**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**
**CENTRO DE CIÊNCIAS**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**DANIELSON BATISTA MELO FILHO**

# ANÉIS UNICAMENTE LIMPOS E ANÉIS DE GRUPO UNICAMENTE LIMPOS

**FORTALEZA**

**2017**

DANIELSON BATISTA MELO FILHO

# ANÉIS UNICAMENTE LIMPOS E ANÉIS DE GRUPO UNICAMENTE LIMPOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Anéis de Grupos.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Lucas Rodrigues
Coorientadora: Profª. Dra. Paula Murgel Veloso.

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M485a Melo Filho, Danielson Batista.
Anéis unicamente limpos e Anéis de grupo unicamente limpos / Danielson Batista Melo Filho. – 2017.
55 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2017.
Orientação: Prof. Me. Rodrigo Lucas Rodrigues.
Coorientação: Prof. Me. Paula Murgel Veloso.

1. Anéis limpos. 2. Anéis unicamente limpos. 3. Anéis booleanos. 4. Anéis de Grupo unicamente limpos. I. Título.

CDD 510

DANIELSON BATISTA MELO FILHO

ANÉIS UNICAMENTE LIMPOS E ANÉIS DE GRUPO UNICAMENTE LIMPOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Álgebra.

Aprovado em: 28 / 11 / 2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rodrigo Lucas Rodrigues (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Profª. Dra. Paula Murgel Veloso (Coorientadora)
Universidade Federal Fluminense (UFF)

Prof. Dr. Thierry Correa Petit Lobão
Universidade Federal da Bahia (UFBA)

Prof. Dr. Angelo Papa Neto
Instituto Federal do Ceará (IFCE)

Prof. Dr. Francisco da Rocha Pimentel
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À Deus, minha mãe Amelia Cardoso Pessoa, meu pai Danielson Batista Melo e minha irmã Dhara de Fátima Pessoa Melo.

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, pela vida.

Ao meus pais Amelia Pessoa e Danielson Melo pela educação recebida desde o berço. Eles são meus alicerces. Em especial, a minha mãe, minha irmã Dhara de Fátima e namorada Samia Nayara que foram ombro amigo e apoio nos muitos momentos difíceis, fizeram-me seguir em frente quando eu mesmo achava estar prestes a desistir, me proporcionaram momentos imprescindíveis de lazer e alegria, bem como equilíbrio necessário para chegar até aqui. A elas me faltam palavras para agradecer.

Aos meus tios Júnior e Josielson pelo apoio, orientação e, principalmente, por palavras de incentivo durante o início dos meus estudos. A eles me faltam palavras para agradecer.

Aos meus avós José Melo e Fátima que são a base de tudo e o motivo de sermos uma família tão unida.

Ao meu orientador, Dr. Rodrigo Lucas Rodrigues, pela ajuda, dedicação, paciência e pelo seu exemplo profissional e como pessoa.

Aos professores Paula, Thierry, Angelo Papa e Francisco Pimentel por participarem da banca e pelas valiosas sugestões para aprimoramento deste trabalho.

Também agradeço aos amigos da pós-graduação em matemática da UFC, Diego, Felipe, Hamilton, Emanoel, Rosa, Danuso e André pelas conversas despreocupadas e trocas de ideias sobre matemática e outros tantos assuntos. Essas conversas ajudaram-me a tornar mais prazerosos o convívio e a rotina da pós graduação. Em especial, meu apreço ao meu amigo Hamilton, pelas várias discussões, pelo apoio e consideração.

Agradecimentos especiais aos meus amigos, André Cipriano, Bruno Cipriano, Daniel, David, Danilo, Joel, Éder, Iunan, Jared, Douglas Cardoso, Hallysson Moreira, Adriano Brandão, Pedro Vieira, Doublas Erick, Marcelo Andrade, João Victor e Marcos Eduardo que me apoiaram nos momentos mais difíceis, em palavras e ações.

Vale lembrar, os professores Fernanda, Lev Birbrair, Othon, Cibotaru, Ernani pelos belos cursos ministrados, demonstrando grande dedicação e excelente didática.

A Andréa pela competência e agilidade.

À CAPES pelo apoio financeiro.

"O homem não teria alcançado o possível se, repetidas vezes, não tivesse tentado o impossível." (Max Weber)

**RESUMO**

As unidades e os idempotentes são elementos fundamentais para determinar a estrutura de um anel. Em particular, a decomposição de Peirce induzida por um idempotente de um anel nos auxilia a definir e classificar novos tipos de anéis. Um anel é dito limpo se todos os seus elementos podem ser escritos como a soma de um idempotente e de uma unidade. Esta noção foi motivada pelo estudo de anéis de troca por Nicholson em 1977 e está intimamente conectada com algumas outras noções importantes de anéis. Um anel é chamado unicamente limpo se a decomposição anterior é única. Tal classe de anéis foi primeiramente estudada por Anderson e Camillo em 2002 para o caso comutativo. A primeira parte desse trabalho se dedica ao estudo de anéis unicamente limpos não comutativos, feito por Nicholson e Zhou em 2004, onde provaram que a estrutura de tais anéis é muito próxima a dos anéis booleanos. A teoria de anéis de grupos ocupa um papel central no desenvolvimento da teoria de representações de grupos e atrai pesquisadores de outros ramos da matemática tais como álgebra homológica e topologia algébrica. A segunda parte da dissertação busca estudar sob que condições um anel de grupo é unicamente limpo. Tal pergunta foi respondida por Chen e Nicholson em 2006. Apesar disso, uma série de questões envolvendo anéis limpos e anéis unicamente limpos permanece em aberto.

**Palavras-chave**: Anéis limpos. Anéis unicamente limpos. Anéis booleanos. Anéis de grupos unicamente limpos.

**ABSTRACT**

Units and idempotents are key elements in determining the structure of a ring. In particular, Peirce's decomposition induced by an idempotent of a ring helps us to define and classify new types of rings. A ring is said to be clean if all its elements can be written as the sum of an idempotent and a unit. This notion was motivated by the study of exchange rings by Nicholson in 1977 and is closely connected with some other important notions of rings. A ring is called uniquely clean if the previous decomposition is unique. Such a class of rings was first studied by Anderson and Camillo in 2002 for the commutative case. The first part of this work is devoted to the study of non-commutative uniquely clean rings by Nicholson and Zhou in 2004, where they proved that the structure of such rings is very close to that of Boolean rings. Group ring theory plays a central role in the development of group representation theory and attracts researchers from other branches of mathematics such as homology algebra and algebraic topology. The second part of the dissertation seeks to study under what conditions a group ring is uniquely clean. Such a question was answered by Chen and Nicholson in 2006. Nonetheless, a number of issues involving clean rings and uniquely clean rings remain open.



**Keywords**: Clean rings. Uniquely clean rings. Boolean rings. Uniquely clean group rings.

SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

Um $R$-módulo à esquerda $M$ é dito ter a propriedade de troca ("exchange property") se para quaisquer módulo $X$ e decomposição

$$X = M' \bigoplus Y = \bigoplus_{i \in I} N_i, \text{ onde M}' \cong \text{M},$$

existirem submódulos $N_i' \subseteq N_i$, para cada $i$, tais que

$$X = M' \bigoplus (\bigoplus N_i')$$

Se esta condição é válida para conjuntos finitos $I$, o módulo é dito ter a propriedade finita de troca.

Em 1972, Warfield [17] mostrou que se $M$ é um módulo sobre um anel associativo $R$, então, $M$ tem a propriedade finita de troca se, e somente se, $M$ tem a propriedade de troca como um módulo sobre si mesmo. Ele chamou tais anéis de anéis de troca e mostrou que todo módulo projetivo sobre um anel de troca é uma soma direta de submódulos cíclicos.

Se $L$ é um subgrupo aditivo de um anel $R$, dizemos que idempotentes podem ser levantados módulo $L$ se, dado $x \in R$, com $x - x^2 \in L$, existir $e^2 = e \in R$ tal que $e - x \in L$.

Em 1977, Nicholson [10] estudou anéis em que idempotentes podem ser levantados módulo todo ideal à esquerda (ideal à direita, equivalentemente) e provou que estes coincidem com os anéis de troca de Warfield, deduzindo que um módulo projetivo $P$ tem a propriedade de troca finita se, e somente se, sempre que $P = N + M$, onde $N$ e $M$ são submódulos, existir uma decomposição $P = A \oplus B$, onde $A \subseteq N$ e $B \subseteq M$.

Jacobson definiu uma condição sobre o radical de um anel que ele chamou de "adequado para construir idempotentes". Nicholson provou que um anel é adequado se, e somente se, idempotentes podem ser levantados módulo todo ideal à esquerda e determinou uma caracterização de anéis adequados em relação a anéis com idempotentes centrais, o que deu origem à definição de anel limpo como um exemplo de uma classe de anéis de troca. Um anel é dito limpo se todo elemento é a soma de uma unidade e de um idempotente. De modo mais geral, um elemento é dito limpo se pode ser escrito como a soma de uma unidade e de um idempotente do anel.

As unidades e os idempotentes são elementos primordiais para determinar a estrutura de um anel. Um anel comutativo $R$ é von Neumann regular se, e somente se, pode ser escrito como o produto de uma unidade e de um idempotente. [Se $x = eu$, onde $e$ é um idempotente e $u$ é uma unidade, então $xu^{-1} = e$, assim $xu^{-1}x = ex = e(eu) = eu = x$.

Logo, $xu^{-1}x = x$. Reciprocamente, se $x = xyx$, então, $xy = xyxy = (xy)^2$, isto é, $e = xy$ é um idempotente e $x = eu$].

No artigo [1], Anderson e Camillo estudaram o efeito de mudar a multiplicação pela adição na condição mencionada anteriormente, isto é, eles estudaram anéis limpos comutativos. Além disso, consideraram anéis comutativos em que todo elemento tem uma representação única como soma de uma unidade e de um idempotente, o que chamaram de anéis unicamente limpos.

Um estudo de anéis unicamente limpos não comutativos é feito no artigo [12].

No segundo capítulo, definiremos os conceitos e vamos destacar propriedades primordiais sobre elementos nilpotentes, idempotentes, unidades e o radical de Jacobson, assim como resultados que os conectam, necessários para a demonstração dos principais teoremas dessa dissertação.

No capítulo 3, teremos como estudo central a classe dos anéis limpos, onde todo elemento pode ser decomposto como a soma de um elemento idempotente e de uma unidade; analisaremos alguns exemplos interessantes, assim como também propriedades importantes que serão usadas posteriormente. Vale ressaltar que vamos introduzir uma classe mais geral de anéis, os chamados anéis adequados, e veremos que os anéis limpos são uma subclasse destes anéis. Além disso, iremos apresentar uma ferramenta clássica da teoria de anéis, a Decomposição de Peirce, que vai nos permitir decompor um anel arbitrário em uma soma direta de subaneis. Um dos principais resultados deste capítulo é que o anel de matrizes de um anel limpo é limpo.

No quarto capítulo, os anéis estudados possuem uma propriedade de unicidade, a saber todo elemento se escreve de forma única como a soma de um elemento idempotente e de uma unidade. Destacamos que estudaremos condições para que um anel limpo ser um anel unicamente limpo, analisaremos resultados importantes sobre seus idempotentes e forneceremos exemplos interessantes sobre essa classe de anéis. Além disso, vamos verificar que estes anéis estão intimamente relacionados com uma classe de anéis que já foi bastante estudada, a dos anéis booleanos, cujos elementos são todos idempotentes. De fato, provaremos os seguintes resultados.

**Teorema**. *Um anel $R$ é local se, e somente se, $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$, onde $J(R)$ denota o radical de Jacobson de $R$.*

**Teorema**. *Um anel $R$ é unicamente limpo se, e somente se, $R/J(R)$ é booleano e idempotentes se levantam unicamente módulo $J(R)$. Em particular, $R$ é booleano se, e somente se, $R$ é unicamente limpo e $J(R) = \{0\}$.*

**Teorema**. *Toda imagem homomórfica de um anel unicamente limpo, também é unicamente limpa.*

Finalmente, no último capítulo, buscaremos artifícios para responder o seguinte questionamento.

**Questão**. *Se $R$ é um anel com identidade $1$ e $G$ um grupo, quando o anel de grupo $RG$ é limpo?*

Vamos responder esse questionamento dando alguns exemplos de anéis de grupos limpos, além disso, apresentar condições para que esses anéis se escrevam de forma única, isto é, anéis unicamente limpos.

Com esse intuito, o próximo teorema resume os fatos que iremos precisar.

**Teorema**. *Seja $R$ um anel com identidade $1$. As seguintes condições são satisfeitas.*

(*i*) *$R$ é local e unicamente limpo se, e somente se, $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$.*

(*ii*) *Toda imagem homomórfica de um anel unicamente limpo é também unicamente limpo.*

(*iii*) *$R$ é unicamente limpo se, e somente se, para todo $a \in R$, existe um único idempotente $e \in R$ tal que $e - a \in J(R)$.*

(*iv*) *$R$ é unicamente limpo se, e somente se, $R/J(R)$ é booleano, idempotentes se levantam módulo $J(R)$ e idempotentes de $R$ são centrais.*

Nosso principal interesse neste capítulo é determinar quando um anel de grupo $RG$ é unicamente limpo, o que vai nos conduzir aos seguintes.

**Teorema**. *Se $RG$ é unicamente limpo, então $R$ é unicamente limpo e $G$ é um $2$-grupo.*

**Teorema**. *Se $R$ é um anel unicamente limpo $G$ é um $2$-grupo localmente finito, então $RG$ é unicamente limpo.*

Todos os anéis considerados nesta dissertação são anéis associativos, não necessariamente comutativos. Além disso, $J(R)$ denota o radical de Jacobson de $R$, $U(R)$ as unidades do anel $R$ e $Z(R)$ o centro do anel $R$.

# 2 PRELIMINARES

Neste capítulo, definiremos os conceitos e propriedades preliminares necessários para a demonstração dos dois principais teoremas da nossa dissertação abordados no artigo [4].

## 2.1 Elementos nilpotentes, idempotentes e unidades

**Definição 2.1.1.** *Um elemento $x \in R$ é dito nilpotente se existir um inteiro positivo $m$ tal que $x^m = 0$. O menor $m$ que satisfaz essa propriedade é chamado índice de nilpotência de $x$.*

Note que se $x$ for um elemento nilpotente de um anel comutativo $R$, então, $rx$ é um elemento nilpotente de $R$, para todo $r \in R$. Com efeito, se existir um inteiro positivo $m$ tal que $x^m = 0$, então, $(rx)^m = r^m x^m = 0$.

**Definição 2.1.2.** *Seja $R$ um anel com elemento identidade $1$. Um elemento invertível ou uma unidade de $R$ é qualquer elemento $u \in R$ que tem um inverso multiplicativo, isto é, um elemento $v \in R$ tal que $uv = vu = 1$. Denotaremos o conjunto das unidades de $R$ por $U(R)$.*

**Proposição 2.1.1.** *Se $R$ é um anel com elemento identidade $1$ e se $x \in R$ é um elemento nilpotente, então $1 + x$ é uma unidade. De modo mais geral, se $R$ é um anel comutativo, então a soma de uma unidade e de um elemento nilpotente é uma unidade.*

**Demonstração**. Suponha que exista um inteiro positivo $m$ tal que $x^m = 0$. É fácil ver que as igualdades

$$(1 + x)(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{m-1}x^{m-1}) = 1$$

$$(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{m-1}x^{m-1})(1 + x) = 1$$

são válidas. Desse modo, $1 + x$ é uma unidade. Por outro lado, se $u$ é uma unidade e $x$ é um elemento nilpotente, então, uma vez que $u + x = u(1 + u^{-1}x)$, como $u^{-1}x$ é nilpotente, temos que $1 + u^{-1}x$ é uma unidade. Consequentemente, $u + x$ é um produto de duas unidades, sendo assim uma unidade. ■

**Definição 2.1.3.** *Um elemento $e$ de um anel $R$ é chamado idempotente se $e^2 = e$.*

**Proposição 2.1.2.** *Seja $R$ um anel com elemento identidade $1$ e com idempotente $e$. As seguintes afirmações são válidas:*

(*a*) *$1 - e$ é um elemento idempotente de $R$;*
(*b*) *$ex(1 - e)$ é nilpotente, para todo $x \in R$;*
(*c*) *Para cada $x \in R$, $e + ex(1 - e)$ é idempotente;*

($d$) $1 + ex(1 - e)$ *é uma unidade de $R$, para qualquer $x \in R$;*

($e$) $2e - 1$ *é uma unidade de $R$.*

**Demonstração**.

($a$) $(1 - e)^2 = (1 - e)(1 - e) = 1 - e - e + e^2 = 1 - 2e + e = 1 - e$;

($b$) $[ex(1 - e)]^2 = (ex - exe)(ex - exe) = exex - exexe - exex + exexe = 0$, para todo $x \in R$;

($c$) Para cada $x \in R$, note que

$$[e + ex(1 - e)]^2 = (e + ex - exe)(e + ex - exe) =$$

$$= e + ex - exe + exe + exex - exexe - exe - exex + exexe =$$

$$= e + ex - exe = e + ex(1 - e).$$

Portanto, $e + ex(1 - e)$ é um idempotente de $R$;

($d$) Uma vez que $ex(1 - e)$ é nilpotente, para todo $x \in R$, pela Proposição 2.1.1 podemos concluir que $1 + ex(1 - e)$ é uma unidade, para qualquer $x \in R$.

$e$ Note que $(2e - 1)(2e - 1) = 4e - 2e - 2e + 1 = 1$, o que implica que $2e - 1$ é uma unidade. ■

### 2.2 Radical de Jacobson

**Definição 2.2.1.** *Seja $R$ um anel. O Radical de Jacobson à esquerda de $R$, denotado por $J(R)$, é a interseção de todos os ideais maximais à esquerda.*

É uma consequência imediata da definição que $J(R)$ é um ideal à esquerda de $R$. Entretanto, vamos provar também que $J(R)$ é um ideal (bilateral) de $R$. Para isso, vamos introduzir algumas definições.

**Definição 2.2.2.** *Seja $R$ um anel. Um grupo abeliano $M$ escrito aditivamente é chamado $R$-módulo (à esquerda) se para cada elemento $a \in R$ e cada $m \in M$ temos um produto $am \in M$ tal que*

*(i)* $(a + b)m = am + bm$;

*(ii)* $a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2$;

*(iii)* $a(bm) = (ab)m$;

*(iv)* $1m = m$,

*para quaisquer $a, b \in R$ e $m,\ m_1,\ m_2 \in M$.*

De modo similar, dado um anel $R$, podemos definir $R$-módulo (à direita) considerando uma multiplicação de elementos de $M$ por elementos de $R$ do lado direito. Nesta seção, usaremos a expressão $R$-módulo como uma abreviação para $R$-módulo à esquerda.

**Definição 2.2.3.** *Um módulo $M$ sobre um anel $R$ é chamado fiel se*

$$\{x \in R \mid xm = 0, \text{ para qualquer } m \in M\} = \{0\}$$

.

Dado um $R$-módulo $M$, o *anulador* de $M$ é o conjunto

$$\operatorname{ann}(M) = \{x \in R \mid xm = 0, \text{ para todo } m \in M\}.$$

Claramente, $\operatorname{ann}(M)$ é um ideal bilateral de $R$. Além disso, se $I$ é qualquer ideal bilateral de $R$ contido em $\operatorname{ann}(M)$, $M$ pode ser visto como um $R/I$-módulo, definindo o produto por escalares como $(x + I)m = xm$, para quaisquer $x \in R$ e $m \in M$.

A seguir, sempre que dissermos que vamos considerar um $R$-módulo como um $R/I$-módulo, para algum ideal bilateral $I$ de $R$, estaremos assumindo que $I \subset \operatorname{ann}(M)$. Note que, com esta definição, os $R/I$-submódulos de $M$ coincidem com os $R$-submódulos. Em particular, uma consequência imediata é que $M$ é um $(R/\operatorname{ann}(M))$-módulo fiel, pois

$$\{x \in R/\operatorname{ann}(M) \mid xm = 0, \text{ para todo } m \in M\} =$$

$$= \{r + \operatorname{ann}(M) \mid (r + \operatorname{ann}(M))m = rm = 0, \text{ para todo } m \in M\} =$$

$$= \{r + \operatorname{ann}(M) \mid r \in \operatorname{ann}(M)\} =$$

$$= \{0 + \operatorname{ann}(M)\}$$

**Definição 2.2.4.** *Um $R$-módulo $M$ se diz simples à esquerda (à direita) se não tiver submódulos à esquerda (à direita) próprios não nulos. De modo geral, um $R$-módulo $M$ se diz simples se não tiver submódulos próprios não nulos.*

**Lema 2.2.1.** *Seja $R$ um anel com identidade $1$. Para todo $x \in R$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

$(i)$ *$x \in J(R)$;*

$(ii)$ *$1 - rx$ é invertível à esquerda, para todo $r \in R$;*

$(iii)$ *$xM = \{0\}$, para qualquer $R$-módulo $M$ simples à esquerda.*

**Demonstração**. $(i)$ implica $(ii)$: Seja $x \in J(R)$. Suponha que para algum $r \in R$, $1 - rx$ não seja invertível à esquerda. Desse modo, $(1-rx)R$ está contido em algum ideal maximal à esquerda $M$ de $R$. Porém, $1 - rx \in M$ e $x \in M$, implicando que $1 = (1 - rx) + rx \in M$, o que é uma contradição. Logo $1 - rx$ é invertível à esquerda.

$(ii)$ implica $(iii)$: Seja $M$ um $R$-módulo simples à esquerda. Suponha que para algum $m \in M$, tenhamos $xm \neq 0$. Desse modo, $Rxm = M$. Em particular, $m = rxm$, para algum $r \in R$. Assim, $rxm - m = 0$, isto é, $(1 - rx)m = 0$, por $(ii)$, podemos concluir que

$m = 0$, o que é uma contradição.

$(iii)$ implica $(i)$: Dado $M$ um ideal maximal à esquerda, podemos observar que $R/M$ é um $R$-módulo simples à esquerda, segue que usando $(iii)$, $x(R/M) = \{0 + M\}$, para todo $x \in R$. Portanto, $x \in M$. Logo, $x \in J(R)$. ■

**Definição 2.2.5.** *Um ideal bilateral $I$ de um anel $R$ é chamado primitivo à esquerda se existir um $R$-módulo $M$ que é um $R/I$-módulo fiel simples.*

**Lema 2.2.2.** *Um ideal primitivo à esquerda $I$ de um anel $R$ é a interseção de todos os ideais maximais à esquerda que o contêm.*

**Demonstração**. Seja $I$ um ideal primitivo à esquerda de $R$ e seja $M$ um $R$-módulo que é um $R/I$-módulo fiel simples. Dado um elemento $0 \neq m \in M$, defina $L_m = \{x \in R;\ xm = 0\}$. Uma vez que $M$ é um $R/I$-módulo, note que $I \subseteq \operatorname{ann}(M) \subseteq L_m$. Além disso, como $M$ é simples, temos que $Rm = M$. Portanto, a função $f\colon R \to M$ dada por $f(x) = xm$ é um epimorfismo de $R$ em $M$ com núcleo $L_m$. Consequentemente, pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, podemos concluir que $M \cong R/L_m$, o que implica que $L_m$ é um ideal maximal à esquerda, pois $M$ é simples.

Finalmente, observe que como $I \subseteq L_m$, para cada $m \in M$ tal que $m \neq 0$, segue que $I \subseteq \bigcap_{m \in M} L_m$. Por outro lado, se $x \in \bigcap_{m \in M} L_m$, então, $xm = 0$, para todo $m \in M$, o que implica que $(x + I)m = 0 + I$, para qualquer $m \in M$. Porém, em vista de que $M$ é um $R/I$-módulo fiel, sabemos que

$$\{x + I \in R/I \mid (x + I)m = 0 + I,\ \text{para todo } m \in M\} = \{0 + I\}$$

Logo, $x \in I$ e podemos concluir que $I = \bigcap_{m \in M} L_m$. ■

**Proposição 2.2.1.** *O radical de Jacobson de um anel $R$ com elemento identidade* 1 *é a interseção de todos os seus ideais primitivos à esquerda e, assim, é um ideal bilateral.*

**Demonstração** Pelo Lema 2.2.2, a interseção de todos os ideais primitivos à esquerda é uma interseção de ideais maximais à esquerda, então, em particular, contém o radical de Jacobson. Para provar a inclusão oposta, seja $L$ um ideal maximal à esquerda de $R$. Assim, $R/L$ é um $R$-módulo simples à esquerda. Seja $I = \{x \in R,\ xR \subseteq L\}$. Note que $R/L$ pode ser considerado como um $R/I$-módulo em que a multiplicação por escalares é definida por $(r + I)(x + L) = rx + L$, para quaisquer $r, x \in R$. Desse modo, com esta estrutura, $R/L$ é um $R/I$-módulo fiel simples, pois

$$= \{r_1 + I \in R/I \mid (r_1 + I)(r_2 + L) = 0 + L,\ \text{para qualquer } r_2 \in R\} =$$

$$= \{r_1 + I \in R/I \mid r_1 r_2 + L = 0 + L,\ \text{para qualquer } r_2 \in R\} =$$

$$= \{r_1 + I \in R/I \mid r_1 r_2 \in L, \text{ para qualquer } r_2 \in R\} =$$

$$= \{r_1 + I \in R/I \mid r_1 \in I\} = \{0 + I\}$$

Desse modo, $I$ é um ideal primitivo à esquerda.

Agora, dado qualquer elemento $a \in I$, sabemos que $a.1 \in aR \subseteq L$, o que mostra que $I \subseteq L$, provando que todo ideal maximal à esquerda de $R$ contém um ideal primitivo à esquerda, o que nos permite concluir que, $J(R)$ contém a interseção de todos os ideais primitivos à esquerda. Logo, $J(R)$ contém a interseção de todos os ideais primitivos à esquerda de $R$.

Finalmente, visto que ideais primitivos à esquerda são bilaterais, segue que $J(R)$ também é um ideal bilateral. ■

Como consequência da Proposição 2.2.1, podemos definir o radical de Jacobson de um anel $R$ com elemento identidade 1, como sendo a interseção de todos os ideais maximais de $R$.

**Proposição 2.2.2.** *Seja $R$ um anel com identidade 1. Para $x \in R$, as seguintes afirmações são equivalentes.*

*(a) $x \in J(R)$;*

*(b) $1 - rxs \in U(R)$, para quaisquer $r, s \in R$.*

**Demonstração**. Sejam $x, r$ *e* $s \in R$ elementos arbitrários. Suponhamos que $1 - rxs \in U(R)$, para quaisquer $r, s \in R$. Em particular, para $s = 1$, decorre que $1 - rx \in U(R)$ para todo $r \in R$. Assim, pelo Lema 2.2.1, temos que $x \in J(R)$. Reciprocamente, se $x \in J(R)$, então $rxs \in J(R)$, para todos $r, s \in R$, pois $J(R)$ é um ideal de $R$. Desse modo, pelo Lema 2.2.1 novamente, existe $u \in R$ tal que $u(1 - rxs) = 1$, isto é, $u = urxs + 1$. Usando mais uma vez que $J(R)$ é um ideal e o Lema 2.2.1, também podemos concluir que $u = 1 + u(rxs)$ é invertível à esquerda. Portanto, como $u$ também é invertível à direita, segue que $u \in U(R)$. Logo, $1 - rxs \in U(R)$. ■

A seguir, vamos determinar o radical de Jacobson de alguns anéis clássicos.

**Exemplo 2.2.1.** $J(\mathbb{Z}) = \{0\}$.

**Demonstração**. Dado $a \in J(\mathbb{Z})$, pela Proposição 2.2.2, sabemos que $1 - xa$ é uma unidade para todo $x \in \mathbb{Z}$. Assim, como as únicas unidades de $\mathbb{Z}$ são 1 e $-1$, temos que $1 - xa = 1$ ou $1 - xa = -1$, para todo $x \in \mathbb{Z}$. Em particular, tomando $x = 3$, temos que $1 - 3a = 1$ ou $1 - 3a = -1$. Assim, $a = 0$ ou $a = \dfrac{2}{3}$. Portanto $a = 0$. ■

**Exemplo 2.2.2.** *Seja $F$ um corpo e seja $F[x]$ o anel de polinômios sobre $F$. Então, $J(F[x]) = \{0\}$.*

**Demonstração**. Dado $p(x) \in J(F[x])$, pela Proposição 2.2.2, $1 - xp(x)$ é uma unidade de $F[x]$. Agora, como sabemos que os únicos elementos invertíveis de $F[x]$ são os polinômios constantes não nulos e grau$(1 - xp(x)) \geq 1$, segue que $p(x) = 0$. Portanto, $J(F[x]) = 0$. ■

**Proposição 2.2.3.** *Seja $R$ um anel qualquer. Então, $J(R/J(R)) = \{0\}$*

**Demonstração**. Observe que todo ideal maximal à esquerda de $R/J(R)$ é da forma $I/J(R)$, onde $I$ é um ideal maximal de $R$ contendo $J(R)$. Desse modo

$$J(R/J(R)) = \bigcap_{\substack{I \lhd R \\ I \supset J(R)}} (I/J(R)) = \left( \bigcap_{\substack{I \lhd R \\ I \supset J(R)}} I \right) /J(R) = J(R)/J(R) = \{0 + J(R)\}$$

■

**Proposição 2.2.4.** *Se $R$ é um anel com identidade 1, então, 0 é o único idempotente de $J(R)$.*

**Demonstração**. Seja $e^2 = e \in J(R)$. Pela Proposição 2.2.2, temos que $1 - re \in U(R)$, para todo $r \in R$. Em particular $1 - e \in U(R)$. Consequentemente, como $e(1 - e) = 0$, podemos concluir que $e(1 - e)(1 - e)^{-1} = 0$, isto é, $e = 0$. ■

**Proposição 2.2.5.** *Sejam $R$ e $S$ são dois anéis com identidades $1_R$ e $1_S$ e $\Phi : R \to S$ um epimorfismo, então, $\Phi(J(R)) \subseteq J(S)$.*

**Demonstração**. Dado $x \in \Phi(J(R))$, sabemos que existe $t \in J(R)$ tal que $\Phi(t) = x$. Agora, como $\Phi$ um homomorfismo sobrejetivo, existe $r \in R$ tal que $\Phi(r) = s$. Consequentemente, $\Phi(1_R - rt) = \Phi(1_R) - \Phi(r)\Phi(t) = 1_S - sx$. Uma vez que $t \in J(R)$, pela Proposição 2.2.2, segue que $1_R - rt \in U(R)$. Seja $u$ o inverso de $1 - rt$. Assim $u(1 - rt) = 1$ e $(1 - rt)u = 1$. Desse modo,

$$\Phi(1_R - rt)\Phi(u) = \Phi((1_R - rt)u) = \Phi(1) = 1$$

$$\Phi(u)\Phi(1_R - rt) = \Phi(u(1_R - rt)) = \Phi(1) = 1$$

isto é, $(1 - sx)\Phi(u) = 1$ e $\Phi(u)(1 - sx) = 1$ . Portanto, $1 - sx \in U(S)$. Logo, pela Proposição 2.2.2, podemos concluir que $x \in J(S)$. ■

# 3 ANÉIS LIMPOS

Um anel $R$, com elemento identidade 1, é dito ser limpo se todo elemento no anel pode ser escrito como a soma de um elemento idempotente e de uma unidade, ambos pertencendo ao anel. Estes anéis foram introduzidos em 1977 por Nicholson [10] em seu estudo de idempotentes levantados, anéis de troca ("exchange rings") e anéis adequados ("suitable rings").

Neste capítulo iremos ver exemplos e estudar propriedades de anéis limpos, assim como classificar alguns anéis pertencentes a uma subclasse de anéis limpos.

## 3.1 Anéis Adequados

Nesta seção, iremos estudar a estrutura dos anéis ditos adequados, suas propriedades e entender o motivo de Jacobson definir tais anéis como "adequados para construir idempotentes". Além disso, buscando ligações entre anéis adequados e anéis limpos.

**Proposição 3.1.1.** *Sejam $R$ um anel com 1 e $x \in R$. As seguintes condições são equivalentes:*

*(a) Existe $e^2 = e \in R$ tal que $e - x \in R(x - x^2)$;*

*(b) Existem $e^2 = e \in Rx$ e $c \in R$ tais que $(1 - e) - c(1 - x) \in J(R)$;*

*(c) Existe $e^2 = e \in Rx$ tal que $R = Re + R(1 - x)$;*

*(d) Existe $e^2 = e \in Rx$ tal que $1 - e \in R(1 - x)$.*

**Demonstração**. Inicialmente, vamos provar que $(a)$ implica $(b)$. Para isso, suponhamos que exista $e^2 = e \in R$ tal que $e - x \in R(x - x^2)$. Desse modo, $e - x = r(x - x^2)$, para algum $r \in R$, o que implica $e = x + rx - rx^2$. Assim,

$$1 - e = 1 - x - rx + rx^2 = 1 - x - rx(1 - x) = (1 - rx)(1 - x).$$

Consequentemente $1 - e = (1 - rx)(1 - x) = 0 \in J(R)$. Portanto, basta tomar $c = 1 - rx$.

A seguir, vejamos que $(b)$ implica $(c)$. Se existirem $e^2 = e \in Rx$ e $c \in R$ tais que $(1 - e) - c(1 - x) \in J(R)$, então $1 - [(1 - e) - c(1 - x)]$ é uma unidade de $R$, pelo Lema 2.5, isto é, $e + c(1 - x)$ é uma unidade de $R$. Assim, existe $r \in R$ tal que $r(e + c(1 - x)) = 1$, o que implica que $re + rc(1 - x) = 1$. Logo, dado $a \in R$, podemos escrevê-lo como $a = a.1 = are + arc(1 - x) \in Re + R(1 - x)$, o que nos permite concluir que $R = Re + R(1 - x)$

O próximo passo vai ser verificar que $(c)$ implica $(d)$. Suponhamos que exista $e^2 = e \in Rx$ tal que $R = Re + R(1 - x)$. Uma vez que $1 \in R$, existem $t, s \in R$ tais que $1 = te + s(1 - x)$. Assim, $1 - te = s(1 - x)$, o que implica que $(1 - e)(1 - te) = (1 - e)s(1 - x) \in R(1 - x)$.

Por outro lado, também temos que

$$1 - e - (1-e)te = (1-e)s(1-x)$$

$$1 - (e + (1-e)te) = (1-e)s(1-x)$$

Seja $f = e + (1-e)te$. Claramente, $1 - f \in R(1-x)$. Além disso, observe que

$$f^2 = (e + te - ete)(e + te - ete)$$

$$f^2 = e + ete - ete + te + tete - tete - ete - etete + etete$$

$$f^2 = e + te - ete = e + (1-e)te = f$$

Portanto $f$ é o elemento desejado.

Finalmente, somente falta mostrar que $(d)$ implica $(a)$. Por hipótese, existe $e^2 = e \in Rx$, tal que $1 - e \in R(1-x)$, isto é, existem $r, s \in R$ tais que $e = rx$ e $1 - e = s(1-x)$. Agora, note que

$$e - x = e - ex + ex - x$$

$$= e(1-x) - (1-e)x$$

$$= rx(1-x) - s(1-x)x$$

$$= rx - rx^2 - sx + sx^2$$

$$= (r-s)x - (r-s)x^2$$

$$= (r-s)(x - x^2)$$

o que nos permite concluir que $e - x \in R(x - x^2)$. ■

**Definição 3.1.1.** *Um anel $R$ com $1$ é chamado adequado se todo elemento de $R$ satisfaz alguma ( e, consequentemente todas) as condições da proposição anterior.*

**Definição 3.1.2.** *Se $L$ é um subgrupo aditivo de um anel $R$, dizemos que idempotentes podem ser levantados módulo $L$ se dado $x \in R$ tal que $x - x^2 \in L$ então, existe $e^2 = e \in R$ tal que $e - x \in L$. Neste caso, dizemos que $e$ levanta $x$.*

Jacobson definiu uma condição sobre o radical de um anel que ele chamou "adequada" para a construção de idempotentes. Desse modo, o próximo resultado explica o nosso uso do termo "adequado".

**Corolário 3.1.1.** *Um anel $R$ é adequado se, e somente se, idempotentes podem ser levantados módulo todo ideal à esquerda de $R$.*

**Demonstração**. Suponhamos que $R$ é adequado. Seja $I$ um ideal à esquerda de $R$. Em particular, $I$ é um subgrupo aditivo de $R$. Dado $x \in R$ tal que $x - x^2 \in I$, uma vez que

$R$ é adequado, sabemos que existe $e^2 = e \in R$ tal que $e - x \in R(x - x^2)$. Agora, note que $R(x - x^2) \subseteq I$, pois $x - x^2 \in I$ e $I$ é um ideal à esquerda de $R$. Logo, $e - x \in I$, o que implica que idempotentes podem ser levantados módulo todo ideal à esquerda de $R$. Reciprocamente, dado um elemento arbitrário $x$ de $R$, como $R(x - x^2)$ é um ideal à esquerda de $R$, idempotentes podem ser levantados módulo $R(x - x^2)$. Desse modo, uma vez que $x - x^2 \in R(x - x^2)$, temos que existe $e^2 = e \in R$ tal que $e - x \in R(x - x^2)$. Logo, $R$ é adequado. ■

**Definição 3.1.3.** *Um idempotente $e \in R$ é chamado um idempotente central, se $ex = xe$; para todo $x \in R$.*

O próximo resultado nos fornece outra classe de anéis adequados e nos dá uma caracterização de anéis adequados envolvendo idempotentes centrais. Um elemento $x$ de um anel $R$ é chamado limpo se $x$ é a soma de um idempotente e de uma unidade. Dizemos que $R$ é limpo se todos os seus elementos são limpos.

**Proposição 3.1.2.** *Todo anel limpo é adequado.*

**Demonstração**. Suponha que $R$ seja um anel limpo. Desse modo, dado $x \in R$, temos que $x = e+u$, onde $e^2 = e \in R$ e $u \in U(R)$. Portanto, $x^2 = (e+u)(e+u) = e+eu+ue+u^2$, o que implica

$$x - x^2 = e + u - (e + eu + ue + u^2)$$

$$= e + u - e - eu - ue - u^2$$

$$= u - eu - ue - u^2$$

$$= (1 - e)u - u(e + u)$$

$$= (1 - e)u - ux$$

$$= uu^{-1}(1 - e)u - ux$$

$$= u[u^{-1}(1 - e)u - x]$$

Assim,

$$u^{-1}(x - x^2) = u^{-1}(1 - e)u - x$$

$$= u^{-1}u - u^{-1}eu - x$$

$$= 1 - u^{-1}eu - x$$

Seja $f = 1 - u^{-1}eu$. Pelos nossos cálculos temos que $f - x = u^{-1}(x - x^2) \in R(x - x^2)$. Além disso, note que

$$f^2 = (1 - u^{-1}eu)(1 - u^{-1}eu)$$

$$= 1 - u^{-1}eu - u^{-1}eu + u^{-1}eu$$

$$= 1 - u^{-1}eu = f$$

Portanto, $R$ é adequado. ■

A recíproca é verdadeira assumindo uma hipótese adicional.

**Proposição 3.1.3.** *Um anel adequado em que todos os seus idempotentes são centrais é limpo.*

**Demonstração**. Suponha que $R$ seja um anel adequado. Dado $x \in R$ um elemento arbitrário por uma das equivalências da definição, sabemos que existe $e^2 = e \in Rx$ tal que $1 - e \in R(1 - x)$. Assim, $e = rx$, para algum $r \in R$ e $e^2 = e.e = erx$. Seja $er = a$. Neste caso, temos que $e = ee = erx = ax$, o que implica $ea = eer = er = a$, de onde podemos concluir que $axa = ea = a$. Note que $xa = xaxa = (xa)^2$, isto é, $xa$ é um idempotente. Uma vez que estamos assumindo que todos os idempotentes são centrais, sabemos que $e = ax$ e $xa$ são centrais e, assim, $xa = xaxa = x(ax)a = xa(ax) = (xa)ax = a(xa)x = (axa)x = ax$. Similarmente, escreva $1 - e = s(1 - x)$, fazendo o mesmo que fizemos para $e \in Rx$, podemos concluir que $1 - e = b(1 - x) = (1 - x)b$, onde $b = (1-e)s \in R$. Desse modo, podemos encontrar um inverso para o elemento $x-(1-e)$, pois podemos escrever $x = 1 - e + x - (1 - e)$, sendo portanto um elemento limpo. De fato, fazendo $(a - b)(x - (1 - e))$, temos que

$$(a - b)(x - (1 - e)) = ax - a(1 - e) - bx + b(1 - e) =$$

$$= e - a + ea - bx + b - be = e - ea + ea + b(1 - x) - be =$$

$$= e + (1 - e) - be = 1 - b(1 - e)e = 1 - be + be = 1$$

Analogamente, $(x - (1 - e))(a - b) = 1$. Portanto, $x = (a - b)^{-1} + (1 - e)$, isto é, $x$ é limpo. Logo, $R$ é um anel limpo. ■

A seguir veremos alguns exemplos de elementos e anéis limpos e de elementos e anéis que não são limpos.

**Exemplo 3.1.1.** *Unidades são elementos limpos de um anel com* 1.

Basta notar que se toda unidade $u$ de um anel $R$ pode ser escrita como $u = 0 + u$. ■

**Exemplo 3.1.2.** *Se $e$ é um elemento idempotente de um anel $R$ com* 1*, então, $e$ é limpo.*

Com efeito, note que

$$e = e - e + e + 1 - 1$$

$$e = 1 - e + 2e - 1$$

Agora, pela Proposição 2.1.2 sabemos que $1 - e$ é um elemento idempotente e $2e - 1$ é uma unidade. Portanto, $e$ é limpo. ■

**Definição 3.1.4.** *Um anel $R$ é dito ser booleano se todo elemento de $R$ é idempotente.*

Como consequência do exemplo anterior, temos o seguinte.

**Exemplo 3.1.3.** *Todo anel booleano é limpo.*

**Exemplo 3.1.4.** *Elementos nilpotentes são limpos.*
Seja $R$ um anel com 1. Suponha que $a \in R$ é um elemento tal que $a^k = 0$, para algum inteiro positivo $k$. Temos que $a = 1 + (a - 1)$, onde 1 é um idempotente e $a - 1$ é uma unidade, pois

$$(a-1)(-a^{k-1} - a^{k-2} - \cdots - 1)$$

$$= -a^k - a^{k-1} - a^{k-2} - \cdots - a$$

$$+a^{k-1} + a^{k-2} + \cdots + a + 1 = 1$$

e $(-a^{k-1} - a^{k-2} - \cdots - 1)(a - 1) = 1$. Logo, $a$ é um elemento limpo. ■

**Exemplo 3.1.5.** *Corpos são anéis limpos.*

**Demonstração**. Seja $x$ um elemento arbitrário de um corpo $F$. Se $x = 0$ então podemos escrever $x = 1 + (-1)$, onde 1 é um elemento idempotente e $-1$ é uma unidade. Se $x \neq 0$, sabemos que $x$ é uma unidade e já vimos que unidades são elementos limpos. ■

**Exemplo 3.1.6.** *Sejam $R$ um anel limpo, $S$ um anel e $\Phi : R \to S$ um homomorfismo de anéis. Então, $\Phi(R)$ é limpo.*

De fato, se $y \in \Phi(R)$, então, $y = \Phi(x)$, para algum $x \in R$. Uma vez que $R$ é limpo, temos que $x = e + u$, onde $e^2 = e$ e $u \in U(R)$. Desse modo, $\Phi(x) = \Phi(e + u) = \Phi(e) + \Phi(u)$, pois $\Phi$ é homomorfismo. Note que $(\Phi(e))^2 = \Phi(e)\Phi(e) = \Phi(e^2) = \Phi(e)$, isto é, $\Phi(e)$ é idempotente; e $\Phi(u)\Phi(u^{-1}) = \Phi(uu^{-1}) = \Phi(1) = 1$ e $\Phi(u^{-1}).\Phi(u) = \Phi(u^{-1}u) = \Phi(1) = 1$ ou seja, $\Phi(u)$ é unidade. Portanto, $\Phi(R)$ é limpo. ■

**Exemplo 3.1.7.** *Se $R$ e $S$ são anéis limpos, então, o anel $R \times S = \{(r, s) \mid r \in R, s \in S\}$, onde a soma e o produto são definidos como sendo coordenada a coordenada, é limpo.*

Com efeito, seja $(r, s) \in R \times S$. Uma vez que $r \in R$, $s \in S$ e $R$ e $S$ são limpos, sabemos que existem $e, u \in R$ e $f, v \in S$ tais que $e^2 = e$, $f^2 = f$, $u, v \in U(R)$ que satisfazem $r = e + u$ e $s = f + v$. Assim,

$$(x, y) = (e + u, f + v)$$

$$= (e, f) + (u, v)$$

Note que

$$(e, f)(e, f) = (e^2, f^2) = (e, f)$$

$$(u, v)(u^{-1}, v^{-1}) = (1, 1)$$

$$(u^{-1}, v^{-1})(u, v) = (1, 1)$$

Portanto, $(e, f)$ é um idempotente e $(u, v)$ é uma unidade, o que nos permite concluir que $R \times S$ é limpo. ■

**Exemplo 3.1.8.** *O produto cartesiano de uma quantidade finita de anéis limpos é limpo.*

**Demonstração**. Vamos demonstrar tal exemplo com um argumento indutivo. De fato, pelo Exemplo 3.1.7 já sabemos que o produto cartesiano de dois anéis limpos também é limpo. Agora, suponha como hipótese de indução que um produto cartesiano de $k$ anéis limpos, onde $k > 2$, também seja limpo. Assim, dado um produto cartesiano de $k+1$ anéis limpos

$$R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_k \times R_{k+1}$$

podemos escrever tal produto cartesiano como

$$(R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_k) \times R_{k+1}.$$

Desse modo, como pela hipótese de indução o anel $R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_k$ é limpo e uma vez que $R_{k+1}$ também é limpo, concluímos a demonstração pelo Exemplo 3.1.7. ■

**Proposição 3.1.4.** *Seja $R$ um anel comutativo com elemento identidade $1$. O anel de polinômios $R[x]$ não é limpo.*

**Demonstração**. Se $R[x]$ fosse limpo, teríamos que todo elemento de $R[x]$ seria limpo. Entretanto, vamos mostrar que o polinômio $x$ não é limpo. De fato, suponhamos que $x = e + u$, onde $e^2 = e \in R[x]$ e $u \in U(R[x])$. Sejam $e = e_0 + e_1x + \ldots e_nx^n$ e $u = u_0 + u_1x + \ldots u_mx^m$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $m > n$. Desse modo, $x = e_0 + u_0 + x(e_1 + u_1) + \ldots + x^n(e_n + u_n) + u_mx^m$. Assim, comparando os coeficientes temos que $e_0 + u_0 = 0$, isto é, $-e_0 = u_0$. Agora, note que como $e^2 = e$, segue que $e_0^2 = e_0$, isto é, $e_0$ é um idempotente. Além disso, uma vez que $u$ é uma unidade de $R[x]$, sabemos que existe $p = a_0 + a_1x + \ldots a_sx^s \in R[x]$, tal que $up = 1$, ou seja, $(u_0 + u_1x + \cdots + u_mx^m)(a_0 + a_1x + \ldots a_sx^s) = 1$, o que implica que $u_0a_s = 1$ ou equivalentemente que $-e_0a_s = 1$. Desse modo, $-e_0e_0a_s = e_0$, isto é, $-e_0a_s = e_0$, pois $e_0$ é um idempotente. Portanto, $e_0 = 1$. Agora, comparando os coeficientes da igualdade $e^2 = e$ obtemos que

$$e_1 + e_1 = e_1$$

$$e_2 + e_1e_1 + e_2 = e_2$$

$$e_3 + e_2e_1 + e_1e_2 + e_3 = e_3$$

$$e_4 + e_3e_1 + e_2e_2 + e_1e_3 + e_4 = e_4$$

$$\vdots$$

$$e_n + e_{n-1}e_1 + e_{n-2}e_2 + \cdots + e_1 e_{n-1} + e_n = 0$$

o que nos permite concluir sucessivamente que $e_1 = 0$, $e_2 = 0$, $\ldots$, $e_n = 0$. Logo, $e = u$ e $x = 1 + u$. Assim, $x - 1 = u$ é uma unidade, consequentemente, existe $q = b_0 + b_1 x + \cdots + b_t x^t \in R[x]$ tal que

$$1 = (x-1)q$$

$$1 = (x-1)(b_0 + b_1 x + \cdots + b_t x^t)$$

$$1 = -b_0$$

$$0 = b_0 - b_1$$

$$0 = b_1 - b_2$$

$$0 = b_2 - b_3$$

$$\vdots$$

$$0 = b_{t-1} - b_t$$

$$0 = b_t$$

implicando que $b_0 = -1$, $b_1 = -1$, $b_2 = -1$, $\ldots$, $b_{t-1} = -1$ e $b_t = 0$, o que é uma contradição. Portanto, o polinômio $x$ não é limpo. ■

**Exemplo 3.1.9.** *O anel dos números inteiros $\mathbb{Z}$ não é limpo.*

**Demonstração**. Sabemos que as únicas unidades de $\mathbb{Z}$ são 1 e $-1$ e os únicos elementos idempotentes de $\mathbb{Z}$ são 0 e 1. Desse modo, temos que qualquer número inteiro maior que 2 ou menor que $-1$ não é limpo. ■

Como consequência do último exemplo, temos que um subanel de um anel limpo pode não ser limpo, pois $\mathbb{Z}$ é um subanel do corpo dos números racionais $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ é limpo e $\mathbb{Z}$ não é limpo.

## 3.2 A Decomposição de Peirce e suas aplicações

Vamos, a partir de agora, decompor os anéis estudados na seção anterior como soma direta de subanéis, tendo como geradores seus idempotentes, entender que condições podemos manter desses anéis para suas devidas decomposições (e vice e versa) e verificar que se tivermos um anel limpo, podemos determinar que seu anel de matrizes também é limpo.

Se $e$ é um idempotente de um anel $R$ (que não necessariamente possui elemento identidade), então, podemos decompor $R$ como uma soma direta de quatro subanéis:

$$R = eRe \oplus eR(1-e) \oplus (1-e)Re \oplus (1-e)R(1-e).$$

onde $(1-e)R$ e $R(1-e)$ são apenas notações que significam

$$(1-e)R = \{x - ex \mid x \in R\}$$

e

$$R(1-e) = \{x - xe \mid x \in R\}.$$

Tal decomposição é chamada *decomposição de Peirce* de $R$ em relação ao idempotente $e$. Se $R$ possuir elemento identidade 1, então, $1-e$ é um elemento de $R$ e as notações acima representam o produto usual de um elemento por um conjunto.

A decomposição de qualquer elemento $x \in R$ de acordo com a decomposição de Peirce é

$$x = exe + (ex - exe) + (xe - exe) + (x - ex - xe + exe).$$

A decomposição de Peirce é somente aditiva, não é multiplicativa, isto é, $R$ somente é isomorfo a $eRe \oplus (1-e)Re \oplus eR(1-r) \oplus (1-e)R(1-e)$ como um grupo aditivo, não como um anel. Para construir um isomorfismo de anéis, precisamos considerar uma multiplicação diferente da componente a componente. Dado

$$(a, b, c, d) \in eRe \oplus (1-e)Re \oplus eR(1-e) \oplus (1-e)R(1-e),$$

podemos pensar em $(a, b, c, d)$ como sendo a matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

e usar a fórmula usual do produto de matrizes. Desse modo, teremos um isomorfismo de anéis:

$$R \cong \begin{bmatrix} eRe & eR(1-e) \\ (1-e)Re & (1-e)R(1-e) \end{bmatrix}.$$

Seja $R$ um anel. Dois idempotentes $e_1, e_2 \in R$ são ditos *ortogonais* se $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$.

**Lema 3.2.1.** *Suponhamos que $R$ é um anel com elemento identidade 1 e que possui um idempotente $e$. Se $eRe$ e $(1-e)R(1-e)$ são subanéis limpos então, $R$ é um anel limpo.*

**Demonstração**. Considere a decomposição de Peirce do anel $R$:

$$R \cong \begin{bmatrix} eRe & eR(1-e) \\ (1-e)Re & (1-e)R(1-e) \end{bmatrix}.$$

Seja $A = \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix} \in R$. Uma vez que $a \in eRe$ e $eRe$ é limpo, temos que $a = f + u$, onde $f^2 = f \in eRe$ e $u$ é uma unidade em $eRe$ com inverso $u_1$. Note que como $y \in (1-e)Re$, $u_1 \in eRe$ e $x \in eR(1-e)$, temos que $yu_1x \in (1-e)R(1-e)$. Assim, $b-(1-e)R(1-e)$ é um elemento do subanel limpo $(1-e)R(1-e)$. Desse modo, $b - yu_1x = g + v$, em que $g^2 = g$ e $v$ é uma unidade em $(1-e)R(1-e)$, com inverso $v_1$. Consequentemente,

$$A = \begin{bmatrix} f+u & x \\ y & g+v+yu_1x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u & x \\ y & v+yu_1x \end{bmatrix}$$

Claramente, $\begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix}$ é um idempotente de $R$. Assim basta mostrar que $\begin{bmatrix} u & x \\ y & v+yu_1x \end{bmatrix}$ é uma unidade. Note que como $y \in (1-e)Re$ e $u_1 \in eRe$, temos que $-yu_1 \in eRe$. Desse modo, $\begin{bmatrix} e & 0 \\ -yu_1 & 1-e \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} eRe & eR(1-e) \\ (1-e)Re & (1-e)R(1-e) \end{bmatrix}$ e, além disso, este elemento possui inverso $\begin{bmatrix} e & 0 \\ (1-e)yu_1e & 1-e \end{bmatrix}$. Analogamente, uma vez que $u_1 \in eRe$ e $x \in eR(1-e)$, sabemos que $-u_1x \in eR(1-e)$. Assim, $\begin{bmatrix} e & -u_1x \\ 0 & 1-e \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} eRe & eR(1-e) \\ (1-e)Re & (1-e)R(1-e) \end{bmatrix}$ e o inverso de tal elemento é $\begin{bmatrix} e & eu_1x(1-e) \\ 0 & 1-e \end{bmatrix}$. Finalmente, observe que

$$\begin{bmatrix} e & 0 \\ -yu_1 & 1-e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & x \\ y & v+yu_1x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & -u_1x \\ 0 & 1-e \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} eu & ex \\ -yu_1u+(1-e)y & -yu_1x+(1-e)v+(1-e)yu_1x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & -u_1x \\ 0 & 1-e \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} u & x \\ 0 & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & -u_1x \\ 0 & 1-e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ue & -uu_1x+x(1-e) \\ 0 & v(1-e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}$$

também é uma unidade. Portanto, $\begin{bmatrix} u & x \\ y & v+yu_1x \end{bmatrix}$ é invertível. ■

**Teorema 3.2.1.** *Sejam $e_i$, $1 \leq i \leq n$, idempotentes ortogonais de um anel $R$ com elemento identidade 1, tais que $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$. Se $e_iRe_i$ é limpo, para cada $1 \geq i \geq n$, então, $R$ é limpo.*

**Demonstração**. Para a demonstração do Teorema acima usaremos um argumento indutivo. Sejam $R$ um anel com identidade e $e_i$, idempotentes ortogonais tais que $e_1+\cdots+e_n = 1$ e cada $e_iRe_i$ seja um anel limpo, onde $1 \leq i \leq n$. Observe que $e_1Re_1$ é limpo, mas não sabemos nada do subanel $(e_2 + \cdots + e_n)R(e_2 + \cdots + e_n)$, caso esse subanel fosse limpo, teríamos pelo Lema 3.2.1 que $R$ seria um anel limpo. Olhando agora para o subanel $(e_2 + \cdots + e_n)R(e_2 + \cdots + e_n)$, temos que $e_2Re_2$ é limpo, mas não sabemos nada sobre o subanel $(e_3 + \cdots + e_n)R(e_3 + \cdots + e_n)$, novamente se ele fosse limpo teríamos que, pelo Lema 3.2.1 que o subanel $(e_2 + \cdots + e_n)R(e_2 + \cdots + e_n)$ seria limpo, o que implicaria que $R$ seria limpo. Assim, usando o mesmo argumento uma quantidade finita de vezes, vamos reduzir nosso problema ao caso de dois subanéis $e_{n-1}Re_{n-1}$ e $e_nRe_n$, ambos são limpos por hipótese. Portanto, podemos concluir pelo Lema 3.2.1 que o subanel $(e_{n-1} + e_n)R(e_{n-1} + e_n)$ é limpo. Consequentemente, usando um argumento indutivo, temos que $(e_2+\cdots+e_n)R(e_2+\cdots+e_n)$ é um subanel limpo. Logo, $R$ é um anel limpo. ■

**Corolário 3.2.1.** *Se $R$ é um anel limpo, então, o anel de matrizes $M_n(R)$ também o é.*

**Demonstração**. Defina o conjunto das matrizes $n \times n$ unitárias, como sendo as matrizes com exatamente uma entrada igual a 1 e todas as outras entradas iguais a zero e denote por $E_{ij}$ quando a entrada da linha $i$ e da coluna $j$ for igual a 1. Observe que os elementos do conjunto $\{E_{ij}\}_{i=1}^n$ são idempotentes em $M_n(R)$ para qualquer anel $R$. Além disso $E_{11} + E_{22} + \cdots + E_{nn} = Id$, onde $Id$ é a matriz identidade em $M_n(R)$. Portanto $\{E_{ij}\}_{i=1}^n$ é um conjunto de idempotentes ortogonais em $M_n(R)$. Além disso,

$$E_{ii}M_n(R)E_{ii} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \underbrace{1}_{a_{ii}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \underbrace{1}_{a_{ii}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \underbrace{1}_{a_{ii}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Assim como $R$ é um anel limpo, segue que $a_{ii}$ é um elemento limpo e, consequentemente, $E_{ii}M_n(R)E_{ii}$ é um anel limpo, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Portanto, pelo Teorema 3.2.1 o anel $M_n(R)$ é limpo. ■

# 4 ANÉIS CUJOS ELEMENTOS SÃO ESCRITOS COMO DE MODO ÚNICO SOMA DE UM IDEMPOTENTE E DE UMA UNIDADE

Neste capítulo, iremos investigar os anéis unicamente limpos em que cada elemento é representado unicamente como a soma de um idempotente e uma unidade.

## 4.1 Anéis unicamente limpos

Nesta seção, os anéis estudados apresentam uma propriedade interessante que é a de que todo elemento se escreve de forma única como a soma de um elemento idempotente e de uma unidade. Vale ressaltar que, estudaremos condições que fazem um anel limpo ser um anel unicamente limpo, analisaremos resultados importantes sobre seus idempotentes e exemplos interessantes sobre essa classe de anéis. Além disso, iremos verificar que estes anéis estão conectados com os anéis booleanos.

**Definição 4.1.1.** *Um elemento $a$ de um anel $R$ com elemento identidade $1$ é chamado unicamente limpo se pode ser escrito de modo único como $a = u + e$, onde $e^2 = e$ e $u \in U(R)$. Um anel $R$ é dito unicamente limpo se todo elemento é unicamente limpo.*

A seguir veremos alguns exemplos de anéis unicamente limpos.

**Exemplo 4.1.1.** *Idempotentes centrais de um anel $R$ com $1$ são elementos unicamente limpos.*

**Demonstração**. Seja $e$ um idempotente central de $R$. Já vimos no Exemplo 3.1.2 que $e$ é um elemento limpo, pois pode ser decomposto como $e = (1-e) + (2e-1)$, onde $(1-e)$ é idempotente e $(2e-1)$ é uma unidade. Vejamos que tal decomposição é única. Suponha que $e = f + u$ é tal que $f^2 = f$ e $u \in U(R)$. Uma vez que $e$ é central, em particular temos que $ef = fe$, isto é, $(f+u)f = f(f+u)$, o que implica que $uf = fu$. Além disso, como $e$ é idempotente, observe que $e = f + u = (f+u)^2 = f^2 + fu + uf + u^2 = f^2 + 2fu + u^2$, o que implica que $u = 2fu + u^2 = (2f+u)u$, de modo que, $1 = 2f + u$, pois $u$ é uma unidade. Portanto, $u = 1 - 2f$ e, consequentemente $f = e - u = e - (1-2f) = e - 1 + 2f$, o que nos permite concluir que $f = 1 - e$. Logo, a decomposição é única. ■

**Exemplo 4.1.2.** *Elementos nilpotentes centrais de um anel $R$ com $1$ são elementos unicamente limpos.*

**Demonstração**. Seja $a$ um elemento de $R$ tal que $a^k = 0$, para algum inteiro positivo $k$ e $ar = ra$, para todo $r \in R$. Já verificamos no Exemplo 3.1.4 que $a$ é limpo, pois $a = 1 + (a-1)$, onde $1^2 = 1$ e $(a-1) \in U(R)$. Vejamos que essa decomposição é única. Suponhamos que $a = e + u$ é tal que $e^2 = e$, $u \in u(R)$. Em particular, por $a$ ser central, temos que $ae = ea$, o que implica $eu = ue$. Desse modo,

$$0 = a^k = (e+u)^k = e^k + \binom{k}{1} e^{k-1}u + \binom{k}{2} e^{k-2}u^2 + \cdots + \binom{k}{k-1} eu^{k-1} + u^k$$

Assim

$$u^k = -e^k - \binom{k}{1} e^{k-1}u - \binom{k}{2} e^{k-2}u^2 - \cdots - \binom{k}{k-1} eu^{k-1}$$

$$u^k = e\left(-e^{k-1} - \binom{k}{1} e^{k-2}u - \cdots - u^{k-1}\right)$$

Por outro lado, também temos que

$$eu^k = e\left(-e^{k-1} - \binom{k}{1} e^{k-2}u - \cdots - u^{k-1}\right)$$

Desse modo, $eu^k = u^k$, ou seja, $(e-1)u^k = 0$, o que nos permite concluir que $e - 1 = 0$, pois $u \in U(R)$. Logo $e = 1$ e $u = a - 1$, concluindo a prova da unicidade desejada. ■

**Exemplo 4.1.3.** *Todo anel booleano $R$ com elemento identidade 1 é unicamente limpo.*

**Demonstração**. Dados $e, f \in R$, temos que $(e+f)^2 = e+f$, isto é, $e^2 + ef + fe + f^2 = e + f$, o que implica que $ef = -fe$, pois $e$ e $f$ são idempotentes. Consequentemente, $(ef)^2 = ef = -fe = (-fe)^2 = fe$. Logo, pelo Exemplo 4.1.2, podemos concluir que $R$ é unicamente limpo. ■

**Exemplo 4.1.4.** *Um produto direto $\prod_{i=1}^{n} R_i$ de anéis $R_i$ é unicamente limpo se, e somente se, cada $R_i$ é unicamente limpo.*

**Demonstração**. Suponha que $\prod_{i=1}^{n} R_i$ seja unicamente limpo. Defina $\phi : \prod_{i=1}^{n} R_i \to R_i$ como sendo a projeção usual para cada $i = 1, \ldots, n$. Pelo Exemplo 3.1.6, temos que cada $R_i,\ i = 1, \ldots, n$ é unicamente limpo. Reciprocamente, suponha que cada $R_i,\ i = 1, \ldots, n$ seja unicamente limpo. Pelo Exemplo 3.1.8, $\prod_{i=1}^{n} R_i$ é um anel limpo e, a unicidade é garantida pela unicidade dos elementos de $R_i$. ■

Iremos dar posteriormente exemplos de anéis limpos que não sejam comutativos e para isso o seguinte resultado será necessário.

**Proposição 4.1.1.** *Todo idempotente $e$ de um anel $R$ unicamente limpo é central.*

**Demonstração**. Seja $e^2 = e \in R$. Precisamos mostrar que $er = re$, para qualquer $r \in R$. Note que se $er = re$, então, $eer = ere$ e $ere = ree$, isto é, $er = ere$ e $ere = re$.

Vamos provar que $er = ere$ e $ere = re$, o que vai nos permitir concluir que $er = re$, para todo $r \in R$, como desejado. Note que se $er = ere$, então, $er - ere = 0$ e ,assim, $e + (er - ere)$ seria um idempotente.

Vejamos que, de fato, $e+(er-ere)$ é um idempotente.

$$[e+(er-ere)]^2 = e^2 + e(er-ere) + (er-ere)e + (er-ere)^2 =$$

$$= e + er - ere + ere - ere + (er)^2 - erere - erer + (ere)^2 =$$

$$= e + er - ere + erer - erere - erer + erere = e + er - ere.$$

Além disso, note que $(1+(er-ere))$ é uma unidade devido à Proposição 2.1.2. Desse modo, uma vez que $e+(1+(er-ere)) = (e+(er-ere))+1$ pode ser escrito de dois modos como a soma de um elemento idempotente com um elemento unidade, podemos concluir que $e = e+(er-ere)$, isto é, $er = ere$. Analogamente, também é possível provar que $re = ere$. Portanto, $er = re$, para todo $r \in R$. ■

Note que $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é um elemento idempotente de $M_2(R)$, onde $R$ é um elemento arbitrário com identidade. Porém, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ não é central. De fato,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Corolário 4.1.1.** *Se $R$ é um anel unicamente limpo e $e^2 = e \in R$, então, $eRe$ é unicamente limpo.*

**Demonstração**. Dado $x \in eRe$, sabemos que $x = ere$, para algum $r \in R$. Uma vez que $R$ é unicamente limpo, podemos escrever $x = e(f+u)e$, onde $f^2 = f$ e $u \in U(R)$. Assim, $x = efe + eue$ e é tal que $(efe)^2 = efe$ e $(eue)^{-1} = eu^{-1}e$, pois $e$ é o elemento identidade de $eRe$. Além disso, como $f$ e $u$ são unicamente determinados, segue que $eRe$ é unicamente limpo. ■

**Definição 4.1.2.** *Um anel $R$ com elemento identidade $1$ é dito finitamente direto se $ab = 1$, implica $ba = 1$.*

**Corolário 4.1.2.** *Todo anel unicamente limpo $R$ é finitamente direto.*

**Demonstração**. Se $ab = 1$, então, note que $(ba)^2 = (ba)(ba) = b(ab)a = ba$, isto é, $ba$ é um elemento idempotente. Assim, pela Proposição 4.1.1, $ba$ é central, o que implica que $ba = ba(ab) = a(ba)b = (ab)(ab) = 1$. ■

Para exibirmos exemplos não comutativos de anéis unicamente limpos, precisamos da seguinte construção.

Seja $R$ um anel e seja $V$ uma álgebra sobre $R$. O ideal extensão de $R$ por $V$ é definido como sendo o grupo abeliano aditivo $I(R;V) = R \oplus V$ com multiplicação $(r,v)(s,w) = (rs, rw + vs + vw)$, para quaisquer $r, s \in R$ e $v, w \in V$.

**Proposição 4.1.2.** *Se as seguintes condições são satisfeitas*

*(a) $R$ é unicamente limpo;*

*(b) Se $e^2 = e$ então $ev = ve$ para todo $v \in V$;*

*(c) Se $v \in V$ então $v + w + vw = 0$, para algum $w \in V$.*

*então, um ideal de extensão $S = I(R;V)$ é unicamente limpo. Além disso, se $S$ é unicamente limpo e $V$ não contém idempotentes não nulos, então, as condições $(a)$, $(b)$ e $(c)$ são válidas.*

**Demonstração**. Assuma que as condições $(a)$, $(b)$ e $(c)$ sejam satisfeitas. Seja $s = (r,v) \in S$. Pela condição $(a)$, podemos decompor $r = e + u$, onde $e^2 = e \in R$, $u \in U(R)$. Desse modo, $s = (e,0) + (u,v)$ e $(e,0)^2 = (e,0)(e,0) = (e,0)$. Além disso, note que $(u,v) = (u,0)(1,u^{-1}v)$. Assim, como $u^{-1}v \in V$, pela condição $(c)$, existe $w \in V$ tal que $u^{-1}v + w + (u^{-1}v)w = 0$. Portanto, $(1,u^{-1}v)(1,w) = (1, u^{-1}v + w + (u^{-1}v)w) = (1,0)$. Analogamente, $(1,w)$ também é invertível à direita. Suponha que $(1,w)(1,y) = (1,0)$. Uma vez que $(1,u^{-1}v)(1,w) = (1,0)$, multiplicando por $(1,y)$ à direita ambos os lados da igualdade, temos que $(1,u^{-1}v) = (1,y)$. Finalmente, multiplicando por $(1,w)$ à esquerda ambos os lados da igualdade, obtemos que $(1,w)(1,u^{-1}v) = (1,w)(1,y) = (1,0)$, o que nos permite deduzir que $(1,u^{-1}v) \in U(S)$. Assim, como $(u,0)$ também é uma unidade em $S$, podemos concluir que $(u,v) \in U(S)$ e, consequentemente, $S$ é limpo.

Agora suponha que $(e,x) + (u,v) = (e_1,x_1) + (u_1,v_1)$ em $S$, onde $(e,x)$ e $(e_1,x_1)$ são idempotentes, $(u,v)$ e $(u_1,v_1)$ são unidades. Desse modo, como $R$ é unicamente limpo a igualdade $e + u = e_1 + u_1$, nos diz que $e = e_1$ e $u = u_1$. Para seguir com a demonstração iremos afirmar que (Se $(e,x)^2 = (e,x) \in S$, então $e^2 = e$ e $x = 0$). Para provar tal afirmação, temos por hipótese que $(e,x)^2 = (e,x)$, assim $e^2 = e$. Usando a condição $(b)$

$$(e,x)^2 = (e,x)$$

$$= (e^2, ex + xe + x^2) = (e,x)$$

$$= (e, 2ex + x^2) = (e,x)$$

Desse modo, podemos concluir que

$$x = 2ex + x^2 \tag{1}$$

Consequentemente, se multiplicarmos (1) por $e$, obtemos $ex = 2ex + ex^2$, melhor escrevendo $ex^2 + ex = 0$. Por outro, lado se multiplicarmos (1) por $x$, encontramos

$$x^2 = 2ex^2 + x^3 \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1) e usando que $ex^2 = -ex$, obtemos que $x = x^3$ e portanto $x^2$ é um idempotente em $V$. Por $(c)$ existe algum $y \in V$, de modo que $-x^2 + y + (-x^2)y = 0$, concluindo que

$$-x^2 + y = x^2 y \tag{3}$$

Multiplicando (3) por $x^2$, encontramos $-x^4 + x^2y - x^4y = 0$, usando que $x^2$ é idempotente e (3), podemos concluir que $-x^2 - x^2 + y - x^2y = 0$, usando (3) novamente, encontramos $-x^2 - x^2 + y + x^2 - y = 0$, concluindo finalmente que, $x^2 = 0$, e portanto $x = x^3 = 0$. Como consequência disso $e = e_1$ e $x = 0 = x_1$. Logo, $(e, x) = (e_1, x_1)$.

Por outro lado, suponha que $S$ é unicamente limpo e $V$ não contém nenhum idempotente diferente de zero. $(a)$ acontece naturalmente pela definição de $S$. Se $e^2 = e \in R$, então $(e, 0)$ é um idempotente em $S$ e pela Proposição 4.1.1 é central, em particular $(e, 0)$ comuta com $(0, v)$, para todo $v \in V$, assim $(e, 0)(0, v) = ev = ve = (0, v)(e, 0)$ e portanto $(b)$ se verifica. Finalmente, dado $v \in V$ escreva $(1, v) = (e, x) + (u, z)$ no qual $(e, x)$ é um idempotente e $(u, v)$ é uma unidade.

Desse modo $1 = e + u$ em $R$ e por $(a)$ $e = 0$. Por outro lado

$$(e, x)^2 = (e, x)$$

$$= (e, ex + xe + x^2) = (e, x)$$

, e como $e = 0$, temos que $x^2 = x$, então $x = 0$ por $V$ não possuir idempotentes não nulos. Consequentemente, $(1, v)$ é uma unidade de $S$ e $(c)$ ocorre devido $(1, v)^{-1} = (1, w)$, para algum $w \in V$. ■

Vale a pena notar que não é necessário que $V$ contenha só idempotentes nulos para que $I(R; V)$ seja unicamente limpo. De fato, o anel $I(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ é unicamente limpo.

Podemos agora dar exemplos de anéis unicamente limpos não comutativos.

**Exemplo 4.1.5.** *Sejam $R$ um anel unicamente limpo e $T_n(R)$ o conjunto de todas as matrizes triangulares.*

$$\text{Se } S = \{[a_{ij}] \in T_n(R) \mid a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}\}$$

*então $S$ é unicamente limpo e não é comutativo se $n \geq 3$.*

**Demonstração**. Tome $V = \{[a_{ij}] \in T_n(R) \mid a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 0\}$. Basta mostrar o resultado para as matrizes triangulares superiores. Seja $A = [a_{ij}] \in S$ uma matriz triangular superior e observe que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{11} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos considerar um elemento qualquer de $R$, por exemplo $a_{11} \in R$, como uma matriz diagonal. Assim, temos a identificação $S = R + V$, onde $R \cap V = \{0\}$. Portanto, $S \cong R \oplus V = I(R;V)$. Desse modo, a condição $(a)$ é válida. Para a condição $(b)$, em vista de que todos os idempotentes de $R$ são centrais, note que

$$e \begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & ea_{1i} & \cdots & ea_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & ea_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{1i}e & \cdots & a_{1n}e \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{in}e \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} e$$

Finalmente para a condição $(c)$, dado um elemento $v \in V$, temos que

$$v = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

e fazendo

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{11}a_{1i} & \cdots & a_{11}a_{1n} + \cdots + a_{1i}a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{ii}a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & a_{11}a_{1i} & \cdots & a_{11}a_{1n} + \cdots + a_{1i}a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & a_{ii}a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

onde $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ uma matriz qualquer de $S$

Portanto, como toda matriz triangular superior em que sua diagonal principal é diferente de zero é invertível, podemos concluir que $v \in J(S)$, ou seja, $V \subseteq J(S)$. Assim, dado $v \in V$, podemos escrevê-lo como $(0, v) \in S$. Consequentemente, como $V \subseteq J(S)$, temos que $(1, 0) + (0, v) \in U(S)$, isto é, $(1, v) \in U(S)$. Portanto, existe $w \in V$, tal que $(1, v)(1, w) = (1, 0)$. Logo, $(1, v+w+vw) = (1, 0)$, o que implica que $v+w+vw = 0$. Assim, a condição $(c)$ está verificada. ■

## 4.2 Anéis Locais

Nesta seção, iremos caracterizar e estudar as propriedades de uma classe de anéis de suma importância no decorrer do nosso trabalho que são os anéis locais, isto é, são os anéis cuja a soma de não unidades, também não é uma unidade. O radical de Jacobson destes anéis é bem determinado. De fato, é o conjunto das não unidades. Além disso, é o único ideal maximal deste anel. Os resultados desta seção relacionam anéis unicamente limpos com anéis booleanos.

**Definição 4.2.1.** *Seja $R$ um anel com 1, não necessariamente comutativo. Dizemos que $R$ é local, se a soma de quaisquer dois elementos que não são unidades também não é uma unidade.*

**Proposição 4.2.1.** *Se $R$ é um anel local, então a soma de uma unidade e de um elemento que não é uma unidade é uma unidade.*

**Demonstração**. Sejam $x$ uma unidade e $y$ um elemento que não é uma unidade. Se $x + y = z$ não é uma unidade, então, $x = z + (-y)$ não é uma unidade, o que é uma contradição. Logo, $x + y$ é uma unidade. ■

**Lema 4.2.1.** *Seja $R$ um anel local. Se $x$ e $y$ não são unidades, então, $xy$ também não é unidade.*

**Demonstração**. Suponha que $xy$ é uma unidade. Assim, como $x$ não é unidade, segue pela Proposição 4.2.1 que $xy + x = x(y + 1)$ é uma unidade. Além disso, note que $y + 1$ também é uma unidade, pois $y$ não é uma unidade e 1 é unidade. Consequentemente, $x = (xy + x)(y + 1)^{-1}$ é uma unidade, pois o produto de duas unidades é uma unidade. Porém, isso é uma contradição, já que $x$ não é unidade. Logo, $xy$ não é unidade. ■

**Corolário 4.2.1.** *Em um anel local são válidas as seguintes afirmações*

($a$) *O produto de um elemento que não é unidade e de uma unidade não é um elemento unidade.*

($b$) *O produto de uma unidade e de um elemento que não é unidade, não é uma unidade.*

**Demonstração**. ($a$) Sejam $x$ um elemento que não é unidade e $y$ uma unidade. Se $xy$ fosse uma unidade, teríamos que $x = (xy)y^{-1}$ seria uma unidade, pois o produto de duas unidades é uma unidade, o que é uma contradição. Logo, $xy$ é um elemento que não é uma unidade.

($b$) É uma consequência de ($a$). ■

**Proposição 4.2.2.** *Se $R$ é um anel local com elemento identidade 1, então $a \in J(R)$ se, e somente se, $a$ é um elemento que não é unidade de $R$.*

**Demonstração**. Suponha que $a \in J(R)$ e seja uma unidade de $R$. Assim, como $J(R)$ é um ideal de $R$, segue que, $J(R) = R$, contrariando a maximalidade de $J(R)$. Logo, $a$ é um elemento que não é uma unidade de $R$.

Por outro lado, suponha que $a$ não seja uma unidade de $R$. Dado um elemento arbitrário $r \in R$, pelo Corolário 4.2.1 ($a$) e pelo Lema 4.2.1, sabemos que $-ra$ é um elemento que não é uma unidade. Além disso, pela Proposição 4.2.1, temos que $1 - ra$ é uma unidade, para todo $r \in R$. Logo, $a \in J(R)$. ■

**Lema 4.2.2.** *Um anel $R$ com 1, é local se, e somente se, $R$ é limpo e 0 e 1 são os únicos idempotentes de $R$.*

**Demonstração**. Suponha que $R$ seja um anel local não nulo. Seja $a \in R$ tal que $a \neq 0$. Se $a \in J(R)$, então, $a$ não é uma unidade. Assim, como 1 é uma unidade, temos que $a - 1$ é uma unidade. Além disso, note que $a = (a - 1) + 1$, o que implica que $a$ é um elemento limpo. Por outro lado, se $a \notin J(R)$, então, $a$ é uma unidade. Neste caso, note que $a = a + 0$ implicando novamente que $a$ é um elemento limpo. Logo, podemos concluir que $R$ é limpo.

Vejamos que 0 e 1 são os únicos idempotentes de $R$. Seja $e$ um idempotente de $R$. Assim,

$e^2 = e$ implica que $e(e-1) = 0$. Agora, note que se $e$ for uma unidade, então, $e - 1 = 0$, isto é, $e = 1$. Por outro lado, se $e$ não for uma unidade, então, $e \in J(R)$. Desse modo, pela Proposição 2.2.4, segue que $e = 0$.

Reciprocamente, assuma que $R$ seja limpo e que os únicos idempotentes de $R$ sejam 0 e 1. Vamos provar que se $a \notin J(R)$, então $a \in U(R)$. De fato, se $a \notin J(R)$, então pela Proposição 2.2.2 existe $r \in R$ tal que $1 - ar$ é um elemento que não é uma unidade de $R$. Assim, como $R$ é um anel limpo e 0 e 1 são os únicos idempotentes de $R$, podemos escrever $1 - ar = 0 + u$ ou $1 - ar = 1 + u$, onde $u \in U(R)$. Porém, já vimos que a primeira possibilidade não ocorre. Desse modo, segue que $ar = -u$, o que implica que $ar(-u)^{-1} = 1$. Portanto, $a$ tem um inverso à direita. Similarmente, existe $v \in U(R)$ tal que $1 - sa = 1 + v$, para todo $s \in R$. Logo, $(-v)^{-1}sa = 1$, isto é, $a$ tem um inverso à esquerda. Assim, $a$ é uma unidade de $R$. Consequentemente, se $x, y \notin U(R)$, então $x, y \in J(R)$. Desse modo, uma vez que $J(R)$ é um ideal de $R$, segue que $x + y \in J(R)$ ou equivalentemente, $x + y \notin U(R)$. Portanto, $R$ é local. ∎

**Teorema 4.2.1.** *As seguintes afirmações são equivalentes para um anel $R$ com elemento identidade* 1*.*

($a$) *$R$ é local e unicamente limpo;*

($b$) *$R$ é unicamente limpo e os únicos idempotentes em $R$ são* 0 *e* 1*;*

($c$) *$R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$.*

**Demonstração**. ($a$) implica ($b$): decorre do lema anterior.

($b$) implica ($c$): Vamos mostrar que $a + J(R) \in R/J(R)$, então, $a + J(R) = 0 + J(R)$ ou $a + J(R) = 1 + J(R)$. Suponhamos que $a + J(R) \neq 0 + J(R)$ e $a + J(R) \neq 1 + J(R)$. Neste caso, temos que $a \notin J(R)$ e $1 - a \notin J(R)$, isto é, $a$ e $1 - a$ são unidades pela Proposição 4.2.2. Agora, note que $0 + (1 - a) = 1 + (-a)$ são duas decomposições do mesmo elemento em uma soma de idempotente e unidade, o que implica que $0 = 1$, sendo assim uma contradição. Portanto, $a + J(R) = 0 + J(R)$ ou $a + J(R) = 1 + J(R)$ e temos que $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$.

($c$) implica ($a$): Suponhamos que $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$. Vamos provar que $R$ é local e unicamente limpo. Sejam $u$ e $v$ elementos que não são unidades de $R$. Por hipótese, $u + J(R) = 0 + J(R)$ ou $u + J(R) = 1 + J(R)$; e $v + J(R) = 0 + J(R)$ ou $v + J(R) = 1 + J(R)$. Note que se $u + J(R) = 1 + J(R)$ ou $v + J(R) = 1 + J(R)$, então, $1 - u \in J(R)$ ou $1 - v \in J(R)$, o que é uma contradição, pois $1 - u$ é uma unidade. Assim, $u + J(R) = 0 + J(R)$ e $v + J(R) = 0 + J(R)$, o que implica $u + v + J(R) = 0 + J(R)$, isto é, $u + v \in J(R)$. Portanto, $u + v$ não é unidade e podemos concluir que $R$ é local. Logo, pelo Lema 4.2.2, $R$ é limpo. Além disso, se $e + u = f + v$, onde $e^2 = e, f^2 = f$ e $u, v \in U(R)$. Se $e = f$, então, $u = v$ e $R$ é unicamente limpo. Se $e \neq f$, então, podemos assumir sem perda de generalidade que $e = 0$ e $f = 1$, pois 0 e 1 são os únicos idempotentes de $R$. Neste caso,

$u = 1 + v$ e temos que $1 - u = v$ é uma unidade de $R$. Assim, como $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$, temos que $1-u+J(R) = 0+J(R)$, ou $1-u+J(R) = 1+J(R)$. Porém, se $1-u+J(R) = 0+J(R)$, então, $1-u \in J(R)$, o que é uma contradição. Do mesmo modo, se $1-u+J(R) = 1+J(R)$ então, $u \in J(R)$, o que também é uma contradição. Portanto, $e = f$ e $u = v$. ■

Note que pela demonstração do teorema anterior se $R$ é unicamente limpo e $a \in R$, então, $a$ e $1 - a$ não podem ser simultaneamente unidades.

**Lema 4.2.3.** *Seja $R$ um anel limpo.*

($i$) *Idempotentes podem ser levantados módulo todo ideal $I$ de $R$.*

($ii$) *Se $T \nsubseteq J(R)$ é um ideal à direita (à esquerda) de $R$, então existe $0 \neq e^2 = e \in T$.*

**Demonstração**. ($i$) É uma consequência da Proposição 3.1.2 e do Corolário 3.1.1.

($ii$) Suponha que $T \nsubseteq J(R)$ é um ideal à direita que não contém idempotentes não nulos. Seja $a \in T$. Uma vez que $R$ é um anel limpo, podemos escrever $a = e + u$, onde $e^2 = e \in R,\ u \in U(R)$. Note que

$$a^2 - a = (e+u)^2 - (e+u) = e + eu + ue + u^2 - e - u = eu + ue + u^2 - u =$$

$$= (e+u)u - u(1-e) = (e+u)u - u(1-e)u^{-1}u = (a - u(1-e)u^{-1})u.$$

Consequentemente, temos que

$$(a^2 - a)u^{-1} = a - u(1-e)u^{-1}$$

$$u(1-e)u^{-1} = a - (a^2 - a)u^{-1} \in T,$$

pois $T$ é um ideal à direita e $a \in T$. Desse modo, $u^{-1}(u(1-e)u^{-1})u = 1 - e \in T$. Assim, como $T$ não possui idempotentes não nulos, podemos concluir que $1 - e = 0$, isto é, $e = 1$. Desse modo, $a = 1 + u$, o que implica que $1 - a = -u$. Agora, note que se $r$ é um elemento arbitrário de $R$, sabemos que $ra \in T$, pois $T$ é um ideal à direita de $R$. Consequentemente, pelos mesmos argumentos anteriores, temos que $1 - ra$ é uma unidade de $R$. Portanto, $a \in J(R)$. Logo $T \subseteq J(R)$, o que é uma contradição. Similarmente, o resultado é válido se $T$ é um ideal à esquerda de $R$. ■

Retornando para anéis unicamente limpos, vamos provar o seguinte resultado.

**Lema 4.2.4.** *Se $R$ é unicamente limpo, então $R/J(R)$ possui característica* 2.

**Demonstração**. Precisamos provar que $2R \subseteq J(R)$. Se $2(R) \nsubseteq J(R)$ pelo Lema 4.2.3, existe $0 \neq e^2 = e \in 2R$. Desse modo $e = 2b$, para algum $b \in R$. Podemos assumir que $eb = b = be$. Note que pela Proposição 2.1.2, sabemos que $1-e$ é um idempotente e $1-2e$ é uma unidade. Agora, observe que a seguinte igualdade é válida

$$(1-e) + (1-2e) = 1 + ((1-e) - 2e).$$

Além disso, temos que $u = (1-e) - 2e$ é uma unidade com inverso $(1-e) - b$, pois

$$u((1-e)-b) = u - ue - ub = (1-e) - 2e - ((1-e)-2e)e - ((1-e)-2e)b =$$

$$(1-e) - 2e + 2e - b + eb + 2eb = (1-e) - b + b + 2b = (1-e) + e = 1$$

e $R$ é finitamente direto, pelo Corolário 4.1.2. Desse modo, como temos duas decomposições como soma de um idempotente e de uma unidade e $R$ é unicamente limpo, podemos concluir que $1 - e = 1$, isto é, $e = 0$, o que é uma contradição. Portanto, $2R \subseteq J(R)$ e, assim, a característica de $R/J(R)$ é 2. ■

## 4.3 Anéis Regulares

A concepção de anéis regulares de von Neumann ocorreu em 1936 quando John von Neumann definiu um anel regular como um anel $R$ com a propriedade de que para todo $a \in R$ existe $b \in R$ tal que $a = aba$. Esses anéis se relacionam com os anéis unicamente limpos e os anéis booleanos, nos dando a maioria dos resultados que usaremos nos teoremas principais deste trabalho.

**Definição 4.3.1.** *Um anel $R$ é chamado Von Neumann regular ou (no sentido de Von Neumann) se existir $x \in R$ tal que $rxr = r$, para todo $r \in R$.*

**Teorema 4.3.1.** *Seja $R$ um anel com elemento identidade 1. As seguintes afirmações são equivalentes para um anel $R$.*

($a$) *$R$ é unicamente limpo e $J(R) = \{0\}$;*

($b$) *$R$ é limpo, possui característica 2 e 1 é a única unidade em $R$;*

($c$) *$R$ é booleano;*

($d$) *$R$ é (Von Neumann) regular e unicamente limpo.*

**Demonstração**. ($a$) implica ($b$): Suponha que $R$ é unicamente limpo e $J(R) = \{0\}$. Assim, claramente $R$ é limpo e pelo Lema 4.2.4, $R/J(R) = R$ possui característica 2. Agora, seja $u$ uma unidade de $R$ tal que $u \neq 1$. Pelo Lema 4.2.3, existe $0 \neq e^2 = e \in (1-u)R$. Seja $e = (1-u)r$, para algum $r \in R$. Pela Proposição 4.1.1, idempotentes de um anel unicamente limpo são centrais. Consequentemente, $e(1-u)e$ é uma unidade de $eRe$, pois $(e(1-u)e)(ere) = e(1-u)ere = e(1-u)r = ee = e$, $eRe$ é um anel unicamente limpo (pelo Corolário 4.1.1) e $eRe$ é finitamente direto (pelo Corolário 4.1.2). Desse modo, temos que a igualdade $0 + e(1-u)e = e - eue$ é válida, implicando que $e = 0$, pois $eRe$ é unicamente limpo, o que é uma contradição. Logo, 1 é a única unidade de $R$.

($b$) implica ($c$): Assuma que $R$ é limpo. Dado $a \in R$, temos que $a = e + u$, onde $e^2 = e$ e $u \in U(R)$. Uma vez que 1 é a única unidade de $R$, segue que $u = 1$, o que implica $a = e + 1$. Desse modo, $a^2 = e^2 + 2e + 1 = e + 1 = a$, pois a característica de $R$ é 2.

$(c)$ implica $(d)$: Suponha que $R$ é booleano. Pelo Exemplo 4.3, já sabemos que $R$. Além disso, dado $e \in R$ um elemento arbitrário, temos que $eee = e$, pois $e$ é um idempotente. Portanto $R$ é von Neumann regular.

$(d)$ implica $(a)$. Seja $x \in J(R)$. Assim, $1 - xr$ é uma unidade, para todo $r \in R$. Por outro lado, como $R$ é von Neumann regular, existe $y \in R$ tal que $xyx = x$, isto é, $xyx - x = 0$, ou equivalentemente, $(1 - xy)(-x) = 0$. Portanto, $x = 0$. Logo, $J(R) = \{0\}$. ■

**Definição 4.3.2.** *Se $I$ é um ideal de $R$, dizemos que idempotentes se levantam unicamente módulo $I$ se sempre que $a^2 - a \in I$, existir um único idempotente $e \in R$ tal que $e - a \in I$. Neste caso, $e$ levanta unicamente $a$.*

Note que estas condições implicam que, se $e - f \in I$, $e^2 = e$, $f^2 = f$, então $e = f$, pois $e$ e $f$ ambos levantam $f$. Em particular, 0 é o único idempotente de $I$. Assim, em um anel limpo a condição de unicamente levantado implica que $I \subseteq J(R)$, pelo Lema 4.2.3.

**Teorema 4.3.2.** *Seja $R$ um anel com elemento identidade 1. As seguintes afirmações são equivalentes.*

$(i)$ *$R$ é unicamente limpo;*

$(ii)$ *$R/J(R)$ é booleano e idempotentes se levantam unicamente módulo $J(R)$;*

$(iii)$ *$R/J(R)$ é booleano, idempotentes se levantam módulo $J(R)$ e idempotentes em $R$ são centrais;*

$(iv)$ *Para todo $a \in R$, existe um único idempotente $e \in R$ tal que $e - a \in J(R)$.*

**Demonstração**. $(i)$ implica $(ii)$: Suponhamos que $R$ é unicamente limpo. Em particular, $R$ é limpo. Assim, pelo Lema 4.2.3, idempotentes podem ser levantados módulo $J(R)$. Vamos provar que é unicamente. Para isso, suponha que sempre que $a^2 - a \in J(R)$, existam dois idempotentes $e, f \in R$ tais que $e - a \in J(R)$ e $f - a \in J(R)$. Nosso objetivo é provar que $e = f$. Uma vez que $e - a \in J(R)$ e $f - a \in J(R)$, sabemos que $1 - (e - a)$ e $1 - (f - a) \in U(R)$, isto é, $1 - (e + a)$ e $1 - (f + a) \in U(R)$. Assim, $(1-e)-(1-e+a) = (1-f)-(1-f+a)$. Desse modo, como $R$ é unicamente limpo, segue que $1 - e = 1 - f$, isto é, $e = f$. Falta mostrar que $R/J(R)$ é booleano. Note que, como $J(R/J(R)) = \{0\}$, pelo Teorema 4.3.1, basta verificar que $R/J(R)$ é unicamente limpo. Observe que, se $a + J(R) \in R/J(R)$, então, como $R$ é unicamente limpo (e, em particular, limpo), $a = e + u$, onde $e^2 = e$ e $u \in U(R)$. Assim, $a + J(R) = e + J(R) + u + J(R)$, onde $e + J(R)$ é um idempotente e $u + J(R)$ é uma unidade. Portanto, $R/J(R)$ é limpo. Agora, suponhamos que $a + J(R) = e + J(R) + u + J(R) = f + J(R) + v + J(R)$, onde $e + J(R)$ e $f + J(R)$ são idempotentes e $u + J(R)$ e $v + J(R)$ são unidades. Note que

$$(e + J(R))^2 = (e + J(R))$$

$$e^2 + J(R) = e + J(R)$$

$$e^2 - e \in J(R)$$

Assim, pelo Lema 4.2.3 ($i$), existe $g^2 = g$ tal que $e - g \in J(R)$. Além disso, $g$ levanta a si mesmo e como já sabemos que idempotentes se levantam unicamente módulo $J(R)$, temos que $e = g$. Em particular, $e$ é um idempotente. Usando o mesmo argumento para $f$, podemos provar que $f$ também é um idempotente.

Por outro lado, como $u + J(R) \in U(R/J(R))$, existe $(u + J(R))^{-1}$ tal que $(u + J(R))(u + J(R))^{-1} = 1 + J(R)$. Consequentemente, $uu^{-1} - 1 \in J(R)$, o que implica que $1 + (uu^{-1} - 1)$ é uma unidade de $R$, isto é, $uu^{-1} \in U(R)$. Logo, $u \in U(R)$. Analogamente, $v$ também é uma unidade de $R$. Desse modo, podemos escrever $a = e + (u + a - e - u)$ e $a = f + (v + a - f - v)$. Observe que $a - e - u$ e $a - f - v \in J(R)$, pois

$$a - e - u + J(R) = e + u - e - u + J(R) = 0 + J(R)$$

$$a - f - v + J(R) = f + v - f - v + J(R) = 0 + J(R).$$

Assim, $u + (a - e - u)$ e $v + (a - f - v) \in U(R)$, pela Proposição 2.2.2. Consequentemente, $e = f$. Portanto, $e + J(R) = f + J(R)$. Logo, $R$ é unicamente limpo.

($ii$) implica ($iii$): Sejam $e^2 = e \in R$ e $r \in R$. Vejamos que $e$ e $e + (er - ere)$ são ambos idempotentes que levantam $e$. Inicialmente, note que $e + (er - ere)$ é um idempotente de $R$, pela Proposição 2.1.2 ($c$). Além disso, como todos os idempotentes de $R/J(R)$ são centrais (pois $R/J(R)$ é unicamente limpo), segue que

$$e - (e + (er - ere)) + J(R) = -er + ere + J(R) =$$

$$= -er + J(R) + (er + J(R))(e + J(R)) =$$

$$= -er + J(R) + (e + J(R))(er + J(R)) = -er + J(R) + eer + J(R) =$$

$$= -er + er + J(R) = 0 + J(R).$$

Assim, $e - e + (er - ere) \in J(R)$. Desse modo, $e$ e $e + (er - ere)$ são ambos idempotentes de $R$ que levantam $e$ módulo $J(R)$. Portanto, pela unicidade, $er = ere$. Similarmente, podemos verificar que $re = ere$. Logo, os idempotentes de $R$ são centrais.

($iii$) implica ($iv$): Dado $a \in R$, note que como $R/J(R)$ é booleano, sabemos que $a + J(R)$ é um idempotente de $R/J(R)$, isto é, $a^2 - a \in J(R)$. Desse modo, por ($iii$), existe um idempotente $e \in R$ tal que $e - a \in J(R)$. Suponhamos que $f$ também é um idempotente de $R$ tal que $f - a \in J(R)$. Observe que $e(1 - f)$ e $f(1 - e)$ são idempotentes de $R$, pois os idempotentes de $R$ são centrais. Vamos verificar que $e(1 - f)$ e $f(1 - e) \in J(R)$. De fato, $e - f = (e - a) - (f - a) \in J(R)$. Consequentemente, $e(1 - f) = (e - f)(1 - f) \in J(R)$. De modo análogo, $f(1 - e) \in J(R)$. Portanto, pela Proposição 2.2.4, $e = ef$ e $f = fe$.

Logo, $e = f$.

$(iv)$ implica $(i)$: Dado $a \in R$, usando a condição $(iv)$ para $-a$, existe um único idempotente $e$ de $R$, tal que $e + a \in J(R)$. Assim, uma vez que $a = (1 - e) + [-1 + (e + a)]$, segue que $R$ é limpo. Suponhamos que $a = f + u$, onde $f^2 = f$ e $u \in U(R)$. Observe que se $a + J(R)$ é uma unidade de $R/J(R)$, então, por $(iv)$, existe um único idempotente $e$ de $R$ tal que $e + J(R) = a + J(R)$. Assim, $e + J(R)$ é um idempotente e uma unidade de $R/J(R)$, o que implica que $a + J(R) = e + J(R) = 1 + J(R)$, ou seja, $1 + J(R)$ é a única unidade de $R/J(R)$. Agora, note que $(1 - f) - a = (1 - f) - (f + u) = (1 - 2f) - u$. Portanto, $1 - 2f + J(R) - u + J(R) = 1 + J(R) - (1 + J(R)) = J(R)$. Consequentemente, $(1 - f) - a \in J(R)$. Portanto, $1 - f$ e $e$ levantam $a$, o que nos permite concluir, pela unicidade de $(iv)$, que $1 - f = e$. Logo, $R$ é unicamente limpo. ■

No Teorema 4.3 as hipóteses de que os idempotentes se levantam unicamente em $(ii)$ e que idempotentes são centrais em $(iii)$ são essenciais, como veremos a seguir.

**Exemplo 4.3.1.** *Seja*

$$R = \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix}.$$

*Então, $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ é booleano e idempotentes se levantam módulo $J(R)$, mas $R$ não é unicamente limpo pelo Corolário 4.1.1.*

**Definição 4.3.3.** *Dizemos que um elemento $a \in R$ é fortemente $J$-limpo, se existir um idempotente $e \in R$ e um elemento $w \in J(R)$ tal que $a = e + w$ e $ew = we$. Consequentemente, um anel $R$ é fortemente $J$-limpo quando todos os elementos de $R$ são fortemente $J$-limpos.*

**Teorema 4.3.3.** *Seja $R$ um anel com identidade* 1. *As seguintes condições são equivalentes.*

$(i)$ *$R$ é unicamente limpo;*

$(ii)$ *$R$ é fortemente $J$-limpo com todos os idempotentes centrais;*

$(iii)$ *Toda imagem homomórfica de $R$ é uma anel unicamente limpo.*

**Demonstração**. $(i)$ implica $(ii)$: Seja $R$ um anel unicamente limpo. Sabemos que todo idempotente de $R$ é central. Observe que dado qualquer $x \in R$, pelo Teorema 4.3.2, existe um único idempotente $e \in R$ tal que $e - x \in J(R)$. Desse modo, podemos escrever $x = e + (x - e)$, onde $e^2 = e \in R$, $x - e \in J(R)$ e $e(x - e) = (x - e)e$. Logo, $R$ é fortemente $J$-limpo.

$(ii)$ implica $(i)$: Seja $R$ um anel fortemente $J$-limpo, ou seja, para qualquer $x \in R$, $x = e + w$, onde $e^2 = e$, $w \in J(R)$ e $ew = we$. Assim, tendo em vista que $-w \in J(R)$, temos que $1 + (2e - 1)w \in U(R)$, isto é, $2e - 1 + w \in U(R)$. Portanto, podemos escrever $x = (1 - e) + (2e - 1 + w)$. Logo, $R$ é limpo. Suponhamos que $x = e_1 + u_1 = e_2 + u_2$, onde $e_1^2 = e,\ e_2^2 = e_2$ e $u_1,\ u_2 \in U(R)$. Observe que $R/J(R)$ é booleano, pois dado $y + J(R) \in R/J(R)$, por $R$ ser fortemente $J$-limpo, $y = e + w$, onde $e^2 = e,\ w \in J(R)$ e $ew = we$. Assim, $y + J(R) = e + w + J(R) = e + J(R) + w + J(R) = e + J(R)$. Desse modo, $y + J(R) = e + J(R)$ é um idempotente, concluindo que $R/J(R)$ é booleano e portanto unicamente limpo. Consequentemente, $x + J(R) = e_1 + J(R) + u_1 + J(R) = e_2 + J(R) + u_2 + J(R)$, o que implica que $e_1 + J(R) = e_2 + J(R)$, ou seja, $e_1 - e_2 \in J(R)$. Além disso, $e_2(1 - e_1) = (e_1 - e_2)(e_1 - 1) \in J(R)$, segue que como todo idempotente em $R$ é central, $e_2(1 - e_1)$ é um idempotente que pertence a $J(R)$. Assim, $e_2 = e_2e_1$. analogamente $e_1 = e_1e_2$. Logo, $e_1 = e_2$, o que podemos concluir que $R$ é unicamente limpo.

$(iii)$ implica $(i)$: É imediato.

$(i)$ implica $(iii)$: Seja $R$ um anel unicamente limpo. Devemos mostrar que se $S$ é uma imagem por um homomorfismo, então $S$ é unicamente limpo. De fato, de $(i)$ implicar $(ii)$, temos que $R$ é um anel fortemente $J$-limpo com todos os idempotentes centrais. Desse modo se $S$ é uma imagem homomórfica de $R$, digamos $S = f(R)$, onde $f$ é um homomorfismo de anéis. Seja $g^2 = g \in S$, então existe $e^2 = e \in R$ tal que $f(e) = g$. Além disso, dado qualquer $s \in S$, existe $r \in R$, tal que $f(r) = s$. Portanto, todo idempotente de uma imagem homomórfica de $R$ é central, pois

$$sg = f(r)f(e) = f(re) = f(er) = f(e)f(r) = gs.$$

Vejamos que toda imagem homomórfica de um anel fortemente $J$-limpo é também fortemente $J$-limpo, pois pela Proposição 2.2.5 elementos do radical de Jacobson são levados para elementos do radical de Jacobson por homomorfismo. Além disso, idempotentes são preservados por homomorfismos. Consequentemente, $S$ é um anel fortemente $J$-limpo. Logo, $S$ é unicamente limpo por $(ii)$ implicar $(i)$. ■

**Corolário 4.3.1.** *Todo anel quociente de um anel unicamente limpo também é unicamente limpo.*

**Demonstração**. Sejam $R$ um anel unicamente limpo e $I$ um ideal maximal qualquer de $R$. Podemos concluir que $R/I$ é unicamente limpo, usando o Teorema 4.3.3 para o homomorfismo natural. ■

Observe que $\mathbb{Z}_2$ é o único anel com divisão unicamente limpo. De fato, suponha que $R$ é um anel com divisão unicamente limpo. Vejamos que $J(R) = \{0\}$. Dado $0 \neq x \in J(R)$, sabemos que $x$ possui um inverso. Portanto, $xx^{-1} = 1 \in J(R)$, o que é uma contradição. Logo, pelo Teorema 4.2.1, $R/J(R) \cong R \cong \mathbb{Z}_2$.

Seja $R$ um anel unicamente limpo comutativo. Uma pergunta natural é se $R/M \cong \mathbb{Z}_2$, para todo ideal maximal $M$ de $R$. A resposta é afirmativa, pois pelo Teorema

4.3.1, $R/M$ é unicamente limpo, para todo ideal maximal $M$ de $R$. Além disso, como $R/M$ é um corpo, em particular $R/M$ é um anel com divisão. Desse modo, uma vez que $\mathbb{Z}_2$ é o único anel com divisão unicamente limpo, podemos concluir que $R/M \cong \mathbb{Z}_2$

**Definição 4.3.4.** *Um anel $R$ é chamado quase-duo à esquerda (quase-duo à direita, respectivamente) se todo ideal maximal à esquerda (à direita) de $R$ é um ideal.*

**Proposição 4.3.1.** *Todo anel unicamente limpo é quase-duo à esquerda e quase-duo à direita.*

**Demonstração**. Seja $M$ um ideal maximal à esquerda de um anel unicamente limpo $R$. Observe que pelo Teorema 4.3.2, $R/J(R)$ é um anel booleano, consequentemente $R/J(R)$ é unicamente limpo. Assim, $R/J(R)/M/J(R)$ é um anel booleano, pois $R/J(R)/M/J(R) \cong R/M$ e pelo Teorema 4.3.1, $(R/J(R))/(M/J(R)) \cong \mathbb{Z}_2$. Desse modo o $R$-módulo $R/M \cong R/J(R)/M/J(R)$ possui 2 elementos. Consequentemente, $R = M \cup (1 + M)$. Observe que, se $m \in M$ e $r \in R$, devemos mostrar que $mr \in M$. Desse modo isso é claro se $r \in M$, caso contrário $r = 1 + m_1$, onde $m_1 \in M$. Portanto, $mr = m(1 + m_1) = m + mm_1 \in M$. Logo $M$ é um ideal e $R$ é quase-duo. ■

Note que se $R$ é um anel limpo quase-duo à esquerda e quase-duo à, $R$ não é necessariamente unicamente limpo.

De fato, se $F$ é um corpo e $R = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a,\ b \in F\}$, então $R$ é um anel limpo, comutativo e local, mas não é unicamente limpo se $F \ncong \mathbb{Z}_2$.

**Proposição 4.3.2.** *Seja $R$ um anel. As seguintes condições são equivalentes.*

$(i)$ *$R$ é unicamente limpo;*

$(ii)$ *$R = Z(R) + J(R)$, onde $Z(R)$ é unicamente limpo e todos os idempotentes de $R$ são centrais;*

$(iii)$ *$R = C + V$ onde $C$ é um subanel de $R$ e $V$ é um ideal de $R$ tais que*

- $(a)$ *$C$ é unicamente limpo e se $c \in C$, então, $c$ é uma unidade de $C$;*
- $(b)$ *$V \subseteq J(R)$;*
- $(c)$ *Todo idempotente de $R$ é da forma $e + v$, onde $e^2 = e \in C$, $v \in V$ e $ev = ve$.*

**Demonstração**. $(i)$ implica $(ii)$: Pelo item $(iv)$ do Teorema 4.3.2 temos que dado $a \in R$, existe um único idempotente $e \in R$ tal que $e - a \in J(R)$. Assim, como $J(R)$ é um ideal de $R$, também temos que $a - e \in J(R)$. Portanto, como $a = e + (a - e)$, onde $e$ é um idempotente central, temos que $e \in Z(R)$ e $a - e \in J(R)$. Além disso, $Z(R)$ é unicamente limpo, pois dado $x \in Z(R)$, existe um único idempotente $e \in R$ tal que $x - e \in J(R)$. Assim, $-(1 - (x - e)) \in U(R)$, em particular $-(1 - (x - e)) \in Z(R)$, pois as unidades comutam com qualquer elemento. Portanto, $x = (1 - e) + (-1 + x + e)$. Logo, $Z(R)$ é unicamente limpo.

$(ii)$ implica $(iii)$: Já sabemos que $Z(R)$ é um subanel de $R$ e $J(R)$ é um ideal de $R$.

Assim, basta tomar $C = C(R)$ e $V = J(R)$.

$(iii)$ implica $(i)$ Inicialmente, observe que se $a^2 = a \in R$, então $a \in C$. De fato, por $(c)$ podemos escrever $a = e + v$, onde $e^2 = e \in C,\ v \in V$ e $ev = ve$. Neste caso, temos que

$$(e+v)^2 = e + v,\ \textit{isto é},$$

$$e + 2ev + v^2 = e + v,\ \textit{o que implica}$$

$$v = 2ev + v^2 \quad (1)$$

Assim, multiplicando (1) por $e$, obtemos que

$$ev = 2ev + ev^2,\ \textit{ou seja},$$

$$ev + ev^2 = 0 \quad (2)$$

Agora, multiplicando (1) por $v$, temos que

$$v^2 = 2ev^2 + v^3,\ \textit{o que implica}$$

$$v^3 = v^2 - 2ev^2 \quad (3)$$

Por (2) e (3), podemos concluir que

$$v^3 = v^2 + 2ev = v,\ \textit{por}\ (1)$$

Portanto, $v^4 = v^2$, isto é, $v^2$ é um idempotente de $V \subseteq J(R)$, por $(b)$. Logo $v^2 = 0$, pela Proposição 2.2.4. Consequentemente, $v = v^3 = 0$ e podemos concluir que $a = e \in C$.

Dado $r \in R$, podemos escrever $r = c_0 + v$, onde $c_0 \in C,\ v \in V$. Agora, como $c_0 \in C$ e $C$ é unicamente limpo, segue que $c_0 = e + c$, onde $e^2 = e \in C$ e $c$ é uma unidade de $C$ (e, assim, $c$ é uma unidade de $R$). Desse modo, $r = e + (c + v)$, onde $c + v$ é uma unidade de $R$, pois $V \subseteq J(R)$. Assim, $R$ é limpo. Suponhamos que $e + a = f + b \in R$, onde $e^2 = e,\ f^2 = f$ e $a, b \in U(R)$. Portanto, escreva $a = c + v$ e $b = d + w$, onde $c, d \in C$ e $v, w \in V \subseteq J(R)$. Consequentemente, $c$ e $d$ são unidades de $R$ pela condição $(a)$, além disso $e$ e $f \in C$. Portanto, $e + a = f + b$, torna-se

$$e + c + v = f + d + w$$

Desse modo $v - w \in C$, o que implica que $e + (c + v - w) = f + d$ é uma decomposição de $C$, onde $d$ e $c + v - w$ são unidades de $R$ e pela condição $(a)$ são unidades de $C$. Portanto, como $C$ é unicamente limpo, $e = f$. Logo, $R$ é unicamente limpo. ■

# 5 ANÉIS DE GRUPO NOS QUAIS TODO ELEMENTO É UNICAMENTE A SOMA DE UMA UNIDADE E UM IDEMPOTENTE

Neste capítulo, relacionaremos os anéis de grupos com os anéis vistos anteriormente, buscando resultados para determinar sob quais condições os anéis de grupos são unicamente limpos. Os resultados principais deste capítulo obtidos por J. Chen, W.K. Nicholson e Y. Zhou asseguram que se o anel de grupo $RG$ é unicamente limpo, então $R$ é unicamente limpo e $G$ é um 2-grupo. A recíproca é válida se $G$ é localmente finito.

## 5.1 Anéis de grupo

Sejam $G$ um grupo (não necessariamente finito) e $R$ um anel com identidade 1. Vamos construir um $R$-módulo, tendo os elementos de $G$ como uma base e, então usar as operações de $G$ e $R$ para definir uma estrutura de anel.

Para isso, denotaremos por $RG$ o conjunto de todas as combinações da forma.

$$\alpha = \sum_{g \in G} a_g g,$$

onde $a_g \in R$ e $a_g = 0$ quase sempre, isto é, apenas um número finito de vezes os coeficientes são diferentes de 0 em cada uma dessas somas.

Dado um elemento $\alpha = \sum\limits_{g \in G} a_g g$, definimos o suporte de $\alpha$ como sendo o subconjunto de elementos de $G$ que aparecem efetivamente na expressão de $\alpha$, isto é,

$$\mathrm{supp}(\alpha) = \{g \in G \mid a_g \neq 0\}.$$

Note que, segue da definição que dados dois elementos $\alpha = \sum\limits_{g \in G} a_g g$ e $\beta = \sum\limits_{g \in G} b_g g \in RG$, temos que $\alpha = \beta$ se, e somente se, $a_g = b_g$, para todo $g \in G$.

Definimos a soma de dois elementos de $RG$ como sendo

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) + \left(\sum_{g \in G} b_g g\right) = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g.$$

e o produto por

$$\alpha\beta = \left(\sum_{g \in G} a_g g\right)\left(\sum_{h \in G} b_h h\right) = \sum_{g,h \in G} a_g b_h gh.$$

Reordenando os termos na fórmula acima, podemos reescrever o produto como

$$\alpha\beta = \sum_{u \in G} c_u u,$$

onde

$$c_u = \sum_{gh=u} a_g b_h$$

Com tais operações, $RG$ é um anel que possui um elemento identidade $1 = \sum_{g \in G} u_g g$, onde o coeficiente correspondente ao elemento identidade do grupo é igual a 1 e $u_g = 0$ para qualquer outro elemento de $g \in G$.

Podemos também definir o produto de elementos de $RG$ por elementos $\gamma \in R$, como

$$\gamma \left( \sum_{g \in G} a_g g \right) = \sum_{g \in G} (\gamma a_g) g.$$

Com tal operação $RG$ é um $R$-módulo.

**Definição 5.1.1.** *O conjunto $RG$, com as operações definidas acima, é chamado o anel de grupo $G$ sobre $R$.*

O homomorfismo $\epsilon : RG \to R$ dado por

$$\epsilon \left( \sum_{g \in G} a_g g \right) = \sum_{g \in G} a_g$$

é chamado a aplicação de aumento de $RG$ e seu núcleo, denotado por $\Delta(G)$, é chamado o ideal de aumento de $RG$.

Note que, se um elemento $\alpha = \sum_{g \in G} a_g g \in \Delta(G)$, então,

$$\epsilon \left( \sum_{g \in G} a_g g \right) = \sum_{g \in G} a_g g = 0.$$

Portanto, podemos escrever $\alpha$ da forma

$$\alpha = \sum_{g \in G} a_g g - \sum_{g \in G} a_g = \sum_{g \in G} a_g (g - 1).$$

Observe que todos os elementos da forma $g - 1$, onde $g \in G$, pertencem a $\Delta(G)$.

Desse modo, mostramos que $\{g - 1 \mid g \in G,\ g \neq 1\}$ é o conjunto de geradores de $\Delta(G)$ sobre $R$. Além disso, note que a independência linear dos elementos deste conjunto é imediata.

Assim, podemos concluir que o conjunto $\{g-1 \mid g \in G,\ g \neq 1\}$ é uma base de $\Delta(G)$ sobre $R$.

Logo, podemos escrever

$$\Delta(G) = \left\{ \sum_{g\in G} a_g(g-1) \mid g \in G,\ g \neq 1,\ a_g \in R \right\}.$$

## 5.2 Anéis de grupo limpos

Nesta seção, usaremos resultados de capítulos anteriores e a estrutura de anéis de grupo para encontrar respostas para o tal questionamento.

**Questão 5.2.1.** *Se $R$ é um anel e $G$ é um grupo, sob que condições o anel de grupo $RG$ é limpo?*

Para encontrar a resposta para esta pergunta será necessário usar os fatos já provados ao longo da dissertação, do seguinte teorema.

**Teorema 5.2.1.** *Seja $R$ um anel com identidade $1$. As seguintes condições são satisfeitas.*

*(i) $R$ é local e unicamente limpo se, e somente se, $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$;*

*(ii) Toda imagem homomórfica de um anel unicamente limpo é também unicamente limpo;*

*(iii) $R$ é unicamente limpo se, e somente se, para todo $a \in R$, existe um único idempotente $e \in R$ tal que $e - a \in J(R)$;*

*(iv) $R$ é unicamente limpo se, e somente se, $R/J(R)$ é booleano, idempotentes se levantam módulo $J(R)$ e idempotentes de $R$ são centrais.*

Nosso interesse neste capítulo é determinar quando o anel de grupo $RG$ é unicamente limpo, e obtemos os dois resultados principais:

1. Se $RG$ é unicamente limpo, então $R$ é unicamente limpo e $G$ é um 2-grupo;
2. Se $R$ é um anel unicamente limpo e $G$ é um 2-grupo localmente finito, então $RG$ é unicamente limpo.

A seguir, vamos denotar a ordem de um elemento $g$ de um grupo $G$ por $o(g)$.

**Definição 5.2.1.** *O grupo $G$ é chamado um grupo de torção se todo elemento possui ordem finita. Se $p$ é um número primo, $g$ é chamado um elemento de $p$-torção se $o(g) = p^k$, para algum $k \geq 0$, e $G$ é chamado um $p$-grupo se todo elemento é de $p$-torção.*

**Definição 5.2.2.** *Um anel $R$ (ou um grupo $G$) é chamado localmente finito se todo subanel (ou subgrupo) finitamente gerado é finito.*

Alguns exemplos são: anéis booleanos, grupos finitos e grupos abelianos de torção.

**Exemplo 5.2.1.** *Se $R$ é um anel com identidade 1, localmente finito e $G$ é um grupo localmente finito, então $RG$ é limpo.*

**Demonstração**. Seja $w = \sum a_i g_i \in RG$, onde $a_i \in R$ e $g_i \in G$. Observe que $w \in R_0G_0$, onde $R_0$ é um subanel de $R$ gerado por $a_i$, e $G_0$ o subgrupo gerado por $g_i$. Desse modo $R_0G_0$ é um anel finito, o que implica que é limpo. Logo, $w$ é limpo em $R_0G_0$ e, consequentemente em $RG$. ■

**Exemplo 5.2.2.** *Seja $R$ um anel com identidade 1 e seja $G \neq \{1\}$ um grupo localmente finito, onde todo subgrupo finito possui ordem ímpar. Então, $RG$ não é unicamente limpo.*

**Demonstração**. Assuma que $RG$ seja um anel unicamente limpo. Desse modo, como $R$ é imagem homomórfica de $RG$, pelo Teorema 4.3.3, $R$ é unicamente limpo. Portanto, $R/J(R)$ é um anel booleano. Por hipótese, temos que todo subgrupo finito $H$ de $G$ possui ordem ímpar e, assim, $|H|$ é uma unidade de $R/J(R)$. Desse modo, $(R/J(R))G$ é um anel von Neumann regular, por [2]. Por outo lado, $(R/J(R))G$ é também unicamente limpo, pois é imagem homomórfica de $R/J(R)$, o que implica que $(R/J(R))G$ é booleano, o que é uma contradição, pois $G \neq \{1\}$. ■

**Lema 5.2.1.** *Sejam $R$ um anel qualquer com elemento identidade 1 e $G$ um grupo localmente finito. Então, $J(R)G \subseteq J(RG)$.*

**Demonstração**. Uma vez que $J(R)G$ é um ideal de $RG$, é suficiente mostrar que $1+x$ tem um inverso à direita em $RG$, para todo $x \in J(R)G$. Note que como $G$ é localmente finito temos que $x \in J(R)G_0$, onde $G_0$ é um subgrupo finito de $G$. Portanto, é suficiente mostrar que $1+x$ é invertível à direita em $RG_0$. Escreva $G_0 = \{g_0 = 1, g_1, g_2, \cdots, g_n\}$ e seja $x = \sum a_i g_i$, onde cada $a_i \in J(R)$. Consequentemente, $1 + x = 1 + \sum a_i g_i = \sum a'_i g_i$, onde $a'_0 = 1 + a_0$ e $a'_i = a_i$ para $i \geq 1$. Se $y = \sum s_i g_i \in RG_0$, então $(1+x)y = 1$ se, e somente se,

$$\sum_{k=0}^{n} \left( \sum_{g_i g_j = g_k} a'_i s_j \right) g_k = 1; \text{ ou equivalentemente } \sum_{g_i g_j = g_k} a'_i s_j = \begin{cases} 1, & se\ k = 0, \\ 0, & se\ k \neq 0. \end{cases}$$

Observe que temos equações lineares em $s_j$. Nas equações correspondentes a $g_k$, o termo envolvendo $s_k$ é $(1 + a_0)s_k$. Portanto, estas equações tem a representação matricial $(I_{n+1} + A)S = K$, onde $S = [s_0, s_1, \cdots, s_n]^T$, $K = [1, 0, \cdots, 0]^T$ e $A \in M_{n+1}(J(R)) = J[M_{n+1}(R)]$. Logo, $I_{n+1} + A$ é invertível, e portanto $y$ existe. ■

Na verdade, Connell [5] mostra que $J(R) = J(RG) \cap R$, para quaisquer anel $R$ e $G$ grupo localmente finito.

Nosso primeiro resultado principal depende do fato que se $R$ é um anel unicamente limpo e $S \subseteq R$ é um subanel, então $S$ é unicamente limpo se, e somente se, $S$ é limpo.

**Teorema 5.2.2.** *Sejam $R$ um anel e $G$ um grupo. Se $RG$ é unicamente limpo, então $R$ é unicamente limpo e $G$ é um 2-grupo.*

**Demonstração**. Pelo Teorema 5.2.1, $R$ é unicamente limpo, pois é imagem homomórfica de $RG$. Portanto, $R/J(R)$ é booleano e, consequentemente, $\mathbb{Z}_2$ é imagem homomórfica de $R$, o que implica que $Z_2G$ é unicamente limpo, pois é imagem homomórfica de $RG$. Suponha agora que $g \in G$ possua ordem finita $2^k m$, onde $m$ é ímpar. Assim, $h = g^{2^k}$ possui ordem $m$. Consequentemente, $\mathbb{Z}_2\langle h\rangle$ é limpo, pelo Exemplo 5.2.1, e portanto unicamente limpo pela observação anterior a esse teorema, o que contradiz o Exemplo 5.2.2, se $m \geq 3$, o que nos mostra que $o(g) = 2^k$.

Por outro lado, suponha que $o(g) = \infty$, $g \in G$ e seja $F = \{H \lhd G \mid o(gH) = \infty \text{ em } G/H\}$, onde $H \lhd G$ denota que $H$ é subgrupo normal de $G$. Pelo Lema de Zorn, seja $L$ o ideal maximal de $F$. Note que $\mathbb{Z}_2(G/L)$ é unicamente limpo, pois é imagem homomórfica de $\mathbb{Z}_2G$ e contém um elemento $gL$ de ordem infinita.

Agora, vamos provar que os únicos idempotentes de $\mathbb{Z}_2(G/L)$ estão em $\mathbb{Z}_2$. De fato, se $x^2 = x \in \mathbb{Z}_2(G/L)$, então $x$ é central, pelo fato de $\mathbb{Z}_2(G/L)$ ser um anel unicamente limpo. Desse modo, por [14] $\langle \text{supp(x)}\rangle$ é um subgrupo normal finito de $G/L$. Assim, escreva $\langle \text{supp(x)}\rangle = K/L$, onde $L \subsetneq K \lhd G$. Observe que $o(gK) = \infty$ em $G/K$. De fato, se $(gK)^n = K$, então $g^k \in K$. Assim, $(g^nL)^m = L$, onde $|K/L| = m$. Portanto, isto significa que $(gL)^{nm} = L$, o que é uma contradição. Consequentemente, $L = K$ pela maximalidade de $L$, então $|\langle \text{supp(x)}\rangle| = 1$. Logo, $x \in Z_2$.

Desse modo, como $\mathbb{Z}_2(G/L)$ é unicamente limpo, segue que $\mathbb{Z}_2(G/L)$ é um anel local. Assim, $G/L$ deve ser de torção pelo Teorema em [11], o que é uma contradição. Logo, $G$ é um 2-grupo. ■

Não conhecemos exemplos de um anel de grupo unicamente limpo $RG$, onde $G$ não é localmente finito. No entanto, se assumirmos que $G$ é localmente finito, temos a recíproca pro Teorema 5.2.2. A prova deste fato exige uma série de lemas preliminares.

Uma família de subconjuntos $\{X_i \mid i \in I\}$ de um conjunto $X$ é chamada uma cobertura direta de $X$, se $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ e, para quaisquer $i, j \in I$, existir $k \in I$ tal que $X_i \cup X_j \subseteq X_k$. Observe que anéis (grupos) finitamente locais são cobertos diretamente, por seus subanéis finitos (subgrupos finitos).

**Lema 5.2.2.** *Sejam $R$ um anel e $G$ um grupo. Se $R = \bigcup R_i$ e $G = \bigcup G_i$ são coberturas diretas de subanéis e subgrupos, respectivamente, e se $R_iG_i$ é limpo (unicamente limpo) para quaisquer $i$ e $j$, então $RG$ é limpo (unicamente limpo).*

**Demonstração**. Se $r \in RG$, então $r \in R_iG_j$, para algum $i$ e algum $j$. Assim, $r$ é limpo em $R_iG_j$ e, consequentemente em $RG$. Suponha agora que $x = e + u = f + v$ em $RG$, onde $e^2 = e$, $f^2 = f$ e $u, v \in U(RG)$. Então, $e^2 = e$, $f^2 = f$ e $u, v$ estão todos em $R_iG_j$ para algum $i$ e algum $j$. Consequentemente, $e = f$ e $u = v$, pois $R_iG_j$ é um anel unicamente limpo. Logo, $RG$ também é unicamente limpo. ■

**Lema 5.2.3.** *Se $G$ é um 2-grupo finito, então $\mathbb{Z}_2G$ é um anel unicamente limpo, local e $J(\mathbb{Z}_2G) = \Delta(\mathbb{Z}_2G)$.*

**Demonstração**. Inicialmente já sabemos que $J(\mathbb{Z}_2G)/\Delta(\mathbb{Z}_2G) \cong \mathbb{Z}_2$, o que implica que $\Delta(\mathbb{Z}_2G)$ é um ideal maximal. Assim, $\mathbb{Z}_2G$ é um anel local pelo Teorema 1 em [11]. Consequentemente, $J(\mathbb{Z}_2G) = \Delta(\mathbb{Z}_2G)$. Logo, $\mathbb{Z}_2G$ é unicamente limpo, pelo Teorema 5.2.1 $(i)$. ■

**Lema 5.2.4.** *Se $R$ é um anel booleano e $G$ é um grupo localmente finito, então $RG$ é unicamente limpo se, e somente se, $G$ é um 2-grupo.*

**Demonstração**. Se $RG$ é unicamente limpo, então $G$ é um 2-grupo, pelo Teorema 5.2.2. Reciprocamente, observe que $G$ é coberto diretamente por estes subgrupos finitos e $R$ é coberto diretamente por seus subanéis finitamente gerados. Consequentemente, pelo Lema 5.2.2 é suficiente mostrar que $SH$ é unicamente limpo, sempre que $H$ é um 2-grupo finito e $S$ é um anel booleano finitamente gerado. Assim, $S \cong (\mathbb{Z}_2)^m$ para algum $m$. Logo, $SH \cong (\mathbb{Z}_2H)^m$ é unicamente limpo, pelo Lema 5.2.3. ■

**Lema 5.2.5.** *Se $R/J(R)$ é booleano, $G$ é um 2-grupo finitamente gerado, e $\epsilon : RG \to R$ é a aplicação de aumento, então $J(RG) = \{x \in RG \mid \epsilon(x) \in J(R)\}$.*

**Demonstração**. Inicialmente, escreva $A = \{x \in RG \mid \epsilon(x) \in J(R)\}$. Assim, $\epsilon(J(RG)) \subseteq J(R)$, pela Proposição 2.2.5. Portanto, $J(RG) \subseteq A$. Desse modo, como $G$ é localmente finito, o Lema 5.2.1 nos diz que $J(R)G \subseteq J(RG)$, e portanto $J(RG/J(R)G) \cong J(RG)/J(R)G$. Consequentemente,

$$\frac{RG}{J(RG)} \cong \frac{RG/J(R)G}{J(RG)/J(R)G} \cong \frac{RG/J(R)G}{J(RG/J(R)G)} \cong \frac{(R/J(R))G}{J((R/J(R))G)}$$

Como sabemos que $R/J(R)$ é um anel booleano, $(R/J(R))G$ é unicamente limpo, pelo Lema 5.2.1. Consequentemente, $RG/J(RG)$ é booleano, o que implica que $1 - g \in J(RG)$ para todo $g \in G$. Agora seja $x \in A$ e escreva $x = \sum r_i g_i$. Assim, $\sum r_i = \epsilon(x) \in J(R)$, e então $x = \sum r_i(g_i - 1) + \epsilon(x) \in J(RG)$. Logo, $A \subseteq J(RG)$.

Chegaremos agora em um resultado crucial

**Lema 5.2.6.** *Seja $R$ um anel, onde todo idempotente é central, e assuma que $2 \in J(R)$. Se $G$ é um 2-grupo localmente finito, então todo idempotente de $RG$ está em $R$.*

**Demonstração**. Inicialmente, como $G$ é localmente finito, podemos assumir que $G$ é um 2-grupo finito. Seja $|G| = 2^n$. A prova será feita por indução em $n \geq 0$. O caso $n = 0$ é direto. Se $n = 1$, escreva $G = \langle g \rangle$, onde $g^2 = 1$. Desse modo, se $x^2 = x = a + bg \in RG$, então aplicando o homomorfismo de aumento, obtemos que $a + b = e^2 = e \in R$. Assim, $e$ é central. Em particular, $ea = ae$, de onde segue que $ab = ba$. Portanto, $x = x^2 = (a^2 + b^2) + 2abg$, o que implica que $b = 2ab$, isto é, $(1 - 2a)b = 0$. Consequentemente, como $2 \in J(R)$, temos que $1 - 2a \in U(R)$, ou seja, $b = 0$, e obtemos que $x = a \in R$.

Se $n > 1$, note que $Z(G) \neq 1$, pois $G$ é um 2-grupo. Assim, escolha $g \in Z(G)$ tal que $o(g) = 2$. Desse modo, se $K = \langle g \rangle$, então $K \triangleleft G$ e $|G/K| = 2^{n-1}$. Dado $h \in G$, seja $G/K = \{g_0K, g_1K, \cdots, g_sK\}$ onde $s = 2^{n-1} - 1$ e, por conveniência, $g_0 = 1$. Uma vez que os elementos $g_0K,\ g_1K,\ \cdots,\ g_sK$ são distintos, os elementos de $G$ podem ser listado como

$$G = \{g_0,\ g_1,\ \ldots,\ g_s,\ gg_0,\ \ldots,\ gg_s\}.$$

Defina $\theta : RG \to RG/K$ por $\theta\left(\sum\limits_{h\in G} r_h h\right) = \sum\limits_{h\in G} r_h hK$. Portanto, $\theta$ é um epimorfismo de anéis. Dado $x = x^2 \in RG$, escreva

$$x = a_0g_0 + a_1g_1 + \cdots + a_sg_s + g(b_0g_0 + \cdots + b_sg_s)$$

com $a_i, b_i \in R$. Assim, $\theta(x) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)g_1H+\cdots+(a_s+b_s)g_sH$ é um idempotente de $RG/H$. Por indução, $a_0 + b_0$ é um idempotente de $R$, e $a_i = -b_i$ para cada $i \geq 1$. Escreva $e = a_0 + b_0$, de modo que $e$ é central em $R$ por hipótese, e obtemos

$$x = e - b_0(1 - g)g_0 + a_1(1 - g)g_1 + \cdots + a_s(1 - g)g_s.$$

Se escrevermos $f = 1 - g,\ c_0 = -b_0$, e $c_i = a_i$ para $i \geq 1$, note que $x = e + z$, onde

$$z = c_0fg_0 + c_1fg_1 + \cdots + c_sfg_s = \sum_{i=0}^{s} c_ifg_i.$$

É suficiente mostrar que $c_i = 0$ para todo $i$.

Afirmamos que $fg_iz = \sum\limits_{j=0}^{s} d_{ij}fg_j$, para $i = 0, 1, \ldots, s$, onde $d_{ij} \in J(R)$, para quaisquer $i$ e $j$. De fato, note primeiro que $f \in Z(RG)$, $f^2 = 2f$ e $fg = -f$. Observe que ou $g_ig_j = g_k$ ou $g_ig_j = gg_m$, onde $0 \leq k,\ m \leq s$ e ambos $k$ e $m$ dependem de $i$ e $j$. Desse modo, temos que $fg_ig_j = fg_k$ ou $-fg_m$, respectivamente. Logo,

$$fg_iz = \sum_{j=0}^{s} fg_ic_jfg_j = \sum_{j=0}^{s} c_jf^2g_ig_j = \sum_{j=0}^{s} c_j(2f)g_ig_j$$

e o resultado segue pois $2 \in J(R)$.

Uma vez que $x = e+z$, segue que $(e+z) = (e+z)^2 = e+2ez+z^2$, de onde $(1-2e)z = z^2$. Escreva $u = 1-2e$. Assim, $u$ é central em $R$, $u^2 = 1$ e temos $z = uz^2$. Usando a afirmação que provamos, segue que

$$z^2 = \left[\sum_{i=0}^{s} c_i f g_i\right] z = \sum_{i=0}^{s} c_i (f g_i z) = \sum_{i=0}^{s} c_i \left(\sum_{j=0}^{s} d_{ij} f g_j\right) = \sum_{j=0}^{s} \left[\sum_{i=0}^{s} c_i d_{ij}\right] f g_j.$$

Uma vez que $z = \sum_{i=0}^{s} c_i f g_j = uz^2$, obtemos que $c_j = \sum_{i=0}^{s} c_i (u d_{ij})$ para cada $j$, pois $\{f,\ fg_1,\ fg_2, \cdots,\ fg_s\}$ é linearmente independente sobre $R$. Se $c = (c_0,\ c_1, \cdots,\ c_s)$, isto é, $c = cA$, onde $A = [ud_{ij}] \in M_{s+1}(J(R)) = J[M_{s+1}(R)]$. Portanto, segue que $c = 0$, o que implica que $z = 0$. Logo, $x = e + z = e \in R$. ■

A suposição de que $2 \in J(R)$ no Lema 5.2.6 não pode ser removida.

De fato, sejam $R = \mathbb{Z}_3$ e $G = C_2 = \langle g \rangle$, então $2 \notin J(R)$ e, escrevendo $x = -1 + g$, temos que $x^2 = x$, mas $x \notin R$.

A suposição de que idempotentes são centrais no Lema 5.2.6 não pode ser removida.

De fato, seja $R = M_2(\mathbb{Z}_2)$, e $G = C_2 = (g)$, defina $x \in R$ por $x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} g$. Portanto, $2 \in J(R)$ e $x^2 = x$, mas $x \notin R$.

Agora, podemos provar o outro resultado principal desse trabalho.

**Teorema 5.2.3.** *Se $R$ é um anel e $G$ é um grupo localmente finito, então $RG$ é unicamente limpo se, e somente se, $R$ é unicamente limpo e $G$ um 2-grupo.*

**Demonstração**. Se $RG$ for unicamente limpo o resultado segue do Teorema 5.2.2. Reciprocamente, iremos aplicar o Teorema 5.2.1 $(iii)$, isto é, se $x \in RG$ devemos encontrar um único idempotente $y^2 = y \in RG$ tal que $x - y \in J(RG)$. Desse modo, seja $\epsilon : RG \to R$ a aplicação de aumento. Assim, como $\epsilon(x) \in R$ e $R$ é unicamente limpo, temos que existe um único idempotente $e^2 = e \in R$ tal que $\epsilon(x) - e \in J(R)$ o que implica que $\epsilon(x - e) = \epsilon(x) - e \in J(R)$, pelo Lema 5.2.5 $x - e \in J(RG)$. Desse modo, resta mostrar a unicidade de $e$. Suponha que $z^2 = z \in RG$ satisfaça $x - z \in J(RG)$. Neste caso, teríamos que $z \in R$ pelo Lema 5.2.6, o que implica que $\epsilon(x) - z = \epsilon(x) - \epsilon(z) = \epsilon(x - z) \in J(R)$. Logo, a unicidade de $e \in R$ mostra que $z = e$, o que completa a demonstração. ■

# 6 CONCLUSÃO

Em geral, as unidades e os idempotentes são elementos fundamentais para determinar a estrutura de um anel. Em particular, a decomposição de Peirce induzida por um idempotente de um anel auxiliou a definir e classificar novos tipos de anéis. Os anéis limpos cujos elementos se decompõe como soma de um elemento idempotente e uma unidade e estão intimamente conectados com algumas outras noções importantes de anéis. Além disso, outro instrumento de nosso estudo são os anéis unicamente limpos onde tal decomposição é unicamente determinada.

Por outro lado, os anéis de grupos ocupam um papel central no desenvolvimento da teoria de representações de grupos e atrai pesquisadores de outros ramos da matemática tais como álgebra homológica e topologia algébrica. O teorema principal deste trabalho determinou sob que condições um anel de grupo é unicamente limpo. Concluímos que se $R$ é um anel e $G$ é um grupo localmente finito, então $RG$ é unicamente limpo se, e somente se, $R$ é unicamente limpo e $G$ um 2-grupo.

Tal teorema demonstrado no decorrer do trabalho esclarece a relação entre os anéis unicamente limpos e os anéis de grupo unicamente limpos.

# REFERÊNCIAS


[1] ANDERSON, D. D. ; CAMILLO, V. P. Commutative rings whose elements are a sum of a unit and idempotent. *Communications in Algebra*, v. 30, p. 3327-3336, 2002.

[2] CAMILLO, V. P. ; YU, H. P. Exchange rings, units and idempotents. *Communications in Algebra* , v. 22, p. 4737-4749, 1994.

[3] CHEN, H. On uniquely clean rings. *Communications in Algebra*, v. 9, p. 189-198, 2011.

[4] CHEN, H. ; NICHOLSON, W. K. ; ZHOU, Y. Group rings in which every element is uni-quely the sum of a unit and an idempotent. *Journal of Algebra.*, v. 306, p. 453-460, 2006.

[5] CONELL, I. G. On the group ring. *Canadian Mathematical Journal*, v. 15, p. 656-685, 1963.

[6] HAN, J. ; NICHOLSON, W. K. Extensions of clean rings. *Communications in Algebra*, v. 20, p. 2589-2596, 2001.

[7] KHURAMA, d. et al. Uniquely clean elements in rings. *Communications in Algebra*, v. 9, p. 1742-1751, 2015.

[8] LAM, T. Y. *A first course in noncommutative rings*. $2^{nd}$ ed. New York: Springer, 2001. 385 p. (Graduate texts in mathematics ; 131)

[9] JACOBSON, N. *Structure of ring theory*. Providence: American Mathematical Society, 1956. (Colloquium publications American Mathematical Society, v. 37)

[10] NICHOLSON, W. K. Lifting idempotents and exchange rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 229, p. 269-278, 1977.

[11] NICHOLSON, W. K. Local group rings. *Canadian Mathematical Bulletin*, v. 15, n. 1, p. 137-138, 1972.

[12] NICHOLSON, W. K. ; ZHOU, Y. Rings in which elements are uniquely the sumo f an idempotent and a unit. *Glasgow Mathematical Journal*, v. 46, n. 2, p. 227-236, 2004.

[13] NICHOLSON, W. K. ; ZHOU, Y. Clean rings: a survey advances in ring theory. In: *Advances in ring theory*: proceedings of the Fourth China-Japan-Korea International Conference. Hackensack, N. J. : World Scientific, 2004. P. 181-189.

[14] PASSMAN, D. S. *The algebraic structure of group rings*. New York: Wiley, 1977.

[15] POLCINO, C. ; SEHGAL, S. K. *A course in group ring.* Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 2008. 390 p.

[16] TUGANBAEV, A. *Rings close to regular*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 2002. 350 p.

[17] WARFIELD Jr., R. B. Exchange rings and decompositions of modules. *Mathematische Annalen*, v. 199, p. 31-36, 1972.

[18] ZHOU, Y. *On clean group rings*. In: HUYNH, Dinh Van; LOPEZ-PERMOUTH, Sergio R. (Eds.). *Advances in ring theory.* [s.l.]: Birkhauser, 2010. P. 335-345