



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM FÍSICA

VICTOR NOCRATO MOURA

ESTADOS DE VÓRTICES EM
SUPERCONDUTORES MESOSCÓPICOS
DO TIPO-II COM ESPESSURA FINITA

FORTALEZA

2014

VICTOR NOCRATO MOURA

**ESTADOS DE VÓRTICES EM
SUPERCONDUTORES MESOSCÓPICOS
DO TIPO-II COM ESPESSURA FINITA**

Monografia de Bacharelado apresentada à
Coordenação da Graduação do Curso de
Física, da Universidade Federal do Ceará,
como requisito parcial para a obtenção do
Título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Andrey Chaves

FORTALEZA

2014

VICTOR NOCRATO MOURA

ESTADOS DE VÓRTICES EM SUPERCONDUTORES MESOSCÓPICOS DO TIPO-II COM ESPESSURA FINITA

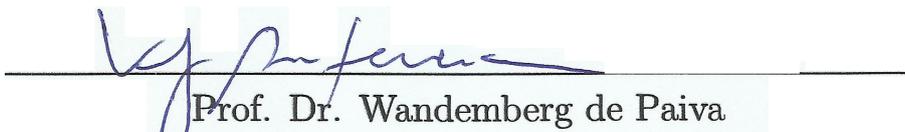
Monografia de Bacharelado apresentada à
Coordenação da Graduação do Curso de
Física, da Universidade Federal do Ceará,
como requisito parcial para a obtenção do
Título de Bacharel em Física.

Aprovada em 03/12/2014

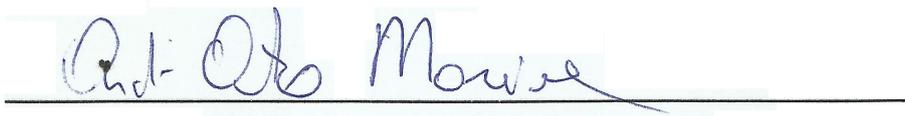
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Andrey Chaves (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Wandemberg de Paiva
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. André Auto Moreira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Física

-
- M889e Moura, Victor Nocrato
 Estados de vórtices em supercondutores mesoscópicos do tipo-II com espessura finita / Victor Nocrato Moura. – Fortaleza, 2014.
 54 f. : il. algumas color. enc.; 30 cm.
- Monografia (Graduação em Física) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Curso de Bacharelado em Física, Fortaleza, 2014.
 Orientação: Prof. Dr. Andrey Chaves.
1. Supercondutores. 2. Vórtices (Física). 3. Ginzburg-Landau, equação de. 4. Método de variáveis de ligação. I. Chaves, Andrey. II. Título.

Aos Meus Pais

AGRADECIMENTOS

A esta universidade, seu corpo docente, direção, administração e funcionários que tornaram possível a realização de minha formação.

A meu orientado Prof. Dr. Andrey Chaves, pela orientação e paciência. E por me mostrar a realidade de um físico.

Aos meus pais pelo incentivo, apoio incondicional e por aceitarem e entenderem a minha decisão de carreira. Muito obrigado.

Aos amigos da universidade e colegas por tornarem essa experiência ainda mais divertida.

E finalmente, a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

RESUMO

Na busca de melhores características supercondutoras, estudamos de maneira teórica amostras supercondutoras com dimensões próximas dos comprimentos de penetração de London e de coerência. Para tais dimensões, supercondutores do tipo-I e do tipo-II apresentam respostas diferentes ao campo magnético. Encontramos um parâmetro de Ginzburg-Landau efetivo para espessuras muito pequenas (tendendo a zero), que faz com que tais filmes supercondutores comportem-se como sistemas do tipo-II, apresentando estado misto, composto por regiões supercondutoras e normais (vórtices). Estudamos a energia em um estado misto, onde a entrada de vórtices diminui a energia do supercondutor.

Neste trabalho, foram resolvidas numericamente as duas equações de Ginzburg-Landau, a primeira por relaxação, onde as funções são relaxada a partir de uma condição inicial até obtermos um convergencia. Para segunda, foi utilizada a técnica de transformada de Fourier, de maneira a resolvê-la mais facilmente no espaço recíproco. Para resolver ambas as equações numericamente, utilizamos o método das variáveis de ligação com invariância de calibre, adaptado para o algoritmo de diferenças finitas.

O estudo de dinâmicas de vórtices foi feito para supercondutores do tipo-II, de simetria quadrada, com diferentes espessuras e diferentes campos magnéticos.

Palavras-chave: Supercondutividade Vórtices Equações de Ginzburg-Landau Método de variáveis de ligação Supercondutores mesoscópicos

ABSTRACT

In search for better superconducting characteristics, we studied theoretically samples with dimensions close to the London penetration depth and coherence length. For such dimensions, superconductors of types I and II showed different responses to magnetic field. We found an effective Ginzburg-Landau parameter, so that for very small thickness (tending to zero), superconductors behave as type-II superconductors, with mixed state. We studied the energy in a mixed state, where the vortex entry reduces the energy of the superconductor.

In this work, the two Ginzburg-Landau equations were solved numerically, the first by a relaxation method, where the order parameter function is relaxed from an initial condition until convergence is achieved. For the second, we used the Fourier transform technique, to help us to solve it more easily in reciprocal space. To solve them numerically, we use the linkvariables method with gauge invariance, adapted for finite difference algorithm.

The study of the vortices dynamics have been made here for type-II superconductors with different thicknesses, square symmetry and different magnetic fields.

Keywords: Superconductivity. Vortices. Ginzburg-Landau equations. Link variables method. Mesoscopic superconductors.

LISTA DE FIGURAS

1	Resistência em ohms de uma amostra de mercúrio em função da temperatura em Kelvin.[20]	p. 13
2	Comparação entre supercondutor e condutor perfeito.	p. 14
3	Diagrama representando os parâmetros críticos do estado supercondutor.	p. 14
4	Comportamento da densidade de energia. Na figura (a) $\alpha > 0$, temos o estado normal e na figura (b) $\alpha < 0$, o estado supercondutor	p. 18
5	Distribuição espacial do parâmetro de ordem ψ e do campo magnético \vec{H} na interface supercondutora.	p. 22
6	Esboço do comportamento do parâmetro de ordem na interface vácuo-supercondutor	p. 23
7	Penetração de um campo magnético aplicado em um supercondutor semi-infinito. O comprimento de penetração λ é definido como a distância que o campo decai e . Em supercondutores puros, λ é da ordem de 500Å [14]	p. 25
8	Comprimento característico de London. [22]	p. 26
9	Magnetização em função do campo aplicado para supercondutor do tipo-I.	p. 27
10	Magnetização em função do campo aplicado para supercondutor do tipo-II.	p. 27
11	Distribuição do parâmetro de ordem ψ e do campo magnético B numa interface supercondutor-normal.(a) Supercondutor Tipo I, (b)supercondutor Tipo II.	p. 28
12	Primeira observação dos vórtices de Abrikosov em redes triangulares. "Perfeita" rede triangular de linhas de fluxo. Os pontos pretos consistem de pequenas partículas de cobalto. Figura retirada de [8].	p. 30
13	Distribuição de vórtices observado por Hess et al., figura retirada de [12].	p. 31
14	(a)Estrutura de um vórtice mostrando o comportamento do parâmetro de ordem e do campo. (b)Distribuição espacial das correntes supercondutoras.	p. 32

15	Malha de discretização utilizada nas simulações	p. 38
16	Módulo do parâmetro de ordem para uma amostra de lados $32\xi \times 32\xi$, para diferentes campos aplicados:(a) $H_e = 0.0$, (b) $H_e = 0.07$, (c) $H_e = 0.10$, (d) $H_e = 0.20$, (e) $H_e = 0.25$, (f) $H_e = 0.30$, (g) $H_e = 0.40$, (h) $H_e = 0.50$, (i) $H_e = 0.60$, (j) $H_e = 0.70$, (k) $H_e = 0.90$, (l) $H_e = 1.0$	p. 47
17	Módulo do parâmetro de ordem para uma amostra de lados $16\xi \times 16\xi$, para diferentes campos aplicados:(a) $H_e = 0.0$, (b) $H_e = 0.14$, (c) $H_e = 0.3$, (d) $H_e = 0.38$	p. 48
18	Módulo do parâmetro de ordem para uma amostra de lados $16\xi \times 16\xi$, para diferentes espessuras:(a) $d = 0.0$, (b) $d = 1.0 \times 10^{-5}\xi$, (c) $d = 0.10\xi$, (d) $d = 0.50\xi$	p. 49
19	Curva da energia em função do campo Aplicado H_e , para configuração 1.	p. 50
20	Curva da energia em função do campo Aplicado H_e , para configuração 2.	p. 51
21	Curva da energia em função do campo Aplicado H_e , para configuração 3.	p. 51

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	p. 12
1.1	Histórico	p. 12
1.2	Supercondutividade: Experimentos e Características	p. 13
2	TEORIAS FENOMENOLÓGICAS DA SUPERCONDUTIVIDADE E VÓRTICES.	p. 15
2.1	Introdução	p. 15
2.2	Modelo de London	p. 15
2.3	A Teoria de Ginzburg-Landau	p. 17
2.4	Equações de Ginzburg-Landau	p. 20
2.4.1	Primeira equação de Ginzburg-Landau	p. 20
2.4.2	Segunda equação de Ginzburg-Landau	p. 21
2.5	Comprimentos característicos	p. 22
2.5.1	Comprimento de Coerência	p. 23
2.5.2	Comprimento de Penetração de London	p. 25
2.6	Classificação dos Supercondutores	p. 26
2.7	Estado de Vórtices	p. 29
2.7.1	Quantização de fluxo	p. 29
2.7.2	Estrutura de um Vórtice	p. 31
2.8	Supercondutividade Mesoscópica	p. 33
2.9	Energia de um Supercondutor Tipo-II	p. 33
2.10	Validade da teoria de Ginzburg-Landau	p. 34

3	MÉTODO NUMÉRICO	p. 35
3.1	As equações de Ginzburg-Landau dependentes do tempo	p. 35
3.2	Método das variáveis de ligação	p. 36
3.2.1	Discretização da equação TDGL	p. 37
3.3	Solução da segunda equação de Ginzburg-Landau por transformada de Fourier	p. 40
4	ESTUDO DE VÓRTICES EM AMOSTRAS SUPERCONDUTORAS	p. 44
4.1	Configuração de vórtices em supercondutores tipo-II	p. 44
4.2	Energia de Supercondutores Tipo-II	p. 49
5	CONCLUSÃO	p. 52
	REFERÊNCIAS	p. 53

1 INTRODUÇÃO

1.1 Histórico

A descoberta da supercondutividade no início do século XX recebeu um destaque especial na comunidade científica. A possibilidade de termos um material conduzindo sem apresentar efeito Joule e com correntes persistentes era simplesmente fascinante.

Em 1911 Heike Kammerlingh Onnes descobriu o fenômeno da supercondutividade ao resfriar o mercúrio a uma temperatura de 4,2 K [26]. Somente 24 anos após a descoberta de H. K. Onnes é que foi desenvolvido o primeiro modelo para explicar a supercondutividade. Em 1935, os irmãos London desenvolvem o modelo fenomenológico [17]. Em 1950, Ginzburg e Landau [22] elaboraram outro modelo, também puramente fenomenológico, mas que aprimorava as idéias dos irmãos London. As duas teorias explicam o comportamento de um supercondutor em nível macroscópico. Porém, foi apenas em 1957 que J. Barden, L. N. Cooper e J. R. Schrieffer explicaram, microscopicamente esse fenômeno, onde se introduziu o conceito de pares de Cooper [4, 6]. Esta teoria BCS conseguiu explicar satisfatoriamente os mecanismos mecânico-quântico, responsáveis pela supercondutividade.

Em 1986, J. G. Bednorz e K. A. Muller descobrem os supercondutores cerâmicos de alta temperatura [7], materiais considerados isolantes. As teorias fenomenológicas de Ginzburg-Landau e dos irmãos London podem ser usadas para descrever tais materiais. Porém, a teoria microscópica ainda não foi desenvolvida ao ponto de descrever tanto o estado normal quanto o estado supercondutor [21].

A supercondutividade já superou várias barreiras para seu uso tecnológico; a temperatura crítica já alcançou 136 K [23], por exemplo.

1.2 Supercondutividade: Experimentos e Características

A supercondutividade foi observada pela primeira vez em 1911 por Heike Kammerlingh Onnes, [21] na cidade de Leiden, na Holanda. Três anos antes, a equipe que ele liderava conseguiu liquefazer, pela primeira vez, o hélio a uma temperatura de 4,2K. Com essa nova tecnologia, Onnes dedicou-se a estudar as propriedades elétricas dos metais em temperaturas muito baixas, usando o hélio líquido como refrigerante. Ao estudar a resistividade de uma amostra de mercúrio em função da temperatura, Onnes notou que a resistividade caía abruptamente e para um valor abaixo da resolução de seus equipamentos (ver figura 1) para a temperatura de 4,2K.

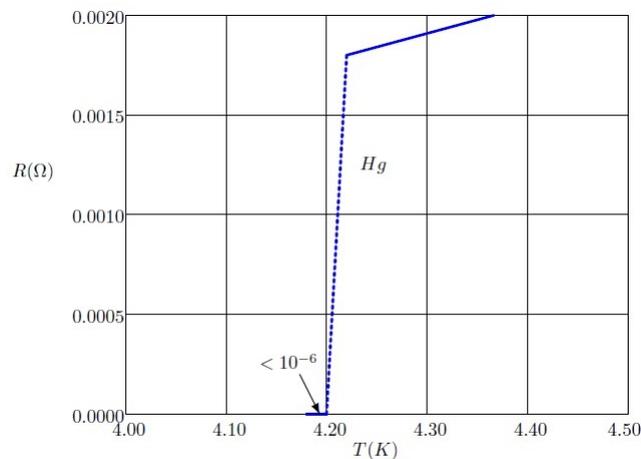


Figura 1: Resistência em ohms de uma amostra de mercúrio em função da temperatura em Kelvin.[20]

Onnes interpretou esta propriedade supondo que o mercúrio passa de um estado de resistividade normal para um novo estado, que Onnes o denominou de estado supercondutor.

Após a descoberta de Onnes, que o rendeu o prêmio Nobel de 1913, experimentos foram realizados na tentativa de encontrar outros metais, além do mercúrio, que possuía fase supercondutora. Hoje, a fase supercondutora é encontrada em vários metais e compostos metálicos e supercondutores cerâmicos [24], com temperaturas, chamadas de temperaturas críticas, variando de menor que 1K até 136K.

Em 1933, Walther Meissner e Robert Ochsenfeld [9] descobriram a propriedade que melhor caracteriza um supercondutor. Quando um supercondutor encontra-se abaixo da sua temperatura crítica T_c e submetido a um campo magnético abaixo de um campo crítico H_c , expulsa completamente o campo magnético de seu interior, comportando-se como um diamagnético perfeito. A este fenômeno deu-se o nome de efeito Meissner. Experimentos

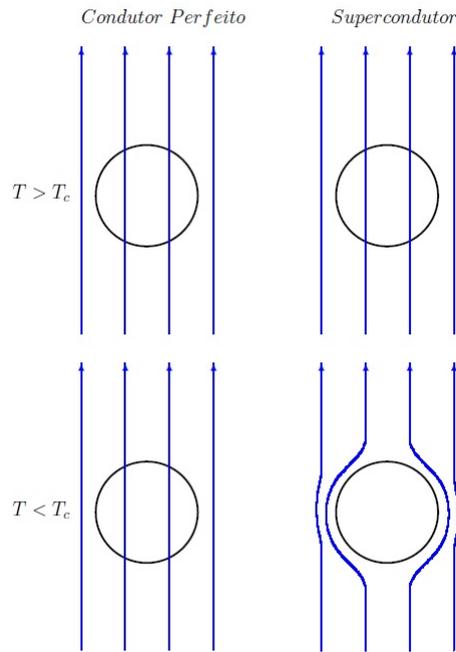


Figura 2: Comparação entre supercondutor e condutor perfeito.

demonstram que o estado supercondutor era mais que um condutor perfeito comum. O condutor perfeito não expulsa o campo magnético do seu interior se o campo magnético já estiver presente quando o condutor se torna perfeito. A expulsão do campo magnético depende da história magnética do material (ver figura 2).

O estado supercondutor é limitado pela temperatura crítica T_c e pelo campo magnético crítico H_c que são característicos de cada material. A supercondutividade também se limita a um valor de densidade corrente crítica J_c . A figura 3 [10] ilustra os valores críticos

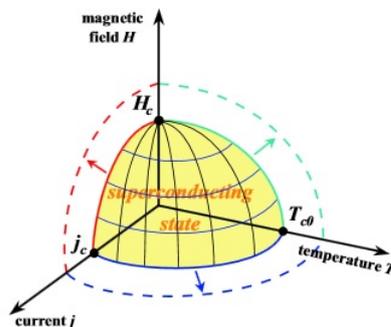


Figura 3: Diagrama representando os parâmetros críticos do estado supercondutor.

que limitam o estado supercondutor. Grandes esforços têm sido feitos para otimizar esses parâmetros e aumentar os valores críticos para o uso dos supercondutores no dia a dia.

2 TEORIAS FENOMENOLÓGICAS DA SUPERCONDUTIVIDADE E VÓRTICES.

2.1 Introdução

Em 1935, os irmãos London propuseram a primeira teoria fenomenológica para explicar o estado supercondutor, o modelo de London [17]. Partindo de um condutor perfeito e usando o modelo de dois fluidos, eles foram capazes de descrever o efeito Meissner e introduziram um novo parâmetro, o comprimento de penetração λ , que pode ser compreendido como a penetração superficial do campo magnético no supercondutor.

Em 1950, Vitaly Ginzburg e Lev Landau [19, 14] utilizaram o modelo que descrevia transições de fase de segunda ordem de Landau para desenvolver uma teoria detalhada, em nível macroscópico, do comportamento do supercondutor próximo a temperatura crítica. A teoria de Ginzburg-Landau é capaz de prever os fenômenos característicos do supercondutor, o comprimento de penetração de London λ e introduz um novo comprimento fundamental na supercondutividade, o comprimento de coerência ξ . Ambos são dependentes da temperatura T , porém a razão, $\kappa = \lambda(T)/\xi(T)$, chamada de parâmetro de Ginzburg-Landau, não depende. Essa teoria também prevê a existência de dois tipos de supercondutores, definidos pelo parâmetro de Ginzburg-Landau κ : tipo-I ($\kappa < 1/\sqrt{2}$) e tipo-II ($\kappa > 1/\sqrt{2}$).

2.2 Modelo de London

As características dos supercondutores conhecidos em 1935 eram três: a condutividade perfeita, o efeito Meissner e a capacidade do supercondutor de manter correntes sem

um campo magnético. Com o objetivo de formular uma teoria capaz de contemplar as características do supercondutor, London [17] propôs um tratamento clássico de um condutor perfeito submetido ao efeito de um campo elétrico. Para explicar as correntes persistentes do supercondutor a lei de Ohm é substituída pela equação:

$$\Lambda \dot{\vec{J}} = \vec{E}; \Lambda = \frac{m}{n \cdot e^2}. \quad (2.1)$$

Esta é conhecida como a primeira equação de London. Usando a lei de Ampère:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}, \quad (2.2)$$

utilizando essa equação na (2.1), temos a seguinte equação para o campo magnético:

$$\frac{\partial \nabla \times \vec{B}}{\partial t} = \frac{4\pi n e^2}{m c} \vec{J}. \quad (2.3)$$

Com auxílio da lei de Faraday:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

e aplicando o rotacional em ambos os lados da equação (2.1), obtém-se a segunda equação de London:

$$\nabla \times \nabla \times \dot{\vec{B}} = -\frac{4\pi n e^2}{m c^2} \dot{\vec{B}}. \quad (2.5)$$

Escrevendo na forma¹:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} + \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} = 0. \quad (2.6)$$

Onde λ é o comprimento de penetração de London e é definido por:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{4\pi n e^2}{m c^2}. \quad (2.7)$$

A equação (2.6) é conhecida como a segunda equação de London.

Podemos utilizar a relação vetorial $\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}$, ficamos com:

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} = 0$$

cuja a solução é:

$$\vec{B}(r) = \vec{B}_0 e^{-\frac{r}{\lambda}}$$

Por meio deste resultado, notamos que o campo magnético decai dentro do material

¹O lado direito da equação (2.6) é considerada nula. Isto será suficiente para descrever a penetração superficial do campo magnético. Porém essa equação não é nula quando houver nucleação de vórtices no supercondutor. Essa equação é imposta pela teoria de London.

exponencialmente com um comprimento característico λ

2.3 A Teoria de Ginzburg-Landau

A teoria de Ginzburg-Landau da supercondutividade é uma teoria fenomenológica construída sobre o modelo de Landau para descrever transições de fase de segunda ordem. Landau notou que uma transição de fase de segunda ordem típica envolve alguma mudança na simetria do sistema. O ponto central da teoria é a introdução de um parâmetro de ordem que desaparece acima de uma temperatura crítica, $T > T_c$, mas torna-se diferente de zero abaixo de T_c . Um exemplo é um ferro-magneto à temperatura de Curie, para o qual, acima da temperatura de Curie, T_c , o sistema apresenta momento magnético nulo, mas abaixo de T_c , um momento magnético aparece espontaneamente.

$$M = \begin{cases} 0 & T > T_c; \\ M(T) & T < T_c. \end{cases}$$

Landau também percebeu que se o parâmetro de ordem desenvolve-se continuamente de zero até abaixo de T_c , é possível expandir a energia livre numa série de potências do parâmetro de ordem [22]. Desprezando termos de ordens mais elevadas, a expansão assume a forma:

$$F = F_n + \alpha\omega + \frac{\beta}{2}\omega^2, \quad (2.8)$$

onde F_n é a energia correspondente ao estado normal e ω é o parâmetro de ordem, no caso da magnetização é o momento magnético M .

Para a supercondutividade, Ginzburg e Landau postularam a existência de um parâmetro de ordem complexo denotado por ψ , cujo modulo quadrado caracteriza o estado sistema supercondutor. Quando o sistema está acima da temperatura crítica T_c , no estado normal, o parâmetro é zero, enquanto que para temperatura abaixo da crítica, no estado supercondutor, o parâmetro é diferente de zero, ou seja:

$$|\psi|^2 = \begin{cases} 0 & T > T_c; \\ |\psi(T)|^2 & T < T_c. \end{cases}$$

O significado físico do parâmetro complexo ψ só ficou claro após o desenvolvimento da teoria microscópica de BCS. Gor'kov [11] foi capaz de derivar a teoria de Ginzburg-Landau e mostrar que $|\psi|^2$, menos algumas constantes numéricas, era a densidade de “pares de Cooper”, da teoria BCS, presentes na amostra.

Podemos usar a equação (2.8) para escrever a expansão da energia livre no supercondutor:

$$F - F_n = \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4, \quad (2.9)$$

que pode ser vista como uma expansão em série de potências de $|\psi|^2$ da diferença entre a densidade de energia dos estados supercondutor e normal e onde α e β são parâmetros fenomenológicos. O parâmetro β é uma constante sempre positiva e independente da

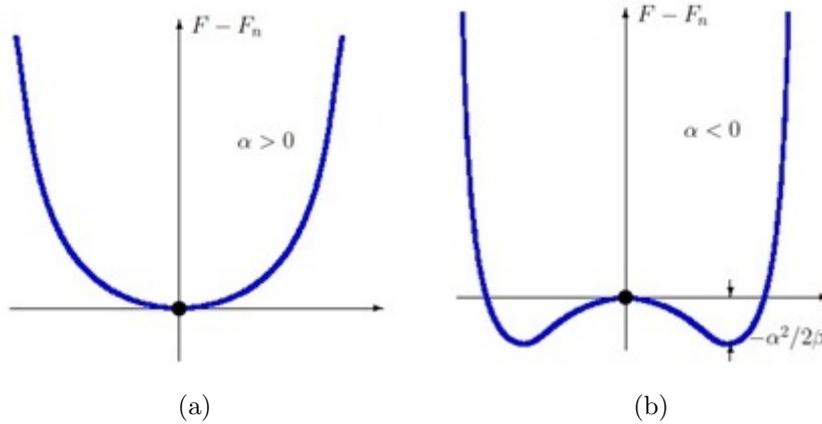


Figura 4: Comportamento da densidade de energia. Na figura (a) $\alpha > 0$, temos o estado normal e na figura (b) $\alpha < 0$, o estado supercondutor

temperatura. Já o parâmetro α pode assumir qualquer sinal. A figura 4 exhibe esquematicamente a função (2.9). Para modelarmos uma transição de fase de segunda ordem, o parâmetro de ordem deve ser associado com a temperatura e para uma temperatura T menor que a temperatura crítica T_c temos um mínimo diferente de zero. Como resultado obtemos a relação: $\alpha = \alpha_0 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)$, onde α_0 é uma constante sempre positiva.

Os mínimos de energia podem ser encontrados facilmente pela equação (2.9):

$$\frac{\partial(F - F_n)}{\partial|\psi|} = 0 \rightarrow [\alpha(T) + \beta|\psi|^2] |\psi| = 0.$$

Esta equação apresenta duas soluções:

$$\begin{cases} \alpha > 0 \rightarrow |\psi| = 0 & \text{para } T > T_c; \\ \alpha \leq 0 \rightarrow |\psi|^2 = -\frac{\alpha_0(1-\frac{T}{T_c})}{\beta} & \text{para } T < T_c. \end{cases}, \quad (2.10)$$

com um valor de energia:

$$F - F_n = -\frac{\alpha^2}{2\beta}. \quad (2.11)$$

Para uma descrição do estado supercondutor, podemos interpretar F como a energia

livre, sendo escrita na forma:

$$F = F_n + \int \mathfrak{F}_c[\psi(\vec{r})]d^3r, \quad (2.12)$$

onde

$$\mathfrak{F}_c = \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4. \quad (2.13)$$

Ao aplicarmos um campo magnético em um supercondutor, formam-se correntes que tendem a anular esse campo externo. Para incluir esse efeito, Ginzburg e Landau acrescentaram um termo associado à energia cinética dos pares de Cooper, já que poderia surgir um $\nabla\psi$ por influência do campo externo aplicado:

$$\mathfrak{F}_G = \frac{\hbar}{2m^*}|\nabla\psi|^2, \quad (2.14)$$

onde m^* é a massa dos pares de Cooper. Na presença de campo magnético é necessário que o sistema seja invariante de calibre, assim:

$$|\nabla\psi|^2 \rightarrow -i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}\vec{A}(\vec{r}). \quad (2.15)$$

A equação (2.14) torna-se:

$$\mathfrak{F}_G = \frac{1}{2m^*} \left| [-i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}\vec{A}] \psi \right|^2, \quad (2.16)$$

onde e^* e m^* são, respectivamente, a carga e a massa dos pares de Cooper e \vec{A} é o potencial vetor relacionado com o campo local $\vec{H} = \nabla \times \vec{A}$.

Finalmente, considerando a contribuição do campo magnético para a densidade de energia:

$$\mathfrak{F}_H = \frac{1}{8\pi}(\vec{H} - \vec{H}_0)^2, \quad (2.17)$$

onde H_0 é o campo magnético aplicado.

A densidade de energia total agora pode ser descrita como:

$$F - F_n = \int (\mathfrak{F}_c + \mathfrak{F}_G + \mathfrak{F}_H)d^3r, \quad (2.18)$$

$$F - F_n = \int \left\{ \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| (-i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}\vec{A}) \psi \right|^2 + \frac{(\vec{H} - \vec{H}_0)^2}{8\pi} \right\} d^3r.$$

As equações de Ginzburg–Landau podem ser encontradas minimizando o funcional da densidade de energia (2.18) em relação ao parâmetro de ordem ψ e ao potencial vetor

\vec{A} através das equações de Euler-Lagrange (2.19) e (2.20).

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \psi^\dagger} - \nabla \left[\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial (\nabla \psi^\dagger)} \right] = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vec{A}} - \nabla \times \left[\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial (\nabla \times \vec{A})} \right] = 0, \quad (2.20)$$

onde

$$\mathfrak{F} = \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| (-i\hbar \nabla - \frac{e^*}{c} \vec{A}) \psi \right|^2 + \frac{(\vec{H} - \vec{H}_0)^2}{8\pi}$$

2.4 Equações de Ginzburg-Landau

2.4.1 Primeira equação de Ginzburg-Landau

A energia livre de Gibbs de um supercondutor pode ser escrita pela equação (2.18):

$$F - F_n = \int \left\{ \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| (-i\hbar \nabla - \frac{e^*}{c} \vec{A}) \psi \right|^2 + \frac{(\vec{H} - \vec{H}_0)^2}{8\pi} \right\} d^3r$$

Usamos primeiramente a equação (2.19) para obter o mínimo de energia.

Utilizando o fato que $|\psi|^4 = (\psi^\dagger \psi)^2$, $\frac{\partial |\psi|^4}{\partial \psi^\dagger} = 2|\psi|^2 \psi^\dagger$ e reescrevendo o termo do gradiente como:

$$\begin{aligned} \left| \left(-i\hbar \nabla - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right) \psi \right|^2 &= \left(-i\hbar \nabla - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right) \psi \cdot \left(i\hbar \nabla - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right) \psi^\dagger \\ \left| \left(-i\hbar \nabla - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right) \psi \right|^2 &= \vec{\varphi} \cdot \left(i\hbar \nabla - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right) \psi^\dagger, \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde $\vec{\varphi} = \left(-i\hbar \nabla - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right) \psi$, nos dá, a partir da equação (2.19):

$$\begin{aligned} \alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi + \frac{1}{2m^*} \left[\vec{\varphi} \cdot \left(-\frac{e^*}{c} \vec{A} \right) \right] - \frac{1}{2m^*} (i\hbar \nabla \vec{\varphi}) &= 0 \\ \alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi + \frac{1}{2m^*} \left[\left(-i\hbar \nabla - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right) \cdot \left(-\frac{e^*}{c} \vec{A} \right) - i\hbar \nabla \cdot \left(-i\hbar \nabla - \frac{e^*}{c} \vec{A} \right) \right] \psi &= 0 \\ \alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi + \frac{1}{2m^*} \left[\left(i\hbar \frac{e^*}{c} \nabla \vec{A} + \left(\frac{e^*}{c} \right)^2 \vec{A}^2 \right) + (i\hbar)^2 \nabla^2 + i\hbar \frac{e^*}{c} \vec{A} \right] \psi &= 0 \\ \alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi + \frac{1}{2m^*} \left[-\hbar^2 \nabla^2 + 2i\hbar \frac{e^*}{c} \nabla \vec{A} + \left(\frac{e^*}{c} \right)^2 \vec{A}^2 \right] \psi &= 0 \end{aligned}$$

$$\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi - \frac{\hbar^2}{2m^*} \left[\nabla^2 - 2i\frac{e^*}{\hbar c}\nabla\vec{A} + \left(\frac{e^*}{\hbar c}\right)^2 \vec{A}^2 \right] \psi = 0$$

$$\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi - \frac{\hbar^2}{2m^*} \left[\nabla - \left(\frac{ie^*}{\hbar c}\right) \vec{A} \right]^2 \psi = 0. \quad (2.22)$$

A equação (2.22) é conhecida como primeira equação de Ginzburg-Landau e tem forma semelhante a equação de Schrödinger.

2.4.2 Segunda equação de Ginzburg-Landau

Para obtermos a segunda equação de Ginzburg-Landau, usamos a equação (2.20).

Reescrevendo o termo do gradiente como:

$$\left| \left(-i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}\vec{A} \right) \psi \right|^2 = \left(i\hbar\nabla\psi^\dagger - \frac{e^*}{c}\vec{A}\psi^\dagger \right) \cdot \left(-i\hbar\nabla\psi - \frac{e^*}{c}\vec{A}\psi \right), \quad (2.23)$$

e o termo do campo como:

$$\vec{H} - \vec{H}_0 = (\nabla \times \vec{A} - \vec{H}_0)^2 \quad (2.24)$$

Ficamos com o funcional \mathfrak{F} :

$$\mathfrak{F} = \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left(i\hbar\nabla\psi^\dagger - \frac{e^*}{c}\vec{A}\psi^\dagger \right) \left(-i\hbar\nabla\psi - \frac{e^*}{c}\vec{A}\psi \right) + \frac{(\nabla \times \vec{A} - \vec{H}_0)^2}{8\pi} \quad (2.25)$$

Minimizando o funcional da energia livre, temos o primeiro termo:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vec{A}} = \frac{1}{2m^*} \left[\left(-\frac{e^*}{c}\psi^\dagger \right) \cdot \left(-i\hbar\nabla\psi - \frac{e^*}{c}\vec{A}\psi \right) + \left(i\hbar\nabla\psi^\dagger - \frac{e^*}{c}\vec{A}\psi^\dagger \right) \cdot \left(-\frac{e^*}{c}\psi \right) \right]$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vec{A}} = \frac{1}{2m^*} \left[\frac{i\hbar e^*}{c}\psi^\dagger\nabla\psi + \left(\frac{e^*}{c}\right)^2\psi^\dagger\vec{A}\psi - \frac{i\hbar e^*}{c}\psi\nabla\psi^\dagger + \left(\frac{e^*}{c}\right)^2\psi^\dagger\vec{A}\psi \right]$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vec{A}} = \frac{1}{2m^*} \left[\frac{i\hbar e^*}{c}(\psi^\dagger\nabla\psi - \psi\nabla\psi^\dagger) + 2\left(\frac{e^*}{c}\psi^\dagger\vec{A}\psi\right) \right] \quad (2.26)$$

. O segundo termo:

$$\nabla \times \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial (\nabla \times \vec{A})} \right) = \frac{\nabla \times \nabla \times \vec{A} - \vec{H}_0}{4\pi}. \quad (2.27)$$

Ficamos com a equação:

$$\left[\frac{i\hbar e^*}{2cm^*}(\psi^\dagger\nabla\psi - \psi\nabla\psi^\dagger) + \frac{1}{m^*}\left(\frac{e^*}{c}\right)^2\psi^\dagger\vec{A}\psi \right] + \frac{\nabla \times \nabla \times \vec{A} - \vec{H}_0}{4\pi} = 0,$$

reorganizando os termos,

$$\frac{\nabla \times \nabla \times \vec{A} - \vec{H}_0}{4\pi} = \frac{i\hbar e^*}{2cm^*} (\psi^\dagger \nabla \psi - \psi \nabla \psi^\dagger) + \frac{1}{m^*} \left(\frac{e^*}{c}\right)^2 \psi^\dagger \vec{A} \psi,$$

como

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_s \rightarrow \vec{J}_s = \frac{c}{4\pi} (\nabla \times \nabla \times \vec{A} - \vec{H}_0)$$

logo

$$\vec{J}_s = -\frac{i\hbar e^2}{2m^*} (\psi^\dagger \nabla \psi - \psi \nabla \psi^\dagger) - \frac{(e^*)^2}{c \cdot m^*} \vec{A} |\psi|^2. \quad (2.28)$$

Esta é conhecida como segunda equação de Ginzburg-Landau.

2.5 Comprimentos característicos

Existem dois comprimentos fundamentais no contexto da teoria de Ginzburg-Landau: o comprimento de penetração de London $\lambda(T)$ e o comprimento de coerência $\xi(T)$. O comprimento de penetração, recuperaremos a equação (2.7) com uma pequena mudança, mede a variação espacial do campo magnético dentro do supercondutor. Já o comprimento de coerência é uma medida que caracteriza a variação espacial do parâmetro de ordem, conforme pode ser visto na figura 5.

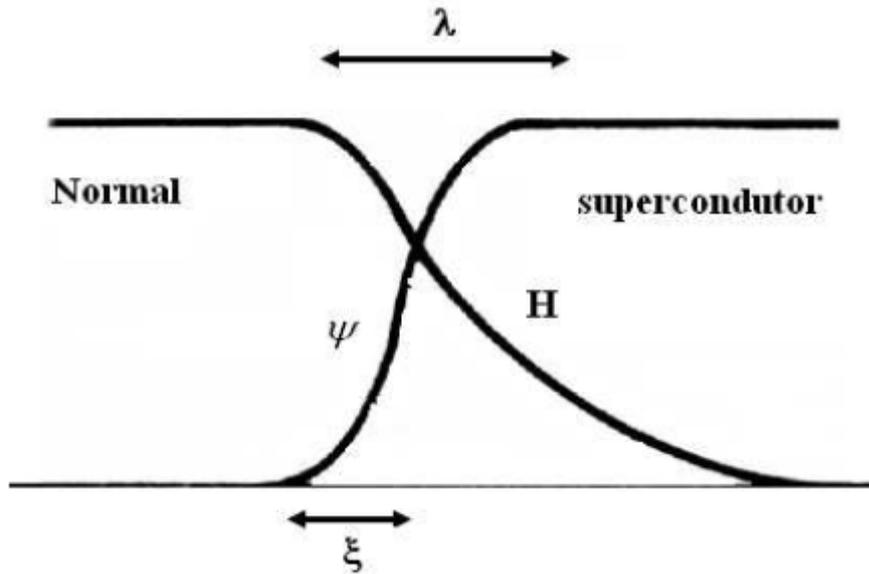


Figura 5: Distribuição espacial do parâmetro de ordem ψ e do campo magnético \vec{H} na interface supercondutora.

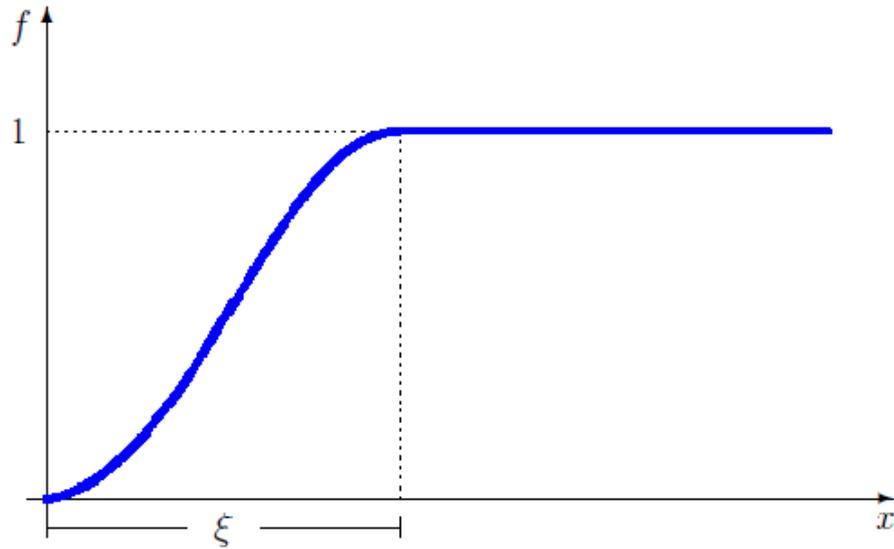


Figura 6: Esboço do comportamento do parâmetro de ordem na interface vácuo-supercondutor

2.5.1 Comprimento de Coerência

O comprimento de coerência está relacionado com a variação espacial da densidade de pares de Cooper. Ele indica o comprimento típico sobre o qual o parâmetro de ordem pode variar. Pode ser visto também como uma distância característica a partir da superfície da amostra ou do núcleo de um vórtice onde o valor do parâmetro de ordem cresce até um valor máximo, conforme está ilustrado na figura 6.

Para obter o comprimento de coerência, considera-se o caso em que o parâmetro de ordem varia apenas em uma direção, por exemplo x , na ausência de um campo magnético. Neste caso, a primeira equação de Ginzburg-Landau (2.22) pode ser escrita na forma unidimensional:

$$\alpha + \beta\psi^3 - \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\psi}{dx^2} = 0. \quad (2.29)$$

No estado supercondutor, α é negativo. Podemos escrever $\alpha = -|\alpha|$ e introduzir o parâmetro de ordem adimensional:

$$f = \sqrt{\frac{\beta}{|\alpha|}} \psi, \quad (2.30)$$

com as substituições, obtemos:

$$\xi^2 \frac{d^2 f}{dx^2} - f + f^3 = 0. \quad (2.31)$$

Pode-se observar que o coeficiente da segunda derivada tem unidades de quadrado de

comprimento e é definido por:

$$\xi = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|}}, \quad (2.32)$$

ele é conhecido como comprimento de coerência. Notemos que por depender de α o comprimento de coerência depende da temperatura e pode ser escrito na forma:

$$\xi(T) = \frac{\xi_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)}}. \quad (2.33)$$

Podemos determinar a dependência do parametro de ordem f com relação a ξ se analisarmos o caso de um supercondutor semi-infinito. Podemos admitir como condições de contorno que, para $x \rightarrow \infty$, temos $f^2 = 1$, pois num ponto longe da fronteira a amostra é totalmente supercondutora, e $\frac{df}{dx} = 0$.

Multiplicando a equação (2.31) por $\frac{df}{dx}$, integrando, obtemos:

$$\frac{-\xi^2 f'^2}{2} - \frac{f^2}{2} + \frac{f^4}{4} = 0, \quad (2.34)$$

aqui usamos a notação $f' = df/dx$. derivando em relação a x :

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{-\xi^2 f'^2}{2} - \frac{f^2}{2} + \frac{f^4}{4} \right] = 0, \quad (2.35)$$

onde encontramos que:

$$\frac{-\xi^2 f'^2}{2} - \frac{f^2}{2} + \frac{f^4}{4} = C. \quad (2.36)$$

Utilizando as condições de contorno que definimos anteriormente, $f' = 0$ e $f^2 = 1$, determinamos o valor da constante C :

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = C \rightarrow C = -\frac{1}{4},$$

substituindo o valor de C , temos:

$$\xi^2 (f')^2 = \frac{1}{2}(1 - f^2)^2. \quad (2.37)$$

Esta equação pode ser resolvida por métodos de integração. Encontramos:

$$f = \operatorname{arctanh} \left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi} \right). \quad (2.38)$$

O comportamento desta função está ilustrada na figura 6, como foi antecipado no começo da seção.

2.5.2 Comprimento de Penetração de London

O segundo comprimento característico está relacionado com a variação espacial do campo magnético no interior do supercondutor. Ele pode ser obtido, considerando-se uma região do supercondutor onde a densidade de pares de Cooper é constante e pode ser aproximado, em primeira ordem por $n_s = |\psi|^2 = |\alpha|/\beta$. A densidade de corrente supercondutora (2.28) torna-se:

$$\vec{J} = -\frac{(e^*)^2}{m^*c}|\psi|^2\vec{A}. \quad (2.39)$$

Aplicando o rotacional e substituindo na Lei de Ampère (2.2):

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = -\frac{4\pi(e^*)^2}{m^*c^2}|\psi|^2\vec{H}, \quad (2.40)$$

onde obtemos a equação de London (2.5), utilizando a identidade vetorial $\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2\vec{H}$, ficamos com:

$$\nabla^2\vec{H} = \frac{4\pi(e^*)^2|\psi|^2}{m^*c} \vec{H} \quad (2.41)$$

cuja solução é dada por $H = H'\exp(-\frac{r}{\lambda})$. O campo decai exponencialmente com a posição. Assim, λ é o comprimento típico no qual o campo magnético pode variar, que pode ser definido como:

$$\lambda = \sqrt{\frac{m^*c^2}{4\pi e^*|\psi|^2}}. \quad (2.42)$$

Podemos usar o valor do parâmetro de ordem e reescrever a equação (2.42) como:

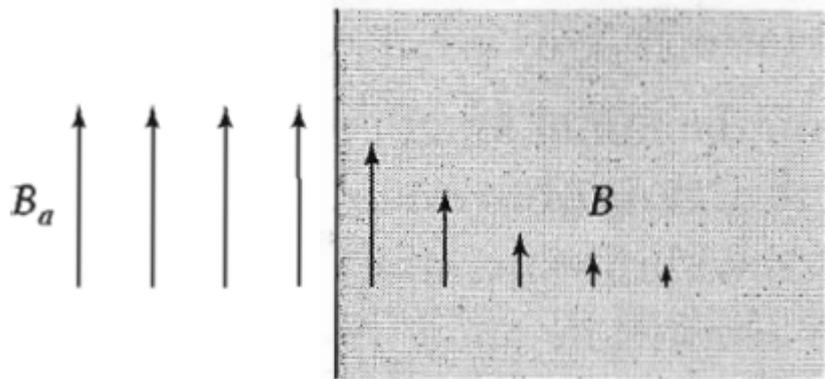


Figura 7: Penetração de um campo magnético aplicado em um supercondutor semi-infinito. O comprimento de penetração λ é definido como a distância que o campo decai e . Em supercondutores puros, λ é da ordem de 500\AA [14].

$$\lambda = \sqrt{\frac{m^*c^2\beta}{4\pi e^*|\alpha|}}. \quad (2.43)$$

Assim como o comprimento de coerência, o comprimento de penetração de London possui dependência com a temperatura na forma:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)}} \quad (2.44)$$

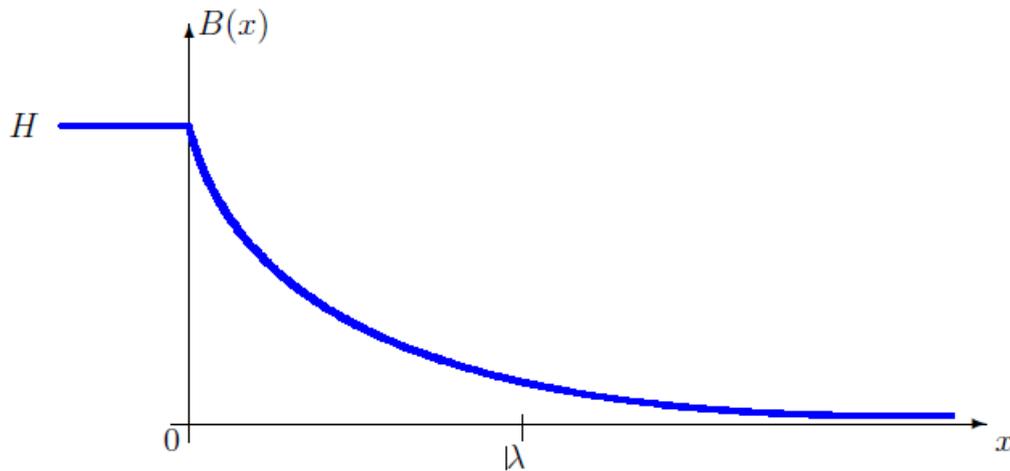


Figura 8: Comprimento característico de London. [22] .

2.6 Classificação dos Supercondutores

Os comprimentos fundamentais que foram apresentados na seção anterior dependem da temperatura, porém é possível introduzir um parâmetro que não depende. O parâmetro de Ginzburg-Landau κ é dado pela razão entre λ e ξ :

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi}. \quad (2.45)$$

Este parâmetro caracteriza o material supercondutor em dois tipos: Tipo-I ($\kappa < 1/\sqrt{2}$) e Tipo-II ($\kappa > 1/\sqrt{2}$)

O supercondutor do tipo I, são aqueles em que em seu interior o campo permanece zero até que bruscamente a supercondutividade é destruída, ou seja, sofre uma transição de fase de primeira ordem quando na presença de um campo magnético aplicado. A fig. 9 ilustra tal descontinuidade. No caso, a magnetização apresenta um ponto de descontinuidade,

conhecido como campo crítico $H_c(T)$. Portanto, supercondutores do tipo-I possuem dois

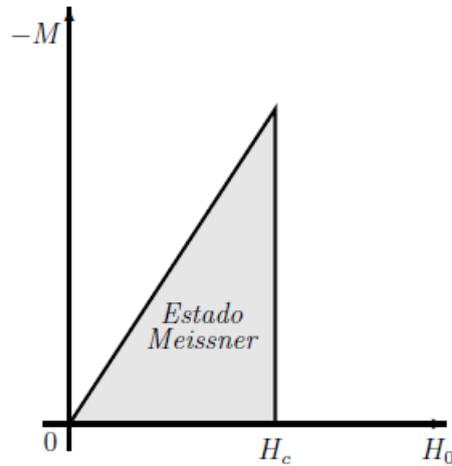


Figura 9: Magnetização em função do campo aplicado para supercondutor do tipo-I.

estados: Meissner e normal. Tipicamente, esses supercondutores têm $\lambda \approx 500\text{\AA}$ e $\xi \approx 3000\text{\AA}$, de modo que $\kappa \ll 1$.

Em 1957, Abrikosov [1] publicou seu trabalho que estudava o que acontecia com a teoria de Ginzburg-Landau se $\xi < \lambda$, ou seja, se κ fosse grande.

Abrikosov encontrou, que ao invés de uma transição de primeira ordem (uma descontinuidade na magnetização), existe um crescimento contínuo do fluxo de campo que penetra no supercondutor. A magnetização diminui de forma contínua, a partir de um campo H_{c1} e atingindo H_{c2} , no qual a supercondutividade é destruída. Esse comportamento foi tão diferente que Abrikosov resolveu chamá-lo de supercondutor do tipo-II.

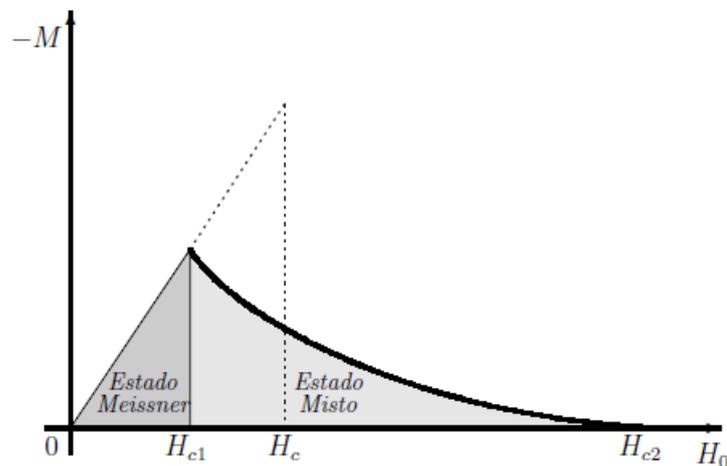


Figura 10: Magnetização em função do campo aplicado para supercondutor do tipo-II.

A penetração parcial do campo magnético cria um estado misto, como pode ser observado na figura 10, onde há uma coexistência de regiões supercondutoras e normais. Nesse estado misto a energia diamagnética para manter o campo fora do supercondutor é menor. Assim, o campo H_{c2} pode ser muito maior que H_{c1} , dessa forma, supercondutores do tipo-II suportam alto campo magnético sem destruir a supercondutividade.

Pela definição do parâmetro de Ginzburg-Landau κ , supercondutores do tipo I possuem comprimento de penetração de London menor que o comprimento de coêrencia. Para o supercondutor do tipo II, o comprimento de London é maior que o comprimento de coêrencia. Essa relação entre os comprimentos característicos está ilustrado na figura 11.

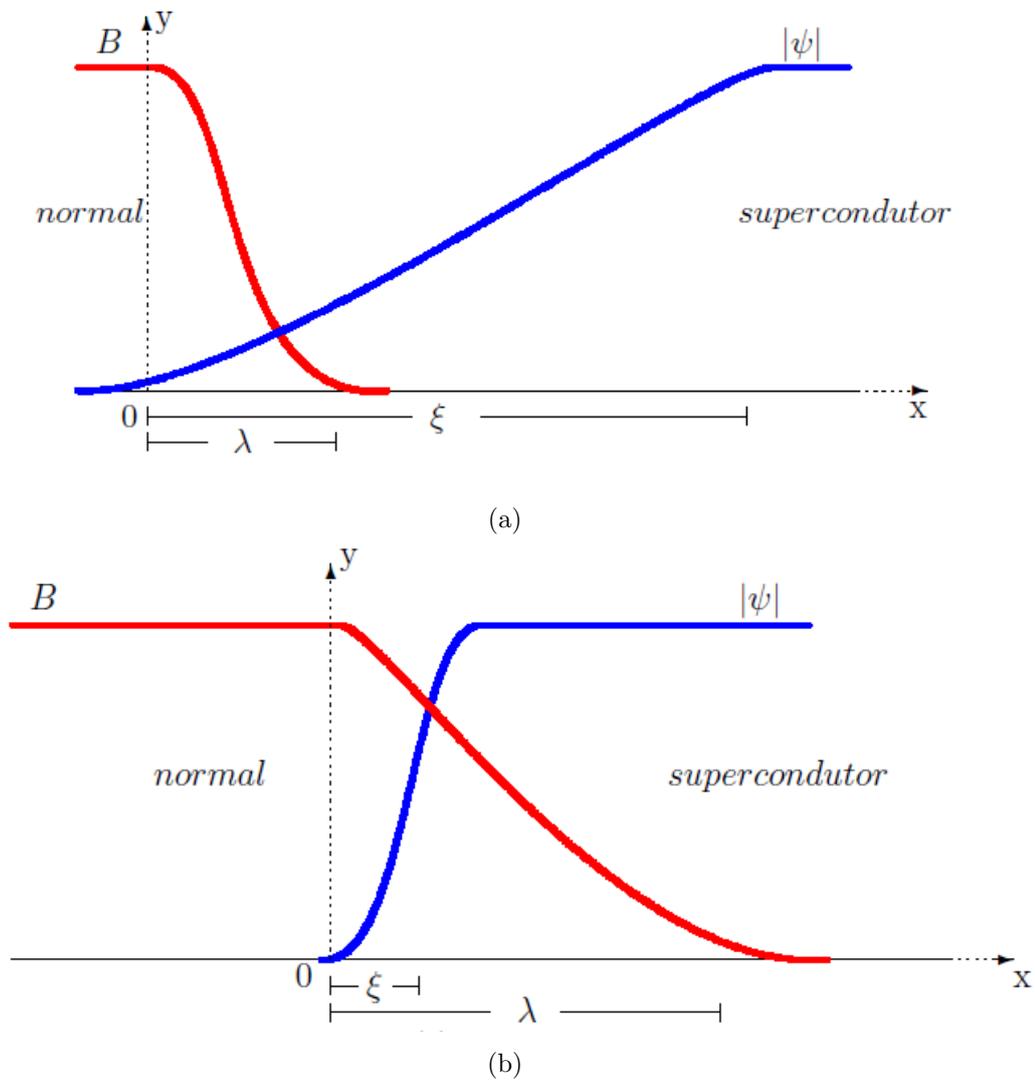


Figura 11: Distribuição do parâmetro de ordem ψ e do campo magnético B numa interface supercondutor-normal.(a) Supercondutor Tipo I, (b)supercondutor Tipo II.

2.7 Estado de Vórtices

Vórtices na natureza são movimentos ao redor de um centro de rotação ou um escoamento giratório, em que as linhas de corrente apresentam um padrão circular ou espiral. No caso da supercondutividade, um vórtice é um escoamento giratório de linhas de corrente, que carregam um fluxo magnético [20]. Aparecem naturalmente no estado misto de um supercondutor do tipo II.

2.7.1 Quantização de fluxo

A entrada do fluxo magnético em supercondutores do tipo II ocorre de forma quantizada em unidades de quantum de fluxo [2].

O estado supercondutor é caracterizado pelo parâmetro de ordem, que pode ser escrito na forma:

$$\psi = |\psi|e^{i\phi}$$

Substituindo o parâmetro de ordem na segunda equação de Ginzburg-Landau:

$$\vec{J} = \frac{2e^*\hbar}{m^*}|\psi|^2\nabla\phi - \frac{4e^{*2}}{m^*c}\vec{A}|\psi|^2. \quad (2.46)$$

Esta equação pode ser escrita na forma, isolando o potencial vetor:

$$\vec{A} = \Phi_0\nabla\psi - \frac{m^*e^*c}{4e^{*2}|\psi|^2}\vec{J}, \quad (2.47)$$

onde $\Phi_0 = \hbar c/2e^*$.

Podemos usar o teorema de Stokes:

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \int_S \vec{H} \cdot \vec{n} dS = \Phi, \quad (2.48)$$

integrando o potencial vetor da equação (2.47), encontramos:

$$\Phi_0 \oint_C \nabla\phi \cdot d\vec{r} - \frac{m^*c}{4e^{*2}} \oint_C \frac{\vec{J}}{|\psi|^2} \cdot d\vec{r} = \Phi. \quad (2.49)$$

Em uma volta completa em torno do centro de rotação do vórtice, a fase varia de 2π . Admitindo que dentro da superfície fechada C a existência de n quanta, temos:

$$\Phi = n\Phi_0 - \frac{m^*c}{4e^{*2}} \oint_C \frac{\vec{J}}{|\psi|^2} \cdot d\vec{r}. \quad (2.50)$$

Para supercondutores macroscópicos, se o circuito C for de dimensões muito maiores que

o comprimento de penetração λ , podemos considerar $\vec{J} \approx 0$ [20] [22]. Assim o segundo termo da equação (2.50) desaparece e ficamos com:

$$\Phi = n\Phi_0, \quad (2.51)$$

onde o quanta de fluxo magnético que atravessa o supercondutor é dado por:

$$\Phi_0 = \frac{hc}{2e^*} = 2,07 \cdot 10^{-7} \text{G} \cdot \text{cm}^2 \quad (2.52)$$

Os vórtices penetram o supercondutor de forma quantizada e em redes triangulares regulares de tubos de fluxo[15], embora Abrikosov inicialmente tenha predito que a rede seria retangular[1]. Esse estado de vórtices foi encontrado experimentalmente pela primeira vez por U. Essmann e H. Trauble [8](figura 12) e posteriormente por Hess et al. em 1989 [12](figura 13).

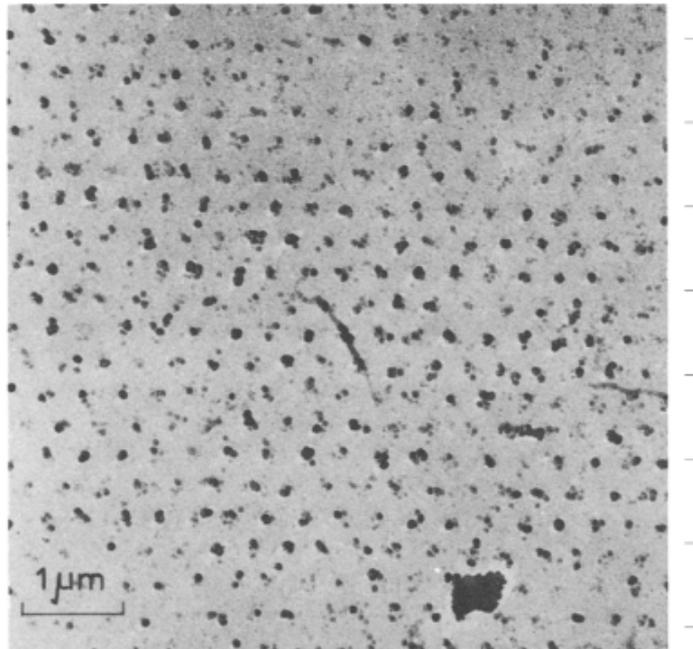


Fig. 1. "Perfect" triangular lattice of flux lines on the surface of a lead-4at%indium rod at 1.1°K. The black dots consist of small cobalt particles which have been stripped from the surface with a carbon replica.

Figura 12: Primeira observação dos vórtices de Abrikosov em redes triangulares. "Perfeita" rede triangular de linhas de fluxo. Os pontos pretos consistem de pequenas partículas de cobalto. Figura retirada de [8].

Nos supercondutores do tipo II, o estado Meissner existe somente para campos me-

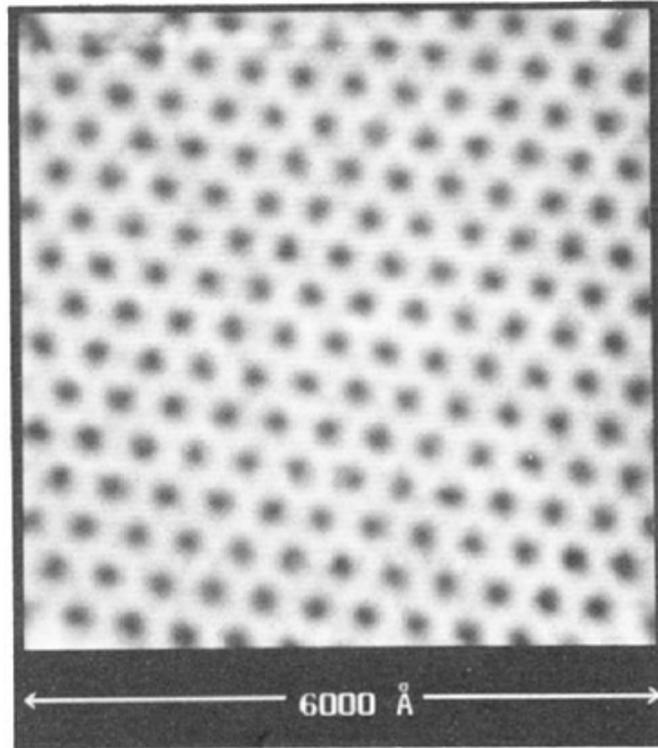


Figura 13: Distribuição de vórtices observado por Hess et al., figura retirada de [12].

nores que $H_{c1} < H_c$, onde [10]:

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \ln(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2}\kappa} H_c \ln(\kappa), \quad (2.53)$$

com $H_c = \Psi_0/2\sqrt{2}\pi\lambda\xi$. Para campos mais intensos, entra-se no estado misto, com formação de vórtices. Quanto mais intenso o campo, mais vórtices penetram o supercondutor, até o campo crítico H_{c2} , que é dado por:

$$H_{c2} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi^2} = \sqrt{2}\kappa H_c. \quad (2.54)$$

2.7.2 Estrutura de um Vórtice

A solução de Abrikosov consistia de uma série de regiões paralelas ao campo externo, onde o parâmetro de ordem decai até zero. Estas regiões possuem uma extensão da ordem de $\sim \xi$ e carregam o fluxo quantizado encontrado na subseção anterior. Este fluxo é garantido por correntes circulando ao seu redor que decaem à extensão do comprimento de penetração de London. Assim, no centro do vórtice, o parâmetro de ordem é zero e o campo magnético é máximo, como pode ser observado na figura 14.

Uma estimativa do campo magnético pode ser feita se considerarmos o limite $\xi \ll \lambda$.

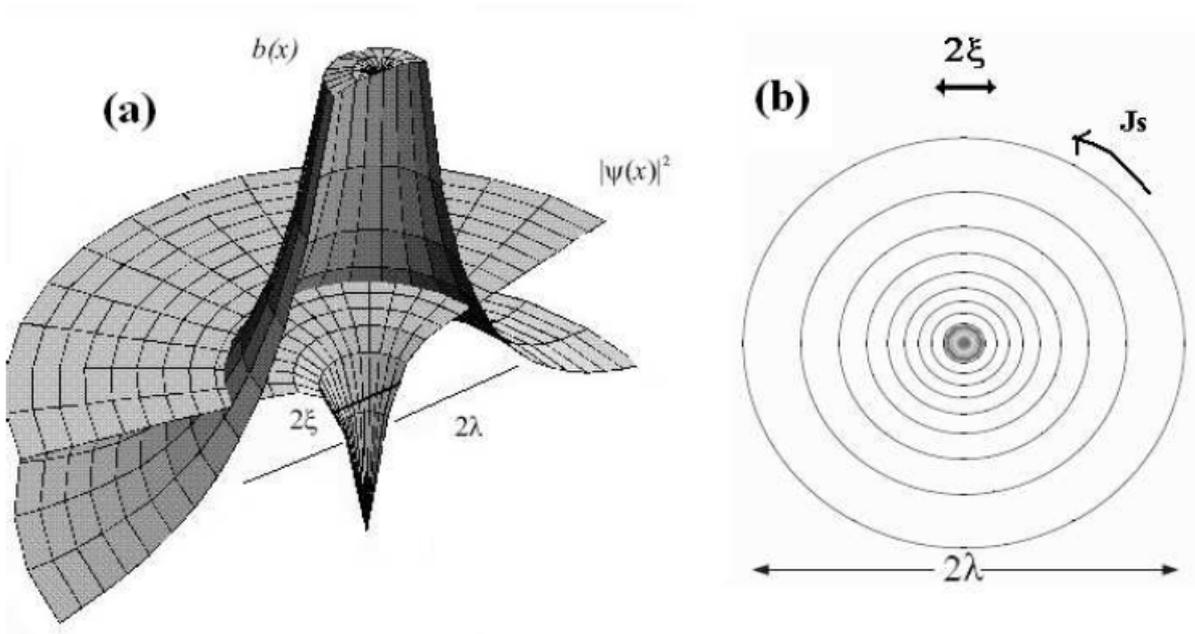


Figura 14: (a) Estrutura de um vórtice mostrando o comportamento do parâmetro de ordem e do campo. (b) Distribuição espacial das correntes supercondutoras.

Nesse limite podemos considerar $|\psi|^2$ constante em todo o espaço, exceto no núcleo do vórtice. Utilizando a lei de Ampere (2.2), a segunda equação de Ginzburg-Landau (2.28) e a condição da fase:

$$\nabla \times \nabla \phi = \Phi_0 \delta(\vec{r}) \quad (2.55)$$

encontramos a equação de London:

$$-\lambda^2 \nabla^2 \vec{B} + \vec{B} = \vec{k} \Phi_0 \delta(\vec{r}). \quad (2.56)$$

A solução desta equação pode ser encontrada usando a transformada de Fourier[5]. Temos que:

$$\vec{B} = \vec{k} \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0(r/\lambda), \quad (2.57)$$

onde $K_0(x)$ é função de Bessel modificada de ordem zero. Analisemos os limites assintóticos da função de Bessel modificada:

- para $r \gg \lambda$ a função $K_0(r/\lambda)$ decai exponencialmente na forma $\sqrt{\pi\lambda/2r} e^{-r/\lambda}$
- para $r \ll \lambda$ a função $K_0(r/\lambda)$ diverge logaritmicamente na forma $\ln(\lambda/r)$

Pelo primeiro item, observamos que a interação entre vórtices é de curto alcance. Pelo segundo item, na escala de baixos comprimentos o campo magnético diverge logaritmicamente.

2.8 Supercondutividade Mesoscópica

Com a nanotecnologia, é possível fabricar supercondutores com dimensões da ordem dos comprimentos fundamentais, λ e ξ . Amostras com essas dimensões são consideravelmente influenciadas pelos efeitos de confinamento e esses supercondutores são chamados de mesoscópicos. Na supercondutividade, a configuração de vórtices depende das condições de contorno e da geometria da amostra. Com isso, supercondutores mesoscópicos apresentam comportamento diferente em relação a supercondutores macroscópicos.

Para supercondutores com espessura menor que o comprimento de London [19], podemos considerar que a corrente é homogênea ao longo da espessura. Consequentemente, a corrente não possui componente z e as condições de contorno de um supercondutor (não há fluxo de corrente nas bordas do supercondutor) são satisfeitas no topo e na parte de baixo. Assim, para supercondutores com espessura $d < \lambda, \xi$, podemos assumir uma distribuição uniforme de corrente na direção z . A primeira equação de Ginzburg-Landau (2.22) é reduzida de um problema em três dimensões para duas dimensões, que pode ser resolvido por método numérico. A segunda equação de Ginzburg-Landau (2.28) pode ser resolvida usando transformada de Fourier. Faremos isso no capítulo 3.

A diferenciação de supercondutores do tipo-I e do tipo-II com espessuras comparáveis aos comprimentos fundamentais não depende somente do parâmetro de Ginzburg-Landau κ , mas da espessura do supercondutor. Encontramos um κ_{eff} que depende da espessura e é conhecido como parâmetro de Ginzburg-Landau efetivo:

$$\kappa_{eff} = \frac{\kappa^2}{d}, \quad (2.58)$$

onde a espessura d está em unidades de ξ .

Assim, dependendo da espessura do supercondutor, podemos ter um estado misto mesmo em supercondutores do tipo-I, em que $\kappa_{eff} > 1/\sqrt{2}$.

2.9 Energia de um Supercondutor Tipo-II

A energia de um supercondutor pode ser encontrada resolvendo a integral da energia livre de Gibbs, equação (2.18). Podemos simplificar a integral utilizando a primeira equação de Ginzburg-Landau. multiplicando a equação (2.22) pelo conjugado do parâmetro de or-

dem ψ^\dagger , obtemos:

$$\alpha|\psi|^2 + \beta|\psi|^4 - \frac{\hbar^2}{2m^*} \left[\nabla - \left(\frac{ie^*}{\hbar c} \right) \vec{A} \right]^2 |\psi|^2 = 0. \quad (2.59)$$

Substituindo na integral da energia, equação (2.18):

$$E = \int \left\{ -\frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{(\vec{H} - \vec{H}_0)^2}{8\pi} \right\} d^3r. \quad (2.60)$$

A integral pode ser resolvida por método numérico, porém, em geral, a energia E é proporcional a $\xi - \lambda$ [16]. Assim, para tipo-I a energia é positiva e para supercondutores tipo-II, negativa.

No estado misto, o sistema procura minimizar a energia. Quando o campo magnético aumenta, o sistema diminui a energia com a entrada de vórtices.

2.10 Validade da teoria de Ginzburg-Landau

Na teoria de Ginzburg-Landau, a energia livre pode ser expandida em potências de $|\psi|^2$, já que próximo à temperatura crítica, a magnitude do parâmetro de ordem é pequena [20]. Gor'kov mostrou teoricamente que a expansão de Landau é válida para $T \approx T_c$, podendo-se então obter as equações de Ginzburg-Landau como um caso limite da teoria microscópica BCS [11].

São condições necessárias para a validade das equações de Ginzburg-Landau:

- ψ deve ser uma função que varia suavemente no espaço sob distâncias da ordem de ξ_0
- \vec{A} e \vec{H} devem ser funções com variações suaves no espaço sob uma distância da ordem de ξ_0

De Gennes demonstrou que o modelo de Ginzburg-Landau é válido para qualquer temperatura na presença de campos magnéticos fortes [22].

3 MÉTODO NUMÉRICO

Neste capítulo introduziremos as equações de Ginzburg-Landau dependentes do tempo e o método numérico de variáveis de ligação para encontrar as soluções. Discretizaremos as equações e mostraremos condições de contorno que podem ser utilizadas.

3.1 As equações de Ginzburg-Landau dependentes do tempo

Para estudar a dinâmica do sistema é necessário generalizar a equação de Ginzburg-Landau (2.22) para a supercondutividade de não-equilíbrio. Assume-se que o caminho para o equilíbrio segue um processo de relaxação, assim, adiciona-se uma derivada temporal para o parâmetro de ordem do lado esquerdo das equações (2.22). Em 1966, Schmid[25] propôs a equação:

$$\frac{\hbar}{2m^*D} \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{e^*}{\hbar}\varphi \right) \psi = -\frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}\vec{A} \right)^2 \psi + \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi, \quad (3.1)$$

onde φ é um potencial escalar inserido para manter a invariância de calibre e D é o coeficiente de difusão. A segunda equação de Ginzburg-Landau será resolvida por transformada de Fourier - não precisaremos da forma dependente do tempo neste caso.

Do ponto de vista computacional, é conveniente trabalhar com equações com variáveis adimensionais. Podemos fazer as seguintes mudanças de variáveis para que isto ocorra:

$$\tilde{\vec{r}} = \vec{r}/\xi(0),$$

$$\tilde{t} = t/\tau,$$

$$\tilde{\psi} = \psi/\psi_0,$$

$$\tilde{\vec{A}} = \vec{A}/A_0,$$

$$\tilde{\varphi}_0 = \varphi/\varphi_0,$$

$$\begin{aligned}\tilde{T} &= T/T_0, \\ \tilde{\nabla} &= \nabla/\xi(0),\end{aligned}\tag{3.2}$$

onde $A_0 = H_{c2}(0)\xi(0)$, $\varphi_0 = \frac{H_{c2}(0)D}{c}$ e $\psi_0^2 = \alpha/\beta$.

Fazendo as substituições (3.4) e suprimindo os til's das equações:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\varphi\right)\psi = -\left(-i\nabla - \vec{A}\right)^2\psi + (1-T)\psi(1-|\psi|^2),\tag{3.3}$$

A segunda equação de Ginzburg-Landau (2.28) pode ser escrita na forma adimensional [19, 16]:

$$-\kappa^2\nabla^2\vec{A} = \vec{J}_s.\tag{3.4}$$

A corrente supercondutora \vec{J}_s é encontrada como:

$$\vec{J}_s = \frac{1}{2i}(\psi^\dagger\nabla\psi - \psi\nabla\psi^\dagger) - |\psi|^2\vec{A}.\tag{3.5}$$

Como as equações (3.3) e (3.4) são invariantes de calibre, escolhemos o potencial escalar φ como sendo zero. Neste trabalho, não utilizaremos de forma explícita a temperatura; as medidas de distâncias estão em unidades de ξ , o que nos permite reescrever as equações de Ginzburg-Landau como:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\left[\left(i\nabla + \vec{A}\right)^2\psi + (|\psi|^2 - 1)\psi\right],\tag{3.6}$$

$$-\kappa^2\nabla^2\vec{A} = \vec{J}_s.\tag{3.7}$$

Nosso objetivo agora é discretizar a primeira equação e solucionar a segunda por transformada de Fourier.

3.2 Método das variáveis de ligação

As equações de Ginzburg-Landau dependentes do tempo (TDGL¹) em geral não possuem soluções analíticas, sendo necessário técnicas numéricas para resolvê-las. Um método muito conhecido é o das diferenças finitas. Este método consiste em utilizar uma malha, geralmente retangular, $N_x \times N_y$ com células de dimensões a_x e a_y . Os valores de a_x e a_y determinam o "tamanho" da discretização, quanto menor seu valor, mais próximo do espaço contínuo e, assim, melhor o resultado. As equações de Ginzburg-Landau dependentes do tempo são resolvidas levando-se em consideração as condições de contorno e

¹Time Dependent Ginzburg-Landau

condições iniciais para o parâmetro de ordem ψ e o potencial vetor \vec{A} .

3.2.1 Discretização da equação TDGL

As TDGL são equações invariantes de calibre, mas quando discretizadas, as equações resultantes podem não preservar sua invariância em todo o domínio discreto[10]. Esse problema pode ser contornado utilizando as variáveis de ligação.

As variáveis de ligação são variáveis auxiliares que estão associadas à união de dois sítios vizinhos do domínio discreto e substituem o potencial vetor na forma discretizada. Elas estão relacionadas às componentes do potencial vetor, nas direções x e y , como:

$$\mathfrak{U}_{i,j}^x = \exp \left(-i \int_{x_0}^x A_x(\xi, y, t) d\xi \right), \quad (3.8)$$

$$\mathfrak{U}_{i,j}^y = \exp \left(-i \int_{y_0}^y A_y(x, \eta, t) d\eta \right). \quad (3.9)$$

É preciso escrever as variáveis de ligação em termos e seus análogos discretos, $U_{i,j}^x$ e $U_{i,j}^y$:

$$\mathfrak{U}_{i,j}^x = \prod_{k=1}^{i-1} U_{k,j}^x, \quad (3.10)$$

$$\mathfrak{U}_{i,j}^y = \prod_{k=1}^{j-1} U_{i,k}^y. \quad (3.11)$$

Considerando dois pontos adjacentes (x_i, y_i) e (x_{i+1}, y_j) da malha de discretização:

$$U_{i,j}^x = \exp \left(-i \int_{x_i}^{x_{i+1}} A_x(x, y, t) dx \right). \quad (3.12)$$

Analogamente, ao longo da vertical:

$$U_{i,j}^y = \exp \left(-i \int_{y_j}^{y_{j+1}} A_y(x, y, t) dy \right) \quad (3.13)$$

Usando a regra do ponto médio para integração, podemos escrever as variáveis de ligação na forma discretizada:

$$U_{i,j}^x \approx \exp \left(-i A_x(x_i + a_x/2, y_j) a_x \right), \quad (3.14)$$

$$U_{i,j}^y \approx \exp \left(-i A_y(x_i, y_j + a_y/2) a_y \right) \quad (3.15)$$

As variáveis de ligação são avaliadas nos pontos médios entre vértices e o parâmetro

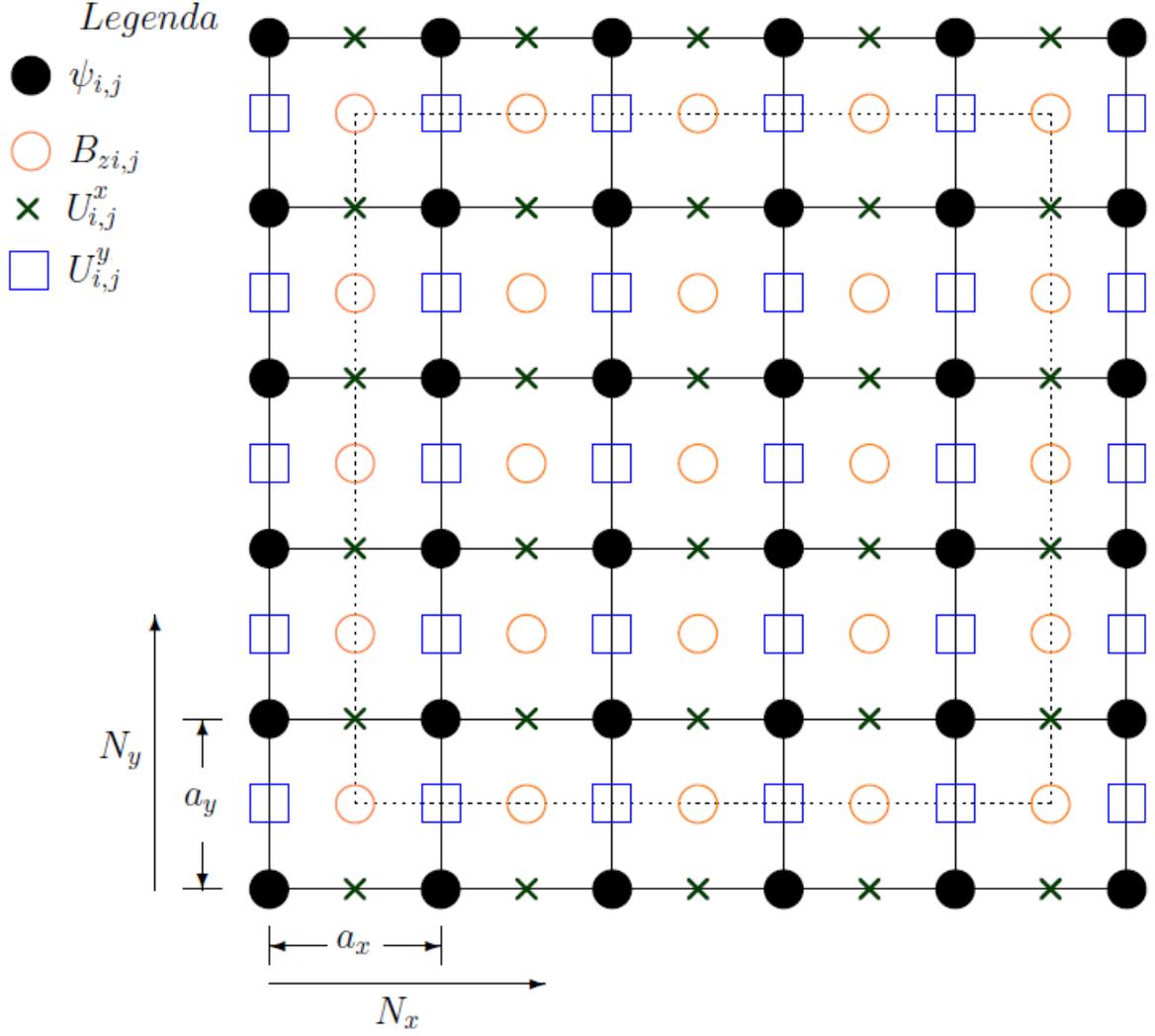


Figura 15: Malha de discretização utilizada nas simulações

de ordem ψ nos vértices da célula. Os pontos onde cada quantidade física é calculada estão devidamente indicados na figura 15.

Agora podemos discretizar a equação TDGL (3.6). Começando pelo termo $(-i\nabla - \vec{A})^2 \psi$, lembrando que, o que for feito para uma componente é válida para as outras.

$$(-i\nabla_x - \vec{A}_x)^2 \psi_{i,j} = -\nabla_x^2 \psi_{i,j} + i(\nabla_x \vec{A}_x - i\vec{A}_x^2) \psi_{i,j} \quad (3.16)$$

$$(-i\nabla_x - \vec{A}_x)^2 \psi_{i,j} = \frac{1}{-\mathfrak{U}_{i,j}^x} \left[\mathfrak{U}_{i,j}^x \nabla_x^2 \psi_{i,j} - i\mathfrak{U}_{i,j}^x (\nabla_x \vec{A}_x - i\vec{A}_x^2) \psi_{i,j} - 2i\vec{A}_x \mathfrak{U}_{i,j}^x \nabla_x \psi_{i,j} \right]$$

Temos relações importantes para as variáveis de ligações, elas são:

$$\nabla_x \mathfrak{U}_{i,j}^x = -i\vec{A}_x \mathfrak{U}_{i,j}^x \quad (3.17)$$

$$\nabla_x^2 \mathfrak{U}_{i,j}^x = -i\mathfrak{U}_{i,j}^x (\nabla_x \vec{A}_x - i\vec{A}_x^2) \quad (3.18)$$

$$U_{i,j}^x = \mathfrak{U}_{i,j}^x \mathfrak{U}_{i+1,j}^x \quad (3.19)$$

Utilizando as relações (3.17) e (3.18) na equação (3.16), obtemos:

$$\left(-i\nabla_x - \vec{A}_x\right)^2 \psi_{i,j} = \frac{1}{-\mathfrak{U}_{i,j}^x} \left[2 (\nabla_x \mathfrak{U}_{i,j}^x) \nabla_x \psi_{i,j} + \nabla_x^2 \mathfrak{U}_{i,j}^x \psi_{i,j} + \mathfrak{U}_{i,j}^x \nabla_x^2 \psi_{i,j} \right] \quad (3.20)$$

ficamos com:

$$\left(-i\nabla_x - \vec{A}_x\right)^2 \psi_{i,j} = -\frac{1}{\mathfrak{U}_{i,j}^x} \nabla_x (\nabla_x (\mathfrak{U}_{i,j}^x \psi_{i,j})) \quad (3.21)$$

Usando a técnica de diferenças finitas:

$$\left(-i\nabla_x - \vec{A}_x\right)^2 \psi_{i,j} = -\left(\frac{\mathfrak{U}_{i+1,j}^x \psi_{i+1,j} - 2\mathfrak{U}_{i,j}^x \psi_{i,j} + \mathfrak{U}_{i-1,j}^x \psi_{i-1,j}}{a_x^2} \right) \quad (3.22)$$

A relação (3.19) nos permite reescrever a equação (3.22) na forma discreta:

$$\left(-i\nabla_x - \vec{A}_x\right)^2 \psi_{i,j} = -\left(\frac{U_{i,j}^x \psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \overline{U_{i-1,j}^x} \psi_{i-1,j}}{a_x^2} \right). \quad (3.23)$$

Como todo o procedimento vale para a componente y , podemos escrever:

$$\left(-i\nabla_x - \vec{A}_x\right)^2 \psi_{i,j} = -\left(\frac{U_{i,j}^x \psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \overline{U_{i-1,j}^x} \psi_{i-1,j}}{a_x^2} \right) - \left(\frac{U_{i,j}^y \psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \overline{U_{i,j-1}^y} \psi_{i,j-1}}{a_y^2} \right) \quad (3.24)$$

Assim a equação (3.6) na sua forma discreta fica:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\frac{U_{i,j}^x \psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \overline{U_{i-1,j}^x} \psi_{i-1,j}}{a_x^2} \right) + \left(\frac{U_{i,j}^y \psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \overline{U_{i,j-1}^y} \psi_{i,j-1}}{a_y^2} \right) + (1 - |\psi_{i,j}|^2) \psi_{i,j} \quad (3.25)$$

Utilizando o método de Euler, podemos encontrar a relação de recorrência para a equação (3.25):

$$\psi_{i,j}^{n+1} = \psi_{i,j}^n + \Delta t \left[\frac{U_{i,j}^x \psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \overline{U_{i-1,j}^x} \psi_{i-1,j}}{a_x^2} + \frac{U_{i,j}^y \psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \overline{U_{i,j-1}^y} \psi_{i,j-1}}{a_y^2} + (1 - |\psi_{i,j}|^2) \psi_{i,j} \right] \quad (3.26)$$

onde $\psi_{i,j}^{n+1}$ representa o $\psi_{i,j}$ em um tempo posterior. Usaremos essa relação de recorrência para relaxar o sistema até encontramos a solução correta.

Iremos discretizar a corrente, equação (3.5), para usarmos na solução da segunda

equação de Ginzburg-Landau. Reescrevendo a corrente como:

$$\vec{J}_s = \frac{1}{2} \left[\psi^\dagger \left(-i\nabla - \vec{A} \right) \psi + \psi \left(-i\nabla - \vec{A} \right)^\dagger \psi^\dagger \right]. \quad (3.27)$$

Utilizando as relações (3.17) e (3.19) podemos discretizar a equação acima, lembrando que é válido para ambas as coordenadas:

$$\left(-i\nabla_x \vec{A}_x \right) \psi_{i,j} = -i \frac{1}{U_{i,j}^x} \nabla_x \left(U_{i,j}^x \psi_{i,j} \right) = -i \frac{U_{i+1,j}^x \psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{a_x} \quad (3.28)$$

substituindo na corrente:

$$\begin{aligned} \vec{J}_s(x, y) = \frac{1}{2} \left[\psi_{i,j}^\dagger \left(-i \frac{U_{i+1,j}^x \psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{a_x} \right) + \psi_{i,j} \left(-i \frac{U_{i+1,j}^x \psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{a_x} \right)^\dagger \right] + \\ \frac{1}{2} \left[\psi_{i,j}^\dagger \left(-i \frac{U_{i,j+1}^y \psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{a_y} \right) + \psi_{i,j} \left(-i \frac{U_{i,j+1}^y \psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{a_y} \right)^\dagger \right]. \quad (3.29) \end{aligned}$$

Assim, obtemos a forma discretizada da corrente supercondutora.

3.3 Solução da segunda equação de Ginzburg-Landau por transformada de Fourier

A solução da primeira equação de Ginzburg-Landau é completamente numérica, por recorrência. Já a segunda equação é resolvida analiticamente [19] para supercondutores com espessura comparável com os comprimentos de penetração e de coerência. Demonstraremos a seguir a solução.

Queremos resolver três equações da forma $-\kappa \nabla^2 A = J_s$. Pela teoria da transformada de Fourier[5] sabemos que:

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-2\pi i x k) dx \quad (3.30)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \exp(2\pi i x k) dk \quad (3.31)$$

Usaremos essas equações para resolver analiticamente na direção z . Para as direções x e y , resolveremos numericamente, usando FFT², que se baseia na relação:

$$b_n = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} f_j \sin(j\pi \frac{n}{N}) \quad (3.32)$$

²Fast Fourier Transform

Cada componente do potencial vetor pode ser representado na forma:

$$A(x, y, z) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} dk a_{ij}(k) \exp(2\pi i z k) \sin\left(\frac{i\pi x}{N}\right) \sin\left(\frac{j\pi x}{N}\right). \quad (3.33)$$

Aqui, x e y estão na forma discretizada e z podendo assumir qualquer valor real. Assumindo que a amostra de espessura d está centrada em $z = 0$. O laplaciano de A pode ser calculado analiticamente:

$$\nabla^2 A(x, y, z) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[-(2\pi k)^2 - q^2 \right] a_{ij}(k) \exp(2\pi i z k) \sin\left(\frac{i\pi x}{N}\right) \sin\left(\frac{j\pi x}{N}\right). \quad (3.34)$$

onde introduzimos $q^2 = (i\pi/L_x)^2 + (j\pi/L_y)^2$. $L_{x,y}$ é o tamanho da região simulada nas direções x e y .

Agora, usando o argumento da seção (2.8), onde a corrente em supercondutores de pouca espessura é uniforme na direção z , podemos escrever a corrente como:

$$J_s(x, y, z) = J(x, y) \Pi(z, -d/2, d/2) \quad (3.35)$$

onde $J(x, y)$ é a corrente no plano x-y e $\Pi(z, -d/2, d/2)$ representa a função degrau. A transformada de Fourier de $\Pi(z, -d/2, d/2)$ nos leva à:

$$\Pi(k) = d \frac{\sin(\pi k d)}{\pi k d}, \quad (3.36)$$

e utilizando a transformada da corrente no plano:

$$J(x, y) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} b_{i,j} \sin\left(\frac{i\pi x}{N}\right) \sin\left(\frac{j\pi x}{N}\right), \quad (3.37)$$

com coeficientes:

$$b_{i,j} = \frac{4}{N^2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} J_{i,j} \sin\left(\frac{i\pi x}{N}\right) \sin\left(\frac{j\pi x}{N}\right) \quad (3.38)$$

Substituindo na equação (3.7):

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \sin\left(\frac{i\pi x}{N}\right) \sin\left(\frac{j\pi x}{N}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(2\pi i z k) \left(\kappa^2 [(2\pi k)^2 + q^2] a_{i,j}(k) - b_{i,j} d \frac{\sin(\pi k d)}{\pi k d} \right) = 0, \quad (3.39)$$

essa equação só pode ser verdade se o termo entre parenteses é igual a zero, logo:

$$\frac{\kappa^2}{d} a_{i,j}(k) = \frac{b_{i,j}}{(2\pi k)^2 + q^2} \frac{\sin(\pi k d)}{\pi k d} \quad (3.40)$$

Agora, usando a transformada inversa:

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^2}{d} A(x, y, z) &= \sum_{i=1}^{N-1} \sin\left(\frac{i\pi x}{N}\right) \sum_{j=1}^{N-1} \sin\left(\frac{j\pi y}{N}\right) b_{i,j} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(2\pi i z k) \frac{1}{(2\pi k)^2 + q^2} \frac{\sin(\pi k d)}{\pi k d} \end{aligned} \quad (3.41)$$

podemos integrar o ultimo termo:

$$\begin{cases} \frac{1}{dq^2} (1 - \cosh(qz) \exp(-dq/2)) & \text{se } z < d/2; \\ \frac{1}{dq^2} (\sinh(dq/2) \exp(-qz)) & \text{se } z > d/2. \end{cases}$$

inserindo $z = 0$ diretamente nas equações acima, obtemos $\frac{1}{dq^2} (1 - \exp(-qd/2))$.

Encontramos o potencial vetor $A(x, y, 0)$ em função de suas componentes de Fourier:

$$A(x, y, 0) = \sum_{i=1}^{N-1} \sin\left(\frac{i\pi x}{N}\right) \sum_{j=1}^{N-1} \sin\left(\frac{j\pi y}{N}\right) a_{i,j}, \quad (3.42)$$

onde

$$a_{i,j} = \frac{b_{i,j}}{\kappa^2} \frac{1 - \exp(-dq/2)}{q^2}. \quad (3.43)$$

Com a solução da segunda equação de Ginzburg-Landau podemos criar um pseudo-código com a solução numerica:

1. Escolhendo uma condição inicial para o potencial vetor, podemos solucionar a equação de recorrência (3.26);
2. encontrando o valor para o parâmetro de ordem ψ para toda malha, podemos calcular a corrente no plano com a equação (3.29);
3. com os valores de corrente no plano, podemos usar FFT para encontrar a transformada de Fourier da corrente;
4. substituindo na equação (3.43), encontramos os coeficientes de Fourier do potencial vetor;
5. fazendo a transformada inversa, atualizamos o potencial vetor e repetimos o processo.

Na atualização do potencial vetor, cerca de 5% do potencial vetor calculado pela transformada de Fourier é usado.

4 ESTUDO DE VÓRTICES EM AMOSTRAS SUPERCONDUTORAS

Neste Capítulo, aplicamos as equações TDGL no estudo da dinâmica de vórtices em supercondutores. Estudaremos o estado supercondutor de uma amostra quadrada com diferentes espessuras e diferentes parâmetros de Ginzburg-Landau.

4.1 Configuração de vórtices em supercondutores tipo-II

No Capítulo 2 encontramos que o campo magnético, em um supercondutor do tipo-II, pode penetrar em forma de vórtices, cada um carregando um único quantum de fluxo. Estes vórtices se arranjam na forma de uma rede triangular e sua formação ocorre no estado misto, entre os campos críticos H_{c1} e H_{c2} . No caso de supercondutores mesoscópicos, que estão sujeitos a efeitos de confinamento e possuem dimensões comparáveis ao comprimento de penetração e/ou de coerência, os supercondutores podem apresentar novas propriedades.

Em amostras quadradas, a configuração de vórtices muda. Devido à simetria quadrada da amostra, a quantidade mínima de vórtices é quatro. Para manter a simetria triangular, é observada a formação de um antivórtice no centro. Essa estrutura de vórtices-antivórtices foi observada pelo grupo de Mel'nikov [18] e Chibotaru [20].

No primeiro caso, consideraremos um supercondutor quadrado, bidimensional (com espessura $d = 0$) imerso em um campo magnético aplicado $\vec{H}_e = H_e \hat{z}$ perpendicular à superfície do supercondutor. Para supercondutores bidimensionais, o parâmetro de Ginzburg-Landau efetivo κ_{eff} , definido na seção 2.8, tende a infinito. Com o parâmetro de Ginzburg-Landau infinito, a equação (3.43) vai a zero, assim, só é necessário resolver a

primeira equação de Ginzburg-Landau. Este é o caso estático, onde os efeitos de correntes não são considerados. A amostra foi dividida em uma malha quadrada com $N_x \times N_y = 128 \times 128$ células, cujo espaçamento entre elas é igual a $a_x = a_y = 0.25$. Portanto, temos um quadrado com dimensões $32\xi \times 32\xi$. O campo aplicado H_e foi aumentado de 0 até 1.

Na figura 16, mostramos a distribuição do módulo do parâmetro de ordem para os vários valores de campo magnético aplicado. As regiões azuis representam valor 0 e as vermelhas valor 1. Para campos menores que $H_e = 0.07$ o supercondutor está no estado Meissner, figura 16(a); para (b) $H_e = 0.07$ à entrada de quatro vórtices, que são criados nos pontos médios de cada borda do quadrado. Entrada similar de vórtices ocorre em (c) até (j). Em (k) $H_e = 0.90$, o arranjo de vórtices fica muito denso, até que em (l) $H_e = 1.0$ o parâmetro de ordem é totalmente suprimido na região central e a supercondutividade persiste nas bordas.

Fizemos o mesmo procedimento para uma amostra de tamanho $16\xi \times 16\xi$, com o campo aplicado H_e variando de 0 até 0.40. Podemos observar que o campo crítico aumenta. A primeira transição para essa configuração, ocorre com um campo $H_e = 0.18$, figura 17(b), enquanto para um tamanho $32\xi \times 32\xi$ o campo aplicado foi de apenas $H_e = 0.07$. Comparando as configurações de vórtices entre $32 \times 32\xi$ e $16\xi \times 16\xi$ para os campos $H_e = 0.3$ e $H_e = 0.4$, notamos que o tamanho da amostra influencia a quantidade de vórtices dentro do supercondutor.

Para testar a eficácia do método numérico proposto, comparamos o nosso resultado com o resultado numérico de J. J. B. Ortega [20]. Os resultados concordam com os publicados, as diferenças no campo crítico são devido a diferentes parâmetros de Ginzburg-Landau. Para demonstrar o efeito do tamanho da amostra na dinâmica de vórtices, fizemos uma relação qualitativa com o trabalho de Sangbum e colaboradores[13]. Nesse trabalho apresentam-se algumas configurações de vórtices para uma amostra quadrada. Similarmente ao nosso caso, Sangbum encontra vórtices em múltiplos de quatro. A tabela a seguir resume as transições para diferentes tamanhos, onde L representa a vorticidade da amostra.

Tamanho	Transições	Referência
7.090×7.090	$L \rightarrow L + 1$	Baelus[3], Ortega [20]
8×8	$L \rightarrow L + 2$	Ortega [20]
16×16	$L \rightarrow L + 4$	Esta monografia, Sangbum [?]
32×32	$L \rightarrow L + 4$	Esta monografia

Até o momento vimos que a simetria e o tamanho bidimensional influencia na con-

figuração de vórtices. E a espessura da amostra? Qual o efeito na configuração dos vórtices? Para responder a essas perguntas utilizamos as duas equações de Ginzburg-Landau, seguindo o algoritmo descrito no Capítulo 3. Escolhemos um campo magnético apropriado, onde os vórtices estão bem caracterizados, e o deixamos fixo, variando somente a espessura, para determinar sua influência nos vórtices.

Para esse caso, dividimos a amostra em uma malha $N_x \times N_y = 64 \times 64$ células, cujo espaçamento agora $a_x = a_y = 0.25$. Assim, temos um quadrado com dimensões $16\xi \times 16\xi$. Começamos com $d = 0$, figura 18(a), onde o resultado concorda com a figura 17(b). Na segunda figura, testamos a validade do parâmetro de Ginzburg-Landau efetivo κ_{eff} , com $d = 1.0 \times 10^{-05}\xi$, figura 18(b), a configuração é igual para $d = 0$. Isso nos mostra que para $d \rightarrow 0$, a solução é a mesma que a obtida ao se resolver apenas a primeira equação. Para $d = 0.1\xi$ e $d = 0.5\xi$, ocorre uma mudança na configuração, apenas 10 vórtices conseguem entrar no supercondutor, diferente dos 12 encontrados para $d = 0$.

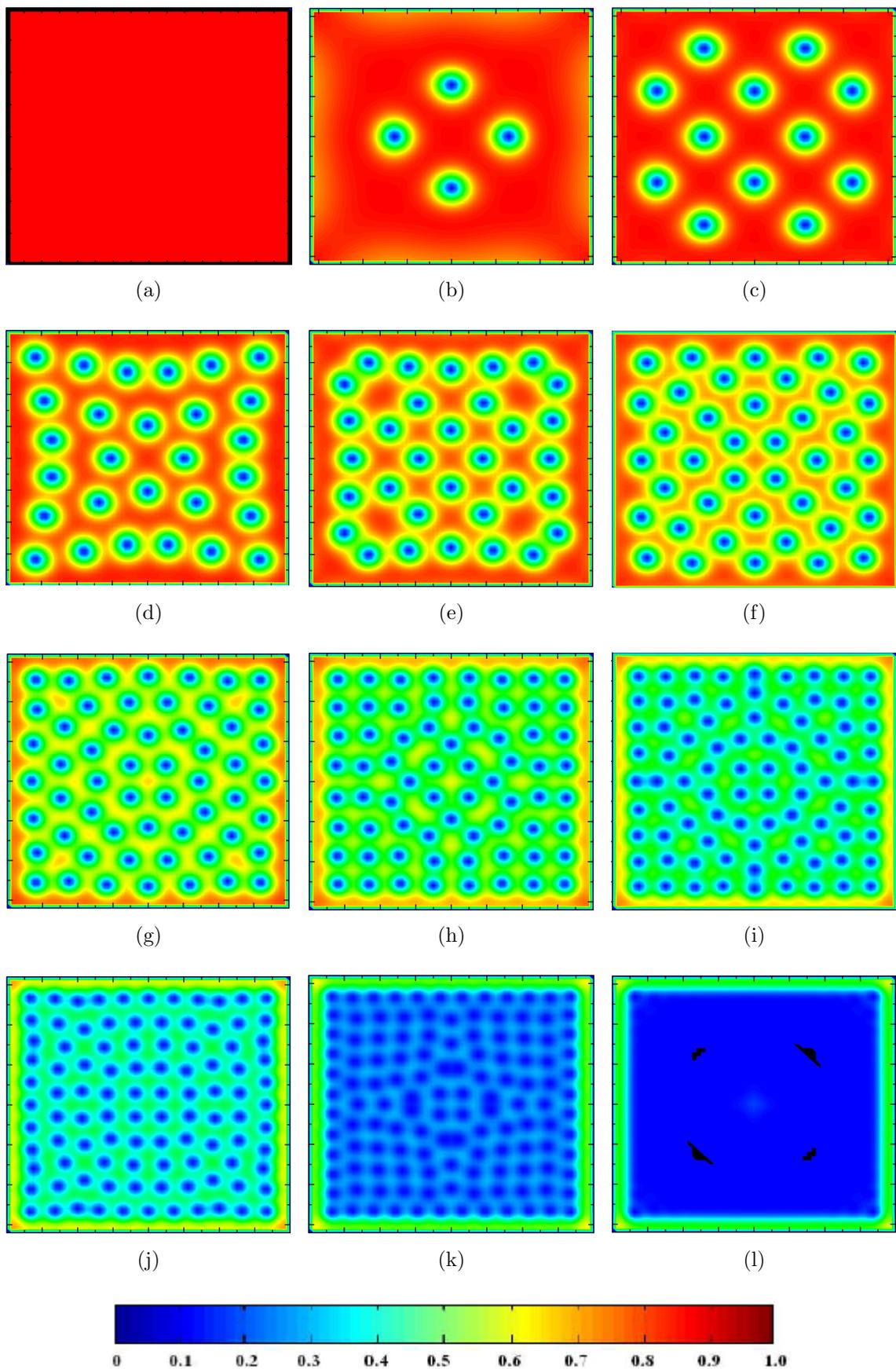


Figura 16: Módulo do parâmetro de ordem para uma amostra de lados $32\xi \times 32\xi$, para diferentes campos aplicados: (a) $H_e = 0.0$, (b) $H_e = 0.07$, (c) $H_e = 0.10$, (d) $H_e = 0.20$, (e) $H_e = 0.25$, (f) $H_e = 0.30$, (g) $H_e = 0.40$, (h) $H_e = 0.50$, (i) $H_e = 0.60$, (j) $H_e = 0.70$, (k) $H_e = 0.90$, (l) $H_e = 1.0$

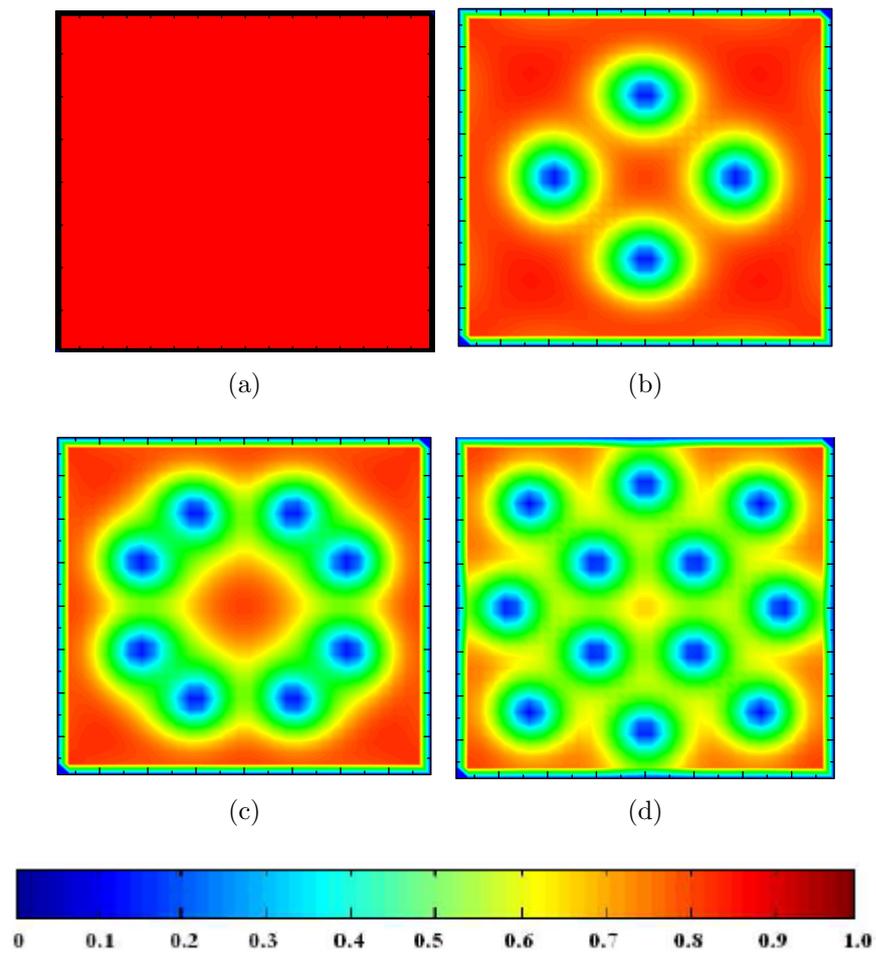


Figura 17: Módulo do parâmetro de ordem para uma amostra de lados $16\xi \times 16\xi$, para diferentes campos aplicados: (a) $H_e = 0.0$, (b) $H_e = 0.14$, (c) $H_e = 0.3$, (d) $H_e = 0.38$

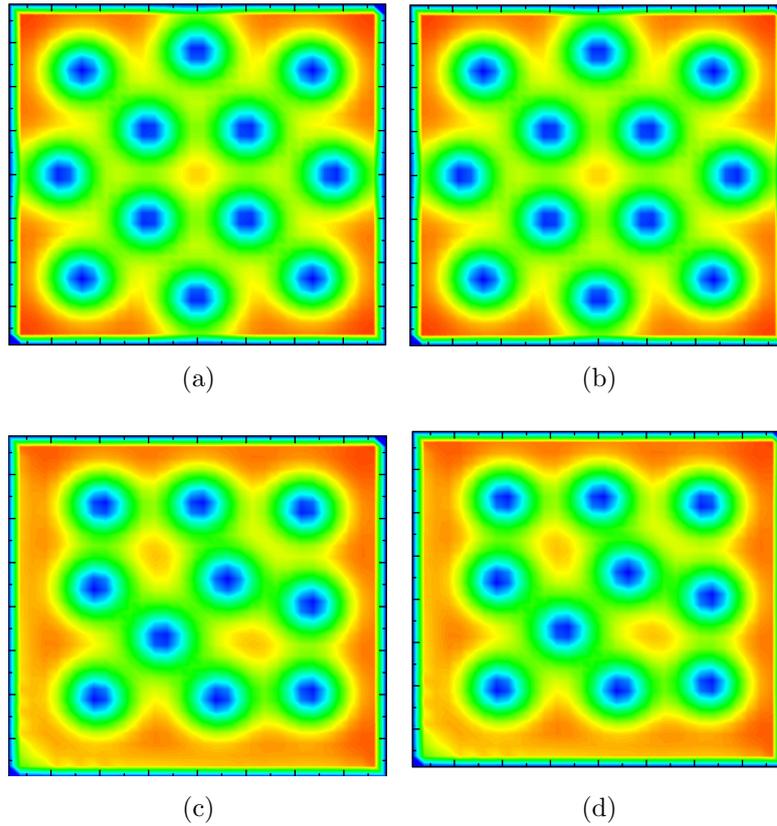


Figura 18: Módulo do parâmetro de ordem para uma amostra de lados $16\xi \times 16\xi$, para diferentes espessuras: (a) $d = 0.0$, (b) $d = 1.0 \times 10^{-5}\xi$, (c) $d = 0.10\xi$, (d) $d = 0.50\xi$.

4.2 Energia de Supercondutores Tipo-II

Para o cálculo da energia, usamos três configurações de supercondutores:

1. $32\xi \times 32\xi$ e $d = 0$, corresponde a figura 19;
2. $16\xi \times 16\xi$ e $d = 0$, corresponde a figura 20;
3. $16\xi \times 16\xi$ e $d = 0.5\xi$, para analisarmos o efeito da espessura.

com cada um deles, foi calculado a energia com o campo magnético H_e variando de 0 até 0.42. Os gráficos são de mínimos de energia, onde as regiões numeradas representam uma configuração de vórtices.

A configuração 1 possui 7 regiões, com 6 transições de configuração. A região 1 do gráfico 19, estamos no estado Meissner, figura 16(a). Quando ultrapassamos o campo de aproximadamente $H_e = 0.05$ ocorre uma transição para a região 2 e passamos a ter vórtices dentro do supercondutor, figura 16(b). A região 3, corresponde a configuração da

figura 16(c), a região 4, a figura 16(d). A região 5, a configuração 16(e), a região 6, a configuração 16(f) e a região 7, a configuração 16(g). Na configuração 2, diminuimos o ta-

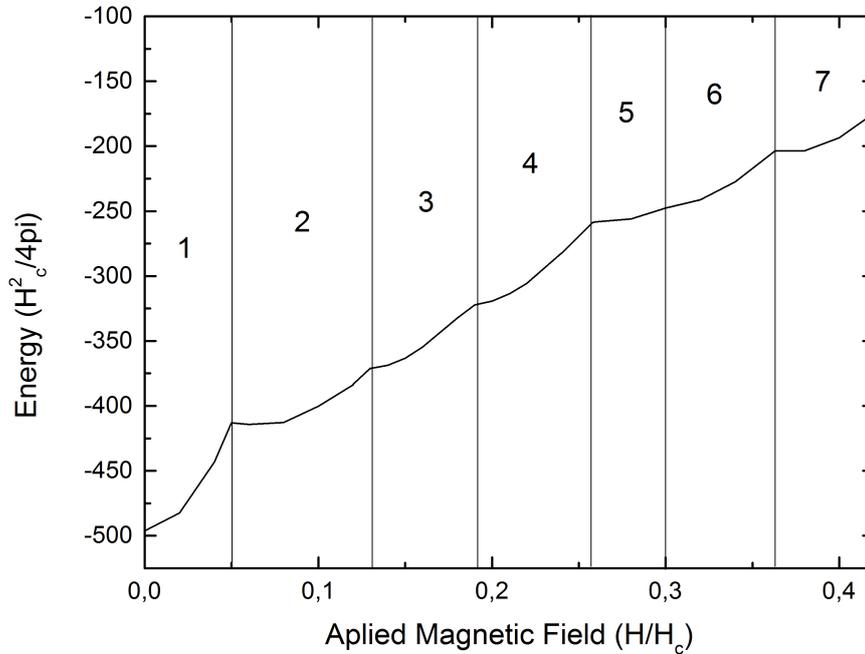


Figura 19: Curva da energia em função do campo Aplicado H_e , para configuração 1.

manho da amostra e, como já vimos, isso implica em uma quantidade menor de possíveis vórtices no interior do supercondutor. No gráfico de energia por campo magnético, isso resulta em menos regiões. Na figura 20, vemos apenas 4 regiões, com 3 transições. A região 1, novamente é o estado Meissner. Na região 2, temos a entrada de quatro vórtices, corresponde a figura 17(b). A região 3 e 4 correspondem as figura 17(c) e 17(d) respectivamente. Comparando os campos críticos entre a configuração 1 e a configuração 2, reafirmamos que o campo crítico em tamanhos menores aumenta.

Na fig. 21 é usada a configuração 3. Como obsevamos antes, a espessura influencia na configuração dos vórtices e quantidade de vórtices. O gráfico possui apenas 3 regiões, onde a região 3 corresponde à configuração da fig.18(c). Note que a energia para a região 3 na fig. 21 é menor que a região 4 na fig. 20, isso indica uma quantidade menor de vórtices dentro do supercondutor, confirmando a figura 18, onde temos 10 vórtices para espessura $d = 0.5\xi$ contra 12 vórtices para espessura $d = 0$.

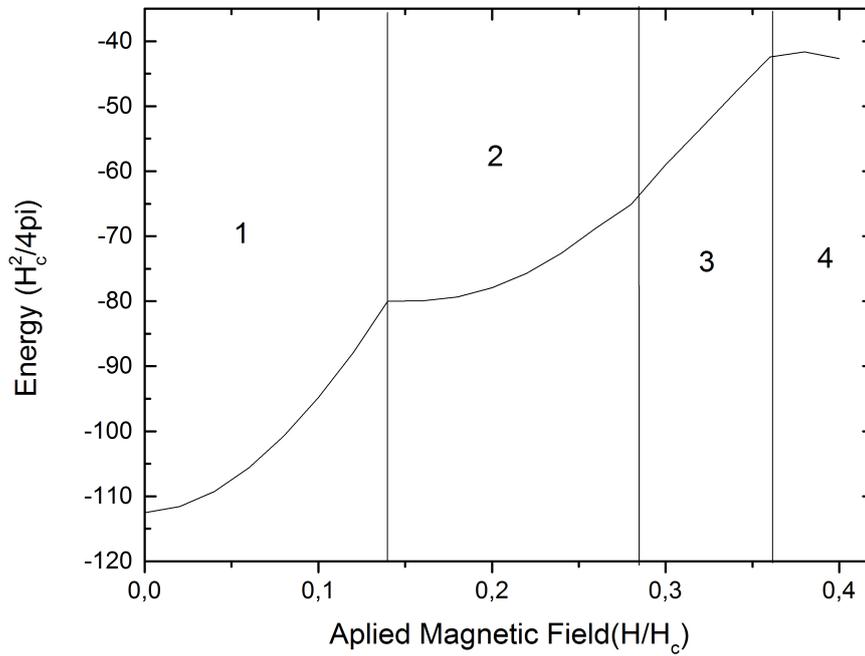


Figura 20: Curva da energia em função do campo Aplicado H_e , para configuração 2.

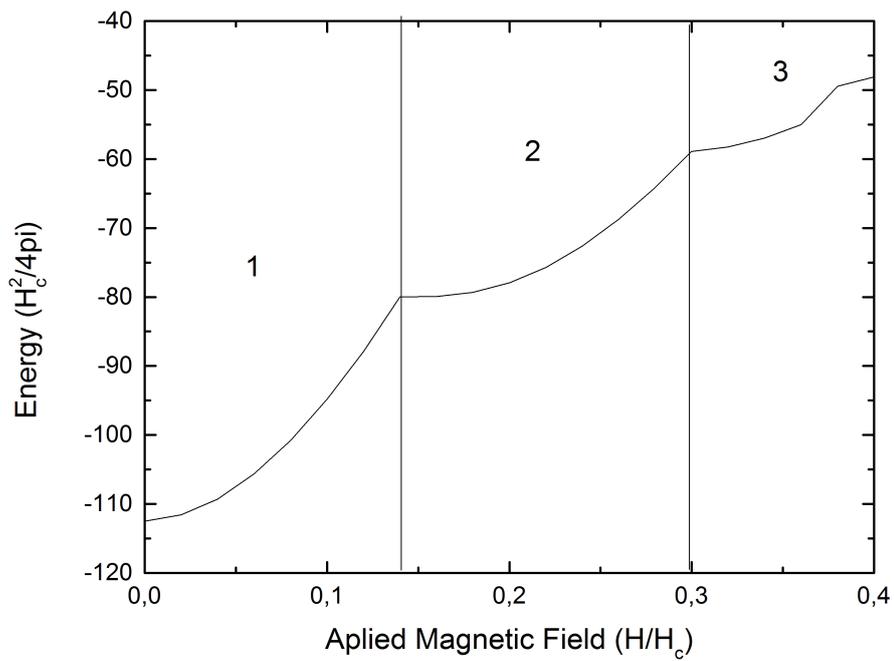


Figura 21: Curva da energia em função do campo Aplicado H_e , para configuração 3.

5 CONCLUSÃO

Nesta monografia, inicialmente fizemos uma revisão teórica do estudo da supercondutividade, no sentido de criar uma base que possibilitasse aplicar os conceitos em simulações computacionais, que permitem fazer previsões do comportamento de um supercondutor, tanto no nível macroscópico como mesoscópico. Começamos pela primeira teoria fenomenológica dos irmãos London, que explica o efeito Meissner e a penetração superficial do campo magnético aplicado em materiais supercondutores. Em seguida, introduzimos a teoria de Ginzburg-Landau, que descrever muito bem o comportamento de um supercondutor, que além dos resultados dos London, inclui diferentes tipos de supercondutores e vórtices.

Vimos também o método para resolver estas equações numericamente para supercondutores em estado de não-equilíbrio, conhecido como método das variáveis de ligação. Como mencionado, usamos uma grade retangular de dimensões $N_x \times N_y$ células unitárias. Com isso podemos discretizar adequadamente as equações de Ginzburg-Landau. Juntamente com o método de variáveis de ligação, utilizamos o método de transformada de Fourier para resolver a segunda equação de Ginzburg-Landau para o caso específico de pequenas espessuras.

Ficou claro que para espessuras muito pequenas, $d \rightarrow 0$, só a necessidade de resolver a primeira equação de Ginzburg-Landau, já que o κ da amostra tende a infinito. Observamos transições de configurações de vórtices para diferentes tamanhos e para mudança de espessura. Vimos que o tamanho da amostra influencia na configuração dos vórtices e em sua quantidade. Para espessuras finitas, vimos que a uma diminuição na quantidade de vórtices no interior do supercondutor. Os gráficos de energia demonstram que para espessuras finitas a espessura influi na supercondutividade.

REFERÊNCIAS

- [1] A. A. ABRIKOSOV. On the magnetic properties of superconductors of the second group. *Soviet Physics - Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 5(6):1174–1182, December 1957.
- [2] N. D. Ashcroft, N. W.; Mermin. *Solid State Physics*. Saunders College, 1976.
- [3] B. J. Baelus and F. M. Peeters. Dependence of the vortex configuration on the geometry of mesoscopic flat samples. *Phys. Rev. B*, 65:104515, Feb 2002.
- [4] L. N.; Schrieffer J. R. Bardeen, J.; Cooper. Theory of superconductivity. *Physical Review*, 5(108):1175, 1957.
- [5] E. BUTKOV. *FÍSICA MATEMÁTICA*. 1ª ed. edition, 1988.
- [6] L. N. Cooper. Bound electron pairs in a degenerate fermi gas. *Physical Review*, 4(104):1189, 1956.
- [7] G. Deutscher. *Superconductors: From Granular to High Tc*. World Scientific Publishing Co. Pte., 2007.
- [8] U. Essmann and H. Träuble. The direct observation of individual flux lines in type {II} superconductors. *Physics Letters A*, 24(10):526 – 527, 1967.
- [9] A M Forrest. Meissner and ochsenfeld revisited. *European Journal of Physics*, 4(2):117, 1983.
- [10] D. A. FROTA. *Estados de Vortice-Antivórtice em uma Bi-camada de Supercondutor-Ferromagneto*. Tese(doutorado), Universidade Federal do Ceará, 2014.
- [11] L. P. Gor'kov. Microscopic derivation of the ginzburg-landau equations in the theory of superconductivity. *Soviet Physics - Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 36(6), DECEMBER 1959.
- [12] H. F. Hess, R. B. Robinson, R. C. Dynes, J. M. Valles, and J. V. Waszczak. Scanning-tunneling-microscope observation of the abrikosov flux lattice and the density of states near and inside a fluxoid. *Phys. Rev. Lett.*, 62:214–216, Jan 1989.
- [13] Sangbum Kim, Chia-Ren Hu, and Malcolm J. Andrews. Steady-state and equilibrium vortex configurations, transitions, and evolution in a mesoscopic superconducting cylinder. *Phys. Rev. B*, 69:094521, Mar 2004.
- [14] C. Kittel. *Introdução à física do estado sólido*. 8a edition, 2013.

- [15] W. H. Kleiner, L. M. Roth, and S. H. Autler. Bulk solution of ginzburg-landau equations for type ii superconductors: Upper critical field region. *Phys. Rev.*, 133:A1226–A1227, Mar 1964.
- [16] Lucia Komendová. *Characteristic length scales and vortex interactions in two-component superconducting systems*. Tese(doutorado), UNIVERSITEIT ANTWERPEN, 2013.
- [17] H. LONDON, F.; LONDON. The electromagnetic equations of the supraconductor. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 149(866):71–88, 1935.
- [18] A. S. Mel'nikov, I. M. Nefedov, D. A. Ryzhov, I. A. Shereshevskii, V. M. Vinokur, and P. P. Vysheslavtsev. Vortex states and magnetization curve of square mesoscopic superconductors. *Phys. Rev. B*, 65:140503, Mar 2002.
- [19] R. MILOŠEVIĆ, M. V.;GEURTS. The ginzburg-landau theory in application. *Physica C: Superconductivity and Its Applications (Amsterdam, Netherlands)*, 470(19):791–795, 2010.
- [20] J. J. B. ORTEGA. *Configuração de Vórtices e efeitos de interface em supercondutores mesoscópicos*. Tese(doutorado), Universidade Federal de Pernambuco, 2007.
- [21] P. OSTERMANN, F;PUREUR. *Supercondutividade*. Editora Livraria da Física, 1a edition, 2005.
- [22] M. C. V. PASCOLATI. *Dinâmica de Vórtices em Filmes Finos Supercondutores de Superfície Variável*. Tese(doutorado), Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", 2010.
- [23] N. Plakida. *High-Temperature Cuprate Superconductors: Experiment, Theory, and Applications*. Springer, 2010.
- [24] G. RICKAYZEN. *Theory of Superconductivity*, volume XIV of *MONOGRAPHS AND TEXTS IN PHYSICS AND ASTRONOMY*. John Wiley & Sons, 1965.
- [25] Albert Schmid. A time dependent ginzburg-landau equation and its application to the problem of resistivity in the mixed state. *Physik der kondensierten Materie*, 5(4):302–317, 1966.
- [26] Dirk van Delft and Peter Kes. The discovery of superconductivity. *Physics Today*, 63(9):38–43, 09 2010.