UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM FÍSICA

RAVENNA RODRIGUES OLIVEIRA

O ÁTOMO DE HIRDROGÊNIO E O OSCILADOR HARMÔNICO

FORTALEZA

2014

RAVENNA RODRIGUES OLIVEIRA

O ÁTOMO DE HIRDROGÊNIO E O OSCILADOR HARMÔNICO

Monografia de Bacharelado apresentada à Coordenação da Graduação do Curso de Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho

FORTALEZA

2014

RAVENNA RODRIGUES OLIVEIRA

O ÁTOMO DE HIRDROGÊNIO E O OSCILADOR HARMÔNICO

Monografia de Bacharelado apresentada à Coordenação da Graduação do Curso de Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Física.

Aprovada em 23/02/2013

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho
Universidade Federal do Ceará

Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho
Universidade Federal do Ceará

Prof. Dr. Geova Maciel de Alencar Filho
Universidade Federal do Ceará

Dados Internacionais de CatalogaÃ§Ã£o na PublicaÃ§Ã£o
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Física

A000p Oliveira,Ravenna Rodrigues.
O átomo de hirdrogênio e o oscilador harmônico / Ravenna Rodrigues Oliveira. – Fortaleza, 2014.
38 f.:il.

Monografia (bacharelado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Fortaleza, 2014.

Orientação: Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho

1. Oscilador Harmônico. 2. Átomo de hidrogênio. 3. Semelhanças. 4. Equação de Schrodinger. 5. Separação de variáveis. I. Título.

CDD:000.0

Aos Meus Pais
e
etc..

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família pelo apoio financeiro e psicológico que me sempre dedicaram: Antonia Lusanira Rodrigues Oliveira e José Glairton Oliveira, meus pais, por todas as vezes que foi pedido para mandar mais dinheiro a fim de custear livros para a faculdade, Romany Rodrigues Oliveira por sempre agitar minha vida mesmo sem querer, a Tereza Nonato do Nascimento por todo suporte, a Gilson Aguiar Albuquerque e Maria Aila Albuquerque pelo apoio.

Agradeço aos professores pelo suporte prestado durante o curso: Raimundo Nogueira da Costa Filho, Carlos Alberto Almeida, José Ramos Gonçalvez, Ricardo Cesar e Luís Claudio Serpa. Agradeço a meus amigos pelas enumeras dúvidas tiradas: Augusto Plácido, Diego Felix, João Paulo da Costa Nogeuira, Gabriel Oliveira, Fabio Medeiros, Rayanne Moreira, Juliana Alves, Luan Moura, Adriel Oliveira, Willian Moura, Laura Barth, João Paulo Nobre, Daniel Linhares, Jéssica Feitosa, Marina Pinehiro, Larisse Felix, Marliane Lopez, Ícaro Rodrigues, Luan Vieira, Duarte José, Deric Albuquerque e Fernanda Alencar.

RESUMO

Os problemas físicos correspondentes ao átomo de hidrogênio e o oscilador harmônico quântico são sistemas físicos que aparentemente não possuem nenhuma semelhança. Entretanto, após mudanças de determinadas variáveis, o Hamiltoniano do átomo de hidrogênio pode ser transformado em um hamiltoniano que caracteriza o oscilador oscilador harmônico.

Palavras-chave: Oscilador Harmônico Átomo de hidrogênio Semelhanças Equação de Schrodinger Separação de variáveis

ABSTRACT

The physical problems corresponding to the hydrogen atom and the quantum harmonic oscillator are physical systems that, apparently, haven't any similarity. However, after some change of variables the hamiltonian of the hydrogen atom could be convert in to a Hamiltonian that represent the harmonic oscilator.

Keywords: Quantum Harmonic oscillator. Hydrogen atom. similarities. Schrodinger's equation. Separable variables.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O primeiro modelo moderno atômico surgiu com Dalton, ele defendia a ideia de que toda a matéria é composta por partículas maciças, imutáveis e indivisíveis. Dalton defendia a ideia de que os átomos de um mesmo elemento químico possuÃam as mesmas características (como peso e tamanho), o peso dos compostos representaria a soma dos átomos que os formavam. As reações químicas eram representadas pela união ou separação dos átomos. A figura 1, adaptada de http://es.wikipedia.org/wiki/Modelo_at%C3%B3mico_de_Dalton ,representa o modelo atômico de Dalton.

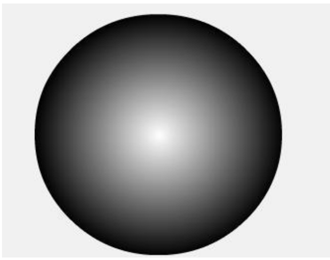

Figura 1: O modelo atômico de Dalton.

Thomson, em 1897, realizou um experimento para encontrar a razão carga massa dos raios catódicos, ele utilizou um tubo de raios catódicos para aplicar aos raios simultaneamente campos elétricos e magnéticos, a partir desse experimento, foi descoberto que eles se comportavam como partículas com cargas negativas, após realizar experimentos em diversas substâncias, concluíu que essas partículas eram universais. Thomson propôs um modelo atômico em 1904 no qual o átomo era uma esfera com carga positiva e os elétrons ficavam incrustados dentro dessa estrutura.A figura 2, adaptada de http://nossomeioporinteiro.files.wordpress.com/2012/02/untitled-47.jpg, representa o modelo de Thompson.

O modelo de Thomson foi refutado devida ao experimento realizado por Rutherford com espalhamento de partículas alfa por átomos. Nos experimentos realizados por Rutherford, havia uma pequena probabilidade de a partícula ser defletida, não podendo ser explicada no modelo de Thomson que daria margem a apenas pequenas deflexões e devido a probabilidade ser grande no modelo de Thomson para o defletimento das partículas. O modelo de Rutherford considera que todas as cargas positivas e a massa do átomo está localizada numa regiaão pequena denominada núcleo e foi considerado que os elétrons circulem ao redor do núcleo, porém como eles estão acelerando devido a interassão coulombiana, logo eles deveriam irradiar, fazendo com que eles perdessem energia e obedecer uma trajetória espiral em difereção ao núcleo. Bohr propõe, então, um modelo quantizado , correspondente as idéias de Palnk e Eisntein, para um átomo com apenas um elétron devido a complexidade das equações, correspondendo ao átomo de hidrogênio.

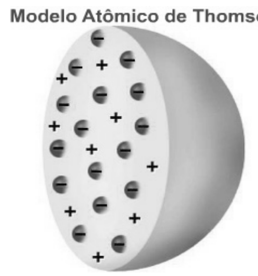

Figura 2: O modelo atômico de Thonson.

Outro tema relevante em física é o oscilador harmônico, pois qualquer partícula que descreva uma trajetória que possua um ponto de retorno, possui um potencial mínimo e em primeira aproximação pode ser representado como sendo um oscilador harmônico. O potencial do oscilador harmônico é dado por

$$V(x) = \frac{kx^2}{2},$$

e representado na figura 3 para $k = 2N/m$.

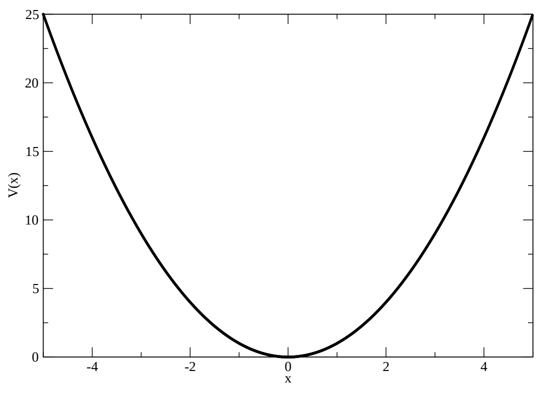

Figura 3: O potencial do oscilador harmônico.

2 A EQUAÇÃO DE SCHRODINGER E A SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

A equação de Schrodinger independente do tempo em três dimensões é dada por

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi. \tag{2.1}$$

A solução da equação de Schrodinger dependente do tempo é dada como segue

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \sum c_n\psi_n(\mathbf{r})e^{-iE_nt/\hbar}, \tag{2.2}$$

onde c_n é uma constante real e E_n a energia do n-éssimo estado. Por outra lado, tem-se que o operador ∇^2 em coordenadas esféricas é dado por

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2sen^2\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right). \tag{2.3}$$

A equação de Schrodinger independente do tempo é, então, dada por

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2sen^2\theta}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right)\right] + V\psi = E\psi. \tag{2.4}$$

Seja $\psi(r,\theta,\phi)$ uma função que é o produto de duas outras como segue

$$\psi(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi). \tag{2.5}$$

A equação (2.4) pode ser reescrita como segue

$$\begin{aligned}
\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{Y}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{R}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{R}{r^2sen^2\theta}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right)\right] + VRY &= ERY \\
\left[\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2}[V(r)-E]\right] + \frac{1}{Y}\left[\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{sen^2\theta}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right)\right] &= 0,
\end{aligned}$$

separando as variáveis que dependam de r das variáveis que dependam de θ e ϕ, tem-se

$$\left[\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-\frac{2mr^2}{\hbar^2}[V(r)-E]\right]=-\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sen^2\theta}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right)\right].$$

Logo, pela separação de variáveis, tem-se

$$\left[\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-\frac{2mr^2}{\hbar^2}[V(r)-E]\right] = l(l+1) \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sen^2\theta}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right)\right] = -l(l+1). \quad (2.7)$$

A solução da equação (2.7) é encontrada a partir de uma nova separação de variáveis, como segue

$$Y(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi), \quad (2.8)$$

$$\left[\frac{1}{\Theta}\left[sen\theta\frac{d}{d\theta}\left(sen\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)\right]+l(l+1)sen^2\theta\right]+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=0,$$

seja m^2 a constante de separação de variáveis, tem-se

$$\frac{1}{\Theta}\left[sen\theta\frac{d}{d\theta}\left(sen\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)\right]+l(l+1)sen^2\theta = m^2 \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -m^2. \quad (2.10)$$

A solução da equação (2.10) é dada por

$$\Phi(\phi)=Ae^{im\phi},$$

com m um inteiro, podendo ser negativo. A equação para θ é dada por

$$sen\theta\frac{d}{d\theta}\left(sen\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+[l(l+1)sen^2\theta-m^2]\Theta=0 \quad (2.11)$$

A solução para $\Theta(\theta)$ é dada pelos polinômios associados de Legendre, P_l^m,

$$\Theta(\theta)=AP_l^m(cos\theta), \quad (2.12)$$

onde

$$P_l^m(x)=(l-x^2)^{|m|/2}\frac{d}{dx_{|m|}}^{|m|}P_l(x), \quad (2.13)$$

com P_l o polinômio de Legendre, definido como

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d}{dx}^{l}(x^2-1)^l. \quad (2.14)$$

Após a normalização, tem-se que a solução angula da equação de Schrodinger é dada pelos harmônicos esféricos, Y_l^m, como segue

$$Y_l^m(\theta,\phi) = \epsilon\sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}e^{im\phi}P_l^m(\theta). \tag{2.15}$$

mudando-se a variável como segue

$$u(r) = rR(r),$$

logo, a equação (2.6) se transforma

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dr^2} + \left[V + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right]u = Eu. \tag{2.16}$$

A equação (2.16) é denominada de equação radial.

3 OSCILADOR HARMÔNICO QUÂNTICO

O potencial do oscilador harmônico unidimensional é dado por

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2, \tag{3.1}$$

segue que a equação de Schrodinger independente do tempo para o oscilador harmônico é dada por

$$H\psi = E\psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi = H\psi. \tag{3.2}$$

Definindo-se o operador momento, p, como sendo

$$p = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx},$$

pode-se reescrever a equação (3.2) como segue

$$\frac{1}{2m}\left[p^2 + (m\omega x)^2\right]\psi = E\psi.$$

Definindo-se dois operadores a_- e a_+, como segue

$$a_\pm = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(\mp ip + m\omega x\right). \tag{3.3}$$

Tem-se

$$\begin{aligned}
a_-a_+ &= \frac{1}{2\hbar m\omega}\left(ip + m\omega x\right)\left(-ip + m\omega x\right)\\
a_-a_+ &= \frac{1}{2\hbar m\omega}\left(p^2 + ipm\omega x - im\omega xp + m^2\omega^2x^2\right)\\
a_-a_+ &= \frac{1}{2\hbar m\omega}\left[p^2 - im\omega(xp - px) + m^2\omega^2x^2\right].
\end{aligned}$$

Por outro lado, tem-se que $[x,p] = xp - px$,

$$a_-a_+ \;=\; \frac{1}{2\hbar m\omega}\left[p^2 - im\omega[x,p] + m^2\omega^2x^2\right]. \tag{3.4}$$

Seja $f(x)$ uma função qualquer, tem-se

$$\begin{aligned}
[x,p]\,f(x) &= (xp - px)f(x)\\
[x,p]\,f(x) &= xpf(x) - pxf(x)\\
[x,p]\,f(x) &= x\frac{h}{i}\frac{d}{dx}f(x) - \frac{h}{i}\frac{d}{dx}(xf(x))\\
[x,p]\,f(x) &= -ixh\frac{d}{dx}f(x) + ixh\frac{d}{dx}f(x) + ihf(x)\\
[x,p]\,f(x) &= ihf(x).
\end{aligned}$$

Logo, para $f(x) = 1$

$$[x,p]\,f(x) = ih.$$

A equação (3.4) se torna

$$\begin{aligned}
a_-a_+ &= \frac{1}{2\hbar m\omega}\left[p^2 + (m\omega x)^2 + mh\omega\right]\\
a_-a_+ &= \frac{1}{2\hbar m\omega}\left[p^2 + (m\omega x)^2\right] + \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

comparando com a equação (3.2), tem-se

$$a_-a_+ = \frac{1}{\hbar\omega}H + \frac{1}{2} \tag{3.5}$$

$$H = \hbar\omega\left(a_-a_+ - \frac{1}{2}\right). \tag{3.6}$$

Segue

$$\hbar\omega\left(a_-a_+ - \frac{1}{2}\right)\psi = E\psi. \tag{3.7}$$

Analogamente, pode-se escrever

$$\begin{aligned}
a_+a_- &= \frac{1}{2\hbar m\omega}\left(-ip + m\omega x\right)\left(ip + m\omega x\right)\\
a_+a_- &= \frac{1}{2\hbar m\omega}\left(p^2 - ipm\omega x + im\omega xp + m^2\omega^2x^2\right)\\
a_+a_- &= \frac{1}{2\hbar m\omega}\left[p^2 + im\omega(xp - px) + m^2\omega^2x^2\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_+a_- &= \frac{1}{2\hbar m\omega}\left[p^2 + im\omega[x,p] + m^2\omega^2x^2\right] \\ a_+a_- &= \frac{1}{2\hbar m\omega}\left[p^2 + (m\omega x)^2\right] - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

O Hamiltoniano pode, então, ser escrito de forma análoga,

$$a_+a_- = \frac{1}{\hbar\omega}H - \frac{1}{2} \tag{3.8}$$

$$H = \hbar\omega\left(a_+a_- + \frac{1}{2}\right). \tag{3.9}$$

Igualando as equações (3.6) e (3.8), tem-se

$$a_-a_+ = a_+a_- + 1. \tag{3.10}$$

Aplicando-se a equação de Schrodinger para $(a_+\psi)$ e utilizando-se as equações (3.9) e (3.10), tem-se

$$\begin{aligned} H(a_+\psi) &= \hbar\omega\left(a_+a_- + \frac{1}{2}\right)(a_+\psi) \\ H(a_+\psi) &= \hbar\omega\left(a_+a_-a_+ + \frac{1}{2}a_+\right)\psi \\ H(a_+\psi) &= \hbar\omega a_+\left(a_-a_+ + \frac{1}{2}\right)\psi \\ H(a_+\psi) &= \hbar\omega a_+\left(a_+a_- + 1 + \frac{1}{2}\right)\psi \\ H(a_+\psi) &= a_+\left[\hbar\omega\left(a_+a_- + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega\right]\psi. \end{aligned}$$

Utilizando-se a equação (3.9) e $H\psi = E\psi$, tem-se

$$H(a_+\psi) = a_+\left(H + \hbar\omega\right)\psi$$

$$H(a_+\psi) = a_+\left(E + \hbar\omega\right)\psi$$

$$H(a_+\psi) = \left(E + \hbar\omega\right)(a_+\psi). \tag{3.11}$$

A equação (3.11) mostra que se ψ satisfaz a equação de Schrodinger com energia E, $H\psi = E\psi$, segue que $a_+\psi$ satisfaz a equação de Schrodinger para uma energia $E+\hbar\omega$. Analogamente para $a_-\psi$, pode-se mostrar que se ψ satisfaz a equação de Schrodinger com energia E, $H\psi = E\psi$, $a_-\psi$ satisfaz a equação de Schrodinger para uma energia $E - \hbar\omega$, segue

$$
\begin{aligned}
H(a_-\psi) &= \hbar\omega\left(a_-a_+ - \frac{1}{2}\right)(a_-\psi) \\
H(a_-\psi) &= \hbar\omega\left(a_-a_+a_- - \frac{1}{2}a_-\right)\psi \\
H(a_-\psi) &= \hbar\omega a_-\left(a_+a_- - \frac{1}{2}\right)\psi \\
H(a_-\psi) &= \hbar\omega a_-\left(a_-a_+ - 1 - \frac{1}{2}\right)\psi \\
H(a_-\psi) &= a_-\left[\hbar\omega\left(a_-a_+ - \frac{1}{2}\right) - \hbar\omega\right]\psi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
H(a_-\psi) = a_-\left(H - \hbar\omega\right)\psi \\
H(a_-\psi) = a_-\left(E - \hbar\omega\right)\psi
\end{gathered}
$$

$$
H(a_-\psi) = \left(E - \hbar\omega\right)(a_-\psi). \tag{3.12}
$$

Aplicando-se o operador abaixamento no estado fundamental, ψ_0, tem-se que $(a_-\psi_0)$ também é solução da equação de Schrodiger e

$$
a_-\psi_0 = 0.
$$

Segue pela definição de a_- dada pela equação (3.3),

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(\hbar\frac{d}{dx} + m\omega x\right)\psi_0 &= 0 \\
\frac{d\psi_0}{dx} &= -\frac{m\omega}{\hbar}x\psi_0 \\
\psi_0(x) &= Ae^{\left(\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)}.
\end{aligned}
$$

Normalizando ψ_0, tem-se

$$
\begin{aligned}
\int |\psi_0(x)|^2 dx = 1 \\
\int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{\left(\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)} dx = 1 \\
A^2\sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} = 1 \\
A = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}.
\end{aligned}
$$

Segue para o estado fundamental

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}. \tag{3.13}$$

Aplicando-se o operador a_+ em ψ_0 obtém-se ψ_1 cuja energia é dada por $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$, aplicando-se a_+ em ψ_1 encontra-se ψ_2 cuja energia é dada por $E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega$, segue que aplicando-se a_+ duas vezes em ψ_0 encontra-se ψ_2, analogamente, ao aplicar o aperador a_+ n vezes em ψ_0 encontra-se ψ_n, segue

$$\psi_n(x) = A_n(a_+)^n\psi_0(x), \tag{3.14}$$

com energia dada por $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ e A_n uma constante determinada a partir da normalização da função de onda. Seja ψ_n uma função de onda do oscilador harmônico, aplicando-se o operador levantamento em ψ_n, tem-se

$$a_+\psi_n = b_n\psi_{n+1}, \tag{3.15}$$

com b_n uma constante determinada pela normalização. Analogamente, aplicando-se o operador abaixamento, tem-se

$$a_-\psi_n = c_n\psi_{n-1}. \tag{3.16}$$

Utilizando a equação (3.7) e energia, E_n, como sendo $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$, tem-se

$$\left(a\pm a_\mp \pm \frac{1}{2}\right)\psi_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\psi_n.$$

Segue que

$$a_+a_-\psi_n = n\psi_n \tag{3.17}$$

$$a_-a_+\psi_n = (n+1)\psi_n. \tag{3.18}$$

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções que quando x tende a infinito, as funções vão a zero e quando x tende a menos infinito as funções vão a zero, tem-se a partir da equação (3.3)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(a_\pm g)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^*\left(\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(\mp ip + m\omega x)\right)gdx \\
\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(a_\pm g)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^*\left(\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(\mp\hbar\frac{d}{dx} + m\omega x\right)\right)gdx \\
\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(a_\pm g)dx &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mp\hbar f^*\frac{dg}{dx}dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f^* m\omega x g dx\right].
\end{aligned}$$

Por outro lado, tem-se que integrando por partes e usando-se as condições de contorno para

$f(x)$ e $g(x)$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \hbar f^* \frac{dg}{dx} dx &= \hbar (f(x))^* g(x) \,\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \hbar g \left(\frac{df}{dx}\right)^* dx \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \hbar f^* \frac{dg}{dx} dx &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \hbar g \left(\frac{df}{dx}\right)^* dx.\end{aligned}$$

Segue

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(a_\pm g) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \left[\pm \int_{-\infty}^{+\infty} \hbar g \left(\frac{df}{dx}\right)^* dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f^* m\omega x g dx \right] \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(a_\pm g) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\pm \hbar \left(\frac{df}{dx}\right)^* + f^* m\omega x \right) g dx \right] \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(a_\pm g) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} (a_\mp f)^* g dx.\end{aligned}$$

Fazendo $f(x) = g(x) = a \pm \psi_n(x)$, tem-se

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} (a_\pm \psi_n)^* (a_\pm \psi_n) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} (a_\mp a_\pm \psi_n)^* \psi_n dx \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (a_\pm \psi_n)^* (a_\pm \psi_n) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} (a_\mp a_\pm \psi_n)^* \psi_n dx.\end{aligned}$$

Utilizando-se as equações (3.15), (3.18) e os resultados da integral acima, tem-se

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} (a_+ \psi_n)^* (a_+ \psi_n) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} |b_n|^2 |\psi_{n+1}|^2 dx \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (a_- a_+ \psi_n)^* \psi_n dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} |b_n|^2 |\psi_{n+1}|^2 dx \\ (n+1) \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n|^2 dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} |b_n|^2 |\psi_n|^2 dx.\end{aligned}$$

Analogamente, encontra-se

$$n \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 |\psi_n|^2 dx.$$

Logo, pode-se escrever

$$|b_n|^2 = n+1 \tag{3.19}$$

$$|c_n|^2 = n. \tag{3.20}$$

Os operadores de destruição e criação são dados por

$$a_+ \psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1} \tag{3.21}$$

$$a_- \psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1} \tag{3.22}$$

Aplicando-se de forma recorrente o operador a_+ em ψ_0 tem-se que $\psi_1 = a_+\psi_0$, $\psi_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(a_+)^2\psi_0$, $\psi_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3!}}(a_+)^3\psi_0$, $\psi_4 = \dfrac{1}{\sqrt{4!}}(a_+)^4\psi_0$ e segue para ψ_n

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a_+)^n\psi_0. \tag{3.23}$$

Considerando-se o oscilador harmônico em duas dimensões, tem-se que o hamiltoniano é dada como segue

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2 + y^2\right), \tag{3.24}$$

a equação acima pode ser escrita como a soma de dois Hamiltonianos, um dependente de x, H_x, e o outro dependendo de y, H_y,

$$H = H_x + H_y,$$

onde

$$\begin{aligned} H_x &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \\ H_y &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{1}{2}m\omega^2y^2. \end{aligned}$$

A energia é dada por $E = E_x + E_y$, ond

$$E_x = \left(n_x + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

e

$$E_y = \left(n_y + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega.$$

A energia total é, então

$$E_{xy} = \left(n_x + n_y + 1\right)\hbar\omega. \tag{3.25}$$

4 ÁTOMO DE HIDROGÊNIO

O átomo de hidrogênio consiste em um próton e um elétron que interagem por meio de um potencial dado pela equação (4.1),

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}. \tag{4.1}$$

A equação de Schrodinger após a separação de variáveis para o átomo de hidrogênio é dada como segue

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2u}{dr^2} + \left[-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right]u = Eu. \tag{4.2}$$

Seja k e ρ_0 constantes reais, tais que

$$k = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \tag{4.3}$$

$$\rho_0 = \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0\hbar^2 k}. \tag{4.4}$$

Fazendo a mudança de variável

$$\rho = kr,$$

a equação de Schrodinger se transforma da seguinte forma

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} = \left[1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]u. \tag{4.5}$$

Fazendo-se o limite $\rho \to \infty$, tem-se que a equação (4.5) pode ser aproximada como

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} = u.$$

Segue que a solução para essa condição é dada pela seguinte combinação linear

$$u(\rho) = Ae^{-\rho} + Be^{\rho},$$

com A e B constantes reais, uma vez que $e^{\rho} \to \infty$ quando $\rho \to \infty$, segue que B é zero devido a normalização da função de onda. A solução se torna

$$u(\rho) = Ae^{-\rho}. \tag{4.6}$$

Analizando para $\rho \to 0$, tem-se que a equação (4.5) pode ser aproximada como segue

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} = \frac{l(l+1)}{\rho^2}u,$$

a solução é dada por

$$u(\rho) = C\rho^{l+1} + D\rho^{-l},$$

com C e D constantes reais, analogamente a contante B, tem-se que $D = 0$. Segue

$$u(\rho) = C\rho^{l+1}. \tag{4.7}$$

Utiliza-se, entÃ£o, uma solução que corresponde a multiplicação das duas soluções para as condições de ρ grande e ρ pequeno e uma função $v(\rho)$, de forma que quando ρ seja grande a solução tende a equação (4.6) e quando o mesmo for pequeno a solução tende para a equação (4.7). Segue como solução

$$u(\rho) = ae^{-\rho}\rho^{l+1}v(\rho), \tag{4.8}$$

com a uma constante real. Calculando-se a derivada segunda da equação (4.8) e substituindo na equação (4.5), tem-se

$$\rho\frac{d^2v}{d\rho^2} + 2(l+1-\rho)\frac{dv}{d\rho} + \left[\rho_0 - 2(l+1)\right]v = 0. \tag{4.9}$$

Escrevendo $v(\rho)$ como sendo uma série de potência, tem-se

$$v(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j\rho^j, \tag{4.10}$$

com c_j constantes reais, segue

$$\frac{dv}{d\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} jc_j\rho^{j-1}$$

$$\frac{dv}{d\rho} = \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)c_{j+1}\rho^j. \tag{4.11}$$

Calculando-se a derivada segunda,

$$\frac{d^2v}{d\rho^2} = \sum_{j=0}^{\infty} j(j+1)c_{j+1}\rho^{j-1}. \tag{4.12}$$

Substituindo as equações (4.11) e (4.12) na equação (4.9), tem-se

$$\sum_{j=0}^{\infty} j(j+1)c_{j+1}\rho^j + 2(l+1)\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)c_{j+1}\rho^j - 2\sum_{j=0}^{\infty} jc_j\rho^j + [\rho_0 - 2(l+1)]\sum_{j=0}^{\infty} c_j\rho^j = 0$$
$$\sum_{j=0}^{\infty}\left[j(j+1)c_{j+1} + 2(l+1)(j+1)c_{j+1} - 2jc_j + [\rho_0 - 2(l+1)]c_j\right]\rho^j = 0,$$

devido a independaêcia linear das funções ρ^j, tem-se

$$j(j+1)c_{j+1} + 2(l+1)(j+1)c_{j+1} - 2jc_j + [\rho_0 - 2(l+1)]c_j = 0$$

$$c_{j+1} = \left[\frac{2(j+l+1)-\rho_0}{(j+1)(j+2l+2)}\right]c_j. \tag{4.13}$$

Alanlizando a série para j grandes, tem-se que

$$c_j = \frac{2^j}{j!}c_0,$$

a função $v(\rho)$ é dada por

$$\begin{aligned} v(\rho) &= c_0\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^j}{j!}\rho^j \\ v(\rho) &= c_0 e^{2\rho}. \end{aligned}$$

Logo, a solução radial é dada por

$$u(\rho) = c_0\rho^{l+1}e^{\rho},$$

analisando-se essa solução, encontra-se que $u(\rho) \to \infty$ quando $\rho \to \infty$, então essa solução não é normalizada, segue que deve haver um $c_{j_{max}}$ no qual $c_{(j_{max}+1)} = 0$ para que a solução possa ser normalizada. A condição de normalização e equacção (4.13), mostra que

$$2(j_{max} + l + 1) - \rho_0 = 0,$$

seja n um inteiro tal que

$$n = j_{max} + l + 1, \tag{4.14}$$

chamado de número quântico principal, tem-se

$$2n = \rho_0. \tag{4.15}$$

A energia pode ser dada a partir das equações (4.3), (4.4) e (4.15)

$$E_n = -\left[\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\right]\frac{1}{n^2}. \tag{4.16}$$

A equação (4.13) pode ser reescrita em termos do número quântico principal como segue

$$c_{j+1} = \left[\frac{2(j+l+1-n)}{(j+1)(j+2l+2)}\right]c_j. \tag{4.17}$$

O estado fundamental é representado por $n = 1$ e a energia do estado fundamental é dada por

$$E_1 = -\left[\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\right] = -13,6 \;\; eV. \tag{4.18}$$

No estado fundamental do átomo de hidrogênio $l = 0$ e $m = 0$. Segue,

$$\psi_{100}(r,\theta,\phi) = R_{10}(r)Y_0^0(\theta,\phi), \tag{4.19}$$

obtem-se da formula de recursividade (4.17) que $j = 0$ e a solução radial é dada por

$$R_{10} = \frac{c_0}{a}e^{-r/a}, \tag{4.20}$$

com a o raio de Bohr, definido como sendo

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar}{me^2}.$$

Normalizando a função de onda, encontra-se

$$c_o = \frac{\sqrt{2}}{a}.$$

Por outro lado, $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, então o estado fundamental é dado por

$$\psi_{100}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-r/a}. \tag{4.21}$$

A partir da fómula de recorrência dada pela equação (4.17), observa-se que $v(\rho)$ representa os polinômios associados de Laguerre,

$$v(\rho) = L_{n-l-1}^{2l+1}(2\rho), \tag{4.22}$$

onde o polinômio e seu associado são definidos como segue

$$L^p_{q-p}(x) = (-1)^p \left(\frac{d}{dx}\right)^q (e^{-x}x^q) \tag{4.23}$$

$$L_q(x) = e^x \left(\frac{d}{dx}\right)^q (e^{-x}x^q). \tag{4.24}$$

Após a normalização, a função de onda do átomo de hidrogênio se torna

$$\psi_{nlm} = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} e^{-r/na} \left(\frac{2r}{na}\right)^l \left[L^{2l+1}_{n-l-1}(2r/na)\right] Y^m_l(\theta,\phi). \tag{4.25}$$

5 O ÁTOMO DE HIDROGÊNIO E O OSCILADOR HARMÔNICO

A equação de Schrodinger para o átomo de hidrogênio (com $E < 0$) é dada como segue

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 - \frac{e^2}{r}\right)\psi = E\psi. \tag{5.1}$$

Sejam λ, α e a constantes reais tais que

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{8\mu}{\hbar^2}e^2, \\ \alpha^4 &= -\frac{8\mu}{\hbar^2}E \\ \lambda &= \frac{\hbar^2}{\mu e^2}. \end{aligned}$$

Pode-se escrever a partir das equações acima

$$\alpha^4 = \frac{-8E}{ae^2}.$$

A equação (5.1) pode ser reescrita em termos de λ, α e a

$$\begin{gathered} \left(4\nabla^2 + \frac{8\mu e^2}{\hbar^2 r} + \frac{8\mu E}{\hbar^2}\right)\psi = 0 \\ \left(4\nabla^2 + \frac{\lambda}{r} - \alpha^4\right)\psi = 0. \end{gathered} \tag{5.2}$$

Sejam ξ_A e ξ_B variáveis complexas que satisfazem as seguintes relações

$$x + iy = 2\xi_A\overline{\xi_B} \tag{5.3}$$

$$z = \xi_A\overline{\xi_A} - \xi_B\overline{\xi_B}. \tag{5.4}$$

As coordenadas x, y e z dependem, então, das coordenadas ξ_A,$\overline{\xi_B}$ e do módulo de ξ_B. Tem-se que em coordenadas esféricas $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, segue

$$r^2 = (x + iy)(x - iy) + z^2.$$

Por outro lado, $x - iy = \overline{x + iy} = 2\overline{\xi_A}\xi_B$, segue

$$\begin{aligned}
r^2 &= 4{\xi_A}^2\overline{\xi_B}^2 + (\xi_A\overline{\xi_A} - \xi_B\overline{\xi_B})^2 \\
r^2 &= 4{\xi_A}^2\overline{\xi_B}^2 + (\xi_A\overline{\xi_A})^2 - 2\xi_A\overline{\xi_A}\xi_B\overline{\xi_B} + (\xi_B\overline{\xi_B})^2 \\
r^2 &= 4{\xi_A}^2\overline{\xi_B}^2 + (\xi_A\overline{\xi_A})^2 - 2\xi_A^2\overline{\xi_B}^2 + (\xi_B\overline{\xi_B})^2 \\
r^2 &= (\xi_A\overline{\xi_A})^2 + 2{\xi_A}^2\overline{\xi_B}^2 + (\xi_B\overline{\xi_B})^2 \\
r^2 &= (\xi_A^2)^2 + 2{\xi_A}^2\overline{\xi_B}^2 + (\overline{\xi_B}^2)^2 \\
r^2 &= (\xi_A^2 + \overline{\xi_B}^2)^2 \\
r^2 &= (\xi_A\overline{\xi_A} + \xi_B\overline{\xi_B})^2.
\end{aligned}$$

Pode-se escrever para r a seguinte equação

$$r = (\xi_A\overline{\xi_A} + \xi_B\overline{\xi_B}). \tag{5.5}$$

A equação de Schrodinger pode ser expressa em termos das coordenadas ξ_A, $\overline{\xi_A}$, ξ_B e $\overline{\xi_B}$, para isso precisa-se conhecer como o operador Laplaciano se transforma. Tem-se que

$$r\nabla^2\psi(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial\xi_A}\frac{\partial}{\partial\overline{\xi_A}} + \frac{\partial}{\partial\xi_B}\frac{\partial}{\partial\overline{\xi_B}}\right)\psi, \tag{5.6}$$

para mostra isso, tem-se

$$\begin{aligned}
x + iy &= 2\xi_A\overline{\xi_B} \\
x - iy &= 2\overline{\xi_A}\xi_B,
\end{aligned}$$

manipulando-se as equações acima, tem-se

$$\begin{aligned}
x &= \xi_A\overline{\xi_B} + \overline{\xi_A}\xi_B \\
y &= -i(\xi_A\overline{\xi_B} - \overline{\xi_A}\xi_B) \\
z &= \xi_A\overline{\xi_A} - \xi_B\overline{\xi_B}.
\end{aligned}$$

Segue tirando as derivadas parciais,

$$\begin{array}{llll} \dfrac{\partial x}{\xi_A} = \overline{\xi_B}; & \dfrac{\partial x}{\overline{\xi_A}} = \xi_B; & \dfrac{\partial x}{\xi_B} = \overline{\xi_A}; & \dfrac{\partial x}{\overline{\xi_B}} = \xi_A; \\ \dfrac{\partial y}{\xi_A} = -i\overline{\xi_B}; & \dfrac{\partial y}{\overline{\xi_A}} = i\xi_B; & \dfrac{\partial y}{\xi_B} = i\overline{\xi_A}; & \dfrac{\partial y}{\overline{\xi_B}} = -i\xi_A; \\ \dfrac{\partial z}{\xi_A} = \overline{\xi_A}; & \dfrac{\partial z}{\overline{\xi_A}} = \xi_A; & \dfrac{\partial z}{\xi_B} = -\overline{\xi_B}; & \dfrac{\partial z}{\overline{\xi_B}} = -\xi_B. \end{array}$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial}{\partial \xi_A} = \frac{\partial x}{\partial \xi_A}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi_A}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial \xi_A}\frac{\partial}{\partial z}$$

Substituindo as derivadas parciais, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial \xi_A} = \overline{\xi_B}\frac{\partial}{\partial x} - i\overline{\xi_B}\frac{\partial}{\partial y} + \overline{\xi_A}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Analogamente, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \overline{\xi_A}} &= \frac{\partial x}{\partial \overline{\xi_A}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \overline{\xi_A}}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial \overline{\xi_A}}\frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial \overline{\xi_A}} &= \xi_B\frac{\partial}{\partial x} + i\xi_B\frac{\partial}{\partial y} + \xi_A\frac{\partial}{\partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial \xi_B} &= \frac{\partial x}{\partial \xi_B}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi_B}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial \xi_B}\frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial \xi_B} &= \overline{\xi_A}\frac{\partial}{\partial x} + i\overline{\xi_A}\frac{\partial}{\partial y} - \overline{\xi_B}\frac{\partial}{\partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial \overline{\xi_B}} &= \frac{\partial x}{\partial \overline{\xi_B}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \overline{\xi_B}}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial \overline{\xi_B}}\frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial \overline{\xi_B}} &= \xi_A\frac{\partial}{\partial x} - i\xi_A\frac{\partial}{\partial y} - \xi_B\frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Logo, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial \xi_A}\frac{\partial}{\partial \overline{\xi_A}} = \left[\overline{\xi_B}\frac{\partial}{\partial x} - i\overline{\xi_B}\frac{\partial}{\partial y} + \overline{\xi_A}\frac{\partial}{\partial z}\right]\left[\xi_B\frac{\partial}{\partial x} - i\xi_B\frac{\partial}{\partial y} + \xi_A\frac{\partial}{\partial z}\right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_A}\frac{\partial}{\partial \overline{\xi_A}} = \xi_B\overline{\xi_B}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \xi_B\overline{\xi_B}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \xi_A\overline{\xi_A}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \overline{\xi_B}\xi_A\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} \\ -i\overline{\xi_B}\xi_A\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} + \overline{\xi_A}\xi_B\frac{\partial^2}{\partial z\partial x} + i\overline{\xi_A}\xi_B\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}. \end{aligned}$$

Analogamente, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial \xi_B}\frac{\partial}{\partial \overline{\xi_B}} = \left[\overline{\xi_A}\frac{\partial}{\partial x} - i\overline{\xi_A}\frac{\partial}{\partial y} + \overline{\xi_B}\frac{\partial}{\partial z}\right]\left[\xi_A\frac{\partial}{\partial x} - i\xi_A\frac{\partial}{\partial y} + \xi_B\frac{\partial}{\partial z}\right]$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi_B}\frac{\partial}{\partial \overline{\xi_B}} = {} & \overline{\xi_A}\xi_A\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \overline{\xi_A}\xi_A\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \overline{\xi_B}\xi_B\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \overline{\xi_A}\xi_B\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} \\ & -i\overline{\xi_A}\xi_B\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} - \overline{\xi_B}\xi_A\frac{\partial^2}{\partial z\partial x} + i\xi_A\overline{\xi_B}\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}.\end{aligned}$$

O lado da equação 5.7 é encontrada somando-se $\left(\frac{\partial}{\partial \xi_B}\frac{\partial}{\partial \overline{\xi_B}}\right)$ e $\left(\frac{\partial}{\partial \xi_A}\frac{\partial}{\partial \overline{\xi_A}}\right)$, segue

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_B}\frac{\partial}{\partial \overline{\xi_B}} + \frac{\partial}{\partial \xi_A}\frac{\partial}{\partial \overline{\xi_A}}\right) = {} & \xi_B\overline{\xi_B}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \xi_B\overline{\xi_B}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \xi_A\overline{\xi_A}\frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ & +\overline{\xi_A}\xi_A\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \overline{\xi_A}\xi_A\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \overline{\xi_B}\xi_B\frac{\partial^2}{\partial z^2}\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_B}\frac{\partial}{\partial \overline{\xi_B}} + \frac{\partial}{\partial \xi_A}\frac{\partial}{\partial \overline{\xi_A}}\right) = \left(\xi_A\overline{\xi_A} + \xi_B\overline{\xi_B}\right)\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right].$$

Utilizando-se a equação (5.5), tem-se

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_B}\frac{\partial}{\partial \overline{\xi_B}} + \frac{\partial}{\partial \xi_A}\frac{\partial}{\partial \overline{\xi_A}}\right) = r\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right).$$

Segue,

$$r\nabla^2\psi(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_A}\frac{\partial}{\partial \overline{\xi_A}} + \frac{\partial}{\partial \xi_B}\frac{\partial}{\partial \overline{\xi_B}}\right)\psi,$$

A equação (5.2) pode ser reescrita utilizando-se a equação (5.7), como segue

$$\left[4\left(\frac{\partial}{\partial \xi_A}\frac{\partial}{\partial \overline{\xi_A}} + \frac{\partial}{\partial \xi_B}\frac{\partial}{\partial \overline{\xi_B}}\right) + \lambda - \alpha^4\left(\xi_A\overline{\xi_A} + \xi_B\overline{\xi_B}\right)\right]\psi = 0. \tag{5.7}$$

Seja σ uma variável definida como sendo o argumento $\sigma = arg(\xi_A + \xi_B)$. As equaçõs (5.3) e (5.4) sã o satisfeitas com a seguinte escolha para ξ_A, $\overline{\xi_A}$, ξ_B e $\overline{\xi_B}$ em coordenadas polares

$$\xi_A = r^{1/2}cos(\theta/2)e^{i(\sigma+\phi)/2} \tag{5.8}$$

$$\overline{\xi_A} = r^{1/2}cos(\theta/2)e^{-i(\sigma+\phi)/2} \tag{5.9}$$

$$\xi_B = r^{1/2}cos(\theta/2)e^{i(\sigma-\phi)/2} \tag{5.10}$$

$$\overline{\xi_B} = r^{1/2}cos(\theta/2)e^{-i(\sigma+\phi)/2}. \tag{5.11}$$

Utilizando-se as equações (5.3), (5.8) e (5.11), tem-se

$$\begin{aligned} x+iy &= \xi_A\overline{\xi_B} \\ x+iy &= 2rcos(\theta/2)sen(\theta/2)e^{i(\sigma+\phi)/2}e^{-i(\sigma-\phi)/2} \end{aligned}$$

$$x+iy = rsen(\theta)e^{i\phi}. \tag{5.12}$$

Utilizando-se as equações (5.4), (5.8), (5.9),(5.10) e (5.11), tem-se

$$\begin{aligned} z &= \xi_A\overline{\xi_A} - \xi_B\overline{\xi_B} \\ z &= r^{1/2}cos(\theta/2)e^{i(\sigma+\phi)/2}r^{1/2}cos(\theta/2)e^{-i(\sigma+\phi)/2} - r^{1/2}cos(\theta/2)e^{i(\sigma-\phi)/2}r^{1/2}cos(\theta/2)e^{-i(\sigma+\phi)/2} \\ z &= rcos^2(\theta/2) - rsen^2(\theta/2). \end{aligned}$$

A identidade trigonométrica fornece que $cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sen(a)sen(b)$, logo tem-se para z,

$$z = rcos(\theta). \tag{5.13}$$

Aplicando-se o complexo conjugado na equação (5.12),

$$x - iy = rsen(\theta)e^{-i\phi}. \tag{5.14}$$

Pode-se somar as equações (5.12) e (5.13) para encontrar o valor de x, como segue

$$\begin{aligned} 2x &= rsen\theta\left(e^{i\phi} + e^{-i\phi}\right) \\ x &= rsen\theta\left(\frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$x = rsen\theta cos\phi. \tag{5.15}$$

Pode-se subtrair a equação (5.13) da equação (5.12), para encontrar y

$$2iy = rsen\theta\left(e^{i\phi} - e^{-i\phi}\right)$$
$$y = rsen\theta\left(\frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}\right)$$

$$y = rsen\theta cos\phi. \tag{5.16}$$

O conjunto de equações (5.13), (5.15) e (5.16) representa as coordenadas polares esféricas. Escrevendo $\psi = \psi(x, y, z)$, derivando-se parcialmente as equações (5.12) e (5.13) em relação a σ, encontra-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \sigma} + i\frac{\partial y}{\partial \sigma} &= 0 \\ \frac{\partial z}{\partial \sigma} &= 0. \end{aligned}$$

Então, a derivada $\frac{\partial \psi}{\partial \sigma}$ pode ser escrita

$$\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \sigma} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \sigma} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \sigma} \tag{5.17}$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = 0. \tag{5.18}$$

Escrevendo $\psi = \psi(\xi_a, \overline{\xi_A}, \xi_B, \overline{\xi_B})$, pode-se calcular a derivada em releção a σ como segue

$$\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_A}\frac{\partial \xi_A}{\partial \sigma} + \frac{\partial \psi}{\partial \overline{\xi_A}}\frac{\partial \overline{\xi_A}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi_B}\frac{\partial \xi_B}{\partial \sigma} + \frac{\partial \psi}{\partial \overline{\xi_B}}\frac{\partial \overline{\xi_B}}{\partial \sigma}. \tag{5.19}$$

Utilizando-se as equações (5.8), (5.9), (5.10) e (5.11), pode-se calcular as seguintes derivadas parciais

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_A}{\partial \sigma} &= i\frac{r^{1/2}}{2}cos(\theta/2)e^{i(\sigma+\phi)/2} \\ \frac{\partial \xi_A}{\partial \sigma} &= \frac{i}{2}\xi_A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{\xi_A}}{\partial\sigma} &= -i\frac{r^{1/2}}{2}cos(\theta/2)e^{i(\sigma-\phi)/2} \\
\frac{\partial\overline{\xi_A}}{\partial\sigma} &= -\frac{i}{2}\overline{\xi_A}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\xi_B}{\partial\sigma} &= i\frac{r^{1/2}}{2}sen(\theta/2)e^{i(\sigma+\phi)/2} \\
\frac{\partial\xi_B}{\partial\sigma} &= \frac{i}{2}\xi_B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{\xi_B}}{\partial\sigma} &= -i\frac{r^{1/2}}{2}sen(\theta/2)e^{i(\sigma-\phi)/2} \\
\frac{\partial\overline{\xi_B}}{\partial\sigma} &= -\frac{i}{2}\overline{\xi_B}.
\end{aligned}$$

A equação (5.19) pode ser reescrita utilizando-se as equações acima, segue

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial\sigma} &= \frac{i}{2}\xi_A\frac{\partial\psi}{\partial\xi_A} - \frac{i}{2}\overline{\xi_A}\frac{\partial\psi}{\partial\overline{\xi_A}} + \frac{i}{2}\xi_B\frac{\partial\psi}{\partial\xi_B} - \frac{i}{2}\overline{\xi_B}.\frac{\partial\psi}{\partial\overline{\xi_B}} \\
\frac{\partial\psi}{\partial\sigma} &= \frac{i}{2}\left(\xi_A\frac{\partial\psi}{\partial\xi_A} - \overline{\xi_A}\frac{\partial\psi}{\partial\overline{\xi_A}} + \xi_B\frac{\partial\psi}{\partial\xi_B} - \overline{\xi_B}\frac{\partial\psi}{\partial\overline{\xi_B}}\right).
\end{aligned}$$

ψ é independente de σ, como já foi mostrado antes, logo encontra-se a seguinte condição

$$\xi_A\frac{\partial\psi}{\partial\xi_A} - \overline{\xi_A}\frac{\partial\psi}{\partial\overline{\xi_A}} + \xi_B\frac{\partial\psi}{\partial\xi_B} - \overline{\xi_B}\frac{\partial\psi}{\partial\overline{\xi_B}} = 0$$

$$\left(\xi_A\frac{\partial\psi}{\partial\xi_A} - \overline{\xi_A}\frac{\partial\psi}{\partial\overline{\xi_A}}\right) = -\left(\xi_B\frac{\partial\psi}{\partial\xi_B} - \overline{\xi_B}\frac{\partial\psi}{\partial\overline{\xi_B}}\right) \tag{5.20}$$

Fazendo-se a seguinte mudança de variável,

$$\xi_A = q_1 + iq_2 \tag{5.21}$$

$$\overline{\xi_A} = q_1 - iq_2 \tag{5.22}$$

$$\xi_B = q_3 + iq_4 \tag{5.23}$$

$$\overline{\xi_B} = q_3 - iq_4. \tag{5.24}$$

Multiplicando por i as equações acima, para encontrar q_k em função de ξ_j e $\overline{\xi_j}$, com $k = 1$, 2, 3 ou 4 e $j =$ A ou B,

$$\begin{aligned}
i\xi_A &= iq_1 - q_2 && (5.25)\\
i\overline{\xi_A} &= iq_1 + q_2 && (5.26)\\
i\xi_B &= iq_3 - q_4 && (5.27)\\
i\overline{\xi_B} &= iq_3 + q_4. && (5.28)
\end{aligned}$$

Manipulando as equações acima, encontra-se q_1, q_2, q_3 e q_4,

$$\begin{aligned}
q_1 &= \frac{1}{2}\left(\overline{\xi_A} + \xi_A\right) && (5.29)\\
q_2 &= \frac{1}{2}\left(i\overline{\xi_A} - i\xi_A\right) && (5.30)\\
q_3 &= \frac{1}{2}\left(\overline{\xi_B} + \xi_B\right) && (5.31)\\
q_4 &= \frac{1}{2}\left(i\overline{\xi_B} - i\xi_B\right). && (5.32)
\end{aligned}$$

Pode-se calcular as seguintes derivadas parciais

$$\begin{array}{cc}
\dfrac{\partial q_1}{\partial \xi_A} = \dfrac{1}{2} & \dfrac{\partial q_1}{\partial \overline{\xi_A}} = \dfrac{1}{2}\\
\dfrac{\partial q_2}{\partial \xi_A} = -\dfrac{i}{2} & \dfrac{\partial q_2}{\partial \overline{\xi_A}} = \dfrac{i}{2}\\
\dfrac{\partial q_3}{\partial \xi_A} = \dfrac{1}{2} & \dfrac{\partial q_3}{\partial \overline{\xi_A}} = \dfrac{1}{2}\\
\dfrac{\partial q_4}{\partial \xi_A} = -\dfrac{i}{2} & \dfrac{\partial q_4}{\partial \overline{\xi_A}} = \dfrac{i}{2}.
\end{array}$$

Por outro lado, tem-se que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \xi_A} &= \frac{\partial q_1}{\partial \xi_A}\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\partial q_2}{\partial \xi_A}\frac{\partial}{\partial q_2}\\
\frac{\partial}{\partial \overline{\xi_A}} &= \frac{\partial q_2}{\partial \overline{\xi_A}}\frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\partial q_2}{\partial \overline{\xi_A}}\frac{\partial}{\partial q_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \xi_B} &= \frac{\partial q_3}{\partial \xi_B}\frac{\partial}{\partial q_3} + \frac{\partial q_3}{\partial \xi_B}\frac{\partial}{\partial q_3} \\
\frac{\partial}{\partial \overline{\xi_B}} &= \frac{\partial q_4}{\partial \overline{\xi_B}}\frac{\partial}{\partial q_4} + \frac{\partial q_4}{\partial \overline{\xi_B}}\frac{\partial}{\partial q_4}.
\end{aligned}$$

Utilizando-se as derivadas parciais encontradas anteriormente, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial \xi_A} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1} - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_2} \tag{5.33}$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{\xi_A}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_2} \tag{5.34}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_B} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_3} - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_4} \tag{5.35}$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{\xi_B}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_3} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_4}. \tag{5.36}$$

A equação (5.7) pode ser reescrita em termos de q_1, q_3 , q_3 e q_4, calculando-se as derivadas parciais em relação a ξ_A, $\overline{\xi_A}$, ξ_B e $\overline{\xi_B}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\xi_A}\frac{\partial}{\overline{\xi_A}} &= \frac{\partial}{\partial \xi_A}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_2}\right] \\
\frac{\partial}{\xi_A}\frac{\partial}{\overline{\xi_A}} &= \left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1} - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_2}\right]\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_2}\right] \\
\frac{\partial}{\xi_A}\frac{\partial}{\overline{\xi_A}} &= \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial q_1} + i\frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial q_2} - i\frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial_2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2 \partial q_2}\right].
\end{aligned}$$

Sabendo-se que as derivadas parciais mistas são iguais, ou seja $\left(\frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial q_2}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial q_2 \partial q_1}\right)$, segue

$$\frac{\partial}{\xi_A}\frac{\partial}{\overline{\xi_A}} = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2}\right]. \tag{5.37}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\xi_B}\frac{\partial}{\overline{\xi_B}} &= \frac{\partial}{\partial \xi_B}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_3} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_4}\right] \\
\frac{\partial}{\xi_B}\frac{\partial}{\overline{\xi_B}} &= \left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_3} - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_4}\right]\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_3} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_4}\right] \\
\frac{\partial}{\xi_B}\frac{\partial}{\overline{\xi_B}} &= \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2}{\partial q_3 \partial q_3} + i\frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial q_4} - i\frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial_4} + \frac{\partial^2}{\partial q_4 \partial q_4}\right].
\end{aligned}$$

Devido a igualdade das derivadas parciais mistas, ou seja $\left(\frac{\partial^2}{\partial q_3 \partial q_4}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial q_4 \partial q_3}\right)$, tem-se

$$\frac{\partial}{\xi_B}\frac{\partial}{\overline{\xi_B}} = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2}{\partial q_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_4^2}\right]. \tag{5.38}$$

Utilizando-se os resultados das equações (5.37) e (5.38), pode-se reescrever a equação (5.7) como segue

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_4^2}\right) + \lambda - \alpha^4\left((q_1 + iq_2)(q_1 - iq_2) + (q_3 + iq_4)(q_3 - iq_4)\right)\right]\psi = 0 \tag{5.39}$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_4^2}\right) + \lambda - \alpha^4\left(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + iq_4^2\right)\right]\psi = 0 \tag{5.40}$$

A equação (5.40) representa a equação de um oscilador harmônico, cuja frequência é dada por ω e energia ϵ,

$$\begin{aligned}
\alpha^2 &= \left(\frac{-8\epsilon}{e^2 a}\right)^{1/2} \\
\alpha^2 &= \frac{2\mu\epsilon}{\hbar^2}; \\
\lambda &= \frac{8}{a} \\
\lambda &= \frac{2\mu\epsilon}{\hbar^2}.
\end{aligned}$$

A equação (5.20) pode ser posta em termos de q_1,q_2,q_3 e q_4, substituindo ξ_A, ξ_B, $\overline{\xi_A}$ e $\overline{\xi_B}$ e o valor das derivadas parciais encontrados anteriormente,

$$\left(\xi_A\frac{\partial\psi}{\partial\xi_A} - \overline{\xi_A}\frac{\partial\psi}{\partial\overline{\xi_A}}\right) = -\left(\xi_B\frac{\partial\psi}{\partial\xi_B} - \overline{\xi_B}\frac{\partial\psi}{\partial\overline{\xi_B}}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\left[(q_1 - iq_2)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_2}\right) - (q_1 + iq_2)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1} - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_2}\right)\right]\psi = \\
&-\left[(q_3 - iq_4)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_3} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_4}\right) - (q_3 + iq_4)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_3} - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_4}\right)\right]\psi
\end{aligned}$$

$$\left[q_1\frac{\partial}{\partial q_2} - q_2\frac{\partial}{\partial q_1}\right]\psi = \left[q_3\frac{\partial}{\partial q_4} - q_4\frac{\partial}{\partial q_3}\right]\psi. \tag{5.41}$$

A equação (5.41) mostra que pode-se tratar o oscilador harmônico quadrimensional como se fossem dois osciladores bidimensionais independentes, pois do lado esquerdo da equação possui apenas variáveis que dependem de q_1 e q_2 e do lado direito apenas variaáveis que dependem de q_3 e q_4.

Fazendo uma separação de variáveis, $\psi(q_1, q_2, q_3, q_4) = \psi_A(q_1, q_2)\psi_B(q_3, q_4)$, tem-se

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial q_1^2} = \psi_B \frac{\partial^2\psi_A}{\partial q_1^2}$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial q_2^2} = \psi_B \frac{\partial^2\psi_A}{\partial q_2^2}$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial q_3^2} = \psi_A \frac{\partial^2\psi_B}{\partial q_3^2}$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial q_4^2} = \psi_A \frac{\partial^2\psi_B}{\partial q_4^2},$$

a equação (5.40) pode então ser reescrita como segue

$$\left(\psi_B \frac{\partial^2\psi_A}{\partial q_1^2} + \psi_B \frac{\partial^2\psi_A}{\partial q_2^2} + \psi_A \frac{\partial^2\psi_B}{\partial q_3^2} + \psi_A \frac{\partial^2\psi_B}{\partial q_4^2}\right) + \lambda\psi_A\psi_B - \alpha^4(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)\psi_A\psi_B = 0.$$

Manipulando a equação acima, tem-se

$$\frac{1}{\psi_A}\frac{\partial^2\psi_A}{\partial q_1^2} + \frac{1}{\psi_A}\frac{\partial^2\psi_A}{\partial q_2^2} + \lambda_A + \alpha^4(q_1^2 + q_2^2) = -\frac{1}{\psi_B}\frac{\partial^2\psi_B}{\partial q_3^2} - \frac{1}{\psi_A}\frac{\partial^2\psi_B}{\partial q_4^2} - \lambda_B + \alpha^4(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2),$$

com $\lambda = \lambda_A + \lambda_B$, pelo método da separação de variáveis, tem-se que a equação desacoplada para ψ_A é dada por

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} + \lambda_A + \alpha^4(q_1^2 + q_2^2)\right]\psi_A = c\psi_A, \tag{5.42}$$

onde c é uma constante real dada pela separacção de variáveis. Analogamente, para a equação desacoplada ψ_B,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial q_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_4^2} + \lambda_B + \alpha^4(q_3^2 + q_4^2)\right]\psi_B = -c\psi_B. \tag{5.43}$$

6 CONCLUSÃO

A semelhança entre o oscilador harmônico e o átomo de hidrogênio pode ser observada devido as equaçãos (5.42) e (5.43) representarem osciladores bidimensionais, segue, então, a semelhança entre dois temas aparentemente importante e distintos da física. Pode-se, então, estudar o átomo de hridrôgenio a partir do oscilador harmônico, por meio dos operadores de criação e destruição, podendo facilitar os cálculos.

REFERÊNCIAS

[1] Griffiths, David Jeferry. *Introduction to quantum mechanics*, Pearson Prentice Hall, 2nd ed. (2005);

[2] Cohen-Tannoudji, Claude. Diu, Bernard. Laloe, Frank. *Quantum mechanics*, Hermann and by John Wiley Sons. Inc., vol.1, 2nd ed., França(1991);

[3] Cornish, F H J. *The hydrogen atom and the four-dimensional harmonic oscillator,* J. Phys. A: Math. Gen., Great Britain, 17, 323. (1984);

[4] Kibler, Maurice. Négadi, Tidjani. *Connection between the hydrogen atom and the harmonic oscillator: The zero-energy case* Physical Review A, Volume 29, Número 5 (1984);

[5] *Evolução dos Modelos Atômicos. Modelo Atômico de Dalton.* Disponível em http://www.iq.ufrgs.br/ead/fisicoquimica/modelosatomicos/modelo_dalton.html, acessado em 16 de dezembro de 2013 às 10 horas e 04 minutos;

[6] *Evolução dos Modelos Atômicos. Modelo Atômico de Thomson.* Disponível em http://www.iq.ufrgs.br/ead/fisicoquimica/modelosatomicos/modelo_thomson.html, acessado em 16 de dezembro de 2013 às 10 horas e 30 minutos;

[7] *Evolução dos Modelos Atômicos. Modelo Atômico de Rutherford. Disponível em http://www.iq.ufrgs.br/ead/fisicoquimica/modelosatomicos/modelo_rutherford.html, acessado em 16 de dezembro de 2013 às 10 horas e 50 minutos;*

[8] Osvaldo, Pessoa Jr. História da teoria quântica;

[9] Grupo de Ensino de Física da Universidade Federal de Santa Maria. Modelo atômico de Bohr;

[10] Modelos atômicos. Disponível em http://nossomeioporinteiro.wordpress.com/category/quimica/geral/modelos-atomicos/ acessado em 16 de dezembro de 2013 às 10 horas e 35 minutos;

[11] Modelo atômico de Dalton. Disponível em http://es.wikipedia.org/wiki/Modelo_at%C3%B3mico_de_Dalton acessado em 16 de dezembro de 2013 às 11 horas e 00 minutos.