo local, de superfícies CMC é comparativamente mais complicada que no caso mínimo, a razão sendo essencialmente que não existe representação em termos de dados holomorfos para tais superfícies. Em particular, durante muito tempo os únicos exemplos *compactos* conhecidos de tais superfícies eram as esferas redondas. Talvez por essa razão, costumou-se atribuir a H. Hopf uma conjectura segundo a qual as únicas superfícies compactas CMC em  $\mathbb{R}^3$  seriam forçosamente as esferas redondas. O próprio Hopf, por sinal, havia mostrado que as únicas superfícies imersas de gênero zero são esferas. Em 1962, A. D. Aleksandrov ([AA]) mostrou-se que esse era também o caso se admitia-se que a superfície era *mergulhada* e em 1984 L. Barbosa e M. do Carmo ([BC]) verificaram a validade da conjectura se a superfície era suposta *estável* em relação ao problema variacional associado. Estes resultados positivos seguramente reforçavam a intuição de Hopf. Logo, não deixou de causar espanto geral quando em 1986, H. Wente ([We]) exibiu uma exemplos de toros imersos de curvatura média constante, negando portanto a validade da conjectura de Hopf. Posteriormente, a busca de exemplos foi sobremaneira simplificada através dos trabalhos de U. Abresch ([A]) e R. Walter ([Wa]). Estes autores conseguiram exibir de forma bastante explícita os chamados *toros de Wente* por meio de funções elípticas e abelianas, mostrando que apareciam naturalmente como solução de um problemas de período, sendo, por conseguinte, parametrizados pelo conjunto das frações reduzidas  $\ell/n \in (1, 2)$ . O toro correspondente será denotado por  $W_{\ell/n}$ .

Do ponto de vista variacional, tendo em vista o trabalho de Barbosa e do Carmo acima citado, vê-se que os toros de Wente são todos instáveis, ou seja, é sempre possível deformá-los preservando o volume e diminuindo estritamente a área. Em face disso, é natural tentar estabelecer cotas inferiores para o *índice*, isto é, a dimensão do espaço de variações admissíveis que decrescem a área. Tal investigação ganha maior relevo se levarmos em conta que toda superfície CMC completa não compacta possui índice *infinito* ([LR1]). Um resultado preliminar nesta direção foi obtido por W. Rossman ([R1]). O propósito da segunda parte deste trabalho é melhorar ligeiramente a estimativa aí obtida, ou seja, demonstrar o seguinte teorema:

**Teorema 2**  $Ind(W_{\ell/n}) \geq 8 \forall \ell/n$ , com a possível exceção das oito superfícies:

$$W_{3/2}, W_{4/3}, W_{5/3}, W_{7/4}, W_{8/5}, W_{12/7}, W_{14/9} \text{ e } W_{16/9}.$$

A demonstração consiste essencialmente em construir subespaços de variações sobre os quais a forma quadrática associada à segunda fórmula da variação é *estritamente negativa*. Nos caso das oito superfícies não cobertas pelo teorema, apresentaremos evidência numérica para a validade do mesmo.

# Capítulo 1

## Superfícies do tipo Costa em $\mathbb{H}^3$

### 1.1 Introdução

Neste capítulo usaremos o método apresentado em [RUY] para construir novos exemplos de superfícies com curvatura média constante (CMC) 1 no espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^3$ . (Denotamos por  $\mathbb{H}^3$  a única variedade de dimensão 3 que é completa e simplesmente conexa com curvatura seccional constante e igual a  $-1$ ). Estes exemplos correspondem à família de superfícies mínimas  $M_{k,x}$  em  $\mathbb{R}^3$  descritas por Hoffman e Karcher [HK]. Este capítulo é organizado do seguinte modo. Na seção 2, recordaremos alguns resultados clássicos sobre a teoria das superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$ , incluindo aí o Teorema da Representação de Weierstrass. Um resumo sobre a construção das superfícies  $M_{k,x}$  é apresentado na seção 3. Teoremas de existência e uma descrição da geometria das superfícies CMC 1 correspondentes são dados na última seção.

### 1.2 Imersões mínimas completas em $\mathbb{R}^3$

Começaremos enunciando o teorema da representação de Weierstrass. (veja [O] ou [L]). Esta representação nos possibilita descrever um grande número de exemplos de superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$ .

**Teorema 3** *Sejam  $M$  uma superfície de Riemann,  $\eta$  uma 1-forma holomorfa em  $M$  e  $g : M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  uma função meromorfa e consideremos a forma vetorial*

$$\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = ((1 - g^2)\eta, i(1 + g^2)\eta, 2g\eta). \quad (1.1)$$

Então

$$X(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \Phi \quad (1.2)$$

define uma aplicação conforme mínima (possivelmente ramificada) de algum recobrimento de  $M$  em  $\mathbb{R}^3$ . Esta aplicação está bem definida em  $M$  se, e só se,  $X$  não tem período real em  $M$ , isto é, se e só se,

$$\operatorname{Period}_\alpha(\Phi) := \operatorname{Re} \oint_\alpha \Phi = 0 \quad (1.3)$$

para todas as curvas fechadas  $\alpha$  em  $M$ . Além disso, esta transformação é regular desde que os pólos de  $g$  coincidam com os zeros de  $\eta$  e a ordem de um pólo de  $g$  seja precisamente metade da ordem de um zero de  $\eta$ . Reciprocamente, toda imersão regular mínima e conforme  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  pode ser expressa na forma (2.2) para alguma função meromorfa  $g$  e alguma forma holomorfa  $\eta$ . Além disso,  $g$  é a projeção estereográfica da aplicação normal de Gauss  $N : M \rightarrow S^2$  de  $X$ .

De agora em diante, nos referiremos a  $\{M, g, \eta\}$  como os dados de Weierstrass para  $M$  e a  $X$  como a representação de Weierstrass de  $M$ . Em geral, para verificar-se que a condição de período (1.3) acontece, introduz-se alguns parâmetros arbitrários, que são posteriormente ajustados, na definição dos dados de Weierstrass da superfície. Ao número de tais parâmetros denomina-se a *dimensão do problema de período*. Denotando o recobrimento universal de  $M$  por  $\tilde{M}$ , a imersão mínima  $X^* : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  com os dados de Weierstrass  $\{M, g, i\eta\}$  é chamado de *superfície conjugada* de  $X$ , e será denotada por  $X^*$ . A métrica induzida em  $M$  por  $X$  é expressa por

$$ds^2 = (1 + |g|^2)^2 \eta \cdot \bar{\eta},$$

onde  $\cdot$  denota o produto simétrico, e a curvatura de Gauss  $K$  de  $X$  é

$$K = -\frac{4dg \cdot \bar{d}g}{(1 + |g|^2)^4 \eta \cdot \bar{\eta}}.$$

No caso de curvatura total finita  $\int_M K dA > -\infty$ , é conhecido o seguinte teorema de Osserman:

**Teorema 4** ([L], [O]) *Seja  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão mínima completa e conforme com curvatura total finita. Então,*

- i)  *$M$  é difeomorficamente conforme a  $\overline{M}_k - \{e_1, \dots, e_r\}$  onde  $\overline{M}_k$  é uma superfície de Riemann compacta com gênero  $k$  e  $e_1, \dots, e_r$  são pontos em  $\overline{M}_k$ ,  $r \geq 1$ ;*
- ii)  *$X$  é própria;*
- iii) *A aplicação de Gauss  $N : M \rightarrow S^2$  é meromorfa em  $M$  e estende-se a uma função meromorfa em  $\overline{M}_k$ ; e a 1-forma holomorfa  $\eta$  estende-se a uma 1-forma meromorfa em  $\overline{M}_k$ ;*
- iv) *A curvatura total é um múltiplo inteiro de  $4\pi$  e satisfaz*

$$\int_M K dA \leq -4\pi(k + r - 1),$$

onde  $k$  e  $r$  são os inteiros definidos no item (i).

Se  $D_j \subset \overline{M}_k$ , é uma vizinhança perfurada de  $e_j$ , então a imagem  $X(D_j)$  de  $D_j$  por  $X$  é um fim de  $M$  que denotaremos por  $E_j$ . Visto que  $g$  é projeção estereográfica da aplicação normal de Gauss  $N$  de  $X$  podemos supor, depois de uma rotação de  $X$  em  $\mathbb{R}^3$ , que  $g(e_j) = 0$ . Neste caso,  $E_j$  é um fim mergulhado se, e só se,  $\eta$  tem um pólo de ordem dois em  $e_j$  (veja [JM]). Então, numa vizinhança de  $e_j$ ,  $g$  e  $\eta$  têm as seguintes expressões locais:

$$g(z) = a_n z^n + o(z)^{n+1}, a_n \neq 0, n \geq 1 \text{ e } \eta(z) = \frac{b}{z^2} + o(z^0), b \neq 0.$$

Diremos que um fim mergulhado  $E_j$  é do tipo *catenóide* se  $n = 1$  e que é do tipo *planar* com ordem  $n - 1$  se  $n > 1$ . Além disso,

- i) todos os fins de  $M$  são mergulhados se, e somente se, existe a igualdade em (iv) do Teorema 2.2.

ii) Se nenhum dos fins de  $M$  se intersectam, então, depois de uma rotação de  $\mathbb{R}^3$ , a aplicação de Gauss  $N$  satisfaz  $N(e_j) = (0, 0, \pm 1)$ , para todo  $j = 1, \dots, r$ .

É claro que se  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  é um mergulho, então estas duas condições acima ocorrem. Porém, estas condições não são suficientes para garantir que  $X$  seja um mergulho. Pode-se encontrar exemplos sobre este fato em ([W1], [W2], [HK]). Porém, quando  $M$  é mergulhada, completa, com curvatura total finita, temos que fora de um compacto suficientemente grande de  $\mathbb{R}^3$ ,  $M$  é assintótica a um número finito de meio-catenóides e planos, os quais podemos admitir terem a mesma normal vertical.

O Princípio da Reflexão de Schwarz para Superfícies mínimas também será central para os argumentos que serão utilizados. Antes de enunciá-lo, recordaremos alguns fatos. Uma curva em qualquer superfície  $M$  em  $\mathbb{R}^3$  é uma linha reta se, e somente se, ambas as curvaturas geodésica e a curvatura normal se anulam. Uma curva principal em  $M$  que não é uma linha reta tem a propriedade de ser um segmento geodésico se, e somente se, ela estiver em um plano ortogonal à superfície. Expressando a segunda forma fundamental em termos de  $g$  e  $\eta = f dz$ , para alguma função holomorfa  $f$  e coordenada holomorfa  $z$ , podemos concluir que uma curva  $c$  em  $X(M)$  é:

$$\text{assintótica} \iff g'f(dzc'(t))^2 \in i\mathbb{R}.$$

$$\text{principal} \iff g'f(dzc'(t))^2 \in \mathbb{R}.$$

Segue-se deste fato que geodésicas principais de  $X$  correspondem a linhas retas de  $X^*$ , e vice-versa.

**Teorema 5** (*Princípio da Reflexão de Schwarz*) *Se uma superfície mínima é limitada por um segmento de linha  $\ell$ , então ela pode ser estendida através de uma rotação de um ângulo  $\pi$  em torno de  $\ell$  para uma superfície suave mínima que contém  $\ell$  em seu interior. Se uma superfície mínima com fronteira contém uma geodésica principal  $c$  em sua fronteira, então esta superfície pode ser estendida suavemente através de  $c$  por reflexão do plano contendo  $c$ .*

### 1.3 Superfícies do tipo Costa em $\mathbb{R}^3$

Nesta seção apresentaremos a construção e algumas propriedades das superfícies  $M_{k,x}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  e  $x \geq 1$ . Cada uma das superfícies  $M_{k,x}$  é conformemente equivalente a uma superfície de Riemann de gênero  $k$  perfurada em três pontos. As superfícies  $M_{k,1}$  (as quais denotaremos  $M_k$ ) têm dois fins do tipo catenóide e um fim do tipo planar. Quando  $x > 1$ , todos os três fins são do tipo catenóide. O exemplo com  $k = 1$  e  $x = 1$  foi descoberto por Costa, que o construiu fazendo uso da função  $\wp$  de Weierstrass. Ele também provou que esta superfície satisfaz todas as condições necessárias para ser mergulhada. Hoffman e Meeks provaram que as superfícies  $M_k$  são mergulhadas e simétricas (veja [HM1] e [HM2]). As superfícies  $M_{k,x}$  também são mergulhadas, e foram construídas por Hoffman e Karcher (veja [HK]). Referências básicas para o material desta seção são [HM2], [HK] e [C2].

Usaremos o Teorema 2.1 (da Representação de Weierstrass), para o qual precisaremos de uma superfície de Riemann, uma função meromorfa e uma 1-forma holomorfa. Começaremos pela descrição da estrutura complexa de  $M_k$ . Considere, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , a superfície de Riemann compacta  $\overline{M}_k$  associada ao polinômio irreduzível

$$P(z, w) = w^{k+1} - z^k(z+1)(z-1).$$

Sejam  $p_0 = (0, 0)$ ,  $p_{-1} = (-1, 0)$ ,  $p_{+1} = (1, 0)$ , e  $p_\infty = (\infty, \infty)$  os pontos singulares de  $P(z, w)$ . Então

$$\overline{M}_k = \{(z, w) \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2 \mid w^{k+1} - z^k(z+1)(z-1) = 0\} \quad (1.4)$$

é uma superfície de Riemann compacta associada a  $P(z, w)$ . Pode-se ver que  $\overline{M}_k$  é um recobrimento ramificado a  $k+1$  folhas da esfera de Riemann  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , com gênero  $k$ . Agora, considere

$$M_k = \overline{M}_k - \{p_{-1}, p_{+1}, p_\infty\}, \quad (1.5)$$

que é uma superfície de Riemann obtida pela perfuração de  $\overline{M}_k$  em três pontos. O próximo teorema define a imersão mínima conforme de  $M_k$  em  $\mathbb{R}^3$ .

**Teorema 6** (Hoffman e Meeks [HM]) *Sejam  $M_k, \overline{M}_k$  superfícies de Riemann dadas por (3.3) e (3.4) e defina uma 1-forma holomorfa e uma função meromorfa em  $\overline{M}_k$  pondo*

$$\eta = \left(\frac{z}{w}\right)^k dz = \frac{w}{(z+1)(z-1)} dz, \quad g = \frac{a}{w}, \quad a \in \mathbb{R}^+, \quad (1.6)$$

Considere a 1-forma vetorial

$$\begin{aligned} \Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) &= ((1-g^2)\eta, i((1+g^2)\eta), 2g\eta) \\ &= \left( \left(\frac{z^k}{w^k} - \frac{a^2 z^k}{w^{k+2}}\right) dz, i\left(\frac{z^k}{w^k} + \frac{a^2 z^k}{w^{k+2}}\right) dz, \frac{2az^k}{w^{k+1}} dz \right). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Então existe um único  $a > 0$  tal que  $X : M_k \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$X(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \Phi, \quad p \in M_k, \quad (1.8)$$

é uma imersão completa propriamente mergulhada mínima e conforme com curvatura total finita de  $M_k$  em  $\mathbb{R}^3$ .

Depois de convenientes rotações e translações em  $\mathbb{R}^3$ , as superfícies  $M_k$  possuem as seguintes propriedades:

- 1) a curvatura total de  $M_k$  é  $-4\pi(k+2)$ ;
- 2)  $M_k$  tem um fim planar situado entre dois fins do tipo catenóide. O fim planar é assintótico ao plano  $(x_1, x_2)$ ;
- 3)  $M_k$  intersecta o plano  $(x_1, x_2)$  em  $k+1$  linhas retas, que se encontram em ângulos iguais na origem;
- 4) o grupo de simetria de  $M_k$  é o grupo diedral com  $4(k+1)$  elementos gerado por reflexões em  $k+1$  planos verticais de simetria que se encontra no eixo  $x_3$ , e rotações sobre uma das linhas em (3);
- 5)  $M_k$  pode ser decomposto em  $4(k+1)$  pedaços congruentes entre si, cada qual sendo um gráfico;

- 6)  $M_k$  é a única superfície mínima propriamente mergulhada de gênero  $k$  com três fins, curvatura total finita e grupo de simetria contendo  $4(k+1)$  ou mais elementos.

A simetria da superfície é usada para mostrar que a dimensão da condição de período é 1. O valor da constante  $a$  no Teorema 3.1 para o qual o problema de período é resolvido é unicamente determinado. Seu valor é dado por  $a = \sqrt{A/B}$ , onde

$$A = \int_0^1 \frac{(t^k(1-t^2))^{1/(k+1)}}{t^2-1} dt \quad \text{e} \quad B = -\frac{1}{2} \int_0^1 (t^k(1-t^2))^{-1/(k+1)} dt. \quad (1.9)$$

Para cada  $k$ , a superfície  $M_k$  pertence a uma família de superfícies mínimas mergulhadas que agora passamos a considerar.

**Teorema 7 ([HK])** Para cada  $k \geq 1$ , existe uma família a um parâmetro  $M_{k,x}$ ,  $x \geq 1$ , de superfícies mínimas mergulhadas com gênero  $k$  e curvatura total finita. As superfícies  $M_{k,1}$  são precisamente as superfícies  $M_k$  do Teorema 3.1. Todas as superfícies  $M_{k,x}$ ,  $x > 1$ , possuem três fins do tipo catenóide.

Para a construção destas superfícies, consideraremos as superfícies de Riemann e os dados de Weierstrass dados por:

$$M_{k,x} = \{(z, w) \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2 \mid w^{k+1} + c_x z^k (z-x)(z+x^{-1}) = 0, \quad c_x = x + x^{-1}, \quad x = \cot \alpha\} \setminus$$

$$\{(x, 0), (-x^{-1}, 0), (\infty, \infty)\}, \quad (1.10)$$

para  $\frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,

$$g = \frac{a(mz+1)}{w} \quad a > 0, \quad 0 \leq m < x; \quad \eta = \frac{wdz}{(z-x)(z+x^{-1})}. \quad (1.11)$$

Isto produzirá, pelo Teorema 2.1,

$$X(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \Phi = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p ((1-g^2), i(1+g^2), 2g) \eta, \quad p \in M_{k,x}$$

uma (possivelmente ramificada) imersão mínima e conforme em  $R^3$ . As constantes  $a$  e  $m$  podem ser escolhidas de forma que as superfícies  $X$  sejam mergulhadas e bem definidas em  $M_{k,x}$ . A próxima proposição é central para a prova do Teorema 3.2.

**Proposição 1** ([HK]) *Fixe  $k \geq 1$  e seja  $g, \eta$  e  $M_{k,x}$  como acima. Então para todo  $\frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ , existe um único  $m(\alpha) < \cot \alpha$  não-negativo e  $a(\alpha)$  tais que  $\text{period}_\gamma(\Phi) := \text{Re} \oint_\gamma \Phi = \text{Re} \int_\gamma (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \vec{0}$  para todas as curvas fechadas  $\gamma$  nas superfícies de Riemann  $M_{k,x}$ . Além disso,  $m(\alpha)$  e  $a(\alpha)$  satisfazem as condições para as superfícies  $M_{k,x}$  serem mergulhadas.*

**Observação 1** Quando  $x = 1$ ,  $m(1) = 0$ , e (3.9) e (3.10) nos dá (3.3) e (3.5) para as superfícies  $M_k = M_{k,1}$ .

## 1.4 Superfícies do tipo Costa em $\mathbb{H}^3$

Nesta seção estudaremos o problema de período para as superfícies  $M_{k,x}$ . Consideraremos os casos  $x = 1$  e  $x > 1$  separadamente. Quando  $x > 1$ , mostraremos que todas as superfícies  $M_{k,x}$  tem problemas de período não-degenerado no sentido de [RUY]. Porém, quando  $x = 1$  é mais complicado mostrar que as superfícies  $M_{k,1}$  tem problema de período não-degenerado. Para este caso, provaremos que quando  $k = 1$ , a superfície  $M_1$  tem problema periódico não-degenerado, e daremos evidência numérica disto para  $k > 1$ . Precisaremos inicialmente da seguinte definição:

**Definição 1** *Uma imersão mínima completa  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  é simétrica se existe uma subregião  $D \subset f(S)$  que é topologicamente um disco limitado por geodésicas planares que não sejam retas e que o interior de  $D$  não contenha qualquer geodésica planar que sejam retas.*

Note que se  $f$  é simétrica com relação a um tal subdisco  $D$ , então pelo Princípio da Reflexão de Schwartz,  $D$  gera a superfície inteira por reflexões através de planos que contêm a geodésica planar.

### 1.4.1 As superfícies $M_{k,1}$

Usando propriedades conhecidas das superfícies  $M_{k,1}$ , vê-se que os domínios fundamentais destas superfícies são limitados por duas geodésicas planares e uma única linha reta. Além disso, o problema de período para estas superfícies é unidimensional. Considere o disco  $D$  que é a união deste domínio fundamental e sua rotação por  $180^\circ$  em torno da reta que faz parte da fronteira. Com relação a este disco  $D$ , a imersão  $X$  dada pelo Teorema 3.1 é simétrica (veja figura 4.1).

Para aplicar os resultados de [RUY],  $D$  deve ser limitado somente por geodésicas planares. Portanto, temos que usar a união destes dois domínios fundamentais com uma reta na fronteira em comum, e assim o problema de período se torna bidimensional. Por causa disto, como explicaremos mais tarde, é necessário adicionar um parâmetro real extra  $b$  para os dados de Weierstrass de  $X$ . Seja  $M_k(b)$  a superfície de Riemann dada por

$$M_k(b) = \{(z, w) \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2 \mid w^{k+1} - z^k(z+1)(z-b) = 0\} \setminus \{(-1, 0), (b, 0), (\infty, \infty)\}, \quad (1.12)$$

e considere os dados de Weierstrass

$$\eta = \left(\frac{z}{w}\right)^k dz = \frac{w}{(z+1)(z-b)} dz, \quad g = \frac{a}{w}, \quad a \in \mathbb{R}^+. \quad (1.13)$$

Denotando por  $\tilde{M}_k(b)$  o recobrimento universal de  $M_k(b)$ , então com a introdução do parâmetro extra  $b$  acima, temos o seguinte lema:

**Lema 1** *Seja  $X : \tilde{M}_k(b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  dado por*

$$X(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0=(0,0)}^p \Phi = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p ((1-g^2)\eta, i((1+g^2)\eta, 2g\eta), \quad p \in M_k(b), \quad (1.14)$$

onde  $g$  e  $\eta$  são definidos através das equações (4.12). Então, fixando uma folha de  $M_k(b)$  sobre  $\{z \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$  e restringindo os caminhos de integração de  $p_0$  para  $p$  para estarem sobre esta folha, existem constantes  $c_1$  e  $c_2$  tais que:

i) A curva  $S_{1,1} := X((0, b)) \subset P_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_2 \cos \frac{\pi}{k+1} - x_1 \sin \frac{\pi}{k+1} = 0\}$ .

ii) A curva  $S_{1,2} := X((-\infty, -1)) \subset \tilde{P}_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_2 \cos \frac{\pi}{k+1} - x_1 \sin \frac{\pi}{k+1} = c_1\}$ .

iii) A curva  $S_{2,1} := X((-1, 0)) \subset P_2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_2 = 0\}$ .

iv) A curva  $S_{2,2} := X((b, \infty)) \subset \tilde{P}_2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_2 = c_2\}$ .

As constantes  $c_1$  e  $c_2$  só dependem de  $a$  e  $b$ . Além disso, as curvas  $S_{i,j}$  são geodésicas planares.

**Prova:** Se  $z \in (0, b)$  ou  $(-\infty, -1)$ , então  $g \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Neste caso, podemos assumir que

$$\phi_1(z) = r(z)e^{\frac{-ik\pi}{k+1}} - s(z)e^{\frac{-i(k+2)\pi}{k+1}} \quad \text{e} \quad \phi_2(z) = i \left( r(z)e^{\frac{-ik\pi}{k+1}} - is(z) \right) e^{\frac{-i(k+2)\pi}{k+1}},$$

onde  $r(z), s(z) \in \mathbb{R}^+$ . Então

$$\phi_2 \cos \frac{\pi}{k+1} - \phi_1 \sin \frac{\pi}{k+1} = i(r(z) + s(z)) \in i\mathbb{R}.$$

Agora, se  $t, z \in (0, b)$ , temos que

$$\operatorname{Re} \int_0^t \left( \phi_2 \cos \frac{\pi}{k+1} - \phi_1 \sin \frac{\pi}{k+1} \right) dz = 0,$$

e isto implica que  $S_{1,1} \subset P_1$ .

Fixando qualquer  $u \in (-\infty, -1)$  e considerando  $t, z \in (-\infty, -1)$  temos

$$\operatorname{Re} \int_0^t \left( \phi_2 \cos \frac{\pi}{k+1} - \phi_1 \sin \frac{\pi}{k+1} \right) dz =$$

$$\operatorname{Re} \int_0^u \left( \phi_2 \cos \frac{\pi}{k+1} - \phi_1 \sin \frac{\pi}{k+1} \right) dz + \operatorname{Re} \int_u^t \left( \phi_2 \cos \frac{\pi}{k+1} - \phi_1 \sin \frac{\pi}{k+1} \right) dz =$$

$$\operatorname{Re} \int_0^u \left( \phi_2 \cos \frac{\pi}{k+1} - \phi_1 \sin \frac{\pi}{k+1} \right) dz := c_1.$$

Isto implica que  $S_{1,2} \subset \tilde{P}_1$ , além disso,  $c_1$  é independente de  $u$ .

É fácil ver que  $\Phi_2 \in i\mathbb{R}$  se  $z \in (-1, 0)$  ou  $(b, \infty)$ . Se  $t, z \in (-1, 0)$ , temos que

$$\operatorname{Re} \int_0^t \phi_2 dz = 0.$$

Isto implica que  $S_{2,1} \subset P_2$ . Fixando qualquer  $u \in (b, \infty)$  e considerando  $t \in (b, \infty)$ , temos que

$$\operatorname{Re} \int_0^t \Phi_2 dz = \operatorname{Re} \int_0^u \Phi_2 dz + \operatorname{Re} \int_u^t \Phi_2 dz = \operatorname{Re} \int_0^u \Phi_2 dz := c_2.$$

Isto implica que  $S_{2,2} \subset \tilde{P}_2$ ; além disso,  $c_2$  é independente de  $u$ .

Considerando  $c(t) = t + 0i$ , então uma simples cálculo fornece

$$g'f(dz(c'(t)))^2 = -\frac{a}{(k+1)(t+1)(t-b)} \left( \frac{k}{t} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t-b} \right) (dz(c'(t)))^2 \in \mathbb{R}.$$

Isto implica que  $S_{i,j}$  são curvas principais, e conseqüentemente elas são geodésicas planares.

■

Pelo Lema 4.1, a fronteira do disco  $D$  de simetria da superfície  $X(M_k(b))$  é composto de quatro geodésicas planares. Além disso, o problema do período somente é resolvido se o plano  $P_1$  coincide com o plano  $\tilde{P}_1$  e se  $P_2$  coincide com  $\tilde{P}_2$ , isto é, se  $c_1 = c_2 = 0$  (veja figura 4.1). Mais ainda, o problema do período é bidimensional e é resolvido quando  $b = 1$  e  $a = \sqrt{A/B}$ , onde  $A$  e  $B$  são dados através das equações (3.8).

Agora considere

$$\mathcal{D}_1 := \{\text{distância orientada entre os planos } P_1 \text{ e } \tilde{P}_1\} = c_1.$$

$$\mathcal{D}_2 := \{\text{distância orientada entre os planos } P_2 \text{ e } \tilde{P}_2\} = c_2.$$

Definindo  $\mathcal{D} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  por  $\mathcal{D}(a, b) = (\mathcal{D}_1(a, b), \mathcal{D}_2(a, b))$ , então podemos dizer que o problema de período é *não-degenerado* se existir  $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ , tal que  $\mathcal{D}(a_0, b_0) = 0$  e  $\mathcal{D}$  é uma aplicação aberta numa vizinhança de  $(a_0, b_0)$ . (Esta definição é suficiente para nossas considerações, sendo um caso especial de uma definição mais geral apresentada em [RUY]). Está claro agora por que adicionamos o parâmetro extra  $b$ . Se fixarmos  $b = 1$ , então  $\mathcal{D}$

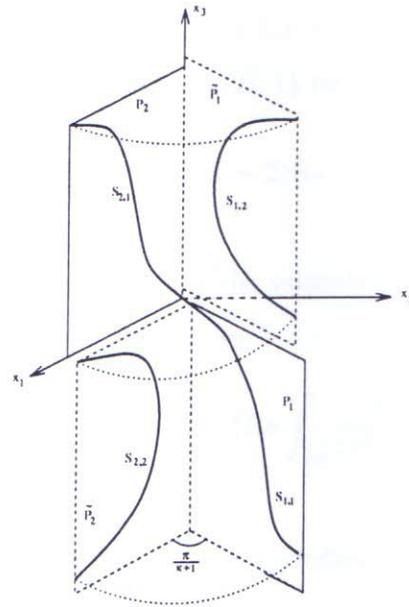


Figura 1.1: O disco  $D$  em  $X(M_k)$  (ou  $X(M_k(b))$ ) em relação ao qual a superfície é simétrica.

não poderia ser uma aplicação aberta pois neste caso  $\mathcal{D}$  seria uma aplicação de  $\mathbb{R}^1$  para  $\mathbb{R}^2$ . Assim permitimos  $b$  variar para dar a  $\mathcal{D}$  a possibilidade de ser uma aplicação aberta.

Considere  $\alpha_1(t), \alpha_2(t) \subseteq M_k(b)$  curvas na folha escolhida como no Lema 4.1, tal que suas projeções na coordenada  $z$  sejam respectivamente  $-1 + e^{it}$  e  $b + be^{it}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ . Com esta consideração e a definição de  $\mathcal{D}$ , teremos que

$$\mathcal{D}_1(a, b) = \operatorname{Re} \int_{\alpha_1} \left( \phi_2(a, b) \cos \frac{\pi}{k+1} - \phi_1(a, b) \sin \frac{\pi}{k+1} \right) dz, \quad (1.15)$$

$$\mathcal{D}_2(a, b) = \operatorname{Re} \int_{\alpha_2} \phi_2(a, b) dz. \quad (1.16)$$

Usando estas expressões para  $\mathcal{D}_1$  e  $\mathcal{D}_2$  podemos encontrar que:

$$\frac{\partial \mathcal{D}_1}{\partial a}(a_0, b_0) = 2a_0 \operatorname{Re} \int_{\alpha_1} \frac{ie^{-\frac{i\pi}{k+1}} dz}{(z^2 - 1)w}, \quad \frac{\partial \mathcal{D}_2}{\partial a}(a_0, b_0) = 2a_0 \operatorname{Re} \int_{\alpha_2} \frac{idz}{(z^2 - 1)w},$$

$$\frac{\partial \mathcal{D}_1}{\partial b}(a_0, b_0) = \frac{a_0^2(k+2)}{k+1} \operatorname{Re} \int_{\alpha_1} \frac{iz^{2k}(z+1)e^{-\frac{i\pi}{k+1}} dz}{w^{2k+3}} + \frac{k}{k+1} \operatorname{Re} \int_{\alpha_1} \frac{iz^{2k}(z+1)e^{-\frac{i\pi}{k+1}} dz}{w^{2k+1}},$$

$$\frac{\partial \mathcal{D}_2}{\partial b}(a_0, b_0) = \frac{a_0^2(k+2)}{k+1} \operatorname{Re} \int_{\alpha_2} \frac{iz^{2k}(z+1) dz}{w^{2k+3}} + \frac{k}{k+1} \operatorname{Re} \int_{\alpha_2} \frac{iz^{2k}(z+1) dz}{w^{2k+1}}.$$

Com a escolha das curvas  $\alpha_j(t)$  como acima, e fazendo a substituição  $t = \pi - \theta$ , então o Jacobiano  $J\mathcal{D}$  de  $\mathcal{D}$  no ponto  $(a_0, b_0) = (\sqrt{A/B}, 1)$  reduz-se a

$$J\mathcal{D}(a_0, b_0) = \left( \frac{4a_0}{k+1} \operatorname{Re} \int_{\alpha_2} \frac{idz}{(z^2-1)w} \right) \left( a_0^2(k+2) \operatorname{Re} \int_{\alpha_2} \frac{izdz}{(z^2-1)^2w} + k \operatorname{Re} \int_{\alpha_2} \frac{izwdz}{(z^2-1)^2} \right). \quad (1.17)$$

A equação para  $J\mathcal{D}(a_0, b_0)$  torna-se mais simples quando  $k = 1$ . Neste caso, usando (4.14) teremos a seguinte expressão para o Jacobiano:

$$J\mathcal{D}(a_0, b_0) = \left( 2a_0 \operatorname{Re} \int_{\alpha_2} \frac{idz}{(z^2-1)w} \right) \cdot \left( 3a_0^2 \operatorname{Re} \int_{\alpha_2} \frac{izdz}{(z^2-1)w} + \operatorname{Re} \int_{\alpha_2} \frac{iz^2}{(z^2-1)w} \right),$$

onde  $w^2 = z(z^2-1)$ , e  $\alpha_2(t)$  tem a projeção na coordenada  $z$  dada por  $1 + e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .

Visto que

$$2a_0 \operatorname{Re} \int_{\alpha_2} \frac{idz}{(z^2-1)w} = \operatorname{Re} \left[ ia \sqrt{e^{it}} \sqrt{1+e^{it}} \sqrt{2+e^{it}} \left( \frac{1}{2+e^{it}} - \frac{1}{e^{it}} \right) \Big|_0^\pi \right] +$$

$$a_0 \operatorname{Re} \int_0^\pi \frac{\sqrt{e^{it}} dt}{\sqrt{1+e^{it}} \sqrt{2+e^{it}}},$$

$$3a_0^2 \operatorname{Re} \int_{\alpha_2} \frac{izdz}{(z^2-1)^2w} = \operatorname{Re} \left[ \frac{3}{2} i a_0^2 e^{-it} \sqrt{e^{it}} \sqrt{1+e^{it}} \sqrt{2+e^{it}} \Big|_0^\pi \right] + \operatorname{Re} \left[ \frac{ia_0^2}{4} (\sqrt{e^{it}} \sqrt{1+e^{it}} \sqrt{2+e^{it}}) \right.$$

$$\left. \left( \frac{7}{4} - 3e^{-it} - e^{-2it} + \frac{1}{4(1+2e^{-it})^2} - \frac{2}{(1+2e^{-t})} \right) \Big|_0^\pi \right] +$$

$$\frac{3}{4} a_0^2 \operatorname{Re} \int_0^\pi \frac{\sqrt{e^{it}} \sqrt{1+e^{it}}}{\sqrt{2+e^{it}}} dt,$$

$$\operatorname{Re} \int_{\alpha_2} \frac{iz^2}{(z^2-1)w} dz = \operatorname{Re} \left[ \frac{i}{2} \sqrt{e^{it}} \sqrt{1+e^{it}} \sqrt{2+e^{it}} \left( \frac{1}{2+e^{it}} - \frac{1}{e^{it}} \right) \Big|_0^\pi \right] +$$

$$\frac{\operatorname{Re} \int_0^\pi \frac{\sqrt{e^{it}} \sqrt{1+e^{it}}}{\sqrt{2+e^{it}}} dt - \operatorname{Re} \int_0^\pi \frac{\sqrt{e^{it}} \sqrt{2+e^{it}}}{\sqrt{1+e^{it}}} dt,$$

temos finalmente que

$$J\mathcal{D}(a_0, b_0) = \left( \int_0^\pi f_1(t) dt \right) \cdot \left( \int_0^\pi f_2(t) dt \right),$$

onde

$$f_1(t) := \operatorname{Re} \left( \frac{a_0 \sqrt{e^{it}}}{4\sqrt{1+e^{it}}\sqrt{2+e^{it}}} \right)$$

$$f_2(t) := (3a_0^2 + 2) \operatorname{Re} \left( \frac{\sqrt{e^{it}}\sqrt{1+e^{it}}}{\sqrt{2+e^{it}}} \right) - 2 \operatorname{Re} \left( \frac{\sqrt{2+e^{it}}\sqrt{e^{it}}}{\sqrt{1+e^{it}}} \right).$$

Os gráficos de  $f_1$  e  $f_2$  são apresentados nas figuras 4.2. Não podemos calcular explicitamente as antiderivadas para  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$ , porém, examinando o comportamento das funções  $f_1$  e  $f_2$ , teremos o seguinte lema:

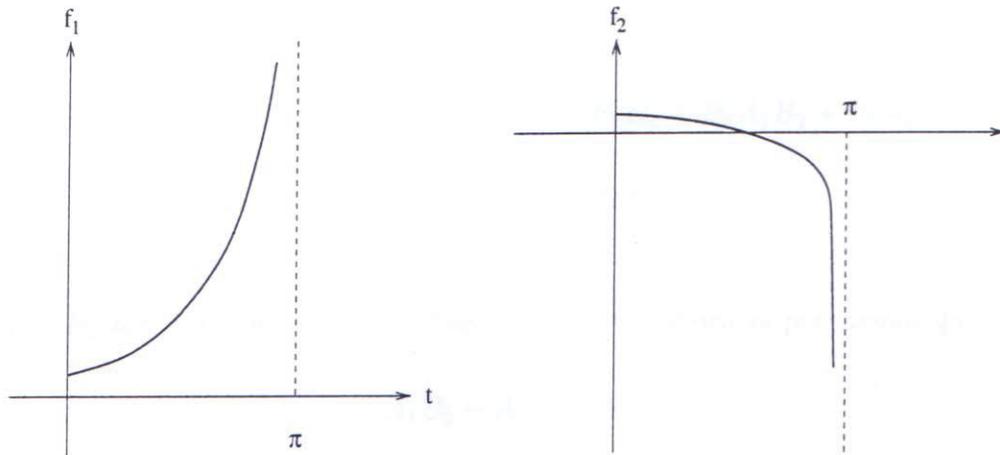


Figura 1.2:

**Lema 2** *Existem constantes  $t_0 \approx \pi$  e  $C$  tal que:*

- (i)  $f_1 \geq 0$  em  $[0, \pi)$ ;
- (ii)  $f_2 < 0$  em  $[t_0, \pi)$ ;
- (iii)  $|\frac{d}{dt}f_2| < C$  em  $[0, t_0]$ .

**Prova:** *Ao longo da demonstração usaremos a seguinte notação:*

$$\sqrt{z} = \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}},$$

onde  $z = \alpha + i\beta$  é um número complexo. Com esta notação tem-se que:

$$\sqrt{2}\sqrt{e^{it}} = \sqrt{1 + \cos t} + i\sqrt{1 - \cos t} := A_0 + iB_0 \quad (1.18)$$

$$\sqrt{2}\sqrt{1+e^{it}} = \sqrt{1+\cos t + \sqrt{2+2\cos t}} + i\sqrt{-1-\cos t + \sqrt{2+2\cos t}} := A_1 + iB_1 \quad (1.19)$$

$$\sqrt{2}\sqrt{2+e^{it}} = \sqrt{2+\cos t + \sqrt{5+4\cos t}} + i\sqrt{-2-\cos t + \sqrt{5+4\cos t}} := A_2 + iB_2 \quad (1.20)$$

Note que (i) é equivalente a mostrar que  $\operatorname{Re} \frac{\sqrt{1+e^{it}}\sqrt{2+e^{it}}}{\sqrt{e^{it}}} \geq 0$ . Assim, usando (4.17), (4.18) e (4.19) temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{\sqrt{1+e^{it}}\sqrt{2+e^{it}}}{\sqrt{e^{it}}} &= A_0A_1A_2 - A_0B_1B_2 + B_0A_1B_2 + B_0A_2B_1 \\ &\geq B_2B_0A_1 - B_2A_0B_1, \end{aligned}$$

já que  $A_i$  e  $B_i$  são números positivos. Então, (i) é verdadeiro se provarmos que

$$A_1B_0 - A_0B_1 \geq 0.$$

Mostraremos agora que  $(A_1B_0)^2 \geq (2A_0B_1)^2$ . Note que isto é equivalente a:

$$\sqrt{1+\cos t}(3\cos t+5) - \sqrt{2}(5\cos t+3) \geq 0 \quad \text{para } t \in [0, \pi].$$

Pode-se concluir que se  $x = \cos t$ , então a última desigualdade é verdadeira visto que ela é equivalente a  $9x^3 - 11x^2 - 5x + 7 \geq 0$  para  $x \in [-\frac{3}{5}, 1)$ , provando (i).

Usando (5.17), (5.18) e (5.19) temos:

$$\begin{aligned} f_2(t) &= \left( \frac{3a_0^2+2}{2\sqrt{2}\sqrt{5+4\cos t}} - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2+2\cos t}} \right) (A_0A_1A_2 + A_0B_2B_1) + \\ &+ \left( \frac{3a_0^2+2}{2\sqrt{2}\sqrt{5+4\cos t}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2+2\cos t}} \right) (B_0A_1B_2 - B_0B_1A_2). \end{aligned}$$

É fácil ver que  $B_0A_1B_2 - B_0B_1A_2 < 0, \forall t \in (0, \pi)$ . Então,

$$f_2(t) < 0 \quad \text{se} \quad \frac{3a_0^2 + 2}{2\sqrt{5 + 4 \cos t}} - \frac{1}{\sqrt{2 + 2 \cos t}} < 0.$$

Usando  $a_0$  dado pela equação (3.8), vemos que esta última desigualdade é válida  $\forall t \in (t_0, \pi)$  onde  $t_0 = \arccos\left(\frac{10 - (3a_0^2 + 2)^2}{(3a_0^2 + 2)^2 - 8}\right) < 0.95\pi$ , implicando a parte (ii).

Um cálculo direto nos dá que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f_2(t) &= - \frac{c(B_0B_1B_2 + B_0A_1A_2 + B_1A_0A_2 - B_2A_0A_2)}{2\sqrt{2}\sqrt{5 + 4 \cos t}} \\ &+ \frac{(B_0B_1B_2 + B_0A_1A_2 + B_2A_0A_1 - B_1A_0A_2)}{2\sqrt{2}\sqrt{2 + 2 \cos t}} \\ &- \frac{c(-\sin^2 t B_0B_1B_2 + \sin t A_0(2 + \cos t)A_1A_2 + B_0 \cos t(2 + \cos t)A_1A_2)}{4(5 + 4 \cos t)^{3/2}\sqrt{1 + \cos t}} \\ &- \frac{c(-\sin t \cos t A_0A_1A_2 - B_2 \cos t A_0(2 + \cos t)A_1 - B_1 \cos t A_0(2 + \cos t)A_2)}{4(5 + 4 \cos t)^{3/2}\sqrt{1 + \cos t}} \\ &- \frac{(-\sin^2 t B_0B_1B_2 + \sin t A_0(1 + \cos t)A_1A_2 + B_0 \cos t(1 + \cos t)A_1A_2)}{8(1 + \cos t)^{3/2}\sqrt{5 + 4 \cos t}} \\ &- \frac{(-\sin t \cos t A_0B_1A_2 - B_1 \cos t A_0(1 + \cos t)A_2 - B_2 \cos t A_0(1 + \cos t)A_1)}{8(1 + \cos t)^{3/2}\sqrt{5 + 4 \cos t}} \end{aligned}$$

onde  $c = \frac{3a_0^2 + 2}{2}$ . Esta expressão para a derivada de  $f_2$  implica que

$$\left| \frac{d}{dt} f_2(t) \right| < C := 20 \quad \forall t \in [0, t_0].$$

Isto conclui (iii) no lema. ■

Observamos pela parte (ii) do lema 4.2, que  $\int_0^\pi f_2(t) dt < \int_0^{0.95\pi} f_2(t) dt$ . Assim  $\int_0^\pi f_2(t) dt < 0$  ocorre sempre que  $\int_0^{0.95\pi} f_2(t) dt < 0$ . Entretanto,  $f_2(s) \leq f_2\left(\frac{it_0}{n}\right) + \frac{Ct_0}{n}$ ,  $\forall s \in \left[\frac{(i-1)t_0}{n}, \frac{it_0}{n}\right]$

onde  $n$  é um número natural, visto que a derivada  $\frac{d}{dt}f_2$  é limitada em valor absoluto por  $C$ . Portanto,

$$\int_0^{0.95\pi} f_2(t)dt \leq \sum_{i=1}^n \left( f_2\left(\frac{it_0}{n}\right) + \frac{Ct_0}{n} \right) \frac{t_0}{n} = \left( \sum_{i=1}^n f_2\left(\frac{it_0}{n}\right) \frac{t_0}{n} \right) + \frac{Ct_0^2}{n} < 0$$

para  $n$  grande (vê-se por exemplo que a última desigualdade é verdadeira para  $n = 250$ ).

Segue-se imediatamente desse fato e da parte (i) do Lema 4.2 que  $JD(a_0, b_0) < 0$ . Assim,  $\mathcal{D}$  é uma aplicação aberta numa vizinhança de  $(a_0, b_0)$ , donde se conclui o seguinte resultado:

**Teorema 8** *A superfície do Costa  $M_1$  tem problema periódico bi-dimensional que é não-degenerado com respeito ao disco simétrico  $D$ .*

O seguinte corolário é uma consequência imediata do Teorema 5.10 em [RUY].

**Corolário 1** *Existe uma família correspondente a um parâmetro de superfícies CMC 1 do tipo Costa em  $\mathbb{H}^3$ . Cada representante desta família é completo e com curvatura total finita e, além disso, os três fins são regulares e mergulhados.*

**Observação 2** Quando  $k > 1$ , pode-se ver facilmente por métodos numéricos que as superfícies  $M_k$  também têm problemas de período bidimensionais não-degenerados. Portanto, para cada  $k$ , existe uma família a um parâmetro de correspondente CMC 1 superfícies em  $\mathbb{H}^3$ . Estas superfícies são completas e com curvatura total finita; além disso, elas têm gênero  $k$  e possuem os três fins regulares mergulhados. Dois dos fins se aproximam do mesmo ponto da esfera no infinito e são assintóticos ao fim do catenóide primo no sentido de [LR]. O terceiro fim também se aproxima de um ponto na fronteira da esfera e é assintótico a uma horoesfera. Como estas superfícies não contêm linhas retas (considerando que as correspondentes superfícies mínimas contêm), o grupo de simetria  $D_{k+1}$  é um subgrupo do grupo de simetria  $D_{k+1} \times Z_2$  das superfícies mínimas de Costa-Hoffman-Meeks.

### 1.4.2 As superfícies $M_{k,x}$ , $x > 1$

As superfícies  $M_k$  pertencem a uma família de superfícies mínimas mergulhadas  $M_{k,x}$ ,  $x \geq 1$ . As superfícies  $M_{k,1}$  são justamente as superfícies  $M_k$  do Teorema 3.1. Considerando as superfícies  $M_{k,x}$  com  $x > 1$ , temos o seguinte resultado, que segue do Lema de Monotonicidade em [HK]:

**Teorema 9** Para cada  $k \geq 1$  e  $x > 1$ , a superfície  $M_{k,x}$  têm problema de período bidimensional e não-degenerado.

**Prova:** Como o domínio fundamental da superfície  $M_{k,x}$ ,  $x > 1$ , não contém uma linha reta em sua fronteira, podemos aplicar diretamente o método de [RUY]. Considere os intervalos  $I_1 := (-x^{-1}, 0)$ ,  $I_2 := (x, \infty)$ ,  $I_3 := (\infty, -x^{-1})$ ,  $I_4 := (0, x)$  no  $z$ -plano e as curvas  $\gamma_1$  (resp.  $\gamma_2$ ) conectando  $I_1$  e  $I_2$  (resp.  $I_3$  e  $I_4$ ), como na figura (4.3). Os intervalos  $I_1$  e  $I_2$  (resp.  $I_3$  e  $I_4$ ) são transformados por  $X = \text{Re} \int \Phi$  em curvas que pertencem a planos paralelos e verticais. Depois de uma rotação conveniente, podemos assumir que a curva  $X(I_1)$  pertence ao plano  $x_2 = 0$ , e a curva  $X(I_4)$  pertence ao plano  $x_2 \cos \frac{\pi}{k+1} = x_1 \sin \frac{\pi}{k+1}$ .

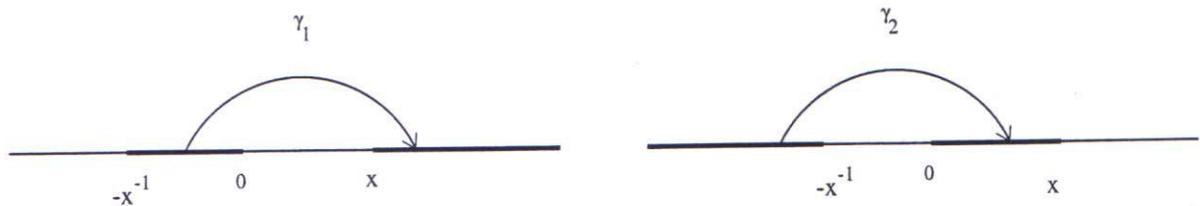


Figura 1.3:

Pela Proposição 3.1, para cada  $\alpha \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$  e  $k \geq 1$ , podemos encontrar  $m(\alpha)$ ,  $a(\alpha)$  tal que a curva  $X(I_2)$  (resp.  $X(I_3)$ ) também pertence ao plano  $x_2 = 0$  (resp. ao plano  $x_2 \cos \frac{\pi}{k+1} = x_1 \sin \frac{\pi}{k+1}$ ). Isto é equivalente a dizer que

$$\text{Re} \oint_{\gamma_1} \phi_1 = 0 \quad \text{and} \quad \text{Re} \oint_{\gamma_2} \left( \phi_2 \cos \frac{\pi}{k+1} - \sin \frac{\pi}{k+1} \right) = 0$$

para todo  $\alpha \in [\pi/4, \pi/2)$  e  $k \geq 1$ . Fixando  $\alpha$  e  $k$ , provaremos agora que o Jacobiano  $J\mathcal{D}(a, m)$  não se anula, onde  $\mathcal{D}$  é definido por

$$\mathcal{D}(a, m) = (\mathcal{D}_1(a, m), \mathcal{D}_2(a, m)) = \left( \oint_{\gamma_1} \phi_2, \oint_{\gamma_2} \left( \phi_2 \cos \frac{\pi}{k+1} - \phi_1 \sin \frac{\pi}{k+1} \right) \right).$$

Para ver isto, considere as seguintes expressões:

$$\phi_1 = \frac{1}{2a} \left( u \left( \frac{1+mz}{z} \right)^2 - a^2 u^{-1} \right) u^{k+1} dz,$$

$$\phi_2 = \frac{i}{2a} \left( u \left( \frac{1+mz}{z} \right)^2 + a^2 u^{-1} \right) u^{k+1} dz,$$

onde  $w := \frac{z}{u}$ . Usando isto, temos que as duas condições de período são equivalentes a

$$\mathcal{D}_1(a(\tilde{\alpha}), m(\tilde{\alpha})) = \operatorname{Re} \int_{\gamma_1} i \left( \frac{1+mz}{z} \right)^2 u^{k+2} dz + a^2 \operatorname{Re} \int_{\gamma_1} u^k dz,$$

$$\mathcal{D}_2(a(\tilde{\alpha}), m(\tilde{\alpha})) = \operatorname{Re} \int_{\gamma_2} i \left( \frac{1-mz}{z} \right)^2 u^{k+2} dz + a^2 \operatorname{Re} \int_{\gamma_2} u^k dz,$$

onde  $\tilde{\alpha} = \frac{\pi}{2} - \alpha$ .

Fazendo a substituição

$$Q_1(m, \alpha) = -\operatorname{Re} \int_{\gamma_1} i \left( \frac{1+mz}{z} \right)^2 u^{k+2} dz, \quad Q_2(m, \tilde{\alpha}) = -\operatorname{Re} \int_{\gamma_2} i \left( \frac{1-mz}{z} \right)^2 u^{k+2} dz,$$

$C_1(\alpha) = \operatorname{Re} \int_{\gamma_1} i u^k dz$ ,  $C_2(\tilde{\alpha}) = \operatorname{Re} \int_{\gamma_2} i u^k dz$ , então  $\mathcal{D}_1$  e  $\mathcal{D}_2$  pode ser reescrito na forma:

$$\mathcal{D}_1(a(\alpha), m(\alpha)) = -Q_1(m, \alpha) + a^2 C_1(\alpha).$$

$$\mathcal{D}_2(a(\tilde{\alpha}), m(\tilde{\alpha})) = -Q_2(m, \tilde{\alpha}) + a^2 C_2(\tilde{\alpha}).$$

Além disso, o problema de período é resolvido se só se  $Q_1(m, \alpha) = a^2 C_1(\alpha)$  e  $Q_2(m, \tilde{\alpha}) = a^2 C_2(\tilde{\alpha})$ . Fazendo  $\tilde{\mathcal{D}} = (\tilde{\mathcal{D}}_1(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2), \tilde{\mathcal{D}}_2(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2))$  onde  $\tilde{\mathcal{D}}_1 := a^2 - \frac{Q_1}{C_1} = \frac{\mathcal{D}_1}{C_1}$  e  $\tilde{\mathcal{D}}_2 :=$

$\frac{Q_1}{Q_2} - \frac{C_1}{C_2} = \frac{a^2 C_1 - \mathcal{D}_1}{a^2 C_2 - \mathcal{D}_2} - \frac{C_1}{C_2}$ , temos que  $\mathcal{D} = 0$  se e somente se  $\tilde{\mathcal{D}} = 0$ . Além disso,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{\mathcal{D}}_1}{\partial \mathcal{D}_1} & \frac{\partial \tilde{\mathcal{D}}_1}{\partial \mathcal{D}_2} \\ \frac{\partial \tilde{\mathcal{D}}_2}{\partial \mathcal{D}_1} & \frac{\partial \tilde{\mathcal{D}}_2}{\partial \mathcal{D}_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 1 & \frac{a^2 C_1 - \mathcal{D}_1}{(a^2 C_2 - \mathcal{D}_2)^2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Por outro lado,

$$J(\tilde{\mathcal{D}}_1, \tilde{\mathcal{D}}_2)(a(\alpha), m(\alpha)) = \begin{vmatrix} 2a & -\frac{1}{C_1} \frac{\partial Q_1}{\partial m} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{Q_1}{Q_2} - \frac{C_1}{C_2} \right) \end{vmatrix}.$$

Usando a equação (veja a Equação 4.28 em [HK]).

$$\begin{aligned} \frac{Q_1}{Q_2} - \frac{C_1}{C_2} &= \left( \left( \frac{1}{m} - m \right) + (\cot \alpha - \tan \alpha) \right) \frac{k+2}{k} \left( \frac{E_+(\tilde{\alpha})}{E_-(\tilde{\alpha})} - \frac{E_+(\alpha)}{E_-(\alpha)} \right) \\ &\quad - 2(\cot \alpha + \tan \alpha), \end{aligned}$$

onde

$$E_{\mp}(\gamma) := \int_0^{\gamma} \sqrt{\cos^2 \phi - \cos^2 \gamma} \cos((1 \mp 2/(k+1))\phi) d\phi,$$

temos que

$$J(\tilde{\mathcal{D}}_1, \tilde{\mathcal{D}}_2)(a(\alpha), m(\alpha)) = -2a \left( \frac{1}{m^2} + 1 \right) \frac{k+2}{k} \left( \frac{E_+(\tilde{\alpha})}{E_-(\tilde{\alpha})} - \frac{E_+(\alpha)}{E_-(\alpha)} \right).$$

Pelo Lema da Monotonicidade em [HK], a função  $\gamma \rightarrow \frac{E_+(\gamma)}{E_-(\gamma)}$  é estritamente decrescente em  $(0, \pi/2)$ , com  $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{E_+(\gamma)}{E_-(\gamma)} = 1$  e  $\lim_{\gamma \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{E_+(\gamma)}{E_-(\gamma)} = \frac{k}{k+2}$ . Então temos que o Jacobiano de  $\mathcal{D}(a(\alpha), m(\alpha))$  não se anula. Portanto, o problema periódico para superfície  $M_{k,x}$ ,  $x > 1$ , é não-degenerado. ■

Novamente, usando o Teorema 5.10 em [RUY], temos:

**Corolário 2** Correspondendo às superfícies  $M_{k,x}$ , para cada  $k \geq 1$  e  $x > 1$ , existe uma família a um-parâmetro de superfícies CMC 1 correspondentes completas em  $\mathbb{H}^3$ .

**Observação 3** O caso  $x > 1$  é mais fácil de tratar do que o caso  $x = 1$ , pois quando  $x > 1$  não existe linha reta contida em  $M_{k,x}$ , e o disco  $D$  coincide com o pedaço fundamental. Conseqüentemente, o Teorema 5.10 de [RUY] pode ser aplicado mais diretamente. É por isso que o Teorema 4.2 vale para todos os  $k \geq 1$ , e Teorema 4.1 só é provado quando  $k = 1$ .

**Observação 4** Para as superfícies que correspondem a  $M_{k,x}$ ,  $x > 1$ , todos os três fins são assintóticos aos fins dos catenóides primos. De resto, a geometria destas superfícies é similar à das superfícies correspondentes a  $M_{k,1}$ .

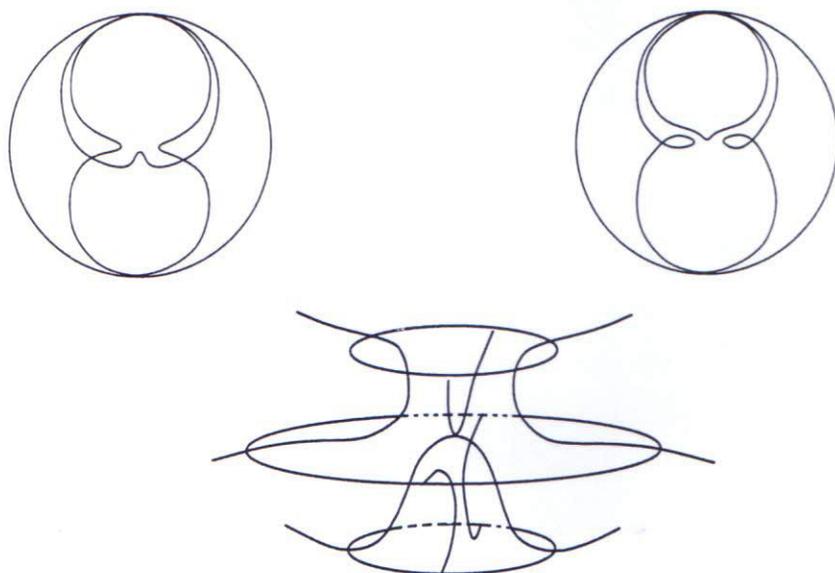


Figura 1.4: A superfície correspondente a  $X(M_1)$  em  $\mathbb{H}^3$  com o modelo Poincaré, cortes no plano  $x_1x_3$  e no plano  $x_2x_3$

do

inferior por

$\mathcal{M}^2$  é um espaço métrico completo e conexo. Se  $\mathcal{M}^2$  é compacto, então a aplicação  $\mathcal{M}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $M \mapsto \text{Vol}(M)$  é contínua. De fato, a função  $\text{Vol}$  é contínua em relação à métrica de Hausdorff. Para demonstrar que as superfícies possuem uma família de  $\mathcal{M}^2$  que converge para uma superfície dada, basta considerar a família de superfícies  $M_t$  para  $t \in [0, 1]$ . Se  $M_t$  converge para  $M$  em relação à métrica de Hausdorff, então  $\text{Vol}(M_t) \rightarrow \text{Vol}(M)$ .

de Wen

e  
 e

## Capítulo 2

# Uma estimativa inferior para o índice

### 2.1 Introdução

A demonstração de que existem superfícies em  $\mathbb{R}^3$  compactas com curvatura média constante  $H \neq 0$  e que não são esferas redondas foi primeiramente dada por Wente [We]. Sua construção é baseada em soluções especiais da Equação de sinh-Gordon, e produz superfícies CMC de gênero 1. Abresch e Walter consideraram um subconjunto destas superfícies (H-Toros). Eles admitiram que estas superfícies possuíam uma família de linhas de curvatura planas, e deste modo puderam dar uma descrição mais concreta destas superfícies. Spruck [S] posteriormente mostrou que as superfícies consideradas por Abresch e Walter correspondem exatamente às mesmas superfícies consideradas por Wente. Aqui, chamaremos estas superfícies de *toros de Wente simétricos*.

Resultados sobre o índice destes toros apareceram no artigo de Rossman [R2]. Usando um método similar ao dele, iremos melhorar a estimativa inferior do índice destes toros. Mais precisamente, provaremos que todo toro de Wente simétrico tem índice pelo menos 8. Este capítulo é organizado do seguinte modo: Na seção 2 daremos uma breve descrição dos toros de Wente simétricos. A seção 3 contém alguns resultados sobre índice, e na última seção provaremos nosso resultado principal.

### 2.2 Toros de Wente Simétricos

Nesta seção daremos uma breve descrição dos toros de Wente que são simétricos. As provas dos lemas e detalhes sobre as afirmações contidas nesta seção podem ser encontradas em

[A], [Wa] ou [S].

Considere  $\mathcal{X} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão conforme de classe  $C^\infty$  onde  $S$  é um toro compacto de dimensão 2 com a métrica induzida e  $(x, y)$  são coordenadas isotérmicas em  $S$ . As formas fundamentais, a curvatura de Gauss e curvatura média são dadas por:

$$I = E(dx^2 + dy^2) \quad (2.1)$$

$$II = Ldx^2 + 2Mdx dy + Ndy^2 \quad (2.2)$$

$$K = \frac{LN - M^2}{E^2}, \quad H = \frac{L + N}{2E}. \quad (2.3)$$

A condição  $H = \text{const.}$  é equivalente a que a *diferencial de Hopf*  $\Phi dz^2$  seja holomorfa, onde  $\Phi := \frac{1}{2}(L - N) - iM$  e  $z = x + iy$ . Neste caso, visto que  $S$  é um toro, podemos considerar a imersão  $\mathcal{X}$  acima como sendo  $\mathcal{X} : \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , a qual deve ser duplamente periódica em relação a algum paralelogramo  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  (i.e.,  $S = \mathbb{C}/\Gamma$ ). Além disso,  $\Phi$  é constante e a imersão  $\mathcal{X}$  não tem pontos umbílicos. Por outro lado,  $(x, y)$  pode ser escolhido como sendo parâmetros de linhas de curvatura.

Definindo  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  por  $HE = e^F$ , então podemos deduzir as seguintes equações (Gauss e Weingarten):

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{xx} &= \frac{1}{2}F_x \mathcal{X}_x - \frac{1}{2}F_y \mathcal{X}_y - (e^F + 1)\mathcal{N} \\ \mathcal{X}_{xy} &= \frac{1}{2}F_y \mathcal{X}_x + \frac{1}{2}F_x \mathcal{X}_y \\ \mathcal{X}_{yy} &= -\frac{1}{2}F_x \mathcal{X}_x + \frac{1}{2}F_y \mathcal{X}_y - (e^F - 1)\mathcal{N} \\ \mathcal{N}_x &= H(1 + e^{-F})\mathcal{X}_x \\ \mathcal{N}_y &= H(1 - e^{-F})\mathcal{X}_y \end{aligned} \quad (2.4)$$

Mais ainda,

$$\Delta F + 4H \sinh F = 0, \quad (2.5)$$

onde  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  e  $\mathcal{N} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  é a aplicação normal de Gauss.

Conclui-se que o problema de encontrar toros com curvatura média constante imersos em  $\mathbb{R}^3$  reduz-se ao problema de encontrar soluções do sistema (2.4) e (2.5). Além disso, as funções  $F, \mathcal{N}, \mathcal{X}$  que são soluções desse sistema devem ser analíticas, definidas em  $\mathbb{R}^2$  e duplamente periódicas em relação a algum paralelogramo  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ . Uma prova da existência de tais funções satisfazendo as condições acima foi primeiramente dada por Wente [We].

Walter e Abresch ([Wa],[W]) perceberam a existência de simetrias destes toros e exibiram suas soluções, que passaremos a chamar de toros de Wente simétricos. Mais ainda, Walter integrou explicitamente o sistema (2.4). Na notação de Walter, a solução  $F$  de (2.5) é dado por:

$$\tanh\left(\frac{F}{4}\right) = \gamma \cdot \bar{\gamma} \cdot \operatorname{cn}_k(\alpha x) \operatorname{cn}_{\bar{k}}(\bar{\alpha} y) \quad (2.6)$$

onde  $\operatorname{cn}_k$  denota a função amplitudinus cosinus de Jacobi com módulo  $k$ , e  $k = \sin \theta$ ,  $\bar{k} = \sin \bar{\theta}$ , para  $\theta, \bar{\theta} \in (0, \pi/2)$  e  $\theta + \bar{\theta} < \pi/2$ , e

$$\gamma = \sqrt{\tan \theta}, \quad \bar{\gamma} = \sqrt{\tan \bar{\theta}}, \quad \alpha = \sqrt{4H \frac{\sin 2\bar{\theta}}{\sin 2(\theta + \bar{\theta})}}, \quad \bar{\alpha} = \sqrt{4H \frac{\sin 2\theta}{\sin 2(\theta + \bar{\theta})}}.$$

O lema a seguir aparece em [A] e [Wa].

**Lema 1** *O conjunto de todos os toros de Wente simétricos estão em correspondência biunívoca com o conjunto das frações reduzidas  $\ell/n \in (1, 2)$ .*

Para cada  $\ell/n$ , denotaremos o correspondente toro de Wente por  $W_{\ell/n}$ .

A condição de dupla periodicidade da função vetorial  $\mathcal{X}$  (condição de fechamento dos toros) é expressada em termos de  $\theta$  e  $\bar{\theta}$ . Usando a teoria das funções elípticas, Walter mostrou que existe exatamente um  $\bar{\theta}$  que satisfaz o problema de período. Computação numérica nos dá  $\bar{\theta} \cong 65.344955354^\circ$ . O outro problema de período e sua relação com  $\ell/n$  é expresso no seguinte lema:

**Lema 2** *Para qualquer  $\ell/n \in (1, 2)$ , existe exatamente uma solução  $\theta \in (0, \pi/2 - \bar{\theta})$  de*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \bar{\theta} \cos^2 \varphi}{1 - \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \bar{\theta} \cos^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}} = \frac{\ell \pi}{n 2} \sqrt{\frac{\sin 2\theta}{\sin 2(\theta + \bar{\theta})}}, \quad (2.7)$$

e para qualquer  $\ell/n \notin (1, 2)$  não existe solução  $\theta \in (0, \pi/2 - \bar{\theta})$  de (2.7).

Observe que a integral (2.7) é mais adequada para computação numérica. Na Tabela 2, aparecem alguns valores de  $\theta$  e sua relação  $\ell/n$ .

Agora, se  $x_{\ell n}$  (resp.  $y_{\ell n}$ ) denota o comprimento do período de  $cn_k(\alpha x)$  (resp.  $cn_{\bar{k}}(\bar{\alpha}y)$ ), então temos o seguinte lemma.

**Lema 3**  $\mathcal{X} : \mathbb{C}/\Gamma \rightarrow W_{\ell/n}$  é um difeomorfismo conforme, onde

$$\Gamma = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{(n x_{\ell n}, 0), (0, y_{\ell n})\} \quad \text{quando } \ell \text{ é ímpar, e}$$

$$\Gamma = \text{span}_{\mathbb{Z}}\left\{\left(\frac{n x_{\ell n}}{2}, \frac{y_{\ell n}}{2}\right), (0, y_{\ell n})\right\} \quad \text{quando } \ell \text{ é par.}$$

As curvas  $\{[x_0, y] | x_0 = \text{constante}\}$  são transformadas por  $\mathcal{X}$  em linhas de curvaturas planas em  $W_{\ell/n}$ .

Observe que o comprimento  $x_{\ell n}$  (resp.  $y_{\ell n}$ ) pode ser facilmente calculada através do uso das integrais elípticas completas de primeira espécie, isto é:

$$x_{\ell n} = \frac{4}{\alpha} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad \left( \text{resp. } y_{\ell n} = \frac{4}{\bar{\alpha}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \bar{k}^2 \sin^2 \varphi}} \right). \quad (2.8)$$

## 2.3 Definição e resultados sobre índices

Nesta seção descreveremos o operador de Jacobi e sua relação com a definição de índice.

Considere o operador de Jacobi  $L = \Delta + |\sigma|^2$  em  $S$ , onde  $\sigma$  é a segunda forma fundamental da imersão  $\mathcal{X}$ . Denotamos por  $Q$  a forma quadrática associada a  $L$ , isto é,

$$Q(u, u) = - \int_{\mathbb{C}/\Gamma} L(u)u \, dA = \int_{\mathbb{C}/\Gamma} [|\nabla u|^2 - |\sigma|^2 u^2] dA$$

onde  $u$  é uma função suave. É bem conhecido (veja [BC]) que superfícies com curvatura média em  $R^3$  são pontos críticos do funcional área para variações que *preservam o volume*. Além disso, a fórmula da segunda variação do funcional área ao longo de uma variação cujo campo variacional é  $u\mathcal{N}$  coincide com  $Q(u, u)$  e a condição de preservação do volume

é equivalente a  $\int_S u dA = 0$ . Assim, se

$$\mathcal{V} = \left\{ u \in C^\infty(S); \int_S u dA = 0 \right\}$$

denota o espaço das variações que preservam o volume, então podemos dar a seguinte definição (veja [BC]):

**Definição 1** *Ind(S), o índice da imersão  $\mathcal{X}$  de S, é a dimensão máxima dos subespaços de  $\mathcal{V}$  restrito aos quais Q é negativa definida.*

Pela definição de F e equação (2.3), pode-se ver que

$$Q(u, u) = \int_{\mathbb{C}/\Gamma} u \mathcal{L}(u) dx dy, \quad (2.9)$$

onde  $\mathcal{L}u = -\Delta u - Vu$ ;  $V := 4H \cosh(F)$ .

Note que em (2.9), estamos integrando com respeito à métrica plana em  $\mathbb{C}/\Gamma$ . Considere  $L^2 = L^2(\mathbb{C}/\Gamma) = \{u \in C^\infty(\mathbb{C}/\Gamma) \mid \int_{\mathbb{C}/\Gamma} u^2 dx dy < \infty\}$  munido do produto interno  $\langle u, v \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{C}/\Gamma} uv dx dy$ . O seguinte resultado contém a teoria espectral para o operador  $\mathcal{L}$ . (Veja, por exemplo [U]).

**Teorema 1** *O operador  $\mathcal{L} = -\Delta - V$  em  $\mathbb{C}/\Gamma$  tem um espectro de autovalores discretos*

$$\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \nearrow \infty$$

(cada um considerado com multiplicidade 1) com correspondente autofunções

$$\nu_1, \nu_2, \dots \in C^\infty(\mathbb{C}/\Gamma),$$

as quais formam uma base orthonormal de  $L^2$ . Além disso, temos a seguinte caracterização variacional para os autovalores:

$$\beta_j = \inf_{V_j} \left( \sup_{\phi \in V_j, \|\phi\|_{L^2} = 1} \int_{\mathbb{C}/\Gamma} \phi \mathcal{L} \phi dx dy \right)$$

onde  $V_j$  varia sobre o conjunto dos subespaços com dimensão  $j$  de  $C^\infty(\mathbb{C}/\Gamma)$ .

**Lema 4** Se  $\mathcal{L}$  tem  $k$  autovalores negativos, então,  $\text{Ind}(W_{\ell/n})$  ou é  $k$  ou  $k - 1$ .

**Prova:** Escolha  $k$  tal que  $\beta_k < 0 \leq \beta_{k+1}$ , e seja  $V := \text{span}\{\nu_1, \dots, \nu_k\}$ . Se  $\nu = \sum_{i=1}^k a_i \nu_i \in V$ , então

$$Q(\nu, \nu) = \int_{\mathbb{C}/\Gamma} \nu \mathcal{L}(\nu) dx dy = \int_{\mathbb{C}/\Gamma} \sum_{i,j=1}^k a_i a_j \beta_j \nu_i \nu_j dx dy = \sum_{i=1}^k a_i^2 \beta_i < 0.$$

Conseqüentemente, se definirmos  $\mathcal{U}$  para ser um subespaço de dimensão máxima tal que  $Q$  restrito a  $\mathcal{U}$  seja negativa definida, então  $\dim(\mathcal{U}) \geq \dim V = k$ . Suponha que  $\dim(\mathcal{U}) > k$ , e seja  $P : V \rightarrow \mathcal{U}$  a projeção de  $V$  sobre  $\mathcal{U}$ . Como  $\dim(P(V)) \leq k$  existe  $u \in \mathcal{U}$  com  $\langle u, u \rangle = 1$  tal que  $u \perp \{P(V)\}$ . Assim,  $u \perp \{V\}$  (pois  $0 = \langle P(\nu_i), u \rangle = \langle \sum_{j=1}^l \langle \nu_i, u_j \rangle u_j, u \rangle = \langle \nu_i, u \rangle$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$ , onde  $\{u_j\}_{j=1}^l$  é uma base ortonormal de  $\mathcal{U}$ , com  $u_1 := u$ ). Neste caso, tomando  $u = \sum_{i=1}^\infty b_i \nu_i$ , temos que  $b_i = 0 \forall i = 1, 2, \dots, k$ . Então  $Q(u, u) = \sum_{i=k+1}^\infty b_i^2 \beta_i \geq 0$ , que é uma contradição. Assim,  $\dim(\mathcal{U}) = k$ . Agora, seja  $\tau : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcional linear definido por  $\tau(u) = \int_{\mathbb{C}/\Gamma} u dA$ . Como a dimensão do núcleo de  $\tau$  é pelo menos  $k - 1$ , então temos por definição que  $\text{Ind}(W_{\ell/n}) \geq \dim(\text{Ker}(\tau)) \geq k - 1$ . Por outro lado, como qualquer espaço no qual  $Q$  seja negativo definida tem dimensão no máximo  $k$ ,  $\text{Ind}(W_{\ell/n}) \leq k$ .

**Obsevação:** Segue do Lema 4 que se existe um subespaço de dimensão  $k$  tal que  $Q$  restrita a este subespaço seja negativa definida então  $\text{Ind}(W_{\ell/n}) \geq k - 1$ . Pelo Lema 4 acima, nosso objetivo torna-se então calcular o número de autovalores negativos do operador  $\mathcal{L}$ .

Agora, usaremos um fato conveniente : Para os toros planos  $\mathbb{C}/\Gamma$ , com  $\Gamma = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{(a_1, a_2), (b_1, b_2)\}$ , o conjunto completo de autovalores de  $-\Delta u_i = \alpha_i u_i$  é dado por

$$\frac{4\pi^2}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} ((m_2 b_2 - m_1 a_2)^2 + (m_1 a_1 - m_2 b_1)^2),$$

com correspondentes autofunções ortonormais dadas por

$$c_{m_1, m_2} \cdot (\sin \text{ ou } \cos) \left( \frac{2\pi}{a_1 b_2 - a_2 b_1} ((m_2 b_2 - m_1 a_2)x + (m_1 a_1 - m_2 b_1)y) \right),$$

onde  $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$  e

$$c_{m_1, m_2} = \sqrt{2/(a_1 b_2 - a_2 b_1)} \quad \text{se } |m_1| + |m_2| > 0 \quad \text{e} \quad c_{0,0} = \sqrt{1/(a_1 b_2 - a_2 b_1)}.$$

Com a ajuda do Lema 3 e o fato acima, listamos na Tabela 1 os primeiros dezessete  $\alpha_i$  e  $\mu_i$ .

valores próprios $\alpha_i$ para $\ell$ ímpar	funções próprias $u_i$ para $\ell$ ímpar	valores próprios $\alpha_i$ para $\ell$ par	funções próprias $u_i$ para $\ell$ par
$\alpha_1 = 0$	$u_1 = \frac{1}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}}}$	$\alpha_1 = 0$	$u_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}}}$
$\alpha_2 = \frac{4\pi^2}{n^2x_{\ell n}^2}$	$u_2 = \frac{\sin(2\pi x/(nx_{\ell n}))}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/2}}$	$\alpha_2 = \frac{16\pi^2}{n^2x_{\ell n}^2}$	$u_2 = \frac{\sin(4\pi x/(nx_{\ell n}))}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/4}}$
$\alpha_3 = \frac{4\pi^2}{n^2x_{\ell n}^2}$	$u_3 = \frac{\cos(2\pi x/(nx_{\ell n}))}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/2}}$	$\alpha_3 = \frac{16\pi^2}{n^2x_{\ell n}^2}$	$u_3 = \frac{\cos(4\pi x/(nx_{\ell n}))}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/4}}$
$\alpha_4 = \frac{4\pi^2}{y_{\ell n}^2}$	$u_4 = \frac{\sin(2\pi y/y_{\ell n})}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/2}}$	$\alpha_4 = \frac{4\pi^2}{n^2x_{\ell n}^2} + \frac{4\pi^2}{y_{\ell n}^2}$	$u_4 = \frac{\sin(\frac{2\pi x}{nx_{\ell n}} + \frac{2\pi y}{y_{\ell n}})}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/4}}$
$\alpha_5 = \frac{4\pi^2}{y_{\ell n}^2}$	$u_5 = \frac{\cos(2\pi y/y_{\ell n})}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/2}}$	$\alpha_5 = \frac{4\pi^2}{n^2x_{\ell n}^2} + \frac{4\pi^2}{y_{\ell n}^2}$	$u_5 = \frac{\cos(\frac{2\pi x}{nx_{\ell n}} + \frac{2\pi y}{y_{\ell n}})}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/4}}$
$\alpha_6 = \frac{16\pi^2}{n^2x_{\ell n}^2}$	$u_6 = \frac{\sin(4\pi x/(nx_{\ell n}))}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/2}}$	$\alpha_6 = \frac{4\pi^2}{n^2x_{\ell n}^2} + \frac{4\pi^2}{y_{\ell n}^2}$	$u_6 = \frac{\sin(\frac{2\pi x}{nx_{\ell n}} - \frac{2\pi y}{y_{\ell n}})}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/4}}$
$\alpha_7 = \frac{16\pi^2}{n^2x_{\ell n}^2}$	$u_7 = \frac{\cos(4\pi x/(nx_{\ell n}))}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/2}}$	$\alpha_7 = \frac{4\pi^2}{n^2x_{\ell n}^2} + \frac{4\pi^2}{y_{\ell n}^2}$	$u_7 = \frac{\cos(\frac{2\pi x}{nx_{\ell n}} - \frac{2\pi y}{y_{\ell n}})}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/4}}$
$\alpha_8 = \frac{4\pi^2}{n^2x_{\ell n}^2} + \frac{4\pi^2}{y_{\ell n}^2}$	$u_8 = \frac{\sin(\frac{2\pi x}{nx_{\ell n}} + \frac{2\pi y}{y_{\ell n}})}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/2}}$	$\alpha_8 = \frac{16\pi^2}{y_{\ell n}^2}$	$u_8 = \frac{\sin(4\pi y/y_{\ell n})}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/4}}$
$\alpha_9 = \frac{4\pi^2}{n^2x_{\ell n}^2} + \frac{4\pi^2}{y_{\ell n}^2}$	$u_9 = \frac{\cos(\frac{2\pi x}{nx_{\ell n}} + \frac{2\pi y}{y_{\ell n}})}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/2}}$	$\alpha_9 = \frac{16\pi^2}{y_{\ell n}^2}$	$u_9 = \frac{\cos(4\pi y/y_{\ell n})}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/4}}$
$\alpha_{10} = \frac{4\pi^2}{n^2x_{\ell n}^2} + \frac{4\pi^2}{y_{\ell n}^2}$	$u_{10} = \frac{\cos(\frac{2\pi x}{nx_{\ell n}} - \frac{2\pi y}{y_{\ell n}})}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/2}}$	$\alpha_{10} = \frac{64\pi^2}{n^2x_{\ell n}^2}$	$u_{10} = \frac{\sin(8\pi x/(nx_{\ell n}))}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/4}}$
$\alpha_{11} = \frac{4\pi^2}{n^2x_{\ell n}^2} + \frac{4\pi^2}{y_{\ell n}^2}$	$u_{11} = \frac{\cos(\frac{2\pi x}{nx_{\ell n}} - \frac{2\pi y}{y_{\ell n}})}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/2}}$	$\alpha_{11} = \frac{64\pi^2}{n^2x_{\ell n}^2}$	$u_{11} = \frac{\cos(8\pi x/(nx_{\ell n}))}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/4}}$
$\alpha_{12} = \frac{16\pi^2}{y_{\ell n}^2}$	$u_{12} = \frac{\sin(4\pi y/y_{\ell n})}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/2}}$	$\alpha_{12} = \frac{36\pi^2}{n^2x_{\ell n}^2} + \frac{4\pi^2}{y_{\ell n}^2}$	$u_{12} = \frac{\sin(\frac{6\pi x}{nx_{\ell n}} + \frac{2\pi y}{y_{\ell n}})}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/4}}$
$\alpha_{13} = \frac{16\pi^2}{y_{\ell n}^2}$	$u_{13} = \frac{\cos(4\pi y/y_{\ell n})}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/2}}$	$\alpha_{13} = \frac{36\pi^2}{n^2x_{\ell n}^2} + \frac{4\pi^2}{y_{\ell n}^2}$	$u_{13} = \frac{\cos(\frac{6\pi x}{nx_{\ell n}} + \frac{2\pi y}{y_{\ell n}})}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/4}}$
$\alpha_{14} = \frac{36\pi^2}{n^2x_{\ell n}^2}$	$u_{14} = \frac{\sin(6\pi x/nx_{\ell n})}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/2}}$	$\alpha_{14} = \frac{36\pi^2}{n^2x_{\ell n}^2} + \frac{4\pi^2}{y_{\ell n}^2}$	$u_{14} = \frac{\sin(\frac{6\pi x}{nx_{\ell n}} + \frac{2\pi y}{y_{\ell n}})}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/4}}$
$\alpha_{15} = \frac{36\pi^2}{n^2x_{\ell n}^2}$	$u_{15} = \frac{\cos(6\pi x/nx_{\ell n})}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/2}}$	$\alpha_{15} = \frac{36\pi^2}{n^2x_{\ell n}^2} + \frac{4\pi^2}{y_{\ell n}^2}$	$u_{15} = \frac{\cos(\frac{6\pi x}{nx_{\ell n}} + \frac{2\pi y}{y_{\ell n}})}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/4}}$
$\alpha_{16} = \frac{16\pi^2}{n^2x_{\ell n}^2} + \frac{4\pi^2}{y_{\ell n}^2}$	$u_{16} = \frac{\sin(\frac{4\pi x}{nx_{\ell n}} + \frac{2\pi y}{y_{\ell n}})}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/2}}$	$\alpha_{16} = \frac{16\pi^2}{n^2x_{\ell n}^2} + \frac{16\pi^2}{y_{\ell n}^2}$	$u_{16} = \frac{\sin(\frac{4\pi x}{nx_{\ell n}} + \frac{4\pi y}{y_{\ell n}})}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/4}}$
$\alpha_{17} = \frac{16\pi^2}{n^2x_{\ell n}^2} + \frac{4\pi^2}{y_{\ell n}^2}$	$u_{17} = \frac{\cos(\frac{4\pi x}{nx_{\ell n}} + \frac{2\pi y}{y_{\ell n}})}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/2}}$	$\alpha_{17} = \frac{16\pi^2}{n^2x_{\ell n}^2} + \frac{16\pi^2}{y_{\ell n}^2}$	$u_{17} = \frac{\cos(\frac{4\pi x}{nx_{\ell n}} + \frac{4\pi y}{y_{\ell n}})}{\sqrt{nx_{\ell n}y_{\ell n}/4}}$

Tabela 1: Os primeiros dezessete autovalores e autofunções de  $-\Delta u_i = \alpha_i u_i$ .

Observe que, com esta ordenação, não temos necessariamente  $\alpha_i \leq \alpha_j$  para  $i \leq j$ .

Porém, ainda temos  $\alpha_i \nearrow \infty$  enquanto  $i \nearrow \infty$ . Escolha  $\alpha_{\rho(1)}, \alpha_{\rho(2)}, \dots$ , um conjunto completo de autovalores com multiplicidade 1 do operador  $-\Delta$  no toro plano  $\mathbb{C}/\Gamma$  mas reordenado de forma que  $\alpha_{\rho(1)} \leq \alpha_{\rho(2)} \leq \dots \nearrow \infty$ . Definindo as constantes

$$V_{\min} = \min_{[x,y] \in \mathbb{C}/\Gamma} V(x,y), \quad V_{\max} = \max_{[x,y] \in \mathbb{C}/\Gamma} V(x,y)$$

e

$$\mathcal{L}_{\min} = -\Delta - V_{\min}, \quad \mathcal{L}_{\max} = -\Delta - V_{\max}$$

então  $\underline{\alpha}_{\rho(i)} := \alpha_{\rho(i)} - V_{\min}$  (resp.  $\bar{\alpha}_{\rho(i)} := \alpha_{\rho(i)} - V_{\max}$ ) constituem o conjunto completo de autovalores com multiplicidade 1 de  $\mathcal{L}_{\min}$  (resp.  $\mathcal{L}_{\max}$ ). Observe que as caracterizações variacionais dos autovalores  $\beta_n$  e  $\alpha_{\rho(n)}$  são dadas por:

$$\beta_n = \inf_{V_n} \left( \sup_{\substack{\|\phi\|_{L^2} = 1 \\ \phi \in V_n}} \int_{\mathbb{C}/\Gamma} \phi \mathcal{L} \phi dx dy \right)$$

e

$$\alpha_{\rho(n)} = \inf_{V_n} \left( \sup_{\substack{\|\phi\|_{L^2} = 1 \\ \phi \in V_n}} \int_{\mathbb{C}/\Gamma} \phi (-\Delta \phi) dx dy \right),$$

onde  $V_n$  varia sobre o conjunto dos subespaço de dimensão  $n$  de  $C^\infty(\mathbb{C}/\Gamma)$ . Como

$$\int_{\mathbb{C}/\Gamma} \phi (-V) \phi dx dy \leq -V_{\min} \quad \forall \phi \in L^2(\mathbb{C}/\Gamma) \quad \text{com} \quad \|\phi\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{C}/\Gamma} \phi^2 dx dy = 1,$$

então

$$\begin{aligned} \beta_n &= \inf_{V_n} \left( \sup_{\substack{\|\phi\|_{L^2} = 1 \\ \phi \in V_n}} \int_{\mathbb{C}/\Gamma} (\phi (-\Delta \phi) + \phi (-V \phi)) dx dy \right) \\ &\leq \inf_{V_n} \left( \sup_{\substack{\|\phi\|_{L^2} = 1 \\ \phi \in V_n}} \int_{\mathbb{C}/\Gamma} \phi (-\Delta \phi) dx dy \right) - V_{\min} \\ &= \alpha_{\rho(n)} - V_{\min} = \underline{\alpha}_{\rho(n)}. \end{aligned}$$

Usaremos esta última desigualdade para provar o seguinte lema:

**Lema 5** Escolhendo  $\mu \in \mathbb{Z}^+$  de forma que  $\alpha_{\rho(\mu)} < V_{\min}$  então

$$\text{Ind}(W_{\ell/n}) \geq \mu - 1.$$

**Prova:** Temos que  $\beta_{\mu} \leq \underline{\alpha}_{\rho(\mu)} = \alpha_{\rho(\mu)} - V_{\min} < 0$ . O resultado agora segue-se diretamente do Lema 4.

Um *domínio fundamental* de uma autofunção é qualquer componente conexa do complementar do conjunto de zeros desta autofunção. O teorema do domínio nodal de Courant (veja [C]) será usado para provar o seguinte lema:

**Lema 6** Para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $n \geq 2$ , temos que

$$\text{Ind}(W_{\ell/n}) \geq 2n - 2 \quad \text{se } \ell \text{ é ímpar, e } \text{Ind}(W_{\ell/n}) \geq n - 2 \quad \text{se } \ell \text{ é par.}$$

**Prova:** Considere  $u := \langle \vec{\nu}, \mathcal{N} \rangle$ , onde  $\vec{\nu}$  é o campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$  associado com a rotação em torno do eixo da simetria rotacional de  $W_{\ell/n}$ . É um fato bem conhecido que  $u$  pertence a nulidade de  $\mathcal{L}$ , isto é,  $\mathcal{L}(u) = 0$ . Para  $\ell$  ímpar (resp. para  $\ell$  par) o conjunto  $\{[x, y]; x/x_{\ell n} \in \mathbb{Z}\}$  é transformado por  $\mathcal{X}$  em  $2n$  (resp.  $n$ ) geodésicas planares fechados cada uma estando no plano que contém o eixo de simetria rotacional de  $W_{\ell/n}$ . Então este conjunto de  $2n$  (resp.  $n$ ) curvas fechadas estão no conjunto nodal de  $u$ , isto é,  $u = 0$  neste conjunto. Escolhendo  $\nu_{k+1} = u$ , então  $\{v_1, \dots, v_k\}$  são as autofunções de  $\mathcal{L}$  associadas com correspondentes autovalores  $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_k < 0$ . Como  $\{[x, y]; \frac{x}{x_{\ell n}} \in \mathbb{Z}\}$  pertence ao conjunto nodal, temos que  $\nu_{k+1}$  tem pelo menos  $2n$  (resp.  $n$ ) domínios nodais. O teorema do domínio nodal de Courant diz que o número de domínios nodais de  $\nu_{k+1}$  é menor ou igual a  $k + 1$ . Portanto, temos que  $2n \leq k + 1$  quando  $\ell$  é ímpar e  $n \leq k + 1$  quando  $\ell$  é par. A conclusão segue agora diretamente do Lema 4.

## 2.4 Estimativa inferior para o Índice das Superfícies

$W_{\ell/n}$

O Lema 5 nos dá uma limitação inferior para o índice dos toros, pois podemos calcular explicitamente  $\alpha_{\rho(i)}$  (veja Tabela 1). O seguinte resultado é uma aplicação imediata dos

Lemas 5 e 6.

**Teorema 2**  $\text{Ind}(W_{\ell/n}) \geq 8 \forall \ell/n$ , com exceção das oito superfícies:

$$W_{3/2}, W_{4/3}, W_{5/3}, W_{7/4}, W_{8/5}, W_{12/7}, W_{14/9} \text{ e } W_{16/9}.$$

Para estas superfícies, listamos na Tabela 2, os correspondentes valores de  $\theta$ ,  $x_{\ell n}$ ,  $y_{\ell n}$  e a estimativa inferior para seus índices. Estes valores aproximados de  $\theta$ ,  $x_{\ell n}$  e  $y_{\ell n}$  foram numericamente calculados através do Lema 2 e das fórmulas (2.8). Observe que, embora os autovalores dependam da escolha de  $H$ , o número de autovalores negativos é independente de  $H$ . Então, sem perda de generalidade fixamos,  $H = 1/2$ .

$W_{\ell/n}$	$\theta$	$x_{\ell n}$	$y_{\ell n}$	Lema (5) estimativa para $\text{Ind}(W_{\ell/n})$	Lema (6) estimativa para $\text{Ind}(W_{\ell/n})$
$W_{3/2}$	17.7324	2.5556	4.2131	2	2
$W_{4/3}$	12.7898	3.2767	6.3355	6	1
$W_{5/3}$	21.4807	1.7557	2.6402	2	4
$W_{7/4}$	22.8449	1.3315	1.9447	2	6
$W_{8/5}$	20.1374	2.0842	3.2321	2	3
$W_{12/7}$	22.3044	1.5150	2.2380	2	5
$W_{14/9}$	19.1243	2.2970	3.6514	4	7
$W_{16/9}$	23.2182	1.1872	1.7208	2	7

**Tabela 2:**  $x_{\ell n}$ ,  $y_{\ell n}$  foram calculados usando  $H = 1/2$ .

O restante deste trabalho é dedicado a verificar numericamente que  $\text{Ind}(W_{\ell/n}) \geq 8$  onde  $W_{\ell/n}$  é quaisquer das oito superfícies descritas acima. Para isto, começaremos encontrando subespaços específicos no qual o operador  $\mathcal{L}$  é definido negativo.

Considere um subconjunto finito  $\{\tilde{u}_1 = u_{i_1}, \dots, \tilde{u}_N = u_{i_N}\}$  de autofunções  $u_i$  de  $-\Delta$  em  $\mathbb{C}/\Gamma$ , definido na seção 3 com autovalores correspondentes  $\tilde{\alpha}_j = \alpha_{i_j}$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Se consideramos qualquer  $u = \sum_{i=1}^N a_i \tilde{u}_i \in \text{span}\{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_N\}$ ,  $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ , então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}/\Gamma} u \mathcal{L}(u) dx dy &= \sum_{i,j=1}^N a_i a_j \int_{\mathbb{C}/\Gamma} \tilde{u}_i (-\Delta \tilde{u}_j - V \tilde{u}_j) dx dy = \\ &= \sum_{i,j=1}^N a_i (\tilde{\alpha}_j \delta_{ij} - \tilde{b}_{ij}) a_j \end{aligned}$$

onde  $\tilde{b}_{ij} := \int_{\mathbb{C}/\Gamma} V \tilde{u}_i \tilde{u}_j dx dy$ . Assim,  $\int_{\mathbb{C}/\Gamma} u \mathcal{L}(u) dx dy < 0$  para todo  $u \in \text{span}\{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_N\}$  não-nulo se, e somente se, a matriz  $(\tilde{\alpha}_j \delta_{ij} - \tilde{b}_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$  é negativa definida.

A observação seguinte ao Lema 4 implica imediatamente o seguinte resultado:

**Teorema 3** *Se a matriz  $N \times N$   $(\tilde{\alpha}_j \delta_{ij} - \tilde{b}_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$  é negativa definida, então  $\text{Ind}(W_{\ell/n}) \geq N - 1$ .*

**Definição 2** Para  $A, B$  inteiros pares e  $\ell, n \in \mathbb{Z}^+$ , definimos as seguintes integrais básicas:

$$I_0(\ell, n, A, B) = \frac{1}{n x_{\ell n} y_{\ell n}} \int_0^{x_{\ell n}/A} \int_0^{y_{\ell n}/A} V(x, y) \left( \cos \frac{2\pi x}{x_{\ell n}} \right)^A \left( \cos \frac{2\pi y}{y_{\ell n}} \right)^B dy dx$$

$$I_1(\ell, n) = \frac{1}{n x_{\ell n} y_{\ell n}} \int_0^{n x_{\ell n}/2} \int_0^{y_{\ell n}} V(x, y) \cos \left( \frac{4\pi x}{n x_{\ell n}} \right) dy dx$$

$$I_2(\ell, n) = \frac{1}{n x_{\ell n} y_{\ell n}} \int_0^{n x_{\ell n}/2} \int_0^{y_{\ell n}} V(x, y) \cos \left( \frac{8\pi x}{n x_{\ell n}} \right) dy dx$$

$$I_3(\ell, n) = \frac{1}{n x_{\ell n} y_{\ell n}} \int_0^{n x_{\ell n}/2} \int_0^{y_{\ell n}} V(x, y) \cos \left( \frac{16\pi x}{n x_{\ell n} y_{\ell n}} \right) dy dx$$

$$I_4(\ell, n) = \frac{1}{n x_{\ell n} y_{\ell n}} \int_0^{n x_{\ell n}/2} \int_0^{y_{\ell n}} V(x, y) \cos \left( \frac{4\pi x}{n x_{\ell n}} \right) \cos \left( \frac{4\pi y}{y_{\ell n}} \right) dy dx$$

$$I_5(\ell, n) = \frac{1}{n x_{\ell n} y_{\ell n}} \int_0^{n x_{\ell n}/2} \int_0^{y_{\ell n}} V(x, y) \cos \left( \frac{4\pi x}{n x_{\ell n}} \right) \cos \left( \frac{8\pi y}{n x_{\ell n}} \right) dy dx$$

$$I_6(\ell, n) = \frac{1}{n x_{\ell n} y_{\ell n}} \int_0^{n x_{\ell n}/2} \int_0^{y_{\ell n}} V(x, y) \cos \left( \frac{8\pi x}{n x_{\ell n}} \right) \cos \left( \frac{4\pi y}{y_{\ell n}} \right) dy dx$$

$$I_7(\ell, n) = \frac{1}{n x_{\ell n} y_{\ell n}} \int_0^{n x_{\ell n}/2} \int_0^{y_{\ell n}} V(x, y) \cos \left( \frac{12\pi x}{n x_{\ell n}} \right) \cos \left( \frac{4\pi y}{y_{\ell n}} \right) dy dx .$$

Agora, para cada superfície  $W_{\ell/n}$  dada na Tabela 2, fixaremos  $N = 9$  e escolheremos o subconjunto  $\{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_9\}$  tal que a matriz  $(\tilde{\alpha}_j \delta_{ij} - \tilde{b}_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$  seja negativa definida. Estas escolhas estão apresentadas na Tabela 3.

$W_{\ell/n}$	$\tilde{u}_1$	$\tilde{u}_2$	$\tilde{u}_3$	$\tilde{u}_4$	$\tilde{u}_5$	$\tilde{u}_6$	$\tilde{u}_7$	$\tilde{u}_8$	$\tilde{u}_9$
$W_{3/2}$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_7$	$u_8$	$u_9$	$u_{17}$
$W_{4/3}$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$	$u_7$	$u_8$	$u_9$
$W_{5/3}$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_5$	$u_6$	$u_7$	$u_8$	$u_9$	$u_{15}$
$W_{7/4}$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_6$	$u_7$	$u_8$	$u_9$	$u_{14}$	$u_{15}$
$W_{8/5}$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_{10}$	$u_{11}$	$u_{12}$	$u_{13}$
$W_{12/7}$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_{10}$	$u_{11}$	$u_{12}$	$u_{13}$
$W_{14/9}$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_{10}$	$u_{11}$	$u_{12}$	$u_{13}$
$W_{16/9}$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_{10}$	$u_{11}$	$u_{12}$	$u_{13}$

**Tabela 3:** Autofunções de  $-\Delta$  produzindo espaços de dimensão 9 sobre o qual  $\mathcal{L}$  é negativo definido.

Com estas escolhas para  $\tilde{u}_i$ , temos o seguinte lema.

**Lema 7** Todos os elementos das matrizes  $\mathcal{M}(\ell, n) := (\tilde{\alpha}_j \delta_{ij} - \tilde{b}_{ij})_{i,j=1,\dots,9}$  podem ser expressos em termos das integrais básicas  $I_0(\ell, n, A, B)$  e  $I_j(\ell, n)$  com  $A, B$  par,  $j = 1, 2, \dots, 7$ .

**Prova:** Temos por definição que a função  $V$  tem as seguintes simetrias:

$$V(x, y) = V(-x, y) = V(x, -y) = V\left(\frac{x\ell n}{2} - x, y\right) = V\left(x, \frac{y\ell n}{2} - y\right).$$

Com uso repetido das identidades  $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$ ,  $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \sin(b)\cos(a)$ ,  $\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a)$  e as simetrias de  $V$  temos que

para as superfícies $W_{3/2}$	$M_{1,1} = -32 I_0(3, 2, 0, 0)$ $M_{4,4} = \alpha_4 - 64(I_0(3, 2, 0, 0) - I_0(3, 2, 0, 2))$ $M_{5,5} = \alpha_5 - 64 I_0(3, 2, 0, 2)$ $M_{7,7} = \alpha_7 - 64 I_0(3, 2, 2, 0)$ $M_{17,17} = \alpha_{17} - 64(I_0(3, 2, 0, 0) - I_0(3, 2, 0, 2) - I_0(3, 2, 2, 0) + 2 I_0(3, 2, 2, 2))$ $M_{i,i} = \alpha_i - 32I_0(3, 2, 0, 0)$ , para $i = 2, 3, 4, 8, 9$ Todos os outros $M_{i,j}$ com $i < j$ são zero.
para as superfícies $W_{4/3}$	$M_{1,1} = -48 I_0(4, 3, 0, 0)$ $M_{2,2} = \alpha_2 - 48 I_0(4, 3, 0, 0) + 2 I_2(4, 3)$ $M_{3,3} = \alpha_3 - 48 I_0(4, 3, 0, 0) - 2 I_2(4, 3)$ $M_{4,4} = \alpha_4 - 48 I_0(4, 3, 0, 0) + 2 I_4(4, 3)$ $M_{5,5} = \alpha_5 - 48 I_0(4, 3, 0, 0) - 2 I_4(4, 3)$ $M_{6,6} = \alpha_6 - 48 I_0(4, 3, 0, 0) + 2 I_4(4, 3)$ $M_{7,7} = \alpha_7 - 48 I_0(4, 3, 0, 0) - 2 I_4(4, 3)$ $y M_{8,8} = \alpha_8 - 348 (I_0(4, 3, 0, 2) - 2 I_0(4, 3, 0, 4))$ $M_{9,9} = \alpha_9 - 96 (4 I_0(4, 3, 0, 4) - 4 I_0(4, 3, 0, 2) + I_0(4, 3, 0, 0))$ $M_{1,3} = -2\sqrt{2}I_1(4, 3)$ $M_{1,9} = -48\sqrt{2}(-I_0(4, 3, 0, 0) + 2I_0(4, 3, 0, 2))$ $M_{4,6} = M_{5,7} = -48(-I_0(4, 3, 0, 0) + 2I_0(4, 3, 0, 2)) - 2I_1(4, 3)$ Todos os outros $M_{i,j}$ com $i < j$ são zero.
para as superfícies $W_{5/3}$	$M_{1,1} = -48 I_0(5, 3, 0, 0)$ $M_{2,2} = \alpha_2 - 48 I_0(5, 3, 0, 0) + 2 I_1(5, 3)$ $M_{3,3} = \alpha_3 - 48 I_0(5, 3, 0, 0) - 2 I_1(5, 3)$ $M_{5,5} = \alpha_5 - 96 I_0(5, 3, 0, 2)$ $M_{6,6} = \alpha_6 - 48 I_0(5, 3, 0, 0) + 2 I_2(5, 3)$ $M_{7,7} = \alpha_7 - 48 I_0(5, 3, 0, 0) - 2 I_2(5, 3)$ $M_{8,8} = \alpha_8 - 48 I_0(5, 3, 0, 0) + 2 I_4(5, 3)$ $M_{9,9} = \alpha_9 - 48 I_0(5, 3, 0, 0) - 2 I_4(5, 3)$ $M_{15,15} = \alpha_{15} - 96 I_0(5, 3, 0, 2)$ $M_{1,7} = -2\sqrt{2}I_1(5, 3)$ $M_{3,15} = -2(I_1(5, 3) + I_2(5, 3))$ Todos os outros $M_{i,j}$ com $i < j$ são zero.
para as superfícies $W_{7/4}$	$M_{i,i} = \alpha_i - 64 I_0(7, 4, 0, 0)$ para $i = 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 14, 15$ Todos os outros $M_{i,j}$ com $i < j$ são zero.

Para as superfícies $W_{8/5}, W_{12/7}, W_{14/9}, W_{16/9}$	$M_{1,1} = 16n I_0(\ell, n, 0, 0)$ $M_{2,2} = \alpha_2 - 16n I_0(\ell, n, 0, 0) + 2I_2(\ell, n)$ $M_{3,3} = \alpha_3 - 16n I_0(\ell, n, 0, 0) - 2I_2(\ell, n)$ $M_{4,4} = \alpha_4 - 16n I_0(\ell, n, 0, 0) + 2I_4(\ell, n)$ $M_{5,5} = \alpha_5 - 16n I_0(\ell, n, 0, 0) - 2I_4(\ell, n)$ $M_{10,10} = \alpha_{10} - 16n I_0(\ell, n, 0, 0) + 2I_3(\ell, n)$ $M_{11,11} = \alpha_{12} - 16n I_0(\ell, n, 0, 0) - 2I_3(\ell, n)$ $M_{12,12} = \alpha_{12} - 16n I_0(\ell, n, 0, 0) + 2I_5(\ell, n)$ $M_{13,13} = \alpha_{13} - 16n I_0(\ell, n, 0, 0) - 2I_5(\ell, n)$ $M_{1,3} = -2\sqrt{2}I_1(\ell, n)$ $M_{1,11} = -2\sqrt{2}I_2(\ell, n)$ $M_{2,10} = -4 I_1(\ell, n) + 4 I_5(\ell, n)$ $M_{3,11} = -4 I_5(\ell, n)$ $M_{4,10} = -4I_1(\ell, n) + 2I_6(\ell, n)$ $M_{5,13} = -2I_1(\ell, n) - 2I_6(\ell, n)$ Todos os outros $M_{i,j}$ com $i < j$ são zero.
---	---

**Tabela 4:** Elementos das matrizes  $\mathcal{M}(\ell, n)$  expressos em termos das integrais básicas

Isto prova o lema.

Através de métodos numéricos, podemos estimar que todas as matrizes relevantes  $I_j(\ell, n)$  para  $j \geq 1$  são aproximadamente zero, e que

$$I_0(3, 2, 0, 0) \cong 0.29 ; I_0(3, 2, 2, 0) \cong 0.23 ; I_0(3, 2, 0, 2) \cong 0.24$$

$$I_0(3, 2, 2, 2) \cong 0.25 ; I_0(4, 3, 0, 0) \cong 0.10 ; I_0(4, 3, 0, 2) \cong 0.03$$

$$I_0(4, 3, 0, 4) \cong 0.01 ; I_0(5, 3, 0, 0) \cong 0.45 ; I_0(5, 3, 2, 0) \cong 0.39$$

$$I_0(5, 3, 0, 2) \cong 0.40 ; I_0(7, 4, 0, 0) \cong 0.60 ; I_0(8, 5, 0, 0) \cong 0.18$$

$$I_0(12, 7, 0, 0) \cong 0.26 ; I_0(14, 9, 0, 0) \cong 0.08 ; I_0(16, 9, 0, 0) \cong 0.34$$

Isto implica que as oito matrizes  $\mathcal{M}(\ell, n)$  são aproximadamente dadas por





$$\mathcal{M}(14, 9) \cong \begin{pmatrix} -12.10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11.73 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11.73 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9.19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9.05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10.63 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10.71 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8.34 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8.34 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{M}(16, 9) \cong \begin{pmatrix} -49.54 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -47.86 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -47.88 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -35.59 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -35.57 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -43.73 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -43.73 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -32.80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -32.80 \end{pmatrix}.$$

Todas estas oito matrizes de ordem  $9 \times 9$  são negativas definidas. Conseqüentemente, o Teorema 2 implica o resultado numérico.



## Referências

- [A] U. Abresch, *Constant mean curvature tori in terms of elliptic functions*, J. reine u. angew Math. **374** (1987), 169-192.
- [AA] A. D. Alexandrov, *A characteristic property of spheres*, Annali di matematica, **58** (1962), 303-315.
- [B] A.I. Bobenko, *All constant mean curvature tori in  $\mathbb{R}^3, \mathbb{S}^3, \mathbb{H}^3$  in terms of theta-functions*, Math. Ann. **290** (1991), 209-245.
- [BC] L. Barbosa, M. do Carmo, *Stability of hypersurfaces with constant mean curvature*, Math. Z. **374**, (1984), 339-353.
- [Br] R. Bryant, *Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space*, Astérisque, 154-155, (1987), 341-347.
- [BR] J. Berglund, W. Rossman. *Minimal surfaces with catenoid ends*. *Pacific J. Math.*, **171**, (1995), 353-371.
- [C] S.-Y. Cheng, *Eigenfunctions and nodal sets*, Comment. Math. Helvetici **51** (1976), 43-55.
- [Cho] J. Choe, *Index, vision number, and stability of complete minimal surfaces*, Arch. Rat. Mech. Anal. **109** (1990), 195-212.
- [C1] C. Costa. *Imersões mínimas completas em  $\mathbb{R}^3$  de gênero um e curvatura total finita*. *PhD thesis, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil*, (1982).
- [C2] C. Costa. *Funções Elípticas, Algébricas e Superfícies Mínimas*. *Colóquio, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil*, (Maio de 1991)

- [HM] D. Hoffman, W. Meeks, *A complete embedded minimal surface with genus one, three ends and finite total curvature*, J. Diff. Geom., **21**, (1985) 109-127.
- [HM2] D. Hoffman, W. Meeks. *Embedded minimal surfaces of finite topology*. *Ann. of Math.*, **131**, (1990), 1-34.
- [HKM] D. Hoffman, H. Karcher, W. Meeks. *One-parameter family of embedded complete minimal surfaces of finite topology*. *GANG preprint in preparation*.
- [HK] D. Hoffman, H. Karcher. *Complete embedded minimal surface of finite total curvature*. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Vol. 90, editor: R. Osserman (1997), p5-93.
- [JM] L. P. Jorge, W. Meeks, *The topology of complete minimal surfaces of finite total Gaussian curvature*, **22**, (1983), 203-221.
- [L] H. B. Lawson. *Lectures on Minimal Submanifolds*. *Publish or Perish Press, Berkeley*, (1971).
- [LR] L. L. Lima, W. Rossman. *On the index of constant mean curvature 1 surfaces in hyperbolic space*. *Indiana University Mathematics Journal*, **47**, (1998), 685-723.
- [LR1] F. J. Lopez, A. Ros, *complete minimal surface with index one and stable constant mean curvature surface*, *Comment. Math. Helvetici*, **64**, (1989), 34-43.
- [O] R. Osserman, *A Survey of Minimal Surfaces*, Dover Publications, New York, 2nd edition, (1986).
- [R1] W. Rossman. *Minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$  with dihedral symmetry*. *Tôhoku Math. J.*, **47**, (1995), 31-54.
- [R2] W. Rossman, *The Morse index of Wente tori*, preprint.
- [RS] M. Reed, B. Simon, *Analysis of operators*, volume IV, Academic Press (1978).

- [RUY] W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada, *Irreducible constant mean surfaces in hyperbolic space with positive genus*, Tôhoku Math. J., **49**, (1997), 449-484.
- [S] J. Spruck, *The Elliptic sinh-Gordon equation and the construction of Toroidal Soap Bubbles*, Lectures Notes in Math. 1340, Springer 1936, 275-301.
- [U] H. Urakawa, *Geometry of Laplace-Beltrami operator on a complete Riemannian manifold*, Advanced Studies in Pure Mathematics, Progress in Differential Geometry **22** (1993), 347-406.
- [UY1] M. Umehara, K. Yamada. Complete surfaces of constant mean curvature 1 in the hyperbolic 3-space. *Ann. of math.*, **137**, (1993), 611-638.
- [UY2] M. Umehara, K. Yamada. A parametrization of the Weierstrass formulae and perturbation of some minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$  into the hyperbolic 3-space. *J. reine angew. Math.*, **432**, (1992), 93-116.
- [Wa] R. Walter, *Explicit examples to the H-problem of Heinz Hopf*, Geometriae Dedicata, **23** (1987), 187-213.
- [We] H. Wente, *Counterexample of a conjecture of H. Hopf*, Pacific J. Math., **121** (1986), 193-243.
- [W1] Wohlgemuth. Higher genus minimal surfaces by growing handles out of a catenoid. *Manuscripta Math.*, **70** (1991), 397-428.
- [W2] Wohlgemuth. Vollständige Minimalflächen höheren Geschlechts und endlicher Totalkummung. *PhD thesis, University of Bonn*, (April 1993).