



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM FÍSICA

RONDINELLY OLIVEIRA

GRAVITAÇÃO, SOLUÇÃO
SCHWARZSCHILD E MODELO
BUMBLEBEE

FORTALEZA

2014

RONDINELLY OLIVEIRA

**GRAVITAÇÃO, SOLUÇÃO
SCHWARZSCHILD E MODELO
BUMBLEBEE**

Monografia de Bacharelado apresentada à
Coordenação da Graduação do Curso de
Física, da Universidade Federal do Ceará,
como requisito parcial para a obtenção do
Título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Al-
meida

FORTALEZA

2014

RONDINELLY OLIVEIRA

**GRAVITAÇÃO, SOLUÇÃO
SCHWARZSCHILD E MODELO
BUMBLEBEE**

Monografia de Bacharelado apresentada à
Coordenação da Graduação do Curso de
Física, da Universidade Federal do Ceará,
como requisito parcial para a obtenção do
Título de Bacharel em Física.

Aprovada em 2/12/2014

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Alberto de Almeida (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Euclides Gomes (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante
Universidade Federal do Ceará(UFC)

Prof. Dr. Victor Pereira do Nascimento Santos
Universidade Federal do Ceará(UFC)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Física

A000p Oliveira, Rondinely.
Gravitação, Solução Schwarzschild e Modelo Bumblebee / Rondinely Oliveira.
– Fortaleza, 2014.
50 f.:il.

Monografia (bacharelado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,
Departamento de Física, Fortaleza, 2014.

Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Almeida

1. Relatividade Geral, . 2. equação de Einstein,. 3. Metrica de Schwarzschild,. 4. Violação de Lorentz, . I. Título.

CDD:000.0

Aos Meus Pais

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, aos meus pais, Francisco de Sales Oliveira e Maria Lúcia de Oliveira, aos meus amigos e colegas. Ao meu orientador Prof. Dr. Carlos Alberto de Almeida e coorientadores José Euclides Gomes, Roberto Vinhaes Maluf, Victor Pereira do Nascimento Santos.

RESUMO

O presente trabalho tem como finalidade, introduzir o estudo sobre relatividade geral. Iniciamos nosso estudo com um pouco da história da gravitação, com os trabalhos de Isaac Newton, até culminar com os artigos de Einstein sobre relatividade restrita e relatividade geral. Com o estudo preliminar de relatividade geral, daremos enfoque especial na construção das equações de campo de Einstein. Para tal intuito, deduziremos o tensor de curvatura de Riemann-Christoffel e suas propriedades. Com isso, determinaremos umas das mais importantes soluções das equações de Einstein, a solução de Schwarzschild. E veremos que, a solução de Schwarzschild produz uma singularidade aparente, caracterizada pelo raio de Schwarzschild R_s e uma singularidade onde as equações de campo de Einstein deixam de valer. E na parte final desse trabalho, veremos um pouco sobre a quebra de simetria de Lorentz. Focaremos nossa atenção a uma possível consequência do modelo padrão estendido, que a quebra de simetria acarreta. Um dos modelos proposto que quebra espontaneamente a simetria de Lorentz, foi o modelo bumblebee ^a. Comentaremos as possíveis consequências, para a solução de Schwarzschild.

Palavras-chave: Relatividade Geral, equação de Einstein, Métrica de Schwarzschild, Violação de Lorentz,

^aUm dos mecanismos de quebra de simetria, proposto por Kostelecky em seus artigos

ABSTRACT

The present work aims to introduce the study of general relativity. Begin our study with a bit of history of gravitation, with the work of Issac Newton, culminating with articles about Einstein restricted relativity and general relativity. With preliminary study of general relativity, with special focus on the construction of the field equations of Einstein. For such purpose, deduce the curvature tensor of Riemann-Christoffel and its properties. Based on that, determine one of the most important solutions of the Einstein, the Schwarzschild solution. And we see that the Schwarzschild solution produces an apparent singularity, characterized by the radius of Schwarzschild R_s and a singularity where the field equations of Einstein fail to enforce. We focus our attention on a possible consequence of the default extended model, the symmetry breaking leads. One of the models proposed that spontaneously breaks the Lorentz symmetry model was the bumblebee. And in the final part of this work, we will say something about the Lorentz symmetry breaking. Will comment on the possible consequences that this entails for the Schwarzschild solution.

Keywords: General Relativity. Einstein's Equation. Schwarzschild Metric. Lorentz Violation. .

LISTA DE FIGURAS

1	Quebra espontânea de simetria.	p. 44
2	Matriz de rotação passiva.	p. 45
3	Matriz de rotação ativa.	p. 46
4	Rotação passiva de um ângulo ϕ na presença de campo de fundo. . . .	p. 46
5.1	5.1 5.1 5.1 5.1	

LISTA DE SÍMBOLOS

c	Velocidade da Luz no Vácuo
m	Massa Inercial
G	Constante Gravitacional
ds	Diferencial de deslocamento próprio
$d\tau$	Diferencial de Tempo próprio
$\eta_{\mu\nu}$	Tensor de Minkowsky
$g_{\mu\nu}$	Tensor Métrico em Coordenadas Gerais
$g_{\alpha\beta}$	Tensor Métrico em Coordenadas Locais
$g^{\mu\nu}$	Tensor Métrico Contravariante
g	Determinante do Tensor Métrico
$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$	Conector de Afinidade
$D_{\lambda;}$	Derivada Covariante
$R_{\lambda\mu\nu\kappa}$	Tensor Riemann-Christoffel
$R_{\mu\nu}$	Tensor Ricci
R	Escalar de Curvatura
$G_{\mu\nu}$	Tensor de Campo de Einstein
$T_{\mu\nu}$	Tensor de Momento-Energia
$B_{\mu\nu}$	Campo Bumblebee

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	p. 11
2	HISTÓRIA DA GRAVITAÇÃO	p. 13
3	INTRODUÇÃO A GRAVITAÇÃO	p. 19
3.1	Tensor de Curvatura	p. 20
3.2	Equações de Campo de Einstein	p. 27
3.3	Ação do Campo Gravitacional	p. 32
4	SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD	p. 34
5	QUEBRA DE SIMETRIA DE LORENTZ E CAMPO BUMBLE- BEE	p. 43
5.1	Violação da simetria de Lorentz Plana	p. 43
5.2	Campo Bumblebee	p. 47
6	CONCLUSÃO	p. 49
	REFERÊNCIAS	p. 51

1 INTRODUÇÃO

A humanidade sempre buscou entender os fenômenos da natureza ao longo de toda a sua existência. Inicialmente adotou explicações mitológicas para explicar esses fenômenos. Posteriormente o homem percebeu que havia um padrão determinado, de como os fenômenos se relacionam. Então passamos a usar o conhecimento científico sistemático, como forma coerente de qualificar e quantificar os padrões da natureza.

No início do século XX, houve um salto no progresso científico muito maior, do que em qualquer outra época. Com o advento da teoria da relatividade e da mecânica quântica, pudemos construir um panorama geral do que vem a ser um entendimento profundo da natureza. A teoria da relatividade, concebida por Einstein, possibilitou as ferramentas necessárias, para desvendarmos a origem do universo. As equações da relatividade geral, com base na geometria diferencial de Riemann, mostrava que a gravidade pode ser descrita como uma curvatura do espaço-tempo, cuja a fonte é a energia e o momento armazenada nos campos de matéria. Essas equações da gravidade apontavam, para a surpresa de Einstein, para um universo não estático. Isso foi comprovado com as observações feitas pelo, astrônomo norte americano Edwin Hubble, de que o universo estava em expansão. Isso mostrava que em um dia o universo era muito pequeno, denso e quente. De modo que, podemos reconstruir sua origem a partir das equações de campo de Einstein. Então o cerne desse trabalho será encontrar as equações de campo de Einstein, com base no princípio da equivalência e na forma mais elegante no princípio da covariância geral.

Um dos aspectos mais notáveis das equações de campo de Einstein, é a previsão de buracos negros, estruturas tão densas que nem mesmo a luz pode escapar. Veremos que a solução de Schwarzschild, a primeira solução das equações de Einstein, prever que para um corpo simetricamente esférico de massa M e sem rotação possui um raio de Schwarzschild R_S . O raio de Schwarzschild o horizonte de eventos do buraco negro. Nessa região, a velocidade de escape de qualquer corpo é igual a da luz. A solução de

Schwarzschild ainda prever o comportamento para a região onde $r < R_S$. Quando o raio se torna arbitrariamente pequeno, rumamos para a singularidade, onde a solução prever a existência de um ponto de densidade e gravidade infinita. Veremos como a partir das equações de campo, obteremos a solução de Schwarzschild e como essa solução depende da métrica considerada.

transformações de lorentz, constituem uma simetria, isto é, minhas equações não mudam ao passarem por transformações dessa natureza. As transformações de Lorentz mostra que, em outras palavras, as mudanças de referencial inercial não ocorrem com direção preferencial. Contudo, alguns dos modelos teóricos que tentam incorporar a gravitação com o modelo padrão estendido,¹ exige que a simetria de Lorentz seja violada. Mostraremos com um exemplo simples, como a simetria é violada com a presença de campo de fundo, com uma orientação preferencial. Os artigos de V. Alan Kostelecky que a simetria de Lorentz, pode ser quebrada espontaneamente pela presença de campo vetorial de fundo. Tau campo teórico, chama de campo Bumblebee, deve assumir um valor não nulo no vácuo.

¹Spontaneous Lorentz violation, Nambu-Goldstone modes, and gravity Robert Bluhm and V. Alan Kostelecky, PHYSICAL REVIEW D 71, 065008 (2005)

2 HISTÓRIA DA GRAVITAÇÃO

Em meados do século XVII, o físico inglês, Isaac Newton ¹ (1642 - 1724) formulou a teoria da gravitação universal. Com o intuito de explicar o movimento de queda de corpos dotados de massa; que vai além de uma pequena maçã, ao movimento orbital dos planetas ao redor do sol. Newton inferiu que para variar o momento de um corpo, era necessário que uma força fosse aplicada ao corpo. Décadas antes, o físico italiano Galileu Galilei já havia provado, experimentalmente que corpos em queda livre caem com velocidade acelerada e igual para qualquer corpo. Dessa forma é fácil ver que a queda de corpos em campos gravitacionais independente de sua massa, logo Newton percebeu que para que corpos caíssem com velocidade acelerada, era necessário que uma força intrínseca a massa fosse responsável por esse movimento. Newton determinou, com base nos trabalhos experimentais e teóricos de Galileu, que força gravitacional era diretamente proporcional a massa dos corpos e inversamente proporcional ao quadrado da distancia que separa os corpos. Esse resultado pode ser escrita como:

$$\vec{F}_{ij} = -G \frac{\sum_{i \neq j} m_i m_j}{r_{ij}^2} \hat{r}_{ij} \quad (2.1)$$

onde $\hat{r}_{ij} = \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$, e r_{ij} é a distância que separa as partículas i e j . Com a ideia de Newton de que massa atrai massa, surgiu o conceito de campo gravitacional, ou seja, se considerarmos um corpo de prova, com massa m que esteja a uma certa distancia d de um corpo de massa M , esse corpo de prova deve experimentar uma força gravitacional contínua. Qualquer mudança de d vai gerar imediatamente no corpo de prova uma variação na força inicial. Isso, como veremos posteriormente, não é consistente com a teoria da relatividade restrita de Einstein. duante os séculos seguintes, teoria da gravitação universal de Newton, se mostrou um grande sucesso para a descrição de uma enorme gama de fenômenos. Até que em 1905, o físico alemão Albert Einstein, em uma série de artigos revolucionários, propôs a teoria da relatividade especial. A nova teoria para descrição do movimento, que

¹Stephen Hawking, Os Gênios da Ciência

depende do referencial, lança mão de dois postulados (o primeiro postulado diz que a velocidade da luz é a mesma para todos os referências inerciais, e o segundo diz que as leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais). Com base nesses dois postulados Einstein rompe com o paradigma da velha física newtoniano, onde o conceito de éter estava fortemente enraizado. Devemos lembra que o conceito de éter tentava explicar a propagação de ondas eletromagnéticas no espaço aparentemente vazio. Porém o experimento de Michelson e Morley, no final do século XIX, não encontrou evidências do éter e posteriormente as ideias de Einstein suplantaram o éter.

A forma como a teoria da relatividade restrita, descreve um movimento de uma partícula de um referencial inercial para outro, se da pelas transformações de Lorentz. Tais transformações são consequência direta dos dois postulados de Einstein. Se considerarmos dois referenciais inerciais K e K' , onde K' se move com velocidade v em relação a K e por simplificação, dizemos que as origens dos referenciais O e O' coincidirem nos instantes $t = t' = 0$ e para caso particular da velocidade v esta na direção x . Então as coordenadas (x, y, z, t) , (x', y', z', t') atribuídas a um mesmo evento, pelos observadores fixos nos dois referenciais, podem ser relacionadas por:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (2.2)$$

onde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$, disso, as outras componentes seguem:

$$y = y', \quad (2.3)$$

$$z = z', \quad (2.4)$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{xv}{c^2} \right). \quad (2.5)$$

Podemos facilmente generalizarmos as transformações de Lorentz, para um vetor posição $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$ qualquer, de modo que:

$$\vec{r}' = \vec{r} + (\gamma - 1) \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{r}}{\beta^2} \vec{\beta} - \gamma c \vec{\beta} t \quad \text{e} \quad t' = \gamma \left(t - \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{r}}{\beta^2} c \right). \quad (2.6)$$

Fazendo a convenção usual das coordenadas;

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad (2.7)$$

podemos usar a notação tensorial x^μ , com $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Além disso podemos reunir todas as transformações em uma matriz:

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Onde $\beta = v/c$, logo as transformações de lorentz pode ser escrita como;

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu}, \quad (2.9)$$

usando aqui a famosa convenção de soma de Einstein, se os índices se repetem omitimos o somatório.

Uma consequência muito importante das transformações de Lorentz, é que as equações de Maxwell são invariantes para tais transformações, isso quer dizer que, as equações de Maxwell são naturalmente relativísticas. O fato é que as transformações de lorentz constituem um grupo de simetria com importantes implicações físicas, como veremos posteriormente. Pela equação (2.6) vemos que, a noção de medida de distância espacial e a medida de intervalo de tempo da por relógios, depende do referencial do observador. Desse modo, somos forçados a abandonar a concepção de ação instantânea a distancia e a nossão de que o espaço e tempo são conceitos distintos, como Newton acreditava, mas sim como uma só entidade, chamada de espaço-tempo de Minkoviski. No espaço-tempo de Minkoviski definir um vento como um ponto que se limita dentro o na superfície de um cone de luz, um evento fora desse cone, não representa um evento conectado com relação causa-efeito a qualquer outro evento. Podemos definir uma quantidade no espaço-tempo de Minkoviski, que seja invariante sobre as transformações de Lorentz, e mas que relaciona as coordenadas do espaço com o tempo. Essa quantidade é chamada de elemento de linha invariante do espaço-tempo, definido por:

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}, \quad (2.10)$$

onde $\eta_{\alpha\beta}$ é chamado de tensor de Minkowshi, que dado por;

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

a equação 2.2 diz como é a forma como medimos distancias no espaço adotado, no caso da métrica de Minkowski estamos lidando com uma espaço plano.

Posteriormente a concepção da teoria de relatividade especial, Einstein percebeu que sua teoria poderia ser generalizada para incluir referenciais acelerados. Considerando que referenciais não inerciais podem descrever campos de força como a gravidade, já que em queda gravitacional, todos os corpos caem com a mesma aceleração. Então é possível encontrarmos um referencial que se mova com a mesma aceleração que os corpos em queda, de modo que nesse referencial a força gravitacional é nula, esse é o principio da equivalência de Einstein, que motivará nosso estudo na relatividade geral. A relatividade geral estende a descrição de referencias em sistemas de coordenadas curvilíneas, em que saímos da geometria euclidiana para a geometria *reimanniana*, que trata de espaços curvos, desse modo Einstein conseguiu associar a gravidade como uma consequência da geometria do espaço-tempo. Por exemplo, se adotarmos um referencial de coordenadas genérico x^μ sobre o espaço-tempo curvo, podemos reescrever a equação 2.10 como:

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (2.12)$$

\Rightarrow

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.13)$$

onde $g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\nu}$ é definido como o tensor métrico.

A relatividade geral foi um monumental sucesso, com a comprovação experimental, em 1919, do desvio dos raios de luz emitido por uma estrela, ao passar próximo do sol, e a correta descrição da precessão do periélio de mercúrio. nessa concepção os corpos seguem geodésicas no espaço-tempo curvo, isso rompe com conceito de campo de força, que se havia estabelecido pelos predecessores de Newton. Em 1915, no mesmo ano que Einstein publicou seu artigo sobre a relatividade geral, o alemão Karl Schwarzschild apresentou uma solução para as equações de campo de Einstein. A solução de Schwarzschild, expressa pela métrica de Schwarzschild, representa uma corpo massivo esféricamente simétrico, sem carga elétrica e momento angular, ou seja lidamos com uma solução estática. Essa solução apenas descreve uma região local, para uma distancia $r > R_s$ onde R_s é o raio de Schwarzschild, para uma distancia $r < R_s$ a solução descreve o próprio buraco negro. Porém, como veremos nos próximos capítulos, a solução de Schwarzschild fala na descrição

pontual, ou seja, $r \rightarrow 0$

Porém, a teoria geral da relatividade falha para descrição em escalas ultramicroscópicas do espaço tempo. Em escalas dessa ordem temos que usar a mecânica quântica. A teoria quântica é uma teoria de comprovação experimental de enorme precisão, de forma análoga, essa teoria falha para escalas macroscópicas. O fato é que, as duas teorias, pilares da ciência moderna, são completamente incompatíveis. No caso da mecânica quântica, podemos usá-la para descrever as interações das partículas no espaço-tempo, usando o formalismo da teoria de campos. Já no caso da relatividade geral, a força da gravidade é descrita pela deformação do próprio espaço-tempo. Mas se considerarmos uma partícula numa região próxima a um horizonte de eventos. Onde teremos campos gravitacionais são extremamente fortes, e se a região em consideração for da ordem das escalas atômicas, temos que levar em conta os efeitos quânticos, sobre a descrição do movimento das partículas. Logo ficou evidente, a necessidade de uma teoria quântica da gravidade, não só pela estética, mas para termos um entendimento mais profunda das leis da natureza.

Muitas abordagens foram propostas no decorrer do século *XX* para se construir uma teoria da gravitação quântica. Inclusive o próprio Albert Einstein tentou uma unificação. Einstein precisou descrever o eletromagnético com base na teoria geral da relatividade, porém sem sucesso. A teoria da gravitação de Einstein esta baseada na geometria diferencial de *Riemann*. A geometria de Riemann descreve um espaço contínuo-diferenciável em que o próprio espaço é dinâmico. Além da teoria geral da relatividade ser completamente determinística, assim como a velha teoria Newtoniano. Mas na mecânica quântica temos que lidar com observáveis físicas que dependem de funções densidade de probabilidade. Essas funções densidade de probabilidade, temos que introduzir uma incerteza no valor das observáveis, na construção do formalismo quântico. Esses contrastes impedem que as duas teorias serem compatíveis. Outro grande dificuldade é problema da hierarquia, onde a força gravitacional é extremamente fraca em comparação com as outras forças do modelo padrão, algo como varias ordens de grandeza ($\sim 10^{43}$). Sabemos hoje, com base nas modernas abordagens teóricas, que a gravitação se compara em intensidade com as outras forças do modelo padrão, na escala de Planck, com uma energia da ordem 10^{19} GeV . Naturalmente, essa escala esta fora de alcance dos experimentos atuais. Mas podemos inferir indiretamente os efeitos da teoria unificada, se observarmos pequenos desvios nos valores das clássicas; um desses desvios da teoria, seria a observação da violação

de Lorentz localmente. Como por exemplo, uma consequência da violação de Lorentz, seria uma variação da velocidade da luz com o tempo.

3 INTRODUÇÃO A GRAVITAÇÃO

Nesse capítulo abordaremos os elementos matemáticos necessários para construção da solução das equações de campo de Einstein. Para isso partiremos das definições do princípio da equivalência e da covariância geral. Com as equações de campo de Einstein em mãos poderemos no próximo capítulo obter a solução de Schwarzschild. Definiremos também a ação gravitacional.

Como vimos no capítulo anterior, a relatividade geral surgiu como uma generalização da teoria da relatividade restrita, que se limitava apenas a descrição de referências inerciais. Quando Einstein percebeu que corpos em queda gravitacional caem a mesma velocidade aceleração; constituindo uma pista para descrever referências não-inerciais em termos da relatividade, e essa nova abordagem leva naturalmente a uma teoria da gravidade. Para construirmos uma teoria da gravitação, partimos da definição do princípio da equivalência. Onde temos duas versões, a versão fraca que estabelece a equivalência entre massa gravitacional e massa inercial, e a versão forte diz que a força gravitacional que atua sobre uma partícula qualquer, se anula para uma escolha conveniente de coordenadas. Então podemos escrever a seguinte equação.

$$\ddot{x}^\mu = 0, \tag{3.1}$$

a equação (3.1) apresenta um sistema de coordenadas inercial. Agora podemos definir o princípio da covariância geral, o qual é uma formulação mais elegante para o princípio da equivalência de Einstein. Esse princípio diz que as equações das leis físicas sobre campos gravitacionais são as mesmas para o caso que os campos gravitacionais são nulos, e recaímos na relatividade restrita. E que as equações mantêm a forma quando fazemos uma troca de coordenadas.

$$x \longrightarrow x'$$

, o princípio da covariância geral é poderoso o bastante para relacionarmos os campos gravitacionais com a geometria do espaço-tempo.

3.1 Tensor de Curvatura

Para podermos construir as equações de campo de Einstein, necessitamos antes definirmos o tensor de curvatura. Será esse tensor responsável pela conexão entre o espaço curvo com a campo gravitacional. O tensor de curvatura é construído como uma combinação das primeiras e segundas derivadas do tensor métrico. Partiremos da dedução do tensor métrico semelhante do *Steven Weinberg*¹. Definindo o conector da afinidade por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}, \quad (3.2)$$

se transformarmos o conector de afinidade para um outro referencial, ficamos:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\tau\sigma}^{\rho} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}}, \quad (3.3)$$

Notamos que a transformação do conector de afinidade possui um termo não-homogêneo, que o impede de se transformar como um tensor. Tomando agora a transformação inversa.

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}} \frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}, \quad (3.4)$$

isolando o termo não-homogêneo e multiplicando ambos os membros por $\partial x'^{\tau} \backslash \partial x^{\lambda}$, obteremos,

$$\frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau}, \quad (3.5)$$

diferenciando a eq(3.5) com respeito a x^{κ} ,

$$\frac{\partial^3 x'^{\tau}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = \frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\lambda}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \frac{\partial^2 x'^{\rho}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} - \frac{\partial^2 x'^{\sigma}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau}. \quad (3.6)$$

Usando a eq (3.5) podemos reescrever a eq (3.6) como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x'^{\tau}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} &= \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \left(\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\eta}} \Gamma_{\kappa\lambda}^{\eta} - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} \right) - \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \left(\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\eta}} \Gamma_{\kappa\nu}^{\eta} - \frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x'^{\zeta}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\eta\xi}^{\sigma} \right) \\ &\quad - \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\eta}} \Gamma_{\kappa\mu}^{\eta} - \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^{\mu}} \Gamma_{\eta\xi}^{\rho} \right) + \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau}}{\partial x'^{\eta}} \end{aligned}$$

¹GRAVITATION AND COSMOLOGY, PRINCIPLES E APPLICATIONS OF THE GENERAL THEORY OF RELATIVITY, chapter 6 curvature, page 132 a 134

. Podemos agora reunir os termos semelhantes e contraindo os índices, de modo que;

$$\frac{\partial^3 x'^\tau}{\partial x^\kappa \partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda \right) - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa} \left(\frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\prime\tau}}{\partial x'^\eta} - \Gamma_{\rho\lambda}^{\prime\tau} \Gamma_{\eta\sigma}^{\prime\lambda} - \Gamma_{\lambda\sigma}^{\prime\tau} \Gamma_{\eta\rho}^{\prime\lambda} \right)$$

,

$$- \Gamma_{\rho\sigma}^{\prime\tau} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda} \left(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa} + \Gamma_{\kappa\nu}^\lambda \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\kappa\mu}^\lambda \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \right). \quad (3.7)$$

Considerando a eq (3.7) com ν e κ trocados e subtraindo da mesma equação obteremos,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda \right) \\ & - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa} \left(\frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\prime\tau}}{\partial x'^\eta} - \frac{\partial \Gamma_{\rho\eta}^{\prime\tau}}{\partial x'^\sigma} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\prime\tau} \Gamma_{\eta\rho}^{\prime\sigma} - \Gamma_{\lambda\eta}^{\prime\tau} \Gamma_{\rho\sigma}^{\prime\sigma} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Podemos multiplicar a eq (3.8) por $\partial x'^\tau / \partial x^\lambda$ e obtemos a seguinte regra de transformação:

$$R_{\rho\sigma\eta}^{\prime\tau} = \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\eta} R_{\mu\nu\kappa}^\lambda, \quad (3.9)$$

onde temos que,

$$R_{\mu\nu\kappa}^\lambda = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda, \quad (3.10)$$

. Vemos que a eq (3.9) defini um novo tensor, chamado de tensor de curvatura de Riemann-Christoffel, que depende das derivadas primeiras e segundas do tensor métrico. Como sabemos o tensor métrico diz a forma da geometria do espaço-tempo. É natural que o tensor de curvatura nos diga o quanto curvo é o nosso espaço-tempo.

Analisaremos agora algumas propriedades do tensor de curvatura, que será de grande utilidade para dedução das equações de Einstein. Podemos por, o tensor de curvatura na forma covariante,

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\sigma} R_{\mu\nu\kappa}^\sigma. \quad (3.11)$$

A conexão afim, pode ser escrita como uma função das derivadas do tensor métrico ² e usando a eq (3.10) podemos reescrever o tensor de curvatura como,

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa} &= \frac{1}{2} g_{\lambda\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} g^{\sigma\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} g^{\sigma\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial g_{\rho\kappa}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^\rho} \right) \\ &+ g_{\lambda\sigma} \left(\Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\sigma - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\sigma \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

²ver Steven Weinberg,pag 75

Usando o seguinte artifício matemático,

$$g_{\lambda\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} g^{\sigma\rho} = -g^{\sigma\rho} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} g_{\lambda\sigma} = -g^{\sigma\rho} (\Gamma_{\kappa\lambda}^\eta g_{\eta\sigma} + \Gamma_{\kappa\sigma}^\eta g_{\eta\lambda})$$

,

após algumas manipulações algébricas e cancelamentos dos termos $\Gamma\Gamma$ obteremos,

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right) + g_{\eta\sigma} (\Gamma_{\nu\lambda}^\eta \Gamma_{\mu\kappa}^\sigma - \Gamma_{\kappa\lambda}^\eta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma) \quad (3.13)$$

. Pela eq (3.13), podemos ver claramente as propriedades do tensor de curvatura, que são,

(A) Simétria:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu}, \quad (3.14)$$

(B) Antisimétria:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} = R_{\mu\lambda\kappa\nu}, \quad (3.15)$$

(C) Ciclicidade:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\mu\nu\kappa\lambda} + R_{\nu\kappa\lambda\mu}, \quad (3.16)$$

podemos contrair o tensor de curvatura para obtermos o tensor de *Ricci*

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa}, \quad (3.17)$$

obviamente pela propriedade (A), o tensor de *Ricci* é simétrico

$$R_{\mu\kappa} = R_{\kappa\mu}. \quad (3.18)$$

Pela propriedade (B) o tensor de *Ricci*, é o único tensor de segunda ordem que pode ser formado por contração de $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ e que,

$$g^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g^{\nu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0.$$

Podemos ver que, pela propriedade (B) só há um único modo de construir escalar; por contração do tensor de curvatura,

$$R = g^{\lambda\nu} g^{\mu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa}. \quad (3.19)$$

Com base no tensor de curvatura e suas propriedades, podemos derivar as identidades de Bianchi. Essas identidades, serão de grande importância para o nosso presente trabalho.

Se adotarmos um sistema de coordenadas para descrever um ponto de uma região local, em que o $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ seja nulo, mas não suas derivadas primeiras, ou seja, estamos em referencial inercial. Agora se derivarmos parcialmente o tensor de curvatura com respeito a x^{η} obtemos,

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\eta}} \left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} \right). \quad (3.20)$$

Se trocarmos ν , κ e η ciclicamente, de modo a obtermos:

$$R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\eta}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\eta}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\eta}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\eta} \partial x^{\lambda}} \right) \quad (3.21)$$

$$R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\eta} \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\kappa}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\eta}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\kappa}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\eta}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\lambda}} \right). \quad (3.22)$$

Então obtemos as identidades de Bianchi, somando as equações (3.20), (3.21) e (3.22)

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} + R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} + R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} = 0. \quad (3.23)$$

Podemos contrair a equação (3.23) com $g^{\lambda\nu}$, para encontrarmos uma forma mais compacta,

$$R_{\mu\kappa;\eta} - R_{\mu\eta;\kappa} + R_{\mu\kappa\eta;\nu}^{\nu} = 0, \quad (3.24)$$

onde usamos a propriedade;

$$g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} = -R_{\mu\eta;\kappa}$$

. Contraindo a equação (3.24) com $g^{\mu\kappa}$ obtemos,

$$R_{,\eta} - R_{\eta;\mu}^{\mu} - R_{\eta\nu}^{\nu} = 0. \quad (3.25)$$

Finalmente, escrevemos:

$$\left(R_{\eta}^{\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\eta}^{\mu} R \right)_{;\mu} = 0 \quad (3.26)$$

essas identidades forma muito importantes, quando Einstein, e seu colaborador, o matemático *Marcell Grossmann*, obtiveram o resultado final para suas equações de campo.

Deduzimos o tensor de curvatura de *Riemann-Christoffel* usando apenas argumentos puramente matemáticos. Através de apenas manipulação de tensores, porém necessitamos de introduzir uma argumentação com base física e de forma mais elegante, na dedução do tensor de curvatura. Então antes de prosseguirmos com o formalismo das equações de Einstein, apresentaremos uma segunda versão da dedução do tensor de curvatura. Isso

será feito, com base na equação de transporte-paralelo, essa dedução pode ser encontrada com mais detalhes no livro do Bernard Schutz ³ Se imaginarmos uma quadri-vetor contra variante $V^\nu(\tau)$ definido em um ponto arbitrário sobre um curva $x(\tau)^\mu$ parametrizada pelo invariante τ . Por exemplo, essa curva pode ser escrito sobre a superfície de uma esfera. Se quisermos levar o nosso vetor de um ponto A para um ponto B ao longo da curva, podemos usar a equação de transporte, dada por:

$$\frac{DV^\mu}{D\tau} = \frac{dA^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\lambda}{d\tau} V^\nu \quad (3.27)$$

. A equação 3.27 diz a forma como nosso vetor varia, quando transportado pelo caminho que vai da A para B . Se o vetor é equipotente ao longo de toda a curva, ou seja, não varia, então temos $\frac{DV^\mu}{D\tau} = 0$. Podemos considerar um referencial inercial, onde uma partícula se desloca sobre uma trajetória definida, em que não sofre mudanças no seu movimento, como uma consequência dessa propriedade. Voltando ao exemplo de uma curva sobre uma esfera, considerando que a curva seja fechada. Queremos deslocar nosso vetor, de modo que ele percorra toda a curva. Podemos levantar a questão, como será a dependência da variação do vetor com relação a curva escolhida. Já que a eq(3.27) depende do caminho escolhido, veremos que isso está relacionado a curvatura da superfície. Consideremos o caso de uma curva fechada extremamente pequena, dada pelas curvas: $x^1 = a, x^1 = a + \delta a$, $x^2 = b, x^2 = b + \delta b$. Quando o vetor V^ν é paralelamente transportado, em outras palavras, varia sua forma, do ponto A ao ponto B então pela equação (3.27):

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} = -\Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu. \quad (3.28)$$

Integrando de A a B , obtemos.

$$\begin{aligned} V^\alpha(B) &= V^\alpha(A) + \int_A^B \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} dx^1 \Rightarrow, \\ V^\alpha(B) &= V^\alpha(A) - \int_{x^2=b} \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Similarmente para os caminhos CB e CD

$$V^\alpha(C) = V^\alpha(B) - \int_{x^1=a+\delta a} \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2, \quad (3.30)$$

$$V^\alpha(D) = V^\alpha(C) + \int_{x^2=b+\delta b} \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1, \quad (3.31)$$

então quando o vetor retorna ao ponto de partida (ponto A), temos:

$$V_{final}^\alpha(A) = V^\alpha(C) + \int_{x^1=a} \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2. \quad (3.32)$$

³Bernard Schutz, A first course in GENERAL RELATIVITY

A variação do vetor $V^\alpha(A)$, será um vetor $\delta V^\alpha(A)$ dado pela adição das Eqs.(3.29)- (3.32);

$$\delta V^\alpha(A) = V_{final}^\alpha(A) - V_{inicial}^\alpha(A) =$$

$$\int_{x^2=b+\delta b} \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1 - \int_{x^2=b} \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1 - \int_{x^1=a+\delta a} \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2 + \int_{x^1=a} \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2. \quad (3.33)$$

tomando agora a variação de caminho infinitesimal e considerando até a primeira ordem, obtemos;

$$\begin{aligned} \delta V^\alpha = & - \int_b^{b+\delta b} \delta a \frac{\partial}{\partial x^1} (\Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu) dx^2 + \int_a^{a+\delta a} \delta b \frac{\partial}{\partial x^2} (\Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu) dx^1 \approx \\ & \delta a \delta b \left[-\frac{\partial}{\partial x^1} (\Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu) + \frac{\partial}{\partial x^2} (\Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu) \right]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Derivando as expressões entre parênteses,

$$\delta V^\alpha = \delta a \delta b \left[\frac{\partial \Gamma_{\mu 1}^\alpha}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_{\mu 2}^\alpha}{\partial x^1} + \Gamma_{\nu 2}^\alpha \Gamma_{\mu 1}^\nu - \Gamma_{\nu 1}^\alpha \Gamma_{\mu 2}^\nu \right] V^\mu. \quad (3.35)$$

Vemos que a variação do vetor V^α é proporcional ao elemento de área delimitado pelo caminho fechado, essa constante de proporcionalidade definida pela Eq(3.35) é a curvatura da superfície do elemento de área. Podemos generalizar para uma hipersuperfície qualquer, de modo que,

$$\delta V^\alpha = \delta a \delta b \left[\frac{\partial \Gamma_{\mu \sigma}^\alpha}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma_{\mu \lambda}^\alpha}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\nu \lambda}^\alpha \Gamma_{\mu \sigma}^\nu - \Gamma_{\nu \sigma}^\alpha \Gamma_{\mu \lambda}^\nu \right] V^\mu. \quad (3.36)$$

Então definimos o tensor de curvatura como,

$$R_{\mu \lambda \sigma}^\alpha = \frac{\partial \Gamma_{\mu \sigma}^\alpha}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma_{\mu \lambda}^\alpha}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\nu \lambda}^\alpha \Gamma_{\mu \sigma}^\nu - \Gamma_{\nu \sigma}^\alpha \Gamma_{\mu \lambda}^\nu. \quad (3.37)$$

Neste ponto em que, definimos em bases matematicamente consistente o tensor de curvatura. Estamos prontos para desenvolvermos formalmente as equações de campo de Einstein. Nos apoiaremos, como foi mencionado, na teoria da covariância geral. Essas novas equações devem, naturalmente terem como caso limite a equação de Newton. Então de antemão mostraremos como a equação da geodésica,

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\lambda \sigma}^\mu \frac{dx^\lambda}{dx^\sigma} = 0, \quad (3.38)$$

se reduz ao caso newtoniano. Se a partícula descrita pela equação (3.38) e suficientemente lenta, logo podemos fazer:

$$\frac{dx}{d\tau} \ll \frac{cdt}{d\tau}$$

Então obtemos,

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (3.39)$$

Podemos reescrever a equação (3.2) em termos das derivadas primeiras do tensor métrico, de modo;

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right]. \quad (3.40)$$

Pela equação (3.39) e considerando os campos estáticos, dessa forma vem,

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}. \quad (3.41)$$

como estamos lidando com campos fracos, podemos considerar o tensor métrico como aproximação do tensor de Minkowski,

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}. \quad (3.42)$$

Onde $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$. Para primeira ordem, a equação (3.41) fica,

$$\Gamma_{00}^\alpha = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\beta}. \quad (3.43)$$

Substituindo isso na equação (3.39) e considerando que a métrica de Minkowski seja unitária, obtemos;

$$\frac{d^2\vec{x}}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \nabla h_{00}. \quad (3.44)$$

Comparando isso com o clássico resultado newtoniano,

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\nabla\phi. \quad (3.45)$$

isso leva a;

$$h_{00} = 2\phi + \text{constante} \quad (3.46)$$

ϕ representa o potencial gravitacional dado por

$$\phi = -\frac{GM}{r}. \quad (3.47)$$

Para grandes distâncias h_{00} se anula, concluímos que a constante é nula, de modo que

$h_{00} = 2\phi$ substituindo isso na equação (3.42) para a componente tempo-tempo.

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00}$$

onde $\eta_{00} = 1$; isso leva:

$$g_{00} = (1 + 2\phi). \quad (3.48)$$

Para facilitar o cálculo da equação (3.48) fizemos $c = 1$; de modo que podemos fazer

$$g_{00} = 1 + 2\frac{\phi}{c^2} \quad (3.49)$$

3.2 Equações de Campo de Einstein

As equações de Maxwell descrevem como as cargas e correntes elétricas, geram e afetam os campos eletromagnéticos, por sua vez as equações de Einstein descrevem como a energia e o momento afetam a métrica do espaço-tempo. Contudo as equações de campo gravitacional são bem mais complicadas do que as equações do eletromagnetismo, porque os campos eletromagnéticos não transportam a sua própria carga elétrica. Já os campos gravitacionais transportam a sua própria fonte - a inércia associada ao momento e a energia dos campos - isso nos leva a procurar equações diferenciais parciais não lineares. A não linearidade descreve o efeito dos campos gravitacionais sobre si mesmo. Einstein se baseou na equação de Poisson, da gravitação newtoniana, como função protótipa. em que a verção geral deve-se reduzir, para o caso de campos gravitacionais fracos,

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho. \quad (3.50)$$

Como queremos que a equação procurada relacione o tensor momento-energia com as derivas primeira e segunda da métrica. Então percebemos que o lado direito da equação (3.49) esta relacionado com uma componente do tensor momento-energia,

$$T_{00} \simeq \rho \quad (3.51)$$

agora pela equação (3.48) para campos fracos, substituindo isso na equação (3.49) obteremos,

$$\nabla^2 g_{00} = 8\pi G T_{00}. \quad (3.52)$$

Com base nesse resultado, podemos buscar uma generalização apropriada. Lembrando que estamos adotando localmente um sistema de referência inercial, de modo que podemos

fazer

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi GT_{\alpha\beta}. \quad (3.53)$$

Usando o principio da equivalência, podemos representar a equação (3.52) em sistema mais genérico de coordenadas em que incluir campos fortes, então temos:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (3.54)$$

Onde o tensor $G_{\mu\nu}$ se reduz a $G_{\alpha\beta}$ para o caso de campos fracos, esse tensor deve satisfazer certas propriedades:

(A) por definição $G_{\mu\nu}$ deve ser um tensor de segunda ordem.

(B) devemos assumir que $G_{\mu\nu}$ contenha somente derivadas de até segunda ordem do tensor e combinações desses

(C) por conveniência $T_{\mu\nu}$ deve ser simétrico então $G_{\mu\nu}$ também o é.

(D) queremos que o tensor $T_{\mu\nu}$ seja conservado (por derivação covariante) então esperamos que $G_{\mu\nu}$ também será.

$$G_{\nu;\mu}^{\mu} = 0 \quad (3.55)$$

(E) para um campo fraco estacionário produzido por uma corpo de massa m não relativístico, devemos obter.

$$G_{00} \simeq \nabla^2 g_{00} \quad (3.56)$$

a maneira natural de determinarmos $G_{\mu\nu}$ que satisfaça as propriedades (A) e (B) é através de combinações do tensor de curvatura contraído. Sabemos que os únicos tensores que podemos construir a partir do tensor de curvatura são tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}$ e o escalar de curvatura $R = R^{\mu}_{\mu}$. De modo que $G_{\mu\nu}$ fica,

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R \quad (3.57)$$

onde C_1 e C_2 são constantes, que precisão ser determinadas. Podemos aplicar as identi-

dades de Bianchi na equação (3.57) obtemos o seguinte resultado,

$$G_{\nu;\mu}^{\mu} = \left(\frac{C_1}{2} + C_2\right) R_{;\nu}. \quad (3.58)$$

pela propriedade (D) temos que, ou $C_2 = -C_1/2$ ou $R_{;\nu} = 0$, como queremos o tensor $T_{\mu\nu}$ não nulo rejeitamos a segunda possibilidade, e podemos escrever

$$G_{\mu\nu} = C_1 \left(R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) \quad (3.59)$$

Podemos determinar a constante C_1 pela propriedade (E), para o caso de um sistema não relativístico de modo que $|T_{00}| \gg |T_{ij}|$ e pela equação (3.58) devemos ter

$$R_{ij} \simeq \frac{1}{2}g_{ij}R \quad (3.60)$$

onde para campos fracos devemos ter $g_{\alpha\beta} \simeq \eta_{\alpha\beta}$ e o escalar de curvatura será reescrito como;

$$R \simeq R_{00} - R_{kk} \simeq R_{00} - \frac{3}{2}R = 2R_{00} \quad (3.61)$$

onde $R_{kk} \simeq \frac{1}{2}g_{kk}R = \frac{1}{2}\delta_k^k R = \frac{3}{2}R$. Substituindo agora a equação (3.60) na equação (3.58) e por meio das últimas considerações obteremos

$$G_{00} \simeq 2C_1 R_{00} \quad (3.62)$$

A componente R_{00} pode ser calculada agora pela equação (3.17)

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} \quad (3.63)$$

recordando que

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right) + g_{\eta\sigma} \left(\Gamma_{\nu\lambda}^\eta \Gamma_{\mu\kappa}^\sigma - \Gamma_{\kappa\lambda}^\eta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \right), \quad (3.64)$$

concluirmos que para campos estatáticos as componentes temporais se anulam de modo a obtermos

$$R_{0000} = 0 \quad \text{e} \quad R_{i0j0} \simeq \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i \partial x^j}$$

. Pela equação (3.62) podemos escrever finalmente;

$$R_{00} = g^{ij} R_{i0j0} \simeq \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \simeq \frac{1}{2} \nabla^2 g_{00}$$

. Voltando a equação (3.61)]

$$G_{00} \simeq 2C_1 (R_{i0i0} - R_{0000}) \simeq C_1 \nabla^2 g_{00}, \quad (3.65)$$

recordando a propriedade (E) concluimos que $C_1 = 1$. Então $G_{\alpha\beta}$ pode ser escrito como,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (3.66)$$

Da equação (3.53) obtemos as equações de campo de Einstein;

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (3.67)$$

Falaremos um pouco do tensor de momento-energia $T^{\mu\nu}$, com base no trabalho de Filipe França Faria ⁴. Para que a energia e momento seja conservado em um sistema fechado, temos que;

$$\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0. \quad (3.68)$$

Em relatividade geral, as quantidades que descrevem o momento e a energia, depende de no máximo da derivada primeira do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Isso implica que, essas quantidades não sejam covariante, ou seja, essas quantidades depende dos sistemas de coordenadas. Desse modo, temos que usar pseudo-tensores de momento-energia para descrever essas quantidades. Como estamos lidando com pseudo-tensores não é possível determinar de maneira única a energia gravitacional numa região finita do espaço, já que, iremos obter resultados diferentes para sistemas de coordenadas diferentes. O uso de pseudo-tensores possibilita apenas a obtenção da energia total de um espaço assintoticamente plano, pois para sistemas assintoticamente planos (integrando sobre todo o espaço), os pseudo-tensores de energia-momento se tornam independentes do sistema de coordenadas. Einstein foi um dos primeiros a tentar obter o pseudo-tensor de momento-energia. Sua ideia foi expressar a lei de conservação do tensor momento energia que descrevem os campos de matéria, na presença de campos gravitacionais. De modo que obtemos;

$$\nabla_{\mu}T_{\nu}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}(\sqrt{-g}T_{\nu}^{\mu}) + \frac{1}{2}T_{\mu\sigma}\partial_{\nu}g^{\mu\sigma} = 0, \quad (3.69)$$

⁴Fluxo de Momento-Energia Gravitacional, Tese de Mestrado, Universidade de Brasília

usando a equação (3.68) obtemos a lei de conservação de momento-energia, como;

$$\nabla_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = \partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (3.70)$$

Após série de cálculos, obtemos o pseudo-tensor de momento-energia total de Einstein como;

$$\tau_{\nu}^{\mu} = k \partial_{\lambda} \left\{ \frac{g_{\gamma\nu}}{\sqrt{-g}} \partial_{\sigma} \left[-g \left(g^{\lambda\sigma} g^{\mu\gamma} - g^{\mu\sigma} g^{\lambda\gamma} \right) \right] \right\}, \quad (3.71)$$

onde k é uma constante. Esse pseudo-tensor total, foi base para construção de outros pseudo-tensores de momento-energia.

Se estivermos em uma região do espaço na ausência de fonte, $T_{\mu\nu} = 0$, implica que $R_{\mu\nu} = 0$ e que $R = 0$. Contudo não quer dizer que o tensor de curvatura de Riemann-Christoffel seja nulo, isso porque como já foi mencionado antes, o campo gravitacional é não linear, ele pode interagir consigo mesmo. Para termos ausência de campo gravitacional, teremos $R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0$, e voltamos para um espaço plano de espaço Minkowski. o fato de lidarmos com equações diferenciais parciais não lineares, nos impede de obtermos uma solução geral, para equações de campo de Einstein, ficamos com alguns casos restritos, que admitem solução analítica, mas podemos tratar de muitos problemas não analíticos por simulações computacionais, que são de grande valor para a pesquisa na área. Um dos poucos casos com solução analítica é a solução de *Schwarzschild*, que será o tema que abordaremos no próximo capítulo.

Se contrairmos a equação (3.66) por $g^{\mu\nu}$ obteremos um importante resultado

$$R - 2R = -8\pi G T_{\mu}^{\mu} \Rightarrow R = 8\pi G T_{\mu}^{\mu} \quad (3.72)$$

substituindo o último resultado na equação (3.66) podemos redefinir o tensor métrico como

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T_{\lambda}^{\lambda} \right) \quad (3.73)$$

Se retornarmos a propriedade (B) e analisarmos bem, estamos livres para adicionar ao $G_{\mu\nu}$ o proprio tensor métrico multiplicado por uma constante, de modo que podemos reescrever a equação (3.66)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (3.74)$$

Esse novo termo $\lambda g_{\mu\nu}$ foi posteriormente introduzido por Einstein para corrigir um aparente erro. Onde suas equações originais pareciam dizer que o universo não era estático, como ele acreditava, esse termo adicional, onde λ é a chamada de constante cosmológica. Essa constante torna o universo estático. Podemos ver que as propriedades (A), (C) e (D) são satisfeitas para esse termo, porém não a propriedade (E) então devemos assumir que λ é muito pequena de modo a não interferir com os resultados da teoria Newtoniano. A menos em consideração contrária assumiremos $\lambda = 0$.

3.3 Ação do Campo Gravitacional

Podemos provar que as equações de campo de Einstein derivam de um princípio variacional, assim como muitas equações importantes da física, como as equações de Lagrange. Essa propriedade tem como consequência a fato de as trajetórias fisicamente realizáveis em um espaço-tempo curvo são geodésicas. Nossa dedução se baseará no formalismo adotado por Aldrovandi⁵ mesclado com o formalismo adotado no livro do Weinberg⁶. Partindo da ação de Hilbert-Einstein.

$$S[g] = \int \sqrt{-g} R d^4x \quad (3.75)$$

onde $g = \text{Det}(g_{\mu\nu})$ é conveniente usar $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. Tomando agora a variação de equação (3.70), obtemos;

$$\delta S[g] = \int (\delta\sqrt{-g}g)^{\mu\nu} R_{\mu\nu} d^4x + \int \sqrt{-g} (\delta g^{\mu\nu} R)_{,\mu\nu} d^4x + \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) d^4x. \quad (3.76)$$

O primeiro termo do segundo membro da equação (3.71) pode ser desenvolvido por:

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta(-g) \quad (3.77)$$

podemos desenvolver agora $\delta(-g)$, lembrando que estamos adotando em nosso trabalho uma métrica diagonal, então $\text{Det}(g_{\mu\nu}) = g_{00}g_{11}g_{22}\dots g_{ii}$.

$$\begin{aligned} \delta(-g) = & + \frac{g_{00}}{g_{00}} \delta g_{00} g_{11} g_{22} \dots g_{ii} + g_{00} \frac{g_{11}}{g_{11}} \delta g_{11} g_{22} \dots g_{ii} + g_{00} g_{11} \frac{g_{22}}{g_{22}} \delta g_{22} g_{33} + \\ & \dots g_{ii} + \dots + g g \dots \frac{g_{ii}}{g_{ii}} \delta g_{ii} = g g^{00} \delta g_{00} + g g^{11} + \dots + g g^{ii} = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.78)$$

⁵R.Aldrovandi e J.G.Pereira, General Relativity

⁶Steven Weinberg GRAVITATION AND COSMOLOGY, pag 290 end pag 364

Usando agora a identidade; $gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -gg_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$ e substituindo na equação (3.72) obtemos.

$$\begin{aligned}\delta\sqrt{-g} &= -\frac{gg_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}}{2\sqrt{-g}} \Rightarrow \\ \delta\sqrt{-g} &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\end{aligned}\quad (3.79)$$

Podemos tratar o terceiro termo do segundo membro da equação (3.71), usando a identidade abaixo,

$$\delta R_{\mu\nu} = \left(\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}\right)_{;\kappa} - \left(\delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}\right)_{;\lambda}.\quad (3.80)$$

Essa equação é nula por uma Integração sobre todo o espaço; por razões físicas, sobre um extensão infinita do espaço o campo gravitacional é nulo. Finalmente substituindo a equação (3.74) na equação (3.71) obteremos;

$$\delta S[g] = \int \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) \delta g^{\mu\nu} = 0.\quad (3.81)$$

Vemos que a equação de campo de Einstein é naturalmente derivado de um princípio variacional. Isso é propriedade fundamental.

4 SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD

As equações de Einstein (3.66) descrevem elegantemente as interações dos campos gravitacionais, seu formalismo matemático sendo muito robusto em comparação a equação da gravitação universal de Newton(2.1), onde a noção de força de ação instantânea é substituída por uma curvatura do espaço-tempo gerada pela distribuição de massa e energia. Porém pagamos um preço ao adotarmos a teoria da gravitação de Einstein; a busca por soluções são as vezes extremamente difíceis, como já foi mencionado do capítulo anterior as equações de Einstein constituem um grupo de equações diferenciais não-lineares, onde o campo gravitacional pode interagir com sua própria fonte. Não obstante as soluções não-triviais mais bem conhecidas são para o caso de ausência de fontes gravitacionais. Podemos separar em duas categorias as soluções; as soluções em "pequena" escala, onde tratamos localmente nosso espaço-tempo curvo como, por exemplo próximo a uma estrela. E as soluções em "grande" escala, onde lidamos com as interações gravitacionais no âmbito cosmológico. Para nosso propósito, estudaremos apenas a solução para "pequena" escala. A solução de Schwarzschild, coincidiu em encontrarmos uma solução para as equações de Einstein, para uma região do espaço próximo a uma fonte de campo gravitacional (uma estrela, um buraco negro ou mesmo um planeta). Porém precisamos fazer importantes considerações sobre nossa métrica, primeiramente queremos uma métrica mais geral possível que torne o intervalo infinitesimal de tempo próprio $d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ seja estático e que a métrica seja isotrópica, e também, seja a mesma de qualquer direção do espaço. Então nossa métrica tem que ser estática e isotrópica, para um corpo esférico adotamos uma simetria e escrevemos o intervalo invariante como:

$$d\tau^2 = e^\nu c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (4.1)$$

onde ν e λ são funções estáticas e exclusivamente de r .

Nesse caso a métrica covariante é dada por;

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \text{sen}^2\theta \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

E métrica contravariante é

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2} \text{sen}^{-2}\theta \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Então as componentes não nulas da métrica são:

$$g_{00} = e^\nu, g_{11} = -e^\lambda, g_{22} = -r^2, g_{33} = -r^2 \text{sen}^2\theta, \quad (4.4)$$

como já dissemos estamos em região de vácuo ao redor da fonte de campo gravitacional, então a equação (3.66) fica.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \quad (4.5)$$

isso leva a condição $R_{\mu\nu} = 0$ para provar isso contraímos a equação (4.4) com $g^{\mu\nu}$ obtemos;

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = 0 \Rightarrow R - \frac{1}{2}R \Rightarrow R = 0 \Rightarrow g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = 0. \quad (4.6)$$

como o tensor métrico $g^{\mu\nu}$ não pode ser nulo, então $R_{\mu\nu} = 0$ para determinarmos a solução de Schwarzschild, temos que calcular o tensor de Ricci, mas antes precisamos determinar o conector de afinidade, dado por:

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right). \quad (4.7)$$

Para a componente Γ_{00}^0 temos,

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2}g^{\nu 0} \left(\frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu} \right) \quad \text{e para } \nu = 0 \text{ ficamos } \Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2}g^{00} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} \right) = \frac{1}{2c} \frac{d\nu}{dt}$$

$$\Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2}g^{\nu 0} \left(\frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1\nu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^\nu} \right) = \frac{1}{2}g^{00} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} = \Gamma_{10}^0 \quad \Gamma_{11}^0 =$$

$$\frac{1}{2}g^{\nu 0} \left(\frac{\partial g_{1\nu}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1\nu}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^\nu} \right) = \frac{1}{2}g^{00} \left(-\frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} \right) = \frac{1}{2c} e^{\nu-\lambda} \frac{d\lambda}{dt} \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2}g^{\nu 1} \left(\frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}g^{11} \left(-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda} \frac{d\nu}{dr} \quad \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2}g^{\nu 1} \left(\frac{\partial g_{1\nu}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^\nu} \right) = \frac{1}{2}g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} = \\
&\quad \frac{1}{2c} \frac{d\lambda}{dt} \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{1\nu}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1\nu}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^\nu} \right) = \frac{1}{2}g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dr} \\
&\quad \Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2}g^{\nu 1} \left(\frac{\partial g_{2\nu}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{2\nu}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^\nu} \right) = \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) = -e^{-\lambda} r \\
&\quad \Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2}g^{\nu 1} \left(\frac{\partial g_{3\nu}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{3\nu}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^\nu} \right) = \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{31}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right) = -re^{-\lambda} \sin^2 \theta \\
&\quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}g^{\nu 2} \left(\frac{\partial g_{2\nu}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1\nu}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^\nu} \right) = \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{r} = \Gamma_{21}^2 \\
&\quad \Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2}g^{\nu 2} \left(\frac{\partial g_{3\nu}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{3\nu}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^\nu} \right) = \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{32}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right) = -\sin \theta \cos \theta \\
&\quad \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2}g^{\nu 3} \left(\frac{\partial g_{3\nu}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1\nu}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{31}}{\partial x^\nu} \right) = \frac{1}{2}g^{33} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{31}}{\partial x^3} \right) = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \\
&\quad \Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2}g^{\nu 3} \left(\frac{\partial g_{2\nu}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{2\nu}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^\nu} \right) = \frac{1}{2}g^{33} \left(\frac{\partial g_{32}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{32}}{\partial x^3} \right) = \Gamma_{32}^3 = -\cot \theta. \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Todos os outros gamas são nulos para as demais componentes e como nossa métrica é supostamente estática, as derivadas temporais são nulas. Nosso próximo passo é calcular as componentes do tensor de Ricci, comecemos por R_{00} . Usando a equação (3.17) ela pode ser reescrita como:

$$R_{\mu\kappa} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\rho}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^\rho}{\partial x^\kappa} - \Gamma_{\nu\rho}^\rho \Gamma_{\mu\kappa}^\nu + \Gamma_{\nu\kappa}^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\nu, \quad (4.9)$$

então;

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma_{00}^\rho}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma_{0\rho}^\rho}{\partial x^0} - \Gamma_{\nu\rho}^\rho \Gamma_{00}^\nu + \Gamma_{\nu 0}^\rho \Gamma_{0\rho}^\nu. \quad (4.10)$$

Os quatro termos da equação (4.9) devem ser calculados agora como;

$$\frac{\partial \Gamma_{00}^\rho}{\partial x^\rho} = \frac{\partial \Gamma_{00}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{00}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{00}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{00}^3}{\partial x^3} \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \Gamma_{0\kappa}^\kappa}{\partial x^0} = \frac{\partial \Gamma_{00}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{01}^1}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{02}^2}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{03}^3}{\partial x^0} \quad (4.12)$$

$$\Gamma_{\nu\kappa}^\kappa \Gamma_{00}^\nu = \Gamma_{0\kappa}^\kappa \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{1\kappa}^\kappa \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{2\kappa}^\kappa \Gamma_{00}^2 + \Gamma_{3\kappa}^\kappa \Gamma_{00}^3$$

Essa termo pode ser aberto como,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0\kappa}^{\kappa}\Gamma_{00}^0 &= \Gamma_{00}^0\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{01}^1\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{02}^2\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{03}^3\Gamma_{00}^0 \\
\Gamma_{1\kappa}^{\kappa}\Gamma_{00}^1 &= \Gamma_{10}^0\Gamma_{00}^1 + \Gamma_{11}^1\Gamma_{00}^1 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{00}^1 + \Gamma_{13}^3\Gamma_{00}^1 \\
\Gamma_{2\kappa}^{\kappa}\Gamma_{00}^2 &= \Gamma_{20}^0\Gamma_{00}^2 + \Gamma_{21}^1\Gamma_{00}^2 + \Gamma_{22}^2\Gamma_{00}^2 + \Gamma_{23}^3\Gamma_{00}^2 \\
\Gamma_{3\kappa}^{\kappa}\Gamma_{00}^3 &= \Gamma_{30}^0\Gamma_{00}^3 + \Gamma_{31}^1\Gamma_{00}^3 + \Gamma_{32}^2\Gamma_{00}^3 + \Gamma_{33}^3\Gamma_{00}^3.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

E também,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\nu 0}^{\rho}\Gamma_{0\rho}^{\nu} &= \Gamma_{\nu 0}^0\Gamma_{00}^{\nu} + \Gamma_{\nu 1}^1\Gamma_{01}^{\nu} + \Gamma_{\nu 2}^2\Gamma_{02}^{\nu} + \Gamma_{\nu 3}^3\Gamma_{03}^{\nu} \\
\Gamma_{\nu 0}^0\Gamma_{00}^{\nu} &= \Gamma_{00}^0\Gamma_{00}^{\nu} + \Gamma_{10}^0\Gamma_{00}^{\nu} + \Gamma_{20}^0\Gamma_{00}^{\nu} + \Gamma_{30}^0\Gamma_{00}^{\nu} \\
\Gamma_{\nu 1}^1\Gamma_{01}^{\nu} &= \Gamma_{01}^1\Gamma_{01}^{\nu} + \Gamma_{11}^1\Gamma_{01}^{\nu} + \Gamma_{21}^1\Gamma_{01}^{\nu} + \Gamma_{31}^1\Gamma_{01}^{\nu} \\
\Gamma_{\nu 2}^2\Gamma_{02}^{\nu} &= \Gamma_{02}^2\Gamma_{02}^{\nu} + \Gamma_{12}^2\Gamma_{02}^{\nu} + \Gamma_{22}^2\Gamma_{02}^{\nu} + \Gamma_{32}^2\Gamma_{02}^{\nu} \\
\Gamma_{\nu 3}^3\Gamma_{03}^{\nu} &= \Gamma_{03}^3\Gamma_{03}^{\nu} + \Gamma_{13}^3\Gamma_{03}^{\nu} + \Gamma_{23}^3\Gamma_{03}^{\nu} + \Gamma_{33}^3\Gamma_{03}^{\nu}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Comparando as equações (4.11) a (4.14) com os resultados da equação (4.8) e substituindo na equação (4.10) obteremos;

$$R_{00} = -\frac{\partial\Gamma_{00}^1}{\partial x^1} - \Gamma_{00}^1 \left(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3 - \Gamma_{01}^1 \right), \tag{4.15}$$

com isso ficamos

$$R_{00} = \left(-\frac{1}{2} \frac{d^2\nu}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} \frac{d\nu}{dr} - \frac{1}{4} \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 - \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} \right) e^{(\nu-\lambda)}. \tag{4.16}$$

Calculamos agora para a componente R_{11} e usando a equação (4.9) de sorte que;

$$R_{11} = \frac{\partial\Gamma_{11}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial\Gamma_{1\rho}^{\rho}}{\partial x^1} + \Gamma_{\nu\rho}^{\rho}\Gamma_{11}^{\nu} - \Gamma_{\nu 1}^{\rho}\Gamma_{1\rho}^{\nu}, \tag{4.17}$$

onde,

$$\frac{\partial\Gamma_{11}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} = \frac{\partial\Gamma_{11}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial\Gamma_{11}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial\Gamma_{11}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial\Gamma_{11}^3}{\partial x^3}, \tag{4.18}$$

$$\frac{\partial\Gamma_{1\rho}^{\rho}}{\partial x^1} = \frac{\partial\Gamma_{10}^0}{\partial x^1} + \frac{\partial\Gamma_{11}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial\Gamma_{12}^2}{\partial x^1} + \frac{\partial\Gamma_{13}^3}{\partial x^1}, \tag{4.19}$$

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\rho}\Gamma_{11}^{\nu} = \Gamma_{\nu 0}^0\Gamma_{11}^{\nu} + \Gamma_{\nu 1}^1\Gamma_{11}^{\nu} + \Gamma_{\nu 2}^2\Gamma_{11}^{\nu} + \Gamma_{\nu 3}^3\Gamma_{11}^{\nu} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\nu 0}^0 \Gamma_{11}^\nu &= \Gamma_{00}^0 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{10}^0 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{20}^0 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{30}^0 \Gamma_{11}^3 \\
\Gamma_{\nu 1}^1 \Gamma_{11}^\nu &= \Gamma_{01}^1 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{31}^1 \Gamma_{11}^3 \\
\Gamma_{\nu 2}^2 \Gamma_{11}^\nu &= \Gamma_{02}^2 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{32}^2 \Gamma_{11}^3 \\
\Gamma_{\nu 3}^3 \Gamma_{11}^\nu &= \Gamma_{03}^3 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{11}^3.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

E para o último termo temos;

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\nu 1}^\rho \Gamma_{1\rho}^\nu &= \Gamma_{01}^\rho \Gamma_{1\rho}^0 + \Gamma_{11}^\rho \Gamma_{1\rho}^1 + \Gamma_{21}^\rho \Gamma_{1\rho}^2 + \Gamma_{31}^\rho \Gamma_{1\rho}^3 \Rightarrow \\
\Gamma_{01}^\rho \Gamma_{1\rho}^0 &= \Gamma_{01}^0 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{01}^1 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{01}^2 \Gamma_{12}^0 + \Gamma_{01}^3 \Gamma_{13}^0 \\
\Gamma_{11}^\rho \Gamma_{1\rho}^1 &= \Gamma_{11}^0 \Gamma_{10}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^3 \Gamma_{13}^1 \\
\Gamma_{21}^\rho \Gamma_{1\rho}^2 &= \Gamma_{21}^0 \Gamma_{10}^2 + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^3 \Gamma_{13}^2 \\
\Gamma_{31}^\rho \Gamma_{1\rho}^3 &= \Gamma_{31}^0 \Gamma_{10}^3 + \Gamma_{31}^1 \Gamma_{11}^3 + \Gamma_{31}^2 \Gamma_{12}^3 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{13}^3
\end{aligned}$$

comparando os gamas das equações (4.18) a (4.20) com os termos da equação (4.8) de modo que a equação (4.17) fica;

$$R_{11} = \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 \right) - \Gamma_{11}^1 \left(\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3 \right) + \left(\Gamma_{01}^0 \right)^2 + \left(\Gamma_{12}^2 \right)^2 + \left(\Gamma_{13}^3 \right)^2. \tag{4.21}$$

Onde obtemos,

$$R_{11} = \frac{1}{2} \frac{d^2 \nu}{dr^2} - \frac{1}{4} \frac{d\nu}{dr} \frac{d\lambda}{dr} + \frac{1}{4} \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 - \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr}. \tag{4.22}$$

Repetimos o processo anterior para R_{22} de modo que;

$$R_{22} = \frac{\partial \Gamma_{22}^\rho}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma_{2\rho}^\rho}{\partial x^2} - \Gamma_{\nu\rho}^\rho \Gamma_{22}^\nu + \Gamma_{\nu 2}^\rho \Gamma_{2\rho}^\nu. \tag{4.23}$$

Calculando agora os quatro termos da equação (4.23)

$$\frac{\partial \Gamma_{22}^\rho}{\partial x^\rho} = \frac{\partial \Gamma_{22}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{22}^3}{\partial x^3}. \tag{4.24}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{2\rho}^\rho}{\partial x^2} = \frac{\partial \Gamma_{20}^0}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{21}^1}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{23}^3}{\partial x^2} \quad (4.25)$$

$$\Gamma_{\nu\rho}^\rho \Gamma_{22}^\nu = \Gamma_{0\rho}^\rho \Gamma_{22}^0 + \Gamma_{1\rho}^\rho \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{2\rho}^\rho \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{3\rho}^\rho \Gamma_{22}^3 \Rightarrow$$

$$\Gamma_{0\rho}^\rho \Gamma_{22}^0 = \Gamma_{00}^0 \Gamma_{22}^0 + \Gamma_{01}^1 \Gamma_{22}^0 + \Gamma_{02}^2 \Gamma_{22}^0 + \Gamma_{03}^3 \Gamma_{22}^0$$

$$\Gamma_{1\rho}^\rho \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{10}^0 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{22}^1$$

$$\Gamma_{2\rho}^\rho \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{20}^0 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{22}^2$$

$$\Gamma_{3\rho}^\rho \Gamma_{22}^3 = \Gamma_{30}^0 \Gamma_{22}^3 + \Gamma_{31}^1 \Gamma_{22}^3 + \Gamma_{32}^2 \Gamma_{22}^3 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{22}^3 \quad (4.26)$$

$$\Gamma_{\nu 2}^\rho \Gamma_{2\rho}^\nu = \Gamma_{02}^\rho \Gamma_{2\rho}^0 + \Gamma_{12}^\rho \Gamma_{2\rho}^1 + \Gamma_{22}^\rho \Gamma_{2\rho}^2 + \Gamma_{32}^\rho \Gamma_{2\rho}^3 \Rightarrow$$

$$\Gamma_{02}^\rho \Gamma_{2\rho}^0 = \Gamma_{02}^0 \Gamma_{20}^0 + \Gamma_{02}^1 \Gamma_{21}^0 + \Gamma_{02}^2 \Gamma_{22}^0 + \Gamma_{02}^3 \Gamma_{23}^0$$

$$\Gamma_{12}^\rho \Gamma_{2\rho}^1 = \Gamma_{12}^0 \Gamma_{20}^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{12}^3 \Gamma_{23}^1$$

$$\Gamma_{22}^\rho \Gamma_{2\rho}^2 = \Gamma_{22}^0 \Gamma_{20}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{23}^2$$

$$\Gamma_{32}^\rho \Gamma_{2\rho}^3 = \Gamma_{32}^0 \Gamma_{20}^3 + \Gamma_{32}^1 \Gamma_{21}^3 + \Gamma_{32}^2 \Gamma_{22}^3 + \Gamma_{32}^3 \Gamma_{23}^3 \quad (4.27)$$

Comparando agora as equações (4.42) a (4.27) com os termos da equação (4.8) e substituindo agora na equação (4.23) obteremos;

$$R_{22} = \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{23}^3}{\partial x^2} + \Gamma_{22}^1 \left(\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{31}^3 - \Gamma_{21}^2 \right) - \left(\Gamma_{23}^3 \right)^2 \quad (4.28)$$

o que implica;

$$R_{22} = \left(1 + \frac{1}{2} r \frac{d\nu}{dr} - \frac{1}{2} r \frac{d\lambda}{dr} \right) e^{-\lambda} - 1 \quad (4.29)$$

E finalmente obteremos, R_{33}

$$R_{33} = \frac{\partial \Gamma_{33}^\rho}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma_{3\rho}^\rho}{\partial x^3} + \Gamma_{\nu\rho}^\rho \Gamma_{33}^\nu - \Gamma_{\nu 3}^\rho \Gamma_{3\rho}^\nu. \quad (4.30)$$

Abrindo os quatro termos separadamente,

$$\frac{\partial \Gamma_{33}^\rho}{\partial x^\rho} = \frac{\partial \Gamma_{33}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{33}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{33}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{33}^3}{\partial x^3} \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial \Gamma_{3\rho}^\rho}{\partial x^3} = \frac{\partial \Gamma_{30}^0}{\partial x^3} + \frac{\partial \Gamma_{31}^1}{\partial x^3} + \frac{\partial \Gamma_{32}^2}{\partial x^3} + \frac{\partial \Gamma_{33}^3}{\partial x^3} \quad (4.32)$$

$$\Gamma_{\nu\rho}^\rho \Gamma_{33}^\nu = \Gamma_{0\rho}^\rho \Gamma_{33}^0 + \Gamma_{1\rho}^\rho \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{2\rho}^\rho \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{3\rho}^\rho \Gamma_{33}^3 \Rightarrow$$

$$\Gamma_{0\rho}^\rho \Gamma_{33}^0 = \Gamma_{00}^0 \Gamma_{33}^0 + \Gamma_{01}^1 \Gamma_{33}^0 + \Gamma_{02}^2 \Gamma_{33}^0 + \Gamma_{03}^3 \Gamma_{33}^0$$

$$\Gamma_{1\rho}^\rho \Gamma_{33}^1 = \Gamma_{10}^0 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{33}^1$$

$$\Gamma_{2\rho}^\rho \Gamma_{33}^2 = \Gamma_{20}^0 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{33}^2$$

$$\Gamma_{3\rho}^\rho \Gamma_{33}^3 = \Gamma_{30}^0 \Gamma_{33}^3 + \Gamma_{31}^1 \Gamma_{33}^3 + \Gamma_{32}^2 \Gamma_{33}^3 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{33}^3 \quad (4.33)$$

$$\Gamma_{\nu 3}^\rho \Gamma_{3\rho}^\nu = \Gamma_{03}^\rho \Gamma_{3\rho}^0 + \Gamma_{13}^\rho \Gamma_{3\rho}^1 + \Gamma_{23}^\rho \Gamma_{3\rho}^2 + \Gamma_{33}^\rho \Gamma_{3\rho}^3 \Rightarrow$$

$$\Gamma_{03}^\rho \Gamma_{3\rho}^0 = \Gamma_{03}^0 \Gamma_{30}^0 + \Gamma_{03}^1 \Gamma_{31}^0 + \Gamma_{03}^2 \Gamma_{32}^0 + \Gamma_{03}^3 \Gamma_{33}^0$$

$$\Gamma_{13}^\rho \Gamma_{3\rho}^1 = \Gamma_{13}^0 \Gamma_{30}^1 + \Gamma_{13}^1 \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{13}^2 \Gamma_{32}^1 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{33}^1$$

$$\Gamma_{23}^\rho \Gamma_{3\rho}^2 = \Gamma_{23}^0 \Gamma_{30}^2 + \Gamma_{23}^1 \Gamma_{31}^2 + \Gamma_{23}^2 \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{33}^2$$

$$\Gamma_{33}^\rho \Gamma_{3\rho}^3 = \Gamma_{33}^0 \Gamma_{30}^3 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{31}^3 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{32}^3 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{33}^3. \quad (4.34)$$

Comparando as equações (4.31) a (4.34) com a equação (4.8) e substituindo na equação (4.30), obteremos;

$$R_{33} = -\frac{\partial \Gamma_{33}^1}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{33}^2}{\partial x^2} - \Gamma_{33}^1 \left(\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{31}^3 \right) + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{32}^3, \quad (4.35)$$

onde obtemos,

$$R_{33} = \text{sen}^2\theta \left(e^{-\lambda} \left(1 - \frac{1}{2}r \frac{d\lambda}{dr} + \frac{1}{2}r \frac{d\nu}{dr} \right) - 1 \right). \quad (4.36)$$

Equação pode ser rescrita se a compararmos com a equação (4.29),

$$R_{33} = R_{22} \text{sen}^2 \theta. \quad (4.37)$$

Como o escalar de curvatura é dado por;

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} \Rightarrow \\ R &= e^{-\lambda} \left(-\frac{1}{2} \frac{d^2 \nu}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} \frac{d\nu}{dr} - \frac{1}{4} \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 - \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} \right) - e^{-\lambda} \left(-\frac{1}{2} \frac{d^2 \nu}{dr^2} + \frac{1}{4} \frac{d\nu}{dr} \frac{d\lambda}{dr} - \frac{1}{4} \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} \right) \\ &\quad - \frac{2}{r^2} \left[\left(1 + \frac{1}{2} r \frac{d\nu}{dr} - \frac{1}{2} r \frac{d\lambda}{dr} \right) e^{-\lambda} - 1 \right] \quad \text{reorganizando esses termos, obtemos;} \\ R &= e^{-\lambda} \left[-\frac{d^2 \nu}{dr^2} + \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dr} \frac{d\nu}{dr} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 - \frac{2}{r^2} + \frac{2}{r} \frac{d\lambda}{dr} - \frac{2}{r} \frac{d\nu}{dr} \right]. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Agora estamos aptos para calcular G_{00} da por;

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = 0 \Rightarrow G_{00} = e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (4.39)$$

de modo análogo encontramos G_{11}

$$G_{11} = R_{11} - \frac{1}{2} g_{11} R = e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2}. \quad (4.40)$$

Fazendo $G_{00} = 0$ e $G_{11} = 0$, já que estamos no vácuo, e somando as duas equações obteremos;

$$\frac{d\nu}{dr} + \frac{d\lambda}{dr} = 0, \quad (4.41)$$

essa equação só será válida se os dois termos do primeiro membro forem constantes, de modo que $\nu = -\lambda$ substituindo essa relação na equação (4.40) e a rescrevendo, de modo que;

$$e^\nu r \frac{d\nu}{dr} + e^\nu = 1 \Rightarrow \frac{d}{dr} (r e^\nu) = 1 \quad (4.42)$$

onde k é uma constante. Integrando agora a equação (4.42), obtemos;

$$e^\nu = 1 + \frac{k}{r}. \quad (4.43)$$

O que implica,

$$e^\lambda = \left(1 + \frac{k}{r} \right)^{-1}. \quad (4.44)$$

Comparando a equação (4.43) com a equação (3.48) encontramos que $k = -\frac{2GM}{c^2}$, disso substituímos as equações (4.43) e (4.44) na equação (4.1),

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (4.45)$$

Karl Schwarzschild apresentou essa solução em 1916, pouco tempo após Einstein ter publicado seu artigo sobre relatividade geral. Observando a equação acima Vemos que há uma singularidade, quando;

$$r = R_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (4.46)$$

R_s é o chamado de raio de Schwarzschild, esse raio defini uma região na qual internamente a velocidade de escape é maior que a da luz, por tanto, totalmente inacessível para observadores externos, essa região é chamada de horizonte de eventos. Como R_s depende diretamente da massa do corpo fonte, podemos calcular que para um corpo com a massa do sol $R_s \approx 3km$ e para um corpo com a massa da terra $R_s \approx 0.9cm$. Contudo essa singularidade é apenas aparente, pois podemos remove-lá por uma escolha conveniente de coordenadas; mas quando temos $r \rightarrow 0$ a equação (4.45) deixa de ser válida, nesse ponto é que reside a singularidade. Vale ressaltar que obtivemos a equação (4.45) em uma região do espaço próximo a fonte gravitacional, onde a distribuição de matéria é nulo, ou seja, $T_{\mu\nu} = 0$, sendo que a solução de Schwarzschild não é válida para o caso contrário ($T_{\mu\nu} \neq 0$). Outro caso interessante é quando temos $r \rightarrow \infty$, que a solução de Schwarzschild se reduz a métrica de Minkowski.

5 QUEBRA DE SIMETRIA DE LORENTZ E CAMPO BUMBLEBEE

5.1 Violação da simetria de Lorentz Plana

Esse presente capítulo, iniciamos o estudo preliminar sobre o chamado modelo padrão estendido. O modelo padrão estendido surgiu nos artigos de V. Alan Kostelecky ¹. Esse modelo propõe que a teoria da gravitação geral deve ser incorporado ao modelo padrão de partículas. Veremos que Uma das maneiras para fundamentar essa proposta, será necessário considerar a abordagem da quebra da simetria de Lorentz. E uma maneira de fazer isso é considerar um campo de fundo escalar especial, que adquire um valor não nulo no vácuo. Por fim, mostraremos que a violação de lorentz leva a modificação do ação gravitacional, isso leva também, a modificação das equações de Einstein como consequência disso. E podemos refletir como isso modificaria a solução de Schwarzschild.

Sabemos que as teoria da relatividade e quântica, tiveram um fabuloso êxito em explicar a natureza da realidade, a mecânica quântica para explicar o comportamento dos átomos, e a relatividade geral para explicar comportamento de corpos em escala cósmica (como aglomerados de galáxias). Em meados dos anos de 1920, físicos como, Paul Andrien Maurice Dirac, usaram o formalismo da relatividade restrita na teoria quântica para criar a teoria quântica de campos, que descreve as partículas subatômicas, como modos excitados que se propagam através dos campos. A teoria quântica de campos é a base para construção do modelo padrão, como havíamos dito antes, o modelo padrão é de extraordinária precisão quanto a predição teórica de propriedades das partículas e a sua respetiva comprovação experimental. Porém, o mesmo não acontece quando tentamos dar

¹Physics Department, Indiana University, Bloomington, IN 47405 (Dated: IUHET 461, December 2003; accepted in Physical Review D)

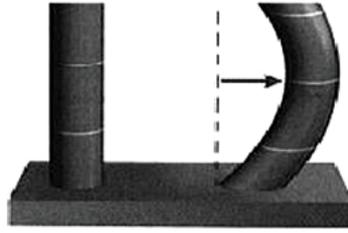


Figura 1 - Ilustração da quebra espontânea da simetria

Figura 1: Quebra espontânea de simetria.

uma descrição quântica a teoria da relatividade geral. Mas como sabemos é fundamental termos um teoria quântica da gravidade, para que os modelos cosmológicos possam explicar os instantes iniciais do universo. As teorias mais recente sugerem que um modelo padrão que incorpore a gravidade, o chamado modelo padrão estendido (SME), deve quebrar naturalmente a simetria de Lorentz.

Podemos entendermos o conceito de quebra espontânea simetria, por um exemplo muito simples, se imaginarmos um haste perfeitamente cilíndrica e em seguida a comprimirmos, de modo que ela enverga. Como não, temos como saber para onde a haste vai envergar, dizemos que houve uma quebra espontânea da simetria, como podemos ver na figura acima. Agora se considerarmos uma partícula, um elétron por exemplo, temos dois modos para descrevermos, esse elétron. Podemos realizar uma rotação passiva (mudança de observador), onde dois observadores inerciais distintos descrevem o elétron. E a rotação ativa, onde mantemos o observador fixo, e rotacionamos o ponto P onde se encontra inicialmente o elétron, para um ponto P' . Para exemplificarmos isso, tomamos a rotação de coordenadas:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Considerando agora, apenas aproximação em primeira ordem da matriz de rotação passiva, ficamos

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \delta\phi \\ -\delta\phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

após algumas manipulações algébricas, obtemos;

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \delta\phi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

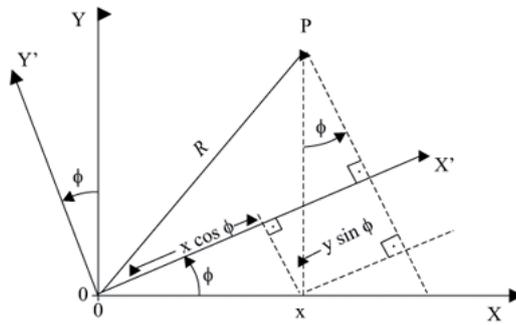


Figura 2 - Como se chegar à matriz de rotação passiva

Figura 2: Matriz de rotação passiva.

Agora para a rotação ativa, temos que manter o sistema de coordenadas fixo e rotacionamos o ponto em consideração,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

de maneira análoga a equação (5.3) obtemos,

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \delta\phi \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Vemos que uma rotação passiva, rotaciona em um ângulo ϕ , enquanto que uma rotação ativa rotaciona em um ângulo $-\phi$, como vemos as duas descrições preservarão a simetria.

Se considerarmos agora o elétron dentro de uma capacitor de placas paralelas, com o respectivo vetor posição $\vec{r} = (0, a, 0)$ perpendicular ao campo elétrico. fazendo uma rotação passiva em $\pi/2$, os dois observadores concordarão que o vetor posição \vec{r} continua perpendicular ao campo. Agora para uma transformação ativa, rotacionamos o ponto em $-\pi/2$, veremos o vetor posição agora é $\vec{r} = (0, 0, -a)$, surpreendentemente, o caso ativo constitui uma configuração distinta do caso passivo, quando tratamos de campo de fundo. Esse campo de fundo quebra naturalmente a simetria de Lorentz. Outra consequência interessante da violação da simetria Lorentz, que a velocidade da luz, não é mais constante. Observações no espectro de algumas estrelas distantes, sugerem que a constante de estrutura fina ($\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$) esta sofrendo pequenas variações ao longo do tempo, pode ser que a constante que esteja variando seja c , ainda não se sabe.

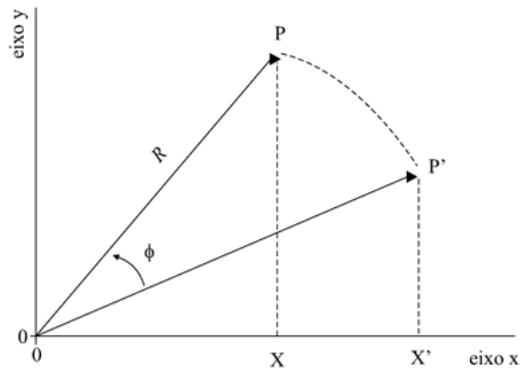


Figura 3 - Como se chegar à matriz de rotação ativa.

Figura 3: Matriz de rotação ativa.

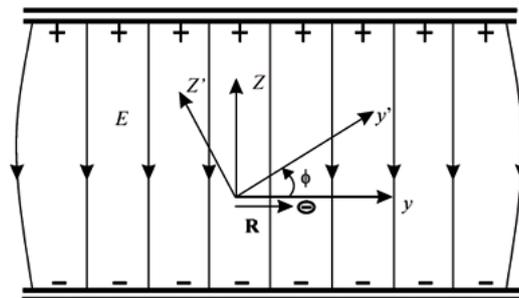


Figura 4 - Rotação passiva de ângulo ϕ em presença de um campo de fundo.

Figura 4: Rotação passiva de um ângulo ϕ na presença de campo de fundo.

5.2 Campo Bumblebee

Usamos um campo elétrico de fundo como exemplo, para mostrar que a simetria de Lorentz é violada, para o caso de rotações que satisfazem a transformação de Lorentz. Podemos introduzir um campo que tenha a função de quebrar a simetria de Lorentz, para o caso de um espaço-tempo curvo esse o campo bumblebee, utilizado por Kostelecky em seus artigos. O campo de bumblebee é um dos possíveis mecanismo de quebra espontânea, que abordaremos brevemente. O potencial do campo bumblebee será gerado pelo quadrivetor B_μ e campo de força será dado por:

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad (5.6)$$

o campo vetorial de bumblebee B_μ , deve adquirir um valor não nulo em algum vácuo, como citado no trabalho de R.V.Maluf ² de modo que;

$$\langle B_\mu \rangle = b_\mu, \quad (5.7)$$

assim, o vácuo escolhe uma direção preferencial no espaço-tempo.

A ação do campo bumblebee pode ser dado simplesmente por;

$$S_B = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} + \frac{2\xi}{\kappa^2} B^\mu B_\mu - V(B^\nu B_\nu \mp b^2) \right], \quad (5.8)$$

O potencial V pode assumir diversas formas, as mais comuns são:

$$V = \lambda (B_\mu B^\mu \mp b^2), \quad (5.9)$$

onde envolve um multiplicador de Lagrange λ e é linear em $B_\mu B^\mu$.

$$V = \frac{1}{2} \lambda (B_\mu B^\mu \mp b^2)^2, \quad (5.10)$$

nesse potencial λ depende quadraticamente de $B_\mu B^\mu$ e,

$$V = \frac{1}{2} \kappa (B_\mu B^\mu \mp b^2)^2, \quad (5.11)$$

nesse último exemplo também é quadrático em $B_\mu B^\mu$, porem κ é uma constante.

²Einstein-Hilbert graviton modes modified by the Lorentz-violating bumblebee field

Podemos adicionar a densidade lagrangiana do campo bumblebee a densidade lagrangiana do campo gravitacional, de modo a obtermos uma densidade mais geral:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{B}} = \frac{1}{16\pi G}(R - 2\Lambda) - \frac{1}{4}\tau_1 B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\tau_2 D_\mu B_\nu D^\mu B^\nu + \frac{1}{2}\tau_3 D_\mu B^\mu D_\nu B^\nu + \sigma_1 B^\mu B^\nu R_{\mu\nu} + \sigma_2 D_\mu D^\mu R - V(B_\mu B^\mu \mp b^2) + \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \quad (5.12)$$

onde as constantes τ_1 , τ_2 , τ_3 , σ_1 e σ_2 determinam a forma dos termos cinéticos do campo bumblebee. Aqui usamos novamente na parte gravitacional, a constante cosmológica. Quando deduzimos as equações de campo de Einstein, suprimos essa constante do resultado final. Isso porquê, pelo menos localmente - a extensão do espaço próximos a estrelas e planetas - o efeito da constante cosmológica deve ser muito pequeno. Porém no modelo padrão estendido, devemos inserir esse termo juntamente com os termos do campo bumblebee.

Vemos que a ação deve ser modificada para incluir a ação do campo de quebra de simetria de Lorentz, de modo que podemos escrever,

$$S_B = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\mathcal{B}}, \quad (5.13)$$

onde $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ é dado pela equação (5.12). A variação funcional da ação S_B deve gerar equações de campo, de modo semelhante a dedução das equações de campo de Einstein como fizemos na secção 3.3.

6 CONCLUSÃO

Nesse trabalho fomos apresentados aos primeiros aspectos da relatividade geral, concebida por Albert Einstein. Vimos que, a primeira versão da teoria da relatividade - teoria da relatividade restrita - diz que as leis da física são as mesmas para qualquer referencial inercial, assim como a velocidade da luz. Isso nos permitiu tratarmos os referenciais com mesmo pé de igualdade. Nessa nova concepção, a separação temporal e espacial dos eventos depende do referencial adotado. Somos levados dessa forma, a adotarmos o conceito de espaço-tempo de Minkovisky. no espaço-tempo de Minkovisky, pudemos definir uma quantidade invariante, que é independente do referencial adotado, que relaciona as coordenadas espaciais com a coordenada temporal.

Posteriormente, mostramos como Einstein generalizou a teoria da relatividade restrita, para incluir referenciais não-inerciais, ou seja, referenciais acelerados. Através do princípio da equivalência, que diz que, sempre podemos encontrar um sistema de coordenadas em que referencial acelerado seja inercial. O princípio da equivalência permitiu que Einstein incluí-se a gravidade na teoria da relatividade geral. De modo que, passamos do espaço-tempo plano de Minkovisky para espaço-tempo curvo de Riemann-Christoffel, onde a gravidade pode ser interpretada como a curvatura desse espaço tempo. Definimos o tensor de curvatura de Riemann com base nas derivadas primeira e segunda do tensor métrico e com isso preparamos o formalismo necessário para construção das equações de Einstein. Vimos que Einstein partiu da equação de Poisson (3.50) como um caso limite da equação mais geral descrita na relatividade geral. Pelo o princípio da covariância geral, como já havíamos visto, diz que as equações da natureza que descrevem algum evento na presença de fortes campos gravitacionais, devem valer na ausência desse campos. Essa Argumentação, levou a concepção da equação (3.67), onde a geometria curva do espaço esta diretamente relacionado com a inercia da energia e do momento contidos no próprio espaço-tempo, cuja a fonte sendo a matéria.

No capítulo 4, tratamos de uma das mais simples e relevantes soluções de das equações de Einstein, solução de Schwarzschild. Expomos de forma explícita todo o tratamento matemático para obtermos a métrica de Schwarzschild, com base na métrica esférica e estática, com os parâmetros λ e ν a serem determinados. Mostramos que a soma das derivadas radiais dos parâmetros é uma constante, de modo que eles são complementares. Quando comparamos a equação (3.48) com a equação (4.43) obtivemos a forma explícita de λ e ν , disso chegamos a equação (4.45). Essa importante solução, diz que para uma distância menor certo raio, a velocidade de escape excede a da luz, isso representa um buraco negro. Outra característica peculiar que encontramos, é que para $r \rightarrow 0$ temos uma divergência na métrica de Schwarzschild, em outras palavras, a métrica deixa de valer, estamos lidando com uma singularidade.

Por fim busca introduzir um pouco, do chamado modelo padrão estendido (SME), busca incorporar a violação de Lorentz no modelo padrão. Nosso intuito de abordarmos esse assunto, foi para mostrar a possível generalização das teorias de Einstein, que mesmo tentou com afincos durante o resto de sua vida. Mostramos de maneira muito simplificada, como a quebra espontânea de simetria Lorentz ocorre, já que os modelos de (SME) exigem isso. Vimos com a citação dos artigos de V. Alan Kostelecky, que podemos nos valer de campo vetorial, chamado de campo bumblebee, para quebrar espontaneamente a simetria. Podemos naturalmente construir uma ação do campo bumblebee, de modo a ser incorporada a ação de Einstein-Hilbert, que usamos na sessão 3.3, para deduzir de modo alternativo as equações de Einstein. A nova ação modificada dada pela equação (5.13) deve gerar uma nova equação de campo, que incorpora os efeitos de violação de Lorentz. Temos que corrigir nossa métrica desse modo. Porém foge do nosso escopo, deduzir essas equações por um princípio variacional. Ficando essa investigação para um trabalho posterior. Mas podemos nos perguntar como as novas equações de campo gravitacional, que incorpora a violação de Lorentz, vai modificar a solução do buraco negro de Schwarzschild. Será que o horizonte de eventos será modificado?

REFERÊNCIAS

- [1] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press Inc., New York (2008)
- [2] Benard Schutz, A First Course in GENERAL RELATIVITY
- [3] Sean Carroll, University of Chicago, SPACETIME AND GEOMETRY, an introduction to general relativity
- [4] PHYSICAL REVIEW D 71, 065008 (2005), Spontaneous Lorentz violation, Nambu-Goldstone modes, and gravity, Robert Bluhm and V. Alan Kostelecky
- [5] Stephen Hawking e Leonard Mlodinow, uma Nova História do tempo, editora Edtouro.
- [6] H. Belich, T. Costa-Soares, M.A. Santos e M.T.D. Orlando, Violação da simetria de Lorentz
- [7] Violação de Lorentz e Teoria da Gravitação Modificada, tese de doutorado, Alesandro Ferreira do Santos, Universidade Federal da paraiba.
- [8] "Sutil é o Senhor..." A ciência e a Vida de Albert Einstein, Abraham Pais.
- [9] Notes for in Course on Classical Fields, R.Aldrovandi and J.G.Pereira.
- [10] Mecânica Analítica, Nivaldo A.Lemos, 2ª Edição.
- [11] Astronomia Astrofísica, Oliveira Filho, Kepler de Souza.
- [12] Introduction to Eletrodynamics, Third Edition, David J. Griffiths.
- [13] GRAVITATION, Charles W. Mister, Kip S. Thorne, Jonh Archibald Wheeler.
- [14] Significado Ontológico da Gravitação segundo Einstein: entre a métrica e a filosofia Ramiro Délio Borges de Meneses Professor Adjunto do Instituto Politécnico de Saúde do Norte – Gandra e Famalicão – PORTUGAL