



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

GRADUAÇÃO EM FÍSICA

AUGUSTO PLÁCIDO CAVALCANTE MELO DE LIMA

**SOBRE OS EFEITOS AHARONOV-BOHM E AHARONOV-CASHER NO ESPAÇO
NÃO COMUTATIVO**

FORTALEZA 2014

AUGUSTO PLÁCIDO CAVALCANTE MELO DE LIMA

**SOBRE OS EFEITOS AHARONOV-BOHM E AHARONOV-CASHER NO ESPAÇO
NÃO COMUTATIVO**

Monografia apresentada ao Curso de Bacharelado em Física do Departamento de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Física

L697s Lima, Augusto Plácido Cavalcante Melo de.

Sobre os efeitos Aharonov-Bohm e Aharonov-Casher no espaço não comutativo / Augusto Plácido Cavalcante Melo de Lima. – Fortaleza, 2014.

38 f.: il., enc.; 30 cm.

Monografia (graduação) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Fortaleza, 2014.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

1. Mecânica Quântica. 2. Física Matemática. 3 Espaço-Tempo (Relatividade/ Física). I. Título.

CDD 530.12

AUGUSTO PLÁCIDO CAVALCANTE MELO DE LIMA

**SOBRE OS EFEITOS AHARONOV-BOHM E AHARONOV-CASHER NO ESPAÇO
NÃO COMUTATIVO**

Monografia apresentada ao Curso de Bacharelado em Física do Departamento de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos Almeida.

Aprovada em 23/06/2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dr. José Euclides Gomes da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Aos meus pais Plácido e Sandra. Aos meus
amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais pela paciência e o apoio financeiro sem o qual não seria possível continuar cursando a faculdade.

Agradeço a todos os professores e funcionários do Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará pela ótima estrutura e aprendizado proporcionados.

Agradeço aos meus colegas de curso pela boa convivência e a cooperação em criar um ambiente agradável para os estudos.

RESUMO

Na mecânica quântica usual tratamos as coordenadas de posição como observáveis compatíveis, no entanto estudos realizados nas duas últimas décadas sugerem a necessidade de considerar coordenadas não comutativas em alguns casos. Neste trabalho faremos uma revisão sobre o espaço não comutativo, seu tratamento matemático através do produto Moyal e sua aplicação aos efeitos Aharonov-Bohm e Aharonov-Casher.

Palavras-chave: Mecânica Quântica. Física Matemática. Espaço-Tempo.

ABSTRACT

In the usual Quantum Mechanics we treat the position coordinates as compatible observables, however studies held in the last two decades suggest the necessity to consider the operator of such coordinates as noncommutative in some cases. In this work we will do a review about the noncommutative space, the mathematical approach through the Moyal product and the application on the Aharonov-Bohm e Aharonov-Casher effects.

Keywords: Quantum Mechanics. Mathematical physics. Space-Time.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	8
2 O ESPAÇO NÃO COMUTATIVO.....	11
3 AS EQUAÇÕES RELATIVÍSTICAS PARA A FUNÇÃO DE ONDA.....	17
4 O EFEITO AHARONOV-BOHM.....	23
5 O EFEITO AHARONOV-CASHER.....	31
6 CONCLUSÕES.....	36
REFERÊNCIAS.....	37

1 INTRODUÇÃO

Na abordagem de Schrödinger da mecânica quântica, as grandezas físicas, ou observáveis, como momento linear e posição assumem o papel de operadores, e o estado físico do sistema é descrito pela função de onda, uma função de carácter estatístico cujo módulo elevado ao quadrado representa a densidade de probabilidade de se encontrar o sistema naquele estado. Ao realizarmos a medida de uma grandeza, o que obtemos é um dos autovalores do operador correspondente, e dizemos que ao fazer isto, estamos colapsando a função de onda.

Sabemos através do princípio da incerteza de Heisenberg[1] que, em um sistema quântico não é possível medir simultaneamente a posição e o momento de uma partícula. Isso ocorre como uma consequência do colapso da função de onda, ao medirmos o valor de uma observável, colapsamos a função de onda para o estado correspondente, uma medida posterior de uma segunda observável não compatível com a primeira provoca outro colapso, de modo que não há como fazer uma medida simultânea exata a não ser que as variáveis possuam um conjunto comum de autofunções, ou seja, observáveis compatíveis, com comutador nulo. O conceito pode então ser estendido para qualquer par de observáveis. Sejam σ_A e σ_B o desvio padrão na medida dos autovalores dos operadores A e B , correspondentes a duas grandezas físicas, o princípio da incerteza generalizado diz que:

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 = \left(\frac{1}{2i} \langle [A, B] \rangle \right)^2 \quad (1)$$

Em geral, admitimos que as coordenadas do operador de posição sejam comutativas, assim é possível medir com precisão a posição de uma partícula num determinado instante. Se tal suposição não for válida, ou seja, houver pelo menos duas componentes de posição que não comutam, ao medir uma delas, estamos automaticamente impondo uma incerteza sobre a outra, a partícula então não tem uma posição bem definida.

O primeiro a questionar isso foi o próprio Heisenberg (uma breve explicação histórica é apresentada em [2]), durante o desenvolvimento teórico da Eletrodinâmica Quântica, ele teria sugerido a aplicação de relações de comutação não nulas entre coordenadas de espaço de modo a evitar o comportamento divergente de algumas integrais.

Embora a estrutura dos comutadores seja diferente, existe outra grandeza física muito conhecida cujos operadores de suas coordenadas também não comutam, o momento angular, que na mecânica quântica é quantizado, assume valores discretos. Assim, essa incerteza na medição da posição, poderia representar, por exemplo, uma discretização do espaço.

O primeiro trabalho formal a usar não comutatividade das coordenadas foi publicado por Hartland S. Snyder[3], em 1947, motivado pelo fato de que a continuidade do espaço-tempo não é um requerimento da invariância de Lorentz[4], Snyder apresentou um exemplo de espaço-tempo discreto invariante sobre tais transformações.

O tema da não comutatividade teve pouca atenção até que alguns trabalhos recentes, publicados na década de 1990, levantaram a possibilidade de se considerar tais relações. O primeiro, escrito por Nathan Seiberg e Edward Witten [5] explica que na teoria de cordas, o modelo de D-branas na presença de um campo magnético constante obedece à álgebra de um espaço não comutativo. O segundo, escrito por Sergio Doplicher, Klaus Fredenhagen e John E Roberts[6] usa argumentos de relatividade geral para inferir, em casos de altas energias, uma possível relação de incerteza das coordenadas, que como vimos anteriormente pode ser representado por uma relação de não comutação das coordenadas do espaço-tempo. A partir de então, muitos trabalhos foram publicados discutindo a não comutatividade e sua aplicação em sistemas quânticos relativísticos e não-relativísticos.

O conceito de uma álgebra não comutativa na mecânica quântica já era usado anteriormente na abordagem de Weyl (“Weyl’s quantization”)[7]. Um ano antes da publicação de Snyder, H. Gronenwold introduziu o produto-estrela (ou produto Moyal) que representaria essa álgebra não comutativa à partir da substituição do produto de funções comum por esse produto. A quantização de Weyl mostrou ser apenas uma troca de representação, mas o produto estrela serviria posteriormente como ferramenta para a descrição matemática em espaços não comutativos, pois ele permite fazer um mapeamento entre dois espaços de fase relacionados, permitindo, por exemplo, estudar o espaço não comutativo através do espaço comutativo onde as equações já são bem definidas.

Nosso objetivo com este trabalho é fazer uma revisão dos conceitos básicos da abordagem matemática da quântica não comutativa e aplicar esses conceitos para encontrar as correções não comutativas para os efeitos Aharonov-Bohm e Aharonov-Casher, o que já foi feito por alguns autores ([8]-[11] por exemplo). Tais efeitos, que iremos tratar a seguir,

compreendem a aparição de fases geométricas na função de onda em duas situações sem analogia clássica, essas duas fases são comumente chamadas de fase topológicas. Organizaremos o trabalho em quatro capítulos, sendo os dois primeiros referentes às definições matemáticas e os dois últimos à aplicação nos efeitos citados.

No primeiro capítulo definiremos as relações de comutação canônicas no espaço não comutativo, mostraremos como relacionar as variáveis canônicas de posição e momento da mecânica quântica usual com aquelas definidas nesse novo espaço. Iremos também demonstrar como o produto estrela liga os dois espaços de fase. No segundo capítulo faremos uma curta digressão sobre o formalismo da quântica em sistemas relativísticos, mostrando as equações básicas de movimento para partículas de spin zero e spin meio. No terceiro capítulo apresentaremos uma revisão do efeito Aharonov-Bohm, numa abordagem não relativística, mostrando como a aparição da fase extra influencia no experimento de fenda dupla, deduziremos a expressão para essa fase e a seguir calcularemos as correções para o espaço não comutativo. No último capítulo mostraremos o efeito Aharonov-Casher, que é explicado essencialmente através de uma equação relativística, compararemos esse efeito com o de Aharonov-Bohm e por fim calcularemos também a correção para a fase num espaço não comutativo. Por fim apresentaremos as considerações finais sobre o estudo.

2 O ESPAÇO NÃO COMUTATIVO

Como inferindo anteriormente, se as coordenadas de posição em um espaço não comutam entre si, há uma relação de incerteza entre elas. No entanto, veremos a seguir que é possível representar os operadores de posição não comutativos como uma combinação linear dos operadores do espaço comutativo usual, e mostraremos uma operação matemática capaz de fazer a transição entre as duas representações na equação de Schrödinger.

2.1 Posição e momento no espaço não comutativo

Na mecânica quântica usual as variáveis canônicas de posição e momento obedecem as seguintes relações de comutação:

$$\begin{aligned}(i) [x_i, x_j] &= 0 \\(ii) [p_i, p_j] &= 0 \\(iii) [x_i, p_j] &= i\hbar\delta_{ij}\end{aligned}\tag{2}$$

A última das equações (2iii) é denominada *relação de comutação canônica* e é de grande importância para a construção da mecânica quântica. Como discutido anteriormente, em alguns casos, temos que considerar que as coordenadas espaciais podem não comutar entre si. Estamos interessados em estudar alguns dos efeitos da não comutatividade espacial, consideremos um espaço de coordenadas canônicas \hat{x} e \hat{p} que obedecem as relações:

$$\begin{aligned}(i) [\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= i\hbar\Theta_{ij} \\(ii) [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= 0 \\(iii) [\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar\delta_{ij}\end{aligned}\tag{3}$$

Tal espaço de fase é denominado *espaço não comutativo*. Os termos Θ_{ij} representam elementos de uma matriz antissimétrica (uma componente deve sempre comutar consigo mesma) que representa a propriedade não comutativa do espaço.

A semelhança entre os conjuntos de equações (2) e (3) sugere que possamos relacionar as nossas coordenadas do espaço não comutativo com coordenadas que possuam as propriedades do espaço comutativo. Consideremos uma relação da forma:

$$\begin{aligned} (i) \quad \hat{x}_i &= a_{in}x_n + b_{in}p_n \\ (ii) \quad \hat{p}_i &= c_{in}x_n + d_{in}p_n \end{aligned} \quad (4)$$

Substituindo (4) em (3i) temos:

$$[a_{in}x_n + b_{in}p_n, a_{jm}x_m + b_{jm}p_m] = i\hbar\Theta_{ij}$$

Expandindo o comutador em termo de comutadores menores:

$$a_{in}a_{jm}[x_n, x_m] + a_{in}b_{jm}[x_n, p_m] + a_{jm}b_{in}[p_n, x_m] + b_{in}b_{jm}[p_n, p_m] = i\hbar\Theta_{ij}$$

Analogamente, substituindo (4) em (3ii) e (3iii) temos e usando as relações (2) temos:

$$\begin{aligned} (i) \quad a_{in}b_{jn} - a_{jn}b_{in} &= \Theta_{ij} \\ (ii) \quad c_{in}d_{jn} - c_{jn}d_{in} &= 0 \\ (iii) \quad a_{in}d_{jn} - b_{jn}c_{in} &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (5)$$

As equações (5) possuem graus de liberdade, o que mostra que a representação das variáveis não comutativas em termos de variáveis comutativas não é única. Para o nosso formalismo adotaremos a seguinte condição:

$$\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial x_j} = a_{ij} = \delta_{ij}$$

$$\frac{\partial \hat{p}_i}{\partial p_j} = d_{ij} = \delta_{ij}$$

Assim para as equações (5) temos:

$$\delta_{in}b_{jn} - \delta_{jn}b_{in} = \Theta_{ij}$$

$$c_{in}\delta_{jn} - c_{jn}\delta_{in} = 0$$

$$\delta_{in}\delta_{jn} - b_{jn}c_{in} = \delta_{ij}$$

Ou:

$$\begin{aligned}(i) b_{ji} - b_{ij} &= \Theta_{ij} \\(ii) c_{ij} - c_{ji} &= 0 \\(iii) b_{jn} c_{jn} &= 0\end{aligned}\tag{6}$$

Se considerarmos que os coeficientes b e c nas equações (6) são elementos de matrizes antissimétricas, ou seja $b_{ji} = -b_{ij}$ e $c_{ij} = -c_{ji}$, obtemos uma solução explícita:

$$\begin{aligned}(i) b_{ij} &= -\frac{1}{2} \Theta_{ij} \\(ii) c_{ij} &= 0\end{aligned}\tag{7}$$

Assim, a nossa representação das variáveis não comutativas em termo das variáveis comutativas fica (tais relações são conhecidas como *Bopp Shift*):

$$\begin{aligned}(i) \hat{x}_i &= x_i - \frac{1}{2} \Theta_{ij} p_j \\(ii) \hat{p}_i &= p_i\end{aligned}\tag{8}$$

A nossa equação de Schroedinger não dependente do tempo no espaço não comutativo é então dada por:

$$H(\hat{x}_i, \hat{p}_i) \psi = H\left(x_i - \frac{1}{2} \Theta_{ij} p_j, p_i\right) \psi = E \psi\tag{9}$$

2.2 O produto Moyal

Como citado anteriormente, em 1946 H Gronenwold[12] introduziu uma classe de produtos que mais tarde seriam denominados “Produto Moyal”(ou produto-estrela), tal operação seria um substituto para o produto convencional de funções na abordagem de Weyl da mecânica quântica(“Weyl Quantization”)[7], a referência [13] aponta a forma diferencial explícita e algumas propriedades do produto Moyal(ou produto estrela) usando na abordagem de Weyl:

$$f \star g = f(x, p) \exp \left[\frac{i\hbar}{2} \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial x} \frac{\vec{\partial}}{\partial p} - \frac{\vec{\partial}}{\partial p} \frac{\vec{\partial}}{\partial x} \right) \right] g(x, p) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (f \star g)(x, p) &= f \left(x + \frac{1}{2} i\hbar \frac{\vec{\partial}}{\partial p}, p - \frac{1}{2} i\hbar \frac{\vec{\partial}}{\partial p} \right) g(x, p) \\ &= f(x, p) g \left(x - \frac{1}{2} i\hbar \frac{\vec{\partial}}{\partial p}, p + \frac{1}{2} i\hbar \frac{\vec{\partial}}{\partial p} \right) \\ &= f \left(x + \frac{1}{2} i\hbar \frac{\vec{\partial}}{\partial p}, p \right) g \left(x - \frac{1}{2} i\hbar \frac{\vec{\partial}}{\partial p}, p \right) \\ &= f \left(x, p - \frac{1}{2} i\hbar \frac{\vec{\partial}}{\partial p} \right) g \left(x, p + \frac{1}{2} i\hbar \frac{\vec{\partial}}{\partial p} \right) \end{aligned}$$

Onde definimos as derivadas pela esquerda e pela direita:

$$f \frac{\vec{\partial}}{\partial x} g = f \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$f \frac{\vec{\partial}}{\partial x} g = \frac{\partial f}{\partial x} g$$

Observe que o argumento das funções muda numa forma similar à transformação das equações (8). É possível definir um produto tal que a equação de Schroedinger não dependente do tempo seja redefinida substituindo o produto entre o hamiltoniano do sistema e a função de onda por um produto estrela. Seja um produto Moyal definido por:

$$(f \star g)(x) = f(x) \exp \left[\frac{i\hbar \Theta_{ij}}{2} \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial x_i} \frac{\vec{\partial}}{\partial x_j} \right) \right] g(x) \quad (11)$$

Expandindo o termo exponencial em série de potências temos:

$$(f \star g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\hbar}{2} \right)^n \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} f(x) \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{j_n}} g(x) \Theta_{i_1 j_1} \dots \Theta_{i_n j_n} \quad (12)$$

Usando a relação:

$$p_i \equiv \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (13)$$

Temos que:

$$(f \star g)(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} f(\mathbf{x}) p_{j_1} \dots p_{j_n} g(\mathbf{x}) \Theta_{i_1 j_1} \dots \Theta_{i_n j_n} \quad (14)$$

Representando $f(\mathbf{x})$ por meio de sua transformada de Fourier:

$$(f \star g)(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{(2\pi)^{l/2}} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} F(\mathbf{k}) d^l k \right] p_{j_1} \dots p_{j_n} g(\mathbf{x}) \Theta_{i_1 j_1} \dots \Theta_{i_n j_n} \quad (15)$$

Onde l é a dimensão do espaço. Seja:

$$\Theta_{i_n j_n} p_{j_n} = \tilde{p}_{i_n} \quad (16)$$

Então:

$$\begin{aligned} (f \star g)(\mathbf{x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{(2\pi)^{l/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} F(\mathbf{k}) (i\mathbf{k}_{i_n} \tilde{p}_{i_n})^n g(\mathbf{x}) d^l k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{l/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right)^n e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} F(\mathbf{k}) (i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{p}})^n g(\mathbf{x}) d^l k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{l/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\mathbf{k} \cdot \left(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{p}}\right)] F(\mathbf{k}) g(\mathbf{x}) d^l k \\ &= f\left(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{p}}\right) g(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (17)$$

$$(f \star g)(\mathbf{x}) = f\left(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\Theta \cdot \mathbf{p}\right) g(\mathbf{x}) \quad (18)$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \star \psi &= H\left(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\Theta \cdot \mathbf{p}, \mathbf{p}\right) \psi \\ H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \star \psi &= H(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}) \psi = E\psi \end{aligned} \quad (19)$$

Ou seja, podemos representar a equação de Schroedinger no espaço não comutativo apenas substituindo o produto de funções comum por um produto estrela na equação para o

espaço comutativo. A equação (19) nos permite analisar os problemas de uma maneira mais generalizada do que usando a equação (9), já que não precisamos saber a dependência explícita do potencial em relação às coordenadas.

Devemos atentar para que não haja uma confusão, embora tenhamos falado em espaço de fase e usado o produto Moyal, ainda estamos em busca das funções de onda para descrever nossos sistemas, não estamos usando uma abordagem de espaço de fase, mas sim de espaço de Hilbert.

Mostramos o resultado exato de se aplicar o produto estrela entre duas funções, no entanto, expressar a exponencial da equação (11) como uma série infinita em todos os problemas a serem estudados é um processo tedioso e que deixa as equações diferenciais muito complicadas. No entanto, os efeitos de não comutatividade são muito pequenos, ou seja, em geral podemos considerar apenas os termos de primeira ordem em Θ , assim, podemos escrever o produto Moyal de duas funções como:

$$f \star g \cong fg + \frac{i\hbar}{2} \Theta_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \quad (20)$$

Essa é a ferramenta básica que usaremos para descrever os sistemas não comutativos nos capítulos a seguir.

Em [14] é analisado de forma semelhante um espaço onde haveria também não comutação de momento, e em [10] e [11] Kang Li e Jianhua Wang analisam os efeitos Aharonov-Bohm e Aharonov-Casher nesse espaço, denominado espaço de fase não comutativo. No entanto, ainda não há uma motivação concreta para se considerar tais relações, e há uma dificuldade analítica em definir um produto estrela neste caso.

3 AS EQUAÇÕES RELATIVÍSTICAS PARA A FUNÇÃO DE ONDA

Como citado anteriormente, uma das situações onde podemos encontrar a não comutatividade espacial é no caso de altas energias, nestes casos devemos considerar efeitos relativísticos, assim a equação de Schrodinger se torna imprecisa, necessitamos de uma equação que descreva os efeitos relativísticos do sistema. A seguir veremos como definir as equações para uma partícula livre no caso relativístico e como ficam as equações não comutativas nesse caso.

3.1 Os quadrivetores e a equação de Klein-Gordon

Consideremos a equação de Schroedinger para uma partícula livre:

$$-\hbar^2 \nabla^2 \psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi \quad (21)$$

Podemos interpretar essa equação como um análogo quântico para a relação clássica entre momento e energia:

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} = E \quad (22)$$

Onde o momento e energia assumem a forma dos operadores diferenciais:

$$\begin{aligned} (i)\mathbf{p} &\equiv -i\hbar \nabla \\ (ii)E &\equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned} \quad (23)$$

Em uma teoria relativística, coordenadas de espaço e tempo devem ser tratadas igualmente, assim, define-se o quadrivetor posição como:

$$x^\mu = (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (24)$$

E o quadrivetor de momento como:

$$P^\mu = (E/c, p_x, p_y, p_z) = (p^0, p^1, p^2, p^3) \quad (25)$$

Neste espaço definido pelos quadrivetores um elemento de comprimento ds é dado por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \quad (26)$$

Onde o tensor $g_{\mu\nu}$ é a chamado de métrica do espaço, nesse caso dada por:

$$g_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Seja C^μ um quadrivetor contra variante qualquer, ele pode ser relacionado com sua forma covariante através da métrica:

$$C_\nu = g_{\nu\mu}C^\mu$$

Ou:

$$C^\mu = g^{\mu\nu}C_\nu \quad (28)$$

Onde, no caso da nossa métrica:

$$g^{\mu\nu} = (g_{\nu\mu})^{-1} \equiv g^{\mu\nu} \quad (29)$$

Assim, de acordo com as relações (23) o quadrivetor do operador de momento é definido por:

$$p^\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \left(\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar \nabla \right) \quad (30)$$

O produto escalar entre dois quadrivetores é dado por:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^\mu B_\mu \quad (31)$$

Sabendo que o momento e a energia relativísticos obedecem à relação:

$$E^2 = \mathbf{p}_e^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (32)$$

Onde m é a massa de repouso e o índice e do momento indica apenas as três coordenadas espaciais. Seja:

$$\mathbf{p}^2 = p^\mu p_\mu \equiv -\hbar^2 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \quad (33)$$

Ou, de acordo com as relações (23)

$$p^\mu p_\mu \equiv \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}_t^2 = m^2 c^2 \quad (34)$$

Baseado na equação acima e na analogia apresentada anteriormente entre a equação de Schrodinger e a relação momento-energia não relativísticos definimos a equação de Klein-Gordon:

$$p^\mu p_\mu \psi = m^2 c^2 \psi \quad (35)$$

3.2 A equação de Dirac

Na época em que foi proposta, a equação de Klein-Gordon foi alvo de dúvidas quanto a sua validade, pois ela podia gerar densidades de probabilidade negativas, o que se considerava inaceitável fisicamente. Foi então que Dirac propôs em 1928 a construção de uma equação similar à equação de Schrodinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H\psi$$

Com um Hamiltoniano que fosse de primeira ordem nas derivadas espaciais, ou seja:

$$H = -i\hbar c \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) + \beta mc^2 \quad (36)$$

Ou de maneira similar, uma equação do tipo:

$$\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} \psi = mc \psi \quad (37)$$

Sendo:

$$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$$

Onde os coeficientes α , β e γ são matrizes quadradas de ordem n e a função de onda ψ é uma matriz coluna de n componentes, onde cada componente satisfaz a equação de Klein-Gordon. Seja:

$$\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} = \gamma^0 p^0 - \gamma^i p^i$$

O índice latino no somatório implícito indica que estamos somando apenas nas coordenadas espaciais, ou seja, $i=1,2,3$. Então a equação (37) escreve-se:

$$(\boldsymbol{\gamma}^0 p^0 - \boldsymbol{\gamma}^i p^i) \boldsymbol{\psi} = mc \boldsymbol{\psi} \quad (38)$$

Se aplicarmos o operador $(\boldsymbol{\gamma}^0 p^0 - \boldsymbol{\gamma}^j p^j)$ nos dois lados da equação temos:

$$(\boldsymbol{\gamma}^0 p^0 - \boldsymbol{\gamma}^j p^j)(\boldsymbol{\gamma}^0 p^0 - \boldsymbol{\gamma}^i p^i) \boldsymbol{\psi} = (\boldsymbol{\gamma}^0 p^0 - \boldsymbol{\gamma}^j p^j)(mc \boldsymbol{\psi})$$

Mas de acordo com (37), o segundo membro é igual a $m^2 c^2 \boldsymbol{\psi}$. Então para que as componentes de $\boldsymbol{\psi}$ satisfaçam (35), temos que:

$$(\boldsymbol{\gamma}^0 p^0 - \boldsymbol{\gamma}^j p^j)(\boldsymbol{\gamma}^0 p^0 - \boldsymbol{\gamma}^i p^i) \equiv \boldsymbol{p}^2 \quad (39)$$

A condição é satisfeita apenas se:

$$\boldsymbol{\gamma}^1 \boldsymbol{\gamma}^1 = \boldsymbol{\gamma}^2 \boldsymbol{\gamma}^2 = \boldsymbol{\gamma}^3 \boldsymbol{\gamma}^3 = -\boldsymbol{\gamma}^0 \boldsymbol{\gamma}^0 = \boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{\gamma}^\mu \boldsymbol{\gamma}^\nu + \boldsymbol{\gamma}^\nu \boldsymbol{\gamma}^\mu = \mathbf{0} ; \mu \neq \nu$$

Ou simplificadamente:

$$\boldsymbol{\gamma}^\mu \boldsymbol{\gamma}^\nu + \boldsymbol{\gamma}^\nu \boldsymbol{\gamma}^\mu = 2g^{\mu\nu} \boldsymbol{I} \quad (40)$$

Decorre da relação acima que os autovalores das matrizes $\boldsymbol{\gamma}^\mu$ são ± 1 para $\mu = 0$ e $\pm i$ para $\mu = 1, 2, 3$. E o traço das matrizes, que é igual à soma de seus autovalores, é nulo. Essas duas condições implicam que as matrizes $\boldsymbol{\gamma}$ devem ser de ordem par. No entanto, não é possível definir 4 matrizes de segunda ordem que satisfaçam a relação (40), assim, o menor valor possível para a ordem n das matrizes é 4. Definimos as 4 matrizes 4x4 por:

$$\begin{aligned} (i) \boldsymbol{\gamma}^0 &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ (ii) \boldsymbol{\gamma}^i &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma}_i \\ -\boldsymbol{\sigma}_i & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (41)$$

Onde os $\boldsymbol{\sigma}_i$ são as matrizes de Pauli:

$$\begin{aligned} (i) \boldsymbol{\sigma}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ (ii) \boldsymbol{\sigma}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ (iii) \boldsymbol{\sigma}_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (42)$$

Pode-se constatar por simples substituição que as matrizes (42) satisfazem (40). Assim, temos a equação de Dirac:

$$\left(i\hbar\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - mc\right)\psi = 0 \quad (43)$$

A equação (43) corresponde a quatro equações diferenciais de primeira ordem, as quatro soluções são ligadas ao grau de liberdade do spin da partícula, no entanto, tal resultado parecia estranho a princípio, se uma partícula tem spin meio, isso lhe confere dois graus de liberdade, e não quatro. Além disso, havia soluções para energias negativas, essas soluções, assim como os graus de liberdade extras, foram associadas posteriormente à existência das antipartículas. Assim sabemos, que a equação de Klein-Gordon, onde a função de onda só tem uma componente descreve partículas de spin zero, enquanto a equação de Dirac descreve as partículas de spin-meio, seguindo a mesma linha, é possível montar equações para partículas de outros spins, aumentando a ordem das matrizes.

As equações descritas descrevem o movimento livre das partículas, para inserção dos termos de interação com os potenciais, costuma-se usar um formalismo lagrangiano, não entraremos no assunto, pois o objetivo desta parte do trabalho é apenas dar ao leitor uma compreensão da estrutura da equação relativística e sua origem, no quarto capítulo apresentaremos a referência para o termo de potencial usado na descrição do efeito Aharonov-Casher. Para um estudo mais detalhado consultar [15].

3.3 O espaço não comutativo no caso relativístico

Para o espaço comutativo nesta abordagem temos então a relação de comutação entre as coordenadas:

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\hbar\Theta^{\mu\nu} \quad (44)$$

A não comutatividade temporal pode gerar problemas de causalidade e unitariedade, assim trataremos apenas as três coordenadas espaciais como não compatíveis, ou seja $\Theta^{0\nu} = \Theta^{\nu 0} = 0$. As relações (8) continuam válidas (respeitando a variância):

$$\begin{aligned} (i)\hat{x}^\mu &= x^\mu - \frac{1}{2}\Theta_{\mu\nu}p^\nu \\ (ii)\hat{p}^\mu &= p^\mu \end{aligned} \quad (45)$$

Assim, o produto Moyal será definido por:

$$(f \star g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \exp \left[\frac{i\hbar\Theta^{ij}}{2} \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial x_i} \frac{\vec{\partial}}{\partial x_j} \right) \right] g(\mathbf{x}) \quad (46)$$

Com os índices variando apenas três últimas coordenadas. Seja então a equação de movimento do sistema no espaço comutativo dada por:

$$\left(i\hbar\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \zeta(\mathbf{x}) - mc \right) \psi = \mathbf{0} \quad (47)$$

Poderemos representa-la no espaço não comutativo por:

$$\left(i\hbar\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - mc \right) \psi + \zeta(\mathbf{x}) \star \psi = \mathbf{0} \quad (48)$$

De maneira análoga ao formalismo não relativístico da equação de Schrodinger.

4 O EFEITO AHARONOV-BOHM

Proposto por Y. Aharonov e D. Bohm[16], consiste num fenômeno muito importante na compreensão da mecânica quântica por contrariar o conceito gerado na mecânica clássica de que a partícula não sofre influência de um campo sem passar na região onde ele “atua”. Mostraremos a seguir em que consiste o efeito Aharonov-Bohm num espaço comutativo, para depois calcular as correções devidas a não comutatividade. Neste capítulo nossa abordagem será não relativística.

4.1 O experimento de fenda dupla e a diferença de fase

Consideremos o experimento:

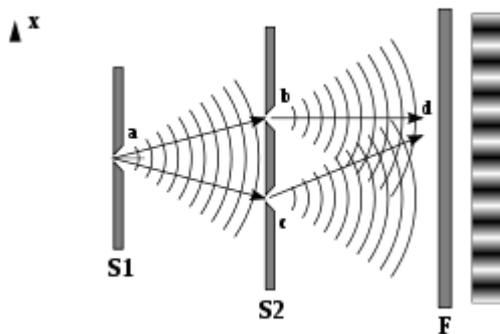


Figura 1: Adaptada de [17] <http://fisica-quantica-e-consciencia.blogspot.com.br/2008/11/mecnica-quantica.html>

Um feixe de elétrons é emitido pela fonte $S1$ e esses elétrons pelas duas fendas retangulares estreitas em $S2$, sabemos que a equação para a parte espacial da função de onda é:

$$-\frac{\hbar^2}{2}\nabla^2\psi = E\psi \quad (49)$$

As soluções separáveis são do tipo onda plana (vale lembrar que estas soluções não são normalizáveis, no entanto a solução fisicamente aceitável, o “pacote de onda”, ainda mantém um caráter oscilatório):

$$\psi = A\exp(\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (50)$$

Onde os elétrons saem em fase das fendas a e b , sejam \mathbf{r}_a e \mathbf{r}_b os vetores deslocamento entre as fendas e um ponto qualquer do anteparo, as “ondas” de elétrons vão apresentar uma diferença de fase $\Delta\varphi = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)$ que gera um padrão de interferência a ser observado no anteparo.

4.2 O efeito Aharonov-Bohm no espaço comutativo

Agora suponha que atrás da parede entre as duas fendas seja posto um solenoide fino e infinitamente longo. Sabemos da eletrodinâmica clássica que o campo magnético é nulo fora do solenoide, mas o potencial vetor magnético é dado por (com a condição de calibre $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$)[18]:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 n I R^2}{2s} \hat{\rho}, \quad s > R \quad (51)$$

O Hamiltoniano de uma partícula sobre ação de um potencial vetor magnético \mathbf{A} , segundo a referência[19] é dado por:

$$H \equiv \frac{1}{2m} (-\hbar^2 \nabla^2 + q^2 \mathbf{A}^2 + 2iq\hbar \mathbf{A} \cdot \nabla) \quad (52)$$

Temos então para equação de Schroedinger:

$$\frac{1}{2m} (-\hbar^2 \nabla^2 + q^2 \mathbf{A}^2 + 2iq\hbar \mathbf{A} \cdot \nabla) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (53)$$

O solenoide deve ser considerado opaco aos elétrons, assim como a parede, já que a análise seria totalmente diferente se os elétrons pudessem atravessá-lo.

Suponha que:

$$\psi = e^{-i\phi} \psi_o \quad (54)$$

Onde ψ_o é a solução da equação (53) quando $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, e θ é uma fase sem dependência temporal explícita. O Hamiltoniano sem a presença do potencial é:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_o = i\hbar \frac{\partial \psi_o}{\partial t} \quad (55)$$

Expressando ψ_o em função de ψ temos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2(e^{i\phi}\psi) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(e^{i\phi}\psi) \quad (56)$$

Aplicando a identidade trigonométrica a seguir na equação (56):

$$\nabla^2(fg) = f(\nabla^2g) + (\nabla^2f)g + 2(\nabla f) \cdot (\nabla g) \quad (57)$$

Temos que:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}[e^{i\phi}\nabla^2\psi + \nabla^2(e^{i\phi})\psi + 2(\nabla e^{i\phi}) \cdot (\nabla\psi)] = i\hbar e^{i\phi}\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (58)$$

Sabendo que:

$$\nabla^2(e^{i\phi}) = -e^{i\phi}(\nabla\phi)^2 + ie^{i\phi}\nabla^2\phi \quad (59)$$

E multiplicando toda a expressão (58) por $e^{-i\phi}$ pela esquerda temos:

$$\frac{1}{2m}[-\hbar^2\nabla^2\psi + \hbar^2(\nabla\phi)^2\psi + i\hbar^2\nabla^2\phi\psi + 2i\hbar^2(\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi)] = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (60)$$

Comparando as equações (60) e (53) temos que:

$$\hbar^2(\nabla\phi)^2\psi + i\hbar^2\nabla^2\phi\psi + 2i\hbar^2(\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi) = q^2\mathbf{A}^2\psi + 2iq\hbar\mathbf{A} \cdot \nabla\psi \quad (61)$$

Analisando o último termo de cada membro, vemos que se:

$$\nabla\phi = \frac{q}{\hbar}\mathbf{A} \quad (62)$$

Então, pela condição de imposta anteriormente:

$$\nabla^2\phi = \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (63)$$

E,

$$\hbar^2(\nabla\phi)^2\psi = q^2\mathbf{A}^2\psi \quad (64)$$

Logo a condição (62) é satisfeita para:

$$\phi = \frac{q}{\hbar} \int_{r_0}^r \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (65)$$

Onde \mathbf{r}_o é um ponto de referência arbitrário, assim temos uma nova fase que depende novamente do deslocamento dos elétrons, portanto a fase que irá reger o padrão de referência será agora $\Delta\varphi + \Delta\phi$, desse modo iremos observar um padrão de interferência diferente no anteparo.

Analisando de um ponto de vista clássico, a presença do solenoide não deveria afetar o comportamento dos elétrons, pois de acordo com o ponto de vista clássico, uma partícula sofre a influência de um campo eletromagnético apenas se adentrar uma região de campo não-nulo, o que se mostra diferente do ponto de vista quântico, o campo magnético do solenoide pode sim afetar os elétrons fora dele. Embora o resultado (65) sugira que o potencial vetor é mensurável e que existe um calibre fixo, esse potencial só aparece explícito no resultado exatamente por termos definido um calibre conveniente para a nossa dedução, na verdade a fase depende apenas do fluxo magnético e do caminho tomado, ela é mensurável, portanto continua sendo invariante de calibre.

O experimento proposto em 1983 por A. Tonomura[20], mostra através de uma técnica de interferometria holográfica que a diferença de fase entre elétrons que viajam numa região sem campo próxima a uma região onde há fluxo magnético gerado por ferromagnetos toroidais está de acordo com a previsão teórica de Aharonov e Bohm.

4.3 A correção para a fase de Aharonov-Bohm no caso não comutativo

Consideremos agora os efeitos da não comutatividade espacial descrita por (3), como mostrado no capítulo anterior, podemos descrever o sistema não comutativo usando coordenadas comutativas, para isso substituiremos o produto entre o hamiltoniano e a função de onda por um produto estrela definido pela equação (20). O Hamiltoniano do sistema descrito anteriormente pode ser expresso em função das variáveis canônicas por:

$$H(x_i, p_i) = \frac{1}{2m}(p_i p_i + q^2 A_i A_i - 2q p_i A_i)$$

Ou simplificadamente:

$$H(x_i, p_i) = \frac{1}{2m}(p_i - qA_i)^2 \quad (66)$$

Expressando o produto Moyal até primeira ordem em Θ :

$$H \star \psi \cong H\psi + \frac{i\hbar}{2} \Theta_{hj} \frac{\partial H}{\partial x_h} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \quad (67)$$

Para o segundo termo do segundo membro:

$$\begin{aligned} \frac{i\hbar}{2} \Theta_{hj} \frac{\partial H}{\partial x_h} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} &= \frac{i\hbar}{4m} \Theta_{hj} \frac{\partial}{\partial x_h} (p_i p_i + q^2 A_i A_i - 2q p_i A_i) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \\ &= -\frac{1}{4m} \Theta_{hj} \left(2q^2 A_i \frac{\partial A_i}{\partial x_h} - 2q p_i \frac{\partial A_i}{\partial x_h} \right) \psi \end{aligned} \quad (68)$$

Substituindo na equação(67):

$$H \star \psi = \frac{1}{2m} \left(p_i p_i + q^2 A_i A_i - 2q p_i A_i - q^2 \Theta_{hj} A_i \frac{\partial A_i}{\partial x_h} p_j + \Theta_{hj} q p_i \frac{\partial A_i}{\partial x_h} p_j \right) \psi \quad (69)$$

Observe que a equação acima sugere uma forma quadrática similar à equação (66), de fato podemos rearranjar os termos de forma que:

$$H \star \psi = \frac{1}{2m} \left(p_i - q A_i + \frac{1}{2} \Theta_{hj} q \frac{\partial A_i}{\partial x_h} p_j \right)^2 \psi + g(\Theta^2) \psi \quad (70)$$

Temos então que:

$$\frac{1}{2m} (p_i - q A_i')^2 \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (71)$$

Onde:

$$A_i' = A_i + \frac{1}{2} \Theta_{jh} \frac{\partial A_i}{\partial x_h} p_j \quad (72)$$

Assim, analogamente ao caso comutativo (observe que a dependência de A_i' nos momentos canônicos não altera o resultado (65)):

$$\phi = \frac{q}{\hbar} \int_{r_0}^r \left(A_i + \frac{1}{2} \Theta_{jh} \frac{\partial A_i}{\partial x_h} p_j \right) dx_i \quad (73)$$

Podemos expressar as componentes de momento p_j em função de um operador de velocidade definido através da equação de Heisenberg, seja o hamiltoniano no espaço não comutativo:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(p_i - qA_i + \frac{1}{2} \Theta_{hj} q \frac{\partial A_i}{\partial x_h} p_j \right)^2 \quad (74)$$

Então:

$$v_n = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, x_n] \quad (75)$$

Logo:

$$v_n = \frac{1}{2mi\hbar} [p_i p_i + q^2 A_i A_i - 2q p_i A_i, x_n] + F(\Theta) \quad (76)$$

Sabendo que $[x, p^2] = 2i\hbar p$, então:

$$v_n = \frac{1}{m} (p_n - qA_n) + F(\Theta) \quad (77)$$

Assim:

$$p_n = m[v_n - F(\Theta)] + qA_n \quad (78)$$

Esta dedução tem o mesmo resultado de se definir uma velocidade semiclássica através das equações de Hamilton-Jacobi[21]. Observe que $H(\Theta)$ possui alguns termos de primeira ordem em Θ que, a princípio, não são desprezíveis, no entanto, se substituirmos o termo p_j na fase θ de acordo com expressão acima, teremos apenas termos de segunda ordem ou superior, podemos assim desprezar $H(\Theta)$.

Temos então para a fase:

$$\phi = \frac{q}{\hbar} \left[\int_{r_o}^r A_i dx_i + \frac{1}{2} \int_{r_o}^r \Theta_{jh} \frac{\partial A_i}{\partial x_h} (mv_j + qA_j) dx_i \right] \quad (79)$$

Podemos definir um vetor $\boldsymbol{\eta}$ tal que $\Theta_{ij} = \varepsilon_{ijk} \eta_k$, onde ε_{ijk} é o tensor de Levi-Civita. Essa relação respeita a condição de antissimetria de Θ . Assim:

$$\phi = \frac{q}{\hbar} \left[\int_{r_o}^r A_i dx_i + \frac{1}{2} \int_{r_o}^r \varepsilon_{jnk} \eta_k \frac{\partial A_i}{\partial x_h} (mv_j + qA_j) dx_i \right] \quad (80)$$

Seja:

$$m\varepsilon_{jnk}\eta_k \frac{\partial A_i}{\partial x_h} v_j = m\boldsymbol{\eta} \cdot (\mathbf{v} \times \nabla A_i) \quad (81)$$

E:

$$q\varepsilon_{jnk}\eta_k \frac{\partial A_i}{\partial x_h} A_j = q\boldsymbol{\eta} \cdot (\mathbf{A} \times \nabla A_i) \quad (82)$$

Então podemos escrever (80) na forma:

$$\phi = \frac{q}{\hbar} \left[\int_{r_o}^r \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \frac{m}{2} \int_{r_o}^r \boldsymbol{\eta} \cdot (\mathbf{v} \times \nabla A_i) dx_i + \frac{q}{2} \int_{r_o}^r \boldsymbol{\eta} \cdot (\mathbf{A} \times \nabla A_i) dx_i \right] \quad (83)$$

Portanto, temos para a correção da fase de Aharonov-Bohm pelos efeitos da não comutatividade:

$$\phi_{NC} = \frac{q}{\hbar} \left[\frac{m}{2} \int_{r_o}^r \boldsymbol{\eta} \cdot (\mathbf{v} \times \nabla A_i) dx_i + \frac{q}{2} \int_{r_o}^r \boldsymbol{\eta} \cdot (\mathbf{A} \times \nabla A_i) dx_i \right] \quad (84)$$

Considerando o percurso de dois elétrons que passam por fendas diferentes até um ponto qualquer do anteparo, a diferença de fase será dada pela integral de linha no percurso formado pela diferença nas duas trajetórias (da fonte ao anteparo pelo caminho de um dos elétrons e de volta a fonte pelo caminho do segundo elétron):

$$\Delta\phi_{NC} = \frac{q}{2\hbar} \left[\oint \boldsymbol{\eta} \cdot (\mathbf{mv} \times \nabla A_i + q\mathbf{A} \times \nabla A_i) dx_i \right] \quad (85)$$

Onde:

$$\Theta_{ij} = \varepsilon_{ijk}\eta_k \quad (86)$$

O primeiro termo, que depende da velocidade, representa a correção devido à dependência de momento da coordenada não comutativa, o segundo termo aparece como consequência da relação entre o momento canônico e o momento linear na presença de um potencial dependente da velocidade.

Na referência [22], J. Gamboa, M. Loewe e J. C. Rojas apontam que o experimento de Tonamura não detectou efeitos de não comutatividade, no entanto, os autores inferem que isso dá pelo fato de que os efeitos são muito pequenos na faixa de energia usada, e que um

experimento posterior usando energias maiores poderia explicitar a diferença no padrão de interferência.

5 O EFEITO AHARONOV-CASHER

Proposto por Aharonov e Casher em 1984[23], tal efeito aponta que uma partícula neutra com momento magnético diferente de zero adquire uma fase similar à fase de Aharonov-Bohm ao viajar numa trajetória plana ao redor de um filamento infinitamente longo e uniformemente carregado. A seguir estudaremos o fenômeno no caso comutativo através da equação de Dirac e em seguida calcularemos as correções devidas a não comutatividade.

5.1 O efeito Aharonov-Casher no espaço comutativo

Por conveniência usaremos para este capítulo o sistema de unidades $\hbar = c = 1$. Neste sistema, a equação de movimento para uma partícula neutra de spin meio com momento de dipolo magnético não nulo μ (neste caso é uma propriedade intrínseca da partícula ligada ao spin) viajando num campo eletromagnético estático é dada por [9]:

$$\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{1}{2}\mu\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - m \right) \psi = 0 \quad (87)$$

Onde $F^{\mu\nu}$ são as componentes do tensor de campo eletromagnético dado por:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (88)$$

E $\sigma_{\mu\nu}$ é a matriz definida por:

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad (89)$$

Na ausência de campo magnético temos que:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= \sigma_{01}F^{01} + \sigma_{02}F^{02} + \sigma_{03}F^{03} + \sigma_{10}F^{10} + \sigma_{20}F^{20} + \sigma_{30}F^{30} \\ &= 2(\sigma_{01}E_x + \sigma_{02}E_y + \sigma_{03}E_z) \end{aligned} \quad (90)$$

Usando a relação (89) temos:

$$\sigma_{0i} = \frac{i}{2}(\gamma_0\gamma_i - \gamma_i\gamma_0) = -i\gamma_i\gamma_0 \quad (91)$$

Portanto (90) pode ser reescrita como:

$$\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2i\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{E}\gamma_0 \quad (92)$$

E a equação de movimento fica:

$$\left(i\boldsymbol{\gamma}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \mu i\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{E}\gamma_0 - m \right) \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} \quad (93)$$

Analogamente ao caso Aharonov-Bohm, vamos supor que:

$$\boldsymbol{\psi} = e^{af} \boldsymbol{\psi}_0 \quad (94)$$

Onde \mathbf{a} é uma matriz, f uma fase escalar independente do tempo e $\boldsymbol{\psi}_0$ a solução para a equação de Dirac (43). Para $\boldsymbol{\psi}_0$ temos:

$$\left(i\boldsymbol{\gamma}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) \boldsymbol{\psi}_0 = \mathbf{0} \quad (95)$$

Em termos de $\boldsymbol{\psi}$:

$$\left(i\boldsymbol{\gamma}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) (e^{-af} \boldsymbol{\psi}) = \mathbf{0} \quad (96)$$

Multiplicando por e^{af} pela esquerda e aplicando as derivadas:

$$\left(ie^{af} \boldsymbol{\gamma}_\mu e^{-af} \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ie^{af} \boldsymbol{\gamma}_i e^{-af} \mathbf{a} \frac{\partial f}{\partial x_i} - m \right) \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} \quad (97)$$

Comparando (97) e (93), a solução do tipo (94) é válida se:

$$\begin{aligned} (i)\mu\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{E}\gamma_0 &= \boldsymbol{\gamma}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathbf{a} \\ (ii)\mathbf{a}\boldsymbol{\gamma}_\nu &= \boldsymbol{\gamma}_\nu \mathbf{a} \end{aligned} \quad (98)$$

Seja $\mathbf{a} = \{a_{\mu\nu}\}$, vamos analisar a expressão (98ii) para os quatros casos realizando os produtos de matrizes:

$$\begin{aligned}
\nu = 0) \quad & \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & -a_{02} & -a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{20} & -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{30} & -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix} \\
\nu = 1) \quad & \begin{pmatrix} -a_{03} & -a_{02} & a_{01} & a_{00} \\ -a_{13} & -a_{12} & a_{11} & a_{10} \\ -a_{23} & -a_{22} & a_{21} & a_{20} \\ -a_{33} & -a_{32} & a_{31} & a_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{10} & -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{00} & -a_{01} & -a_{02} & -a_{03} \end{pmatrix} \\
\nu = 2) \quad & \begin{pmatrix} -a_{03} & a_{02} & a_{01} & -a_{00} \\ -a_{13} & a_{12} & a_{11} & -a_{10} \\ -a_{23} & a_{22} & a_{21} & -a_{20} \\ -a_{33} & a_{32} & a_{31} & -a_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{30} & -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{00} & -a_{01} & -a_{02} & -a_{03} \end{pmatrix} \\
\nu = 3) \quad & \begin{pmatrix} -a_{02} & a_{03} & a_{00} & -a_{01} \\ -a_{12} & a_{13} & a_{10} & -a_{11} \\ -a_{22} & a_{23} & a_{20} & -a_{21} \\ -a_{32} & a_{33} & a_{30} & -a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{30} & -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \\ -a_{00} & -a_{01} & -a_{02} & -a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Comparando termo a termo, a única solução possível para a matriz \mathbf{a} é um múltiplo da identidade. Porém, esse resultado não satisfaz a relação (98i), como é possível constatar por substituição. Isso acontece porque o efeito Aharonov-Casher ocorre apenas para um movimento bidimensional, assim, se houver um vínculo onde a partícula se move apenas no plano xy , temos que:

$$\begin{aligned}
(i) a_{00} &= a_{30} \\
(ii) a_{11} &= a_{22} \\
(iii) a_{\mu\nu} &= 0 ; \mu \neq \nu
\end{aligned} \tag{99}$$

Uma possível representação para a matriz \mathbf{a} é:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma_3 \end{pmatrix} \tag{100}$$

Substituindo em (98i) e comparando os argumentos temos:

$$\begin{aligned}
(i) \mu \left(i \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \right) &= E_x - iE_y \\
(ii) \mu \left(i \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} \right) &= E_x + iE_y
\end{aligned} \tag{101}$$

Ou seja:

$$\begin{aligned} (i) \frac{\partial f}{\partial x} &= i\mu E_y \\ (ii) \frac{\partial f}{\partial y} &= -i\mu E_x \end{aligned} \quad (102)$$

Ou, simplificadamente:

$$\nabla f = -i\mu(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \quad (103)$$

Dessa maneira, considerando uma trajetória fechada no plano xy , temos para a fase de Aharonov-Casher:

$$\phi_{AC} = \mu \begin{pmatrix} \sigma_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma_3 \end{pmatrix} \oint (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{r} \quad (104)$$

Observações experimentais foram feitas sobre o efeito em [24] usando um interferômetro cristalino de nêutrons.

5.2 A correção para a fase de Aharonov-Casher no caso não comutativo

No espaço não comutativo, a equação de movimento é dada por:

$$\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \mu i\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{E} \boldsymbol{\gamma}_0 - m \right) \star \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} \quad (105)$$

$$\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) \boldsymbol{\psi} - (\mu i\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{E} \boldsymbol{\gamma}_0) \star \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} \quad (106)$$

$$\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) \boldsymbol{\psi} - \left[\mu i\boldsymbol{\gamma} \cdot \left(\mathbf{E} - \frac{i}{2} \Theta_{ij} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \boldsymbol{\gamma}_0 \right] \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} \quad (107)$$

Assim, podemos escrever:

$$\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \mu i\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{E}' \boldsymbol{\gamma}_0 - m \right) \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} \quad (108)$$

Onde $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{2}\Theta_{ij}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial x_i}p^j$. Então, analogamente ao caso comutativo, a fase de Aharonov-Casher é dada por:

$$\phi_{AC} = \mu \begin{pmatrix} \sigma_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma_3 \end{pmatrix} \oint (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}') \cdot d\mathbf{r} \quad (109)$$

Como apontado em [11], das referências [23] e [25] é possível escrever um hamiltoniano para o sistema de Aharonov-Casher na forma:

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} + \mu\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E})^2 - \frac{\mu^2\mathbf{E}^2}{2m} \quad (110)$$

Analogamente ao caso de Aharonov-Bohm definiremos o operador de velocidade pela equação(75):

$$v_n = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}, x_n] = \frac{1}{m}[p_n + \mu(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E})_n] + F(\Theta) \quad (111)$$

Na forma contravariante:

$$p^n = mv^n - \mu(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E})^n \quad (112)$$

Substituindo em (109) temos:

$$\phi_{AC} = \mu \begin{pmatrix} \sigma_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma_3 \end{pmatrix} \left\{ \oint (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{r} + \frac{1}{2}\Theta_{ij} \oint \hat{\mathbf{k}} \times \left[\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial x_i}mv^j - \mu(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E})^j \right] \cdot d\mathbf{r} \right\} \quad (113)$$

Ou seja, a correção não comutativa é dada por:

$$\phi_{ACNC} = \frac{1}{2}\Theta_{ij}\mu \begin{pmatrix} \sigma_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma_3 \end{pmatrix} \oint \hat{\mathbf{k}} \times \left[\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial x_i}mv^j - \mu(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E})^j \right] \cdot d\mathbf{r} \quad (114)$$

Assim como no caso Aharonov-Bohm, temos um termo dependente da velocidade e um termo que surge da relação entre o momento linear e o momento canônico.

CONCLUSÃO

No curso deste trabalho fizemos uma revisão dos conceitos básicos da mecânica quântica não-comutativa e de sua aplicação nos efeitos Aharonov-Bohm e Aharonov-Casher.

Vimos que é possível expressar os operadores não comutativos de posição em termos de posições comutativas e dos momentos canônicos. Assim podemos construir nosso formalismo sem a necessidade de analisar fatores como a continuidade das coordenadas.

Vimos que o produto Moyal pode ser inserido nas equações de movimento do espaço comutativo para representar a equação de movimento do espaço não comutativo.

Calculamos as correções não comutativas para as fases de Aharonov-Bohm e Aharonov-Casher, para os dois casos temos um termo dependente apenas do fluxo magnético ou do campo elétrico, e outro termo dependente de velocidade. Ainda não foram observados experimentalmente os efeitos da não comutatividade mas espera-se que em breve experimentos com maior grau de precisão usando partículas de maior energia possam comprovar tais efeitos.

REFERÊNCIAS

- [1] W. Heisenberg, Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik, *Z. Phys.* 43 (1927) 172–198.
- [2] Physical instances of noncommuting coordinates, Jackiw, R. *Nucl.Phys.Proc.Suppl.* 108 (2002) 30-36, *Phys.Part.Nucl.* 33 (2002) S6-S11
- [3] Hartland S. Snyder, Quantized Space-Time, *Phys. Rev.* 38 (1947) 38-41
- [4] Lecture 0: Lorentz Invariance and Conventions. Disponível em <http://sites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic792163.files/00-Lorentz.pdf> acessado em 12 de dezembro de 2014 às 13 horas e 33 minutos.
- [5] N. Seiberg and E. Witten, String Theory and Noncommutative Geometry, *JHEP* 9909:032 (1999).
- [6] Doplicher, Sergio; Fredenhagen, Klaus; Roberts, John E. The quantum structure of spacetime at the Planck scale and quantum fields. *Communications in Mathematical Physics* 172 (1995), no. 1, 187-220.
- [7] Weyl, H. (1927). "Quantenmechanik und Gruppentheorie". *Zeitschrift für Physik* 46: 1–46
- [8] M. Chaichian, A. Demichev, P. Presnajder, M.M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu. Aharonov-Bohm Effect in Noncommutative Spaces. *Phys. Lett.B* 527 (2002), 149-154
- [9] Noncommutative quantum mechanics and the Aharonov-Casher effect - Mirza, B. *et al.* *Eur.Phys.J.* C32 (2004) 583-586
- [10] Kang Li, Sayipjamal Dulat, The Aharonov-Bohm Effect in Noncommutative Quantum Mechanics *Eur.Phys.J.C*46 (2006), 825-828
- [11] Kang Li, Sayipjamal Dulat, The topological AC effect on noncommutative phase space, *Eur.Phys.J.C*50 (2007), 1007-1011
- [12] H.J. Groenewold, On the Principles of elementary quantum mechanics, *Physica* 12 (1946) 405-460.
- [13] Thomas L Curtright, Cosmas K Zachos, Quantum Mechanics in Phase Space, *Asia Pacific Physics Newsletter*, V1, Iss 1, May 2012, 37-46

- [14] Kang Li, Jianhua Wang, Chiyi Chen, Representation of Noncommutative Phase Space. Mod. Phys. Lett. A Vol. 20, No. 28 (2005) 2165-2174.
- [15] W. Greiner, Relativistic Quantum Mechanics Wave Equations, Springer, Third edition (2000).
- [16] Y. Aharonov, D. Bohm. Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory, Phys. Rev. 115 (1959), 485.
- [17] Dualidade Partícula Onda, disponível em:
<http://fisica-quantica-e-consciencia.blogspot.com.br/2008/11/mecanica-quantica.html> Acessado em 12 de dezembro de 2014 às 14 horas e 27 minutos.
- [18] Griffiths, David J. Introduction to Electrodynamics, Pearson Prentice Hall, Third Edition (1999), 238.
- [19] Griffiths, David J. Mecânica Quântica, Pearson Prentice Hall (2011), 284.
- [20] A. Tonomura, Observation of Aharonov-Bohm Effect by Electron Holography. Phys. Rev. Lett. 48 (1983), 1443.
- [21] Herbert Goldstein, Charles P. Poole, John L. Safko, Classical Mechanics, Addison Wesley (2000), 337.
- [22] J. Gamboa, M. Loewe, J.C. Rojas, Noncommutativity and the Aharonov-Bohm Effect, arXiv:hep-th/0101081
- [23] Y. Aharonov and A. Casher, Topological Quantum Effects for Neutral Particles. Phys. Rev. Lett. 53 (1984), 320.
- [24] A. Cimmino, G. I. Opat, A. G. Klein, H. Kaiser, S. A. Werner, M. Arif, and R. Clothier Observation of the topological Aharonov-Casher phase shift by neutron interferometry, Phys. Rev. Lett. 63 (1989), 380.
- [25] C. R. Hagen, Exact equivalence of spin-1/2 Aharonov-Bohm and Aharonov-Casher effects, Phys. Rev. Lett. 64 (1990), 2347.