UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

Jobson de Queiroz Oliveira

GRÁFICOS RADIAIS COMPLETOS SOBRE $\mathbb{S}^{n+1}$

Fortaleza
2007

Jobson de Queiroz Oliveira

GRÁFICOS RADIAIS COMPLETOS SOBRE $\mathbb{S}^{n+1}$

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

Fortaleza
2007

O47g Oliveira, Jobson de Queiroz
Gráficos Radiais Completos Sobre $\mathbb{S}^{n+1}$

Jobson de Queiroz Oliveira. - Fortaleza: 2007.

32f. Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

1- Geometria Diferencial CDD 516.36

folha de aprovação

Dedico este trabalho aos meus amigos

Agradecimentos

Gostaria de agradecer inicialmente ao professor Abdênago Barros por ter aceitado me orientar e pela paciência durante este período.

Ao professor Pacelli Bessa, por seus conselhos.

Ao professor Luquésio Jorge por mostrar que Matemática deve ser um prazer e não um trabalho.

À Andréa pela eficiência e paciência.

Aos amigos: Alisson, Carpegiani, Cícero, Darlan Girão, Darlan Portela, Feliciano, Gleydson, Ivy, Jânio, Joserlan, Luiza, Michel, Paulo, Ronny, Silvana, Tony.

A minha turma de Mestrado pelo apoio.

A CAPES pelo apoio financeiro.

"O rio atinge seus objetivos porque aprendeu a contornar obstáculos."
(Lao-Tsé)

Resumo

Seja $\mathbb{S}^{n+1}$ a esfera euclidiana n+1-dimensional e $p_0 \in \mathbb{S}^{n+1}$. Dado $r > 0$, considere o conjunto $S^n(r) = \{q \in \mathbb{S}^{n+1}; \operatorname{dist}(q, p_0) = r\}$. Seja $M^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ gráfico radial completo sobre $S^n(r)$. Demonstraremos que se M^n tem curvatura média constante não nula então M^n será totalmente umbílico. Na demonstração serão utilizados a primeira fórmula integral de Minkowski, juntamente com um resultado devido a Sousa (2004), que fornece uma expressão para o Laplaciano da função suporte da imersão $x : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O estudo de superfícies compactas com curvatura média constante no espaço euclidiano tridimensional foi um dos principais problemas da Geometria Diferencial Clássica. Um dos primeiros resultados acerca desse problema, devido a Delanay, diz que toda superfície de revolução compacta com curvatura média constante é uma esfera redonda. Em 1853, Jellet mostrou que toda superfície estrelada $M \subset \mathbb{R}^3$, com curvatura média constante é uma esfera redonda. Posteriormente, Hopf mostrou que se uma superfície $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ com curvatura média constante é homeomorfa a uma esfera, então Σ também é uma esfera redonda. A generalização das curvaturas média e gaussiana para uma hipersuperfície M^n no espaço euclidiano (n+1)-dimensional são as r-ésimas curvaturas médias $H_r, r = 1, \ldots, n$, que são definidas pelos r-ésimos polinômios simétricos elementares avaliados nas curvaturas principais de M^n. Posteriormente, Süss (1952) mostrou que se uma hipersuperfície M^n no espaço euclidiano é compacta, convexa, com H_r constante, para algum $r = 1, \ldots, n$, então M^n é uma esfera. A demonstração de Süss baseia-se nas fórmulas integrais de Minkowski, no entanto, tal demonstração não se aplica a hipersuperfícies compactas quaisquer. Alexandrov (1956) mostrou que toda hipersuperfície compacta mergulhada no espaço euclidiano que tem curvatura média constante é uma esfera redonda. Ros (1987) estendeu o resultado de Alexandrov mostrando que a esfera redonda é a única hipersuperfície compacta, mergulhada no espaço euclidiano com curvatura escalar constante. Em seguida, Ros (1988) estendeu este resultado para qualquer curvatura de ordem superior, mostrando que a esfera é a única hipersuperfície compacta mergulhada no espaço euclidiano com H_r constante. Após este trabalho, Montiel e Ros (1991) obtiveram um resultado semelhante para o espaço hiperbólico e para a esfera euclidiana, sendo que, para esta última, com a hipótese adicional de a hipersuperfície estar totalmente contida num hemisfério. A hipótese de estar totalmente contida num hemisfério é essencial pois um produto de esferas gera hipersuperfícies da esfera euclidiana com curvatura média constante. Revisitando o teorema de Jellett, Barros e Sousa (2006) estenderam tal teorema para hipersuperfícies da esfera. Nosso objetivo principal neste trabalho é apresentar uma demonstração desse resultado. Mais precisamente temos o seguinte teorema:

Teorema 1 *Seja $M^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ um gráfico radial completo sobre uma esfera de raio R contida em $\mathbb{S}^{n+1}$. Se M^n tem curvatura média constante não nula então M^n é uma esfera geodésica.*

Na sua demonstração será utilizada a primeira fórmula integral de Minkowski, juntamente com um corolário do teorema a seguir, obtido por Sousa (2004).

Teorema 2 *Seja $\overline{M}$ uma variedade riemanniana de dimensão $n+1$ e V um campo conforme em $\overline{M}$. Seja M uma hipersuperfície de $\overline{M}$ e η um campo de vetores unitário, normal a M em $\overline{M}$. Defina $f : M \to \mathbb{R}$ por*
$f(p) = \langle V(p), \eta(p)\rangle$ então

$$\Delta f = -n\langle V, \operatorname{grad} H\rangle - (\operatorname{Ric}(\eta) + |A_\eta|^2) f - n(\psi H + \eta[\psi]),$$

onde H é a curvatura média de M, $\operatorname{grad} H$ é o gradiente de H, $|A_\eta|$ é a norma da *segunda forma fundamental de M, ψ é o fator de conformidade do campo V e Δ é o Laplaciano de M na métrica induzida por $\overline{M}$.*

Corolário 1 *Seja $x : M \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica com curvatura média constante H de uma variedade riemanniana orientável M. Considere o campo tangente $V = S_c \mathrm{grad}\,\rho$ então*

$$\Delta f = -|A_\eta|^2 f - nH\theta_c,$$

onde Δ é o Laplaciano em M, η é normal a imersão, $|A_\eta|$ é a norma da segunda forma fundamental A_η da imersão, $\rho : M \to \mathbb{R}$ é a distância intrínseca a um ponto $p_0 \in M^n$ fixado, $S_c = \sin\rho$ e $\theta_c = \cos\rho$.

Finalmente, vamos enunciar a primeira fórmula integral de Minkowski que sera útil na demonstração do teorema 1:

Teorema 3 (Primeira Fórmula Integral de Minkowski): *Seja M^n uma variedade riemanniana compacta e $x : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica, então*

$$\int_M H g dA = -\int_M \theta_c dA,$$

onde H e g são a curvatura média e a função suporte da imersão.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos e resultados básicos que serão utilizados ao longo deste trabalho.

Denotaremos por M^n, ou simplesmente M, uma variedade riemanniana de dimensão n. A conexão de M será denotada por ∇ e $\langle\, , \rangle$ representará sua métrica. Designaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $D(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M. Se $p \in M$, então T_pM denotará o espaço tangente a M em p. Enunciaremos agora um importante teorema, cuja prova pode ser encontrada em do Carmo (1988).

Teorema 4 (Levi-Civita) *Seja M^n uma variedade riemanniana. Então existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, as seguintes condições:*

a) ∇ é livre de torção, isto é, $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$;

b) ∇ é compatível com a métrica, isto é,

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle.$$

2.1 Curvaturas

Nesta secção relembraremos definições e propriedades básicas a respeito das curvaturas seccional, escalar e de Ricci.

O tensor curvatura R de uma variedade riemanniana M^n é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação linear $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z \ ,$$

$\forall Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Verifica-se que o tensor curvatura satisfaz as seguintes propriedades para quaisquer $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$

a) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle + \langle R(Y,Z)X, T\rangle + \langle R(Z,X)Y, T\rangle = 0$ (1ªIdentidade de Bianchi);

b) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(Y,X)Z, T\rangle$;

c) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(X,Y)T, Z\rangle$;

d) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = \langle R(Z,T)X, Y\rangle$.

Lema 1 *Sejam M uma variedade riemanniana e $p \in M$. Defina uma aplicação trilinear $R' : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$ por*
$\langle R'(X,Y,W), Z\rangle = \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle Y, W\rangle\langle X, Z\rangle, \forall\ X, Y, Z, W \in T_pM.$
Então M tem curvatura seccional constante c se e somente se $R = cR'$, onde R é a curvatura de M.

Seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bidimensional do espaço tangente T_pM e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Definimos a curvatura seccional K de M em p segundo σ por

$$K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2},$$

onde $|x \wedge y|^2 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle^2$.

Seja $X \in T_pM$ um vetor unitário. Tomemos $\{z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n = X\}$ uma base ortonormal de T_pM.

A curvatura de Ricci de M na direção de X em p é definida por

$$\mathrm{Ric}_p(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\langle R(X, z_i)X, z_i\rangle \ .$$

A curvatura escalar de M em p é definida como

$$S(p) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Ric}_p(z_j) \ .$$

2.2 Gradiente, Divergente e Laplaciano

Nesta secção serão provados alguns resultados básicos envolvendo o gradiente e o Laplaciano de funções reais de classe C^∞ definidos em M e a divergência de campos de vetores em M.

Seja $f \in D(M)$. O gradiente de f é o campo de vetores em M, definido pela seguinte condição

$$\langle \mathrm{grad}\ f, X\rangle = X(f) \ , \ \forall X \in \mathfrak{X}(M) \ .$$

Decorre da definição que se $f, g \in D(M)$ então:

1. $\mathrm{grad}\ (f + g) = \mathrm{grad}\ f + \mathrm{grad}\ g$;

2. $\mathrm{grad}\ (f.g) = f\mathrm{grad}\ g + g\mathrm{grad}\ f$.

Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. A divergência de X é a função $Div\, X : M \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$Div\, X(p) = \mathrm{tr}\,[Y(p) \mapsto (\nabla_Y X)(p)].$$

As propriedades abaixo decorrem diretamente da definição.

1. $Div\,(X+Y) = Div\,X + Div\,Y$;

2. $Div\,(f.X) = f.Div\,X + \langle \text{grad } f, X\rangle$,

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e qualquer $f \in D(M)$.

Seja $f \in D(M)$. O Laplaciano de f é o operador $\Delta : D(M) \longrightarrow D(M)$ definido por

$$\Delta f = Div\,(\text{grad } f).$$

Usando as propriedades do gradiente e divergente, prova-se facilmente que

1. $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$;

2. $\Delta(f.g) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \text{grad } f, \text{grad } g\rangle$,

para quaisquer $f, g \in D(M)$.

Proposição 1 *Sejam $(x_1, \ldots, x_n)$ um sistema de coordenadas locais em M e $f \in D(M)$. Então*

$$\text{grad } f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle$ e (g^{ij}) é a inversa da matriz (g_{ij}).

Prova: Como grad $f \in \mathfrak{X}(M)$ e $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ constitui uma base, podemos escrever

$$\text{grad } f = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \ .$$

Portanto

$$\left\langle \text{grad } f, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i g_{ij} = \sum_{i=1}^{n} g_{ij} a_i. \tag{2.1}$$

Assim considerando as matrizes $F = \left(\langle \text{grad } f, \frac{\partial}{\partial x_j}\rangle\right)_{n\times 1}$, $A = (a_k)_{n\times 1}$ e $G = (g_{ij})_{n\times n}$, decorre que $F = GA$. Então sendo G invertível temos $A = G^{-1}F$ e com isso um elemento genérico de A se escreve como

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} g^{ij} f_j \ ,$$

onde $f_j = \langle \text{grad } f, \frac{\partial}{\partial x_j}\rangle = \frac{\partial f}{\partial x_j}$. Portanto

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} g^{ij} f_j\right]\frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

■

Proposição 2 *Sejam $(x_1, \ldots, x_n)$ um sistema de coordenadas locais em M e $X = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ um campo de vetores em M. Então*

$$div\, X = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} a_j \Gamma_{ij}^{i} + \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right],$$

onde Γ_{ij}^{k} são os símbolos de Christoffel da métrica em M.

Prova: Por definição, $div\, X = \text{tr}[Y \mapsto \nabla_Y X]$. Então

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\left[\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = \sum_{j=1}^{n} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\left[a_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left[a_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right]. \end{aligned}$$

Faça $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k}\frac{\partial}{\partial x_k}$, para obter

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X &= \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n} a_j \Gamma_{ij}^{k}\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} a_j \Gamma_{ij}^{k} + \frac{\partial a_k}{\partial x_i}\right]\frac{\partial}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Como $div\, X = \sum_{i,l=1}^{n} g^{il} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X, \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle$, temos que

$$div\, X = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} a_j \Gamma_{ij}^{i} + \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right].$$

■

Proposição 3 *Sejam $(x_1, \ldots, x_n)$ um sistema de coordenadas locais em M e $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ um campo de vetores em M. Então*

$$div\, X = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i \sqrt{g}),$$

onde $g = det\, (g_{ij})$.

Prova: Temos, inicialmente, que

$$\Gamma_{ij}^{i} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{li} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij} \right] g^{li}.$$

Então

$$\begin{aligned} 2 \sum_{ij=1}^{n} a_j \Gamma_{ij}^{i} &= \sum_{i,j=1}^{n} a_j \left\{ \sum_{l=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{li} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij} \right] g^{li} \right\} \\ &= \sum_{ij,l=1}^{n} a_j \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} g^{li} + \sum_{i,j,l=1}^{n} a_j \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} g^{li} - \sum_{i,j,l=1}^{n} a_j \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} g^{li}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Trocando i por l na primeira parcela, temos que (2.2) se reduz a

$$2 \sum_{i,j,l=1}^{n} a_j \Gamma_{ij}^{i} = \sum_{i,j,l=1}^{n} a_j \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} g^{li} = \sum_{i,j,l=1}^{n} a_i \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} g^{li}. \tag{2.3}$$

Logo, usando (2.3) e a Proposição 2, temos

$$\begin{aligned} div\, X &= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{a_i}{2} \sum_{j,l=1}^{n} g^{lj} \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{a_i}{2} \sum_{j,l=1}^{n} g^{jl} \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right]. \end{aligned}$$

Usando o fato de que $\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl} \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x_i}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
div\, X &= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{a_i}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{a_i}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial a_i}{\partial x_i} \sqrt{g} + a_i \frac{(\sqrt{g})}{\partial x_i} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (a_i \sqrt{g})}{\partial x_i} \ .
\end{aligned}
$$

■

Proposição 4 *Sejam* $(x_1, \ldots, x_n)$ *um sistema de coordenadas locais em* M *e* $f \in D(M)$. *Então*

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \ .$$

Prova: Por definição temos que

$$\Delta f = Div\,(\text{grad } f) \ .$$

Assim, pela Proposição 1, temos que

$$\text{grad } f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \ .$$

Usando a Proposição 3, obtemos que

$$
\begin{aligned}
\Delta f &= Div\,(\text{grad } f) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\sum_{j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \sqrt{g} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right),
\end{aligned}
$$

onde $g = det\,(g_{ij})$.

■

Seja $f \in D(M)$. Definimos o Hessiano de f em $p \in M$ como o operador linear $Hess\, f : T_pM \longrightarrow T_pM$, dado por

$$(Hess\, f)Y = \nabla_Y \text{grad } f \ , \ \forall\, Y \in T_pM \ .$$

Podemos considerar $Hess\, f$ como um tensor tal que para cada par de campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$(Hess\, f)(X, Y) = \langle (Hess\, f)(X), Y \rangle.$$

2.3 Campos de Jacobi em variedades com curvatura constante

Seja M^n uma variedade riemanniana e $p \in M^n$ e seja $\gamma : [0, a] \to M^n$ uma geodésica de M^n. Um campo de vetores J ao longo de γ é um campo de Jacobi se vale:

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0, \forall\, t \in [0, a]$$

Tome agora M variedade riemanniana com curvatura seccional constante c, $\gamma : [0, a] \to M$ geodésica normalizada em M e J um campo de Jacobi ao longo de γ, normal a γ'.

Segue do lema 1 da seção 2.1 e do fato de $|\gamma'| = 1$ que $R(\gamma', J)\gamma' = cJ$.

De fato, para todo campo T ao longo de γ temos

$$\langle R(\gamma', J)\gamma', T \rangle = c\{\langle \gamma', \gamma' \rangle \langle J, T \rangle - \langle \gamma', T \rangle \langle J, \gamma' \rangle\} = c\langle J, T \rangle.$$

Donde $R(\gamma', J)\gamma' = cJ$.

Temos então que a equação de Jacobi se escreve

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + cJ = 0.$$

Seja $\omega(t)$ um campo paralelo ao longo de γ com $\langle\gamma'(t),\omega(t)\rangle = 0$ e $|\omega(t)| = 1$. Temos que o campo $J(t)$ dado por

$$J(t) = \begin{cases} t\omega(t), & \text{se} \quad c = 0 \\ \dfrac{\sin(\sqrt{c}t)}{\sqrt{c}}\omega(t), & \text{se} \quad c > 0 \\ \dfrac{\sinh(\sqrt{-c}t)}{\sqrt{-c}}\omega(t), & \text{se} \quad c < 0 \end{cases}$$

é solução da equação de Jacobi, com condições as iniciais $J(0) = 0$ e $J'(0) = \omega(0)$. Portanto, os campos de Jacobi numa variedade riemanniana com curvatura seccional constante são da forma $J(t)$ acima.

2.4 Imersões Isométricas

Considere (M^n, g) e $(\overline{M}^m, \overline{g})$ variedades riemannianas. Uma aplicação diferenciável $x : M \longrightarrow \overline{M}$ é uma imersão se $dx_p : T_pM \longrightarrow T_{x(p)}\overline{M}$ for injetiva $\forall\, p \in M$. Se, além disso, x for um homeomorfismo sobre $x(M)$, com $x(M)$ munido com a topologia induzida por $\overline{M}$, diz-se que x é um *mergulho*. Quando $x^*\overline{g} = g$, ou seja, a métrica em M é o *pull-back*, via x da métrica em $\overline{M}$, dizemos que x é *imersão isométrica*. Por simplicidade, denotaremos g e $\overline{g}$ por $\langle\, ,\, \rangle$. Assim $x^*\overline{g} = g$ significa que

$$\langle z, w\rangle_p = \langle dx_p(z), dx_p(w)\rangle_{x(p)} \ .$$

As conexões riemannianas de M e $\overline{M}$ serão denotados por ∇ e $\overline{\nabla}$, respectivamente. Considerando $x : M \longrightarrow \overline{M}$ uma imersão isométrica temos que x é localmente um mergulho, ou seja, $\forall\, p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $x(U) \subset \overline{M}$ é subvariedade de $\overline{M}$. Isso nos permite, para efeito de simplificação, identificar cada ponto $p \in M$ com sua imagem $x(p) \in \overline{M}$

e cada vetor tangente $v \in T_pM$ com $dx_p(v) \in T_{x(p)}\overline{M}$. Desse modo temos a decomposição

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp}$$

em cada ponto $p \in M$, já que é possível estender campos de vetores definidos numa vizinhança $\overline{U}$ de $x(p)$ em $\overline{M}$. Nesse mesmo contexto prova-se que $\nabla = \overline{\nabla}^{\top}$, isto é, $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\top}$, onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\overline{X}, \overline{Y}$ são extensões de X,Y, respectivamente a $\mathfrak{X}(\overline{M})$.

Considerando $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ e $\overline{X}, \overline{Y}$ extensões de X,Y a $\mathfrak{X}(x(U))$ temos que a aplicação $A_\eta : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \longrightarrow \mathfrak{X}(U)^{\perp}$, dada por

$$\alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y,$$

é bilinear e simétrica, onde $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$ é o conjunto dos campos de vetores normais a $x(U) \approx U$. Assim, dado $\eta \in (T_pM)^{\perp}$, definimos uma forma bilinear e simétrica $H_\eta : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$H_\eta(X, Y) = \langle \alpha(X, Y), \eta \rangle \ .$$

A forma quadrática II^{η}, definida em T_pM por

$$II^{\eta}(X) = H_\eta(X, X),$$

é denominada *segunda forma fundamental* da imersão x segundo o vetor normal η. À forma H_η podemos associar um operador linear auto-adjunto $A_\eta : T_pM \longrightarrow T_pM$, satisfazendo

$$\langle A_\eta(X), Y \rangle = H_\eta(X, Y) \ .$$

Por abuso de linguagem também designaremos A_η por *segunda forma fundamental* da imersão x segundo o vetor normal η.
Assim, é fácil provar que, se $p \in M$, $X \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$, então

$$A_\eta(X) = -(\overline{\nabla}_X\overline{\eta})^{\top} \ ,$$

onde $\overline{\eta}$ é uma extensão local de η normal à M. A fórmula de Gauss é um resultado fundamental no estudo das imersões e pode ser encontrada em do Carmo (1988), que estabelece o seguinte:

Teorema 5 (Equação de Gauss) *: Sejam $p \in M$, X, Y vetores ortonormais de T_pM. Então*

$$K(X,Y) - \overline{K}(X,Y) = \langle \alpha(X,X), \alpha(Y,Y) \rangle - |\alpha(X,Y)|^2 \ ,$$

onde $K(X,Y)$ e $\overline{K}(X,Y)$ denotam, respectivamente, as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$ com relação ao plano gerado por X e Y.

Agora consideremos uma imersão $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$. Sejam $p \in M$, $\eta \in (T_pM)^{\perp}$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM para a qual A_η é diagonal. Por simplicidade denotaremos A_η por A, já que a codimensão da imersão é um. Temos $A(e_i) = k_ie_i$, os auto-valores $k_i's$ são as curvaturas principais de M em p. Então

$$H(e_i, e_i) = k_i \ .$$

Portanto a equação de Gauss se escreve como

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = k_ik_j, \forall\, i \neq j \ .$$

Em particular, se a curvatura $\overline{K}$ de $\overline{M}$ for constante e igual a c, obtemos

$$K(e_i, e_j) = c + k_ik_j.$$

Lema 2 *Seja $x : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão isométrica então $|A|^2 \geq nH^2$ e vale a igualdade se e somente se M é umbílica.*

Prova: Considere os vetores $v_1 = (k_1, k_2, \ldots, k_n), v_2 = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$, então, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos $\langle v_1, v_2 \rangle^2 \leq |v_1|^2 |v_2|^2$ e vale a igualdade se e somente se $v_1 = kv_2$, com $k \in \mathbb{R}$. Donde obtemos

$$\frac{1}{n}(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)^2 \leq k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_n^2.$$

Mas $|A|^2 = k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_n^2$ e $nH^2 = n(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} k_j)^2 = \frac{1}{n}(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)^2$ donde segue o resultado. Se vale a igualdade então $k_j = k$, $\forall j = 1, \ldots, n$ isto é, M é umbílica. ∎

Lema 3 *Na esfera euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$ vale a seguinte relação*

$$Hess\rho(X,Y) = \frac{cos\rho}{sen\rho}[\langle X,Y\rangle - X\rho Y\rho],$$

onde ρ é a distância intrínseca a um ponto $p_0 \in \mathbb{S}^{n+1}$ fixado e $sen\rho$ é solução da equação $y'' + y = 0$ com condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

Prova: Seja $p_0 \in \mathbb{S}^{n+1}$ fixado e considere a função $\rho : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por $\rho = dist_{\mathbb{S}^{n+1}}(p, p_0)$ então temos que $\rho = \theta$ onde θ é o ângulo formado pelos vetores p e p_0, portanto

$$cos\rho = \frac{\langle p, p_0\rangle}{|p||p_0|} = \langle p, p_0\rangle.$$

Dado um campo de vetores X em $\mathbb{S}^{n+1}$ temos

$$Xcos\rho = -sen\rho X\rho.$$

Por outro lado,

$$Xcos\rho = X\langle p, p_0\rangle = \langle X, p_0\rangle.$$

Donde $\langle X, p_0\rangle = -sen\rho X\rho$.

Derivando agora com relação a um outro campo de vetores arbitrário Y

em $\mathbb{S}^{n+1}$, obtemos

$$\begin{aligned} YXcos\rho &= Y(-sen\rho X\rho) \\ &= -sen\rho YX\rho - cos\rho Y\rho X\rho. \end{aligned}$$

Mas

$$Y\langle X, p_0\rangle = \langle \overline{\nabla}_Y X, p_0\rangle = \langle \nabla_Y X + \alpha(X,Y), p_0\rangle,$$

onde $\overline{\nabla}$ é a conexão do $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\alpha(X,Y)$ a segunda forma fundamental de $\mathbb{S}^{n+1}$ vista como hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$.
Na esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ sabemos que $\alpha(X,Y) = -\langle X, Y\rangle p$ daí temos

$$-sen\rho YX\rho - cos\rho Y\rho X\rho = \langle \nabla_Y X - \langle X, Y\rangle\rangle p, p_0\rangle,$$

isto é,

$$-sen\rho YX\rho - cos\rho X\rho Y\rho = \langle \nabla_Y X, p_0\rangle - \langle X, Y\rangle cos\rho.$$

Note que $\langle \nabla_Y X, p_0\rangle = \nabla_Y X\langle p, p_0\rangle = \nabla_Y X cos\rho = -sen\rho\nabla_Y X\rho$.
Substituindo na expressão acima, obtemos

$$-sen\rho YX\rho - cos\rho X\rho Y\rho = -sen\rho\nabla_Y X\rho - \langle X, Y\rangle cos\rho.$$

Donde

$$cos\rho[\langle X, Y\rangle - X\rho Y\rho] = -sen\rho\nabla_Y X\rho + sen\rho YX\rho.$$

Como $Hess\rho(X,Y) = XY\rho - \nabla_X Y\rho = \langle \nabla_X \text{grad}\,\rho, Y\rangle$, vem que

$$-sen\rho\nabla_Y X\rho + sen\rho YX\rho = sen\rho Hess\rho(X,Y).$$

Logo,

$$Hess\rho(X,Y) = \frac{cos\rho}{sen\rho}[\langle X, Y\rangle - X\rho Y\rho],$$

como queríamos demonstrar.

■

Capítulo 3

A Primeira Fórmula Integral de Minkowski

3.1 Função Suporte

No que segue Q_c^{n+1} denotará uma variedade riemanniana $(n+1)$-dimensional, completa, simplesmente conexa com curvatura seccional constante c.
Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica e tome $p_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, defina $\chi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ por $\chi(p) = p - p_0$ onde aqui fazemos a identificação $x(M) \approx M$.
Defina $g : M^n \to \mathbb{R}$ a função suporte da imersão χ por

$$g(p) = \langle \chi(p), N(p) \rangle,$$

onde N é o vetor unitário normal a M em p e $\langle , \rangle$ é o produto interno canônico do $\mathbb{R}^{n+1}$.
Desejamos agora estender as noções de vetor posição e função suporte para variedades com curvatura seccional constante não-nula. Para isso utilizaremos a noção de campos de Jacobi em variedades com curvatura constante.

Sejam $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to Q_c^{n+1}$ uma geodésica normalizada tal que $\gamma(0) = p_0$, $E(t)$ campo paralelo ao longo de γ com $\langle \gamma'(t), E(t) \rangle = 0$, $|E(t)| = 1$ e $J(t) = S_c(t)E(t)$ o campo de Jacobi normal ao longo de γ que se anula em $t = 0$. Fixado $p_0 \in Q_c^{n+1}$ considere a função $\rho : Q_c^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por $\rho(p) = \operatorname{dist}(p, p_0)$ onde dist é a distância intrínseca de Q_c^{n+1} e denote por $\operatorname{grad} \rho$ o gradiente da função ρ em Q_c^{n+1}.
Se $c = 0$ temos, fixando $p_0 = (a_1, \ldots, a_{n+1})$

$$\rho(p) = \operatorname{dist}(p, p_0) = ||p - p_0|| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_{n+1} - a_{n+1})^2}.$$

Como $c = 0$ então $\operatorname{grad} \rho = (\frac{\partial \rho}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \rho}{\partial x_{n+1}})$ onde

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_j} = \frac{1}{2}||p - p_0||^{-\frac{1}{2}} 2(x_j - a_j) = \frac{(p_j - a_j)}{||p - p_0||^{\frac{1}{2}}} = \frac{p_j - a_j}{\rho(p)}.$$

Logo

$$\operatorname{grad} \rho(p) = (\frac{p_1 - a_1}{\rho(p)}, \ldots, \frac{p_{n+1} - a_{n+1}}{\rho(p)}) = \frac{\chi(p)}{\rho(p)} : \chi(p) = \rho(p) \operatorname{grad} \rho(p).$$

Por analogia com o caso $c = 0$ definiremos o campo de vetores χ como $\chi(p) = S_c(\rho(p)) \operatorname{grad} \rho(p)$. Este campo é chamado de vetor posição com origem p_0.
Seja M^n uma variedade riemanniana orientável e $x : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica. Como estamos identificando $M^n \approx x(M^n)$ então podemos definir, para todo p em M^n, o vetor $N(p)$, normal a $M^n \approx x(M^n)$ em $x(p)$. Novamente por analogia com o caso $c = 0$, definimos a função $g : M^n \to \mathbb{R}$ por:

$$g(p) = \langle \chi(p), N(p) \rangle,$$

onde $\chi(p) = S_c(\rho)\mathrm{grad}\,\rho$ é o vetor posição com origem $p_0 \in M^n$ e $\langle , \rangle$ é o produto interno dado pela métrica h de Q_c^{n+1}.

A função g definida acima é chamada de função suporte da imersão x.

Uma interpretação geométrica para a função g no caso $c = 0$ é que $|g(p)|$ é a distância de p_0 ao hiperplano tangente a $x(M)$ em $x(p)$.

De fato, note que se $c = 0$ então temos $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ daí

$$\begin{aligned} |g(p)| &= |\langle \chi(p), N(p)\rangle| \\ &= \frac{|\langle \chi(p), N(p)\rangle|}{|N(p)|^2}|N(p)| \\ &= |Proj_N^{\chi(p)}(p)| \\ &= \mathrm{dist}\,(p_0, T_pM), \end{aligned}$$

ou seja, $|g(p)|$ é a distância de p_0 ao hiperplano tangente a $\chi(M)$ em $\chi(p)$.

No caso $c > 0$ podemos assumir, sem perda de generalidade, que Q_c^{n+1} é a esfera de raio $\frac{1}{\sqrt{c}}$ no $\mathbb{R}^{n+2}$. Neste caso, $|g(p)|$ é igual a distância euclidiana do ponto p_0 ao hiperplano que contém a hipersuperfície totalmente geodésica tangente a $\chi(M)$ em $\chi(p)$.

Inicialmente, note que podemos escrever

$$p_0 = \cos(\sqrt{c}\rho(p))p - \frac{\sin(\sqrt{c}\rho(p))}{\sqrt{c}}\mathrm{grad}\,\rho.$$

De fato, sejam $p, p_0 \in \mathbb{S}_{\frac{1}{\sqrt{c}}} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ então

$$p_0 = ap + b\frac{\mathrm{grad}\,\rho}{|\mathrm{grad}\,\rho|}, \langle p, p_0\rangle = \frac{1}{c}\cos\theta,$$

onde $\langle , \rangle$ é o produto interno canônico do $\mathbb{R}^{n+2}$. Logo

$$\frac{1}{c}\cos\theta = \langle p, p_0\rangle = a\frac{1}{c} + b\langle p, \mathrm{grad}\,\rho\rangle$$

e

$$\frac{1}{c} = \langle p_0, p_0\rangle = a^2\frac{1}{c} + 2ab\langle p, \frac{\mathrm{grad}\,\rho}{|\mathrm{grad}\,\rho|}\rangle + b^2\langle \frac{\mathrm{grad}\,\rho}{|\mathrm{grad}\,\rho|}, \frac{\mathrm{grad}\,\rho}{|\mathrm{grad}\,\rho|}\rangle.$$

Sendo $\langle p, \operatorname{grad} \rho\rangle = 0$ então segue que

$$a = \cos\theta = \cos(\sqrt{c}\rho(p))$$
$$b^2 = \frac{1}{c}(1-\cos^2\theta) = \frac{1}{c}\sin^2\theta$$

Donde $b = -\frac{1}{\sqrt{c}}\sin(\sqrt{c}\rho(p))$. Logo

$$p_0 = \cos(\sqrt{c}\rho(p))p - \frac{\sin(\sqrt{c}\rho(p))}{\sqrt{c}}\operatorname{grad}\rho,$$

daí

$$\begin{aligned}
\langle p, N(p)\rangle &= \langle\cos(\sqrt{c}\rho(p))p - \frac{\sin(\sqrt{c}\rho(p))}{\sqrt{c}}\operatorname{grad}\rho, N(p)\rangle \\
&= \cos(\sqrt{c}\rho(p))\langle p, N(p)\rangle - \frac{\sin(\sqrt{c}\rho(p))}{\sqrt{c}}\langle\operatorname{grad}\rho, N(p)\rangle \\
&= \frac{\sin(\sqrt{c}\rho(p))}{\sqrt{c}}\langle\operatorname{grad}\rho, N(p)\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\langle p_0, N(p)\rangle &= -\frac{\sin(\sqrt{c}\rho(p))}{\sqrt{c}}\langle\operatorname{grad}\rho, N(p)\rangle \\
&= -\langle\chi(p), N(p)\rangle \\
&= -g(p).
\end{aligned}$$

E então $|g(p)| = |-g(p)| = |\langle p_0, N(p)\rangle|$ que é a distância euclidiana de p_0 ao hiperplano gerado por $N(p)$ que contém a hipersuperfície totalmente geodésica tangente a $\chi(M)$ em $\chi(p)$.

Definição 1 *Uma subvariedade $M \subset Q_c^{n+1}$ é dita totalmente geodésica se para todo $v \in TM, \gamma_v$, geodésica de Q_c^{n+1} que passa por p e tem vetor velocidade v em p está totalmente contida em M ou, equivalentemente, se toda geodésica de M é goedésica de Q_c^{n+1}.*

3.2 Laplaciano da Função Suporte

Definição 2 *Seja $\omega \in T^r(M)$, isto é, ω é um r-tensor covariante e $V \in \mathfrak{X}(M)$. A derivada de Lie de ω com respeito a V, denotada por $L_V\omega$ é definida por:*
$(L_V)\omega(X_1, \ldots, X_r) = V[\omega(X_1, \ldots, X_r) - \sum_{j=1}^{r} \omega(X_1, \ldots, [V, X_j], \ldots, X_r)$.

Exemplo 1 *Se ω é a métrica $\langle , \rangle$ de $\overline{M}$ então:*

$$\begin{aligned} L_V\omega(X, Y) &= V[\langle X, Y\rangle] - \langle X, [V, Y]\rangle - \langle [V, X], Y\rangle \\ &= \langle \nabla_V X, Y\rangle + \langle \nabla_V Y, X\rangle - \langle X, [V, Y]\rangle - \langle [V, X], Y\rangle \\ &= \langle \nabla_V X - [V, X]\rangle + \langle \nabla_V Y - [V, Y], X\rangle \\ &= \langle \nabla_X V, Y\rangle + \langle \nabla_Y V, X\rangle, \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos o fato de ∇ ser simétrica.

Definição 3 *Seja $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, dizemos que V é conforme se existe $\psi \in C^\infty(\overline{M})$ tal que $L_V\langle , \rangle = 2\psi\langle , \rangle$.*

O próximo teorema, provado inicialmente em Sousa (2003) será um dos ingrediantes principais na demosntração do nosso principal resultado.

Teorema 6 *Seja $\overline{M}$ uma variedade riemanniana de dimensão $n+1$ e V um campo conforme em $\overline{M}$. Seja M uma hipersuperfície de $\overline{M}$ e η um campo de vetores unitário, normal a M em $\overline{M}$. Defina $f : M \to \mathbb{R}$ por*
$f(p) = \langle V(p), \eta(p)\rangle$ então

$$\Delta f = -n\langle V, \operatorname{grad} H\rangle - (\operatorname{Ric}(\eta) + |A_\eta|^2)f - n(\psi H + \eta[\psi]),$$

onde H é a curvatura média de M, $\operatorname{grad} H$ é o gradiente de H, $|A_\eta|$ é a norma da segunda forma fundamental de M, ψ é o fator de conformidade do campo V e Δ é o Laplaciano de M na métrica induzida por $\overline{M}$.

Corolário 2 *Seja $x : M \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica com curvatura média constante H de uma variedade riemanniana orientável M. Considere o campo tangente $V = S_c\mathrm{grad}\,\rho$ então*

$$\Delta f = -|A_\eta|^2 f - nH\theta_c,$$

onde Δ é o Laplaciano em M, η é normal a imersão, $|A_\eta|$ é a norma da segunda forma fundamental A_η da imersão, $\rho : M \to \mathbb{R}$ é a distância intrínseca a um ponto $p_0 \in M^n$ fixado, $S_c = \sin\rho$ e $\theta_c = \cos\rho$.

Prova: Para usar o teorema acima devemos mostrar que o campo V dado por $V = S_c\mathrm{grad}\,\rho$ é conforme, ou seja, devemos mostrar que existe uma função $\psi \in C^\infty(M)$ tal que $L_V\langle,\rangle(X,Y) = 2\psi\langle X,Y\rangle, \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M)$.
Sabemos que $L_V(X,Y) = \langle\overline{\nabla}_X V, Y\rangle + \langle\overline{\nabla}_Y V, X\rangle$ e sendo $S_c = S_c(\rho)$ então

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X S_c\mathrm{grad}\,\rho &= S_c\overline{\nabla}_X\mathrm{grad}\,\rho + X(S_c)\mathrm{grad}\,\rho \\
&= S_c\overline{\nabla}_X\mathrm{grad}\,\rho + \theta_c(X\rho)\mathrm{grad}\,\rho.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
L_V\langle,\rangle(X,Y) &= \langle\overline{\nabla}_X S_c\mathrm{grad}\,\rho, Y\rangle + \langle\overline{\nabla}_Y S_c\mathrm{grad}\,\rho, X\rangle \\
&= S_c\langle\overline{\nabla}_X\mathrm{grad}\,\rho, Y\rangle + 2\theta_c\langle\mathrm{grad}\,\rho, X\rangle\langle\mathrm{grad}\,\rho, Y\rangle + S_c\langle\overline{\nabla}_Y\mathrm{grad}\,\rho, X\rangle \\
&= S_c\langle\overline{\nabla}_X\mathrm{grad}\,\rho, Y\rangle + 2\theta_c X(\rho)Y(\rho) + S_c\langle\overline{\nabla}_Y\mathrm{grad}\,\rho, X\rangle.
\end{aligned}$$

Mas

$$\langle\overline{\nabla}_X\mathrm{grad}\,\rho, Y\rangle = \frac{\theta_c}{S_c}[\langle X,Y\rangle - X\rho Y\rho].$$

Daí

$$\begin{aligned}
L_V\langle,\rangle(X,Y) &= S_c\{\frac{\theta_c}{S_c}[\langle X,Y\rangle - X(\rho)Y(\rho)] + \frac{\theta_c}{S_c}[\langle X,Y\rangle - X(\rho)Y(\rho)]\} + 2\theta_c X(\rho)Y(\rho) \\
&= \theta_c\langle X,Y\rangle - \theta_c X(\rho)Y(\rho) + \theta_c\langle X,Y\rangle - \theta_c X(\rho)Y(\rho) + 2\theta_c X(\rho)Y(\rho) \\
&= 2\theta_c\langle X,Y\rangle.
\end{aligned}$$

Logo $V = S_c \operatorname{grad} \rho$ é conforme.
Pelo teorema acima temos que

$$\Delta f = -f(\operatorname{Ric}_p(\eta) + |A_\eta|^2) - n\langle \operatorname{grad} H, V\rangle - n(\psi H + \eta[\psi])$$

Sendo $\operatorname{grad} H = 0$ e $V = S_c \operatorname{grad} \rho$ conforme vem que

$$\begin{aligned}\Delta f &= -(\operatorname{Ric}_p(\eta) + |A_\eta|^2)f - n(\psi H + \eta[\psi]) \\ &= -(\operatorname{Ric}_p(\eta) + |A_\eta|^2)f - n(\psi H + \eta[\psi]).\end{aligned}$$

Note que $\eta[S_c'(\rho)] = S_c''(\rho)\langle \operatorname{grad} \rho, \eta\rangle$. Como $S_c'' + cS_c = 0$ e $f = \langle S_c \operatorname{grad} \rho, \eta\rangle$ obtemos $\eta[S_c'(\rho)] = -cf$.
Portanto $n(\eta[S_c'(\rho)]) = -cnf$.
Mas $\operatorname{Ric}_p(\eta) = \sum_{j=1}^n \langle R(\eta, e_j)\eta, e_j\rangle$, onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é base ortonormal de T_pM.
Daí

$$\operatorname{Ric}_p(\eta) = \sum_{j=1}^n \langle R(\eta, e_j)\eta, e_j\rangle = \sum_{j=1}^n c = nc$$

donde

$$\operatorname{Ric}_p(\eta) f = ncf.$$

Temos então que

$$\Delta f = -|A_\eta|^2 f - nH\theta_c.$$

■

Teorema 7 (Primeira Fórmula Integral de Minkowski): *Seja M^n uma variedade riemanniana compacta e $x : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica. Então*

$$\int_M HgdA = -\int_M \theta_c dA,$$

onde Hé a curvatura média da imersão.

Prova: Seja X o vetor posição com origem em $p_0 \in M$ e $\{E_1, \ldots, E_n\}$ referencial ortonormal de TM. Denote por Div_M o divergente em M e por $X^\top$ e $X^\perp$

as componentes tangente e normal do vetor X.
Note que $\langle X^\perp, E_j\rangle = 0, \forall j$, daí, sendo $\overline{\nabla}$ a conexão riemanniana de Q_c^{n+1} vem que
$0 = E_j\langle X^\perp, E_j\rangle = \langle \overline{\nabla}_{E_j} X^\perp, E_j\rangle + \langle \overline{\nabla}_{E_j} E_j, X^\perp\rangle$, isto é,

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\nabla}_{E_j} X^\perp, E_j\rangle &= -\langle \overline{\nabla}_{E_j} E_j, X^\perp\rangle \\
&= -\langle (\overline{\nabla}_{E_j} E_j)^\top + (\overline{\nabla}_{E_j} E_j)^\perp, X^\perp\rangle \\
&= -\langle (\overline{\nabla}_{E_j} E_j)^\perp, X^\perp\rangle \\
&= -\langle (\overline{\nabla}_{E_j} E_j)^\perp, X\rangle.
\end{aligned}$$

Sabemos que $Div_M(X) = tr(Y(p) \mapsto \overline{\nabla}_Y X(p))$. Logo

$$\begin{aligned}
Div_M(X^\top) &= \sum_{j=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{E_j} X^\top, E_j\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{E_j} (X - X^\perp), E_j\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{E_j} X, E_j\rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{E_j} X^\perp, E_j\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{E_j} X, E_j\rangle + \sum_{j=1}^{n} \langle (\overline{\nabla}_{E_j} E_j)^\perp, X\rangle.
\end{aligned}$$

Afirmação: $\sum_{j=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{E_j} X, E_j\rangle = n\theta_c$, onde $X = S_c(\rho)\mathrm{grad}\,\rho$.
Prova: Inicialmente, note que

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{E_j} S_c(\rho)\mathrm{grad}\,\rho &= S_c(\rho)\overline{\nabla}_{E_j}\mathrm{grad}\,\rho + E_j(S_c(\rho))\mathrm{grad}\,\rho \\
&= S_c(\rho)\overline{\nabla}_{E_j}\mathrm{grad}\,\rho + S_c'(\rho)\langle \mathrm{grad}\,\rho, E_j\rangle \mathrm{grad}\,\rho.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\nabla}_{E_j} S_c(\rho)\mathrm{grad}\,\rho, E_j\rangle &= \langle S_c(\rho)\overline{\nabla}_{E_j}\mathrm{grad}\,\rho + S_c'(\rho)\langle \mathrm{grad}\,\rho, E_j\rangle \mathrm{grad}\,\rho, E_j\rangle \\
&= S_c(\rho)\langle \overline{\nabla}_{E_j}\mathrm{grad}\,\rho, E_j\rangle + \theta_c\langle \mathrm{grad}\,\rho, E_j\rangle^2.
\end{aligned}$$

Temos então que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\langle\overline{\nabla}_{E_j}X, E_j\rangle &= \sum_{j=1}^{n}\langle\overline{\nabla}_{E_j}S_c(\rho)\mathrm{grad}\,\rho, E_j\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n}\{S_c(\rho)\langle\overline{\nabla}_{E_j}\mathrm{grad}\,\rho, E_j\rangle + \theta_c(\rho)\langle\mathrm{grad}\,\rho, E_j\rangle^2\} \\
&= S_c(\rho)\sum_{j=1}^{n}\langle\overline{\nabla}_{E_j}\mathrm{grad}\,\rho, E_j\rangle + \theta_c(\rho)\sum_{j=1}^{n}\langle\mathrm{grad}\,\rho, E_j\rangle^2.
\end{aligned}$$

Usando que

$$\langle\overline{\nabla}_V\mathrm{grad}\,\rho, W\rangle = \frac{\theta_c}{S_c}(\langle V, W\rangle - V\rho W\rho), \forall\, V, W \in \mathfrak{X}(Q_c^{n+1}),$$

obtemos em particular

$$\langle\overline{\nabla}_{E_j}\mathrm{grad}\,\rho, E_j\rangle = \frac{\theta_c}{S_c}(1 - \langle\mathrm{grad}\,\rho, E_j\rangle^2).$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\langle\overline{\nabla}_{E_j}X, E_j\rangle &= S_c(\rho)\sum_{j=1}^{n}\langle\overline{\nabla}_{E_j}\mathrm{grad}\,\rho, E_j\rangle + \theta_c(\rho)\sum_{j=1}^{n}\langle\mathrm{grad}\,\rho, E_j\rangle^2 \\
&= S_c(\rho)\sum_{j=1}^{n}(\frac{\theta_c}{S_c}(1 - \langle\mathrm{grad}\,\rho, E_j\rangle^2) + \theta_c(\rho)\sum_{j=1}^{n}\langle\mathrm{grad}\,\rho, E_j\rangle^2 \\
&= S_c(\rho)\sum_{j=1}^{n}\frac{\theta_c}{S_c} \\
&= n\theta_c.
\end{aligned}$$

Note que $\langle \sum_{j=1}^{n} (\overline{\nabla}_{E_j} E_j)^{\perp}, \eta \rangle = nH$ pois

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{n} tr(A_\eta(E_j)) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \langle A_\eta(E_j), E_j \rangle \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \langle B(E_j, E_j), \eta \rangle \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \langle (\overline{\nabla}_{E_j} E_j)^{\perp}, \eta \rangle \\ &= \langle \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (\overline{\nabla}_{E_j} E_j)^{\perp}, \eta \rangle. \end{aligned}$$

Logo $nH\eta = \sum_{j=1}^{n} (\overline{\nabla}_{E_j} E_j)^{\perp}$. Temos então que

$$\begin{aligned} Div_M(X^{\top}) &= \sum_{j=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{E_j} X, E_j \rangle + \sum_{j=1}^{n} \langle (\overline{\nabla}_{E_j} E_j)^{\perp}, X \rangle \\ &= n\theta_c + \langle \sum_{j=1}^{n} (\overline{\nabla}_{E_j} E_j)^{\perp}, X \rangle \\ &= n\theta_c + \langle nH\eta, X \rangle \\ &= n\theta_c + nHg. \end{aligned}$$

Integrando sobre M^n obtemos

$$\int_M Div_M(X^{\top}) dA = \int_M n(\theta_c + Hg) dA.$$

Pelo Teorema da Divergência

$$\int_M Div(X^{\top}) dA = \int_{\partial M} \langle X^{\top}, N \rangle dA = 0,$$

pois M é compacta sem bordo. Daí

$$0 = \int_M Div_M(X^{\top}) dA = \int_M n(\theta_c + Hg) dA.$$

Logo,

$$\int_M (\theta_c + Hg)dA = 0,$$

ou seja

$$\int_M HgdA = -\int_M \theta_c dA.$$

■

Capítulo 4

Gráficos Radiais

4.1 Gráficos Radiais

Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um gráfico radial sobre $\mathbb{S}^n(r)$ e considere $X : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n(r)$ parametrização de $\mathbb{S}^n(r)$ e $Y : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to M^n$ parametrização de M^n. Se $\sigma(u_1, \ldots, u_n) = |Y(u_1, \ldots, u_n)| > 0$ então $Y = \sigma X$. Considere agora a função $f : M^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(Y) = \langle Y, N_Y \rangle$, onde N_Y é um campo unitário normal à M^n.

Observe que $Y_j = \dfrac{\partial Y}{\partial u_j} = \sigma X_j + \sigma_j X$. Daí

$$\langle \sigma X, \frac{(\sigma X_1 + \sigma_1 X) \wedge \ldots \wedge (\sigma X_n + \sigma_n X)}{|Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_n|} \rangle = \langle \sigma X, \frac{(\sigma X_1) \wedge \ldots \wedge (\sigma X_n)}{|Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_n|} \rangle.$$

Portanto

$$\begin{aligned} f(Y) &= \langle \sigma X, \frac{Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_n}{|Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_n|} \rangle \\ &= \frac{|X_1 \wedge \ldots \wedge X_n|}{|Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_n|} \sigma^{n+1} \langle X, N_X \rangle \\ &= -\frac{|X_1 \wedge \ldots \wedge X_n|}{|Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_n|} \sigma^{n+1} \frac{1}{r} \langle X, X \rangle \\ &= -\frac{|X_1 \wedge \ldots \wedge X_n|}{|Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_n|} \sigma^{n+1} \frac{1}{r} < 0. \end{aligned}$$

Aqui tomamos $N_X = -\frac{1}{r}X$ o campo unitário, normal à $\mathbb{S}^n(r)$ de modo que a curvatura média $H_{\mathbb{S}^n(r)}$ seja estritamente positiva.
Sejam $p_0 \in \mathbb{S}^{n+1}$ e $r > 0$ e tome o conjunto $\mathbb{S}^n(r) = \{q \in \mathbb{S}^{n+1}; \operatorname{dist}(q, p_o) = r\}$. Seja então $M^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ gráfico radial sobre $\mathbb{S}^n(r)$. Supondo $M^n \subset \mathbb{S}^{n+1} - [p_0, -p_0]$, considere a projeção estereográfica $\mathcal{P} : \mathbb{S}^{n+1} - [p_0] \to \mathbb{R}^{n+1}$ e $V_{\mathbb{S}^{n+1}}$ o campo vetor posição com base p_0 em $\mathbb{S}^{n+1}$. Então temos o seguinte lema:

Lema 4 *Nas condições acima, a função $f : M^n \to \mathbb{R}$, definida por*

$$f(p) = \langle V_{\mathbb{S}^{n+1}}(p), N_Y(p) \rangle,$$

tem sinal bem definido.

Prova: Sejam X, Y parametrizações de $\mathbb{S}^n(r)$ e M^n respectivamente. Então $\mathcal{P}(X)$ é uma esfera em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathcal{P}(Y)$ é gráfico sobre $\mathcal{P}(X)$. Como $\mathcal{P}$ é aplicação conforme então existe $e^{\phi} \in \mathcal{D}(M^n)$ tal que

$$\langle d\mathcal{P}_q V, d\mathcal{P}_q W \rangle = e^{2\phi} \langle V, W \rangle, \forall\ V, W \in T_q M^n,$$

ou seja, $d\mathcal{P}_q$ preserva o ângulo entre os vetores V e W, logo, existem funções $g_1, g_2 : \mathcal{P}(Y) \to \mathbb{R}$ contínuas, ambas positivas ou ambas negativas tais que

$$d\mathcal{P}_q(V_{\mathbb{S}^{n+1}}) = g_1 V_{\mathbb{R}^{n+1}}$$

e

$$d\mathcal{P}_q(N_Y) = g_2 N_{\mathcal{P}(Y)}.$$

Daí
$e^{2\phi} \langle V_{\mathbb{S}^{n+1}}, N_Y \rangle = \langle d\mathcal{P}_q(V_{\mathbb{S}^{n+1}}), d\mathcal{P}_q(N_Y) \rangle = \langle g_1 V_{\mathbb{R}^{n+1}}, g_2 N_{\mathcal{P}(Y)} \rangle > 0 (ou < 0)$. Como $e^{2\phi} > 0$ segue que a função f tem sinal bem-definido.

■

Passemos agora ao resultado principal deste trabalho.

Teorema 8 *Seja $M^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ um gráfico radial completo sobre o conjunto $\mathbb{S}^n(r)$ definido acima. Se M^n tem curvatura média constante não nula H então M^n é uma hipersuperfície totalmente umbílica.*

Prova: Pelo Corolário 1, do capítulo 3, considerando $f = \langle V_{\mathbb{S}^{n+1}}(p), N_Y(p)\rangle$ temos que

$$\Delta f = -|A_\eta|^2 f - nH\theta_c,$$

onde A_η é a segunda forma fundamental de M^n. Daí, integrando sobre M obtemos

$$\int_M \Delta f dA = \int_M |A_\eta|^2 f dA = -\int_M nH\theta_c dA.$$

Pelo Teorema da Divergência temos

$$\int_M \Delta f dA = 0.$$

Logo

$$\int_M |A_\eta|^2 f dA = -\int_M nH\theta_c dA.$$

Da Primeira Fórmula Integral de Minkowski vem que

$$\int_M H f dA = -\int_M \theta_c dA.$$

Multiplicando ambas por nH e usando que H é constante não nula temos

$$\int_M nH^2 f dA = -\int_M nH\theta_c dA = \int_M |A_\eta|^2 f dA.$$

Note agora que, como o sinal da função f é bem definido segue que, supondo f não negativa, temos, pelo Lema 2, que $|A_\eta|^2 f \geq nH^2 f$.
isto implica que $\int_M |A_\eta|^2 f dA \geq \int_M nH^2 f dA$.

Como vale a igualdade entre essas integrais então

$$\int_M (|A_\eta|^2 f - nH^2 f)dA = 0.$$

Conseqüentemante, pelo Lema 2 do capítulo 2 vem que M é umbílica.

∎

Referências Bibliográficas

[1] ALENCAR, H.; FRENSEL, K. Hypersurfaces whose tangent geodesics omit a nonempty set. In: LAWSON, Blaine;TENENBLAT, Keti. (Ed.). Differential Geometry: a symposium in honour of Manfredo do Carmo. New York: Longman Scientific Technical, 1991. p.1-13. (Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics, 52).

[2] ALEXANDROV, A. D. Uniqueness theorems for surfaces in the large. Vestnik Leingrad Univ, 11, p. 5-17, 1956.

[3] BARROS, A. B.; SOUSA, P. A. An extension of Jellett's theorem, preprint, 2006.

[4] do CARMO, M. P. Geometria Riemanniana. 2 ed. Rio de Janeiro : IMPA, 1988. 299 p. (Projeto Euclides).

[5] JORGE, L.; KOUTROUFIOTIS, D. An Estimate for the curvature of bounded submanifolds, American Journal of Mathematics, Baltimore, v. 103, p. 711-725, 1981.

[6] MONTIEL, Sebastián; ROS, Antonio. Compact hypersurfaces: the Alexandrov theorem for higher order mean curvature. In: LAWSON, Blaine; TENENBLAT, Keti (Ed.) Differential Geometry: symposium in honour of Manfredo do Carmo. New York: Longman Scientific

Technical, 1991. p. 278-296 (Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics, 52).

[7] ROS, Antonio. Compact hypersurfaces with constant scalar curvature and a congruence theorem. Journal of Differential Geometry, Bethlehem, vol. 27, p. 215-220, 1988.

[8] ROS, Antonio. Compact hypersurfaces with constant higher order mean curvatures. Revista Iberoamericana, v. 3, p. 447-453, 1987.

[9] SOUSA, P. A. O Laplaciano de uma função tipo suporte e aplicações, Dissertação de Mestrado, UFC, 2004.

[10] SÜSS, Wilhelm. Uber kennzeichnungen der kugeln und affinespharen durch Herrn K. P. Grotemeyer. Archiv for Mathematik, Basel, v. 3, p. 311-313, 1952.