

Hipersuperfícies com curvatura escalar nula
invariantes pela ação $O(p+1) \times O(p+1)$

Jocelino Sato

2 de março de 2000

CONSULTA LOCAL

2000

1. Introdução

2. Metodologia

3. Resultados

4. Conclusão

*À minha esposa Cristina e
ao nosso primeiro filho que
chegará em breve !*

AGRADECIMENTOS

Ao professor Luquésio P. M. Jorge, pela orientação e sugestões precisas que contribuíram na elaboração deste trabalho.

Ao professor Antônio Gervásio Colares pelo constante incentivo, ao professor Levi Lopes Lima pelas valiosas discussões sobre matemática, e a todos os professores e funcionários da pós-graduação em matemática da UFC que de alguma maneira contribuíram para minha formação e realização deste trabalho.

Aos professores Manoel Perdigão do Carmo e Oscar Palmas Velasco pelas sugestões apresentadas.

Aos membros da banca examinadora por terem aceito dividir essa responsabilidade.

A todos os colegas e amigos que conquistei, pelo companheirismo e incentivo. Em especial a J. Miguel Malacarne pelo apoio quando aqui cheguei e a Barnabé P. Lima pela amizade.

À minha esposa Cristina pela compreensão durante todo este tempo e pelo apoio que soube dar em todos momentos.

Resumo

Usamos métodos da geometria equivariante para estudar e classificar as hipersuperfícies de \mathbb{R}^{2p+2} , com curvatura escalar nula, invariantes pela ação do grupo $O(p+1) \times O(p+1)$, com $p > 1$. Primeiro classificamos essas hipersuperfícies de acordo com sua curva geratriz, e mostramos que existem exemplos completos e mergulhados. Depois, estudamos o índice de Morse dos exemplos completos mostrando, em particular, que existe exemplos globalmente estáveis. Esses exemplos estáveis dão contra-exemplos, em dimensões ímpares maior do que ou igual a 9, para uma conjectura do tipo Bernstein, na classe estável, para imersões com curvatura escalar nula.

Capítulo 1

Introdução

Os métodos da geometria equivariante têm sido aplicados com sucesso por muitos matemáticos para obter e classificar exemplos explícitos de hipersuperfícies com uma dada condição sobre a r -ésima curvatura média e invariantes pela ação de um grupo de isometrias. Um dos primeiros trabalhos conhecidos foi feito por Delaunay em [7], no qual ele classifica as superfícies de rotação de \mathbb{R}^3 com curvatura média constante.

Após a classificação dos grupos de isometrias de baixa cohomogenidade feita por W. Y. Hsiang e H. B. Lawson em [15], vários trabalhos abordando geometria equivariante foram divulgados. Estudando hipersuperfícies de \mathbb{R}^{2m} invariantes por $O(m) \times O(m)$, W. Y. Hsiang, Z. H. Teng e W. Yu em [16] mostraram a existência de imersões de S^{2m-1} em \mathbb{R}^{2m} ($m \geq 2$), com curvatura média constante, que não são esferas redondas. Essas imersões mostram que a conjectura de Hopf é falsa em dimensões maior do que ou igual a 3. Foi nessa classe de hipersuperfícies que T. Okayasu (ver [19]) conseguiu um primeiro exemplo de uma hipersuperfície $M^3 \subset \mathbb{R}^4$, completa com curvatura escalar constante negativa.

Em [8], M.P. do Carmo e M. Dajczer estenderam a noção clássica de superfície de rotação do \mathbb{R}^3 para uma hipersuperfície de um espaço modelo $M^{n+1}(c)$. Neste trabalho, eles realizaram um estudo de classificação das hipersuperfícies de rotação com curvatura média constante.

Uma classificação das hipersuperfícies rotacionais com curvatura escalar nula, invariantes pela ação do grupo $O(n)$, conforme definido em [8], de um espaço modelo $M^{n+1}(c)$, foi feita por M. L. Leite e, posteriormente, generalizada por O. Palmas para outras curvaturas médias S_r com $S_r = cte$ (ver [18] e [20]).

No caso de uma ação com cohomogenidade dois, H. Alencar [1] em sua

tese de doutorado fez uma classificação das hipersuperfícies mínimas de \mathbb{R}^{2m} invariantes por $SO(m) \times SO(m)$. Nela, Alencar usa uma idéia de Bombieri, De Giorgi e Giusti dada em [5], que consiste em fazer uma mudança de coordenadas adequada e reduzir o estudo das curvas geratrizes de tais hipersuperfícies, no espaço de órbitas, ao estudo das órbitas de um campo vetorial definido num aberto de \mathbb{R}^2 .

O. Palmas usando idéias contidas em [1], publicou um trabalho [21] sobre “Hipersuperfícies com curvatura escalar nula em \mathbb{R}^{2p+2} invariantes pela ação do grupo $O(p+1) \times O(p+1)$ ”. Independentemente, esse assunto era estudado por nós. Em seu artigo, Palmas estudou apenas o caso $p = 1$. O objetivo desse trabalho é estudar o caso $p > 1$. Nós classificamos essas hipersuperfícies de acordo com sua curva geratriz, e mostramos que existem exemplos completos e mergulhados. Depois, estudamos o índice de Morse dos exemplos completos mostrando, em particular, que existem exemplos globalmente estáveis. Esses exemplos estáveis dão contra-exemplos, em dimensões ímpares maior do que ou igual a 9, para uma conjectura do tipo Bernstein, na classe estável, para imersões com curvatura escalar nula.

O espaço de órbitas dessa ação é o conjunto

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\}$$

e as hipersuperfícies invariantes são geradas por curvas $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, denominadas *curvas geratrizes*, que satisfazem a seguinte equação diferencial

$$0 = p(-x''(t)y'(t) + x'(t)y''(t)) \left(\frac{y'(t)}{x(t)} - \frac{x'(t)}{y(t)} \right) + \frac{p(p-1)}{2} \left(\left(\frac{y'(t)}{x(t)} \right)^2 + \left(\frac{x'(t)}{y(t)} \right)^2 \right) - p^2 \frac{x'(t)y'(t)}{x(t)y(t)},$$

onde estamos admitindo que a curva $\gamma(t)$ está parametrizada pelo comprimento de arco t . Para estudar as curvas geratrizes de tais hipersuperfícies procedemos como em [1], analisando as *órbitas* de um campo vetorial X associado. Cada órbita $\phi(t) = (u(t), v(t))$ de X está associada a uma família M_λ de hipersuperfícies geradas pelas curvas $\gamma_\lambda(t) = (\lambda x(t), \lambda y(t))$, estas determinadas por $\phi(t)$ a menos de homotetia.

O campo X apresenta singularidades degeneradas P_1, P_2 e P_3 , o que não ocorre no caso $p = 1$, e singularidades P_4 e P_5 que são um atrator e um repulsor, respectivamente (ver Lema 2.2.3). Após um estudo geométrico do comportamento do campo conseguimos caracterizar seu retrato de fase. Esse retrato de fase nos permite obter a classificação.

Quando $p = 2$ ou $p = 3$, P_4 e P_5 possuem a estrutura de foco atrator e foco repulsor, respectivamente. Quando $p \geq 4$, eles possuem a estrutura de nó atrator e nó repulsor.

Essas estruturas determinam duas maneiras das curvas geratrizes do tipo B assintotarem as curvas geratrizes do tipo A: ou intersectando-as infinitas vezes quando $p = 2$ ou $p = 3$, ou não intersectando-as quando $p \geq 4$. Determinam também duas maneiras das curvas geratrizes do tipo C assintotarem as curvas geratrizes do tipo A: ou intersectando-as infinitas vezes quando $p = 2$ ou $p = 3$, ou finita vezes quando $p \geq 4$. O mesmo acontece com as curvas geratrizes do tipo D, como veremos a seguir.

As curvas geratrizes $\gamma(t)$ no espaço de órbitas de tais hipersuperfícies são dos seguintes tipos:

A) $\gamma(t)$ é uma das seguintes semi-retas:

$$\gamma_1(t) = (\cos(\alpha)t, \sin(\alpha)t)$$

ou

$$\gamma_2(t) = (\sin(\alpha)t, \cos(\alpha)t),$$

onde $t \geq 0$ e $\alpha = \frac{1}{4} \arccos\left(\frac{3-2p}{2p-1}\right)$ (ver figura A);

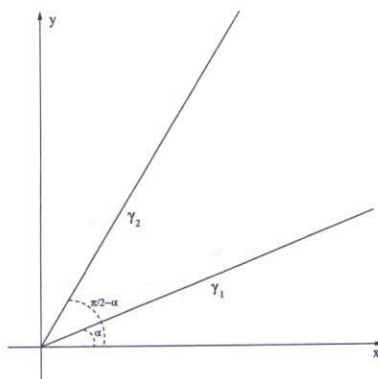


Figura A

B) $\gamma(t)$ é regular, intersecta ortogonalmente um dos semi-eixos $x \geq 0$ ou $y \geq 0$ e assintota uma das semi-retas do caso A), quando $t \rightarrow +\infty$ ou $t \rightarrow -\infty$ (ver figura B1 para $p = 2$ ou $p = 3$ e figura B2 para $p \geq 4$, no caso $x \geq 0$);

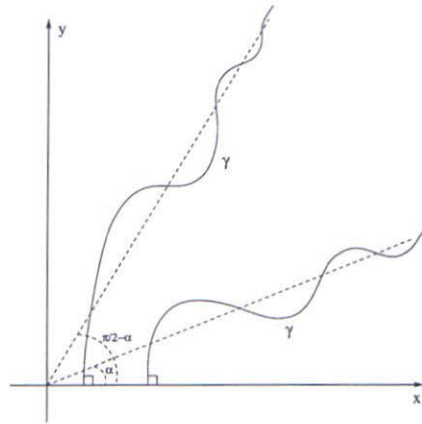


Figura B1

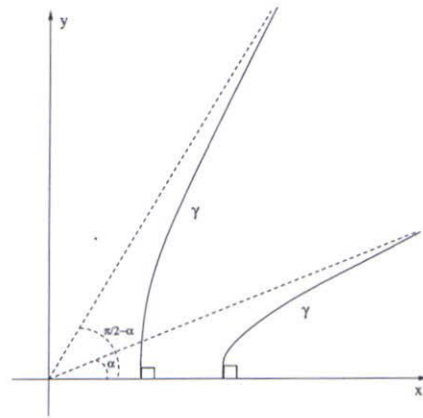


Figura B2

C) $\gamma(t)$ é a união de duas curvas $\beta_1 : (-\infty, 0] \rightarrow \Omega$ e $\beta_2 : [0, +\infty) \rightarrow \Omega$, sendo $\beta_1(0) = \beta_2(0)$ uma singularidade. As curvas β_i não intersectam o bordo do espaço de órbitas e assintotam as semi-retas do caso A) quando $t \rightarrow \pm\infty$ (ver figura C1 para $p = 2$ ou $p = 3$ e figura C2 para $p \geq 4$);

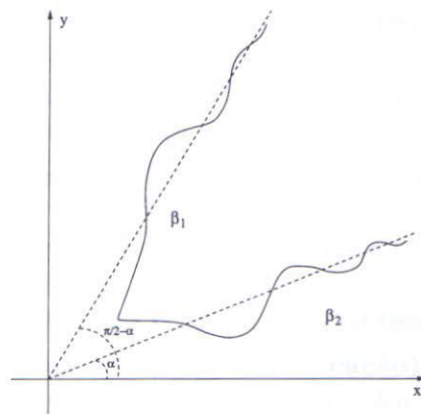


Figura C1

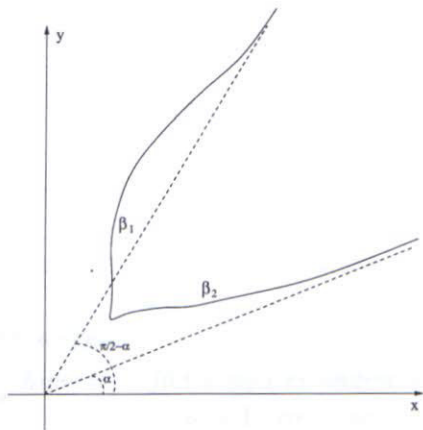


Figura C2

D) $\gamma(t)$ é regular, não intersecta o bordo do espaço de órbitas e assintota as duas semi-retas do caso A) quando $t \rightarrow \pm\infty$ (ver figura D1 para $p = 2$ ou $p = 3$ e figura D2 para $p \geq 4$).

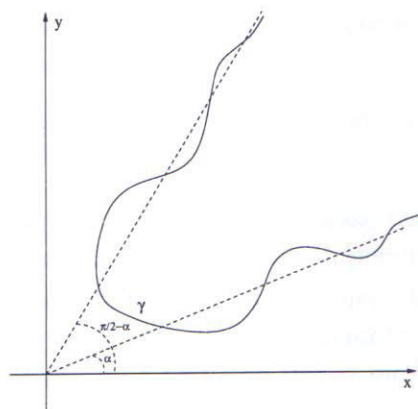


Figura D1

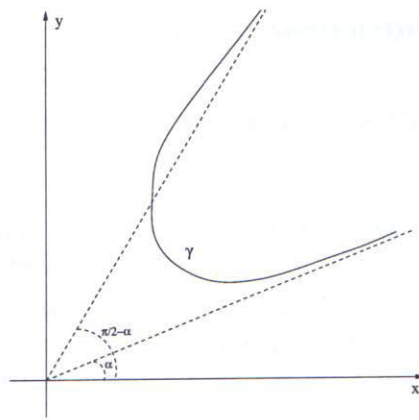


Figura D2

Do ponto de vista topológico, sem estrutura métrica, temos que as hipersuperfícies correspondentes ao tipo A são cones que apresentam uma única singularidade na origem de \mathbb{R}^{2p+2} , os casos C e D correspondem a cilindros $S^p \times S^p \times \mathbb{R}$ sobre $S^p \times S^p$, sendo que as hipersuperfícies do caso C possuem uma órbita de singularidade e as do caso D são regulares. No caso B, as hipersuperfícies são regulares e têm o tipo topológico de um cilindro sobre $S^p \times S^p$, e uma das esferas S^p se reduz a um ponto quando a curva geratriz corta o bordo do espaço de órbitas.

Vamos denotar por C_α e $C_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$ os cones gerados pelas semi-retas do tipo A e caracterizá-los no seguinte teorema:

Teorema 2.3.1 *Seja M^{2p+1} uma hipersuperfície de \mathbb{R}^{2p+2} , com curvatura escalar nula e invariante por $O(p+1) \times O(p+1)$, cuja curva geratriz faz um ângulo constante com o eixo x (isto é, $u' = 0$), então M é um dos cones C_α ou $C_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$.*

Nossa classificação é dada no teorema a seguir.

Teorema 2.3.2 (de Classificação) *As hipersuperfícies não estendíveis de \mathbb{R}^{2p+2} invariantes pela ação de $O(p+1) \times O(p+1)$, $p > 1$, com curvatura escalar nula, pertencem a uma das seguintes classes:*

1. cones com uma singularidade na origem (hipersuperfícies do tipo A).
2. hipersuperfícies que possuem uma órbita de singularidade e assintotam os cones C_α e $C_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$ (hipersuperfícies do tipo C).
3. hipersuperfícies regulares que assintotam o cone C_α (hipersuperfícies do tipo B).

4. *hipersuperfícies regulares que assintotam o cone $C_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$ (hipersuperfícies do tipo B).*
5. *hipersuperfícies regulares que assintotam ambos os cones C_α e $C_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$ (hipersuperfícies do tipo D).*

Os principais resultados desse trabalho são os teoremas abaixo que dão algumas propriedades dessas hipersuperfícies.

Teorema 2.3.3 *Seja M^{2p+1} uma hipersuperfície completa de \mathbb{R}^{2p+2} com curvatura escalar nula e invariante por $O(p+1) \times O(p+1)$, então M é gerada por uma curva do tipo B ou D. Além disso,*

- i) *Se M é gerada por uma curva do tipo B, então M é mergulhada e assintota um dos cones C_α ou $C_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$;*
- ii) *Se M é gerada por uma curva do tipo D, então M é mergulhada e assintota ambos os cones C_α e $C_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$.*

Teorema 3.2.1 *Seja M^{2p+1} uma hipersuperfície de \mathbb{R}^{2p+2} mergulhada, completa, com curvatura escalar nula e gerada por uma curva do tipo B ou D.*

- i) *Se $p = 2$ ou $p = 3$, então tais hipersuperfícies possuem $Ind_{T_1} M$ infinito.*
- ii) *Se $p \geq 4$, então as hipersuperfícies geradas por uma curva do tipo B são global e fortemente 1-estáveis ($Ind_{T_1} M = 0$).*

Em particular, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.2.2 *Existe uma hipersuperfície M^{2p+1} de \mathbb{R}^{2p+2} mergulhada, completa, com curvatura escalar nula e globalmente estável.*

Este trabalho está organizado como segue.

No capítulo 2, obtemos nosso teorema de classificação e os exemplos completos, mostrando que eles são mergulhados. Inicialmente, na seção 2.1, obtemos a relação existente entre as hipersuperfícies invariantes e sua curva geratriz $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Veremos que ela satisfaz a equação (2.3). Introduzindo uma mudança de coordenadas feita originalmente por Bombieri, De Giorgi e Giusti (ver (2.5)) e supondo $u' \neq 0$, transformamos essa equação num campo de vetores X definido num aberto de \mathbb{R}^2 (ver (2.11)). Na seção 2.2, realizamos um estudo geométrico do comportamento do campo X . Esse estudo nos dá os intervalos de crescimento e decrescimento das

coordenadas $u(t)$ e $v(t)$ de uma órbita $\phi(t) = (u(t), v(t))$, o tipo de singularidade que X apresenta e sua transversalidade ao longo de curvas especiais. Essa transversalidade fornece barreiras para os possíveis comportamentos das órbitas do campo X . Essas informações, junto com o teorema do fluxo tubular e Poincaré-Bendixson, nos permitem provar que existem ligações de selas entre os pontos singulares não degenerados e os pontos singulares degenerados de X . Na seção 2.3, caracterizamos os cones C_α e $C_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$ (Teorema 2.3.1) e depois apresentamos alguns resultados necessários para provar o teorema de classificação (Teorema 2.3.2) e o Teorema 2.3.3. Em seguida, relacionamos o comportamento das órbitas (u, v) de (2.11), obtido na seção 2.2, com o comportamento das curvas soluções (x, y) de (2.3) e, a partir dessas informações, provamos o teorema de classificação e como corolário o Teorema 2.3.3.

No capítulo 3, apresentamos alguns conceitos e resultados já consagrados na literatura que serão usados na demonstração do Teorema 3.2.1. Inicialmente, na seção 3.1 vamos caracterizar as hipersuperfícies M^n de $\overline{M}^{n+1}(c)$, onde $\overline{M}(c)$ é o espaço \mathbb{R}^{n+1} , S^{n+1} ou H^{n+1} , conforme c seja 0, 1 ou -1 , com S_{r+1} constante. Elas são dadas por imersões $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ que são pontos críticos do problema variacional de minimizar o funcional área A_r (ver (3.3)). Na seção 3.2, introduzimos o operador de Jacobi T_r (ver (3.6)) e os conceitos de índice e de estabilidade da imersão. Uma exposição detalhada desses assuntos pode ser encontrada em [4], [11], [10] e [?].

Em seguida, utilizamos esses resultados para provar um teorema que nos dá informações sobre o índice $Ind_{T_1} M$ do operador de Jacobi T_1 em M das hipersuperfícies M dadas no Teorema 2.3.3.

Capítulo 2

Hipersuperfícies invariantes por $O(p+1) \times O(p+1)$ em \mathbb{R}^{2p+2}

2.1 O campo vetorial X

Sejam $G = O(p+1) \times O(p+1)$ e $\eta : G \times \mathbb{R}^{2p+2} \rightarrow \mathbb{R}^{2p+2}$ a ação canônica $(A, B, z, w) \mapsto (Az, Bw)$ do grupo de isometrias G em $\mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{p+1}$, onde p é um natural ≥ 2 . O espaço de órbitas dessa ação pode ser representado por

$$\pi(\mathbb{R}^{2p+2}) = \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\}, \quad (2.1)$$

onde $\pi : \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{p+1} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dado por $\pi(z, w) = (|z|, |w|)$. A métrica orbital coincide com a métrica canônica do \mathbb{R}^2 e as órbitas principais são produtos de esferas $S^p(x) \times S^p(y)$ (ver [15]). Se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ é uma curva em Ω , uma parametrização explícita para hipersuperfícies $M = \pi^{-1}(\gamma)$ é dada por $f(t, a, b) = x(t)\varphi(a) \oplus y(t)\phi(b)$, onde φ e ϕ são parametrizações em coordenadas polares das esferas $S^p(1) \subseteq \mathbb{R}^{p+1}$. Por um cálculo direto, usando a parametrização acima, obtemos as curvaturas principais de

$M = \pi^{-1}(\gamma)$ que são

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{-x''(t)y'(t) + x'(t)y''(t)}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{3}{2}}} \\ k_i &= \frac{y'(t)}{x(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \quad i = 1, 2, \dots, p \\ k_j &= -\frac{x'(t)}{y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \quad j = p+1, p+2, \dots, 2p. \end{aligned} \quad (2.2)$$

A r -ésima curvatura média da imersão $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{2p+2}$ é dada por

$$S_r = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} k_{i_1} \dots k_{i_r}, \quad 1 \leq r \leq n.$$

Assim, se $M = \pi^{-1}(\gamma)$ é uma hipersuperfície com $S_2 = 0$, utilizando (2.2) e a equação de S_2 temos que sua curva geratriz $(x(t), y(t))$ satisfaz a seguinte equação:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{p} \frac{(-x''(t)y'(t) + x'(t)y''(t))}{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \left(\frac{y'(t)}{x(t)} - \frac{x'(t)}{y(t)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} p(p-1) \left(\left(\frac{y'(t)}{x(t)} \right)^2 + \left(\frac{x'(t)}{y(t)} \right)^2 \right) - p^2 \frac{x'(t)y'(t)}{x(t)y(t)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

As curvas regulares $(x(t), y(t))$ que satisfazem a equação $S_2 = 0$ são invariantes por homotetias e, portanto, para cada solução $\gamma(t)$ de (2.3) temos uma família M_λ de hipersuperfícies invariantes com $S_2 = 0$, geradas pelas curvas $\gamma_\lambda(t) = (\lambda x(t), \lambda y(t))$. Logo, podemos aplicar o método desenvolvido em [5] para estudar essa equação. Observe também que se uma curva (x, y) é uma solução da equação (2.3), então (y, x) também é solução.

Sem perda de generalidade, vamos supor que as curvas $\gamma(t)$ sejam parametrizadas pelo comprimento de arco. Logo, quando $y = y(x)$ temos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) \left[-\frac{p(p-1)}{2} \left(\frac{y}{x} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{x}{y} \right) + p^2 \frac{dy}{dx} \right]}{p \left(-x + y \frac{dy}{dx}\right)}. \quad (2.4)$$

Seguindo Bombieri, De Giorgi, Giusti [5] e Alencar [1] introduzimos os parâmetros

$$u = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \text{ e } v = \arctan\left(\frac{y'}{x'}\right) \quad (2.5)$$

que são invariantes por homotetias

$$(x, y) \mapsto \lambda(x, y)$$

e satisfazem as relações:

$$x = \sqrt{x^2 + y^2} \cos(u), \quad y = \sqrt{x^2 + y^2} \sin(u), \quad (2.6)$$

$$x' = \cos(v), \quad y' = \sin(v), \quad (2.7)$$

$$v' = -x''y' + x'y'', \quad u' = \frac{y'x - yx'}{x^2 + y^2}. \quad (2.8)$$

Admitindo $u' \neq 0$, multiplicando a equação (2.3) por

$$\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} u' = \frac{x^2 y^2 (y'x - yx')}{(x^2 + y^2)^2},$$

usando as igualdades dadas em (2.6-2.8) e simplificando as expressões obtemos a equação:

$$\begin{aligned} 0 &= pv' \sin(2u) [\sin(2u) - \sin(2v)] \\ &+ u' \left[\frac{p}{2} (p-1) (\cos^2(u) \cos^2(v) + \sin^2(u) \sin^2(v)) \right. \\ &\left. - p^2 \cos(u) \sin(u) \cos(v) \sin(v) \right]. \end{aligned}$$

Usando a igualdade

$$\begin{aligned} \cos(2(u \pm v)) &= 2 \cos^2(u) \cos^2(v) + 2 \sin^2(u) \sin^2(v) \\ &\mp 4 \cos(u) \cos(v) \sin(u) \sin(v) - 1 \end{aligned}$$

podemos reescrever a equação acima da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} 0 &= v' \left[\frac{1}{4} p \sin(2u) (\sin(2u) - \sin(2v)) \right] \\ &+ u' \left[\frac{1}{8} p (2(p-1) - \cos(2u-2v) + (2p-1) \cos(2u+2v)) \right], \end{aligned}$$

que pode ser escrita como um sistema

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{4}p \operatorname{sen}(2u)[\operatorname{sen}(2u) - \operatorname{sen}(2v)] \quad (2.9)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{8}p[2(p-1) - \cos(2u-2v) + (2p-1)\cos(2u+2v)]. \quad (2.10)$$

Associamos a esse sistema o campo vetorial $X = (X_1, X_2)$ no plano (u, v) dado por

$$X_1(u, v) = -\frac{1}{4}p \operatorname{sen}(2u)[\operatorname{sen}(2u) - \operatorname{sen}(2v)],$$

$$X_2(u, v) = \frac{1}{8}p[2(p-1) - \cos(2u-2v) + (2p-1)\cos(2u+2v)].$$

2.2 Análise do campo vetorial X

Como nosso espaço de órbitas é a região Ω dada em (2.1), precisamos de informações apenas para $x, y \geq 0$, o que corresponde à região $R = \{(u, v) : 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, -\pi \leq v \leq \pi\}$ no plano (u, v) . Observamos que X é π -periódico nas duas variáveis e invariante por uma translação de $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Assim, basta analisá-lo no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi]$. Vamos começar analisando individualmente cada função coordenada de X .

Lema 2.2.1 *A primeira coordenada $X_1(u, v)$ do campo X se anula sobre as retas $u = 0$, $u = \frac{\pi}{2}$, $v = u$ e $v = \frac{\pi}{2} - u$, e $X_1(u, 0) = X_1(u, \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2(2u)$. Além disso, temos (ver figura E, página 13):*

i) X_1 é estritamente positiva nas regiões

$$R_1 = \{u < v < \frac{\pi}{2} - u\} \cap \{0 < u < \frac{\pi}{4}\},$$

$$R_3 = \{\frac{\pi}{2} - u < v < u\} \cap \{\frac{\pi}{4} < u < \frac{\pi}{2}\};$$

ii) X_1 é estritamente negativa nas regiões

$$R_2 = \{0 \leq v < u\} \cap \{0 \leq v < \frac{\pi}{2} - u\},$$

$$R_4 = \{\frac{\pi}{2} - u < v \leq \frac{\pi}{2}\} \cap \{u < v \leq \frac{\pi}{2}\},$$

$$R_5 = \{(u, v) : 0 < u < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \leq v \leq \pi\}.$$

Demonstração: A prova deste fato é uma simples análise do sinal e do crescimento da função $\sin(2x)$ e vamos omitir.

Lema 2.2.2 A segunda coordenada $X_2(u, v)$ do campo X satisfaz as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} X_2(0, v) &= \frac{1}{2}p(p-1)\cos^2(v), & X_2\left(\frac{\pi}{2}, v\right) &= \frac{1}{2}p(p-1)\sin^2(v), \\ X_2(u, 0) &= \frac{1}{2}p(p-1)\cos^2(u), & X_2\left(u, \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2}p(p-1)\sin^2(u). \end{aligned}$$

Além disso, temos (ver figura E, página 13):

- i) X_2 é estritamente positiva em $S_4 = \{(u, v); 0 < u < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \leq v \leq \pi\}$;
- ii) Em $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ existem duas curvas (gráficos de funções) sem intersecção, ambas ligando os pontos $(0, \frac{\pi}{2})$ a $(\frac{\pi}{2}, 0)$, que limitam uma região aberta S_1 estritamente convexa e simétrica em relação às retas $v = u$ e $v = \frac{\pi}{2} - u$. O complementar de S_1 em $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ são duas regiões S_2 e S_3 (S_2 está abaixo da reta $v = \frac{\pi}{2} - u$). A coordenada X_2 se anula sobre essas curvas e é estritamente negativa na região S_1 e estritamente positiva em $S_2 \cup S_3$.

Demonstração: As primeiras afirmações são óbvias. Observe que podemos reescrever X_2 como

$$X_2(u, v) = \frac{1}{8}p[2(p-1)(1 + \cos(2u)\cos(2v)) - 2p\sin(2u)\sin(2v)],$$

e $\sin(2u)\sin(2v) < 0$ no interior de S_4 . Daí, obtemos i).

Para provar a segunda afirmação, fazemos uma rotação anti-horária de $\frac{\pi}{4}$ e obtemos as coordenadas (\tilde{x}, \tilde{y}) . Os zeros de X_2 vistos como função de (\tilde{x}, \tilde{y}) ocorrem sobre os gráficos das funções:

$$\tilde{y}_1(\tilde{x}) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arccos\left(\frac{\cos(2\sqrt{2}\tilde{x}) - 2(p-1)}{(2p-1)}\right), \quad -\frac{\sqrt{2}}{4}\pi \leq \tilde{x} \leq \frac{\sqrt{2}}{4}\pi, \quad (2.11)$$

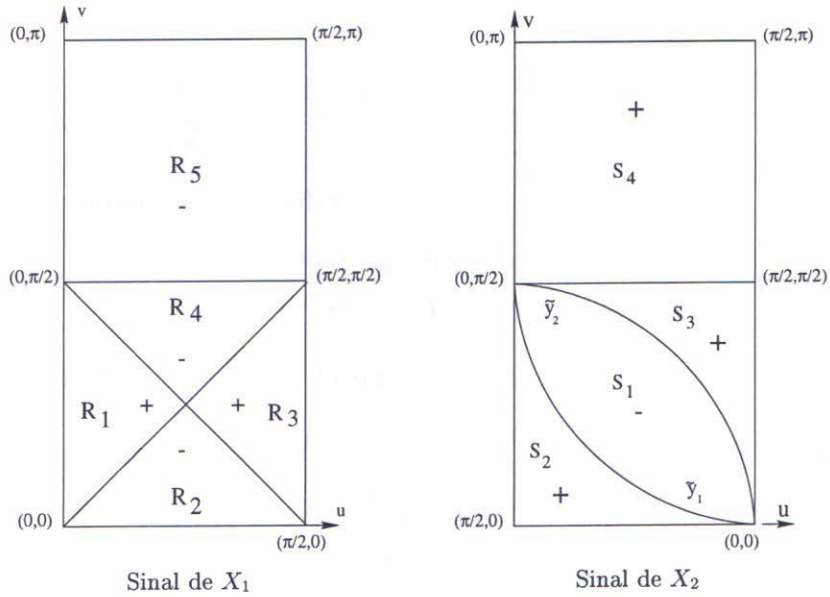


Figura E, que fornece os sinais das coordenadas do campo X.

$$\tilde{y}_2(\tilde{x}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arccos \left(\frac{\cos(2\sqrt{2}\tilde{x}) - 2(p-1)}{(2p-1)} \right), \quad -\frac{\sqrt{2}}{4}\pi \leq \tilde{x} \leq \frac{\sqrt{2}}{4}\pi. \quad (2.12)$$

Observe que vale a igualdade:

$$1 - \frac{[-2(p-1) + \cos(2\sqrt{2}\tilde{x})]^2}{(2p-1)^2} = \frac{-2\cos^2(\sqrt{2}\tilde{x}) [3 - 4p + \cos(2\sqrt{2}\tilde{x})]}{(2p-1)^2}.$$

Assim,

$$\tilde{y}_1(\tilde{x}) = \frac{2\text{sen}(\sqrt{2}\tilde{x})}{\sqrt{2}\sqrt{-[3 - 4p + \cos(2\sqrt{2}\tilde{x})]}}. \quad (2.13)$$

Definindo $Q(\tilde{x})$ como

$$Q(\tilde{x}) = -\cos^2(\sqrt{2}\tilde{x}) [3 - 4p + \cos(2\sqrt{2}\tilde{x})]$$

temos

$$\tilde{y}_1''(\tilde{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{4\sqrt{2} \cos(2\sqrt{2}\tilde{x}) Q(\tilde{x}) - \operatorname{sen}(2\sqrt{2}\tilde{x}) Q'(\tilde{x})}{2[Q(\tilde{x})]^{\frac{3}{2}}} \right].$$

Assim, usando as igualdades

$$\begin{aligned} \cos(2\sqrt{2}\tilde{x}) &= 2\cos^2(\sqrt{2}\tilde{x}) - 1 \\ \operatorname{sen}^2(2\sqrt{2}\tilde{x}) &= 1 - (2\cos^2(\sqrt{2}\tilde{x}) - 1)^2 \end{aligned}$$

podemos reescrever $\tilde{y}_1''(\tilde{x})$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1''(\tilde{x}) &= \left\{ 4\sqrt{2} \left[-2\cos^4(\sqrt{2}\tilde{x}) + \cos^2(\sqrt{2}\tilde{x}) \right] \left[2 - 4p + 2\cos^2(\sqrt{2}\tilde{x}) \right] \right. \\ &\quad \left. - 2\sqrt{2} \left[-4\cos^4(\sqrt{2}\tilde{x}) + 4\cos^2(\sqrt{2}\tilde{x}) \right] \right. \\ &\quad \left. \left[1 - 2p + 2\cos^2(\sqrt{2}\tilde{x}) \right] \right\} / 2\sqrt{2}[Q(\tilde{x})]^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Após uma simplificação dessa equação obtemos

$$\tilde{y}_1''(\tilde{x}) = \frac{8(p-1)\cos^4(\sqrt{2}\tilde{x})}{[-\cos^2(\sqrt{2}\tilde{x})(3-4p+\cos(2\sqrt{2}\tilde{x}))]^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

para $-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi < \tilde{x} < \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$. Isso mostra que o gráfico de \tilde{y}_1 é uma curva estritamente convexa e fornece as características da região S_1 . A expressão de X_2 nas coordenadas (\tilde{x}, \tilde{y}) ,

$$X_2(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{8}p \left[2(p-1) - \cos(2\sqrt{2}\tilde{x}) + (2p-1)\cos(2\sqrt{2}\tilde{y}) \right],$$

nos dá o sinal da função X_2 .

Lema 2.2.3 *As singularidades do campo $X(u, v) = (X_1(u, v), X_2(u, v))$ em $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi]$ ocorrem nos pontos $P_1 = (0, \frac{\pi}{2})$, $P_2 = (\frac{\pi}{2}, 0)$, $P_3 = (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $P_4 = (\alpha, \alpha)$ e $P_5 = (\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha)$, com $\alpha = \frac{1}{4} \arccos\left(\frac{3-2p}{2p-1}\right)$. Os pontos P_1, P_2 e P_3 são degenerados, P_4 é atrator e P_5 é repulsor. A matriz $DX(u, v)$ satisfaz $DX(P_4) = -DX(P_5)$. Os auto-valores de $DX(P_4)$ e $DX(P_5)$ são*

$$\lambda_1 = \frac{-\sqrt{2}p(p\sqrt{p-1} + \sqrt{p^3 - 5p^2 + 6p - 2})}{4p-2}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}p(-p\sqrt{p-1} + \sqrt{p^3 - 5p^2 + 6p - 2})}{4p-2},$$

$$\mu_1 = \frac{\sqrt{2}p(p\sqrt{p-1} + \sqrt{p^3 - 5p^2 + 6p - 2})}{4p-2}, \quad \mu_2 = \frac{-\sqrt{2}p(-p\sqrt{p-1} + \sqrt{p^3 - 5p^2 + 6p - 2})}{4p-2},$$

respectivamente.

Demonstração: Usando os Lemas 2.2.1 e 2.2.2, concluímos que as singularidades de X em $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi]$ ocorrem nos pontos P_i , $i = 1, \dots, 5$. As derivadas parciais de X são

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial u} &= -\frac{1}{2}p \cos(2u) [2\operatorname{sen}(2u) - \operatorname{sen}(2v)] \\ \frac{\partial X_1}{\partial v} &= \frac{1}{2}p \cos(2v) \operatorname{sen}(2u) \\ \frac{\partial X_2}{\partial u} &= \frac{1}{4}p [\operatorname{sen}(2u - 2v) - (2p - 1) \operatorname{sen}(2u + 2v)] \\ \frac{\partial X_2}{\partial v} &= -\frac{1}{4}p [\operatorname{sen}(2u - 2v) + (2p - 1) \operatorname{sen}(2u + 2v)]. \end{aligned}$$

Portanto, $DX(P_1) = DX(P_2) = DX(P_3) = 0$. Agora,

$$\alpha = \frac{1}{4} \arccos\left(\frac{3-2p}{2p-1}\right) = \frac{1}{4} \operatorname{arcsen}\left(\frac{2\sqrt{2}\sqrt{p-1}}{2p-1}\right)$$

e, conseqüentemente, $DX(P_4) = -DX(P_5)$ com

$$DX(P_4) = \begin{bmatrix} \frac{p\sqrt{p-1}}{\sqrt{2}(1-2p)} & -\frac{p\sqrt{p-1}}{\sqrt{2}(1-2p)} \\ -\frac{p\sqrt{p-1}}{\sqrt{2}} & -\frac{p\sqrt{p-1}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Usando a igualdade

$$\lambda = \frac{\operatorname{traço}(DX) \pm \sqrt{(\operatorname{traço}DX)^2 - 4 \det DX}}{2}$$

para os auto-valores de DX , obtemos as expressões dos auto-valores de $DX(P_4)$ e $DX(P_5)$. Observando que o polinômio

$$Q(p) = p^3 - 5p^2 + 6p - 2$$

é negativo em $p = 2$ e $p = 3$, positivo para ≥ 4 e satisfaz a desigualdade $\sqrt{p^3 - p^2} > \sqrt{p^3 - 5p^2 + 6p - 2}$ para $p \geq 4$, concluímos que P_4 é um atrator.

Observação 2.2.1 Segue diretamente da demonstração do Lema 2.2.3 os seguintes fatos:

1. Se $p = 2, 3$, então P_4 é um foco atrator e P_5 é um foco repulsor.
2. Se $p \geq 4$, então P_4 é um nó atrator e P_5 é um nó repulsor.

Lema 2.2.4 O divergente do campo $X(u, v) = (X_1(u, v), X_2(u, v))$ satisfaz a igualdade

$$\text{Div}X(u, v) = p \cos(u + v)[- \text{sen}(3u - v) - (p - 1) \text{sen}(u + v)]$$

e, portanto, X não possui órbita fechada nas regiões:

$$\begin{aligned} D^- &= \{(u, v); 0 < v < \frac{\pi}{2} - u, 0 < u < \frac{\pi}{2}\} \\ D^+ &= \{(u, v); \frac{\pi}{2} - u < v < \frac{\pi}{2}, 0 < u < \frac{\pi}{2}\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Demonstração: Usaremos as igualdades abaixo:

$$\frac{1}{4}p[-\text{sen}(2u - 2v) + \text{sen}(2u + 2v)] = \frac{p}{2} \cos(2u) \text{sen}(2v), \quad (2.15)$$

$$\text{sen}(2(u + v)) = 2 \text{sen}(u + v) \cos(u + v), \quad (2.16)$$

$$\text{sen}(3u - v) = \text{sen}(3u) \cos(v) - \cos(3u) \text{sen}(v), \quad (2.17)$$

$$\text{sen}^2(v) \cos^2(u) - \cos^2(v) \text{sen}^2(u) = \frac{1}{2}[-\cos(2v) + \cos(2u)], \quad (2.18)$$

$$\text{sen}(3u) = 3 \text{sen}(u) - 4 \text{sen}^3(u), \quad (2.19)$$

$$\cos(3u) = 4 \cos^3(u) - 3 \cos(u). \quad (2.20)$$

Usando (2.15) e as expressões de $X_1(u, v)$ e $X_2(u, v)$ dadas em (2.11) obtemos:

$$\begin{aligned} \text{Div}X(u, v) &= \frac{1}{2}[-p \text{sen}(4u) - p \text{sen}(2u - 2v) + p \text{sen}(2u + 2v)] \\ &\quad - \frac{1}{2}[p^2 \text{sen}(2u + 2v)]. \end{aligned}$$

Usando (2.16) temos

$$\begin{aligned} \text{Div}X(u, v) &= p \cos(u + v)[-(p - 1) \text{sen}(u + v)] \\ &\quad + p \left(-\frac{\text{sen}(4u)}{2} - \frac{\text{sen}(2u - 2v)}{2} \right). \end{aligned}$$

Agora, a equação (2.17) nos dá igualdade

$$\begin{aligned} \cos(u+v) \operatorname{sen}(3u-v) &= \frac{1}{2} \operatorname{sen}(4u) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2v) \cos(2u) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(4u) \\ &\quad - \operatorname{sen}^2(v) \operatorname{sen}(3u) \cos(u) - \cos^2(v) \cos(3u) \operatorname{sen}(u). \end{aligned}$$

Por outro lado, usando (2.18) temos

$$\operatorname{sen}2u \cos 2u - \operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen} 3u \cos u - \cos^2 v \cos 3u \operatorname{sen} u = \frac{\operatorname{sen}2u \cos 2v}{2}.$$

Portanto, concluímos que

$$\operatorname{Div}X(u, v) = p \cos(u+v) [-\operatorname{sen}(3u-v) - (p-1) \operatorname{sen}(u+v)].$$

Além disso,

$$\operatorname{sen}(3u-v) + (p-1) \operatorname{sen}(u+v) \geq \operatorname{sen}(3u-v) + \operatorname{sen}(u+v)$$

e usando as igualdades (2.19) e (2.20) obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(3u-v) + \operatorname{sen}(u+v) &= \operatorname{sen}(u) \cos(v) [4 - 4\operatorname{sen}^2(u)] \\ &\quad + \operatorname{sen}(v) \cos(u) [4 - 4\cos^2(u)] > 0 \end{aligned}$$

para $0 < u < \frac{\pi}{2}$ e $0 < v < \frac{\pi}{2}$, donde $\operatorname{Div}X(u, v) < 0$ em D^- e $\operatorname{Div}X > 0$ em D^+ . Logo, pelo critério de Bendixson, X não possui órbita fechada nessas regiões (ver [26], página 258).

No que segue, denotaremos por $R_i^{-\pi}$ a translação da região R_i (ver Lema 2.2.1) por $(0, -\pi)$, $i = 1 \dots 5$.

Proposição 2.2.1 *As órbitas $\phi(t)$ do campo $X(u, v) = (X_1(u, v), X_2(u, v))$ estão definidas em toda a reta real. Na região $R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, -\pi \leq v \leq \pi\}$ elas se comportam de uma das seguintes formas (ver figura G1, página 19, para $p = 2$ ou $p = 3$ e figura G2, página 19, para $p \geq 4$):*

- 1) $\phi(t)$ é uma órbita vertical com α -limite $(0, -\frac{\pi}{2})$ e ω -limite $(0, \frac{\pi}{2})$, ou uma órbita vertical com α -limite $(\frac{\pi}{2}, 0)$ e ω -limite $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ ou ainda uma órbita vertical com α -limite $(\frac{\pi}{2}, -\pi)$ e ω -limite $(\frac{\pi}{2}, 0)$.
- 2) $\phi(t)$ é uma semi-órbita vertical com ω -limite $(0, -\frac{\pi}{2})$ ou uma semi-órbita vertical com α -limite $(0, \frac{\pi}{2})$.

- 3) $\phi(t)$ é uma órbita contida em $(0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2})$ com ω -limite (α, α) e α -limite $(\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha)$, passando por pontos do segmento $J_1 = \{(u, \frac{\pi}{2} - u); 0 < u < \frac{\pi}{2}\}$, onde $\alpha = \frac{1}{4} \arccos\left(\frac{3-2p}{2p-1}\right)$.
- 4) $\phi(t)$ é uma ligação de sela contida em $R_3 \cup R_4$ com ω -limite $(0, \frac{\pi}{2})$ e α -limite $(\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha)$.
- 5) $\phi(t)$ é uma ligação de sela contida em $R_1 \cup R_2$ com α -limite $(0, \frac{\pi}{2})$ e ω -limite (α, α) .
- 6) $\phi(t)$ é uma ligação de sela contida em $R_1 \cup R_2$ com α -limite $(\frac{\pi}{2}, 0)$ e ω -limite (α, α) .
- 7) $\phi(t)$ é uma ligação de sela contida em $R_3 \cup R_4$ com ω -limite $(\frac{\pi}{2}, 0)$ e α -limite $(\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha)$.
- 8) $\phi(t)$ é uma órbita contida em $R_1 \cup R_2 \cup (0, \frac{\pi}{2}) \times [-\frac{\pi}{2}, 0] \cup R_4^{-\pi} \cup R_3^{-\pi}$ com α -limite $(-\frac{\pi}{2} - \alpha, -\frac{\pi}{2} - \alpha)$ e ω -limite (α, α) .
- 9) $\phi(t)$ é uma órbita, ou parte de uma, obtida por uma translação de $(0, \pm\pi)$ de uma das órbitas dos itens 1-8.

Além disso, as órbitas com ω -limite P_4 chegam em P_4 espiralando quando $p = 2$ ou $p = 3$, e as com α -limite P_5 saem de P_5 espiralando quando $p = 2$ ou $p = 3$.

Demonstração: Observamos que X é limitado, logo, suas órbitas estão definidas em toda a reta real. X satisfaz as condições do teorema de existência e unicidade, assim, usando os Lemas 2.2.1 e 2.2.3, obtemos as afirmações 1) e 2). Os Lemas 2.2.1 e 2.2.2 nos dão informações sobre a transversalidade do campo X ao longo das retas $v = u$, $v = \frac{\pi}{2} - u$ e dos gráficos das funções \tilde{y}_1 e \tilde{y}_2 (ver figura F, página 19). Essa transversalidade fornece barreiras para o deslocamento de uma órbita de X . Essas barreiras, junto com o crescimento e decrescimento das coordenadas $u(t)$ e $v(t)$ de uma órbita $\phi(t) = (u(t), v(t))$, dados por esses lemas, nos permitem concluir que uma órbita $\phi(t) = \varphi(t, P)$, $P \in J_1$ (onde $\varphi(t, P)$ é o fluxo do campo X), possui a seguinte propriedade: $\phi(t) \in D^-$ para $t > 0$. Além disso, pelo Lema 2.2.4, X não possui órbita fechada em D^- . Como $P_4 = (\alpha, \alpha)$ é a única singularidade de X nesse domínio temos, pelo teorema de Poincaré-Bendixson, que ω -limite de ϕ é P_4 . Um raciocínio análogo, usando a semi-órbita $\phi(t)^-$, mostra que o α -limite de ϕ é $P_5 = (\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha)$. Além disso, pelos Lemas 2.2.1 e 2.2.2 vemos que ϕ não deixa a região $(0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2})$, o que conclui a demonstração do item 3).

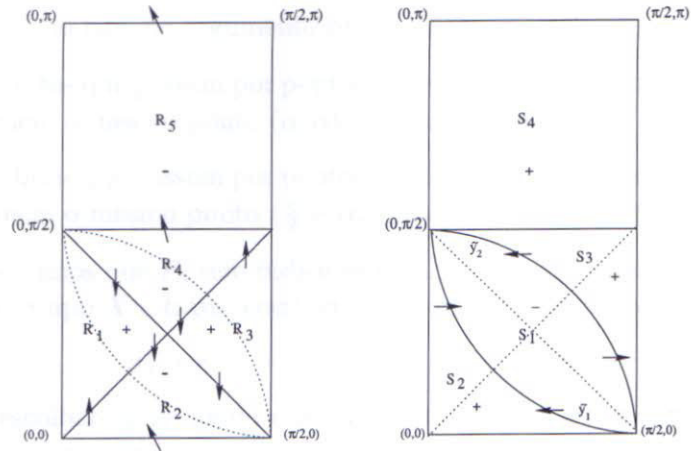


Figura F, ilustrando a transversalidade do campo X .

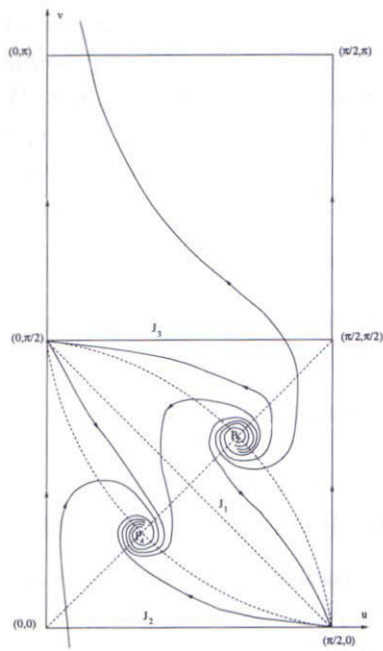


Figura G1

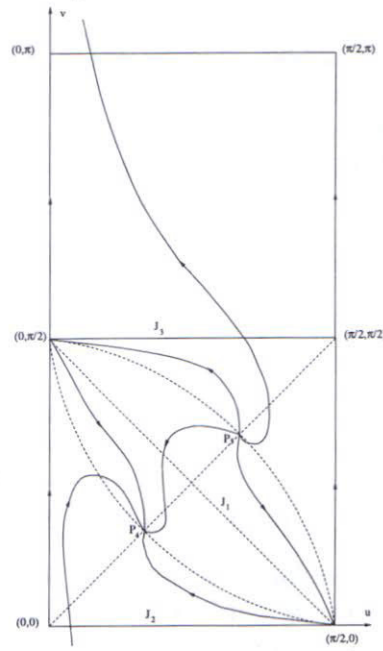


Figura G2

Figura G1, ilustrando as órbitas do campo X , no caso $p = 2$ e $p = 3$.

Figura G2, ilustrando as órbitas do campo X , no caso $p \geq 4$.

Esse mesmo tipo de argumento mostra que:

1. As órbitas que passam por pontos do segmento $J_2 = \{(u, 0); 0 < u < \frac{\pi}{2}\}$ possuem o mesmo ponto (α, α) como ω -limite.
2. As órbitas que passam por pontos do segmento $J_3 = \{(u, \frac{\pi}{2}); 0 < u < \frac{\pi}{2}\}$ possuem o mesmo ponto $(\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha)$ como α -limite.

Já mostramos que P_5 tem índice geométrico 1, logo, existe $r > 0$ tal que o fluxo do campo X é transversal ao longo da circunferência

$$\rho(s) = P_5 + r e^{-is+s_0}, \quad 0 \leq s \leq 2\pi. \quad (2.21)$$

Podemos escolher s_0 de modo que $\rho(0)$ seja o ponto sobre a reta $v = u$ e esteja contido na região S_1 . É claro que a órbita $\varphi(t, \rho(0))$ passa por J_1 . Pelo teorema do fluxo tubular, existe $a > 0$ tal que $\varphi(t, \rho(s))$ passe por $J_1 \forall s \in [0, a]$. Seja

$$\delta = \sup \{a : \varphi(t, \rho(s)) \text{ passe por } J_1, \forall s \in [0, a]\}. \quad (2.22)$$

Usando novamente o teorema do fluxo tubular e o item 2 da afirmação acima, concluímos que $\delta < 2\pi$. Afirmamos que $\varphi(t, \rho(\delta))$ é uma ligação de sela entre P_5 a $(0, \frac{\pi}{2})$. De fato, do contrário $\varphi(t, \rho(\delta))$ teria que necessariamente passar por J_3 e concluiríamos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\varphi(t, \rho(s))$ passe por J_3 para todo $s \in (\delta - \varepsilon_0, \delta + \varepsilon_0)$, o que contradiz a definição de δ . Se $\varphi(t, \rho(s_0))$ passa por J_3 , um argumento semelhante usando

$$\tilde{\delta} = \inf \{a : \varphi(t, \rho(s)) \text{ passe por } J_3, \forall s \in (a, s_0]\} \quad (2.23)$$

também mostra que $\varphi(t, \rho(\tilde{\delta}))$ é uma ligação de sela entre P_5 a $(0, \frac{\pi}{2})$. Tomando

$$\varepsilon = \sup \{a : \varphi(t, \rho(s)) \text{ passe por } J_3, \forall s \in [s_0, a]\}$$

ou

$$\tilde{\varepsilon} = \inf \{2\pi - a : \varphi(t, \rho(s)) \text{ passe por } J_1, \forall s \in (2\pi - a, 2\pi]\}$$

e usando um argumento análogo, concluímos que existem ligações de selas entre P_5 e $(\frac{\pi}{2}, 0)$. Tomando P_4 como centro da circunferência em (2.21) e analisando as órbitas que chegam em P_4 , obtemos as outras ligações de selas. Isso demonstra 4-7. Usando a periodicidade do campo X e os Lemas 2.2.1 e 2.2.2 concluímos que em todo ponto da região $(0, \frac{\pi}{2}) \times [-\frac{\pi}{2}, 0]$ passa uma órbita com α -limite $(-\frac{\pi}{2} - \alpha, -\frac{\pi}{2} - \alpha)$ e ω -limite (α, α) . Finalmente, usando a Observação 2.3.2, obtemos o comportamento de tais órbitas numa vizinhança de P_4 e P_5 .

Observação 2.2.2 Na demonstração acima, se os valores de δ e $\tilde{\delta}$ dados, respectivamente, em 2.22 e 2.23 são iguais, então existe uma única ligação de sela. Caso contrário, temos uma família de ligações de selas. Uma afirmação análoga vale para outras ligações de selas.

2.3 Classificação das hipersuperfícies

A seguir, caracterizaremos os cones C_α e $C_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$ provando o Teorema 2.3.1 enunciado na introdução e obteremos as hipersuperfícies do tipo A.

Teorema 2.3.1 *A menos de homotetia, a equação (2.3) admite apenas duas soluções $\gamma_i(t) = (x(t), y(t))$, $i = 1, 2$, com $u' \equiv \arctan\left(\frac{y}{x}\right)' = 0$. Mais precisamente, essas soluções são dadas por*

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= (\cos(\alpha)t, \operatorname{sen}(\alpha)t), \quad t \geq 0, \\ \gamma_2(t) &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)t, \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)t\right), \quad t \geq 0,\end{aligned}$$

onde $\alpha = \frac{1}{4} \arccos\left(\frac{3-2p}{2p-1}\right)$. Tais curvas geram os cones C_α e $C_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$.

Demonstração: Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com $u' = 0$. Então, existe uma constante $\alpha > 0$ com $y(t) = \tan \alpha x(t)$. Por uma substituição direta na equação (2.3), concluímos que α satisfaz a equação

$$0 = \frac{p(p-1)}{2} \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \right) - p^2.$$

Portanto, existem duas e somente duas soluções com $u' = 0$ e α é solução da equação:

$$0 = \operatorname{sen}^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \frac{2p}{p-1} \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 + \left(\frac{-4p+2}{p-1} \right) \frac{\operatorname{sen}^2 2\alpha}{4}.$$

Logo, devemos ter

$$\cos 4\alpha = \cos^2 2\alpha - \operatorname{sen}^2 2\alpha = \frac{1}{2p-1} - \frac{2p-2}{2p-1} = \frac{3-2p}{2p-1}.$$

E assim, concluímos que

$$\alpha = \frac{1}{4} \arccos\left(\frac{3-2p}{2p-1}\right) \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \arccos\left(\frac{3-2p}{2p-1}\right).$$

Além disso, usando a igualdade $x''x' + y''y' = 0$, obtemos que x' é constante, o que termina a demonstração.

O Teorema 2.3.3 enunciado na introdução é consequência do Teorema de Classificação que iremos provar, juntamente com alguns resultados que apresentamos a seguir.

Proposição 2.3.1 *Uma hipersuperfície M^{2p+1} de \mathbb{R}^{2p+2} invariante por $O(p+1) \times O(p+1)$ é mergulhada se, e somente se, sua curva geratriz $\gamma(t)$ é mergulhada. Em particular, se $\gamma(t)$ é gráfico de uma função regular, então M é mergulhada.*

Demonstração: Como M é invariante, então M só pode se auto-intersectar ao longo de uma ou mais órbitas.

Observação 2.3.1 *As órbitas não singulares do campo X estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, se $\gamma(t)$ é uma curva geratriz regular e está associada a uma órbita não singular, então γ tem comprimento infinito. Logo, a hipersuperfície associada a γ é completa.*

A seguir, usamos novamente a notação:

$$R_i^{-\pi} = R_i + (0, -\pi), \quad i = 1 \dots 5.$$

Lema 2.3.1 *Seja $\phi(t) = (u(t), v(t))$ uma órbita do campo X com α -limite $(\frac{\pi}{2} - \alpha, -\frac{\pi}{2} - \alpha)$ e ω -limite (α, α) . Considere $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma curva geratriz associada. Então, $\phi(t)$ intersecta o segmento de reta $l = \{(\frac{\pi}{4}, v) : -\pi < v < \frac{\pi}{2}\}$ uma única vez. (Portanto, $\gamma(t)$ intersecta a diagonal $y = x$ uma única vez.)*

Demonstração: Que $\phi(t)$ intersecta l está claro. Observamos que essa intersecção só pode ocorrer na região $R_4^{-\pi} \cup R_2 \cup (0, \frac{\pi}{2}) \times [-\frac{\pi}{2}, 0]$ (ver Proposição 2.2.1).

Seja t_0 tal que $u(t_0) = \frac{\pi}{4}$. Seja $t_2 > t_0$ o primeiro valor do parâmetro t (podendo ser $+\infty$, quando $p \geq 4$) tal que $Q_2 = (u(t_2), v(t_2)) = \phi(t_2)$ seja um ponto do segmento $v = u$. As ligações de selas entre $(0, \frac{\pi}{2})$ e $(\frac{\pi}{2}, 0)$ a (α, α) mostram que $u(t_2) \leq \alpha < \frac{\pi}{4}$ e que $\phi(t)$, $t > t_2$, não pode intersectar a reta $u = \frac{\pi}{4}$.

Seja $t_1 < t_0$ o primeiro valor do parâmetro t (podendo ser $-\infty$, quando $p \geq 4$) tal que $Q_1 = (u(t_1), v(t_1)) = \phi(t_1)$ seja um ponto do segmento

$v = u - \pi$. As ligações de selas $(0, -\frac{\pi}{2})$ e $(\frac{\pi}{2}, -\pi)$ a $(\frac{\pi}{2} - \alpha, -\frac{\pi}{2} - \alpha)$ mostram que $u(t_1) \geq \frac{\pi}{2} - \alpha > \frac{\pi}{4}$ e que $\phi(t)$, $t < t_1$, não pode intersectar a reta $u = \frac{\pi}{4}$.

Agora, o Lema 2.2.1 nos diz que $u(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, é injetiva. Portanto, existe um único t tal que $u(t) = \frac{\pi}{4}$. Isso mostra que $\phi(t)$ intersecta a reta l num único ponto.

Proposição 2.3.2 *A curva geratriz dada no lema anterior não possui auto-intersecção.*

Demonstração: Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ a curva geratriz associada a $\phi(t) = (u(t), v(t))$. Pelo lema anterior, existe um único $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x(t_0) = y(t_0)$. Usando o Lema 2.2.2, temos a existência de únicos $t_1 < t_2$ tais que $v(t_1) = -\frac{\pi}{2}$ e $v(t_2) = 0$. Há duas situações a considerar: $t_0 < t_2$ e $t_0 > t_2$.

Suponha $t_0 < t_2$. Então, $\text{sen } v(t) < 0$ para $t \in (-\infty, t_2)$, o que mostra que $y(t)$ é estritamente decrescente em $(-\infty, t_2)$ e, portanto, $y(t_2) < y(t_0)$. Além disso, $\cos v(t) > 0$ para $t \in (t_2, +\infty)$, o que mostra que $x(t)$ é estritamente crescente para $t \in (t_2, +\infty)$. Agora, o lema anterior nos diz que $y(t) < x(t)$ para $t > t_0$, $y(t) > x(t)$ para $t < t_0$. Então, $\gamma(t)$ não pode se auto-intersectar se $t_0 < t_2$.

Por outro lado, quando $t_2 < t_0$, usando o crescimento de $x(t)$ em $(t_1, +\infty)$, o decréscimo de $y(t)$ em $(-\infty, t_2)$ e o fato que $y(t) > x(t)$ para $t > t_0$ e $y(t) < x(t)$ para $t < t_0$, obtemos a mesma conclusão analisando $\gamma(-t)$.

Lema 2.3.2 *As seguintes relações entre as coordenadas (x, y) da curva geratriz e as coordenadas (u, v) da órbita do campo X , na região R , são verdadeiras:*

1. $u = 0 \Leftrightarrow y = 0$
2. $v = 0 + k\pi, \quad k = 0, \pm 1 \Leftrightarrow y' = 0$
3. $u = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 0$
4. $v = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x' = 0$
5. $v = u \Leftrightarrow \frac{y'}{x} = \frac{y}{x}$
6. $v = \frac{\pi}{2} - u \Leftrightarrow \frac{y'}{x} = \frac{x}{y}$.

Demonstração: A prova dessas afirmações é uma consequência imediata das equações (2.6-2.8).

Observação 2.3.2 Para $0 < v < \frac{\pi}{2}$ temos $x' \neq 0$, $y' \neq 0$ e assim podemos ver a curva geratriz $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ como gráfico (ou uma união de gráficos quando γ apresentar singularidade) de uma função $y = y(x)$ ou $x = x(y)$. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $y = y(x)$. Neste caso, a equação (2.4) nos diz que as singularidades ocorrem nos zeros da equação

$$x - y \frac{dy}{dx} = 0.$$

Elas correspondem às coordenadas (u, v) com $v = \frac{\pi}{2} - u$, pois neste caso

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \tan(v) = \cot(u) = \frac{x}{y}.$$

Agora, provaremos nosso teorema de classificação e obteremos como corolário o Teorema 2.3.3 enunciado na introdução. Vamos usar a notação

$$l(\alpha) = \text{semi-reta } \gamma(t) = (\cos(\alpha)t, \sin(\alpha)t), \quad t \geq 0.$$

Teorema 2.3.2 (Teorema de Classificação) As hipersuperfícies não estendíveis de \mathbb{R}^{2p+2} invariantes pela ação de $O(p+1) \times O(p+1)$, $p > 1$, com curvatura escalar nula, pertencem a uma das seguintes classes (ver figuras, páginas 3 a 5):

1. cones com uma singularidade na origem (hipersuperfícies do tipo A).
2. hipersuperfícies que possuem uma órbita de singularidade e assintotam os cones C_α e $C_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$ (hipersuperfícies do tipo C).
3. hipersuperfícies regulares que assintotam o cone C_α (hipersuperfícies do tipo B).
4. hipersuperfícies regulares que assintotam o cone $C_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$ (hipersuperfícies do tipo B).
5. hipersuperfícies regulares que assintotam ambos os cones C_α e $C_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$ (hipersuperfícies do tipo D).

Demonstração:

1. Essas são as hipersuperfícies dadas no Teorema 2.3.1.

2. Essas hipersuperfícies são geradas por curvas $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ que estão associadas às órbitas $\phi(t)$ com α -limite $(\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha)$ e ω -limite (α, α) . Estas são compostas de duas semi-órbitas, a primeira ligando $(\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha)$ a um ponto P do segmento $v = \frac{\pi}{2} - u$ e a segunda ligando P a (α, α) . O ponto P corresponde (ver Observação 2.3.2) à singularidade da curva geratriz. De fato, da Proposição 2.2.1 temos que tais órbitas existem e γ não intersecta o bordo do espaço de órbitas. Além disso, γ assintota as geratrizes $l(\alpha)$ e $l(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ dos cones C_α e $C_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$. Portanto, as hipersuperfícies associadas assintotam os cones.
3. As hipersuperfícies desse tipo são geradas por curvas $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ que estão associadas às órbitas $\phi(t)$ com α -limite $(0, \frac{\pi}{2})$ e ω -limite (α, α) ou com α -limite $(\frac{\pi}{2}, 0)$ e ω -limite (α, α) . De fato, pela Proposição 2.2.1, tais órbitas existem. Pelo Lema 2.3.2, se $(u, v) \rightarrow (0, \frac{\pi}{2})$, então $y \rightarrow 0$ e $x' \rightarrow 0$ e, como $0 < u(t) < \frac{\pi}{4}$ para t suficientemente grande, temos $0 < \tan(u) = \frac{y}{x} < 1$. Portanto, γ intersecta o eixo x perpendicularmente num ponto $(x_0, 0)$ com $x_0 > 0$. Além disso, γ assintota a geratriz $l(\alpha)$ do cone C_α , isso mostra que tais hipersuperfícies assintotam o cone C_α .
4. Análogo ao item 3.
5. Tais hipersuperfícies são geradas por curvas γ associadas às órbitas $\phi(t)$ com α -limite $(\frac{\pi}{2} - \alpha, -\frac{\pi}{2} - \alpha)$ e ω -limite (α, α) . De fato, pela Proposição 2.2.1, tais órbitas existem e γ não intersecta o bordo do espaço de órbitas. Além disso, γ assintota as geratrizes $l(\alpha)$ e $l(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ dos cones C_α e $C_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$. Isso mostra que tais hipersuperfícies assintotam os cones C_α e $C_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$.

Finalmente, temos:

Teorema 2.3.3 *Seja M^{2p+1} uma hipersuperfície de \mathbb{R}^{2p+2} completa, com curvatura escalar nula e invariante por $O(p+1) \times O(p+1)$, então M é gerada por uma curva do tipo B ou D. Além disso,*

- i) *Se M é gerada por uma curva do tipo B, então M é mergulhada e assintota um dos cones C_α ou $C_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$;*
- ii) *Se M é gerada por uma curva do tipo D, então M é mergulhada e assintota ambos os cones C_α e $C_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$.*

Demonstração: Pelo teorema anterior, as hipersuperfícies do tipo B são geradas por curvas geratrizes γ associadas às órbitas que são ligações de selas (ver demonstração desse Teorema). Neste caso, temos $0 < v < \frac{\pi}{2}$. Logo, pela Observação 2.3.2, γ é gráfico de uma função $y = y(x)$ ou $x = x(y)$, e da Proposição 2.3.1 concluímos que M é mergulhada. As hipersuperfícies do tipo D são geradas por geratrizes associadas às órbitas $\phi(t)$ com α -limite $(\frac{\pi}{2} - \alpha, -\frac{\pi}{2} - \alpha)$ e ω -limite (α, α) . Portanto, M assintota ambos os cones e, da Proposição 2.3.2, obtemos que M é mergulhada.

Capítulo 3

Estabilidade das hipersuperfícies completas

3.1 O problema variacional

Sejam M^n uma variedade Riemanniana conexa, orientável e $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ uma imersão isométrica. Denotemos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a métrica Riemanniana de M e por B a segunda forma fundamental da imersão x associada ao campo normal unitário N . A segunda forma fundamental possui uma base de auto vetores com auto valores k_1, \dots, k_n .

As transformações de Newton P_r são os operadores definidos indutivamente por

$$\begin{aligned}P_0 &= I \\P_r &= S_r I - B P_{r-1},\end{aligned}$$

onde S_r é a r -ésima curvatura média da imersão. Cada um desses operadores é auto-adjunto e possui os mesmos auto-vetores de B . Associado aos operadores P_r temos o operador diferencial linear de segunda ordem L_r dado por (ver [23] e [24], página 225)

$$L_r f = \text{Div}(P_r \text{grad } f) = \text{traço}(P_r \text{Hess}(f)). \quad (3.1)$$

Consideremos $C^\infty(D)$ o conjunto das funções reais suaves definidas num domínio $D \subset M$ e denotemos por $C_0^\infty(D)$ (resp. $C_c^\infty(D)$) o conjunto das funções em $C^\infty(D)$ que se anulam no bordo ∂D (resp. com suporte compacto em D). No que segue, nós também vamos usar a nomenclatura

clássica dos espaços de Sobolev. Usando o teorema da divergência e que P_r é auto-adjunto, obtemos

$$\begin{aligned} \int_D \text{Div}(gP_r(\text{grad } f)) &= \int_D gL_r(f) + \int_M \langle \text{grad } g, P_r(\text{grad } f) \rangle \\ &= \int_{\partial D} \langle gP_r(\text{grad } f), \nu \rangle = 0 \end{aligned}$$

para $f, g \in C_c^\infty(D)$, onde $\text{grad } f$ denota o gradiente da função f na métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Isso mostra que L_r é um operador auto-adjunto, relativo ao produto interno de $L^2(D)$, agindo em funções de $H_0^1(D)$, onde $H_0^1(D)$ é o complemento de $C_c^\infty(D)$ com relação à norma $\| \cdot \|_{H_0^1}$, dada por

$$\|u\|_{H_0^1} = \left[\int_D (|u|^2 + \langle \text{grad } u, \text{grad } u \rangle) dM \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Seja $D \subset M$ um domínio com fecho compacto em M . Uma *variação* de D é uma aplicação $X : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \bar{D} \rightarrow \bar{M}^{n+1}(c)$ tal que, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) = I$, a aplicação $X_t : D \rightarrow \bar{M}^{n+1}(c)$ dada por $X_t(p) = X(t, p)$ é uma imersão com $X|_{\partial D} = x|_{\partial D}$ e $X_0 = x$. Sejam

$$E(t, p) = \frac{\partial X}{\partial t}(t, p) \quad \text{e} \quad f(t) = \langle E, N_t \rangle \quad (3.2)$$

o *campo variacional* da variação X e sua *componente normal*, respectivamente. Aqui N_t é o campo unitário normal a $X_t(D)$. O *volume* associado à variação X é a função

$$V(t) = \int_{[0, t] \times D} X^* d\bar{M}, \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

onde $X^* d\bar{M}$ é o pull-back do elemento de volume $d\bar{M}$ de \bar{M} , por meio de X . Dizemos que a variação X *preserva volume* se $V(t) = 0, \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

É um fato conhecido (ver [4]) que as imersões com S_{r+1} constante são pontos críticos do problema variacional de minimizar a integral

$$A_r(x) = \int_D F_r(S_1, \dots, S_r) dM \quad (3.3)$$

para variações que preservam volume e cuja componente normal f possui suporte compacto. As funções F_r são definidas indutivamente por

$$\begin{aligned} F_0 &= 1 \\ F_1 &= S_1 \\ F_r &= S_r + \frac{c(n-r+1)}{r-1} F_{r-2}, \quad 2 \leq r \leq n-1. \end{aligned}$$

Esse fato é consequência da fórmula da primeira variação para $J_r(t) = A_r(X_t) + \lambda V(t)$ que passaremos a estudar.

Os resultados da proposição abaixo são bem conhecidos e suas demonstrações podem ser encontradas em [23], [24] e [4], páginas 282 e 283.

Proposição 3.1.1 *Dada uma variação X da imersão $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ temos:*

i) $V'(t) = \int_M f(t) dM_t$, onde dM_t é o elemento de volume de M na métrica induzida por X_t e $f(t)$ é dada em (3.2).

ii) $\frac{\partial}{\partial t}(dM_t) = (-S_1 f + \text{Div} E^T) dM_t$, onde E^T denota a componente de E tangente a M .

iii) $S'_{r+1} = L_r(f) + (S_1 S_{r+1} - (r+2) S_{r+2}) f + c(n-r) S_r f + \nabla_{E^T} S_{r+1}$, onde ∇ denota a conexão Riemanniana de M induzida por X_t .

Lema 3.1.1 *Sejam $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ imersão, $D \subseteq M$ um domínio com fecho compacto e X uma variação de D , então:*

$$\begin{aligned} A'_r(t) = & -(r+1) \int_D S_{r+1}(t) f(t) dM_t + \int_{\partial D} \langle \text{grad } f, P_{r-1}(\nu_t) \rangle ds_t \\ & + C_0(n, c) \int_{\partial D} f dM_t + C_1(n, c) \int_{\partial D} \langle \text{grad } f, P_{r-3}(\nu_t) \rangle ds_t + \dots + \\ & + C_s(n, c) \int_{\partial D} \langle \text{grad } f, P_0(\nu_t) \rangle ds_t, \end{aligned}$$

onde ds_t é o elemento de volume de ∂D , ν_t é o campo normal a $X_t(\partial D)$ e tangente a $X_t(D)$, $\text{grad } f$ é o gradiente de f na métrica induzida por X_t , C_1, \dots, C_s são constantes que dependem de c e n .

Demonstração: Como X fixa o bordo, temos

$$f|_{\partial D} = \langle E, N_t \rangle|_{\partial D} = 0 \quad \text{e} \quad E|_{\partial D} = 0.$$

Assim, o caso $r = 0$ é imediato. Para $r \geq 1$, usando a proposição anterior, obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_D S_r(t) dM_t = \int_D S'_r(t) dM_t + \int_D S_r(t) \frac{\partial}{\partial t}(dM_t)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_D [L_{r-1}(f) + (S_1 S_r - (r+1)S_{r+1} + c(n-r+1)S_{r-1}) f + \nabla_{E^T} S_r] dM_t \\
&\quad + \int_D S_r (-S_1 f + \text{Div}(E^T)) dM_t \\
&= -(r+1) \int_D S_{r+1} f dM_t + c(n-r+1) \int_D S_{r-1} f dM_t + \\
&\quad \int_D L_{r-1}(f) dM_t + \int_D \text{div}(S_r E^T) dM_t.
\end{aligned}$$

Usando a expressão de L_r dada em (3.1), o teorema da divergência e que P_r é auto-adjunto temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_D S_r(t) dM_t &= -(r+1) \int_D S_{r+1} f dM_t + c(n-r+1) \int_D S_{r-1} f dM_t \\
&\quad + \int_{\partial D} \langle \text{grad } f, P_{r-1}(\nu_t) \rangle ds_t + \int_{\partial D} S_r \langle E, \nu_t \rangle ds_t,
\end{aligned}$$

onde o último termo é zero, pois a variação fixa o bordo. Essa expressão e uma indução sobre r fornecem a demonstração do Lema.

Para eliminar o termo da fronteira na expressão de $A'_r(0)$ precisamos de uma condição adicional para a variação X , como por exemplo, $\text{grad } f_t|_{\partial D} = 0$. Assim, no que segue, vamos apenas considerar variações com suporte compacto em D .

O método dos multiplicadores de Lagrange permite determinar a equação de Euler-Lagrange associada ao problema de minimizar A_r com o vínculo preservar volume. Precisamente, consideramos o operador

$$J_r(t) = A_r(t) + \lambda V(t)$$

onde λ é uma constante a ser determinada e calculamos $J'_r(0) = 0$, com relação a uma variação com suporte compacto em D .

Proposição 3.1.2 (*Fórmula da primeira variação*) Para uma variação com suporte compacto temos

$$J'_r(0) = \int_M [-(r+1)S_{r+1} + k] f dM,$$

onde k é uma constante e f a componente normal do campo variacional.

Demonstração: Este resultado é consequência da Proposição 3.1.1 e do Lema 3.1.1 e pode ser encontrado em [4].

Essa proposição mostra que as imersões com S_{r+1} constante são dadas como ponto crítico do funcional $J_r(t)$ para uma constante adequada k . Agora, considerando as variações com suporte compacto e que preservam volume, vale:

$$A'_r(t) = J'_r(t) = \int_D [-(r+1) S_{r+1} - k] f(t) dM_t. \quad (3.4)$$

Nesse caso, obtemos $A''_r(0)$ na seguinte proposição:

Proposição 3.1.3 (*Fórmula da segunda variação*) *Seja $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ uma imersão com $S_{r+1} = \text{cte}$. Para variações com suporte compacto e que preservam volume a segunda derivada de A_r em $t = 0$ é dada por:*

$$A''_r(0)f = -(r+1) \int_D f [L_r(f) + (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2} + c(n-r)S_r)] dM. \quad (3.5)$$

Demonstração: Usando a igualdade 3.4 e a Proposição 3.1.1 obtemos:

$$\begin{aligned} A''_r(t)f &= \int_D -(r+1) S'_{r+1} f dM_t + \int_D [-(r+1)S_{r+1} + k] f(t)' dM_t \\ &\quad + \int_D [-(r+1)S_{r+1} + k] f \frac{\partial}{\partial t}(dM_t). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} A''_r(0)f &= \int_D -(r+1) S'_{r+1} f dM \\ &= -(r+1) \int_D f [L_r(f) + (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2} + c(n-r)S_r)] dM. \end{aligned}$$

3.2 O operador de Jacobi e o índice de Morse

Associado à segunda variação, temos o operador diferencial linear auto-adjunto

$$T_r = L_r + (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2} + c(n-r)S_r), \quad (3.6)$$

o qual permite definir a forma bilinear simétrica I_r dada por

$$I_r(f, g) = - \int_D g T_r(f) dM.$$

Definição 1 Sejam $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ uma imersão com curvatura média S_{r+1} constante e $D \subset M$ um domínio com fecho compacto em M . Dizemos que D é fortemente r -estável se $I_r(f, f) \geq 0$ para toda função $f \in C_c^\infty(D)$. Caso contrário dizemos que D é r -instável. Também dizemos que M é fortemente r -estável se a restrição $x|_D : D \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ é fortemente r -estável para todo domínio D .

Definição 2 Definimos o índice $Ind_{T_r}(D)$ do operador de Jacobi T_r em D como sendo a dimensão máxima do subespaço de $C_c^\infty(D)$ onde a forma bilinear I_r é negativa definida. O índice $Ind_r M$ de T_r em M é definido por

$$Ind_r M = \sup_{D \subset M} Ind_{T_r}(D),$$

onde D é um domínio com fecho compacto em M .

Lema 3.2.1 Seja L_r o operador associado a uma imersão $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ definido em (3.1). Se uma das seguintes condições é verdadeira,

- a) $S_{r+1} > 0$ e se $r > 1$, suponha que exista um ponto $q \in M$ onde todas as curvaturas principais de x são positivas;
- b) $S_{r+1} = 0$ e $posto(B) > r$, onde B é a segunda forma fundamental da imersão,

então L_r é um operador elíptico.

A demonstração dos itens a) e b) podem ser encontradas, respectivamente, em [9], Lemma 2.2 e [14] Corollary 2.3.

A seguir, enunciamos algumas propriedades e resultados do primeiro auto-valor de um operador linear elíptico de segunda ordem

$$T : C_0^\infty(D) \rightarrow C^\infty(D)$$

com condições de Dirichlet, onde $D \subset M$ possui fecho compacto \overline{D} e bordo suave ∂D . O primeiro auto-valor $\lambda_1^T(D)$ de T é definido como sendo o menor valor λ tal que

$$T(f) + \lambda f = 0.$$

para alguma função não nula $f \in C_0^\infty(D)$. Neste caso, f é denominada primeira auto-função de T em D associada ao auto-valor $\lambda_1^T(D)$. Observamos que T possui uma extensão a $H_0^1(D)$ e, sendo elíptico, satisfaz a propriedade do princípio da continuidade única (ver [2] página 247). Além disso, temos:

Lema 3.2.2 *Seja T um operador elíptico. Então,*

i) *Se D e D' são domínios em M com $D \subseteq D'$, então $\lambda_1^T(D) \geq \lambda_1^T(D')$ e a igualdade ocorre se, e somente se, $D = D'$,*

ii)

$$\lambda_1^T(D) = \inf \left\{ \frac{-\int_D f T(f) dM}{-\int_D f^2 dM}; f \in H_0^1(D), f \neq 0 \right\}.$$

Uma demonstração desses resultados pode ser encontrada em [25].

A proposição abaixo foi provada em [10] para $r = 0$ e estendida para $r \geq 1$ em [9], Proposition 3.3.

Proposição 3.2.1 *Seja $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ uma imersão satisfazendo a hipótese a) ou b) do Lema 3.2.1, onde M é completa e não compacta. Então, as seguintes afirmações são equivalentes :*

i) $\lambda_1^{T_r}(D) \geq 0$ para todo domínio $D \subset M$ com fecho compacto;

ii) $\lambda_1^{T_r}(D) > 0$ para todo domínio $D \subset M$ com fecho compacto;

iii) *existe uma função positiva $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo a equação de Jacobi $T_r(f) = 0$.*

Usamos funções em $C_c^\infty(D)$ em vez de funções em $C_0^\infty(D)$ quando descrevermos o problema variacional que caracteriza as imersões com S_{r+1} constante e, conseqüentemente, quando definimos r -estabilidade. Fizemos isso por razões técnicas. Mais precisamente, usamos que f e $\text{grad } f$, e não somente f , se anulam em ∂D para obter a igualdade

$$A''(0)f = I_r(f, f).$$

Observamos que não importa para a definição de instabilidade exigir que $f \in C_c^\infty(D)$ ou que $f \in C_0^\infty(D)$, como mostra a proposição abaixo. Para $r = 1$ este resultado foi demonstrado em [27] e estendida para $r > 1$ em [9], Proposition 7.3.

Proposição 3.2.2 *Para uma imersão $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ que satisfaça a hipótese a) ou b) do Lema 3.2.1, as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) *existe $f \in C_c^\infty(D)$ tal que $I_r(f, f) \leq 0$;*

ii) existe $f \in C_c^\infty(D)$ tal que $I_r(f, f) < 0$;

iii) existe $f \in C_0^\infty(D)$ tal que $I_r(f, f) < 0$.

Lema 3.2.3 *Sejam $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão de uma variedade Riemanniana conexa e orientável M em \mathbb{R}^{n+1} e $h(p) = \langle x(p), N(p) \rangle$ a função suporte da imersão x . Suponha que x possua curvatura S_{r+1} constante. Então h satisfaz a equação*

$$L_r(h) + (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})h + (r+1)S_{r+1} = 0.$$

Em particular, quando $S_{r+1} = 0$, h satisfaz a equação de Jacobi em M , ou seja,

$$T_r(h) = L_r(h) - (r+2)S_{r+2}h = 0.$$

Demonstração: Em [24], página 227, foi demonstrado que a função suporte $h(p) = \langle x(p), N(p) \rangle$ de uma imersão $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura S_{r+1} constante satisfaz a equação

$$L_r(h) + (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})h + (r+1)S_{r+1} = 0.$$

Agora, usando a equação (3.6), temos que a equação de Jacobi para uma tal imersão se reduz a

$$T_r = L_r + (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}).$$

Como $S_{r+1} = 0$ obtemos o lema.

Observação 3.2.1 *O operador de Jacobi associado às hipersuperfícies M^{2p+1} de \mathbb{R}^{2p+2} invariantes por $O(p+1) \times O(p+1)$, com curvatura escalar nula, é um operador elíptico.*

Demonstração : Como as curvas geratrizes $\gamma(t) = (x(y), y(t))$ destas hipersuperfícies estão parametrizadas pelo comprimento de arco, as expressões das curvaturas principais, ver equação (2.2), mostram que o posto da segunda forma fundamental da imersão é maior do que ou igual a p , onde $p \geq 2$. Segue do Lema 3.2.1, página 32, que T_1 é um operador elíptico.

Teorema 3.2.1 *Seja M^{2p+1} uma $O(p+1) \times O(p+1)$ invariante hipersuperfície de \mathbb{R}^{2p+2} mergulhada, completa, com curvatura escalar nula e gerada por uma curva do tipo B ou D .*

i) Se $p = 2$ ou $p = 3$, então tais hipersuperfícies possuem $\text{Ind}_{T_1} M$ infinito.

ii) Se $p \geq 4$, então as hipersuperfícies geradas por uma curva do tipo B são global e fortemente 1-estáveis ($\text{Ind}_{T_1} M = 0$).

Demonstração : Há dois casos a considerar, conforme $p \leq 3$ ou $p \geq 4$. Seja $h(p) = \langle f(p), N(p) \rangle$ a função suporte da imersão $f : M^{2p+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2p+2}$. Usando o Lema 3.2.3, temos que h satisfaz a equação de Jacobi $T_1(h) = 0$ em todo domínio D com fecho compacto em M , onde T_1 é, pela observação acima, um operador elíptico. Usando a parametrização $f(t, a, b) = x(t)\varphi(a) + y(t)\psi(b)$ obtemos a igualdade $N(t, a, b) = -y'(t)\varphi(a) + x'(t)\psi(b)$. Assim, usando a expressão (ver equação (2.8))

$$u'(t) = \frac{y'(t)x(t) - x'(t)y(t)}{x(t)^2 + y(t)^2}$$

obtemos $h(t, a, b) = -u'(t)(x(t)^2 + y(t)^2)$. Isso mostra que h só depende da curva geratriz e é constante ao longo de uma órbita.

Quando $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ for uma curva geratriz do tipo B, temos que γ está associada a uma órbita $\phi(t) = (u(t), v(t))$ que tem um dos pontos $P_4 = (\alpha, \alpha)$ ou $P_5 = (\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha)$ como α -limite ou ω -limite. Quando γ for do tipo D a órbita associada possui $(\frac{\pi}{2} - \alpha, -\frac{\pi}{2} - \alpha)$ como α -limite e P_4 como ω -limite.

Para $p = 2$ ou $p = 3$ a Observação 2.2.1, página 16, nos diz que existe uma seqüência monótona $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ com $u'(t_i) = X_1(\phi(t_i)) = 0$, onde $\phi(t)$ está associada à curva geratriz do tipo B ou D. Isso permite construir uma seqüência de domínios

$$D_1 \subsetneq D_2 \subsetneq \dots \subsetneq D_i \subsetneq \dots \subset M$$

com $h|_{\partial D_i} = 0$. Assim, segue do Teorema abstrato do índice de Morse aplicado ao operador T_1 (ver [25], página 1054 ou [28], Theorem 1.11) que as hipersuperfícies M geradas por γ possuem $\text{ind}_{T_1} M$ infinito. Usando a Proposição 3.2.2, concluímos que M é fortemente 1-instável.

Quando $p \geq 4$ as singularidades $(\frac{\pi}{2} - \alpha, -\frac{\pi}{2} - \alpha)$, P_4 e P_5 possuem uma estrutura de nó (ver Observação 2.2.1). Isso mostra que $u'(t) \neq 0$ para toda órbita associada a uma curva geratriz do tipo B. Neste caso, h ou $-h$ é uma função positiva em M , satisfazendo a equação $T_1(\pm h) = 0$. Segue

das Proposições 3.2.1 e 3.2.2, que a hipersuperfície gerada por γ é global e fortemente 1-estável.

Em particular, para $p \geq 4$ temos o seguinte resultado:

Teorema 3.2.2 *Existe uma hipersuperfície M^{2p+1} de \mathbb{R}^{2p+2} mergulhada, completa, com curvatura escalar nula e globalmente estável.*

Referências Bibliográficas

- [1] Alencar, H., *Minimal Hypersurfaces in \mathbb{R}^{2m} invariant by $SO(m) \times SO(m)$* , Trans. Amer. Math. Soc., **337** (1993), nº1, 129-141.
- [2] Aronszajn, N., *A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order*, J. Math. Pure and App., **36** (1957), 235-249.
- [3] Alencar, H., do Carmo, M.P. and Elbert, M.F., *Stability of hypersurfaces with vanishing r -mean curvatures in euclidean spaces*, Preprint.
- [4] Barbosa, J. L. and Colares, A. G., *Stability of hypersurfaces with constant r -mean curvature*, Ann. Global Anal. Geom., **15** (1997), 277-297.
- [5] Bombieri, E., de Giorgi, E. and Giusti, E., *Minimal cones and the Bernstein problem*, Inventiones Math., **7** (1969), 243-269.
- [6] Chavel, I., *Eigenvalues in Riemmanian Geometry*, Academic Press, Orlando, USA (1984).
- [7] Delaunay, C., *Sur la surface de revolution dont la courbure moyenne est constante*, J. Math. Pure and App., **16** (1841), 309-321.
- [8] Do Carmo, M. P. and Dajczer, M., *Rotational hypersurfaces in spaces of constant curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **277-2** (1983), 685-709.
- [9] Elbert, M. F., *Sobre hipersuperfícies com r -curvatura média constante*, Doctor Thesis, IMPA - Brasil 1998.
- [10] Fischer-Colbrie, D. and Schoen, R., *The structure of complete stable minimal surfaces in three-manifolds of non-negative scalar curvature*, Comment. Pure Appl. Math., **33** (1980), 199-211.
- [11] Fischer-Colbrie, D., *On complete minimal surfaces with finite Morse index in three-manifolds*, Inventiones Math., **82** (1985), 121-132.

- [12] Gilbarg, D. and Trudinger, N.S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, New York, USA (1977).
- [13] Hartman, P., *Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc. New York, USA (1964).
- [14] Hounie, J. and Leite, M.L., *The maximum principle for hypersurfaces with vanishing curvature functions*, Journal Diff. Geom., **41** (1995), 247-258.
- [15] Hsiang, W. Y. and Lawson, H. B., *Minimal submanifolds of low cohomogeneity*, Journal Diff. Geom., **5** (1971), 1-38.
- [16] Hsiang, W. Y., Teng, Z. H. and Yu, W. C., *New examples of constant mean curvature immersions of $(2k-1)$ -spheres into Euclidean $2k$ -space*, Annals of Math., **117** (1983), 609-625.
- [17] Hsiang, W. Y., *Generalized rotational hypersurfaces of constant mean curvature in the Euclidean spaces I*, Journal Diff. Geom., **17** (1982), 337-356.
- [18] Leite, M. L., *Rotational hypersurfaces of space forms with constant scalar curvature*, Manuscripta Mathematica, **67** (1990), 285-304.
- [19] Okayasu, T., *$O(2) \times O(2)$ -invariant hypersurfaces with constant negative scalar curvature in E^4* , Proc. of the AMS, **107** (1989), 1045-1050.
- [20] Palmas, O., *Complete rotation hypersurfaces with H_k constant in space forms*, Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática (N. S.), **30(2)** (1999), 139-161.
- [21] Palmas, O., *$O(2) \times O(2)$ -invariant hypersurfaces with zero scalar curvature*, to appear in Archiv der Mathematik.
- [22] Pedrosa, R. H. L., *Riemannian transformation groups*, UNICAMP, Brasil
- [23] Reilly, R. C., *Variational properties of functions of the mean curvatures for hypersurfaces in space forms*, Journal Diff. Geom., **8** (1973), 465-477.
- [24] Rosenberg, H., *Hypersurfaces of constant curvatures in space forms*, Bull. Sc. Math, **117** (1993), 211-239.

- [25] Smale, S., *On the Morse index theorem*, J. Math. Mech., **14** (1965), 1049-1056.
- [26] Sotomayor, J., *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA, Brasil.
- [27] Traizet, M., *On the stable surfaces of constant Gauss curvature in space forms*, Ann. Global Anal. Geom., **13** (1995), 141-148.
- [28] Uhlenbeck, K., *The Morse theorem in Hilbert space*, Journal Diff. Geom., **8** (1973), 555-564.