UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM FÍSICA

RAFAEL ROCHA DE FARIAS

INTRODUÇÃO À GRAVITAÇÃO, COSMOLOGIA E CONCEITOS BÁSICOS DE VIOLAÇÃO DE LORENTZ

FORTALEZA

2014

RAFAEL ROCHA DE FARIAS

INTRODUÇÃO À GRAVITAÇÃO, COSMOLOGIA E CONCEITOS BÁSICOS DE VIOLAÇÃO DE LORENTZ

Monografia de Bacharelado apresentada à Coordenação da Graduação do Curso de Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida

FORTALEZA

2014

RAFAEL ROCHA DE FARIAS

INTRODUÇÃO À GRAVITAÇÃO, COSMOLOGIA E CONCEITOS BÁSICOS DE VIOLAÇÃO DE LORENTZ

Monografia de Bacharelado apresentada à Coordenação da Graduação do Curso de Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Física.

Aprovada em 02/12/2014

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida
(Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dr. José Euclides Gomes da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dr. Victor Pereira do Nascimento Santos
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Física

A000p Farias, Rafael Rocha.
Introdução à Gravitação, Cosmologia e Conceitos Básicos de Violação de Lorentz / Rafael Rocha de Farias. – Fortaleza, 2014.
42 f.:il.

Monografia (bacharelado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Fortaleza, 2014.

Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida

1. Gravitação. 2. Relatividade-Geral. 3. Espaço-Tempo. 4. SME. I. Título.

CDD:000.0

Aos Meus Pais

AGRADECIMENTOS

Ao professor Carlos Alberto Santos de Almeida pela orientação ao longo do curso de graduação, tanto no sentido didático como pessoal.

Aos professores da graduação do departamento de física da UFC pelas disciplinas que cursei.

Aos colegas de curso, sempre apoiamos e incentivamos uns aos outros.

Aos funcionários do departamento de física da UFC, sempre solícitos.

A minha família pelo apoio incondicional.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos uma introdução à teoria da relatividade geral de Einstein, desde o princípio da equivalência, definição de curvatura no espaço-tempo, equação do campo gravitacional, até a métrica de Friedmann-Robertson-Walker; além de abordar de forma conceitual a quebra de simetria de Lotentz, ou violação de Lorentz, e introduzir o modelo de Bumblebee. Ao longo do texto, mostramos como a teoria da gravitação de Einstein concorda com experimentos e como o modelo de Bumblebee é equivalente a outras teorias.

Palavras-chave: Gravitação Relatividade-Geral Espaço-Tempo SME

ABSTRACT

In this work, we show an introduction to the Einstein theory of general relativity, starting from the Einstein's principle of equivalence, defining the curvature in spacetime, deriving the gravitational field equation, and finishing at Friedmann-Robertson-Walker metric. Besides, we show basics concepts of Lorentz violation and introduce the bumblebee model.

Keywords: Gravitation. General Relativity. Spacetime. SME.
.

SUMÁRIO

Notação

Índices latinos (i, j, k) referem-se a coordenadas espaciais, usualmente $1, 2, 3$ ou x, y, z.

Índices gregos $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ referem-se a coordenadas no espaço-tempo em um sistema de coordenadas inerciais, usualmente $0, 1, 2, 3$ ou t, x, y, z.

Índices gregos $(\mu, \nu, \lambda, \kappa)$ referem-se a coordenadas no espaço-tempo em um sistema de coordenadas gerais.

Os sistemas de coordenadas inerciais são geralmente representados por ξ^α e os sistemas de coordenadas gerais por x^μ.

A métrica em um sistema de coordenadas inerciais é a de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$, uma matriz diagonal de elementos $-1, 1, 1, 1$.

Vetores espaciais, ou trivetores, são representados em negrito $(\mathbf{x})$.

Será adotada a convenção de soma de Einstein, ou seja, índices repetidos indicam um somatório implícito correndo sobre o índice.

A velocidade da luz é tomada como unitária.

Introdução

A primeira publicação científica sobre a Relatividade Geral foi escrita em 1916 por Albert Einstein [1]. A Relatividade Geral é a generalização da teoria da gravitação de Newton. A teoria é uma extensão da Relatividade Restrita, na qual se afirma que a velocidade da luz é invariante e, consequentemente, o espaço e o tempo são uma entidade geométrica unificada, o espaço-tempo. Ela propõe a generalização do princípio da relatividade do movimento para sistemas que incluam campos gravitacionais. Uma das implicações de tal generalização é que a matéria curva o tecido espaço-tempo a sua volta. Portanto a gravitação pode ser interpretada como um efeito geométrico do espaço-tempo.

Desde sua publicação, a Teoria da Relatividade Geral prevê com sucesso todas as observações e experimentos realizados até hoje. Destes podemos citar a precessão do periélio de Mercúrio, o desvio gravitacional para o vermelho da luz, a dilatação gravitacional do tempo e o tempo de atraso gravitacional [2]. Uma previsão importante desta teoria para a cosmologia é a existência de buracos negros, regiões onde o espaço-tempo está tão distorcido que nem mesmo a luz escapa dele. Há evidências da existência de tais regiões ultramassivas no espaço, intensas radiações emitidas por certos corpos vindas de núcleos de galáxias foram detectadas.

Há ainda outro fenômeno importante previsto pela Relatividade Geral e também observado experimentalmente: o fenômeno de lente gravitacional [3], onde várias imagens de um mesmo objeto são visíveis a um observador. Ele ocorre quando um corpo maciço está entre o observador e o objeto. Este corpo massivo distorce o espaço-tempo localmente de modo que a luz que passa perto o suficiente é curvada. Assim o observador vê a luz vinda do objeto circundando o corpo massivo.

A Relatividade Geral ainda prevê a existência de ondas gravitacionais, ainda não detectadas diretamente [2]. Ela é a base dos atuais modelos cosmológicos, que preveem um universo sempre em expansão.

Apesar do sucesso, a teoria da Relatividade Geral está restrita a nível clássico. Somente a combinação dela com o modelo padrão de partículas é que podemos descrever a natureza em escala de altas energias. O modelo padrão engloba os demais fenômenos envolvendo partículas fundamentais e forças de nível quântico. É esperado a união das duas teorias na escala de Planck em uma teoria única de consistência quântica na descrição da natureza.

O Modelo Padrão Estendido (SME - Standard-Model Extension) é um modelo que incorpora termos que quebram a simetria de Lorentz independentes de coordenadas, termos estes originados de campos de fundo. A ideia da ocorrência de quebra da simetria de Lorentz por campos de fundo no contexto da teoria de cordas e do modelo padrão foi lançada por Kostelecky e Samuel em 1989 [4] e desde então o SME vem sendo investigado intensamente como uma versão mais ampla do modelo padrão. Nos ultimos anos ela inspirou uma grande quantidade de investigações, como sistemas de férmions [5], experimentos de comprovação de CPT [6], o CPT eletromagnético e termos de Lorentz ímpares [7], o CPT par e o setor de gauge de Lorentz ímpar e a interação com férmions [8]. Recentemente investigações envolvendo operadores de dimensões mais altas [9] e uma possível conexão com teorias de violação de Lorentz [10] e acoplamentos mínimos [11] vem sendo realizadas.

Este trabalho tem por objetivo desenvolver a teoria da Relatividade Geral de Einstein, introduzir a métrica de Friedmann-Robertson-Walker e abordar de forma conceitual os aspectos da quebra da simetria de Lorentz para em trabalhos posteriores aplicar na quebra de simetria de Lorentz a métrica em questão. Os aspectos teóricos de gravitação desenvolvidos ao longo to texto estão baseados na Ref. [2], enquanto a violação de Lorentz está nas Ref. [12] e [13]. No capítulo 1 as ideias iniciais da teoria da Relatividade Geral serão apresentadas; definiremos o tensor métrico, a equação da geodésica e tomaremos o limite Newtoniano, no qual os campos são estacionários e as velocidades muito menores que a velocidade da luz. No capítulo 2 desenvolveremos as ferramentas matemáticas necessárias para darmos procedimento ao estudo da gravitação de Einstein; introduziremos o princípio da covariância geral, definiremos derivada covariante, curvatura e finalmente desenvolveremos a identidade de Bianchi. No capítulo 3 deduziremos a equação de campo de Einstein, desenvolveremos a métrica de Robertson-Walker e introduziremos o modelo de Friedmann, um dos objetivos deste trabalho. Finalmente no capítulo 4 abordaremos de forma conceitual os aspectos da quebra da simetria de Lorentz e introduziremos o modelo de Bumblebee.

1 A TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

A Teoria da Relatividade Geral está baseada no Princípio da Equivalência entre a Gravitação e a Inércia. Este princípio nos diz como um sistema físico arbitrário se comporta quando submetido a um campo gravitacional externo. Primeiramente veremos algumas consequências imediatas neste capítulo. Uma análise mais profunda exige o uso do Princípio da Covariância Geral, o que nos permitirá extender sobre a gravitação.

1.1 Forças Gravitacionais

O princípio da equivalência afirma que as massas inercial e gravitacional são iguais. Assim sistemas acelerados e sistemas submetidos a campos gravitacionais são equivalentes. Um observador em uma caixa fechada não saberia responder se está em queda livre ou na ausência de campo gravitacional, também observaria outro objeto em mesma situação como estático, sem aceleração.

Vejamos o caso de um sistema de M partículas em queda livre. Uma partícula de massa m_N e posição $\mathbf{x}_N$ obedecerá a Segunda Lei de Newton, ou seja:

$$m_N \frac{d^2\mathbf{x}_N}{dt^2} = m_N \mathbf{g} + \sum_M \mathbf{F}(\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_M),$$

onde $\mathbf{F}(\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_M)$ é a força que a M-ésima partícula faz sobre a partícula N e $\mathbf{g}$ é o campo gravitacional. Este sistema é observado por um observador em repouso. Agora analisaremos como um observador se movendo com o sistema em queda livre percebe a situação. Para isso fazemos uma mudança de coordenadas

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2, \qquad t' = t$$

e a segunda lei de Newton passa a ser, para o observador em queda livre

$$m_N \frac{d^2\mathbf{x}'_N}{dt^2} = \sum_M \mathbf{F}(\mathbf{x}'_N - \mathbf{x}'_M).$$

Portanto, pelas equações acima, tanto o observador em repouso como o observador em queda livre não perceberão diferenças nas leis da mecânica. A única diferença observada por eles é que o observador em repouso dirá que o sistema está submetido a um campo gravitacional enquanto o que está em queda livre não.

Por este princípio podemos afirmar que em um sistema submetido a um campo gravitacional existe um sistema de coordenadas localmente inercial ξ^α. Usando as equações da Relatividade Restrita, a equação de movimento é:

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0, \tag{1.1}$$

onde $d\tau$ é o tempo próprio. Pela invariância da grandeza intervalo,

$$-d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta. \tag{1.2}$$

Tomamos a equação (1.1) em um sistema de coordenadas geral x^μ. Veja:

$$0 = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{d\xi^\alpha}{d\tau}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}.$$

Agora multiplicamos a expressão obtida por $\partial x^\lambda/\partial\xi^\alpha$, usamos a identidade

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\mu} = \delta^\lambda_\mu$$

e obtemos a equação de movimento, uma geodésica no espaço-tempo

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \tag{1.3}$$

onde $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ é a conexão afim, dada por

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}.$$

Entende-se por geodésica o menor caminho ente dois pontos no espaço-tempo. Veja que se a conexão afim é nula, então o sistema de coordenadas é inercial [veja Eq. (1.1)], assim a conexão afim representa o quanto o sistema de coordenadas em questão não é inercial.

Podemos assim interpretar a gravidade como uma distorção, ou uma curvatura, no espaço-tempo. Esta é a natureza do campo gravitacional. Para deduzirmos a equação de campo de Einstein precisamos antes definir curvatura, o que será feito no próximo capítulo.

O tensor métrico $g_{\mu\nu}$ surge quando relacionamos o tempo próprio às coordenadas x^μ. Veja:

$$\begin{aligned} -d\tau^2 &= \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \\ &= \eta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \right) \left(\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu \right) \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \end{aligned} \tag{1.4}$$

onde definimos

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}. \tag{1.5}$$

Veja que o tensor métrico é simétrico, ou seja, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. É possível relacionarmos a conexão afim ao tensor métrico. Derivemos a Eq. (1.5) parcialmente em relação a x^λ e obtemos

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\nu x^\lambda},$$

mas

$$\begin{aligned} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\lambda} &= \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \\ &= \delta^\beta_\alpha \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \\ &= \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

portanto

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \eta_{\alpha\beta},$$

onde aplicamos a equação (1.5), o que resulta:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} g_{\rho\nu}. \tag{1.7}$$

Agora é possível tomarmos a conexão afim em função do tensor métrico e de suas derivadas parciais. Para isso permutamos os índices na equação (1.7) e somamos as equações resultantes da seguinte forma:

$$\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = 2 g_{\kappa\lambda} \Gamma^\kappa_{\mu\nu}. \tag{1.8}$$

Definimos a matriz $g^{\mu\nu}$ como a matriz inversa do tensor métrico, ou seja:

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu, \tag{1.9}$$

e multiplicamos a equação (1.8) por $g^{\sigma\lambda}$. Finalmente temos:

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} \left\{ \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} \right\}, \tag{1.10}$$

onde o lado direito da equação acima é chamado de *Símbolo de Christoffel*.

1.2 Limite Newtoniano

No limite Newtoniano temos que $d\mathbf{x}/d\tau << dt/d\tau$, o que reduz a equação de movimento [Eq. (1.3)] a

$$\frac{d^2 x^{\lambda}}{d\tau^2} + \Gamma^{\lambda}_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0. \tag{1.11}$$

Agora usamos a equação (1.10) para encontrarmos uma expressão para Γ^{λ}_{00}

$$\Gamma^{\lambda}_{00} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{0\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial g_{\sigma 0}}{\partial t} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\sigma}} \right\},$$

mas no Limite Newtoniano os campos são estacionários, consequentemente as duas primeiras parcelas entre chaves são nulas. Assim:

$$\Gamma^{\lambda}_{00} = -\frac{1}{2} g^{\lambda k} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{k}}.$$

Se o campo é fraco, podemos tomar a métrica quase cartesiana. Fazemos

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{1.12}$$

onde $h_{\mu\nu} << 1$ representa uma pertubação no tensor métrico, ou no espaço-tempo, devido à distribuição de matéria. Substituindo a equação (1.12) na expressão para Γ^{λ}_{00}, ficamos com

$$\Gamma^{\lambda}_{00} = -\frac{1}{2} (\eta^{\lambda k} + h^{\lambda k}) \frac{\partial}{\partial x^{k}} (\eta_{00} + h_{00}) \approx -\frac{1}{2} \eta^{\lambda k} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{k}}.$$

Finalmente a equação de movimento no Limite Newtoniano é dada por

$$\frac{d^2 x^{\lambda}}{d\tau^2} - \frac{1}{2} \eta^{\lambda k} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{k}} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0.$$

A componente tempo desta equação ($\lambda = 0$) nos dá a identidade trivial $0 = 0$. Tomando a equação de forma vetorial e o tempo como "absoluto", ou seja, $dt = d\tau$, temos:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \frac{1}{2} \nabla h_{00}, \tag{1.13}$$

mas a equação gravitacional de Newton equivalente é

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla\phi, \tag{1.14}$$

onde ϕ é o potencial gravitacional a uma distância r do centro de um corpo esférico de massa M, que por sua vez é dado por:

$$\phi = -\frac{GM}{r}, \tag{1.15}$$

onde $G \simeq 6,67.10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$ é a constante gravitacional de Newton. Comparando as equações (1.13) e (1.14) concluímos que

$$h_{00} = -2\phi + c,$$

onde c é uma constante. A grande distâncias, o valor de h_{00} precisa ser nulo para que a métrica seja Minkowskiana [Eq. (1.12)]. Como $\phi \to 0$ quando $r \to \infty$, concluímos que $c = 0$. Finalmente deduzimos que a componente tempo-tempo do tensor métrico no Limite Newtoniano é

$$g_{00} = -(1 + 2\phi). \tag{1.16}$$

O potencial gravitacional é da ordem de 10^{-39} na superfície de um próton, 10^{-9} na superfície da terra, 10^{-6} na superfície do sol e 10^{-4} na superfície de uma anã branca. Assim a distorção em $g_{\mu\nu}$ produzida por corpos de massa não nula é, em geral, negligenciável.

2 ANÁLISE TENSORIAL

Um tensor é uma entidade matemática que obedece à segunte lei de transformação: se um sistema de coordenadas é transformado em outro ($x \longrightarrow x'$), o tensor $T^{\mu\nu\dots}_{\lambda\kappa\dots}$ escrito na base x se transformará em $T'^{\gamma\delta\dots}_{\rho\eta\dots}$ na base x' obedecendo a seguinte regra:

$$T'^{\gamma\delta\dots}_{\rho\eta\dots} = \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\nu}} \cdots \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\eta}} \cdots T^{\mu\nu\dots}_{\lambda\kappa\dots}. \tag{2.1}$$

Veja, como consequência imediata da definição de tensor, que se ele é zero em um sistema de coordenadas em especial, ele será zero em todos os outros. Assim eles são bastante úteis em sistemas físicos, pois a física não depende do sistema de coordenadas adotado.

2.1 Princípio da Covariância Geral

O Princípio da Covariância Geral é uma versão alternativa do Princípio da Equivalência. Ele afirma que uma equação física é válida em um campo gravitacional geral se duas condições forem satisfeitas:

1. A equação ser válida na ausência de gravidade, ou seja, ela deve concordar com as leis da relatividade restrita onde o tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ é igual à métrica de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$ e a conexão afim $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ é nula.

2. A equação ser covariante geral, isto é, preservar sua forma quando há uma mudança de coordenadas $x \longrightarrow x'$.

Por meio deste princípio podemos estender as equações da relatividade restrita para regiões com campo gravitacional e, por facilidade, levar equações em um espaço geral ao espaço de Minkowski e tirar propriedades de forma simplificada. Em especial, se um tensor for zero em um sistema de coordenadas localmente inercial, ele será zero em um sistema de coordenadas qualquer.

2.2 Derivada Covariante

Primeiramente mostremos que a conexão afim não é um tensor. Pela definição da conexão afim,

$$\begin{aligned}
\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \\
&= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \left(\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right) \\
&= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \left[\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\tau} \partial x^{\sigma}} + \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right].
\end{aligned}$$

Agora usamos a equação (1.6), o que resulta em

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}}. \tag{2.2}$$

O termo não homogêneo na equação acima mostra que a conexão afim não é um tensor. Podemos ainda reescrever a expressão. Veja:

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} = \delta^{\lambda}_{\nu}.$$

Derivando a expressão em relação a x'^{μ} resulta em

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} = -\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}}.$$

Agora reescrevemos a equação (2.2):

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}}. \tag{2.3}$$

Consideremos agora um vetor contravariante. Por definição um vetor contravariante se transforma da seguinte forma:

$$V'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu}.$$

Derivemos a expressão parcialmente em relação a x'^{λ}

$$\frac{\partial V'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} V^{\nu}. \tag{2.4}$$

O segundo termo é o que impede a derivada parcial ser um tensor. É possível construir um tensor a partir desta expressão e da equação (2.3). Veja:

$$\Gamma'^{\mu}_{\lambda\kappa} V'^{\kappa} = \left[\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\kappa}} \Gamma^{\nu}_{\rho\sigma} - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\kappa}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \right] \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\eta}} V^{\eta}$$

$$= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \Gamma^{\nu}_{\rho\sigma} V^{\sigma} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} V^{\sigma}. \tag{2.5}$$

Agora adicionamos as equações (2.4) e (2.5) e obtemos

$$\frac{\partial V'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} + \Gamma'^{\mu}_{\lambda\kappa} V'^{\kappa} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \left(\frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma^{\nu}_{\rho\sigma} V^{\sigma} \right). \tag{2.6}$$

Finalmente definimos a derivada covariante de um vetor contravariante como

$$V^{\mu}{}_{;\nu} \equiv \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\mu}_{\nu\kappa} V^{\kappa}, \tag{2.7}$$

que é um tensor pela equação (2.1). De forma análoga definimos a derivada covariante de um tensor covariante como

$$V_{\mu;\nu} \equiv \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} V_{\kappa}, \tag{2.8}$$

que também é um tensor. No caso de um tensor misto, a derivada covariante é, tomando como exemplo $T^{\lambda}_{\mu\nu}$,

$$T^{\lambda}_{\mu\nu;\rho} = \frac{\partial T^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma^{\lambda}_{\kappa\rho} T^{\kappa}_{\mu\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\rho} T^{\lambda}_{\kappa\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\nu\rho} T^{\lambda}_{\mu\kappa}, \tag{2.9}$$

que por sua vez também é um tensor.

A derivada covariante do tensor métrico é nula. Veja:

$$g_{\mu\nu;\lambda} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} g_{\kappa\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\nu\lambda} g_{\mu\kappa},$$

onde pela equação (1.7) deduzimos que é zero. Em suma,

$$g_{\mu\nu;\lambda} = g^{\mu\nu}{}_{;\lambda} = \delta^{\mu}_{\nu\,;\lambda} = 0. \tag{2.10}$$

A derivada covariante possui propriedades semelhantes as da derivação. São elas:

(A) Linearidade:

$$(\alpha A^{\mu}{}_{\nu} + \beta B^{\mu}{}_{\nu})_{;\lambda} = \alpha A^{\mu}{}_{\nu;\lambda} + \beta B^{\mu}{}_{\nu;\lambda}. \tag{2.11}$$

(B) A derivada covariante de um produto de tensores obedece a regra de Leibniz. Por exemplo:

$$(A^{\mu}{}_{\nu} B^{\lambda})_{;\rho} = A^{\mu}{}_{\nu;\rho} B^{\lambda} + A^{\mu}{}_{\nu} B^{\lambda}{}_{;\rho}. \tag{2.12}$$

2.3 Curvatura

Para desenvolvermos uma equação de campo gravitacional é necessário antes definir uma curvatura no espaço-tempo gerado pelo campo gravitacional. Ao definirmos a curvatura como um tensor podemos aplicar o princípio da covariância geral, o que fará ela ter um sentido físico e facilitará nos cálculos. O tensor métrico, apesar de ser um tensor, não é um bom candidato, pois sua derivada covariante é zero.

2.3.1 Definição do Tensor de Curvatura

Como visto, os efeitos gravitacionais são consequência de uma curvatura no espaço-tempo. Precisamos de uma entidade matemática para representá-la e, pelo princípio da covariância geral, ela precisa ser um tensor. É esperado que o campo de gravidade dependa da curvartura. Vimos que no Limite Newtoniano a componente tempo-tempo do tensor métrico é igual ao potencial gravitacional Newtoniano, assim é esperado também que a curvatura dependa do tensor métrico e de suas derivadas. É impossível construir um tensor apenas com derivadas de primeira ordem do tensor métrico, pois em um sistema de coordenadas inerciais locais elas são nulas [veja Eq. (1.7)]. Assim tomaremos derivadas de até segunda ordem do tensor métrico para construir o tensor de curvatura.

Para definirmos a curvatura, tomaremos duas derivadas covariantes de um vetor contravariante V^λ. Veja:

$$\begin{aligned} V^\lambda{}_{;\nu;\mu} = \quad & \frac{\partial^2 V^\lambda}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\frac{\partial V^\sigma}{\partial x^\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\frac{\partial V^\sigma}{\partial x^\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\frac{\partial V^\lambda}{\partial x^\rho} \\ & + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\rho\sigma}V^\sigma + \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu}V^\sigma + \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\sigma}V^\sigma, \end{aligned}$$

agora fazemos uma permutação anticíclica nos índices μ e ν

$$V^\lambda{}_{;\nu;\mu} - V^\lambda{}_{;\mu;\nu} = \left[\frac{\partial \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\mu\sigma}\right]V^\sigma,$$

como o lado esquerdo da equação é um tensor, o lado direito também é. Assim o termo entre colchetes é um tensor (lembrando que o produto de tensores é um tensor). Veja que este tensor depende do tensor métrico e de suas derivadas primeira e segunda [veja Eq. (1.10)]. Assim podemos definir o tensor de curvatura da seguinte forma:

$$R^\lambda{}_{\sigma\nu\mu} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\mu\sigma}. \tag{2.13}$$

Este é o *tensor de curvatura de Riemann-Christoffel*. Veja que ele é antissimétrico em relação aos índices ν e μ. Por ser um tensor, uma transformação de coordenadas $x \longrightarrow x'$ leva a uma transformação do tensor de curvatura de Riemann-Christoffel $R'^{\tau}{}_{\rho\sigma\eta}$ do tipo

$$R'^{\tau}{}_{\rho\sigma\eta} = \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\eta}} R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa}. \tag{2.14}$$

2.3.2 Unicidade do Tensor de Curvatura

É possível provar que $R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa}$ é o único tensor que pode ser construído a partir de combinação linear das derivadas de primeira e de segunda ordem do tensor métrico, e ainda ser linear nas derivadas de segunda ordem.

Para provarmos esta afirmação, tomamos um sistema de coordenadas localmente inercial em $x = X$, onde sobre este ponto a conexão afim $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ é nula. Consideraremos apenas uma limitada classe de transformações de coordenadas $x \longrightarrow x'$ que mantêm a conexão afim zero sobre o ponto em questão. Pela equação (2.2), a conexão afim se transforma da forma (em $x = X$):

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \Gamma'^{\tau}_{\rho\sigma} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}} \frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}. \tag{2.15}$$

O termo não homogêneo na equação acima deve ser nulo em $x = X$ para que a conexão afim seja também nula no novo sistema de coordenadas, ou seja,

$$\left(\frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \right)_{x=X} = 0. \tag{2.16}$$

Visto que a conexão afim é nula em $x = X$, todas as derivadas de primeira ordem do tensor métrico são nulas [veja Eq. (1.7)] e o nosso novo tensor desejado precisa ser combinação linear das derivadas de ordem 2 do tensor métrico. Equivalentemente, o tensor desejado precisa ser composto de derivadas de ordem 1 da conexão afim.

Isolando a expressão $\Gamma'^{\tau}_{\rho\sigma}$ na equação (2.15), diferenciando em relação a x'^{η} e usando a equação (2.16) ficamos com (em $x = X$):

$$\frac{\partial \Gamma'^{\tau}_{\rho\sigma}}{\partial x'^{\eta}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\eta}} \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\eta}} \frac{\partial^3 x'^{\tau}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}. \tag{2.17}$$

Que tipo de combinação de $\partial\Gamma/\partial x$ se comportará como um tensor? Claramente uma que elimine o termo não homogêneo na regra de transformação, equação (2.17). Acontece que o termo em questão é uma função apenas de τ, ρ, σ e η, e simétrico em relação aos três ultimos. Assim o único meio de obtermos uma combinação linear de $\partial\Gamma/\partial x$ que se transforme como um tensor sob todas as classes de transformações $x \longrightarrow x'$ que satisfazem

(2.16) é tomando combinações antissimétricas de ν e κ. Portanto (em $x = X$):

$$T^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}}, \tag{2.18}$$

o que se transforma como um tensor. Acontece que quando $\Gamma = 0$, o tensor de Riemann-Christoffel satisfaz (2.18), logo em sistemas de coordenadas localmente inerciais $T^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa} = R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa}$. Esta é uma igualdade entre tensores, assim se isto é verdade em uma classe de sistema de coordenadas, isto será verdade em todos os sistemas de coordenadas, o que implica $R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa}$ ser o tensor desejado.

Podemos tomar outros tensores com a mesma característica, construído a partir do tensor métrico e suas derivadas primeira e segunda ordem, linear nas de segunda ordem. Estes tensores são simplismente contrações do tensor de curvatura de Riemann-Christoffel. São eles:

1. Tensor de Ricci:
$$R_{\mu\kappa} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\kappa} \tag{2.19}$$

2. Curvatura Escalar:
$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa} \tag{2.20}$$

2.4 Identidade de Bianchi

Esta seção será dedicada a desenvolver uma identidade muito útil para a obtenção da equação de campo, a Identidade de Bianchi.

Primeiramente tomamos o tensor de curvatura na forma covariante total

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\sigma} R^{\sigma}{}_{\mu\nu\kappa}, \tag{2.21}$$

e agora o expressamos em termos do tensor métrico e da conexão afim

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \quad & \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\lambda}} \right\} \\ & + g_{\eta\sigma}\left[\Gamma^{\eta}_{\nu\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\mu\kappa} - \Gamma^{\eta}_{\kappa\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Por facilidade, tomaremos um sistema de coordenadas localmente inercial (em $x = X$). Os termos em Γ na equação acima serão nulos. Agora faremos a derivada covariante da expressão em relação a η:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\eta}\left\{\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}\right\}_{x=X}.$$

Permutando ciclicamente os íncices ν, κ e η, teremos a *identidade de Bianchi*:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} + R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} + R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} = 0. \tag{2.23}$$

Como a expressão acima é um tensor, ela será zero em qualqer sistema de coordenadas pelo princípio da covariância geral. Pela equação (2.10) podemos contrair os íncices λ e ν da equação, para isso multiplicamos a equação por $g^{\lambda\nu}$ e usamos a antissimetria do tensor de curvatura em relação aos dois ultimos índices:

$$\begin{aligned} 0 &= g^{\lambda\nu}R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} - g^{\lambda\nu}R_{\lambda\mu\nu\eta;\kappa} + g^{\lambda\nu}R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} \\ &= (g^{\lambda\nu}R_{\lambda\mu\nu\kappa})_{;\eta} - (g^{\lambda\nu}R_{\lambda\mu\nu\eta})_{;\kappa} + (g^{\lambda\nu}R_{\lambda\mu\kappa\eta})_{;\nu} \\ &= R_{\mu\kappa;\eta} - R_{\mu\eta;\kappa} + R^{\nu}{}_{\mu\kappa\eta;\nu}. \end{aligned}$$

Contraindo novamente, multiplicando a expressão por $g^{\mu\kappa}$,

$$R^{\mu}{}_{\eta;\mu} - \frac{1}{2}R_{;\eta} = 0, \tag{2.24}$$

ela ainda pode ser escrida nas seguintes formas:

$$\left(R^{\mu}{}_{\eta} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\eta}R\right)_{;\mu} = 0, \tag{2.25}$$

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)_{;\mu} = 0. \tag{2.26}$$

Como veremos mais adiante, o termo entre parênteses na equação acima representa o campo de Einstein, logo a identidade de Bianchi representa a conservação desse campo.

3 GRAVITAÇÃO E COSMOLOGIA

Neste capítulo aplicaremos as ferramentas desenvolvidas no capítulo anterior para dar continuidade à teoria da Relatividade Geral. Será desenvolvida a equação de campo de Einstein, a métrica de Robertson-Walker e finalmente aplicaremos as duas ideias, o que resulta nas equações de Einstein e no modelo de Friedmann, onde o "raio do universo"é analisado.

3.1 A Equação do Campo Gravitacional

Em um campo gravitacional arbitrário podemos definir um sistema de coordenadas tal que, sobre um ponto X, as seguintes relações sejam válidas:

$$g_{\alpha\beta}(X) = \eta_{\alpha\beta}, \tag{3.1}$$

$$\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^{\gamma}}\right)_{x=X} = 0. \tag{3.2}$$

Logo para x próximo a X o tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ diferirá de $\eta_{\alpha\beta}$ apenas por um termo quadrado em $x - X$. É esperado que próximo a X o campo gravitacional seja fraco.

Primeiramente lembremos que em um campo gravitacional fraco produzido por uma densidade de massa ρ, a componente tempo-tempo do tensor métrico é aproximadamente dada por

$$g_{00} \simeq -(1 + 2\phi),$$

onde ϕ é o potencial gravitacional. A equação de Poisson afirma que

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho,$$

onde G é a constante gravitacional de Newton. A densidade de massa é a componente tempo-tempo do tensor de energia e momento T_{00},

$$T_{00} = \rho.$$

Combinando as equações acima ficamos com

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00}. \tag{3.3}$$

Supõe-se que esta equação de campo é válida apenas para campos fracos e estáticos gerados por uma matéria não relativística. Esta equação nos leva a "adivinhar"como seria a equação para campos fracos de uma distribuição geral $T_{\alpha\beta}$ do tensor momento-energia. Ela seria:

$$G_{\alpha\beta} = -8\pi G T_{\alpha\beta}, \tag{3.4}$$

onde $G_{\alpha\beta}$ é uma combinação linear da métrica e suas derivadas de primeira e de segunda ordem.

Pelo Princípio da Equivalência temos que as equações de um campo de força arbitrária precisa ser da forma:

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \tag{3.5}$$

Em suma, o campo $G_{\mu\nu}$ precisa obedecer as seguintes propriedades:

(A) Por definição, $G_{\mu\nu}$ é um tensor.

(B) $G_{\mu\nu}$ é combinação linear da métrica até derivadas de segunda ordem.

(C) Visto que $T_{\mu\nu}$ é simétrico, $G_{\mu\nu}$ também será.

(D) Visto que $T_{\mu\nu}$ é conservado, $G_{\mu\nu}$ também será:

$$G^{\mu}{}_{\nu;\mu} = 0 \tag{3.6}$$

(E) No limite para campos fracos

$$G_{00} = \nabla^2 g_{00} \tag{3.7}$$

Pela unicidade do Tensor de Curvatura, o tensor $G_{\mu\nu}$ deverá ser escrito na forma, propriedades (A) e (B):

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R, \tag{3.8}$$

onde C_1 e C_2 são constantes. Pela definição acima $G_{\mu\nu}$ é simétrico (C). Tomamos a forma contravariante em μ e temos:

$$\begin{aligned} G^\mu{}_\nu &= g^{\mu\eta} G_{\eta\nu} \\ &= C_1 g^{\mu\eta} R_{\eta\nu} + C_2 g^{\mu\eta} g_{\eta\nu} R \\ &= C_1 R^\mu{}_\nu + C_2 \delta^\mu{}_\nu R. \end{aligned}$$

Logo

$$G^\mu{}_{\nu;\mu} = C_1 R^\mu{}_{\nu;\mu} + C_2 \delta^\mu{}_\nu R_{;\mu}. \tag{3.9}$$

Usamos agora a identidade de Bianchi

$$\left(R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\nu R\right)_{;\mu} = 0 \Rightarrow R^\mu{}_{\nu;\mu} = \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\nu R_{;\mu}.$$

Substituindo na equação (3.9)

$$G^\mu{}_{\nu;\mu} = \left(\frac{C_1}{2} + C_2\right) R_{;\nu}. \tag{3.10}$$

Para que a condição (D) seja atendida, ou $C_2 = -C_1/2$ ou $R_{;\nu} = 0$, o que se restringe a um espaço de curvatura constante. Assim adotamos a primeira condição, o que nos resulta

$$G_{\mu\nu} = C\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right). \tag{3.11}$$

Usaremos a propriedade (E) para determinar o valor de C.

Para campos fracos as componentes espaciais do tensor momento energia, em módulo, são muito menores que a componente tempo-tempo ($|T_{ij}| << |T_{00}|$), o que se reflete nas componentes de G. Usando esta propriedade em (3.11) teremos

$$\begin{aligned} 0 \simeq G_{ij} &= C\left(R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R\right) \\ &\Rightarrow R_{ij} \simeq \frac{1}{2}g_{ij}R \simeq \frac{1}{2}\eta_{ij}R = \frac{1}{2}\delta_{ij}R, \end{aligned}$$

o que implica

$$R_{kk} = \frac{1}{2}\delta_{kk}R = \frac{3}{2}R.$$

A curvatura escalar é então

$$\begin{aligned} R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} &\simeq \eta^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} \\ &= R_{kk} - R_{00} \Rightarrow R \simeq 2R_{00}. \end{aligned}$$

A componente tempo-tempo do campo é

$$\begin{aligned} G_{00} &= C[R_{00} - \frac{1}{2}\eta_{00}(2R_{00})] \\ &= 2CR_{00}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Agora encontremos uma expressão para R_{00}

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} \Rightarrow R_{\alpha\beta} = \eta^{\gamma\delta} R_{\gamma\alpha\delta\beta} = -R_{0\alpha 0\beta} + R_{k\alpha k\beta},$$

o que implica

$$R_{00} = -R_{0000} + R_{k0k0}.$$

Uma expressão para o tensor de curvatura na forma covariante total em um sistema de cordenadas inercial é a equação (2.22) sem os termos em Γ. Assim

$$R_{\alpha 0\beta 0} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^0 \partial x^0} - \frac{\partial^2 g_{0\alpha}}{\partial x^0 \partial x^\beta} - \frac{\partial^2 g_{\beta 0}}{\partial x^\alpha \partial x^0} + \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right].$$

Como os campos são estáticos, todas as derivadas em relação a x^0 serão nulas. Pela equação acima R_{00} é

$$\begin{aligned} R_{00} &= -R_{0000} + R_{k0k0} \\ &= 0 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^k \partial x^k} \\ &= \frac{1}{2}\nabla^2 g_{00}. \end{aligned}$$

Aplicando a expressão acima na equação (3.12) encontramos

$$\begin{aligned} G_{00} &= 2CR_{00} \\ &= C\nabla^2 g_{00}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Agora aplicamos a propriedade (E) e concluímos que $C = 1$. A equação de campo é então:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{3.14}$$

Veja que o lado direito da equação possui apenas termos de momento e energia, enquanto o lado esquerdo é puramente geométrico. Podemos concluir que a fonte da curvatura no espaço-tempo é a massa e a energia, e esta curvatura é a responsável pela interação gravitacional entre os corpos macivos.

Podemos tomar uma excessão à propriedade (B) e afirmar que o campo $G_{\mu\nu}$ contém um termo linear em $g_{\mu\nu}$, ou seja:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{3.15}$$

onde o termo Λ é chamado de *constante cosmológica.* O campo escrito nesta forma satisfaz as propriedades (A), (C) e (D), mas não (E), assim é necessário que a constante cosmológica seja muito pequena para não ir de encontro a tão bem sucedida gravitação de Newton.

3.2 A Métrica de Robertson-Walker

O Princípio Cosmólogico é a hipótese de que o universo é espacialmente isotrópico e simétrico. A métrica de Robertson-Walker em um sistema de coordenadas espaciais esféricas usuais r, θ, ϕ e uma temporal t é dada por

$$-d\tau^2 = -dt^2 + R^2(t)\left\{\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2\theta\ d\phi^2\right\}, \tag{3.16}$$

onde $R(t)$ é uma função desconhecida do tempo chamada de fator de escala e k uma constante chamada curvatura espacial, que por uma escolha apropriada de coordenadas pode ter valores $+1$, 0 ou -1. As componentes da métrica são

$$g_{00} = -1, \qquad g_{rr} = \frac{R^2(t)}{1-kr^2}, \qquad g_{\theta\theta} = r^2R^2(t), \qquad g_{\phi\phi} = r^2 sen^2\theta\ R^2(t), \tag{3.17}$$

com $g_{\mu\nu} = 0$ para $\mu \neq \nu$. Para $k = -1$ ou $k = 0$ o espaço é infinito, enquanto para $k = +1$ o espaço é finito, de circunferência própria dada por

$$L = 2\pi R(t) \tag{3.18}$$

e volume próprio

$$V = 2\pi^2 R^3(t). \tag{3.19}$$

Para $k = +1$ o universo espacial pode ser considerado como a superfície de uma esfera de raio $R(t)$ no espaço euclidiano quadridimencional, e $R(t)$ é chamado de "raio do universo."

Podemos obter uma profunda ideia do comportamento da matéria em um universo de Robertson-Walker aplicando o princípio cosmológico a tensores que descrevem o comportamento geral da matéria, como o tensor momento-energia $T^{\mu\nu}$ e a corrente de galáxias ${J_G}^{\mu}$ definida por

$${J_G}^{\mu} = (-g(x))^{-1/2} \sum_n \int \delta^4(x - x_n) dx_n^{\mu}, \tag{3.20}$$

onde a soma é sobre as galáxias, consideradas de massas iguais a um. É requerido que estes tensores sejam forma-invariante e, como consequência, é possível mostrar que

$$J_G{}^t = n_G(t) \qquad J_G{}^i = 0 \tag{3.21}$$

e que

$$T_{tt} = \rho(t) \qquad T_{it} = 0 \qquad T_{ij} = g_{ij}p(t), \tag{3.22}$$

onde n_G, ρ e p são quantidades desconhecidas que podem depender de t, mas não de r, θ ou ϕ. Podemos ainda reescrever estas equações de uma maneira mais elegante. Veja:

$$J_G{}^\mu = n_G U^\mu, \tag{3.23}$$

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu}, \tag{3.24}$$

onde U^μ é o "quadri-vetor velocidade"

$$U^t \equiv 1, \tag{3.25}$$

$$U^i \equiv 0. \tag{3.26}$$

A equação (3.24) tem a mesma forma de uma equação de um fluido perfeito de quadri-velocidade U^μ, enquanto as equações (3.25) e (3.26) mostram que os componentes do universo estão, em média, em repouso em relação às coordenadas r, θ e ϕ.

Podemos obter equações diferenciais para $n_G(t)$, $\rho(t)$ e $p(t)$ a partir de princípios de conservação. Se galáxias nem são construídas nem destruídas, o tensor $J_G{}^\mu$ obedece à equação de conservação

$$0 = (J_G{}^\mu)_{;\mu} = (-g)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x^\mu}((-g)^{1/2}J_G{}^\mu) = (-g)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial t}[(-g)^{1/2}n_G], \tag{3.27}$$

onde g é o determinante da métrica, dado por

$$g = -R^6(t)r^4(1-kr^2)^{-1}sen^2\theta. \tag{3.28}$$

Substituindo na equação (3.27) encontramos

$$\frac{d}{dt}(n_G(t)R^3(t)) = 0 \quad \Rightarrow \quad n_G(t)R^3(t) = \text{constante}. \tag{3.29}$$

O tensor momento-energia obedece à lei de conservação

$$\begin{aligned} 0 &= T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \\ &= \frac{\partial p}{\partial x^\nu}g^{\mu\nu} + (-g)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x^\nu}[(-g)^{1/2}(\rho+p)U^\mu U^\nu] + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(\rho+p)U^\nu U^\lambda. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Usando as equações (3.25, 3.26) e o fato de $\Gamma^{\mu}_{tt} = 0$, temos, para $\mu = t$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dp}{dt}(-1) \\ &+ [R^6(t) r^4 (1-kr^2)^{-1} sen^2\theta]^{-1/2} \frac{\partial}{\partial t}\{[R^6(t) r^4 (1-kr^2)^{-1} sen^2\theta]^{1/2}(\rho + p)\} \\ &+ 0, \end{aligned}$$

o que implica

$$R^3(t)\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\{R^3(t)[\rho(t) + p(t)]\}. \tag{3.31}$$

Se tomarmos a pressão da matéria cósmica negligenciável, ou seja, $p(t) << \rho(t)$, teremos uma relação semelhante à equação (3.29):

$$\rho(t)R^3(t) = \text{constante}. \tag{3.32}$$

3.3 Equações de Einstein

Vamos iniciar o estudo da cosmologia dinâmica considerando as restrições impostas pelas equações de campo de Einstein sobre a métrica em um universo geral, isotrópico e homogêneo. Tomaremos a métrica de Robertson-Walker. Definamos a métrica $\tilde{g}_{ij}$ como a métrica de um espaço maximamente simétrico e tridimensional de coordenadas esféricas usuais r, θ e ϕ. Suas componentes são:

$$\begin{gathered} \tilde{g}_{rr} = (1-kr^2)^{-1}, \qquad \tilde{g}_{\theta\theta} = r^2, \qquad \tilde{g}_{\phi\phi} = r^2 sen^2\theta \\ \tilde{g}_{ij} = 0 \qquad (\text{para } i \neq j). \end{gathered} \tag{3.33}$$

Assim as componentes da métrica de Robertson-Walker podem ser expressas na seguinte forma:

$$g_{tt} = -1, \qquad g_{it} = 0, \qquad g_{ij} = R^2(t)\tilde{g}_{ij}(x). \tag{3.34}$$

Vamos desenvolver agora as componentes não nulas da conexão afim desta métrica, dadas pela equação (3.17):

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{ij} &= \frac{1}{2}g^{t\lambda}\left\{\frac{\partial g_{i\lambda}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\lambda}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda}\right\} \\ &= \frac{1}{2}g^{ti}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j} + \frac{1}{2}g^{tj}\frac{\partial g_{jj}}{\partial x^i} - \frac{1}{2}g^{t\lambda}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda}\delta_{ij} \qquad (\text{sem soma em } i, j) \\ &= -\frac{1}{2}g^{tt}\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}\delta_{ij} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}(-1)\tilde{g}_{ij}\frac{d}{dt}[R^2(t)]\delta_{ij} \\
&= R\dot{R}\tilde{g}_{ij},
\end{aligned} \tag{3.35}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^i_{tj} &= \frac{1}{2}g^{i\lambda}\left\{\frac{\partial g_{t\lambda}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\lambda}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tj}}{\partial x^\lambda}\right\} \\
&= \frac{1}{2}g^{it}\frac{\partial g_{tt}}{\partial x^j} + \frac{1}{2}g^{ij}\frac{\partial g_{jj}}{\partial t}\delta_{ij} - 0 \qquad \text{(sem soma em } i,j) \\
&= 0 + \frac{1}{2}g^{ij}\tilde{g}_{jj}\frac{d}{dt}[R^2(t)]\delta_{ij} \\
&= \frac{1}{2}R^{-2}\tilde{g}^{ij}\tilde{g}_{jj}[2R\dot{R}]\delta_{ij} \\
&= \frac{\dot{R}}{R}\delta_{ij},
\end{aligned} \tag{3.36}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^i_{jk} &= \frac{1}{2}g^{i\lambda}\left\{\frac{\partial g_{j\lambda}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k\lambda}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\lambda}\right\} \\
&= \frac{1}{2}R^{-2}\tilde{g}^{il}\left\{R^2\frac{\partial \tilde{g}_{jl}}{\partial x^k} + R^2\frac{\partial \tilde{g}_{kl}}{\partial x^j} - R^2\frac{\partial \tilde{g}_{jk}}{\partial x^l}\right\} \\
&= \tilde{\Gamma}^i_{jk},
\end{aligned} \tag{3.37}
$$

Enquanto as componentes do tensor de Ricci são dadas por

$$
R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\lambda_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\lambda\mu} - \Gamma^\lambda_{\lambda\rho}\Gamma^\rho_{\nu\mu}. \tag{3.38}
$$

Encontremos as componentes do tensor de Ricci:

$$
\begin{aligned}
R_{tt} &= \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\lambda t}}{\partial t} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{tt}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\lambda_{t\rho}\Gamma^\rho_{\lambda t} - \Gamma^\lambda_{\lambda\rho}\Gamma^\rho_{tt} \\
&= \frac{\partial \Gamma^k_{kt}}{\partial t} - 0 + \Gamma^k_{tl}\Gamma^l_{kt} - 0 \\
&= \frac{d}{dt}\left(3\frac{\dot{R}}{R}\right) + \left(\frac{\dot{R}}{R}\delta^k_l\right)\left(\frac{\dot{R}}{R}\delta^l_k\right) \\
&= 3\left(\frac{\ddot{R}R - \dot{R}^2}{R^2}\right) + 3\frac{\dot{R}^2}{R^2} \\
&= \frac{3\ddot{R}}{R},
\end{aligned} \tag{3.39}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{it} &= \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\lambda i}}{\partial t} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{ti}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\lambda_{t\rho}\Gamma^\rho_{\lambda i} - \Gamma^\lambda_{\lambda\rho}\Gamma^\rho_{ti} \\
&= \frac{\partial \Gamma^k_{ki}}{\partial t} - \frac{\partial \Gamma^k_{ti}}{\partial x^k} + \Gamma^k_{tl}\Gamma^l_{ki} - \Gamma^l_{lk}\Gamma^k_{ti} \\
&= 0 - 0 + \frac{\dot{R}}{R}\delta^k_l\tilde{\Gamma}^l_{ki} - \tilde{\Gamma}^l_{lk}\frac{\dot{R}}{R}\delta^k_i
\end{aligned}
$$

$$= \quad 0,$$

$$\begin{aligned}
R_{ij} &= \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\lambda i}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{ji}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\lambda}_{j\rho}\Gamma^{\rho}_{\lambda i} - \Gamma^{\lambda}_{\lambda\rho}\Gamma^{\rho}_{ji} \\
&= \frac{\partial \Gamma^{k}_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^{t}_{ji}}{\partial t} - \frac{\partial \Gamma^{k}_{ji}}{\partial x^k} + \Gamma^{t}_{jk}\Gamma^{k}_{ti} + \Gamma^{k}_{j\rho}\Gamma^{\rho}_{ki} - \Gamma^{k}_{kl}\Gamma^{l}_{ji} - \Gamma^{k}_{kt}\Gamma^{t}_{ji} \\
&= \frac{\partial \tilde{\Gamma}^{k}_{ki}}{\partial x^j} - \frac{d}{dt}(R\dot{R}\tilde{g}_{ij}) - \frac{\partial \tilde{\Gamma}^{k}_{ji}}{\partial x^k} + (R\dot{R}\tilde{g}_{jk})\left(\frac{\dot{R}}{R}\delta^k_i\right) \\
&\qquad + \Gamma^{k}_{jt}\Gamma^{t}_{ki} + \Gamma^{k}_{jl}\Gamma^{l}_{ki} - \tilde{\Gamma}^{k}_{kl}\tilde{\Gamma}^{l}_{ji} - \left(\frac{\dot{R}}{R}\delta^k_k\right)(R\dot{R}\tilde{g}_{ij}) \\
&= \left[\frac{\partial \tilde{\Gamma}^{k}_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}^{k}_{ji}}{\partial x^k} + \tilde{\Gamma}^{k}_{jl}\tilde{\Gamma}^{l}_{ki} - \tilde{\Gamma}^{k}_{kl}\tilde{\Gamma}^{l}_{ji}\right] \\
&\qquad - (\dot{R}^2 + R\ddot{R})\tilde{g}_{ij} + \dot{R}^2 g_{ij} + \left(\frac{\dot{R}}{R}\delta^k_j\right)(R\dot{R}\tilde{g}_{ki}) - 3\dot{R}^2\tilde{g}_{ij} \\
&= \tilde{R}_{ij} - (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2)\tilde{g}_{ij}, \qquad (3.40)
\end{aligned}$$

É possível mostrar que em um espaço maximamente simétrico a seguinte relação é válida:

$$\tilde{R}_{ij} = -2k\tilde{g}_{ij}, \qquad (3.41)$$

assim:

$$R_{ij} = -(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k)\tilde{g}_{ij}. \qquad (3.42)$$

O termo fonte na equação de Einstein é definido por:

$$S_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^{\lambda}{}_{\lambda}.$$

Usando as equações (3.22) e (3.24) na equação acima temos:

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\rho - p)g_{\mu\nu} + (p + \rho)U_{\mu}U_{\nu}. \qquad (3.43)$$

Agora aplicamos as equações (3.17) em (3.43), o que resulta em

$$\begin{aligned}
S_{tt} &= \frac{1}{2}(\rho + 3p), \qquad (3.44) \\
S_{it} &= 0, \qquad (3.45) \\
S_{ij} &= \frac{1}{2}(\rho - p)R^2\tilde{g}_{ij}. \qquad (3.46)
\end{aligned}$$

Podemos contrair a equação de campo (3.14) de Einstein de forma a obtermos uma expressão para a curvatura escalar: $R = 8\pi G T^{\lambda}{}_{\lambda}$. Substituindo este resultado na própria equação (3.14) obtemos

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^{\lambda}{}_{\lambda}) = -8\pi G S_{\mu\nu}. \tag{3.47}$$

Tomamos a componente tempo-tempo desta equação e usamos as equações (3.39) e (3.44), o que nos dá

$$3\ddot{R} = -4\pi G(\rho + 3p)R, \tag{3.48}$$

já a componente espaço-espaço da equação (3.47) quando combinada às equações (3.42) e (3.46) nos dá a equação

$$R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k = 4\pi G(\rho - p)R^2, \tag{3.49}$$

e as componentes espaço-tempo nos dá 0=0.

Agora eliminamos o termo $\ddot{R}$ da equação (3.49) usando a (3.48), o que resulta em uma equação diferencial de primeira ordem para $R(t)$:

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2. \tag{3.50}$$

Podemos reescrever a equação de conservação de energia (3.31) na seguinte forma equivalente

$$\frac{d}{dR}(\rho R^3) = -3pR^2 \tag{3.51}$$

As *equações fundamentais da cosmologia dinâmica* são as *equações de Einstein* (3.50), as *equações de conservação de energia* (3.51) e a *equação de estado*. Os modelos cosmológicos, baseados na métrica de Robertson-Walker, nos quais $R(t)$ é derivado desta forma são conhecidos como modelos de Friedmann.

Mesmo sem definir uma equação de estado, é possível ter uma ideia do passado e do futuro da expansão do universo através das equações (3.48)-(3.51). Pela equação (3.48), a "aceleração" $\ddot{R}/R$ é negativa se a quantidade $(\rho + 3p)$ é positiva, o que é esperado. Mas, por definição, $R > 0$ e $\dot{R}/R > 0$ (desvio para o vermelho). Assim a curva $R(t)$ *vs* t precisa ter concavidade para baixo, além de para algum t no passado $R(t) = 0$. Digamos que $R(t = 0) = 0$.

Agora olhemos para o futuro analisando a equação (3.51). Tomando a pressão p como não negativa, a densidade ρ precisa decrescer com o crescimento de R pelo menos mais rápido que R^{-3}. Assim, para $R \to \infty$, o lado direito da equação (3.49) vai à zero pelo menos mais rápido que R^{-1}. Para $k = -1$, $\dot{R}^2(t)$ é positivo, então $R(t)$ vai a infinito quando t vai a infinito. Para $k = 0$, $\dot{R}^2(t)$ é positivo, então $R(t)$ vai a infinito, porém de forma mais lenta que t. Para $k = +1$, $\dot{R}^2(t)$ será zero quando ρR^2 for igual a $3/8\pi G$. Visto que $\ddot{R}$ é negativo, $R(t)$ decrescerá a partir desse ponto e eventualmente será novamente zero em algum tempo finito futuro. Assim o curso qualitativo da história do cosmo é determinado pelo sinal da curvatura espacial: se $k = -1$ ou $k = 0$, então o universo se expandirá indefinidamente, e se $k = +1$, então a atual expansão eventualmente cessará e teremos novamente $R(t) = 0$.

4 VIOLAÇÃO DE SIMETRIA DE LORENTZ

Para falarmos de violação da simetria de Lorentz e de CPT precisamos antes saber o que são essas simetrias. Para isso é necessário antes entender o que significam as transformações de Lorentz e de CPT.
As transformações de Lorentz são de dois tipos. São elas:

- rotações espaciais, que são de três tipos, uma para cada direção e
- boosts, gerados por velocidades relativas e também de três tipos, uma para cada direção.

As transformações de CPT são formadas pela combinação das três transformações: Conjugação de carga, inversão de Paridade e reversão Temporal.

- C converte partícula em antipartícula;
- P transforma um objeto em sua própria imagem, porém de ponta-cabeça;
- T inverte a direção do fluxo do tempo.

Um sistema físico possui simetria de Lorentz se as leis físicas não forem afetadas por uma transformação de Lorentz e, analogamente, possui simetria de CPT se a física também não for afetada por uma transformação de CPT. Aqui uma observação precisa ser feita: violação das simetrias C, P, T e CP são previstas no Modelo Padrão e são observados em experimentos, somente a combinação CPT é requerida pelo Modelo Padrão para ser uma simetria da natureza. Essas simetrias são a base da Relatividade de Einstein.

O Modelo Padrão descreve de maneira unificada todas as partículas elementares e suas interações não gravitacionais. A nível classico, a gravitação é bem descrita pela Relatividade Geral de Einstein. As duas teorias apresentam simetria de Lorentz local e simetria de CPT. O Modelo-Padrão Estendido (ou SME - Standard-Model Extension) é uma teoria que tenta generalizar o Modelo Padrão usual e possui todas as propriedades convencionais desejáveis do Modelo Padrão e da Relatividade Geral, além de permitir violação de simetria de Lorentz e de CPT.

A quebra de simetria de Lorentz, ou a alteração da velocidade limite de propagação, contraria fortemente a teoria da relatividade restrita, que tem como um dos postulados a invariância da velocidade da luz (velocidade limite de propagação) qualquer que seja o referencial em que o observador se encontre. Apesar dessa contradição, outros modelos, como a teoria das cordas, contêm essa quebra de simetria ou a preveem em alguma situação específica. Outras teorias que se enquadram nessa situação incluem, por exemplo, aproximações de gravidade quântica [14], modelos dinâmicos aleatórios [15], multiversos [16], e cenários de mundo-brana [17].

O Modelo Padrão Estendido, ou SME (Standard-Model Extension), é uma teoria que engloba o modelo padrão e todos os operadores unitários que quebram a simetria de Lorentz. O SME pode ser expresso como uma lagrangeana de vários termos. Cada termo da lagrangeana que viola a simetria de Lorentz é um escalar sob as transformações de Lorentz construído por contração de operadores de campo padrão com coeficientes de controle chamados coeficientes de violação de Lorentz. Esses coeficientes de controle são determinados por restrições ou experimentos.

Existem duas maneiras em teoria de campos de violar tal simetria: explícita e espontânea. A quebra explícita ocorre quando a teoria inicialmente já viola a simetria, enquanto a quebra espontânea inicialmente respeita a simetria, mas ela é quebrada por uma transformação de fase; em outras palavras, a quebra espontânea ocorre quando uma simetria da dinâmica não é respeitada pelas soluções da teoria. Por exemplo, as forças dinâmicas que controlam a interação entre planetas na gravitação Newtoniana apresentam simetria rotacional, porém a solução da teoria para o sistema solar exibe uma orientação definida no espaço, que é o plano do sistema solar. Em 2004 um resultado publicado por Kostelecky [12] mostrou que a violação explícita de Lorentz leva a uma incompatibilidade das identidades de Bianchi com as leis de conservação dos tensores energia-momento e densidade de spin, enquanto na violação espontânea não há tal incompatibilidade. Logo qualquer quebra de simetria de Lorentz precisa ser espontânea no cenário gravitacional.

A proposta do SME no setor gravitacional é, mesmo que a teoria apresente simetria local de Lorentz e de CPT, a solução de vácuo poderia violá-la espontaneamente. Essa é uma maneira atrativa de quebrar a simetria de Lorentz e de CPT, pois a dinâmica permanece simétrica e as características tão desejáveis da simetria são preservadas. Assim como no Modelo Padrão usual, quebras espontâneas da simetria de Lorentz e de CPT são desencadeadas por interações que desestabilizam o vácuo vazio. No caso usual, o vácuo é preenchido por grandezas simétricas sob transformações de Lorentz e de CPT (porém violam outras simetrias). Já no SME, o vácuo é preenchido por grandezas orientadas no espaço quadridimensional, gerando quebra de simetria de Lorentz e (em algumas circunstâncias) de CPT.

O teorema de CPT é um resultado geral que liga as simetrias de Lorentz e de CPT. Ele afirma que as teorias com simetria de Lorentz precisam apresentar também simetria de CPT. Essas teorias incluem todas utilizadas para descrever a física de partículas e muitas teorias propostas. No cenário do SME, a quebra de CPT sempre implica quebra de Lorentz, mas o contrário não é verdadeiro. Assim o teorema de CPT é válido no SME.

De forma sucinta, o SME agrega todas as propriedades do Modelo Padrão, exceto que as simetrias de Lorentz e de CPT podem ser violadas localmente na gravitação. Esta teoria sugere que a quebra de simetria de Lorentz e de CPT pode ser observada em experimentos realizáveis, e isso conduz a uma fenomenologia geral para violação de Lorentz e CPT a nível do Modelo Padrão e da Relatividade Geral. Outras teorias padrões como a Eletrodinâmica Quântica são tomadas como casos específicos.

No SME, um tipo de simetria de Lorentz permanece válida: transformações de observador de Lorentz, que são transformações inerciais e podem ser rotações espaciais ou boosts. A violação de Lorentz surge somente quando o campo de partículas sofre uma transformação de Lorentz relativa ao tensor de vácuo de valor esperado não nulo.

De acordo com os estudos em Violação de Lorentz, a estensão do setor gravitacional incluindo termos que violam a simetria de Lorentz é dada pela ação

$$S = S_{\text{EH}} + S_{\text{LV}} + S_{\text{matéria}}, \tag{4.1}$$

onde S_{EH} representa a ação de Einstein-Hilbert,

$$S_{\text{EH}} = \int d^4x\sqrt{-g}\frac{2}{\kappa^2}(R - 2\Lambda), \tag{4.2}$$

R é a curvatura escalar, $\kappa^2 = 32\pi G$ é a constante de acoplamento gravitacional e Λ a constante cosmológica, veja Eq. (3.15). A ação S_{LV} é composta por termos líderes que violam a simetria de Lorentz e é escrita por:

$$S_{\text{LV}} = \int d^4x\sqrt{-g}\frac{2}{\kappa^2}(uR + s^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + t^{\mu\nu\alpha\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta}), \tag{4.3}$$

onde u, $s^{\mu\nu}$ e $t^{\mu\nu\alpha\beta}$ são tensores que geram a violação de Lorentz. Os tensores adimensionais $s^{\mu\nu}$ e $t^{\mu\nu\alpha\beta}$ possuem as mesmas simetrias dos tensores de Ricci e de Riemann respectivamente, e possuem traço nulo, ou seja, $s^{\mu}{}_{\nu} = t^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = 0$, uma vez que podemos alocá-los em u. Também Podemos tomar $t^{\mu\nu\alpha}{}_{\nu} = 0$, visto que ele pode ser alocado em $s^{\mu\alpha}$. Assim os tensores $s^{\mu\nu}$ e $t^{\mu\nu\alpha\beta}$ possuem, respectivamente, nove e dez componentes independentes.

4.1 Modelo de Bumblebee

Modelos em que a violação de Lorentz é resultado da dinâmica de um campo vetorial B_μ, chamado de campo de Bumblebee, são interessantes pois possuem uma forma relativamente simples e envolvem características importantes, como rotação, boost, e violação de CPT. Ele é um exemplo simples de um modelo gravitacional em que um campo vetorial B^μ possui valor esperado de vácuo não nulo, o que induz a uma violação de Lorentz e de difeomorfismo. Este modelo foi primeiramente utilizado no contexto da teoria de cordas [4], no qual a simetria de Lorentz é espontaneamente quebrada devido ao potencial $V(B^\mu B_\mu \pm b^2) = \lambda(B^\mu B_\mu \pm b^2)^2/2$, onde λ é uma constante real de acoplamento. O modelo de Bumblebee pode ser representado na ação (4.3) sempre que

$$t^{\mu\nu\alpha\beta} = 0, \quad u = \frac{1}{4}\xi B^\alpha B_\alpha, \quad s^{\mu\nu} = \xi\left(B^\mu B^\nu - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}B^\alpha B_\alpha\right), \tag{4.4}$$

onde ξ é uma constante. Em um espaço de Riemann-Cartan, o campo de força correspondente a B_μ é definido por

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \tag{4.5}$$

onde ∂_μ indica derivada parcial em relação a x^μ. De posse destas definições, a ação responsável pela dinâmica do campo de Bumblebee B_μ é [13]

$$S_B = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} + \frac{2\xi}{\kappa^2}B^\mu B^\nu R_{\mu\nu} - V(B^\mu B_\mu \pm b^2)\right]. \tag{4.6}$$

Uma outra opção para o potencial seria $V(x) = \lambda x$, onde λ agora é um campo de multiplicador de Lagrange. Em regiões onde a curvatura e a torsão são nulas, o campo de Bumblebee possui valor não nulo $B^\mu = b^\mu$, onde $b^\mu b_\mu = \mp b^2$, de forma que $V = 0$. A grandeza b_μ é o coeficiante de violação de Lorentz e CPT. Em um referencial localmente inercial as condições se tornam: $B_a B^a = b^2$, o que implica um campo de fundo b_a não nulo, gerando direções privilegiadas. Como consequência, mesmo no limite do espaço-tempo plano de Minkowski há uma anisotropia, embora este efeito possa ser mascarado pela presença de matéria e por fortes curvaturas e torções [12].

As ideias físicas oferecidas por esta teoria são bastante ricas. O limite do espaço-tempo de Minkowski e o potencial do multiplicador de Lagrange é equivalente à teoria estudada por Nambu [18], que obteve uma prova de que esta teoria é equivalente à eletrodinâmica em um gauge não linear. O caso sem violação de Lorentz e de potencial V nulo, mas de ξ não nulo é usado como uma teoria alternativa de gravitação em um espaço-tempo de Riemann por Will e Nordtvedt [19], [20] e [21]. Teorias onde $\xi = 0$ foram introduzidas na Ref. [4] para ilustrar algumas ideias a respeito da violação da simetria de Lorentz.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foram introduzidos os conceitos iniciais da teoria da Relatividade Geral (Cap. 1); definimos tensor métrico, equação (1.5), deduzimos a equação da geodésica (1.3) e a aplicamos no limite Newtoniano (1.16). As ferramentas matemáticas necessárias para dar procedimento ao estudo da gravitação de Einstein foram desenvolvidas; discutimos o princípio da covariância geral (Seç. 2.1) definimos derivada covariante (Seç. 2.2), curvatura (1.13) e deduzimos a identidade de Bianchi (2.22 - 2.24). De posse das ferramentas matemáticas, deduzimos a equação de campo de Einstein (3.14), esboçamos a métrica de Robertson-Walker (Seç. 3.2) e desenvolvemos as equações de Einstein e o modelo de Friedmann (Seç. 3.3). Finalmente abordamos os aspectos conceituais da quebra de simetria de Lorentz, ou violação de Lorentz, introduzimos o modelo de Bumblebee e mostramos como este modelo concorda com teorias já existentes (Cap. 4).

Temos como pespectiva futura de estudos com base nos conhecimentos expostos nesta monografia a aplicação da métrica de Friedmann-Robertson-Walker na quebra de simetria de Lorentz e no modelo de Bumblebee.

REFERÊNCIAS

[1] A. Einstein, Annalen der Physik 354 (7), 769-822 (1916).

[2] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press Inc., New York (2008).

[3] D. Walsh; R. F. Carswell ; R. J. Weymann, Nature 279 (5712): 381–384 (1979).

[4] V. A. Kostelecky and S. Samuel, Phys. Rev. Lett. **63**, 224 (1989); Phys. Rev. D **40**, 1886(1989).

[5] G. M. Shore, Nucl. Phys. **B717**, 86 (2005).

[6] R. Bluhm, V. A. Kostelecky, and N. Russel. Phys. Rev. D **57**, 3932 (1998).

[7] C. Adam and F. R. Klinkhamer, Nucl. Phys. **B607**, 247 (2001).

[8] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **87** 251304 (2001).

[9] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. D **80**, 015020 (2009).

[10] R. C. Reyes, L. F. Urrutia, and J. D. Vergara, Phys. Rev. D **78** 125011 (2008).

[11] H. Belich, L. P. Colatto, T. Costa-Soares, J. A. Helayël- Neto, and M. T. D. Orlando, Eur. Phys. J. C **62**, 425 (2009).

[12] V.A. Kostelecky, Phys. Rev. D **69**, 105009 (2004).

[13] R. V. Maluf, C. A. S. Almeida, R. Casana and M. M. Ferreira Jr., Phys. Rev. D **90**, 025007 (2014).

[14] R. Gambini and J. Pullin, J. Alfaro, H. A. Morales-Técotl, and L. F. Urrutia, Phys. Rev. D **66** 124006 (2002); D. Sudarsky, L. Urrutia, and H. Vucetich, Phys. Rev. Lett. **89**, 231301 (2002); Phys. Rev. D **68**, 024010 (2003); G. Amelino -Camelia, Mod. Phys. Lett. A **17**, 899 (2002); Y. J. Ng, ibid. **18**, 1073 (2003); R. Myers and M. Pospelov, Phys. Rev. Lett. **90**, 211601 (2003); N. E. Mavromatos, Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B **214**, 1 (2004).

[15] C. D. Froggatt and H. B. Nielsen, hep-ph/0211106.

[16] J. D. Bjorken, Phys. Rev. D **67**, 043508 (2003).

[17] C. P. Burgess, J. Cline, E. Filotas, J. Matias, and G. D. Moore, J. High Energy Phys. **03**, 043 (2002); A. R. Frey, ibid. **04**, 012 (2003); J. Cline and L. Valcrácel, hep-ph/0312245.

[18] Y. Nambu, Prog. Theor. Phys. Suppl. Extra, 190 (1968). This paper proves the equivalence for timelike b_μ . Proofs of equivalence for the spacelike and lightlike cases have also been obtained by Nambu (private communication).

[19] C. M. Will, Theory and Ex- periment in Gravitational Physics (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1993).

[20] C. M. Will and K. Nordtvedt, Astrophys. J. **177**, 757 (1972).

[21] R. W. Hellings and K. Nordtvedt, Phys. Rev. D **7**, 3593 (1973).