UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

SOBRE HIPERSUPERFÍCIES EM ESPAÇOS DE CURVATURA SECCIONAL CONSTANTE

Antonio Caminha Muniz Neto

FORTALEZA - CE

2004

Sobre Hipersuperfícies em Espaços de Curvatura Seccional Constante

Antonio Caminha Muniz Neto

Dedico este trabalho a todos os
que perseveram na busca de seus objetivos

"Now is the winter of our discontent
Made glorious summer by this sun of York
And all the clouds that lour'd upon our house
In the deep bosom of the ocean buried."
Ricardo III, 1º Ato
W. Shakespeare

"... Mas os que esperam do Senhor
renovam suas forças, sobem com asas
como águia, correm e não se cansam."
Isaías 40, 31.

Agradecimentos

Agradecer às pessoas listadas a seguir é hoje para mim mais que uma formalidade. É testemunho de débito perene com quem, de uma maneira ou outra, colaborou para a materialização de um importante passo em meu projeto de vida.

Falando um pouco sobre Matemática, meus contatos com o círculo de idéias desenvolvido nesta tese se deram de várias formas. As dissertações de mestrado dos colegas Cleon Barroso, Cícero Aquino e Henrique Fernandes pouparam-me tempo considerável e ensinaram-me muitas idéias novas. As várias conversas sobre Geometria Diferencial com o professor Abdênago Barros, bem como o seminário conduzido pelo professor Gervásio Colares, vulgo *H_r Men Seminar*, aguçaram meu interesse sobre operadores L_r e curvaturas de ordem superior. Meu orientador, professor Lucas Barbosa, através de suas excelentes exposições sobre Geometria Semi-Riemanniana, motivou-me a considerar hipersuperfícies em ambientes Lorentzianos, no que resultou a seção 4.3 deste trabalho. Suas sugestões em vários outros pontos do mesmo ampliaram bastante minha compreensão do assunto, me conduzindo mais de uma vez a uma melhoria significativa na exposição.

A conversa despreocupada e as trocas de idéias com os colegas Cícero Aquino, Feliciano Vitório, Fernando Espinoza, Henrique Fernandes e Juscelino Pereira, sobre Matemática e outros tantos assuntos, ajudaram-me sobremaneira a tornar mais prazerosos o convívio e a rotina da pós-graduação. Em especial, consigno aqui meu apreço aos amigos Henrique, Juscelino e Cícero, que serviram incontáveis vezes como muro das lamentações, tendo sempre na manga uma palavra subsequente de apoio e consideração.

Os professores Abdênago Barros, Gervásio Colares e Lucas Barbosa muitas vezes acreditaram em mim mais que eu mesmo, tendo me apoiado decisivamente, em vários momentos cruciais, durante o curso de meu doutorado. Gostaria de registrar ainda as muitas palavras de incentivo dos professores Levi Lima, Gregório Pacelli Bessa, Fábio Montenegro, Aldir Brasil e Frederico Xavier, este último durante minha breve passagem pelo Departamento de Matemática da Notre Dame University.

A leitura criteriosa dos professores Robert Kusner e Renato Pedrosa me ajudou a fazer várias correções na versão final da tese. Agradeço ainda ao professor Kusner por me ter ajudado com as correções gramaticais da versão em Inglês da mesma.

A secretária da Pós-Graduação Andrea Costa Dantas sempre esteve pronta a ajudar-me, na medida de suas limitações e geralmente além de suas atribuições, a lidar com todos os problemas burocráticos que lhe apresentei. O apoio financeiro a mim dispensado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES) foi imprescindível ajuda durante o curso do doutorado.

Os amigos Adelmir Jucá, Vicente Alexandrino, Fláudio Nascimento, Francisco da Silva Jr. e Vladimir Cézar apoiaram-me na hora mais difícil, em palavras e ações. A Dra. Márcia de Vasconcelos ajudou-me a vencer muitas de minhas limitações. Eu não teria chegado aqui sem sua ajuda profissional.

A todas as pessoas acima, e a quem mais possa minha humana falibilidade ter feito esquecer, queria deixar registrados meus mais sinceros agradecimentos.

Finalmente, minha esposa Mônica Valesca, meus pais Antonio Filho e Rosemary e meus irmãos Rosina Maria e Marco Antonio foram ombro amigo quando muitos foram censura, foram apoio e divã nos muitos momentos difíceis, fizeram-me seguir em frente quando eu mesmo achava estar prestes a capitular, me propiciaram momentos imprescindíveis de lazer e alegria, bem como o equilíbrio necessário para chegar até aqui. A eles me faltam palavras para agradecer.

Sumário

1 Introdução 1

2 Preliminares 9
- 2.1 Campos tensoriais 9
- 2.2 Variedades de Lorentz 12
- 2.3 Imersões isométricas 17

3 Curvaturas médias de ordem superior 22
- 3.1 Transformações de Newton 22
- 3.2 A fórmula para $L_r(S_r)$. 30
- 3.3 Prova da proposição 3.6 32
- 3.4 Prova dos corolários 3.7 e 3.8 39

4 Aplicações 43
- 4.1 Hipersuperfícies de Clifford da esfera 43
- 4.2 Aplicações em ambiente Riemanniano 45
- 4.3 Aplicações em ambiente Lorentziano 55

Capítulo 1

Introdução

Em um artigo seminal ([28]), J. Simons calculou o Laplaciano da segunda forma fundamental de imersões isométricas em esferas, e aplicou o resultado para obter certas desigualdades integrais satisfeitas pelo quadrado da norma da segunda forma fundamental de imersões mínimas.

A abordagem de Simons tem sido seguida nos últimos trinta anos por vários autores ([2], [3], [4] e [12], por exemplo), de maneira a investigar propriedades de rigidez de hipersuperfícies isometricamente imersas em espaços Riemannianos de curvatura seccional constante.

Em [2], e essa foi a motivação original de nosso trabalho, os autores obtiveram uma fórmula para $L_1(S_1)$ para uma hipersuperfícies orientada $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ de um ambiente Riemanniano $(n+1)-$dimensional $\overline{M}^{n+1}$, de curvatura seccional constante e igual a c, sob a hipótese adicional de que M tivesse curvatura escalar identicamente c.

Aqui, denotando por A a segunda forma fundamental de x com respeito ao campo vetorial normal unitário N globalmente definido em M, para $0 \leq r \leq n$ nós denotamos por S_r a $r-$ésima função simétrica elementar dos autovalores de A, e por $L_r : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$ o operador diferencial linear de segunda ordem, definido para $f \in \mathcal{D}(M)$ por

$$L_r(f) = \operatorname{tr}(P_r Hess f).$$

Ademais, $P_r : TM \to TM$ é o $r-$ésimo Newton operador de M, recursivamente definido por $P_0 = I$ (o operador identidade) e, para $1 \leq r \leq n$,

$$P_r = S_r I - AP_{r-1}.$$

Neste trabalho calculamos $L_r(S_r)$ para imersões isométricas de variedades Riemannianas M^n como hipersuperfícies de ambientes Riemannianos ou Lorentzianos $\overline{M}^{n+1}$ de curvatura seccional constante, sem restrições adicionais. Neste contexto mais geral, sendo $\epsilon_N = \langle N, N\rangle$ pomos

$$H_r = \epsilon_N^r \frac{S_r}{\binom{n}{r}},$$

a $r-$ésima curvatura média de M^n, e definimos os operadores de Newton P_r pela recursão

$$P_r = \epsilon_N^r S_r I - \epsilon_N A P_{r-1}.$$

Os seguintes resultados são provados:

Proposição 1.1. *Seja $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica como acima, e $0 \le q < n$, $0 < r \le n$. Se $\{e_k\}$ for um referencial ortonormal qualquer em M^n, então*

$$\begin{aligned} L_q(S_r) &= \epsilon_N^{r+q-1} L_{r-1}(S_{q+1}) \\ &+ \epsilon_N^{r-1} \sum_k \mathrm{tr}\,\{[P_q(\nabla_{e_k} P_{r-1}) - P_{r-1}(\nabla_{e_k} P_q)](\nabla_{e_k} A)\} \\ &+ \epsilon_N^{r-1} c[\mathrm{tr}(AP_{r-1})\mathrm{tr}(P_q) - \mathrm{tr}(P_{r-1})\mathrm{tr}(AP_q)] \\ &+ \epsilon_N^r \mathrm{tr}(A^2 P_{r-1})\mathrm{tr}(AP_q) - \epsilon_N^r \mathrm{tr}(AP_{r-1})\mathrm{tr}(A^2 P_q), \end{aligned}$$

Corolário 1.2. *Seja $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica como acima, e $0 < r < n$. Então*

$$\begin{aligned} L_r(S_r) &= \epsilon_N L_{r-1}(S_{r+1}) + S_r[\epsilon_N^r \Delta S_r - \epsilon_N L_{r-1}(S_1)] \\ &+ \epsilon_N^r \left\{ \sum_k |P_{r-1}\nabla_{e_k} A|^2 - |\nabla S_r|^2 \right\} \\ &+ \mathrm{tr}(AP_{r-1})\{S_r(|A|^2 - \epsilon_N cn) - \epsilon_N^r[\mathrm{tr}(A^2 P_r) - \epsilon_N c\mathrm{tr}(P_r)]\} \\ &- \epsilon_N^{r-1}\mathrm{tr}(A^2 P_{r-1})[\mathrm{tr}(A^2 P_{r-1}) - \epsilon_N c\mathrm{tr}(P_{r-1})], \end{aligned}$$

onde $\{e_k\}$ é um referencial ortonormal qualquer em M^n, ou ainda

$$\begin{aligned} L_r(S_r) &= \epsilon_N L_{r-1}(S_{r+1}) + S_r[\epsilon_N^r \Delta S_r - \epsilon_N L_{r-1}(S_1)] \\ &+ \epsilon_N^r \left\{ \sum_k |P_{r-1}\nabla_{e_k} A|^2 - |\nabla S_r|^2 \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j} \epsilon_N^r S_{r-1}(A_i) S_{r-1}(A_j)(\lambda_i - \lambda_j)^2 K_M(\sigma_{ij}), \end{aligned}$$

em $p \in M^n$, *onde* $\{e_k\}$ *é um referencial ortonormal em* M^n, *diagonalizando* A *em* p, *com* $Ae_k = \lambda_k e_k$ *em* p, *e* $K_M(\sigma_{ij})$ *denota a curvatura seccional de* M^n *segundo o subespaço* $2-$*dimensional* σ_{ij} *de* T_pM *gerado por* e_i *e* e_j.

As fórmulas acima são então aplicadas para estudar como o comportamento de funções-curvatura de ordem superior de M influencia sua geometria. Para ambientes Riemannianos[1], nosso primeiro resultado é a seguinte generalização do teorema 3.1 de [4].

Teorema 1.3. *Seja* $x : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ *uma hipersuperfície fechada e orientável, com curvatura escalar* $R \geq 1$. *Assuma que a curvatura média* H_1 *de* M^n *não muda de sinal, e escolha a orientação de tal modo que* $H_1 \geq 0$. *Se* H_1 *ou* R *for constante em* M^n, *e*

$$H_1[\mathrm{tr}(P_1) - \mathrm{tr}(A^2P_1)] + (n-1)(R-1)(|A|^2 - n) \geq 0$$

em M^n, *então*

(a) $H_1[\mathrm{tr}(P_1) - \mathrm{tr}(A^2P_1)] + (n-1)(R-1)(|A|^2 - n) = 0$ *em* M^n.

(b) M^n *é ou totalmente geodésica ou um toro de Clifford* $\mathbb{S}^{n_1}_{r_1} \times \mathbb{S}^{n_2}_{r_2}$, *com* $r_1^2 + r_2^2 = 1$, $n_1, n_2 > 0$ *e* $\beta = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \geq 1$ *satisfazendo*

$$n_1(n_1-1)\beta^2 - 2n_1n_2\beta + n_2(n_2-1) = n(n-1)(R-1)\beta.$$

O teorema a seguir generaliza um resultado clássico de Simons ([28]):

Teorema 1.4. *Se* $x : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ *é uma hipersuperfície fechada e orientada da esfera, com* $S_r = 0$, *então*

$$\int_M \mathrm{tr}(A^2P_{r-1})[\mathrm{tr}(P_{r-1}) - \mathrm{tr}(A^2P_{r-1})]dM \leq 0.$$

Ademais, se $S_{r+1} \neq 0$ *sobre* M^n, *então* $\mathrm{tr}(A^2P_{r-1})\mathrm{tr}(P_{r-1}) \geq \mathrm{tr}(A^2P_{r-1})^2$ *se e só se* M^n *for um toro de Clifford* $\mathbb{S}^{n_1}_{r_1} \times \mathbb{S}^{n_2}_{r_2}$, *com* $r_1^2 + r_2^2 = 1$, $n_1 + n_2 = n$ *e* $S_r = 0$.

[1] $\mathbb{S}^{n+1}$ e $\mathbb{H}^{n+1}$ representam respectivamente a esfera unitária e o espaço hiperbólico de curvatura seccional constante -1.

Uma condição suficiente para garantir a não-negatividade do integrando acima é a não-negatividade da curvatura seccional de M, de acordo com o seguinte

Corolário 1.5. *Seja $x : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada e orientada da esfera, com $S_r = 0$. Se $S_{r+1} \neq 0$ sobre M^n, e M^n tem curvatura seccional $K_M \geq 0$, então M^n é um toro de Clifford $\mathbb{S}^{n_1}_{r_1} \times \mathbb{S}^{n_2}_{r_2}$, com $r_1^2 + r_2^2 = 1$, $n_1 + n_2 = n$ e $S_r = 0$.*

Quando M é uma hipersuperfície fechada em $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{H}^{n+1}$ ou em um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1}$, tal que $S_r > 0$ sobre M para algum $2 \leq r \leq n$, um teorema de J. L. Barbosa e A. G. Colares ([7]) garante a elipticidade de L_{r-1}. Desde que o Laplaciano é sempre elíptico, utilizando este resultado somos capazes de dar a seguinte caracterização das hiperesferas geodésicas de tais espaços:

Teorema 1.6. *Seja $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada e orientável, onde $\overline{M}_c^{n+1}$ denota $\mathbb{H}^{n+1}$, $\mathbb{R}^{n+1}$ ou um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1}$, conforme seja $c = -1, 0$ ou 1. Se S_r for constante sobre M^n para algum $1 \leq r < n$, e M^n tiver curvatura seccional $K_M \geq 0$, então M^n é uma hiperesfera geodésica e x é um mergulho.*

Uma prova (diferente) do teorema acima nos casos $c = -1, 0$ foi originalmente dada por R. Walter ([29], teorema 4B). No que concerne o caso $c = 1$, a suposição de estar M contida em um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1}$ no teorema acima é um tanto restritiva, mas pode ser relaxada caso impusamos condições sobre M, suficientes para garantir a elipticidade de L_r, para algum $1 \leq r < n$. Neste sentido o lema a seguir é bastante útil:

Lema 1.7. *Seja M^n uma variedade Riemanniana orientável de curvatura de Ricci $\mathrm{Ric} \geq c \cdot g$, e $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica. Suponha que a curvatura média de M^n não muda de sinal, e escolha a orientação de tal modo que $H_1 \geq 0$. Se $S_r(p) \neq 0$ para algum $2 \leq r \leq n$, então L_{r-1} é elíptico em p.*

A partir do mesmo, a seguinte caracterização de toros de Clifford é dada, funcionando como uma espécie de análogo do primeiro teorema acima para $1 \leq r < n$ geral:

Teorema 1.8. *Seja $x : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa e orientável na esfera unitária, com curvatura de Ricci $\mathrm{Ric} \geq 1 \cdot g$. Assuma que a curvatura média H_1 de M^n não muda de sinal, e escolha a orientação de modo que $H_1 \geq 0$. Se, para algum $1 \leq r < n$, $S_r \neq 0$ for constante sobre M^n, então*

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}(AP_{r-1})\left\{S_r(|A|^2 - n) + [\mathrm{tr}(P_r) - \mathrm{tr}(A^2P_r)]\right\}\\&+\mathrm{tr}(A^2P_{r-1})[\mathrm{tr}(P_{r-1}) - \mathrm{tr}(A^2P_{r-1})] \geq 0\end{aligned}$$

sobre M^n se e só se M^n for um toro de Clifford $\mathbb{S}^{n_1}_{r_1} \times \mathbb{S}^{n_2}_{r_2}$, com $n_1 + n_2 = n$, e $r_1^2 + r_2^2 = 1$.

Finalmente, acerca do caso não compacto temos o seguinte resultado:

Teorema 1.9. *Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientada, completa e não compacta, do espaço Euclidiano, com curvatura seccional $K_M \geq 0$. Se, para algum $1 \leq r < n$, $S_r \neq 0$ é constante sobre M^n, e $S_1S_r - S_{r+1}$ atinge um máximo global sobre M^n, então M^n é isométrica a $\mathbb{S}^{n_1}_{r_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ para algum $r_1 > 0$, onde $n_1 + n_2 = n$ e $r \leq n_1 < n$. Em particular, se $S_{r+1} = 0$ sobre M^n e S_1 atinge um máximo global sobre M^n, então M^n é isométrica a $\mathbb{S}^r_{r_1} \times \mathbb{R}^{n-r}$, para algum $r_1 > 0$.*

Acerca de ambientes Lorentzianos, restringimos nossa atenção aos temporalmente orientados, i.e., aquelas variedades Lorentzianas $\overline{M}^{n+1}$ tendo um campo vetorial tipo-tempo K, globalmente definido. A razão é que os espaços-tempo clássicos de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$, de De Sitter $\mathbb{S}^{n+1}_1$, bem como o anti-De Sitter $\mathbb{H}^{n+1}_1$ pertencem todos a tal classe.

Nosso primeiro resultado em ambiente Lorentziano generaliza um resultado anterior de H. Li ([22], teorema 4.3):

Teorema 1.10. *Seja $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}_c$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana fechada M^n em uma variedade de Lorentz temporalmente orientada $\overline{M}^{n+1}$, de curvatura seccional constante $c \geq 0$. Se a curvatura escalar R de M^n é constante e satisfaz*

(a) *$c\left(\frac{n-2}{n}\right) < R \leq c$, então M^n é totalmente umbílica.*

(b) *$c\left(\frac{n-2}{n}\right) \leq R \leq c$ e $S_3 \neq 0$, então M^n é totalmente umbílica.*

(c) *$c\left(\frac{n-2}{n}\right) \leq R < c$, então $\nabla A = 0$ e M^n tem curvatura média constante.*

Teorema 1.11. *Seja $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana completa M^n em uma variedade de Lorentz temporalmente orientada $\overline{M}^{n+1}$, de curvatura seccional constante c. Suponha que a curvatura média H_1 de M^n não muda de sinal, e escolha a orientação de M^n de tal modo que $H_1 \geq 0$. Se H_1 atinge um máximo global em M^n, e a curvatura escalar R de M^n é constante e satisfaz*

$$c\left(\frac{n-2}{n}\right) < R < c,$$

então M^n é totalmente umbílica.

Utilizando um análogo do lema 1.7 para ambientes Lorentzianos, obtemos os seguintes resultados:

Teorema 1.12. *Seja $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$, $c > 0$, uma hipersuperfície fechada do espaço de Lorentz temporalmente orientado $\overline{M}^{n+1}$, de curvatura seccional constante c. Se a curvatura seccional K_M de M^n satisfaz $0 \leq K_M \leq c$ e, para algum $1 \leq r < n$, $H_r \neq 0$ é constante sobre M^n, então M^n tem segunda forma fundamental paralela e definida. Mais ainda, se $0 < K_M \leq c$ então M^n é totalmente umbílica.*

Corolário 1.13. *Seja $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$, $c > 0$, uma hipersuperfície fechada do espaço de Lorentz temporalmente orientado $\overline{M}^{n+1}$, de curvatura seccional constante c. Se a curvatura seccional K_M de M^n satisfaz $0 \leq K_M \leq c$ e, para algum $1 \leq r < n$, $H_r \neq 0$ é constante sobre M^n, então H_{r+1} é constante sobre M^n se e só se H_1 (ou a curvatura escalar R) for constante sobre M^n.*

Uma importante subclasse de variedades Lorentzianas temporalmente-orientadas é a formada pelos espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados, i.e., produtos warped

$$\overline{M}^{n+1} = I \times_f F^n,$$

com fibra Riemanniana F^n, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto com a métrica $-dt^2$ e função warping $f : I \to \mathbb{R}_+^*$. Em relação aos mesmos, tem-se:

Corolário 1.14. *Seja $\overline{M}_c^{n+1} = I \times_f F^n$ um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado com curvatura seccional constante c, e $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$*

uma hipersuperfície fechada de $\overline{M}^{n+1}$. *Se, para algum* $1 \leq r < n$, *tivermos* $H_r \neq 0$ *constante sobre* M^n, *e* $0 < K_M \leq c$, *então* $M^n = \{t\} \times F^n$, *para algum* $t \in I$, *a menos que* $\overline{M}^{n+1}$ *seja isométrico ao espaco de De Sitter* $\mathbb{S}_c^{n+1}$ *em uma vizinhança de* M^n, *em cujo caso* M^n *é uma esfera redonda totalmente umbílica.*

O teorema de Calabi-Bernstein assegura que as únicas hipersuperfícies tipo-espaço, máximas e completas, do espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$ são os hiperplanos tipo-espaço. Em nossos últimos resultados examinamos o que se pode dizer sobre hipersuperfícies tipo-espaço $r-$máximas de espaços de Lorentz temporalmente orientados, i.e., aquelas com $r-$ésima curvatura média identicamente nula:

Teorema 1.15. *Seja* $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ *uma hipersuperfície tipo-espaço, não-compacta e* $r-$*máxima, da variedade de Lorentz temporalmente orientada* $\overline{M}_c^{n+1}$, *de curvatura seccional constante* $c \geq 0$. *Se* H_{r+1} *é constante sobre* M^n, *então* $H_j = 0$ *sobre* M^n *para todo* $r \leq j \leq n$, *e*

(a) $\nu(p) \geq n - r + 1$ *para todo* $p \in M^n$.

(b) *se* $\overline{M}^{n+1}$ *é o espaço de Lorentz-Minkowski* $\mathbb{L}^{n+1}$ *e* M^n *é completa, então por todo ponto de* M^n *passa um* $(n - r + 1)-$*hiperplano de* $\mathbb{L}^{n+1}$ *totalmente contido em* M^n.

Corolário 1.16. *Seja* $x : M^n \to \mathbb{S}_1^{n+1}$ *uma hipersuperfície tipo-espaço completa do espaço de De Sitter, com* H_1, H_2 *e* H_3 *constantes,* $H_1 \neq 0$. *Se* $H_2 = 0$ *então* M^n *é de rotação.*

No caso compacto temos um resultado mais forte:

Teorema 1.17. *Seja* $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ *uma hipersuperfície tipo-espaço,* $r-$*máxima* $(r < n)$ *fechada em uma variedade de Lorentz temporalmente orientada* $\overline{M}^{n+1}$, *de curvatura seccional constante* c. *Então*

$$\int_M \operatorname{tr}(A^2 P_{r-1})[\operatorname{tr}(A^2 P_{r-1}) + c\operatorname{tr}(P_{r-1})]dM \leq 0$$

e, ademais,

(a) $c \geq 0 \Rightarrow H_j = 0$ *sobre* M^n, *para todo* $r \leq j \leq n$.

(b) *Se* $c \leq 0$ *e* $H_{r+1} \neq 0$ *sobre* M^n, *então*

$$\mathrm{tr}(A^2P_{r-1})[\mathrm{tr}(A^2P_{r-1}) + c\mathrm{tr}(P_{r-1})] \geq 0$$

sobre M^n *implica em* $\nabla A = 0$ *e* H_{r+1}, H_{r-1} *constantes sobre* M^n.

O corolário a seguir é consequência imediata do item (a) do teorema acima, e generaliza o teorema 4.6 de [8]. De fato, ele fornece outra prova, para hipersuperfícies tipo-espaço fechadas de um ambiente Lorentziano de curvatura seccional constante e não-negativa, do teorema de Calabi-Bernstein.

Corolário 1.18. *Seja* $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$, $c \geq 0$, *uma hipersuperfície tipo-espaço, máxima e fechada, em uma variedade de Lorentz temporalmente orientada* $\overline{M}^{n+1}$, *de curvatura seccional constante* c. *Então* M^n *é totalmente geodésica.*

Finalmente, em ambientes conformemente estacionários, i.e., variedades Lorentzianas temporalmente orientadas nas quais o campo vetorial tipo-tempo K é conforme (no sentido da derivação tensorial de Lie), o resultado anterior implica o seguinte

Corolário 1.19. *Seja* $\overline{M}^{n+1}$ *uma variedade de Lorentz conformemente estacionária, com curvatura seccional* $c \leq 0$. *Se* $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ *é uma hipersuperfície* $r-$*máxima* $(r < n)$, *tipo-espaço e fechada, sobre a qual*

$$\mathrm{tr}(A^2P_{r-1})[\mathrm{tr}(A^2P_{r-1}) + c\mathrm{tr}(P_{r-1})] \geq 0,$$

então existe $p \in M^n$ *tal que* $H_{r+1}(p) = 0$.

O presente trabalho se encontra organizado do seguinte modo: no segundo capítulo nós estabelecemos várias notações, bem como colecionamos alguns resultados elementares sobre tensores, variedades de Lorentz e imersões isométricas. O terceiro capítulo é devotado ao estudo das $r-$curvaturas médias H_r de uma hipersuperfície. Em particular, nele provamos as fórmulas para $L_q(S_r)$ e $L_r(S_r)$. No quarto e último capítulo, tal fórmula é aplicada na dedução dos resultados supracitados.

Capítulo 2

Preliminares

Ao longo deste trabalho, a menos que dito explicitamente em contrário, M^n denota uma variedade Riemanniana com métrica Riemanniana $g = \langle\ ,\ \rangle$, conexão de Levi-Civitta ∇ e tensor curvatura R. $\mathcal{D}(M)$ denota o anel comutativo das funções reais de classe C^∞ (ou *suaves*) sobre M.

2.1 Campos tensoriais

Tensores (covariantes ou contravariantes) são objetos de que podemos dispor em quaisquer variedades diferenciáveis. Nesta seção, contudo, nossa atenção estará focada basicamente em tensores (covariantes) sobre uma variedade Riemanniana M.

Denotamos por ϕ um 2−tensor arbitrário sobre M, e por $\nabla\phi$ e $\nabla^2\phi = \nabla(\nabla\phi)$ suas primeira e segunda diferenciais covariantes ([16]). A cada um de tais ϕ corresponde uma aplicação $T : TM \to TM$, que é um operador linear sobre cada T_pM e satisfaz, para todos $X, Y \in \mathcal{X}(M)$,

$$\phi(X, Y) = \langle TX, Y\rangle.$$

Reciprocamente, utilizando a fórmula acima como definição, podemos naturalmente associar a uma aplicação $T : TM \to TM$, linear sobre cada T_pM, um 2−tensor ϕ sobre M. Doravante, nos referiremos a T como o *operador linear associado ao* 2−tensor ϕ.

Para $V \in \mathcal{X}(M)$ é facilmente verificado que

$$(\nabla_V\phi)(X, Y) = (\nabla\phi)(X, Y, V)$$

define outro $2-$tensor sobre M, denominado a *derivada covariante* de ϕ na direção de V. Se $\nabla_V T$ denota o operador linear associado a $\nabla_V\phi$, é também fácil verificar que

$$(\nabla_V T)(X) = \nabla_V(TX) - T(\nabla_V X).$$

Seja $\{e_i\}$ um referencial móvel em uma vizinhança aberta $U \subset M$, com co-referencial $\{\omega_i\}$ e $1-$formas de conexão ω_{ij}. Lembremos que a primeira e a segunda *equações de estrutura* são respectivamente dadas por

$$d\omega_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j.$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij},$$

sendo as *formas de curvatura* Ω_{ij} definidas por

$$\Omega_{ij} = -\frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l.$$

Denotando respectivamente por ϕ_{ij}, ϕ_{ijk} e ϕ_{ijkl} as componentes de ϕ, $\nabla\phi$ e $\nabla^2\phi$ com relação a $\{e_i\}$, as seguintes fórmulas relacionando tais componentes são de fácil verificação:

$$\sum_k \phi_{ijk}\omega_k = d\phi_{ij} - \sum_k \phi_{kj}\omega_{ik} - \sum_k \phi_{ik}\omega_{jk}; \tag{2.1}$$

$$\sum_l \phi_{ijkl}\omega_l = d\phi_{ijk} - \sum_l \phi_{ljk}\omega_{il} - \sum_l \phi_{ilk}\omega_{jl} - \sum_l \phi_{ijl}\omega_{kl}. \tag{2.2}$$

Lema 2.1. *Seja ϕ um $2-$tensor sobre M. Então, em relação a um referencial móvel arbitrário $\{e_i\}$ em M, tem-se*

$$\phi_{ijkl} - \phi_{ijlk} = -\sum_r \phi_{rj}R_{irkl} - \sum_r \phi_{ir}R_{rjlk}. \tag{2.3}$$

Demonstração. Diferenciando exteriormente (2.1), obtemos

$$\begin{aligned}\sum_k d\phi_{ijk} \wedge \omega_k + \sum_k \phi_{ijk}d\omega_k &= -\sum_k d\phi_{kj} \wedge \omega_{ik} - \sum_k \phi_{kj}d\omega_{ik} \\ &\quad -\sum_k d\phi_{ik} \wedge \omega_{jk} - \sum_k \phi_{ik}d\omega_{jk}.\end{aligned}$$

Substituindo (2.1) e (2.2) na relação acima, juntamente com a segunda equação de estrutura, após alguns cancelamentos obtemos

$$\sum_{k,l} \phi_{ijkl}\omega_l \wedge \omega_k = -\sum_k \phi_{kj}\Omega_{ik} - \sum_k \phi_{ik}\Omega_{jk}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\phi_{ijlk} - \phi_{ijkl} &= -\sum_r \phi_{rj}\Omega_{ir}(e_k, e_l) - \sum_r \phi_{ir}\Omega_{jr}(e_k, e_l) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{r,m,t} (\phi_{rj}R_{irmt} + \phi_{ir}R_{jrmt})(\omega_m \wedge \omega_t)(e_k, e_l) \\
&= \frac{1}{2}\sum_r \phi_{rj}(R_{irkl} - R_{irlk}) + \frac{1}{2}\sum_r \phi_{ir}(R_{jrkl} - R_{jrlk}) \\
&= \sum_r \phi_{rj}R_{irkl} + \sum_r \phi_{ir}R_{jrkl} = \sum_r \phi_{rj}R_{irkl} + \sum_r \phi_{ir}R_{rjlk}.
\end{aligned}$$

□

As observações a seguir sobre componentes de um tensor em um referencial dado serão bastante úteis no próximo capítulo.

Observações.

(a) Um referencial móvel $\{e_i\}$ é *geodésico* em $p \in M$ quando $(\nabla_{e_k} e_i)(p) = 0$ para todos $1 \leq i, k \leq n$, o que equivale a $\omega_{ij}(p) = 0$ para todos $1 \leq i, j \leq n$. Usualmente, constrói-se referenciais geodésicos em $p \in M$ considerando-se uma vizinhança normal de p e transportando paralelamente os elementos de uma base ortonormal arbitrária de T_pM ao longo das geodésicas radiais que saem de p. Sempre que supusermos ser um dado referencial geodésico em um ponto de M, estaremos assumindo tal referencial construído desse modo.

Para $1 \leq k \leq n$ fixado, a construção acima nos dá $(\nabla_{e_k} e_i)(q) = 0$, para todo $1 \leq i \leq n$ e todo ponto q sobre a geodésica radial que parte de p com vetor velocidade e_k. Então, $\omega_{ij}(q)(e_k) = 0$ para todos tais i, j e q.

(b) Defina $\phi_{ij;k} = e_k(\phi_{ij})$ e $\phi_{ij;kk} = e_k(e_k(\phi_{ij}))$. Quando o referencial $\{e_i\}$ for geodésico em $p \in M$ então, ao longo da geodésica radial partindo de p com vetor velocidade e_k, temos

$$\phi_{ijk} = \phi_{ij;k} \text{ and } \phi_{ijkk} = \phi_{ij;kk}. \tag{2.4}$$

A primeira parte de (2.4) segue da observação (a) e de (2.1), enquanto a segunda parte é obtida ao se substituir a primeira em (2.2).

(c) Um $2-$tensor ϕ sobre M^n é de **Codazzi**[1] quando $\phi_{ijk} = \phi_{ikj}$ para todos $1 \leq i, j, k \leq n$, e em relação a qualquer referencial móvel $\{e_i\}$ em M. Se este for o caso, trocando-se os índices j e k em (2.2) obtemos

$$\phi_{ijkl} = \phi_{ikjl}, \tag{2.5}$$

para todos $1 \leq i, j, k, l \leq n$.

Um $2-$tensor covariante ϕ sobre uma variedade diferenciável M é dito *simétrico* quando $\phi(X, Y) = \phi(Y, X)$, para todos $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Quando M é Riemanniana, a simetria de ϕ é claramente equivalente à auto-adjunção de seu operador linear associado T. Ademais, é também imediato que $\nabla_X \phi$ é simétrico sempre que ϕ for ele mesmo simétrico, de maneira que $\nabla_X T$ é auto-adjunto sempre que T for auto-adjunto.

Em relação a um referencial móvel arbitrário $\{e_i\}$ em M, a simetria de ϕ é equivalente a $\phi_{ij} = \phi_{ji}$, para todos $1 \leq i, j \leq n$. Definimos a *norma ao quadrado* de um $2-$tensor simétrico ϕ sobre M por

$$|\phi|^2 = \mathrm{tr}(T^2),$$

onde tr denota o *traço* de um operador linear. Em componentes, tem-se

$$|\phi|^2 = \sum_{i,j} \phi_{ij}^2.$$

2.2 Variedades de Lorentz

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Uma forma bilinear simétrica $b = \langle \, , \, \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ é dita

(a) *Positiva definida*, quando $\langle v, v \rangle > 0$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$.

(b) *Negativa definida*, quando $\langle v, v \rangle < 0$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$.

[1] A motivação para essa definição vem do fato, a ser provado na seção 2.3, que imersões isométricas de variedades Riemannianas como hipersuperfícies de ambientes de curvatura seccional constante têm segunda forma fundamental de Codazzi.

(c) *Não-degenerada*, quando $\langle v, w\rangle = 0$ para todo $w \in V$ implica em $v = 0$.

Se b é uma forma bilinear simétrica sobre V, um subespaço W de V é dito *não-degenerado* se $b_{|W\times W} : W \times W \to \mathbb{R}$ for não-degenerada .

O *índice* de uma forma bilinear simétrica b sobre V é a maior dimensão de um subespaço W de V tal que $b_{|W\times W} : W \times W \to \mathbb{R}$ seja negativa definida.

Dados uma forma bilinear simétrica b sobre V e um subespaço W de V, definimos o complemento ortogonal $W^\perp$ de W em V por

$$W^\perp = \{v \in V;\ \langle v, w\rangle = 0;\ \forall\, w \in W\}.$$

Incluímos o lema a seguir por completeza. Sua prova é álgebra linear padrão, e pode ser encontrada em [24] (lemas 1.19, 1.22 e 1.23).

Lema 2.2. *Seja b uma forma bilinear simétrica sobre o espaço vetorial de dimensão finita V, e W um subespaço de V. Então:*

(a) *b é não-degenerada se e só se sua matriz com respeito a uma (e então a toda) base de V for invertível.*

(b) *Se W é não-degenerado então $dim(W)+dim(W^\perp) = dim(V)$ e $(W^\perp)^\perp = W$.*

(c) *W é não-degenerado se e só se $V = W \oplus W^\perp$. Em particular, W é não-degenerado se e só se $W^\perp$ for não-degenerado.*

Doravante, supomos que $b = \langle\ ,\ \rangle$ é uma forma bilinear simétrica e não-degenerada sobre o espaço vetorial real V. Em relação a b, dizemos que $v \in V \setminus \{0\}$ é:

- *Tipo-tempo*, quando $\langle v, v\rangle < 0$;
- *Tipo-luz*, quando $\langle v, v\rangle = 0$;
- *Tipo-espaço*, quando $\langle v, v\rangle > 0$.

Analogamente, define-se o que significa para um subespaço não-degenerado W de V ser tipo-tempo, tipo-luz ou tipo-espaço. Se $v \in V \setminus \{0\}$ não for tipo-luz, define-se o *sinal* $\epsilon_v \in \{-1, 1\}$ de v por

$$\epsilon_v = \frac{\langle v, v\rangle}{|\langle v, v\rangle|}.$$

A *norma* de $v \in V$ é $|v| = \sqrt{\epsilon_v \langle v, v \rangle}$, e v é *unitário* se $|v| = 1$. É também um resultado padrão de álgebra linear (lema 2.24 de [24]) que V admite uma base $\{e_i\}$ ortonormal com respeito a b, isto é, tal que $\langle e_i, e_j \rangle = \epsilon_i \delta_{ij}$, onde ϵ_i denota o sinal de e_i. Desse modo, a expansão ortonormal de $v \in V$ com respeito a $\{e_i\}$ é dada por

$$v = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \langle v, e_i \rangle e_i.$$

Seja V um espaço vetorial no qual uma forma bilinear simétrica e não-degenerada $b = \langle\ ,\ \rangle$ de índice 1 está definida, e $\mathcal{T} = \{u \in V;\ \langle u, u \rangle < 0\}$. Para cada $u \in \mathcal{T}$, definimos o *cone tipo-tempo de V contendo u* por $C(u) = \{v \in \mathcal{T};\ \langle u, v \rangle < 0\}$.

Lema 2.3. *Sejam $v, w \in \mathcal{T}$. Então:*

(a) *O subespaço $\{v\}^{\perp}$ é tipo-espaço e $V = span\{v\} \oplus span\{v\}^{\perp}$. Assim, $\mathcal{T}$ é a união disjunta de $C(v)$ e $C(-v)$.*

(b) *$|\langle v, w \rangle| \geq |v||w|$, com igualdade se e só se v e w forem colineares.*

(c) *Se $v \in C(u)$ para algum $u \in \mathcal{T}$, então $w \in C(u) \Leftrightarrow \langle v, w \rangle < 0$. Portanto, $w \in C(v) \Leftrightarrow v \in C(w) \Leftrightarrow C(v) = C(w)$.*

Demonstração. Veja [15], lema 1.2.1. □

Definição 2.4. *Um tensor métrico sobre uma variedade diferenciável $\overline{M}$ é um $2-$tensor covariante e simétrico $\overline{g}$ sobre $\overline{M}$, tal que $\overline{g}_p$ é não-degenerada para todo $p \in \overline{M}$. Uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}$ é um par $(\overline{M}, \overline{g})$, onde $\overline{M}$ é uma variedade diferenciável e $\overline{g} = \langle\ ,\ \rangle$ é um tensor métrico de índice constante sobre $\overline{M}$.*

Uma vez que o índice de $\overline{g}$ é uma função semi-contínua inferiormente de $\overline{M}$ em $\mathbb{N}$, é imediato que ele é constante em toda componente conexa de $\overline{M}$. Daqui em diante, sempre que não houver perigo de confusão, escreveremos simplesmente $\overline{M}$ para o par $(\overline{M}, \overline{g})$, $\langle\ ,\ \rangle$ para o tensor métrico $\overline{g}$ de $\overline{M}$ e ν para seu índice.

Sempre que $p \in \overline{M}$ e $v, w \in T_p\overline{M}$ gerarem um subespaço $2-$dimensional não-degenerado de $T_p\overline{M}$, segue do item (a) do lema 2.2 que $\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2 \neq 0$. Desse modo, tem sentido a seguinte

Definição 2.5. *Seja $\overline{M}$ uma variedade semi-Riemanniana, $p \in \overline{M}$ e $\sigma \subset T_p\overline{M}$ um subespaço 2−dimensional não-degenerado de $T_p\overline{M}$. O número*

$$K(\sigma) = \frac{\langle \overline{R}(v,w)v, w\rangle}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2}$$

independe da base escolhida $\{v, w\}$ de σ, e é denominado curvatura seccional de $\overline{M}$ em p, segundo σ.

Definição 2.6. *A variedade semi-Riemanniana $\overline{M}$ tem* curvatura seccional constante *quando, para cada $p \in \overline{M}$, os números $K(\sigma)$ da definição acima independerem do subespaço 2−dimensional não-degenerado σ de $T_p\overline{M}$.*[2]

Aproximando subespaços 2−dimensionais degenerados σ de $T_p\overline{M}$ através de subespaços não-degenerados, pode-se mostrar que o fato de $\overline{M}$ ter curvatura seccional constante determina seu tensor curvatura $\overline{R}$. Mais precisamente (corolário 3.43 de [24]), se $\overline{M}$ tiver curvatura seccional constante c, então

$$\overline{R}(X,Y)Z = c[\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X], \tag{2.6}$$

para todos $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\overline{M})$.

Quando o índice ν de $\overline{M}$ é 0, $\overline{M}$ é simplesmente uma variedade Riemanniana; quando $\nu = 1$, $\overline{M}$ é denominada uma **variedade de Lorentz**.

Definição 2.7. *Seja $\overline{M}$ uma variedade de Lorentz. Uma aplicação τ, que associa a cada $p \in \overline{M}$ um cone tipo-tempo τ_p em $T_p\overline{M}$, é suave quando, para cada $p \in \overline{M}$, existem uma vizinhança aberta U de p e $V \in \mathcal{X}(U)$, tais que $V(q) \in \tau_q$ para todo $q \in U$. Caso uma tal aplicação τ exista, diz-se que $\overline{M}$ é* temporalmente orientável.

Proposição 2.8. *Uma variedade de Lorentz $\overline{M}$ é temporalmente orientável se e só se existir um campo vetorial tipo-tempo $K \in \mathcal{X}(\overline{M})$.*

Demonstração. Se existe um campo K de vetores tipo-tempo sobre $\overline{M}$, defina $\tau(p) = C(K(p))$. Reciprocamente, seja τ uma orientação temporal de $\overline{M}$. Como τ é diferenciável, cada ponto $p \in \overline{M}$ possui uma vizinhança U em $\overline{M}$ na qual está definido um campo de vetores tipo-tempo K_U, com $K_U(q) \in \tau(q)$,

[2]Quando $dim(\overline{M}) \geq 3$ e $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante, prova-se (teorema de Schur) que o valor de $K(\sigma)$ também independe do ponto $p \in \overline{M}$ escolhido.

para cada $q \in U$. Sejam agora $\{U_\alpha\}$ uma tal cobertura de $\overline{M}$, e $\{f_\alpha\}$ uma partição da unidade estritamente subordinada a $\{U_\alpha\}$. Então o campo

$$K = \sum_\alpha f_\alpha K_{U_\alpha}$$

está bem definido sobre $\overline{M}$ e é fácil verificar, com a ajuda do lema 2.3, que K é tipo-tempo. □

No que concerne orientabilidade temporal, a proposição acima diz que não importa se nos referimos à função suave τ ou ao campo vetorial tipo-tempo K. Assim, sempre que $\overline{M}$ for temporalmente orientável, a escolha de uma aplicação τ como acima, ou de um campo vetorial tipo-tempo K a ela correspondente, será denominada uma ***orientação temporal*** para $\overline{M}$.

Seja τ uma orientação temporal para $\overline{M}$, e $V \in \mathcal{X}(\overline{M})$. Se $V(q) \in \tau_q$ para todo $q \in \overline{M}$, diz-se que V *aponta para o futuro*. Segue da definição de cones tipo-tempo que todos os campos vetoriais sobre $\overline{M}$ que apontam para o futuro são tipo-tempo (ainda que a recíproca não seja verdadeira). Ademais, se K for uma orientação temporal para $\overline{M}$, o item (c) do lema 2.3 garante que um campo vetorial tipo-tempo V sobre $\overline{M}$ aponta para o futuro se e só se $\langle V, K\rangle < 0$.

Um tipo particular de variedade de Lorentz temporalmente orientável é uma variedade de Lorentz $(\overline{M}^{n+1}, g)$ **conformemente estacionária**, isto é, tal que $\overline{M}$ possui um campo de vetores tipo tempo K *conforme*, no sentido de ser

$$\mathcal{L}_K g = 2\phi g,$$

onde $\phi \in \mathcal{D}(\overline{M})$ e $\mathcal{L}_K$ denota a derivação de Lie.

Uma classe particular de variedades de Lorentz conformemente estacionárias é a formada pelos espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados, ou seja, os produtos warped

$$\overline{M}^{n+1} = I \times_f F^n$$

com função warping $f : I \to \mathbb{R}^*_+$, onde a base $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto com métrica $-dt^2$ e a fibra F^n é uma variedade Riemanniana. Nesse caso, o campo conforme tipo-tempo K, dado por $K = f\frac{\partial}{\partial t}$, é *fechado*, no sentido de que sua 1−forma dual ω^K é fechada.

Tais produtos incluem os espaços de Lorentz-Minkwoski $\mathbb{L}^{n+1}$, de De Sitter $\mathbb{S}^{n+1}_1$, bem como o espaço anti-De Sitter $\mathbb{H}^{n+1}_1$, e seu interesse físico provem de sua utilização como modelo cosmológico. Para uma análise mais detalhada da estrutura de variedades de Lorentz conformemente estacionárias e de espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados, veja [23] e [5], ou ainda [15].

2.3 Imersões isométricas

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana e $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ uma variedade semi-Riemanniana. Uma imersão isométrica $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ é uma imersão tal que $x^*\overline{g} = g$. Neste caso, é costume denotar (e assim o faremos) os tensores métricos de M e $\overline{M}$ por um mesmo símbolo.

Dada $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ imersão isométrica, diz-se que M é uma *hipersuperfície* de $\overline{M}$. Quando $\overline{M}$ é de Lorentz, M é dita uma hipersuperfície *tipo-espaço* de $\overline{M}$.

Proposição 2.9. *Se M^n é uma hipersuperfície tipo-espaço de uma variedade de Lorentz temporalmente orientada $\overline{M}^{n+1}$, então M^n admite um campo vetorial normal unitário (suave) $N \in \mathcal{X}(M)^{\perp}$, apontando para o futuro. Em particular, M^n é orientável.*

Demonstração. Fixe um campo $K \in \mathcal{X}(\overline{M})$ que dá a orientação temporal de $\overline{M}$, e observe que, para todo $p \in M$, o conjunto de todos os vetores tipo-tempo $v \in T_p\overline{M}$ é a união disjunta de $C(K(p))$ e $C(-K(p))$.

Tome, em cada $p \in M$, um vetor unitário $N(p) \in T_pM^{\perp}$. Desde que $N(p)$ é tipo-tempo, trocando $N(p)$ por $-N(p)$ se necessário, podemos supor que $N(p) \in C(K(p))$. Esta receita define unicamente um campo vetorial normal unitário N sobre M, apontando para o futuro, e tudo o que resta a fazer é mostrar que tal N é suave.

Para tanto, fixe $p \in M$ e tome um referencial móvel $\{e_i\}$ sobre uma vizinhança aberta e conexa U de p em M. Então $\tilde{N} = K - \sum_{i=1}^{n}\langle K, e_i\rangle e_i$ é suave e normal a M em U, com

$$\langle \tilde{N}, \tilde{N}\rangle = \langle \tilde{N}, K\rangle = \langle K, K\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle K, e_i\rangle^2.$$

Mas $\langle K, K\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle K, e_i\rangle^2 - \langle K, N\rangle^2$, de modo que $\langle \tilde{N}, \tilde{N}\rangle = -\langle K, N\rangle^2 < 0$. Portanto, $\tilde{N}(q) \in C(K(q))$ para cada $q \in U$, e $N = \frac{\tilde{N}}{|\tilde{N}|}$, suave. □

Doravante, $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ denotará sempre uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana $n-$dimensional em uma variedade Riemanniana orientada, ou de Lorentz temporalmente orientada, $(n + 1)-$dimensional, estando o caso sob consideração em cada situação sempre claro do contexto.

Quando $\overline{M}^{n+1}$ for Riemanniana, M^n será sempre assumida orientável. Desde que, como vimos acima, essa hipótese é desnecessária no caso de ambiente Lorentziano temporalmente orientado, em qualquer caso M^n é orientada pela escolha de um campo vetorial normal unitário N sobre a mesma.

Mais uma palavra sobre notação: em relação à imersão $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$, exceto pela métrica objetos sem barra se referirão a M, ao passo que objetos com barra se referirão a $\overline{M}$. Em particular, ∇ e $\overline{\nabla}$ denotarão as conexões de Levi-Civitta, e R e $\overline{R}$ os tensores de curvatura de M e $\overline{M}$, respectivamente.

Para todos $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, tem-se $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T$, onde o T sobrescrito denota componente tangente. Assim,

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y),$$

onde $\alpha : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}^{\perp}(M)$ é a *segunda forma fundamental* (vetorial) de x. Desde que α é $\mathcal{D}(M)-$bilinear e simétrica, definindo

$$\langle AX, Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), N \rangle$$

obtemos um campo $A : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ de operadores lineares auto-adjuntos $A_p : T_pM \to T_pM$ $(p \in M)$, também denominados *segundas formas fundamentais* de x. É imediato verificar que

$$AX = -\overline{\nabla}_X N \quad \text{e} \quad \alpha(X, Y) = \epsilon_N \langle AX, Y \rangle N.$$

A proposição a seguir coleciona as equações fundamentais relacionando os tensores curvatura de M e $\overline{M}$ e a segunda forma fundamental:

Proposição 2.10. *Seja $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica e $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$. Então:*

(a) (*Equação de Gauss*)

$$R(X, Y)Z = (\overline{R}(X, Y)Z)^T + \epsilon_N[\langle AX, Z \rangle AY - \langle AY, Z \rangle AX].$$

(b) (*Equação de Codazzi*) $(\overline{R}(X, Y)N)^T = (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X.$

Para ambientes de curvatura seccional constante tem-se o seguinte

Corolário 2.11. *Seja* $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ *uma imersão isométrica de* M^n *em um ambiente* $\overline{M}^{n+1}$ *de curvatura seccional constante c, e* $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$. *Então:*

$$\begin{aligned} \langle R(X,Y)Z, W\rangle &= c[\langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle - \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle] \\ &\quad + \epsilon_N[\langle AX, Z\rangle\langle AY, W\rangle - \langle AX, W\rangle\langle AY, Z\rangle]. \end{aligned} \tag{2.7}$$

e

$$(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X. \tag{2.8}$$

Demonstração. Consequência imediata da proposição anterior e da fórmula 2.6 para o tensor curvatura de um espaço de curvatura seccional constante. □

Observação. A equação (2.8) é precisamente o que significa, para imersões isométricas de codimensão um em espaços de curvatura seccional constante, dizer que a segunda forma fundamental A é um tensor de Codazzi. De fato, dado um referencial móvel $\{e_k\}$ sobre M e $1 \leq i, j, k \leq n$, segue de (2.8) que $\langle(\nabla_{e_k} A)e_i, e_j\rangle = \langle(\nabla_{e_i} A)e_k, e_j\rangle$, ou ainda que

$$(\nabla A)(e_i, e_j, e_k) = (\nabla A)(e_k, e_j, e_i).$$

Para o que segue, em relação à imersão isométrica $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$, de segunda forma fundamental A em relação a um campo normal unitário N que dá a orientação de M, definamos $S_1 = \mathrm{tr}(A)$ e $2S_2 = S_1^2 - |A|^2$. Sendo $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os autovalores de A em $p \in M$, é fácil verificar que[3]

$$S_1 = \sum_i \lambda_i \quad \text{e} \quad S_2 = \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j.$$

Corolário 2.12. *Seja* $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ *uma imersão isométrica de* M^n *em um ambiente* $\overline{M}^{n+1}$ *de curvatura seccional constante c. Se R denota a curvatura escalar de* M^n, *então:*

$$2S_2 = \epsilon_N n(n-1)(R - c). \tag{2.9}$$

[3]Veja também a seção 3.1.

Demonstração. Seja $p \in M$ e $\{e_k\}$ uma base de T_pM, tal que $Ae_k = \lambda_k e_k$ para $1 \leq k \leq n$. A equação de Gauss nos dá

$$\begin{aligned} R(p) &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i<j} \langle R(e_i, e_j)e_i, e_j \rangle \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i<j} [c + \epsilon_N \langle Ae_i, e_i \rangle \langle Ae_j, e_j \rangle - \epsilon_N \langle Ae_i, e_j \rangle^2] \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \left[\binom{n}{2} c + \epsilon_N \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j \right] \\ &= c + \frac{2\epsilon_N S_2(p)}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

□

Concluímos este capítulo com o lema a seguir, que aparece, em formas ligeiramente diferentes, em [12] e em [2].

Lema 2.13. *Seja $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica com S_2 constante. Então*

$$S_1^2(|\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2) \geq 2S_2 |\nabla A|^2. \tag{2.10}$$

Em particular, se $S_2 \geq 0$ então $|\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2 \geq 0$.

Demonstração. Seja $p \in M$ e $\{e_k\}$ um referencial móvel em uma vizinhança $U \subset M$ de p, geodésico em p. Denotando ainda por (h_{ij}) a matriz de A em relação à base $\{e_k\}$, segue de $S_1^2 = |A|^2 + 2S_2$ que $S_1^2 = \sum_{k,l} h_{kl}^2 + 2S_2$. Então, tem-se em p

$$S_1 e_i(S_1) = \sum_{k,l} h_{kl} h_{kli}.$$

Usemos agora a desigualdade de Cauchy-Schwarz para obter

$$\begin{aligned} S_1^2 (e_i(S_1))^2 &= \left(\sum_{k,l} h_{kl} h_{kli} \right)^2 \leq \left(\sum_{k,l} h_{kl}^2 \right) \left(\sum_{k,l} h_{kli}^2 \right) \\ &= |A|^2 \left(\sum_{k,l} h_{kli}^2 \right). \end{aligned}$$

Somando membro a membro as desigualdades acima para $1 \leq i \leq n$, obtém-se finalmente

$$S_1^2|\nabla S_1|^2 \leq |A|^2|\nabla A|^2 = (S_1^2 - 2S_2)|\nabla A|^2,$$

que é precisamente a desigualdade desejada.

Se $S_2 \geq 0$, segue que $S_1^2(|\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2) \geq 0$ em M. Portanto, definindo

$$U = \{p \in M; S_1(p) \neq 0\},$$

obtém-se $|\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2 \geq 0$ em U, e daí em $\overline{U}$. Em $\overline{U}^c$, que é aberto, temos de $2S_2 + |A|^2 = 0$ e de $S_2 \geq 0$ que $A = 0$. Logo, $\nabla A = 0$ e daí $\nabla S_1 = 0$ em $\overline{U}^c$, de modo que também temos $|\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2 \geq 0$ aí. $\square$

Capítulo 3

Curvaturas médias de ordem superior

3.1 Transformações de Newton

A segunda forma fundamental $A : TM \to TM$ da imersão isométrica $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ com respeito a um campo vetorial normal unitário $N \in \mathcal{X}^{\perp}(M)$ que dá a orientação de M induz, em cada $p \in M$, um operador linear auto-adjunto $A : T_pM \to T_pM$.

Associado a A, tem-se os n invariantes S_r, $1 \leq r \leq n$, dados pela igualdade

$$\det(tI - A) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k t^{n-k},$$

onde $S_0 = 1$ por definição. Quando $\{e_k\}$ é uma base de T_pM formada por autovetores de A_p, com autovalores respectivamente $\{\lambda_k\}$, vê-se imediatamente que

$$S_r = \sigma_r(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

onde $\sigma_r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ é o $r-$ésimo polinômio simétrico elementar nas n indeterminadas $X_1, \dots, X_n$.

É por vezes mais conveniente trabalhar com as **curvaturas médias de ordem superior** H_r de x, definidas para $0 \leq r \leq n$ por

$$H_r = \epsilon_N^r \frac{S_r}{\binom{n}{r}} = \frac{\sigma_r(\epsilon_N \lambda_1, \dots, \epsilon_N \lambda_n)}{\binom{n}{r}}. \tag{3.1}$$

Tais funções satisfazem desigualdades algébricas muito úteis, conjuntamente denominadas desigualdades de Newton. Uma prova das mesmas para números reais *positivos* pode ser encontrada em [18]. Apresentamos a seguir uma (prova diferente de uma) versão mais geral das mesmas, juntamente com uma condição suficiente para a ocorrência de igualdade.

Lema 3.1. *Se um polinômio $f \in \mathbb{R}[X]$ possui $k \geq 1$ raízes reais, então sua derivada f' possui ao menos $k-1$ raízes reais. Em particular, se todas as raízes de f forem reais então todas as raízes de f' também serão reais.*

Demonstração. Podemos supor $k > 1$. Sejam $x_1 < \cdots < x_l$ raízes reais de f, com multiplicidades respectivamente $m_1, \ldots, m_l$ tais que $m_1 + \cdots + m_l = k$. Então cada x_i é raiz de f' com multiplicidade $m_i - 1$. Por outro lado, entre x_i e x_{i+1} há, pelo teorema de Rôlle, ao menos uma outra raiz de f', de modo que contabilizamos ao menos

$$(m_1 - 1) + \cdots + (m_l - 1) + (l - 1) = k - 1$$

raízes reais para f'. O resto é imediato. □

Proposição 3.2. *Sejam $n > 1$ inteiro, e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ números reais. Defina, para $0 \leq r \leq n$, $S_r = S_r(\lambda_i)$ como acima, e $H_r = H_r(\lambda_i) = \binom{n}{r}^{-1} S_r(\lambda_i)$.*

(a) *Para $1 \leq r < n$, tem-se $H_r^2 \geq H_{r-1}H_{r+1}$. Ademais, se a igualdade ocorrer para $r = 1$ ou para algum $1 < r < n$, com $H_{r+1} \neq 0$ neste último caso, então $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$.*

(b) *Se $H_1, H_2, \ldots, H_r > 0$ para algum $1 < r \leq n$, então $H_1 \geq \sqrt{H_2} \geq \sqrt[3]{H_3} \geq \cdots \geq \sqrt[r]{H_r}$. Ademais, se a igualdade ocorrer para algum $1 \leq j < r$, então $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$.*

(c) *Se, para algum $1 \leq r < n$, tivermos $H_r = H_{r+1} = 0$, então $H_j = 0$ para todo $r \leq j \leq n$. Em particular, no máximo $r - 1$ dos λ_i serão não-nulos neste caso.*

Demonstração. Para provar (a) usemos indução sobre o número $n > 1$ de números reais. Para $n = 2$, $H_1^2 \geq H_2$ é equivalente a $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \geq 0$, com igualdade se e só se $\lambda_1 = \lambda_2$.

Suponha as desigualdades válidas para quaisquer $n-1$ números reais, com a igualdade ocorrendo para $H_{r+1} \neq 0$ se e só se os $n-1$ números forem todos iguais. Dados $n \geq 3$ reais $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, seja

$$f(x) = (x+\lambda_1)\ldots(x+\lambda_n) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} H_r(\lambda_i) x^{n-r}.$$

Então

$$f'(x) = \sum_{r=0}^{n-1} (n-r) \binom{n}{r} H_r(\lambda_i) x^{n-r-1}.$$

Por outro lado, pelo lema anterior, existem reais $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ tais que

$$\begin{aligned} f'(x) &= n(x+\gamma_1)\cdots(x+\gamma_{n-1}) = n\sum_{r=0}^{n-1} S_r(\gamma_i) x^{n-1-r} \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} n\binom{n-1}{r} H_r(\gamma_i) x^{n-1-r}. \end{aligned}$$

Desde que $(n-r)\binom{n}{r} = n\binom{n-1}{r}$, comparando coeficientes obtemos $H_r(\lambda_i) = H_r(\gamma_i)$ para $0 \leq r \leq n-1$. Portanto, segue da hipótese de indução que, para $1 \leq r \leq n-2$,

$$H_r^2(\lambda_i) = H_r^2(\gamma_i) \geq H_{r-1}(\gamma_i) H_{r+1}(\gamma_i) = H_{r-1}(\lambda_i) H_{r+1}(\lambda_i).$$

Ademais, se tivermos igualdade para os λ_i, com $H_{r+1}(\lambda_i) \neq 0$, então também teremos igualdade para os γ_i, com $H_{r+1}(\gamma_i) \neq 0$. Novamente pela hipótese de indução, segue que $\gamma_1 = \cdots = \gamma_{n-1}$, e daí $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$.

Para terminar, é suficiente provar que $H_{n-1}^2(\lambda_i) \geq H_{n-2}(\lambda_i) H_n(\lambda_i)$, com igualdade para $H_n \neq 0$ se e só se todos os λ_i forem iguais. Se algum $\lambda_i = 0$ a igualdade é óbvia. Senão, $H_n \neq 0$ e

$$\begin{aligned} H_{n-1}^2 \geq H_{n-2} H_n \quad &\Leftrightarrow \quad \left[\binom{n}{n-1}^{-1} \sum_i \frac{H_n}{\lambda_i}\right]^2 \geq \left[\binom{n}{n-2}^{-1} \sum_{i<j} \frac{H_n}{\lambda_i \lambda_j}\right] H_n. \\ &\Leftrightarrow \quad (n-1)\left(\sum_i \frac{1}{\lambda_i}\right)^2 \geq 2n \sum_{i<j} \frac{1}{\lambda_i \lambda_j}. \end{aligned}$$

Denotando $\alpha_i = 1/\lambda_i$, temos a última desigualdade acima equivalente a

$$(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2 \geq 2n \sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j.$$

Fazendo $T(\alpha_i) = (n-1)\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^2 - 2n\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j$, obtemos

$$\begin{aligned} T(\alpha_i) &= n\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^2 - 2n\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j \\ &= n\left[\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^2 - 2\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j\right] - \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^2 \\ &= n\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

pela desigualdade de Cauchy-Schwarz. É ainda óbvio que, nesse caso, a igualdade ocorre se e só se todos os α_i (e então todos os λ_i) forem iguais.

Note que o argumento acima também prova que $H_1^2 = H_2$ se e só se todos os λ_i forem iguais, posto que $T(\lambda_i) = n^2(n-1)[H_1^2(\lambda_i) - H_2(\lambda_i)]$.

Para o item (b), observe que $H_1 \geq H_2^{1/2}$ segue de (a). Por outro lado, se $H_1 \geq H_2^{1/2} \geq \cdots \geq H_k^{1/k}$ para algum $2 \leq k < r$, então

$$H_k^2 \geq H_{k-1}H_{k+1} \geq H_k^{\frac{k-1}{k}} H_{k+1},$$

ou ainda $H_k^{1/k} \geq H_{k+1}^{1/(k+1)}$. Segue agora imediatamente das desigualdades acima que, caso $H_k^{1/k} = H_{k+1}^{1/(k+1)}$ para algum $1 \leq k < r$, então $H_k^2 = H_{k-1}H_{k+1}$. Logo, o item (a) garante que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$.

Para provar (c) suponha, sem perda de generalidade, $r < n-1$. Como $H_r = H_{r+1} = 0$, temos igualdade na desigualdade de Newton

$$H_{r+1}^2 \geq H_r H_{r+2}.$$

Se $H_{r+2} \neq 0$, segue de (a) que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \lambda$. Daí, $H_r = 0 \Rightarrow \lambda = 0$, donde $H_{r+2} = 0$, uma contradição. Portanto, $H_{r+2} = 0$ e, analogamente, $H_j = 0$ para todo $r \leq j \leq n$. Para o que falta, basta notar que o polinômio $f(x)$ do item (a) é, nesse caso,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} S_j x^{n-j} = \sum_{j=0}^{r-1} S_j x^{n-j}.$$

□

Voltando às imersões isométricas, para $0 \leq r \leq n$ define-se o $r-$ésimo operador de Newton P_r sobre M pondo $P_0 = I$ (o operador identidade) e, para $1 \leq r \leq n$, pela recorrência

$$P_r = \epsilon_N^r S_r I - \epsilon_N A P_{r-1}.$$

Uma indução trivial mostra que

$$P_r = \epsilon_N^r (S_r I - S_{r-1} A + S_{r-2} A^2 - \cdots + (-1)^r A^r),$$

donde o teorema de Cayley-Hamilton nos dá $P_n = 0$. Ademais, desde que P_r é um polinômio em A para todo r, ele é também auto-adjunto e comuta com A. Então toda base que diagonaliza A em $p \in M$ também diagonaliza todos os P_r em p. Sendo $\{e_i\}$ uma tal base, com $Ae_i = \lambda_i e_i$, e denotando por A_i a restrição de A a $\langle e_i \rangle^\perp \subset T_pM$, é fácil ver que

$$\det(tI - A_i) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k S_k(A_i) t^{n-1-k},$$

onde

$$S_k(A_i) = \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n \\ j_1, \ldots, j_k \neq i}} \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_k}.$$

Com as notações acima, é ainda imediato checar que $P_r e_i = \epsilon_N^r S_r(A_i) e_i$, e também que

(a) $S_r(A_i) = S_r - \lambda_i S_{r-1}(A_i)$.

(b) $\operatorname{tr}(P_r) = \epsilon_N^r \sum_{i=1}^n S_r(A_i) = \epsilon_N^r (n-r) S_r$.

(c) $\operatorname{tr}(AP_r) = \epsilon_N^r \sum_{i=1}^n \lambda_i S_r(A_i) = \epsilon_N^r (r+1) S_{r+1}$.

(d) $\operatorname{tr}(A^2 P_r) = \epsilon_N^r \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 S_r(A_i) = \epsilon_N^r (S_1 S_{r+1} - (r+2) S_{r+2})$.

A proposição a seguir será bastante útil no próximo capítulo[1].

Proposição 3.3. *Em relação à imersão* $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$,

(a) *se* $S_r(p) = 0$, *então* P_{r-1} *é semi-definido em* p.

[1] Veja também a proposição 1.5 de [20].

(b) *se* $S_r(p) = 0$ *e* $S_{r+1}(p) \neq 0$, *então* P_{r-1} *é definido em* p.

Demonstração. O item (a) é o conteúdo do lemma 1.1 e da equação (1.3) subsequente em [19]. Para o item (b), omitindo p para simplificar a notação, basta provarmos que $S_{r-1}(A_i) \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Suponha que, para algum $1 \leq i \leq n$, tenhamos $S_{r-1}(A_i) = 0$. Então

$$S_r(A_i) = S_r - \lambda_i S_{r-1}(A_i) = 0,$$

e o item (c) da proposição 3.2 garante que $S_j(A_i) = 0$ para todo $r-1 \leq j \leq n$. Portanto, no máximo $r-2$ elementos do conjunto

$$\{\lambda_k; 1 \leq k \leq n, k \neq i\}$$

são não-nulos, e daí no máximo $r-1$ elementos do conjunto $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ são não-nulos. Em particular, $S_{r+1} = 0$, o que é uma contradição. □

Segue de nossa discussão sobre tensores na seção 2.1 que a segunda forma fundamental A de x, bem como todos os operadores de Newton P_r a ela associados, podem ser vistos como tensores simétricos de segunda ordem sobre M^n. Mais ainda, vimos que quando $\overline{M}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante, A é um tensor de Codazzi. Note que, para $1 \leq r < n$, não é em geral verdade que P_r seja de Codazzi.

Associado a cada P_r temos o operador diferencial linear de segunda ordem $L_r : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$, dado por

$$L_r(f) = \mathrm{tr}(P_r Hess f).$$

Em particular, $L_0(f) = \mathrm{tr}(Hess f) = \Delta f$. Quando $\overline{M}^{n+1}$ é um espaço Riemanniano de curvatura seccional constante, foi provado por H. Rosenberg em [27] que

$$L_r(f) = div(P_r \nabla f),$$

onde div denota a divergência de um campo vetorial sobre M^n. A demonstração desse fato, que usa a versão Riemanniana do lema 3.9 abaixo, também funciona quando $\overline{M}^{n+1}$ é de Lorentz (bastando usar a versão Lorentziana de tal lema).

Então, para $f, g \in \mathcal{D}(M)$, segue das propriedades da divergência de campos vetoriais que

$$L_r(fg) = fL_r(g) + gL_r(f) + 2\langle P_r \nabla f, \nabla g\rangle. \tag{3.2}$$

O lema a seguir é devido a R. Reilly (veja [25]). Por completeza e para estabelecer várias notações úteis no próximo capítulo, incluímos uma prova curta do mesmo aqui.

Lema 3.4. *Se (h_{ij}) denota a matriz de A com respeito a uma certa base $\beta = \{e_k\}$ de T_pM (não necessariamente ortogonal), então a matriz (h^r_{ij}) de P_r com respeito a essa mesma base é dada por*

$$h^r_{ij} = \frac{\epsilon^r_N}{r!} \sum_{i_k, j_k = 1}^{n} \epsilon^{j_1 \ldots j_r j}_{i_1 \ldots i_r i} h_{j_1 i_1} \ldots h_{j_r i_r}, \tag{3.3}$$

onde

$$\epsilon^{j_1 \ldots j_r}_{i_1 \ldots i_r} = \begin{cases} sgn(\sigma) & , \text{ se os } i_k \text{ forem dois a dois distintos e } \sigma = (j_k) \\ & \text{ formar uma permutação dos mesmos;} \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Lembre que $P_r = \epsilon^r_N \sum_{j=0}^n (-1)^j S_{r-j} A^j$, com os coeficientes S_{r-j} independendo da base escolhida em T_pM. Assim, basta verificar a fórmula acima para uma base β que diagonalize A, com $Ae_k = \lambda_k e_k$ para $1 \le k \le n$. O segundo membro de (3.3) é nesse caso sucessivamente igual a

$$\begin{aligned} & \frac{\epsilon^r_N}{r!} \sum_{i_k, j_k = 1}^{n} \epsilon^{j_1 \ldots j_r j}_{i_1 \ldots i_r i} \delta_{j_1 i_1} \ldots \delta_{j_r i_r} \lambda_{j_1} \ldots \lambda_{j_r} \\ = \; & \frac{\epsilon^r_N}{r!} \sum_{i_k \neq i} \epsilon^{i_1 \ldots i_r j}_{i_1 \ldots i_r i} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_r} = \epsilon^r_N \delta_{ij} \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_r \\ i_k \neq i}} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_r} \\ = \; & \delta_{ij} \epsilon^r_N S_r(A_i) = \langle P_r e_i, e_j \rangle = h^r_{ij}. \end{aligned}$$

□

Usamos o lema acima para calcular primeiras derivadas de h^r_{ij}:

Lema 3.5. *Seja $\{e_k\}$ um referencial móvel numa vizinhança de $p \in M$, diagonalizando a segunda forma fundamental A em p, com $Ae_k = \lambda_k e_k$ para $1 \le k \le n$. Então, para $1 \le i, j \le n$, $i \neq j$, tem-se em p*

$$e_k(h^r_{ii}) = \epsilon^r_N \sum_{l \neq i} S_{r-1}(A_{il}) h_{ll;k} \tag{3.4}$$

e

$$e_k(h^r_{ij}) = -\epsilon^r_N S_{r-1}(A_{ij}) h_{ij;k}, \tag{3.5}$$

onde A_{ij} denota a restrição de A a $\{e_i, e_j\}^\perp \subset T_pM$.

Demonstração. Esquecendo por um momento a restrição de ser $i \neq j$, segue da relação (3.3) que

$$
\begin{aligned}
e_k(h^r_{ij}) &= \frac{\epsilon^r_N}{r!}\sum_{i_k,j_k=1}^{n} \epsilon^{j_1\dots j_r j}_{i_1\dots i_r i} h_{j_1 i_1;k} h_{j_2 i_2}\dots h_{j_r i_r} + \cdots \\
&\quad + \frac{\epsilon^r_N}{r!}\sum_{i_k,j_k=1}^{n} \epsilon^{j_1\dots j_r j}_{i_1\dots i_r i} h_{j_1 i_1}\dots h_{j_{r-1} i_{r-1}} h_{j_r i_r;k}. \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

Em p, a primeira soma do segundo membro de (3.6) é igual a

$$
\begin{aligned}
&\frac{\epsilon^r_N}{r!}\sum_{i_k,j_k=1}^{n} \epsilon^{j_1\dots j_r j}_{i_1\dots i_r i} \delta_{i_2 j_2}\dots\delta_{i_r j_r} h_{j_1 i_1;k}\lambda_{i_2}\dots\lambda_{i_r} \\
&= \frac{\epsilon^r_N}{r!}\sum_{i_k,j_1=1}^{n} \epsilon^{j_1 i_2\dots i_r j}_{i_1 i_2\dots i_r i} h_{j_1 i_1;k}\lambda_{i_2}\dots\lambda_{i_r}. \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

Consideremos agora dois casos separadamente: para $i = j$,

$$
\begin{aligned}
(3.7) &= \frac{\epsilon^r_N}{r!}\sum_{i_k,j_1=1}^{n} \epsilon^{j_1 i_2\dots i_r i}_{i_1 i_2\dots i_r i} h_{j_1 i_1;k}\lambda_{i_2}\dots\lambda_{i_r} = \frac{\epsilon^r_N}{r!}\sum_{1\le i_k\le n} \epsilon^{i_1 i_2\dots i_r i}_{i_1 i_2\dots i_r i} h_{i_1 i_1;k}\lambda_{i_2}\dots\lambda_{i_r} \\
&= \frac{\epsilon^r_N}{r}\sum_{l\neq i}\sum_{\substack{i_2<\cdots<i_r \\ i_k\neq i,l}} h_{ll;k}\lambda_{i_2}\dots\lambda_{i_r} = \frac{\epsilon^r_N}{r}\sum_{l\neq i} S_{r-1}(A_{il}) h_{ll;k}.
\end{aligned}
$$

Desde que o mesmo é válido para todas as demais parcelas, temos que

$$
e_k(h^r_{ii}) = \epsilon^r_N \sum_{l\neq i} S_{r-1}(A_{il}) h_{ll;k}.
$$

Para $i \neq j$, segue da definição de $\epsilon^{j_1 i_2\dots i_r j}_{i_1 i_2\dots i_r i}$ que

$$
\begin{aligned}
(3.7) &= \frac{\epsilon^r_N}{r!}\sum_{i_k,j_k=1}^{n} \epsilon^{j_1 i_2\dots i_r j}_{i_1 i_2\dots i_r i} h_{j_1 i_1;k}\lambda_{i_2}\dots\lambda_{i_r} = \frac{\epsilon^r_N}{r!}\sum_{i_k\neq i,j} \epsilon^{i i_2\dots i_r j}_{j i_2\dots i_r i} h_{ij;k}\lambda_{i_2}\dots\lambda_{i_r} \\
&= -\frac{\epsilon^r_N}{r}\sum_{\substack{i_k\neq i,j \\ i_2<\dots<i_r}} h_{ij;k}\lambda_{i_2}\dots\lambda_{i_r} = -\frac{\epsilon^r_N}{r} S_{r-1}(A_{ij}) h_{ij;k},
\end{aligned}
$$

e então de (3.6) que

$$
e_k(h^r_{ij}) = -\epsilon^r_N S_{r-1}(A_{ij}) h_{ij;k}.
$$

□

3.2 A fórmula para $L_r(S_r)$.

Em um artigo seminal ([28]), J. Simons calculou o Laplaciano da segunda forma fundamental de imersões isométricas em esferas, aplicando o resultado obtido na derivação de certas desigualdades integrais satisfeitas pela norma ao quadrado da segunda forma fundamental de imersões mínimas.

A abordagem de Simons tem sido seguida nos últimos trinta anos por vários autores ([2], [3], [4] e [12], por exemplo), de maneira a investigar propriedades de rigidez de hipersuperfícies isometricamente imersas em espaços Riemannianos de curvatura seccional constante.

Em [2], e essa foi a motivação original de nosso trabalho, os autores obtiveram uma fórmula para $L_1(S_1)$ para uma hipersuperfície orientada $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$, de um ambiente Riemanniano $\overline{M}^{n+1}$ de curvatura seccional constante e igual a c, sob a hipótese adicional de que M^n tivesse curvatura escalar identicamente c.

Na próxima seção, calculamos $L_r(S_r)$ para imersões isométricas de variedades Riemannianas M^n como hipersuperfícies de ambientes Riemannianos ou Lorentzianos $\overline{M}^{n+1}$, de curvatura seccional constante, sem restrições adicionais. A fórmula obtida será aplicada no capítulo 4 para estudar como o comportamento de funções-curvatura de ordem superior influencia a geometria de M^n.

No que segue, $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ denota uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana $n-$dimensional M em uma variedade Riemanniana orientada ou uma variedade Lorentziana temporalmente-orientada $\overline{M}$. Em ambos os casos, o espaço ambiente $\overline{M}$ é suposto $(n+1)-$dimensional, de curvatura seccional constante c. Ademais, no caso Riemanniano sempre assumiremos M orientável (já sabemos ser tal hipótese desnecessária no caso de ambiente Lorentziano temporalmente orientado). Em qualquer caso, M é orientada pela escolha de um campo vetorial normal unitário N, globalmente definido sobre ela, e A denota a segunda forma fundamental correspondente.

Proposição 3.6. *Seja $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica como acima, e $0 \leq q < n$, $0 < r \leq n$. Se $\{e_k\}$ for um referencial ortonormal* *qualquer em M^n, então*

$$\begin{aligned} L_q(S_r) &= \epsilon_N^{r+q-1} L_{r-1}(S_{q+1}) \\ &+\epsilon_N^{r-1}\sum_k \mathrm{tr}\left\{[P_q(\nabla_{e_k}P_{r-1}) - P_{r-1}(\nabla_{e_k}P_q)](\nabla_{e_k}A)\right\} \\ &+\epsilon_N^{r-1}c[\mathrm{tr}(AP_{r-1})\mathrm{tr}(P_q) - \mathrm{tr}(P_{r-1})\mathrm{tr}(AP_q)] \\ &+\epsilon_N^{r}\mathrm{tr}(A^2P_{r-1})\mathrm{tr}(AP_q) - \epsilon_N^{r}\mathrm{tr}(AP_{r-1})\mathrm{tr}(A^2P_q). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Corolário 3.7. *Seja $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica como acima, e $0 < r < n$. Então*

$$\begin{aligned} L_r(S_r) &= \epsilon_N L_{r-1}(S_{r+1}) + S_r[\epsilon_N^r \Delta S_r - \epsilon_N L_{r-1}(S_1)] \\ &+\epsilon_N^r\left\{\sum_k |P_{r-1}\nabla_{e_k}A|^2 - |\nabla S_r|^2\right\} \\ &+\mathrm{tr}(AP_{r-1})\{S_r(|A|^2 - \epsilon_N cn) - \epsilon_N^r[\mathrm{tr}(A^2P_r) - \epsilon_N c\mathrm{tr}(P_r)]\} \\ &-\epsilon_N^{r-1}\mathrm{tr}(A^2P_{r-1})[\mathrm{tr}(A^2P_{r-1}) - \epsilon_N c\mathrm{tr}(P_{r-1})], \end{aligned} \tag{3.9}$$

onde $\{e_k\}$ é um referencial ortonormal qualquer em M^n, ou ainda

$$\begin{aligned} L_r(S_r) &= \epsilon_N L_{r-1}(S_{r+1}) + S_r[\epsilon_N^r \Delta S_r - \epsilon_N L_{r-1}(S_1)] \\ &+\epsilon_N^r\left\{\sum_k |P_{r-1}\nabla_{e_k}A|^2 - |\nabla S_r|^2\right\} \\ &+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\epsilon_N^r S_{r-1}(A_i)S_{r-1}(A_j)(\lambda_i - \lambda_j)^2 K_M(\sigma_{ij}), \end{aligned} \tag{3.10}$$

em $p \in M^n$, onde $\{e_k\}$ é um referencial ortonormal em M^n, diagonalizando A em p, com $Ae_k = \lambda_k e_k$ em p, e $K_M(\sigma_{ij})$ denota a curvatura seccional de M^n segundo o subespaço 2−dimensional σ_{ij} de T_pM gerado por e_i e e_j.

Corolário 3.8. *Seja $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica como acima. Então*

$$\begin{aligned} L_1(S_1) &= \epsilon_N \Delta S_2 + \epsilon_N\left\{|\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2\right\} + \epsilon_N\mathrm{tr}(AP_1)(|A|^2 - \epsilon_N cn) \\ &-\epsilon_N S_1[\mathrm{tr}(A^2P_1) - \epsilon_N c\mathrm{tr}(P_1)], \end{aligned} \tag{3.11}$$

onde $\{e_k\}$ é um referencial ortonormal qualquer em M^n, ou ainda

$$L_1(S_1) = \epsilon_N \Delta S_2 + \epsilon_N\left\{|\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2\right\} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\epsilon_N(\lambda_i - \lambda_j)^2 K_M(\sigma_{ij}), \tag{3.12}$$

em p, onde $\{e_k\}$ é um referencial ortonormal em M^n, diagonalizando A em p, com $Ae_k = \lambda_k e_k$ em p, e $K_M(\sigma_{ij})$ denota a curvatura seccional de M^n segundo o subespaço $2-$dimensional σ_{ij} de T_pM gerado por e_i e e_j.

$$\begin{aligned} L_2(S_2) &= \epsilon_N L_1(S_3) - S_2\left\{|\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2\right\} + \sum_k |P_1\nabla_{e_k}A|^2 - |\nabla S_2|^2 \\ &\quad + \mathrm{tr}(AP_2)[\mathrm{tr}(A^2P_1) - \epsilon_N c\,\mathrm{tr}(P_1)] - \mathrm{tr}(AP_1)[\mathrm{tr}(A^2P_2) - \epsilon_N c\,\mathrm{tr}(P_2)], \end{aligned} \tag{3.13}$$

onde $\{e_k\}$ é um referencial ortonormal qualquer em M^n.

3.3 Prova da proposição 3.6

Primeiramente, observe que a validez da fórmula (3.8) independe do referencial particular escolhido $\{e_k\}$.

Seja então $p \in M$ e $\{e_k\}$ um referencial móvel em uma vizinhança $U \subset M$ de p, diagonalizando A em p, com $Ae_k = \lambda_k e_k$ para $1 \leq k \leq n$. Denotemos respectivamente por h_{ij} e h^r_{ij} as componentes de A e P_r em relação a tal referencial, isto é, $h_{ij} = \langle Ae_i, e_j\rangle$ e $h^r_{ij} = \langle P_r e_i, e_j\rangle$.

A fórmula (3.3) nos dá

$$\begin{aligned} h^r_{ii} &= \frac{\epsilon^r_N}{r!}\sum_{i_k,j_k=1}^{n} \epsilon^{j_1\ldots j_r i}_{i_1\ldots i_r i} h_{j_1 i_1}\ldots h_{j_r i_r} \\ &= \frac{\epsilon^r_N}{r!}\sum_{i_k\neq i,\,\sigma=(j_k)} sgn(\sigma) h_{j_1 i_1}\ldots h_{j_r i_r} \\ &= \epsilon^r_N \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_r \\ i_k\neq i}} \sum_{\sigma=(j_k)} sgn(\sigma) h_{j_1 i_1}\ldots h_{j_r i_r} \\ &= \epsilon^r_N \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_r \\ i_k\neq i}} A(c_{i_1},\ldots,c_{i_r}), \end{aligned} \tag{3.14}$$

onde $A(c_{i_1},\ldots,c_{i_r})$ denota o determinante do menor $r\times r$ de A, obtido escolhendo as linhas e colunas de A de índices $i_1 < \cdots < i_r$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
S_r &= \frac{\epsilon_N^r}{n-r}\operatorname{tr}(P_r) = \frac{1}{n-r}\sum_i \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_r\\ i_k\neq i}} A(c_{i_1},\ldots,c_{i_r})\\
&= \sum_{i_1<\cdots<i_r} A(c_{i_1},\ldots,c_{i_r}), \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

a última igualdade vindo do fato de que, uma vez escolhidos índices $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$, restarão $n-r$ possibilidades para i em $\{1,\ldots,n\}$. Desde que determinantes são funções multilineares de suas colunas, obtemos

$$
e_k(S_r) = \sum_{i_1<\cdots<i_r} [A(c_{i_1;k}, c_{i_2},\ldots,c_{i_r}) + \cdots + A(c_{i_1},\ldots,c_{i_{r-1}}, c_{i_r;k})] \qquad (3.16)
$$

em U. Em p, tem-se

$$
A(c_{i_1;k}, c_{i_2},\ldots,c_{i_r}) = \begin{vmatrix} h_{i_1i_1;k} & 0 & \cdots & 0\\ h_{i_2i_1;k} & \lambda_{i_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ h_{i_ri_1;k} & 0 & \cdots & \lambda_{i_r}\end{vmatrix} = h_{i_1i_1;k}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_r},
$$

e analogamente para as demais parcelas, de modo que

$$
\begin{aligned}
e_k(S_r) &= \sum_{i_1<\cdots<i_r} (h_{i_1i_1;k}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_r} + \cdots + \lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_{r-1}}h_{i_ri_r;k})\\
&= \sum_{i=1}^{n} h_{ii;k}S_{r-1}(A_i). \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

A última igualdade segue de que, para $1 \leq i \leq n$ fixado, $h_{ii;k}$ aparecerá na soma acima juntamente com todos os produtos $\lambda_{j_1}\cdots\lambda_{j_{r-1}}$, com $j_1,\ldots,j_{r-1} \neq i$ (note que a fórmula acima para $e_k(S_r)$ poderia ter sido obtida usando (3.4). Escolhemos essa abordagem para, no que segue, calcular mais facilmente segundas derivadas).

Como subproduto dos cálculos acima, temos o seguinte

Lema 3.9. *Seja $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica como descrito na seção 3.2, e $V \in \mathcal{X}(M)$. Então*

$$
\operatorname{tr}(P_{r-1}(\nabla_V A)) = \epsilon_N^{r-1}V(S_r). \qquad (3.18)
$$

Demonstração. Seja $p \in M$ e $\{e_k\}$ um referencial móvel numa vizinhança de $p \in M$, geodésico em p e tal que, em p, $Ae_k = \lambda_k e_k$ para $1 \leq k \leq n$. Como ambos os membros de (3.18) são lineares em V, é suficiente provarmos que $\mathrm{tr}(P_{r-1}(\nabla_{e_k}A)) = \epsilon_N^{r-1} e_k(S_r)$. Mas

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(P_{r-1}(\nabla_{e_k}A)) &= \sum_{i=1}^{n} \langle P_{r-1}(\nabla_{e_k}A)e_i, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \epsilon_N^{r-1} S_{r-1}(A_i)\langle(\nabla_{e_k}A)e_i, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \epsilon_N^{r-1} S_{r-1}(A_i) h_{iik}.
\end{aligned}$$

Desde que o referencial é geodésico em p, temos $h_{iik} = h_{ii;k}$ em p, e a equação (3.17) dá o resultado desejado. □

Para calcular segundas derivadas, suponha ademais que $\{e_k\}$ é geodésico em p. Segue de (3.16) que

$$\begin{aligned}
e_k(e_k(S_r)) &= \sum_{i_1<\cdots<i_r} [A(c_{i_1;kk}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_r}) + \cdots + A(c_{i_1}, \ldots, c_{i_{r-1}}, c_{i_r;kk})] \\
&+ \sum_{s\neq t} \sum_{i_1<\cdots<i_r} A(c_{i_1}, \ldots, c_{i_s;k}, \ldots, c_{i_t;k}, \ldots, c_{i_r}),
\end{aligned}$$

e obtemos em p

$$\begin{aligned}
e_k(e_k(S_r)) &= \sum_{i_1<\cdots<i_r} (h_{i_1i_1;kk}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_r} + \cdots + \lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_{r-1}}h_{i_ri_r;kk}) \\
&+ \sum_{s\neq t} \sum_{i_1<\cdots<i_r} (h_{i_si_s;k}h_{i_ti_t;k} - h_{i_si_t;k}h_{i_ti_s;k})\lambda_{i_1}\ldots\widehat{\lambda}_{i_s}\ldots\widehat{\lambda}_{i_t}\ldots\lambda_{i_r}.
\end{aligned}$$

Agrupando ocorrências iguais de $(r-2)-$uplas $i_1 < \cdots < i_{r-2}$ na última expressão acima, segue que $e_k(e_k(S_r))$ é igual a

$$\sum_i \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_{r-1}\\ i_k\neq i}} h_{ii;kk}\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_{r-1}} + \sum_{i\neq j} \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_{r-2}\\ i_k\neq i,j}} [h_{ii;k}h_{jj;k} - h_{ij;k}^2]\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_{r-2}},$$

e finalmente a

$$e_k(e_k(S_r)) = \sum_i S_{r-1}(A_i)h_{ii;kk} + \sum_{i\neq j} S_{r-2}(A_{ij})[h_{ii;k}h_{jj;k} - h_{ij;k}^2].$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
L_q(S_r) &= \operatorname{tr}(P_q Hess(S_r)) = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_N^q S_q(A_k)e_k(e_k(S_r)) \\
&= \sum_{i,k} \epsilon_N^q S_q(A_k)S_{r-1}(A_i)h_{ii;kk} \\
&\quad + \sum_{\substack{i,j,k \\ i\neq j}} \epsilon_N^q S_q(A_k)S_{r-2}(A_{ij})[h_{ii;k}h_{jj;k} - h_{ij;k}^2] \\
&= \sum_i S_{r-1}(A_i)L_q(h_{ii}) + \sum_{\substack{i,j,k \\ i\neq j}} \epsilon_N^q S_q(A_k)S_{r-2}(A_{ij})h_{ii;k}h_{jj;k} \\
&\quad - \sum_{\substack{i,j,k \\ i\neq j}} \epsilon_N^q S_q(A_k)S_{r-2}(A_{ij})h_{ij;k}^2. \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

As observações sobre comutação de índices em referenciais geodésicos, feitas após a prova do lema 2.1, nos permitem concluir que, em p,

$$\begin{aligned}
& \sum_i S_{r-1}(A_i)L_q(h_{ii}) \\
&= \sum_{i,k} \epsilon_N^q S_{r-1}(A_i)S_q(A_k)h_{iikk} = \sum_{i,k} \epsilon_N^q S_{r-1}(A_i)S_q(A_k)h_{ikik} \\
&= \sum_{i,k} \epsilon_N^q S_{r-1}(A_i)S_q(A_k)(h_{ikik} - h_{ikki} + h_{ikki} - h_{kkii} + h_{kkii}) \\
&= \sum_{i,k} \epsilon_N^q S_{r-1}(A_i)S_q(A_k)(h_{ikik} - h_{ikki}) + \sum_{i,k} \epsilon_N^q S_{r-1}(A_i)S_q(A_k)h_{kkii}
\end{aligned}$$

Portanto, segue do lema acima referido que

$$
\begin{aligned}
&\sum_i S_{r-1}(A_i)L_q(h_{ii}) \\
= \; & -\sum_{i,j,k} \epsilon_N^q S_{r-1}(A_i)S_q(A_k)(h_{jk}R_{ijik} + h_{ij}R_{jkki}) \\
& + \sum_{i,k} \epsilon_N^q S_{r-1}(A_i)S_q(A_k)h_{kkii} \\
= \; & -\sum_{i,k} \epsilon_N^q S_{r-1}(A_i)S_q(A_k)\lambda_k R_{ikik} - \sum_{i,k} \epsilon_N^q S_{r-1}(A_i)S_q(A_k)\lambda_i R_{ikki} \\
& + \sum_k \epsilon_N^{q+r-1} S_q(A_k)L_{r-1}(h_{kk}). \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

Agora, escreva $r-1$ no lugar de q e $q+1$ no lugar de r na relação (3.19) para obter

$$
\begin{aligned}
L_{r-1}(S_{q+1}) \; = \; & \sum_i S_q(A_i)L_{r-1}(h_{ii}) \\
& + \sum_{\substack{i,j,k \\ i\neq j}} \epsilon_N^{r-1} S_{r-1}(A_k)S_{q-1}(A_{ij})h_{ii;k}h_{jj;k} \\
& - \sum_{\substack{i,j,k \\ i\neq j}} \epsilon_N^{r-1} S_{r-1}(A_k)S_{q-1}(A_{ij})h_{ij;k}^2. \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

Substituindo o resultado de (3.20) em (3.21) chegamos em

$$
\begin{aligned}
L_{r-1}(S_{q+1}) \; = \; & \sum_{i,k} \epsilon_N^{r+q-1} S_{r-1}(A_i)L_q(h_{ii}) \\
& + \sum_{i,k} \epsilon_N^{r-1} S_{r-1}(A_i)S_q(A_k)\lambda_k R_{ikik} \\
& + \sum_{i,k} \epsilon_N^{r-1} S_{r-1}(A_i)S_q(A_k)\lambda_i R_{ikki} \\
& + \sum_{\substack{i,j,k \\ i\neq j}} \epsilon_N^{r-1} S_{r-1}(A_k)S_{q-1}(A_{ij})h_{ii;k}h_{jj;k} \\
& - \sum_{\substack{i,j,k \\ i\neq j}} \epsilon_N^{r-1} S_{r-1}(A_k)S_{q-1}(A_{ij})h_{ij;k}^2. \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

Finalmente, subtraindo (3.22) de (3.19), obtém-se

$$\begin{aligned}
L_q(S_r) &= \epsilon_N^{r+q-1} L_{r-1}(S_{q+1}) \\
&\quad - \sum_{i,k} \epsilon_N^q S_{r-1}(A_i) S_q(A_k) \lambda_k R_{ikik} - \sum_{i,k} \epsilon_N^q S_{r-1}(A_i) S_q(A_k) \lambda_i R_{ikki} \\
&\quad + \sum_{\substack{i,j,k \\ i\neq j}} \epsilon_N^q S_q(A_k) S_{r-2}(A_{ij}) h_{ii;k} h_{jj;k} - \sum_{\substack{i,j,k \\ i\neq j}} \epsilon_N^q S_q(A_k) S_{r-2}(A_{ij}) h_{ij;k}^2 \\
&\quad - \sum_{\substack{i,j,k \\ i\neq j}} \epsilon_N^q S_{r-1}(A_k) S_{q-1}(A_{ij}) h_{ii;k} h_{jj;k} \\
&\quad + \sum_{\substack{i,j,k \\ i\neq j}} \epsilon_N^q S_{r-1}(A_k) S_{q-1}(A_{ij}) h_{ij;k}^2. \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Para melhor examinar as parcelas no segundo membro de (3.23), sejam

$$I = \sum_{i,k} \epsilon_N^q S_{r-1}(A_i) S_q(A_k) \lambda_k R_{ikik}, \quad II = \sum_{i,k} \epsilon_N^q S_{r-1}(A_i) S_q(A_k) \lambda_i R_{ikki}.$$

Usando a equação de Gauss, temos

$$\begin{aligned}
I &= \epsilon_N^{r-1} \sum_{i,k} \langle R(P_{r-1}e_i, P_q e_k)e_i, Ae_k\rangle \\
&= \epsilon_N^{r-1} c \sum_{i,k} [\langle P_{r-1}e_i, e_i\rangle \langle P_q e_k, Ae_k\rangle - \langle P_{r-1}e_i, Ae_k\rangle \langle P_q e_k, e_i\rangle] \\
&\quad + \epsilon_N^r \sum_{i,k} [\langle AP_{r-1}e_i, e_i\rangle \langle AP_q e_k, Ae_k\rangle - \langle AP_{r-1}e_i, Ae_k\rangle \langle AP_q e_k, e_i\rangle] \\
&= \epsilon_N^{r-1} c \left[\mathrm{tr}(P_{r-1}) \mathrm{tr}(AP_q) - \sum_k \langle AP_{r-1}e_k, P_q e_k\rangle \right] \\
&\quad + \epsilon_N^r \mathrm{tr}(AP_{r-1}) \mathrm{tr}(A^2 P_q) - \epsilon_N^r \sum_k \langle A^2 P_{r-1} e_k, AP_q e_k\rangle \\
&= \epsilon_N^{r-1} c[\mathrm{tr}(P_{r-1}) \mathrm{tr}(AP_q) - \mathrm{tr}(AP_{r-1}P_q)] \\
&\quad + \epsilon_N^r \mathrm{tr}(AP_{r-1}) \mathrm{tr}(A^2 P_q) - \epsilon_N^r \mathrm{tr}(A^3 P_{r-1} P_q)
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
II &= \epsilon_N^{r-1}\sum_{i,k}\langle R(Ae_i,P_qe_k)e_k,P_{r-1}e_i\rangle \\
&= \epsilon_N^{r-1}c\sum_{i,k}[\langle Ae_i,e_k\rangle\langle P_qe_k,P_{r-1}e_i\rangle - \langle Ae_i,P_{r-1}e_i\rangle\langle P_qe_k,e_k\rangle] \\
&\quad +\epsilon_N^{r}\sum_{i,k}[\langle A^2e_i,e_k\rangle\langle AP_qe_k,P_{r-1}e_i\rangle - \langle A^2e_i,P_{r-1}e_i\rangle\langle AP_qe_k,e_k\rangle] \\
&= \epsilon_N^{r-1}c\left[\sum_{k}\langle Ae_k,P_{r-1}P_qe_k\rangle - \mathrm{tr}(AP_{r-1})\mathrm{tr}(P_q)\right] \\
&\quad +\epsilon_N^{r}\sum_{k}\langle A^2e_k,AP_{r-1}P_qe_k\rangle - \epsilon_N^{r}\mathrm{tr}(A^2P_{r-1})\mathrm{tr}(AP_q) \\
&= \epsilon_N^{r-1}c[\mathrm{tr}(AP_{r-1}P_q) - \mathrm{tr}(AP_{r-1})\mathrm{tr}(P_q)] \\
&\quad +\epsilon_N^{r}\mathrm{tr}(A^3P_{r-1}P_q) - \epsilon_N^{r}\mathrm{tr}(A^2P_{r-1})\mathrm{tr}(AP_q),
\end{aligned}
$$

e daí

$$
\begin{aligned}
I+II &= \epsilon_N^{r-1}c[\mathrm{tr}(P_{r-1})\mathrm{tr}(AP_q) - \mathrm{tr}(AP_{r-1})\mathrm{tr}(P_q)] \\
&\quad +\epsilon_N^{r}\mathrm{tr}(AP_{r-1})\mathrm{tr}(A^2P_q) - \epsilon_N^{r}\mathrm{tr}(A^2P_{r-1})\mathrm{tr}(AP_q). \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

Segue agora do lema 3.5 que, em p,

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}} S_q(A_k)S_{r-2}(A_{ij})h_{ii;k}h_{jj;k} &= \sum_{i,k} S_q(A_k)h_{ii;k}\sum_{j\neq i} S_{r-2}(A_{ij})h_{jj;k} \\
&= \epsilon_N^{r-1}\sum_{i,k} S_q(A_k)h_{ii;k}e_k(h_{ii}^{r-1})
\end{aligned}
$$

e

$$
-\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}} S_q(A_k)S_{r-2}(A_{ij})h_{ij;k}^2 = \epsilon_N^{r-1}\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}} S_q(A_k)h_{ij;k}e_k(h_{ij}^{r-1}).
$$

Adicionando membro a membro essas duas relações, obtemos

$$
\begin{aligned}
\epsilon_N^{r-1}\sum_{i,j,k} S_q(A_k)e_k(h_{ij}^{r-1})h_{ij;k} &= \epsilon_N^{r-1+q}\sum_{i,j,k} P_q e_k(\langle P_{r-1}e_i,e_j\rangle)e_k(\langle Ae_i,e_j\rangle)\\
&= \epsilon_N^{r+q-1}\sum_{i,j,k}\langle\nabla_{P_qe_k}P_{r-1}e_i,e_j\rangle\langle\nabla_{e_k}Ae_i,e_j\rangle\\
&= \epsilon_N^{r-1+q}\sum_{i,j,k}\langle(\nabla_{P_qe_k}P_{r-1})\,e_i,e_j\rangle\langle(\nabla_{e_k}A)\,e_i,e_j\rangle\\
&= \epsilon_N^{r+q-1}\sum_{k}\mathrm{tr}[P_q(\nabla_{e_k}P_{r-1})(\nabla_{e_k}A)]. \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

Novamente pelo lema 3.5, tem-se em p

$$
\begin{aligned}
-\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}} S_{r-1}(A_k)S_{q-1}(A_{ij})h_{ii;k}h_{jj;k} &= -\sum_{i,k} S_{r-1}(A_k)h_{ii;k}\sum_{j\neq i}S_{q-1}(A_{ij})h_{jj;k}\\
&= -\epsilon_N^q\sum_{i,k}S_{r-1}(A_k)h_{ii;k}e_k(h_{ii}^q)
\end{aligned}
$$

e

$$
\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}} S_{r-1}(A_k)S_{q-1}(A_{ij})h_{ij;k}^2 = -\epsilon_N^q\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}} S_{r-1}(A_k)h_{ij;k}e_k(h_{ij}^q).
$$

Tais relações, por sua vez, adicionadas membro a membro nos dão

$$
-\epsilon_N^q\sum_{i,j,k}S_{r-1}(A_k)e_k(h_{ij}^q)h_{ij;k} = -\epsilon_N^{r+q-1}\sum_k \mathrm{tr}[P_{r-1}(\nabla_{e_k}P_q)(\nabla_{e_k}A)]. \qquad (3.26)
$$

É suficiente agora substituir (3.24), (3.25) e (3.26) em (3.23) para obter a fórmula da proposição 3.6.

3.4 Prova dos corolários 3.7 e 3.8

Segue da proposição 3.6 que

$$
\begin{aligned}
L_r(S_r) &= \epsilon_N L_{r-1}(S_{r+1})\\
&\quad+\epsilon_N^{r-1}\sum_k \mathrm{tr}\left\{[P_r(\nabla_{e_k}P_{r-1}) - P_{r-1}(\nabla_{e_k}P_r)](\nabla_{e_k}A)\right\}\\
&\quad+\epsilon_N^{r-1}c[\mathrm{tr}(AP_{r-1})\mathrm{tr}(P_r) - \mathrm{tr}(P_{r-1})\mathrm{tr}(AP_r)]\\
&\quad+\epsilon_N^r\mathrm{tr}(A^2P_{r-1})\mathrm{tr}(AP_r) - \epsilon_N^r\mathrm{tr}(AP_{r-1})\mathrm{tr}(A^2P_r), \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

onde $\{e_k\}$ é qualquer referencial ortonormal em M. Fazendo

$$T_k = [P_r(\nabla_{e_k} P_{r-1}) - P_{r-1}(\nabla_{e_k} P_r)](\nabla_{e_k} A),$$

obtemos T_k respectivamente igual a

$$\begin{aligned}
& [(\epsilon_N^r S_r I - \epsilon_N A P_{r-1})(\nabla_{e_k} P_{r-1}) - P_{r-1}(\nabla_{e_k}(\epsilon_N^r S_r I - \epsilon_N A P_{r-1})](\nabla_{e_k} A) \\
= \; & \epsilon_N^r S_r (\nabla_{e_k} P_{r-1})(\nabla_{e_k} A) - \epsilon_N A P_{r-1}(\nabla_{e_k} P_{r-1})(\nabla_{e_k} A) \\
& - P_{r-1}[\epsilon_N^r e_k(S_r) I - \epsilon_N (\nabla_{e_k} A) P_{r-1} - \epsilon_N A(\nabla_{e_k} P_{r-1})](\nabla_{e_k} A) \\
= \; & \epsilon_N^r S_r (\nabla_{e_k} P_{r-1})(\nabla_{e_k} A) - \epsilon_N^r e_k(S_r) P_{r-1}(\nabla_{e_k} A) + \epsilon_N (P_{r-1} \nabla_{e_k} A)^2,
\end{aligned}$$

e daí

$$\begin{aligned}
\epsilon_N^{r-1} \sum_k \operatorname{tr}(T_k) \; = \; & \epsilon_N S_r \sum_k \operatorname{tr}[(\nabla_{e_k} P_{r-1})(\nabla_{e_k} A)] \\
& - \epsilon_N \sum_k \operatorname{tr}[e_k(S_r) P_{r-1}(\nabla_{e_k} A)] \\
& + \epsilon_N^r \sum_k |P_{r-1} \nabla_{e_k} A|^2. \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

Agora, o lema 3.9 nos dá

$$\sum_k \operatorname{tr}[e_k(S_r) P_{r-1}(\nabla_{e_k} A)] = \operatorname{tr}[P_{r-1}(\nabla_{\nabla S_r} A)] = \epsilon_N^{r-1} |\nabla S_r|^2. \qquad (3.29)$$

Por outro lado, substituindo $q = 0$ na fórmula da proposição 3.6 obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta S_r \; = \; & \epsilon_N^{r-1} L_{r-1}(S_1) + \epsilon_N^{r-1} \sum_k \operatorname{tr}\{(\nabla_{e_k} P_{r-1})(\nabla_{e_k} A)\} \\
= \; & + \epsilon_N^{r-1} c[\operatorname{tr}(A P_{r-1}) n - \operatorname{tr}(P_{r-1}) S_1] \\
& + \epsilon_N^r \operatorname{tr}(A^2 P_{r-1}) S_1 - \epsilon_N^r \operatorname{tr}(A P_{r-1}) |A|^2,
\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
& \sum_k \operatorname{tr}\{(\nabla_{e_k} P_{r-1})(\nabla_{e_k} A)\} = \\
= \; & \epsilon_N^{r-1} \Delta S_r - L_{r-1}(S_1) - c[\operatorname{tr}(A P_{r-1}) n - \operatorname{tr}(P_{r-1}) S_1] \\
& - \epsilon_N \operatorname{tr}(A^2 P_{r-1}) S_1 + \epsilon_N \operatorname{tr}(A P_{r-1}) |A|^2, \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

Substituindo (3.29) e (3.30) em (3.28), e então em (3.27), nós finalmente chegamos a

$$\begin{aligned}
L_r(S_r) &= \epsilon_N L_{r-1}(S_{r+1}) + S_r[\epsilon_N^r \Delta S_r - \epsilon_N L_{r-1}(S_1)] \\
&+\epsilon_N^r \left\{ \sum_k |P_{r-1}\nabla_{e_k} A|^2 - |\nabla S_r|^2 \right\} \\
&-\epsilon_N c S_r[\mathrm{tr}(AP_{r-1})n - \mathrm{tr}(P_{r-1})S_1] \\
&-S_r \mathrm{tr}(A^2 P_{r-1}) S_1 + S_r \mathrm{tr}(AP_{r-1})|A|^2 \\
&+\epsilon_N^{r-1} c[\mathrm{tr}(AP_{r-1})\mathrm{tr}(P_r) - \mathrm{tr}(P_{r-1})\mathrm{tr}(AP_r)] \\
&+\epsilon_N^r \mathrm{tr}(A^2 P_{r-1})\mathrm{tr}(AP_r) - \epsilon_N^r \mathrm{tr}(AP_{r-1})\mathrm{tr}(A^2 P_r), \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

após o que um fácil reagrupamento de termos nos dá (3.9). Para obter (3.10), seja

$$\begin{aligned}
T &= \mathrm{tr}(AP_{r-1})\{S_r(|A|^2 - \epsilon_N cn) - \epsilon_N^r[\mathrm{tr}(A^2 P_r) - \epsilon_N c\mathrm{tr}(P_r)]\} \\
&-\epsilon_N^{r-1}\mathrm{tr}(A^2 P_{r-1})[\mathrm{tr}(A^2 P_{r-1}) - \epsilon_N c\mathrm{tr}(P_{r-1})]
\end{aligned}$$

e tome uma base $\{e_k\}$ em T_pM como no enunciado do corolário 3.7. Então

$$\begin{aligned}
T &= \sum_i \epsilon_N^{r-1}\lambda_i S_{r-1}(A_i) S_r(|A|^2 - \epsilon_N cn) \\
&+ \sum_{i,j} \epsilon_N^r \lambda_i S_{r-1}(A_i) S_r(A_j)(c - \epsilon_N \lambda_j^2) \\
&+ \sum_{i,j} \epsilon_N^r \lambda_i^2 S_{r-1}(A_i) S_{r-1}(A_j)(c - \epsilon_N \lambda_j^2) \\
&= \sum_i \epsilon_N^{r-1}\lambda_i S_{r-1}(A_i)\cdot S_r(|A|^2 - \epsilon_N cn) \\
&+ \sum_i \epsilon_N^{r-1}\lambda_i S_{r-1}(A_i)\cdot \epsilon_N \sum_j (c - \epsilon_N\lambda_j^2)[S_r(A_j) + \lambda_i S_{r-1}(A_j)].
\end{aligned}$$

Observe agora que

$$\begin{aligned}
& S_r(|A|^2 - \epsilon_N cn) + \epsilon_N \sum_j (c - \epsilon_N \lambda_j^2)[S_r(A_j) + \lambda_i S_{r-1}(A_j)] \\
= \; & S_r(|A|^2 - \epsilon_N cn) + \epsilon_N \sum_j (c - \epsilon_N \lambda_j^2)[S_r + (\lambda_i - \lambda_j) S_{r-1}(A_j)] \\
= \; & \epsilon_N \sum_j (c - \epsilon_N \lambda_j^2)(\lambda_i - \lambda_j) S_{r-1}(A_j),
\end{aligned}$$

de modo que

$$T = \sum_{i,j} \epsilon_N^r S_{r-1}(A_i) S_{r-1}(A_j) \lambda_i (\lambda_i - \lambda_j)(c - \epsilon_N \lambda_j^2).$$

Perfazendo o mesmo cálculo acima, dessa vez trocando i por j desde o início, conseguimos

$$T = \sum_{i,j} \epsilon_N^r S_{r-1}(A_j) S_{r-1}(A_i) \lambda_j (\lambda_j - \lambda_i)(c - \epsilon_N \lambda_i^2),$$

e daí

$$\begin{aligned}
2T &= \sum_{i,j} \epsilon_N^r S_{r-1}(A_i) S_{r-1}(A_j)(\lambda_i - \lambda_j)[\lambda_i(c - \epsilon_N \lambda_j^2) - \lambda_j(c - \epsilon_N \lambda_i^2)] \\
&= \sum_{i,j} \epsilon_N^r S_{r-1}(A_i) S_{r-1}(A_j)(\lambda_i - \lambda_j)^2 (c + \epsilon_N \lambda_i \lambda_j), \\
&= \sum_{i,j} \epsilon_N^r S_{r-1}(A_i) S_{r-1}(A_j)(\lambda_i - \lambda_j)^2 K_M(\sigma_{ij}),
\end{aligned}$$

onde a equação de Gauss foi utilizada na última igualdade.

A primeira parte do corolário 3.8 é uma consequência imediata de (3.7). Para a segunda parte, substitua $r = 2$ em (3.7) para obter

$$\begin{aligned}
L_2(S_2) = \; & \epsilon_N L_1(S_3) + S_2[\Delta S_2 - \epsilon_N L_1(S_1)] + \sum_k |P_1 \nabla_{e_k} A|^2 - |\nabla S_2|^2 \\
& + \mathrm{tr}(AP_1)\{S_2(|A|^2 - \epsilon_N cn) - [\mathrm{tr}(A^2 P_2) - \epsilon_N c \mathrm{tr}(P_2)]\} \\
& - \epsilon_N \mathrm{tr}(A^2 P_1)[\mathrm{tr}(A^2 P_1) - \epsilon_N c \mathrm{tr}(P_1)].
\end{aligned}$$

Substitua agora em tal fórmula a expressão para $\Delta S_2 - \epsilon_N L_1(S_1)$, obtida da primeira parte do corolário.

Capítulo 4

Aplicações

Neste capítulo, a menos que se diga o contrário, todos os espaços considerados são variedades Riemannianas conexas.

4.1 Hipersuperfícies de Clifford da esfera

Comecemos com algumas observações gerais sobre imersões isométricas.

Dadas imersões isométricas $x : M \to N$ e $y : N \to P$, seja $f = y \circ x : M \to P$. Se α_x e α_f denotam respectivamente as segundas formas fundamentais de x e f, é imediato verificar que

$$\alpha_x = (\alpha_f)^T,$$

onde T denota projeção sobre o fibrado tangente TN de N.

Sejam $x_1 : M_1 \to \overline{M}_1$ e $x_2 : M_2 \to \overline{M}_2$ imersões isométricas com segundas formas fundamentais (vetoriais) respectivamente α_1 e α_2. É também imediato checar que a segunda forma fundamental $\overline{\alpha}$ da imersão produto $x = (x_1, x_2) : M_1 \times M_2 \to \overline{M}_1 \times \overline{M}_2$ é a soma direta $\overline{\alpha} = \alpha_1 \oplus \alpha_2$, no seguinte sentido:

$$\overline{\alpha}(X_1 \oplus X_2, Y_1 \oplus Y_2) = \alpha_1(X_1, Y_1) \oplus \alpha_2(X_2, Y_2),$$

para todos $X_1, Y_1 \in TM_1$, $X_2, Y_2 \in TM_2$.

No que segue, denotamos por $x : \mathbb{S}^n_r \to \mathbb{R}^{n+1}$ a imersão canônica da $n-$esfera de raio r, centrada na origem, no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$. Orientando $\mathbb{S}^n_r$ pelo campo vetorial normal unitário $N = -\frac{1}{r}x$, e sendo $\alpha(X, Y) = \langle AX, Y\rangle N$ a segunda forma fundamental de x, é fácil ver que

$$A = \frac{1}{r}I; \quad \alpha(X, Y) = -\frac{\langle X, Y\rangle}{r^2}x,$$

onde $I : T\mathbb{S}^n \to T\mathbb{S}^n$ é o operador identidade.

Quando $x_1 : \mathbb{S}^{n_1}_{r_1} \to \mathbb{R}^{n_1+1}$ e $x_2 : \mathbb{S}^{n_2}_{r_2} \to \mathbb{R}^{n_2+1}$, com $r_1^2 + r_2^2 = 1$ e $n = n_1 + n_2$, tem-se que $x = (x_1, x_2)$ satisfaz $x(\mathbb{S}^{n_1}_{r_1} \times \mathbb{S}^{n_2}_{r_2}) \subset \mathbb{S}^{n+1}_1$. Entende-se pelo *toro de Clifford* $\mathbb{S}^{n_1}_{r_1} \times \mathbb{S}^{n_2}_{r_2}$ a imersão $\mathbb{S}^{n_1}_{r_1} \times \mathbb{S}^{n_2}_{r_2} \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}_1$ induzida por x.

Sejam α e $\overline{\alpha}$ respectivamente as segundas formas fundamentais do toro de Clifford e da imersão produto x. Desde que x é normal a $\mathbb{S}^{n+1}_1$, com $|x| = 1$, a discussão acima nos dá

$$\alpha(X, Y) = \overline{\alpha}(X, Y) - \langle \overline{\alpha}(X, Y), x \rangle x.$$

Escrevendo $X = X_1 \oplus X_2$, $Y = Y_1 \oplus Y_2$ e lembrando que $\overline{\alpha} = \alpha_1 \oplus \alpha_2$ (α_1 e α_2 como acima), um cálculo direto nos permite obter

$$\alpha(X, Y) = -\left(\frac{r_2^2}{r_1^2}\langle X_1, Y_1\rangle - \langle X_2, Y_2\rangle, \frac{r_1^2}{r_2^2}\langle X_2, Y_2\rangle - \langle X_1, Y_1\rangle \right). \tag{4.1}$$

Para calcular o operador de forma A do toro de Clifford, precisamos de um campo vetorial $N \in T\mathbb{S}^{n+1} \cap T_1(\mathbb{S}^{n_1}_{r_1} \times \mathbb{S}^{n_2}_{r_2})^\perp$. Uma tentativa razoável é $N = (ax_1, bx_2)$, uma vez que para $i = 1, 2$ temos x_i ortogonal a $\mathbb{S}^{n_i}_{r_i}$ em $\mathbb{R}^{n_i+1}$. A partir daí, as condições $|N|^2 = 1$ e $\langle N, x\rangle = \langle N, X\rangle = 0$ nos dão (a menos de uma mudança de sinal)

$$N = \left(-\frac{r_2}{r_1}x_1, \frac{r_1}{r_2}x_2 \right).$$

Finalmente, seja $(p, q) \in \mathbb{S}^{n_1}_{r_1} \times \mathbb{S}^{n_2}_{r_2}$, $\{e_1, \ldots, e_{n_1}\}$ uma base ortonormal qualquer de $T_p\mathbb{S}^{n_1}_{r_1}$, e $\{e_{n_1+1}, \ldots, e_{n_1+n_2}\}$ uma base ortonormal qualquer de $T_q\mathbb{S}^{n_2}_{r_2}$. Fazendo $E_i = (e_i, 0)$ para $1 \leq i \leq n_1$, e $E_i = (0, e_i)$ para $n_1 + 1 \leq i \leq n_1 + n_2$, obtemos uma base ortonormal para $T_{(p,q)}(\mathbb{S}^{n_1}_{r_1} \times \mathbb{S}^{n_2}_{r_2})$. De (4.1), é imediato calcular a matriz de $A = A_N$, com respeito a tal base, como sendo igual a

$$A = \begin{bmatrix} \frac{r_2}{r_1}I_{n_1} & 0 \\ 0 & -\frac{r_1}{r_2}I_{n_2} \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

O princípio fundamental da contagem nos permite obter imediatamente, a partir da matriz acima, as seguintes expressões para as funções simétricas S_r do toro de Clifford na orientação escolhida:

$$S_r = \sum_{k \geq 0} (-1)^{r-k} \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{r-k} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^k \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{r-k}, \tag{4.3}$$

convencionando-se que $\binom{m}{j} = 0$ sempre que $j > m$. Temos ainda a seguinte relação extremamente útil:

Lema 4.1. *Sejam r_1, r_2 reais positivos tais que $r_1^2 + r_2^2 = 1$, e n_1, n_2 inteiros positivos, $n = n_1 + n_2$. No toro de Clifford $\mathbb{S}^{n_1}_{r_1} \times \mathbb{S}^{n_2}_{r_2} \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ tem-se para $1 \le r \le n$ que*

$$\begin{aligned} &\operatorname{tr}(AP_{r-1})\{S_r(|A|^2 - n) - [\operatorname{tr}(A^2P_r) - \operatorname{tr}(P_r)]\} \\ &-\operatorname{tr}(A^2P_{r-1})[\operatorname{tr}(A^2P_{r-1}) - \operatorname{tr}(P_{r-1})] = 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Demonstração. Denotando por A a segunda forma fundamental da imersão canônica $\mathbb{S}^{n_1}_{r_1} \times \mathbb{S}^{n_2}_{r_2} \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ com respeito a $N = \left(-\frac{r_2}{r_1}x_1, \frac{r_1}{r_2}x_2\right)$, segue de (4.2) que

$$A^2 - I = \left(\frac{r_2}{r_1} - \frac{r_1}{r_2}\right) A. \tag{4.5}$$

Então, sendo $\gamma = \frac{r_2}{r_1} - \frac{r_1}{r_2}$, temos para $0 \le r \le n$ que

$$A^2P_r - P_r = (A^2 - I)P_r = \gamma \cdot AP_r,$$

e daí que

$$\begin{aligned} & \operatorname{tr}(AP_{r-1})\{S_r(|A|^2 - n) - [\operatorname{tr}(A^2P_r) - \operatorname{tr}(P_r)]\} \\ & -\operatorname{tr}(A^2P_{r-1})[\operatorname{tr}(A^2P_{r-1}) - \operatorname{tr}(P_{r-1})] \\ = \; & \operatorname{tr}(AP_{r-1})\{S_r\operatorname{tr}(A^2P_0 - P_0) - \operatorname{tr}(A^2P_r - P_r)\} \\ & -\operatorname{tr}(A^2P_{r-1})\operatorname{tr}(A^2P_{r-1} - P_{r-1}) \\ = \; & \operatorname{tr}(AP_{r-1})[S_r\gamma \cdot \operatorname{tr}(AP_0) - \gamma \cdot \operatorname{tr}(AP_r)] - \operatorname{tr}(A^2P_{r-1})\gamma \cdot \operatorname{tr}(AP_{r-1}) \\ = \; & \gamma \cdot \operatorname{tr}(AP_{r-1})[S_1S_r - (r+1)S_{r+1}] - \gamma \cdot \operatorname{tr}(A^2P_{r-1})\operatorname{tr}(AP_{r-1}) \\ = \; & \gamma \cdot \operatorname{tr}(AP_{r-1})\operatorname{tr}(A^2P_{r-1}) - \gamma \cdot \operatorname{tr}(A^2P_{r-1})\operatorname{tr}(AP_{r-1}) = 0. \end{aligned}$$

□

4.2 Aplicações em ambiente Riemanniano

Considere em $\mathbb{R}^{n+2}$ a métrica de Lorentz correspondente à forma quadrática

$$q(x) = -x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2.$$

Na métrica induzida, para $r > 0$ a subvariedade

$$\mathbb{H}_r^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+2}; q(x) = -r^2, x_0 > 0\}$$

é uma variedade Riemanniana $(n+1)-$dimensional e completa, de curvatura seccional constante $-1/r^2$, sendo então um modelo para o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}(-1/r^2)$.

Para $r_1 \geq 0$ e $n_1 + n_2 = n$, seja $\mathbb{S}_{r_1}^{n_1} \times \mathbb{H}_{r_2}^{n_2}$, $r_2^2 = r_1^2 + 1$, a hipersuperfície produto em $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ dada por

$$\mathbb{S}_{r_1}^{n_1} \times \mathbb{H}_{r_2}^{n_2} = \{x \in \mathbb{H}^{n+1}(-1); x_1^2 + \cdots + x_{n_1+1}^2 = r_1^2\},$$

e $\mathbb{F}^n$ a hipersuperfície de curvatura seccional identicamente nula de $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ dada por

$$\mathbb{F}^n = \{x \in \mathbb{H}^{n+1}(-1); x_0 = x_1 + 1\}.$$

Finalmente defina, em $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$\mathbb{S}_r^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; x_1^2 + \cdots + x_{n_1+1}^2 = r^2\}.$$

O teorema a seguir (teorema 4 de [21]) desempenhará um papel crucial nesta seção.

Teorema 4.2. *Seja $\overline{M}_c^{n+1}$ uma das formas espaciais simplesmente conexas $\mathbb{S}^{n+1}$, $\mathbb{R}^{n+1}$ ou $\mathbb{H}^{n+1}$, conforme seja c respectivamente igual a $1, 0$ ou -1. Suponha que $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ é uma hipersuperfície imersa e orientada de $\overline{M}_c^{n+1}$, de segunda forma fundamental A paralela*[1]*. Então, a menos de isometrias de $\overline{M}^{n+1}$, M^n é uma subvariedade aberta de:*

(a) $\mathbb{S}_{r_1}^{n_1} \times \mathbb{S}_{r_2}^{n_2}$, *onde* $n_1 + n_2 = n$, $n_1, n_2 \geq 0$ *e* $r_1^2 + r_2^2 = 1$, *se* $c = 1$.

(b) $\mathbb{S}_{r_1}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, *onde* $n_1 + n_2 = n$, $n_1, n_2 \geq 0$, *se* $c = 0$.

(c) $\mathbb{S}_{r_1}^{n_1} \times \mathbb{H}_{r_2}^{n_2}$, *onde* $n_1 + n_2 = n$, $n_1, n_2 \geq 0$ *e* $r_2^2 = r_1^2 + 1$, *ou* $\mathbb{F}^n$, *se* $c = -1$.

Enunciamos agora uma versão ligeiramente modificada da observação 2.1 de [4]:

[1] Isto é, tal que $\nabla A = 0$.

Lema 4.3. *Seja $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável do ambiente $\overline{M}^{n+1}$, de curvatura seccional constante c. Assuma que a curvatura média H_1 de M^n não muda de sinal, e escolha a orientação de tal modo que $H_1 \geq 0$.*[2] *Se a curvatura escalar R de M^n satisfaz $R \geq c$, então $P_1 \geq 0$. Se $R > c$ em M^n, então $P_1 > 0$ em M^n.*

Demonstração. Segue do corolário 2.12 que $R \geq c$ se e só se $S_2 \geq 0$. Denotando por $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os autovalores da segunda forma fundamental A, tem-se

$$S_1^2 = |A|^2 + 2S_2 \geq |A|^2 \geq \lambda_i^2, \tag{4.6}$$

de modo que $-S_1 \leq \lambda_i \leq S_1$. Assim, $S_1(A_i) = S_1 - \lambda_i \geq 0$, e $P_1 \geq 0$. Se, em algum ponto $p \in M$, tivermos $S_1(A_i) = 0$, segue que $S_1 = \lambda_i$, e de (4.6) que $S_2 = 0$ e $\lambda_j = 0$ para todo $j \neq i$. Portanto, $S_1 \geq 0$, $S_2 > 0 \Rightarrow P_1 > 0$. □

Nosso primeiro resultado generaliza o teorema 3.1 de [4].

Teorema 4.4. *Seja $x : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada e orientável, com curvatura escalar $R \geq 1$. Assuma que a curvatura média H_1 de M^n não muda de sinal, e escolha a orientação de tal modo que $H_1 \geq 0$. Se H_1 ou R for constante em M^n, e*

$$H_1[\mathrm{tr}(P_1) - \mathrm{tr}(A^2P_1)] + (n-1)(R-1)(|A|^2 - n) \geq 0$$

em M^n, então

(a) $H_1[\mathrm{tr}(P_1) - \mathrm{tr}(A^2P_1)] + (n-1)(R-1)(|A|^2 - n) = 0$ *em M^n.*

(b) *M^n é ou totalmente geodésica ou um toro de Clifford $\mathbb{S}^{n_1}_{r_1} \times \mathbb{S}^{n_2}_{r_2}$, com $r_1^2 + r_2^2 = 1$, $n_1, n_2 > 0$ e $\beta = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \geq 1$ satisfazendo*

$$n_1(n_1-1)\beta^2 - 2n_1n_2\beta + n_2(n_2-1) = n(n-1)(R-1)\beta. \tag{4.7}$$

Demonstração. Segue de (3.11) que

$$L_1(S_1) = \Delta S_2 + |\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2 + 2S_2(|A|^2 - n) + S_1[\mathrm{tr}(P_1) - \mathrm{tr}(A^2P_1)],$$

[2] Se M^n tem curvatura escalar $R > c$, temos $S_2 > 0$. Segue então de $S_1^2 = 2S_2 + |A|^2$ que $H_1 \neq 0$. Portanto, H_1 não muda de sinal sobre M^n se M^n for conexa.

relação que integrada sobre M fornece

$$0 = \int_M \left\{ |\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2 + 2S_2(|A|^2 - n) + S_1[\mathrm{tr}(P_1) - \mathrm{tr}(A^2 P_1)] \right\} dM.$$

Agora, desde que $2S_2 = n(n-1)(R-1) \geq 0$, segue do lema 2.13 que, sendo R constante, temos $|\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2 \geq 0$. Como tal desigualdade é obviamente válida quando H_1 for constante, obtemos então

$$|\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2 = 0 \tag{4.8}$$

e

$$H_1[\mathrm{tr}(P_1) - \mathrm{tr}(A^2 P_1)] + (n-1)(R-1)(|A|^2 - n) = 0 \tag{4.9}$$

sobre M. Retornando à expresão para $L_1(S_1)$, segue que $L_1(S_1) = \Delta S_2$. Portanto, quer seja H_1 ou R constante, obtemos $\Delta S_2 = 0$, e o princípio do máximo forte de Hopf assegura que S_2 é constante. Isto por sua vez nos dá $L_1(S_1) = 0$ em ambos os casos e, usando $|A|^2 = S_1^2 - 2S_2$, conseguimos

$$\frac{1}{2} L_1 |A|^2 = S_1 L_1(S_1) + \langle P_1 \nabla S_1, \nabla S_1 \rangle - L_1(S_2) = \langle P_1 \nabla S_1, \nabla S_1 \rangle.$$

Integrando novamente sobre M, segue que $\int_M \langle P_1 \nabla S_1, \nabla S_1 \rangle dM = 0$ e pelo lema anterior, temos $\langle P_1 \nabla S_1, \nabla S_1 \rangle = 0$ sobre M.

Se $S_2 = 0$ (ou, equivalentemente, $R = 1$) sobre M, foi provado em [4] que M é ou totalmente geodésica ou um toro de Clifford satisfazendo

$$n_1(n_1 - 1)\beta^2 - 2n_1 n_2 \beta + n_2(n_2 - 1) = 0.$$

Caso contrário, $S_2 > 0$ sobre M, e o lema 4.3 nos dá $P_1 > 0$ sobre M. Assim, $\nabla S_1 = 0$ sobre M, e segue de (4.8) que $\nabla A = 0$. Agora, pelo teorema 4.2, M^n é um toro de Clifford $\mathbb{S}^{n_1}_{r_1} \times \mathbb{S}^{n_2}_{r_2}$, com $r_1^2 + r_2^2 = 1$.

Finalmente, o lema 4.1 assegura que

$$nH_1[\mathrm{tr}(P_1) - \mathrm{tr}(A^2 P_1)] + n(n-1)(R-1)(|A|^2 - n) = 0$$

em todos esses toros, de modo que a única condição algébrica a ser satisfeita por M é a equação

$$2S_2 = n(n-1)(R-1).$$

É suficiente agora nos referirmos à expressão (4.3) para S_2 sobre toros de Clifford. $\square$

Exemplo 4.5. *Neste exemplo mostramos como construir famílias não triviais de toros de Clifford de curvatura escalar constante e prescrita* $1 \leq R < 2$.

Quando $R \geq 2$, todo toro de Clifford satisfazendo (4.7) satisfaz também $\beta > 1$. De fato, caso contrário teríamos de (4.3) que

$$n(n-1)(R-1) = n_1(n_1-1) - 2n_1n_2 + n_2(n_2-1) = (n_1-n_2)^2 - n,$$

o que por sua vez nos daria

$$(n-2)^2 \geq (n_1-n_2)^2 = n[(n-1)(R-1)+1] \geq n^2,$$

uma contradição.

Para $1 \leq R < 2$ há famílias inteiras de toros não triviais (i.e., não mínimos) com $\beta = 1$ e satisfazendo (4.7). Para $R = 1$, por exemplo, a relação (4.7) se reduz a $n_1(n_1-1) - 2n_1n_2 + n_2(n_2-1) = 0$, ou ainda a

$$(n_1-n_2)^2 = n_1 + n_2.$$

Qualquer solução $n_1 = a_1$, $n_2 = a_2$ $(a_1 < a_2)$ dessa equação gera a família de soluções $n_1 = a_k$, $n_2 = a_{k+1}$, com a sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ satisfazendo, para $k \geq 1$, a recorrência

$$a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1.$$

Desde que $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ é uma solução, conseguimos neste caso a família de toros

$$\mathbb{S}^{\binom{k}{2}}_{1/\sqrt{2}} \times \mathbb{S}^{\binom{k+1}{2}}_{1/\sqrt{2}} \hookrightarrow \mathbb{S}^{\binom{k+1}{3}+1}_{1}.$$

Para $R = 3/2$, (4.7) se reduz a

$$n_1(n_1-1) - 2n_1n_2 + n_2(n_2-1) = \frac{n(n-1)}{2},$$

ou ainda a $(n_1+n_2)(n_1+n_2-1) = 8n_1n_2$. Novamente, qualquer solução $n_1 = a_1$, $n_2 = a_2$ gera uma família inteira de soluções $n_1 = a_k$, $n_2 = a_{k+1}$, com a sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ satisfazendo, para $k \geq 1$, a recorrência

$$a_{k+2} = 6a_{k+1} - a_k + 1.$$

A solução $n_1 = 1$, $n_2 = 7$ é obtida ao se resolver o sistema de equações

$$\begin{cases} n_1 + n_2 = 8n_1 \\ n_1 + n_2 - 1 = n_2 \end{cases},$$

gerando uma família de toros cujo primeiro membro é $\mathbb{S}^1_{1/\sqrt{2}} \times \mathbb{S}^7_{1/\sqrt{2}} \hookrightarrow \mathbb{S}^9_1$.

A partir de agora enunciamos e provamos nossos principais resultados para ambientes Riemannianos, o primeiro dos quais sendo um teorema de gap que generaliza o teorema 5.3.2 de [28] para hipersuperfícies $r-$mínimas da esfera:

Teorema 4.6. *Se $x: M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ é uma hipersuperfície fechada e orientada da esfera, com $S_r = 0$, então*

$$\int_M \mathrm{tr}(A^2P_{r-1})[\mathrm{tr}(P_{r-1}) - \mathrm{tr}(A^2P_{r-1})]dM \leq 0. \tag{4.10}$$

Ademais, se $S_{r+1} \neq 0$ sobre M^n, então $\mathrm{tr}(A^2P_{r-1})\mathrm{tr}(P_{r-1}) \geq \mathrm{tr}(A^2P_{r-1})^2$ se e só se M^n for um toro de Clifford $\mathbb{S}^{n_1}_{r_1} \times \mathbb{S}^{n_2}_{r_2}$, com $r_1^2 + r_2^2 = 1$, $n_1 + n_2 = n$ e $S_r = 0$.

Demonstração. Segue do corolário 3.7 que

$$0 = L_{r-1}(S_{r+1}) + \sum_k |P_{r-1}\nabla_{e_k}A|^2 + \mathrm{tr}(A^2P_{r-1})[\mathrm{tr}(P_{r-1}) - \mathrm{tr}(A^2P_{r-1})]. \tag{4.11}$$

Integrando sobre M, obtemos

$$0 = \int_M \sum_k |P_{r-1}\nabla_{e_k}A|^2 dM + \int_M \mathrm{tr}(A^2P_{r-1})[\mathrm{tr}(P_{r-1}) - \mathrm{tr}(A^2P_{r-1})]dM,$$

e daí a primeira parte do teorema.

Para a segunda parte note primeiramente que, pelo lema 4.1, todos os toros de Clifford $\mathbb{S}^{n_1}_{r_1} \times \mathbb{S}^{n_2}_{r_2}$ com $S_r = 0$ satisfazem $\mathrm{tr}(A^2P_{r-1}) = \mathrm{tr}(P_{r-1})$. Reciprocamente, suponha que $\mathrm{tr}(A^2P_{r-1})\mathrm{tr}(P_{r-1}) \geq \mathrm{tr}(A^2P_{r-1})^2$ e $S_{r+1} \neq 0$ sobre M. Então

$$\mathrm{tr}(A^2P_{r-1})\mathrm{tr}(P_{r-1}) = \mathrm{tr}(A^2P_{r-1})^2$$

e

$$\sum_k |P_{r-1}\nabla_{e_k}A|^2 = 0$$

sobre M, donde $P_{r-1}\nabla_{e_k}A = 0$ para todo $1 \leq k \leq n$.

Agora, como $S_r = 0$, o item (b) da proposição 3.3 garante que P_{r-1} é invertível, de modo que $\nabla_{e_k}A = 0$ para todo $1 \leq k \leq n$, ou ainda $\nabla A = 0$. Portanto, pelo teorema 4.2 M é uma subvariedade aberta de um toro de Clifford $\mathbb{S}^{n_1}_{r_1} \times \mathbb{S}^{n_2}_{r_2}$, com $r_1^2 + r_2^2 = 1$ e $n_1 + n_2 = n$. Como M é também fechada e conexa, segue que $M = \mathbb{S}^{n_1}_{r_1} \times \mathbb{S}^{n_2}_{r_2}$. □

A curvatura seccional K_M de M ser não-negativa é condição suficiente para garantir a não-negatividade de

$$\operatorname{tr}(A^2P_{r-1})\operatorname{tr}(P_{r-1}) \geq \operatorname{tr}(A^2P_{r-1})^2,$$

conforme atesta o seguinte

Corolário 4.7. *Seja $x : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada e orientada da esfera, com $S_r = 0$. Se $S_{r+1} \neq 0$ sobre M^n, e M^n tem curvatura seccional $K_M \geq 0$, então M^n é um toro de Clifford $\mathbb{S}^{n_1}_{r_1} \times \mathbb{S}^{n_2}_{r_2}$, com $r_1^2 + r_2^2 = 1$, $n_1 + n_2 = n$ e $S_r = 0$.*

Demonstração. Para $p \in M$, tem-se

$$\operatorname{tr}(A^2P_{r-1})[\operatorname{tr}(P_{r-1})-\operatorname{tr}(A^2P_{r-1})] = \frac{1}{2}\sum_{i,j} S_{r-1}(A_i)S_{r-1}(A_j)(\lambda_i-\lambda_j)^2K_M(\sigma_{ij}),$$

onde $\{e_k\}$ é um referencial ortonormal sobre M diagonalizando A em p, com $Ae_k = \lambda_k e_k$ em p, e σ_{ij} denota o subespaço 2−dimensional de T_pM gerado por e_i e e_j.

Agora, o item (b) da proposição 3.3 garante ser P_{r-1} definido, de modo que $S_{r-1}(A_i)S_{r-1}(A_j) > 0$ para todos $1 \leq i, j \leq n$. Portanto, segue daí e de $K_M \geq 0$ que

$$\sum_{i,j} S_{r-1}(A_i)S_{r-1}(A_j)(\lambda_i - \lambda_j)^2K_M(\sigma_{ij}) \geq 0$$

sobre M, ou ainda $\operatorname{tr}(A^2P_{r-1})[\operatorname{tr}(P_{r-1}) - \operatorname{tr}(A^2P_{r-1})] \geq 0$ sobre M. □

Observação. Nos dois resultados acima, a condição $S_{r+1} \neq 0$ elimina a possibilidade de M ser totalmente geodésica. Ademais, segue de (4.2) que, para toros de Clifford $M = \mathbb{S}^{n_1}_{r_1} \times \mathbb{S}^{n_2}_{r_2}$, tem-se

$$K_M(\sigma_{ij}) = 1 + \lambda_i\lambda_j = \begin{cases} 1 + \frac{r_2^2}{r_1^2}, & \text{se } 1 \leq i, j \leq n_1 \\ 0, & \text{se } 1 \leq i \leq n_1 < j \leq n \\ 1 + \frac{r_1^2}{r_2^2}, & \text{se } n_1 < i, j \leq n \end{cases}.$$

Daí, $K_M \geq 0$. Tão pouco pode-se ter $S_{r+1} = 0$ em um toro de Clifford sobre o qual $S_r = 0$. De fato, tal decorre da expressão matricial da segunda forma de tais toros e do item (c) da proposição 3.2.

Para o que segue, observamos que a elipticidade do operador L_r equivale a termos P_r positivo definido. Na prova do próximo resultado vamos usar a proposição 3.2 de [7], enunciada a seguir:

Proposição 4.8. *Seja M^n uma hipersuperfície fechada em $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{H}^{n+1}$ ou em um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1}$, tal que $S_r > 0$ sobre M^n para algum $2 \leq r \leq n$. Então, para $1 \leq j \leq r-1$, temos $H_j > 0$ e L_j elíptico em M^n.*

Teorema 4.9. *Seja $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada e orientável, onde $\overline{M}_c^{n+1}$ denota $\mathbb{H}^{n+1}$, $\mathbb{R}^{n+1}$ ou um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1}$, conforme seja $c = -1, 0$ ou 1. Se S_r for constante sobre M^n para algum $1 \leq r < n$, e M^n tiver curvatura seccional $K_M \geq 0$, então M^n é uma hiperesfera geodésica e x é um mergulho.*

Demonstração. Antes de mais nada, segue das hipóteses sobre M e $\overline{M}$ a existência de um ponto $p_0 \in M$ onde todas as curvaturas principais de x têm um mesmo sinal. Orientando M de modo que tais curvaturas sejam positivas em p_0, obtemos $S_r(p_0) > 0$, e então $S_r > 0$ em M. Por outro lado, desde que S_r é constante em M, (3.10) nos dá, em $p \in M$,

$$\begin{aligned} 0 &= L_{r-1}(S_{r+1} - S_1 S_r) + \sum_k |P_{r-1}\nabla_{e_k} A|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i,j} S_{r-1}(A_i)S_{r-1}(A_j)(\lambda_i - \lambda_j)^2 K_M(\sigma_{ij}), \end{aligned} \tag{4.12}$$

onde $\{e_k\}$ é um referencial móvel numa vizinhança de p em M, diagonalizando A em p, com $Ae_k = \lambda_k e_k$, e σ_{ij} denota o subespaço 2−dimensional de T_pM gerado por e_i e e_j.

Note agora que a proposição 4.8 assegura a elipticidade de L_{r-1}, e então que P_{r-1} é positivo definido, donde segue que $S_{r-1}(A_i) > 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Portanto,

$$\sum_{i,j} S_{r-1}(A_i)S_{r-1}(A_j)(\lambda_i - \lambda_j)^2 K_M(\sigma_{ij}) \geq 0,$$

e (4.12) nos dá

$$L_{r-1}(S_{r+1} - S_1 S_r) + \sum_k |P_{r-1}\nabla_{e_k} A|^2 \leq 0,$$

de modo que $L_{r-1}(S_{r+1} - S_1S_r) \leq 0$. Como M é compacta sem bordo e L_{r-1} é elíptico, segue do princípio do máximo forte de Hopf ([17]) que $S_{r+1} - S_1S_r$ é constante em M e daí que $\sum_k |P_{r-1}\nabla_{e_k}A|^2 = 0$. Utilizando novamente o fato de P_{r-1} ser positivo definido, obtemos $\nabla_{e_k}A = 0$ para $1 \leq k \leq n$, ou ainda $\nabla A = 0$ em M. Consideremos agora três casos separadamente:

Para $c = 0$, o teorema 4.2 assegura que, a menos de isometrias de $\mathbb{R}^{n+1}$, M^n é um subconjunto aberto de $\mathbb{S}^{n_1}_{r_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, onde $n_1 + n_2 = n$ e $n_1, n_2 \geq 0$. Como M^n é fechada (i.e., compacta sem bordo), temos $M^n = \mathbb{S}^n_{r_1}$. O argumento para $c = -1$ é essencialmente o mesmo que o do caso precedente. Suponha agora M^n contida em um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1}$. Segue novamente do teorema 4.2 que, a menos de isometrias de $\mathbb{S}^{n+1}$, M^n é um toro de Clifford $\mathbb{S}^{n_1}_{r_1} \times \mathbb{S}^{n_2}_{r_2}$, onde $n_1 + n_2 = n$ e $n_1, n_2 \geq 0$. Contudo, se fossem $n_1, n_2 > 0$, então M^n não estaria contida em um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1}$. Segue que M^n é isométrica a $\mathbb{S}^n_{r_1}$, para algum $0 < r_1 < 1$.

Finalmente, desde que em todos os casos acima $x : M \to x(M)$ é um recobrimento do espaço simplesmente conexo $x(M)$, segue que x é um mergulho. $\square$

Uma prova (diferente) do teorema acima nos casos $c = -1, 0$ foi originalmente dada por R. Walter ([29], teorema 4B). No que concerne o caso $c = 1$, a suposição de estar M^n contida em um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1}$ no teorema acima é um tanto restritiva, mas pode ser relaxada caso impusamos condições sobre M^n suficientes para garantir a elipticidade de L_{r-1}, para algum $1 \leq r < n$. Neste sentido o lema a seguir é bastante útil:

Lema 4.10. *Seja M^n uma variedade Riemanniana orientável de curvatura de Ricci $\mathrm{Ric} \geq c \cdot g$, e $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}_c$ uma imersão isométrica. Suponha que a curvatura média de M^n não muda de sinal, e escolha a orientação de tal modo que $H_1 \geq 0$. Se $S_r(p) \neq 0$ para algum $2 \leq r \leq n$, então L_{r-1} é elíptico em p.*

Demonstração. Fixe $p \in M$ e escolha uma base ortonormal $\{e_k\}$ de T_pM, diagonalizando A em p, com $Ae_k = \lambda_k e_k$ para $1 \leq k \leq n$. A equação de Gauss nos dá

$$\mathrm{Ric}_p(e_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{i \neq k}(c + \lambda_k\lambda_i) = c + \frac{1}{n-1}\lambda_k(S_1 - \lambda_k).$$

Então $\mathrm{Ric}_p(e_k) \geq c$ e $S_1(p) \geq 0$ nos dão $0 \leq \lambda_k \leq S_1(p)$ para $1 \leq k \leq n$. Segue que todas as parcelas em $S_r(p)$ são não-negativas, donde concluímos que $S_r(p) \geq 0$. Se $S_r(p) \neq 0$, então $S_r(p) > 0$ e daí ao menos r dos λ_k são positivos, donde segue que, em p, ao menos uma das parcelas que compõem $S_{r-1}(A_i)$ é positiva, para cada $1 \leq i \leq n$. Logo, P_{r-1} é positivo definido em p. □

Teorema 4.11. *Seja $x : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa e orientável na esfera unitária, com curvatura de Ricci* $\mathrm{Ric} \geq 1 \cdot g$. *Assuma que a curvatura média H_1 de M^n não muda de sinal, e escolha a orientação de modo que $H_1 \geq 0$. Se, para algum $1 \leq r < n$, $S_r \neq 0$ for constante sobre M^n, então*

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}(AP_{r-1})\left\{S_r(|A|^2 - n) + [\mathrm{tr}(P_r) - \mathrm{tr}(A^2P_r)]\right\} \\ &+\mathrm{tr}(A^2P_{r-1})[\mathrm{tr}(P_{r-1}) - \mathrm{tr}(A^2P_{r-1})] \geq 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

sobre M^n se e só se M^n for um toro de Clifford $\mathbb{S}^{n_1}_{r_1} \times \mathbb{S}^{n_2}_{r_2}$, com $n_1 + n_2 = n$, e $r_1^2 + r_2^2 = 1$.

Demonstração. Se M for um toro de Clifford, segue do lema 4.1 que (4.13) é uma igualdade. Reciprocamente, suponha (4.13) válida. Então, como S_r é constante, temos novamente que

$$L_{r-1}(S_{r+1} - S_1S_r) + \sum_k |P_{r-1}\nabla_{e_k}A|^2 \leq 0.$$

Agora, a condição sobre a curvatura de Ricci de M assegura, via teorema de Bonnet-Myers, que M é fechada. Por outro lado, desde que $S_r \neq 0$ sobre M, o lema anterior assegura a elipticidade de L_{r-1}, e o restante do argumento é idêntico ao do teorema anterior. □

Acerca do caso não compacto, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.12. *Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientada, completa e não compacta, do espaço Euclidiano, com curvatura seccional $K_M \geq 0$. Se, para algum $1 \leq r < n$, $S_r \neq 0$ é constante sobre M^n, e $S_1S_r - S_{r+1}$ atinge um máximo global sobre M^n, então M^n é isométrica a $\mathbb{S}^{n_1}_{r_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ para algum $r_1 > 0$, onde $n_1 + n_2 = n$ e $r \leq n_1 < n$. Em particular, se $S_{r+1} = 0$ sobre M^n e S_1 atinge um máximo global sobre M^n, então M^n é isométrica a $\mathbb{S}^r_{r_1} \times \mathbb{R}^{n-r}$, para algum $r_1 > 0$.*

Demonstração. Desde que $K_M \geq 0$, segue que M tem curvatura de Ricci $\mathrm{Ric} \geq 0$. Ademais, sendo $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os autovalores da segunda forma fundamental A de M, segue também de $K_M \geq 0$ que, em cada ponto de M, tem-se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ ou $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \leq 0$. Portanto, S_1 não muda de sinal sobre M, pois caso o fizesse teríamos $p \in M$ tal que $S_1(p) = 0$, e então $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ em p. Tal fato contradiria ser $S_r(p) \neq 0$.

Segue agora do lema 4.10 a elipticidade de L_{r-1}. Usando a equação (3.10), obtemos em $p \in M$ e para um referencial apropriado $\{e_k\}$ que

$$\begin{aligned} L_{r-1}(S_1 S_r - S_{r+1}) &= \sum_k |P_{r-1} \nabla_{e_k} A|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j} S_{r-1}(A_i) S_{r-1}(A_j)(\lambda_i - \lambda_j)^2 K_M(\sigma_{ij}). \end{aligned}$$

Agora, desde que os dois termos do segundo membro são não-negativos, segue que $L_{r-1}(S_1 S_r - S_{r+1}) \geq 0$. A hipótese de $S_1 S_r - S_{r+1}$ atingir um máximo global sobre M garante, novamente pelo princípio do máximo forte de Hopf, que $S_1 S_r - S_{r+1}$ é constante sobre M. Segue então da equação acima que

$$\sum_k |P_{r-1} \nabla_{e_k} A|^2 = 0$$

sobre M, e daí que $\nabla A = 0$ sobre M, por ser P_{r-1} positivo definido.

Por fim, mais uma aplicação do teorema 4.2 garante ser M isométrica a $\mathbb{S}^{n_1}_{r_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, com $n_1, n_2 \geq 0$ e $n_1 + n_2 = n$. Contudo, desde que M é não compacta e $S_r \neq 0$ sobre ela, deve-se ter $r \leq n_1 < n$.

Para terminar, note que se $S_{r+1} = 0$ então a única opção possível é ter-se $n_1 = r$. $\square$

4.3 Aplicações em ambiente Lorentziano

Nesta seção, $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}_c$ denota uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana n-dimensional M^n em uma variedade de Lorentz $(n+1)$-dimensional temporalmente-orientada $\overline{M}^{n+1}$, de curvatura seccional constante c. A menos que se diga o contrário, M^n é orientada pela escolha de um campo vetorial normal unitário tipo-tempo N, e A denota a segunda forma fundamental correspondente. Como no início deste capítulo, todas as variedades são supostas conexas.

Nosso primeiro resultado em ambiente Lorentziano generaliza um resultado anterior de H. Li ([22], teorema 4.3):

Teorema 4.13. *Seja* $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ *uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana fechada* M^n *em uma variedade de Lorentz temporalmente orientada* $\overline{M}^{n+1}$*, de curvatura seccional constante* $c \geq 0$*. Se a curvatura escalar* R *de* M^n *é constante e satisfaz*

(a) $c\left(\frac{n-2}{n}\right) < R \leq c$, *então* M^n *é totalmente umbílica.*

(b) $c\left(\frac{n-2}{n}\right) \leq R \leq c$ *e* $S_3 \neq 0$, *então* M^n *é totalmente umbílica.*

(c) $c\left(\frac{n-2}{n}\right) \leq R < c$, *então* $\nabla A = 0$ *e* M^n *tem curvatura média constante.*

Demonstração. Segue do corolário 3.8 que

$$L_1(S_1) + |\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2 = 2S_2(|A|^2 + cn) - S_1[S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1],$$

com

$$\begin{aligned} & 2S_2(|A|^2 + cn) - S_1[S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1] \\ = \ & 2S_2(S_1^2 - 2S_2 + cn) - S_1^2S_2 + 3S_1S_3 - c(n-1)S_1^2 \\ = \ & S_1^2S_2 - 4S_2^2 - c[(n-1)S_1^2 - 2nS_2] + 3S_1S_3. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Agora, observe que as duas primeiras desigualdades de Newton (proposição 3.2) são respectivamente equivalentes a

$$(n-1)S_1^2 \geq 2nS_2, \quad 2(n-2)S_2^2 \geq 3(n-1)S_1S_3,$$

ocorrendo a igualdade na primeira delas, em um certo ponto de M, se e só se tal ponto for umbílico. Logo,

$$\begin{aligned} (4.14) \ \leq \ & S_1^2S_2 - 4S_2^2 - c[(n-1)S_1^2 - 2nS_2] + \frac{2(n-2)S_2^2}{n-1} \\ = \ & S_1^2S_2 - \frac{2nS_2^2}{n-1} - c[(n-1)S_1^2 - 2nS_2] \\ = \ & [(n-1)S_1^2 - 2nS_2]\left(\frac{S_2}{n-1} - c\right). \end{aligned}$$

Tendo em vista a equação (2.9), a condição $c\left(\frac{n-2}{n}\right) < R \leq c$ é equivalente a $0 \leq S_2 \leq (n-1)c$. Portanto,

$$L_1(S_1) + |\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2 \leq [(n-1)S_1^2 - 2nS_2]\left(\frac{S_2}{n-1} - c\right) \leq 0, \quad (4.15)$$

e integração sobre M nos dá

$$0 \leq \int_M \{|\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2\}\, dM \leq \int_M [(n-1)S_1^2 - 2nS_2]\left(\frac{S_2}{n-1} - c\right) dM \leq 0.$$

Segue que todas as desigualdades acima são de fato igualdades, donde

$$2(n-2)S_2^2 = 3(n-1)S_1S_3, \tag{4.16}$$

$$[(n-1)S_1^2 - 2nS_2]\left(\frac{S_2}{n-1} - c\right) = 0$$

e, pelo lema 2.13,

$$|\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2 = 0.$$

Acerca de (a), $\frac{S_2}{n-1} - c < 0$ nos dá $(n-1)S_1^2 = 2nS_2$, e M é totalmente umbílica. Também, se $S_3 \neq 0$ sobre M, a condição para igualdade na proposição 3.2 assegura, a partir de (4.16), ser M totalmente umbílica. Para o item (c), note que $S_2 \neq 0$. Então o lema 2.13 novamente nos dá $|\nabla A|^2 = 0$, e então $\nabla S_1 = 0$. □

Para o próximo resultado precisamos do seguinte análogo do lema 4.3:

Lema 4.14. *Assuma que a curvatura média H_1 de M^n não muda de sinal, e escolha a orientação de M^n de tal modo que $H_1 \geq 0$. Se a curvatura escalar R de M^n satisfaz $R \leq c$, então $P_1 \geq 0$. Se $R < c$ sobre M^n, então $P_1 > 0$ sobre M^n.*

Demonstração. A mesma que a do lema 4.3, observando apenas que $R \leq c \Leftrightarrow S_2 \geq 0$, e $H_1 \geq 0 \Leftrightarrow S_1 \leq 0$. □

Teorema 4.15. *Seja $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana completa M^n em uma variedade de Lorentz temporalmente orientada $\overline{M}^{n+1}$, de curvatura seccional constante c. Suponha que a curvatura média H_1 de M^n não muda de sinal, e escolha a orientação de M^n de tal modo que $H_1 \geq 0$. Se H_1 atinge um máximo global em M^n, e a curvatura escalar R de M^n é constante e satisfaz*

$$c\left(\frac{n-2}{n}\right) < R < c,$$

então M^n é totalmente umbílica.

Demonstração. Uma vez que $0 < \frac{S_2}{n-1} < c$, segue de (4.15) e do lema 2.13 que

$$L_1(S_1) \leq [(n-1)S_1^2 - 2nS_2]\left(\frac{S_2}{n-1} - c\right) \leq 0.$$

Pelo lema anterior, L_1 é elíptico e, como S_1 atinge um mínimo global sobre M, o princípio do máximo forte de Hopf assegura que S_1 é constante sobre M. Assim,

$$[(n-1)S_1^2 - 2nS_2]\left(\frac{S_2}{n-1} - c\right) = 0$$

sobre M, donde $(n-1)S_1^2 - 2nS_2 = 0$ sobre M. A condição de igualdade na primeira desigualdade de Newton garante agora que M é totalmente umbílica. □

Para o que segue observe que, seguindo a prova do lema 4.10, obtemos o seguinte análogo do mesmo para o caso Lorentziano:

Lema 4.16. *Seja M^n uma variedade Riemanniana orientável de curvatura de Ricci* $\mathrm{Ric} \leq c \cdot g$, *e* $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ *uma imersão isométrica. Suponha que a curvatura média de M^n não muda de sinal, e escolha a orientação de maneira que $H_1 \geq 0$. Se $H_r(p) \neq 0$ para algum $2 \leq r \leq n$, então L_{r-1} é elíptico em p.*

Teorema 4.17. *Seja $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$, $c > 0$, uma hipersuperfície fechada do espaço de Lorentz temporalmente orientado $\overline{M}^{n+1}$, de curvatura seccional constante c. Se a curvatura seccional K_M de M^n satisfaz $0 \leq K_M \leq c$ e, para algum $1 \leq r < n$, $H_r \neq 0$ é constante sobre M^n, então M^n tem segunda forma fundamental paralela e definida. Mais ainda, se $0 < K_M \leq c$ então M^n é totalmente umbílica.*

Demonstração. De $K_M \leq c$ segue que M tem curvatura de Ricci $\mathrm{Ric} \leq c \cdot g$. Ademais, denotando por $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os autovalores da segunda forma fundamental A de M, segue também de $K_M \leq c$ que, em cada ponto de M, tem-se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ ou $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \leq 0$. Portanto, H_1 não muda de sinal sobre M, pois caso o fizesse existiria um ponto $p \in M$ tal que $H_1(p) = 0$, e então $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ em p. Tal fato, por sua vez, contradiria ser $H_r(p) \neq 0$. Logo, ao orientarmos M de modo que $H_1 \geq 0$, o lema 4.16 assegura a elipticidade de L_{r-1}.

Usando a equação (3.10), obtemos em $p \in M$

$$\begin{aligned} 0 &= (-1)^r L_{r-1}(S_1 S_r - S_{r+1}) + \sum_k |P_{r-1}\nabla_{e_k} A|^2 \\ &\quad + \sum_{i,j} (-1)^{r-1} S_{r-1}(A_i)(-1)^{r-1} S_{r-1}(A_j)(\lambda_i - \lambda_j)^2 K_M(\sigma_{ij}), \end{aligned}$$

Agora, desde que P_{r-1} é positivo definido e $K_M \geq 0$, o último termo do segundo membro da expressão acima é não-negativo, e daí

$$(-1)^r L_{r-1}(S_1 S_r - S_{r+1}) + \sum_k |P_{r-1}\nabla_{e_k} A|^2 \leq 0.$$

Então $(-1)^r L_{r-1}(S_1 S_r - S_{r+1}) \leq 0$ e, como M é fechada e L_{r-1} é elíptico, o princípio do máximo forte de Hopf garante que $S_1 S_r - S_{r+1}$ é constante sobre M. Portanto, $\sum_k |P_{r-1}\nabla_{e_k} A|^2 = 0$, donde o fato de P_{r-1} ser definido nos dá $\nabla A = 0$.

Por fim, segue de

$$\sum_{i,j} (-1)^r S_{r-1}(A_i)(-1)^r S_{r-1}(A_j)(\lambda_i - \lambda_j)^2 K_M(\sigma_{ij}) = 0$$

que $(\lambda_i - \lambda_j)^2(c - \lambda_i\lambda_j) = 0$ para todos $1 \leq i, j \leq n$. Assim, $\lambda_i(p) = 0$ para algum $p \in M$ e algum $1 \leq i \leq n$ dá $c\lambda_j^2 = 0$ para todo $j \neq i$, e daí $H_r(p) = 0$, uma contradição. Isso prova que a segunda forma fundamental é definida. Mais ainda, $K_M > 0$ implica $(\lambda_i - \lambda_j)^2 = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$, e M é totalmente umbílica. □

Corolário 4.18. *Seja $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$, $c > 0$, uma hipersuperfície fechada do espaço de Lorentz temporalmente orientado $\overline{M}^{n+1}$, de curvatura seccional constante c. Se a curvatura seccional K_M de M^n satisfaz $0 \leq K_M \leq c$ e, para algum $1 \leq r < n$, $H_r \neq 0$ é constante sobre M^n, então H_{r+1} é constante sobre M^n se e só se H_1 (ou a curvatura escalar R) for constante sobre M^n.*

Demonstração. Segue do teorema anterior que $S_1 S_r - S_{r+1}$ é constante sobre M. Assim, $S_{r+1} \neq 0$ é constante sobre M se e só se S_1 for também constante sobre M. Para o que resta, é suficiente notar que $2S_2 + |A|^2 = S_1^2$, e $\nabla A = 0 \Rightarrow |A|^2$ constante sobre M. □

Para um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado, obtemos:

Corolário 4.19. *Seja $\overline{M}_c^{n+1} = I \times_f F^n$ um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado com curvatura seccional constante c, e $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada de $\overline{M}^{n+1}$. Se, para algum $1 \leq r < n$, tivermos $H_r \neq 0$ constante sobre M^n, e $0 < K_M \leq c$, então $M^n = \{t\} \times F^n$, para algum $t \in I$, a menos que $\overline{M}^{n+1}$ seja isométrico ao espaco de De Sitter $\mathbb{S}_c^{n+1}$ em uma vizinhança de M^n, em cujo caso M^n é uma esfera redonda totalmente umbílica.*

Demonstração. Pelo teorema 4.17, M é totalmente umbílica. Então, de $H_r \neq 0$ sobre M deve ser $H_1 \neq 0$ sobre M. Aplicando o teorema 6 de [23], obtemos o resultado. □

Observação. Em [1] os autores obtêm o corolário acima sob a hipótese de estar M inteiramente contida no futuro ou passado cronológico de um equador de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ (ao invés de ser $0 < K_M \leq c$). Posteriormente, em [5], os autores generalizaram o resultado citado para espaços-tempo de Robertson-Walker generalizados com curvatura seccional constante (o resultado análogo ao corolário (4.19)), com a mesma troca de hipóteses supracitada.

No que segue, diremos que uma hipersuperfície $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ de uma variedade de Lorentz temporalmente orientada $\overline{M}$ é $r-$*máxima* quando $H_r = 0$.

O teorema de Calabi-Bernstein assegura que as únicas hipersuperfícies tipo-espaço, máximas e completas do espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$ são os hiperplanos tipo-espaço. Tal resultado é mais geral, no sentido de que as únicas hipersuperfícies tipo-espaço, máximas e completas, de um espaço de Lorentz temporalmente orientado, com curvatura seccional constante $c \geq 0$, são as totalmente geodésicas. De fato, fazendo $r = 1$ na primeira fórmula do corolário 3.7 e usando $2S_2 + |A|^2 = S_1^2$, $\epsilon_N = -1$ obtemos

$$\frac{1}{2}\Delta|A|^2 = |\nabla A|^2 + |A|^4 + nc|A|^2 \geq |A|^4,$$

e a partir daí a prova se confunde com a do caso $c = 0$ (veja [11]).

No que segue, apresentamos uma extensão fraca do teorema de Calabi-Bernstein para hipersuperfícies tipo-espaço $r-$máximas M^n de $\mathbb{L}^{n+1}$, a qual se reduz ao teorema citado quando $r = 1$. Para tanto, seja dada uma hipersuperfície tipo-espaço $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ da variedade de Lorentz temporalmente orientada $\overline{M}^{n+1}$, com segunda forma fundamental A. Para $p \in M$, definimos o *espaço de nulidade relativa* $\Delta(p)$ de x em p por

$$\Delta(p) = \{v \in T_pM;\ v \in \mathrm{Ker}(A_p)\},$$

onde Ker denota o núcleo de A_p. O *índice de nulidade relativa* $\nu(p)$ de x em p é a dimensão de $\Delta(p)$:

$$\nu(p) = dim(\Delta(p)).$$

Teorema 4.20. *Seja $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço, não-compacta e $r-$máxima, da variedade de Lorentz temporalmente orientada $\overline{M}_c^{n+1}$, de curvatura seccional constante $c \geq 0$. Se H_{r+1} é constante sobre M^n, então $H_j = 0$ sobre M^n para todo $r \leq j \leq n$, e*

(a) *$\nu(p) \geq n - r + 1$ para todo $p \in M^n$.*

(b) *se $\overline{M}^{n+1}$ é o espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$ e M^n é completa, então por todo ponto de M^n passa um $(n - r + 1)-$hiperplano de $\mathbb{L}^{n+1}$ totalmente contido em M^n.*

Demonstração. Seja $\{e_k\}$ um referencial ortonormal qualquer em M. Segue da equação (3.9) que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_k |P_{r-1}\nabla_{e_k}A|^2 + \mathrm{tr}(A^2P_{r-1})[\mathrm{tr}(A^2P_{r-1}) + c\mathrm{tr}(P_{r-1})] \\ &= \sum_k |P_{r-1}\nabla_{e_k}A|^2 + (r+1)S_{r+1}[(r+1)S_{r+1} - c(n-r+1)S_{r-1}] \\ &= \sum_k |P_{r-1}\nabla_{e_k}A|^2 + n^2\binom{n-1}{r}^2 H_{r+1}^2 - n^2\binom{n-1}{r}\binom{n-1}{r-1}cH_{r+1}H_{r-1}. \end{aligned}$$

Agora, as desigualdades de Newton nos dão $H_{r+1}H_{r-1} \leq H_r^2 = 0$, de modo que $-cH_{r+1}H_{r-1} \geq 0$. Portanto, todos os termos da última linha acima são não-negativos, de modo que deve ser $H_{r+1} = 0$. Pelo item (c) da proposição 3.2, segue que $H_j = 0$ sobre M para todo $r \leq j \leq n$, e daí o polinômio característico de A tem, em cada $p \in M$, ao menos $n - r + 1$ curvaturas principais nulas. Desde que os autovetores correspondentes são elementos linearmente independentes de $\Delta(p)$, segue o item (a).

Note agora que, pelo teorema 5.3 de [14], a distribuição $p \mapsto \Delta(p)$ de nulidade relativa mínima de M é suave e integrável, com folhas totalmente geodésicas em M e em $\overline{M}$. Sendo ν_0 o índice de nulidade relativa mínimo de M, temos $\nu_0 \geq n - r + 1$ e, ainda pelo teorema 5.3 de [14], que as folhas de nulidade relativa mínima são completas. Portanto, o item (b) segue da caracterização das subvariedades totalmente geodésicas completas do espaço de Lorentz-Minkowski como os hiperplanos de $\mathbb{L}^{n+1}$. □

Observação. Para ver que a conclusão do item (b) acima é o melhor que se pode obter no espaço de Lorentz, considere $M^n = M_1^{r-1} \times \mathbb{R}^{n-r+1}$, com M_1 variedade Riemanniana $(r-1)-$dimensional, completa. Se M_1 não é totalmente geodésica em $\mathbb{L}^{n+1}$, então $\nu(p) = n - r + 1$ para todos os pontos p em algum aberto de M^n regrado por $\mathbb{R}^{n-r+1}$.

Corolário 4.21. *Seja $x : M^n \to \mathbb{S}_1^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa do espaço de De Sitter, com H_1, H_2 e H_3 constantes, $H_1 \neq 0$. Se $H_2 = 0$ então M^n é de rotação.*

Demonstração. Pelo resultado anterior, segue que $\nu(p) \geq n - 1$ para todo $p \in M$. Assim, a proposição 1.2 de [10] garante que M é de rotação. □

No caso compacto temos um resultado mais forte:

Teorema 4.22. *Seja $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço, $r-$máxima ($r < n$) fechada em uma variedade de Lorentz temporalmente orientada $\overline{M}^{n+1}$, de curvatura seccional constante c. Então*

$$\int_M \operatorname{tr}(A^2P_{r-1})[\operatorname{tr}(A^2P_{r-1}) + c\operatorname{tr}(P_{r-1})]dM \leq 0 \tag{4.17}$$

e, ademais,

(a) *$c \geq 0 \Rightarrow H_j = 0$ sobre M^n, para todo $r \leq j \leq n$.*

(b) *Se $c \leq 0$ e $H_{r+1} \neq 0$ sobre M^n, então*

$$\operatorname{tr}(A^2P_{r-1})[\operatorname{tr}(A^2P_{r-1}) + c\operatorname{tr}(P_{r-1})] \geq 0$$

sobre M^n implica em $\nabla A = 0$ e H_{r+1}, H_{r-1} constantes sobre M^n.

Demonstração. Seja $\{e_k\}$ um referencial ortonormal qualquer em M. Segue novamente da equação (3.9) que

$$L_{r-1}(S_{r+1}) = \sum_k |P_{r-1}\nabla_{e_k}A|^2 + \mathrm{tr}(A^2P_{r-1})[\mathrm{tr}(A^2P_{r-1}) + c\,\mathrm{tr}(P_{r-1})].$$

Integrando sobre M, obtemos

$$\int_M \left\{ \sum_k |P_{r-1}\nabla_{e_k}A|^2 + \mathrm{tr}(A^2P_{r-1})[\mathrm{tr}(A^2P_{r-1}) + c\,\mathrm{tr}(P_{r-1})] \right\} dM = 0,$$

e daí

$$\int_M \mathrm{tr}(A^2P_{r-1})[\mathrm{tr}(A^2P_{r-1}) + c\,\mathrm{tr}(P_{r-1})]dM \leq 0.$$

Como na prova do teorema anterior, tem-se para $c \geq 0$ que

$$\mathrm{tr}(A^2P_{r-1})[\mathrm{tr}(A^2P_{r-1}) + c\,\mathrm{tr}(P_{r-1})] \geq 0$$

com igualdade se e só se $H_{r+1} = 0$. Portanto, segue de (4.17) que $H_{r+1} = 0$, e daí o item (c) da proposição 3.2 garante que $H_j = 0$ para $r \leq j \leq n$. Isso conclui a prova do item (a).

Para $c \leq 0$ e $H_{r+1} \neq 0$, se $\mathrm{tr}(A^2P_{r-1})[\mathrm{tr}(A^2P_{r-1}) + c\,\mathrm{tr}(P_{r-1})] \geq 0$ sobre M então segue de (4.17) que

$$\mathrm{tr}(A^2P_{r-1})[\mathrm{tr}(A^2P_{r-1}) + c\,\mathrm{tr}(P_{r-1})] = 0 \tag{4.18}$$

sobre M. Daí,

$$\sum_k |P_{r-1}\nabla_{e_k}A|^2 = 0 \quad \text{e} \quad L_{r-1}(S_{r+1}) = 0$$

sobre M. Agora, a proposição 3.3 assegura que P_{r-1} é definido sobre M, donde segue que $\nabla A = 0$. Ademais, integrando

$$\frac{1}{2}L_{r-1}(S_{r+1}^2) = \langle P_{r-1}\nabla S_{r+1}, \nabla S_{r+1}\rangle$$

sobre M, obtemos que H_{r+1} é constante sobre M. A equação (4.18) ainda fornece, de acordo com a prova do teorema anterior, $H_{r+1} = \frac{nc}{n-r}H_{r-1}$, de modo que H_{r-1} é constante sobre M. □

O corolário a seguir é consequência imediata do item (a) do teorema acima, e generaliza o teorema 4.6 de [8]. De fato, ele fornece outra prova, para hipersuperfícies tipo-espaço fechadas de um ambiente Lorentziano de curvatura seccional constante e não-negativa, do teorema de Calabi-Bernstein.

Corolário 4.23. *Seja $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$, $c \geq 0$, uma hipersuperfície tipo-espaço, máxima e fechada, em uma variedade de Lorentz temporalmente orientada $\overline{M}^{n+1}$. Então M^n é totalmente geodésica.*

Especializemos agora a discussão para ambientes conformemente estacionários:

Corolário 4.24. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade de Lorentz conformemente estacionária, com curvatura seccional $c \leq 0$. Se $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ é uma hipersuperfície $r-$máxima ($r < n$), tipo-espaço e fechada, sobre a qual*

$$\mathrm{tr}(A^2 P_{r-1})[\mathrm{tr}(A^2 P_{r-1}) + c\,\mathrm{tr}(P_{r-1})] \geq 0,$$

então existe $p \in M^n$ tal que $H_{r+1}(p) = 0$.

Demonstração. Suponha $H_{r+1} \neq 0$ sobre M. Pelo teorema acima, temos então H_{r-1} e H_{r+1} constantes sobre M, com $H_{r+1} \neq 0$. Segue que $H_r = 0$ e $H_{r+1} \neq 0$ são constantes sobre M, e o teorema 7 de [5] garante ser M^n totalmente umbílica[3]. Mas aí, sendo λ o fator de umbilicidade de M, segue de $H_r = 0$ que $\lambda = 0$, e de $H_{r+1} \neq 0$ que $\lambda \neq 0$, uma contradição. □

[3]Observe que o enunciado do teorema 7 de [5] está incompleto. A simples exigência de ter-se H_{r-1} e H_r constantes sobre M não é suficiente para garantir a umbilicidade de M. Deve-se exigir que $H_r \neq 0$ sobre M.

Referências Bibliográficas

[1] J. A. Aledo, L. J. Alías e A. Romero. *Integral Formulas for Compact Spacelike Hypersurfaces in the De Sitter Space: Applications to the Case of Constant Higher Order Mean Curvature*, J. Geom. Phys. **31**, 195-208 (1999).

[2] H. Alencar, M. do Carmo e G. Colares. *Stable Hypersurfaces with Constant Scalar Curvature*, Math. Z. **213**, 117-131 (1993).

[3] H. Alencar e M. do Carmo. *Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in Spheres*, Proc. Amer. Math. Soc. **120**, 1223-1229 (1994).

[4] H. Alencar, M. do Carmo e W. Santos. *A Gap Theorem for Hypersurfaces of the Sphere with Constant Scalar Curvature One*, Comment. Math. Helv. **77**, no. 2, 549-562 (2002).

[5] L. J. Alías, A. Brasil Jr. e A. G. Colares. *Integral Formulae for Spacelike Hypersurfaces in Conformally Stationary Spacetimes and Applications*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **46**, 465-488 (2003).

[6] C. Aquino. *Um Teorema de Gap para Hipersuperfícies da Esfera com Curvatura Escalar Constante Um*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Brasil, 2003.

[7] J. L. M. Barbosa e A. G. Colares. *Stability of Hypersurfaces with Constant $r-$Mean Curvature*, Ann. of Global Anal. Geom. **15**, 277-297 (1997).

[8] J. L. M. Barbosa e V. Oliker. *Spacelike Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in Lorentz Space*, Matem. Contemp. **4**, 27-44 (1993).

[9] C. da S. Barroso. *Imersões Mínimas e Estimativas do Primeiro Autovalor do Laplaciano*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Brasil, 2000.

[10] A. Brasil Jr., A. G. Colares e O. Palmas. *Complete Spacelike Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in the De Sitter Space: a Gap Theorem*, Illinois J. of Math. **47**, 847-866 (2003).

[11] S. Y. Cheng e S. T. Yau. *Maximal Spacelike Hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski Space*, Ann. of Math. **104**, 407-419 (1976).

[12] S. Y. Cheng e S. T. Yau. *Hypersurfaces with Constant Scalar Curvature*, Math. Ann. **225**, 195-204 (1977).

[13] S. S. Chern, M. P. do Carmo e S. Kobayashi. *Compact Minimal Submanifolds of a Sphere with Second Fundamental Form of Constant Length*, Functional Analysis and Related Fields, editado por Felix E. Browder, 59-75 (1970).

[14] M. Dajczer et al. *Submanifolds and Isometric Immersions*, Houston: Publish or Perish (1990).

[15] H. F. de Lima. *Fórmulas Integrais Tipo-Minkowski para Hipersuperfícies Tipo-Espaço em Variedades de Lorentz Conformemente Estacionárias e Aplicações*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Brasil, 2002.

[16] M. P. do Carmo. *Riemannian Geometry*, Boston: Birkhauser (1992).

[17] D. Gilbarg e N. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Berlin: Springer-Verlag (1983).

[18] G. Hardy, J. E. Littlewood e G. Pólya. *Inequalities*, Cambridge: Cambridge Mathematical Library (1989).

[19] J. Hounie e M. L. Leite. *The Maximum Principle for Hypersurfaces with Vanishing Curvature Functions*, J. Diff. Geom. **41**, 247-258 (1995).

[20] J. Hounie e M. L. Leite. *Two-Ended Hypersurfaces with Zero Scalar Curvature*, Indiana Univ. Math. J. **48**, 867-882 (1999).

[21] H. B. Lawson. *Local Rigidity Theorems for Minimal Hypersurfaces*, Ann. of Math. (2) **89**, 187-197 (1969).

[22] H. Li. *Global Rigidity Theorems of Hypersurfaces*, Ark. Mat. **35**, 327-351 (1997).

[23] S. Montiel. *Uniqueness of Spacelike Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in Foliated Spacetimes*, Math. Ann. **314**, 529-553 (1999).

[24] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry, with Applications to Relativity*, New York: Academic Press (1983).

[25] R. Reilly. *Variational Properties of Functions of the Mean Curvatures for Hypersurfaces in Space Forms*, J. Diff. Geom. (3) **8**, 465-477 (1973).

[26] A. Ros e S. Montiel. *Compact Hypersurfaces: The Alexandrov Theorem for Higher Order Mean Curvatures*, in Differential Geometry. Essex: Longman (1991).

[27] H. Rosenberg. *Hypersurfaces of Constant Curvature in Space Forms*, Bull. Sc. Math. **117**, 217-239 (1993).

[28] J. Simons. *Minimal Varieties in Riemannian Manifolds*, Ann. of Math. **88**, 62-105 (1968).

[29] R. Walter. *Compact Hypersurfaces with a Constant Higher Order Mean Curvature Function*, Math. Ann. **270**, 125-145 (1985).