UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA

O CONCEITO DE GRUPO: SUA FORMAÇÃO POR ALUNOS DE MATEMÁTICA

Izabel Maria Barbosa de Albuquerque

Fortaleza

2005

Izabel Maria Barbosa de Albuquerque

O CONCEITO DE GRUPO: SUA FORMAÇÃO POR ALUNOS DE MATEMÁTICA

Tese de Doutoramento apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Educação.

Orientador:
Prof. Dr. Hermínio Borges Neto

Fortaleza

2005

Izabel Maria Barbosa de Albuquerque

O CONCEITO DE GRUPO: SUA FORMAÇÃO POR ALUNOS DE MATEMÁTICA

Tese de Doutoramento apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Educação Brasileira.

Data da aprovação: 18 de março de 2005

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Hermínio Borges Neto - UFC
(Orientador)

Prof. Dr. João Montenegro de Miranda - UECE

Prof. Dr. José Aires de Catro Filho - UFC

Profa. Dra. Marcília Dantas Barreto - UECE

Prof. Dr. Orlando Ostanley Jurians - USP

Profa. Dra. Veriana de Fátima Rodrigues Colaço - UFC

À fonte única criadora

Agradecimentos

Agradeço ao Todo, a Deus, pelas muitas ajudas internas recebidas.

Agradeço aos seres humanos pelas ajudas externas recebidas. Estas também foram muitas, tantas, que prefiro não citar nomes.

“Aprender é como remar contra a corrente: sempre que se para, anda-se para trás”. Confúcio

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo analisar o conceito de grupo formado por alunos do curso de Matemática da Universidade Federal de Campina Grande - Campus de Campina Grande, em seu primeiro curso de álgebra abstrata realizado no segundo semestre de 2002. Nessa análise, busquei compreender o conceito de operação binária em um conjunto formado por esses alunos, as soluções dadas para as situações-problema nas quais o conceito de grupo era explicitável e, por fim, o conceito de grupo por eles formado. Tomei como referência a proposta de Lev Semenovich Vygotsky sobre a abordagem sócio-histórica em sua proposição de que o processo de formação de conceitos pelo sujeito é mediado, essencialmente, pela palavra, e a de Gérard Vergnaud sobre a teoria dos campos conceituais, na qual a formação do conceito pelo sujeito está pontuada, fundamentalmente, pelas situações envolvendo o conceito, por ele vivenciadas. Para esta pesquisa, apliquei um instrumento diagnóstico constituído de perguntas em aberto e situações-problema, seguido da realização de entrevistas. Constatei na análise dos conhecimentos expressos por escrito, um elevado grau de dificuldade na elaboração das soluções das atividades, bem como uma quantidade considerável de soluções não esperadas e incoerentes para as situações-problema. A análise dos dados realizada, após as entrevistas, mostram uma diminuição significativa de soluções desta natureza, e revelam o potencial construtivo dos alunos quando auxiliados por uma pessoa mais experiente. Essas constatações mostram a importância e necessidade de se considerar, no ensino, um processso longo de vivência dos alunos com situações-problema num espaço permeado por debates entre professor-aluno e aluno-aluno, mediados pelo conhecimento, favorecendo a discussão de soluções, dúvidas e idéias criativas no estudo dos conceitos matemáticos.

Palavras-chave: estrutura algébrica de grupo, formação de conceitos, ensino de matemática.

ABSTRATC

This work has the objective to analyse the group concept formed by the students of the Mathematics Course at the Federal University of Campina Grande - Campina Grande Campus, as a result of their first course in abstract algebra taken in the second semester of 2002. Throughout this analysis I have tried to understand the concept of a binary operation in a set, formed by these students, the actions and operations made when dealing with problem-situations in which the group concept was explicit, and, finally, the group concept formed by them. I referred to the Lev Semenovich Vygotsky proposal about the social-historical approach when he suggested that the ones process of concept formation was essentially mediated by word, and Gérard Vergnaud's about the theory of conceptual fields, in which ones formation of a concept was determined, particularly, by situations involving in the concept experienced by him. For this research I have applied means of investigation constituted by open questions and problem-situation facts, followed by interviews. I have noticed, in the analysis of the knowledge expressed in the writing, a high level of difficulty in the making of solutions for the activities, as well as a great amount of unexpected and incoherent of the problem-solutions. The data analisis done after these interviews shows a significative decrease in the number of solutions of this nature and they reveal the criative potential of the students when they are helped by a more experienced person. These facts show the importance and need to consider, in teaching, a long process of students'involvement with problem-situation within a space permeated with a scientific debate between teacher and students and student-student, mediated by knowledge, in favoring the discussion of their solutions, doubts and creative ideas in the study of mathematical concepts, especially, the algebraic ones.

Key-words: estructure of algebric group, concepts of formation, teaching of mathematics.

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

A minha necessidade de fazer estudos na área de Educação Matemática surgiu a partir de minha própria experiência em sala de aula como professora. Esta experiência, de certa forma, mostra o meu interesse pela temática aqui desenvolvida e os caminhos que influenciaram na definição da pesquisa. Inicio fazendo um breve relato de alguns de seus aspectos.

Em março de 1977 iniciei o curso de Licenciatura em Matemática. Durante toda minha vida acadêmica fui submetida a um ensino centrado fortemente no conteúdo e no professor. A transmissão dos conteúdos dava-se quase sempre por meio de aulas expositivas - com as definições matemáticas prontas e acabadas, com o estudo do conceito feito através da sua definição e sua aplicação direta, com o uso de fórmulas e algoritmos, axiomas, demonstrações de proposições, lemas, teoremas e corolários, resolução de exercícios e/ou de problemas-padrão[1]. O professor fazia e nós alunos reproduzíamos, além disso, não se falava sobre a matemática, falava-se de matemática. Ou seja, não era discutida a forma como se constitui e se organiza o conhecimento matemático, os métodos utilizados, o papel das demonstrações, dos exemplos, dos contra-exemplos etc., havia, apenas, o estudo do conteúdo em si. Eu, no papel de aluna, copiava tudo que o professor colocava no quadro-negro, atentamente e, muitas vezes, até o que ele falava, depois estudava toda a matéria do caderno, mergulhava nas páginas dos livros correspondentes ao conteúdo visto em sala de aula e resolvia o maior número de exercícios possíveis.

Comecei a lecionar matemática em agosto de 1977. Para mim, na época, como aluna

[1] Em geral, há uma concepção de que os problemas são mais difíceis que os exercícios. Os exercícios quase sempre destinam-se a fixação de conteúdos e desenvolvimento de habilidades, são resolvidos com aplicação direta (ou quase direta) de definições, propriedades, algoritmos etc., os problemas têm um caráter mais conceitual e até de complementação de conteúdos.

de graduação e professora de $5^a, 6^a$ e 7^a séries do Ensino Fundamental, considerava que para ser um bom professor era suficiente saber o conteúdo específico da disciplina e ser um bom expositor. Por isso, em sala de aula, adotei a mesma prática pedagógica à qual tinha sido submetida, e achava ser a única forma de ensinar matemática. Por um lado, no exercício da docência, preparava bem o conteúdo que deveria ser desenvolvido em cada aula, procurava fazer uma boa exposição, fazia todo o esforço possível para que os alunos entendessem o conteúdo que eu lhes estava transmitindo, incentivava-os a criar hábitos de estudo, como também procurava cumprir todo o programa. Por outro lado, estava convencida de que se o aluno não aprendesse, o problema era dele; provavelmente, tinha pouca habilidade para a matemática ou estudava pouco. Além disso, pressupunha que a matemática era difícil por ser uma ciência exata e organizada logicamente, e, que, somente os "inteligentes" conseguiam aprendê-la. Não parava para olhar a origem das dificuldades dos alunos que não conseguiam acompanhar o curso e se saíam mal nas provas. Hoje, eu percebo que estas minhas crenças não foram se formando do nada, de minha própria mente. Elas, de certa forma, estavam implícitas nas práticas de alguns professores com os quais estudei.

Em dezembro de 1979, conclui a Licenciatura e em março de 1980 comecei a lecionar em Universidade com as mesmas crenças e adotando a mesma prática já referida. Apresentava ainda um agravante, pois, na Universidade, eu não admitia que os alunos não soubessem os conteúdos que tinham sido exigidos no vestibular, já que tinham sido aprovados, e também porque eram pré-requisitos para as disciplinas a serem estudadas (Cálculo e Álgebra), conseqüentemente, as minhas exigências com eles eram maiores do que com os alunos do Ensino Fundamental.

Muito tempo foi necessário para eu reconhecer que estava completamente enganada quanto aos meus pressupostos e crenças, quanto à forma de ensinar e ao nível de exigência por mim adotado. Depois dessa percepção, freqüentemente encontro na literatura argumentos que evidenciam os meus equívocos, um deles é bem evidenciado por Tall (1991, p.7):

> ... assim, um matemático experiente pode considerar útil apresentar a matéria para os alunos de maneira que destaque a lógica do assunto. Porém, um aluno sem a experiência do professor pode achar um enfoque formal inicialmente difícil, um fenômeno que pode ser

> visto pelo professor como uma falta de experiência ou intelecto por parte do aluno.(tradução minha)

Tempos depois, após a leitura do artigo de Silva da Silva (2002), no qual a autora discute como foi sendo construída historicamente a formação do professor (nível secundário) de matemática no Brasil, percebi que não era a única a ter adotado a mesma prática a que tinha sido submetida. Parece que essa postura foi (ou ainda é) regra, e não exceção, já que, segundo a autora, por muitos anos, para o aluno e futuro professor, o referencial como professor passou a ser algum daqueles profissionais com quem ele conviveu, aprendeu e em quem acreditou. A autora também comenta que ministrar uma disciplina considerada difícil poderia ser sinônimo de grande sabedoria e, quando os resultados da avaliação eram desastrosos, com muitas reprovações, o professor poderia, ainda assim, ser denominado de excelente mestre.

Essa afirmação me faz recordar um professor que tive em meu curso de graduação e que era considerado, pela maioria, um excelente professor. Ele ensinava a disciplina Cálculo Integral, um dos meus assuntos preferidos na época. Durante o período de estudo desta disciplina, eu procurava integrais nos vários livros de cálculo para resolver, cheguei a preencher um caderno, de 50 folhas, exclusivamente, com integrais resolvidas usando as várias técnicas de integração. O professor logo tomou conhecimento da existência desse caderno, e sempre me pedia para ver que integrais eu já havia resolvido. Depois, para surpresa minha, fiquei sabendo que ele fazia o acompanhamento das integrais que eu resolvia, exatamente para não colocar integrais na prova que eu já tivesse resolvido, evitaria assim que eu tirasse dez na prova. Como conseqüência disso, as provas do curso tornaram-se muito difíceis, o que provocou uma reprovação em massa, de uma turma de 42 alunos apenas eu fui aprovada. A minha aprovação não significa que eu tinha formado os conceitos estudados em sala, mas, sim, que eu tinha adquirido habilidade suficiente para resolver os tipos de exercícios comumente apresentados.

As dificuldades encontradas pelos alunos, relativas ao aprendizado de conteúdos e/ou de conceitos matemáticos, em especial algébricos, é motivo de preocupação de pesquisadores da Educação Matemática. Uma boa parte das pesquisas tem tentado esclarecer, por meio de trabalhos teóricos e experimentais as causas das dificuldades dos alunos. Dentre as causas apontadas como contribuintes de dificuldades, é destacada a grande quantidade de definições, de conceitos e resultados; utilização da linguagem formal; abstração de conceitos e generalização de resultados - todos estes elementos são próprios e característicos da álgebra, e quase sempre aparecem simultaneamente, o que representa uma dificuldade ainda maior.

Um dos trabalhos que aborda essa questão é o de Cresce (1991), no qual ela investiga a natureza e as razões das dificuldades dos alunos, através de questionários aplicados a alunos e professores da UFSCar - Universidade Federal de São Carlos. O seu trabalho evidencia que a maioria dos professores universitários considera que seus cursos estão perfeitamente "adequados" ao currículo e ao alunado, no entanto, essa não é a opinião dos alunos, que sugerem que haja mudanças na metodologia do professor. Ainda, relativo a essa questão, Barbosa (1994) faz um estudo sobre o rendimento dos alunos na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I, e observa "que apesar de os alunos admitirem que as maiores falhas recaem sobre eles, [...] admitem também que existem falhas, com certo grau de intensidade, na forma de trabalho desenvolvida pelos professores". (BARBOSA, 1994, p.63).

Silva (1994) destaca que, de um modo geral, as pesquisas sobre a relação entre a eficácia do professor de matemática e o seu conhecimento tem se concentrado na qualificação dos professores, mas que recentemente há estudos das concepções dos professores sobre o ensino da matemática, e têm-se visto que as concepções do professor exercem um papel sobre a sua prática. Ela comenta que, além deste aspecto existem outros também importantes. Um deles é o peso dos fatores institucionais, uma vez que a transmissão dos conhecimentos em sala de aula está vinculada a um sistema que tem regras e tradições. Esta transmissão é determinada pelo tempo da Instituição, em termos de calendário escolar, e, pelo tempo do programa, que diz qual o saber a ensinar. Tanto o calendário como o programa visam o "aluno ideal" e não o "aluno real". Quando se considera este último, pode-se acrescentar mais um tempo que determina a transmissão, o tempo do aluno, já que o tempo de aprendizagem é diferente do tempo de ensino.

Diversas pesquisas têm identificado obstáculos no ensino da matemática, e segundo Brousseau, "os obstáculos existem, embora distinguí-los, reconhecê-los, repertoriá-los e examinar suas relações e causas exige ainda muitas discussões e pesquisas".(BROUSSEAU, 1988 *apud* BITTENCOURT, 1998, p.14). Para ele um obstáculo está ligado à resistência de um saber mal adaptado, no sentido dado por Bachelard[2] (1996), um saber que é adequado em certas situações e inadequado em outras, e serve como um meio de interpretar alguns dos erros[3] recorrentes e não aleatórios, cometidos pelos estudantes quando lhes são ensinados alguns assuntos de matemática. Um obstáculo não se manifesta só pelos erros, mas também pela impossibilidade de encarar certos problemas ou de resolvê-los eficazmente. Também para Lins[4] (1993), uma dificuldade deve ser entendida de duas maneiras excludentes: ou ela se caracteriza como obstáculo ou como limite epistemológico. Nesta visão, um obstáculo epistemológico seria o processo no qual um estudante poderia potencialmente produzir significado, no sentido da sua teoria, para uma afirmação, mas não produz. Já um limite epistemológico seria a impossibilidade de o aluno produzir significado para uma afirmação. Isso é particularmente claro no estudo de Glaeser (1981) sobre números negativos. Os números negativos apresentam aspectos ligados à sua própria natureza e às regras dos sinais utilizadas nas operações, em especial na multiplicação de dois desses números, que muitas vezes transcendem a capacidade de compreensão de um indivíduo numa primeira fase.

[2]A noção de obstáculo como constituinte do pensamento cientifico apareceu, pela primeira vez, em 1938 com o epistemólogo francês Gaston Bachelard, em seu livro "A formação do espírito cientifico". Fazendo uma reflexão sobre a psicologia do espírito científico, Bachelard se convence de que é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado. Ele afirma que os obstáculos não são inerentes aos fenômenos e nem são ocasionados pela fragilidade dos sentidos do espírito humano. É no interior ou na essência do próprio ato de conhecer, por uma espécie de necessidade funcional, que surgem lentidões e conflitos, nos quais se mostram as causas de inércia e de estagnação e até mesmo de regressão do pensamento no ato de conhecer, aos quais ele dá o nome de obstáculos epistemológicos. (BACHELARD, 1996).

[3]Segundo Igliori (1999, p.100), para Bachelard, a noção de obstáculo epistemológico pode ser estudada no desenvolvimento histórico do pensamento científico e na prática da educação. Nesta última esta noção se caracteriza com maior repercussão através do erro. A noção de obstáculo epistemológico concede ao erro um papel importante enquanto revelador de dificuldades a serem consideradas e compreendidas como um passo necessário no ato de conhecer. Do ponto de vista bachelardiano, o erro nunca está isolado, mas vinculado a uma estrutura, e esta se manifesta tanto na argumentação quanto nos mecanismos de ação do sujeito. Enfim, o erro não é somente efeito da ignorância, da incerteza, do acaso, como se crê nas teorias empíricas ou behavioristas da aprendizagem, mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seus sucessos, mas que agora se revela falso, ou simplesmente mal adaptado.

[4]O autor, apoiado no campo da semântica elaborou o que denominou de Modelo Teórico dos Campos Semânticos no qual a "produção de significados" ocupa lugar central. Para ele a matemática é vista como um texto ou um discurso com uma linguagem própria, construída historicamente de símbolos que possuem duas faces: significantes (que é a própria matemática - um texto) e significado (que é o conhecimento matemático - as afirmações e justificações) que é próprio de cada pessoa.

Há diversas outras formas de ver e de explicar as dificuldades dos estudantes em construir conhecimentos matemáticos. Há explicações mais gerais que são comuns à formação de qualquer conhecimento científico, outras mais específicas a um determinado conhecimento. Lochhead e Mestre (1995, p.145,148), comentam que:

> ...a fonte de erros está em concepções erradas concernentes à estrutura e à interpretação de afirmações algébricas e nos processos pelos quais se faz a tradução da linguagem escrita para a linguagem algébrica. [...] O mais lamentável é que nosso sistema educacional não parece dirigido às questões conceituais que ajudariam os alunos a superar tais concepções erradas.

As autoras mencionadas tocam em dois pontos que são fundamentais e imprescindíveis em relação a qualquer aprendizagem, em particular à aprendizagem matemática, que são, a linguagem e a formação de conceitos. Além disso, esses dois elementos estão intrinsecamente ligados. É impossível falar em conceitos sem falar em linguagem e vice-versa, o conceito é o significado da palavra que o nomeia (ver capítulo 2).

Embora tenha lecionado para alunos dos Ensinos Fundamental e Médio, minha experiência profissional é basicamente como professora universitária. Como professora do DME - Departamento de Matemática e Estatística, da UFCG - Universidade Federal de Campina Grande[5], percebo muitas dificuldades dos alunos ingressantes na Universidade em acompanhar as disciplinas de matemática do seu ciclo básico[6] de estudos, tanto nos cursos de engenharia como no próprio curso de Matemática[7]. Tais dificuldades parecem ser mais acirradas nas disciplinas de álgebra[8] que nas disciplinas de cálculo (Cálculo Diferencial e Integral I, II e III), sobretudo do ponto de vista da linguagem, das abstrações e das representações nelas utilizadas e fundamentalmente da formação de conceitos.

As estatísticas realizadas no DME da UFCG mostram altos índices de retenção[9] de

[5]A UFCG, antigo Campus II da UFPB - Universidade Federal da Paraíba, foi criada em 2002 como resultado de desmembramento da UFPB, até então, constituída de sete Campi, um na capital e os outros em seis municípios do interior do Estado. A UFCG agrega três dos Campi que antes pertenciam à UFPB.

[6]O ciclo básico é um período de quatro/cinco semestres letivos, no qual os alunos cursam as disciplinas do currículo mínimo que são comuns a todos os cursos de Engenharia e ao curso de Matemática. Após esse vem o ciclo profissional, no qual são cursadas disciplinas que compõem a formação específica.

[7]O curso de Bacharelado em Matemática foi criado em março de 1977 e reconhecido em abril de 1979; em novembro de 1990 foi autorizada a habilitação em Licenciatura e reconhecida em abril de 1999.

[8]Por questões de aspecto didático e de pesquisa, no Ensino Superior, pode-se pensar em divisões da álgebra: Álgebra Vetorial, Álgebra Linear, Álgebra Abstrata etc. O conteúdo de Álgebra Abstrata, por ser muito extenso, em geral, é dividido em várias disciplinas, tipo Álgebra I, Álgebra II, Álgebra III.

[9]Aqui a palavra retenção refere-se à quantidade de alunos reprovados por nota mais a quantidade de alunos reprovados por falta, estes últimos são freqüentemente chamados de alunos desistentes.

alunos, especialmente nas disciplinas matemáticas dos primeiro e segundo semestres de quase todos os cursos da área de Ciências Exatas. Estes resultados não são específicos da UFCG. Existe um quadro semelhante a esse em muitas Universidades no Brasil. Nas palavras de Cresce (1991, p.151), "o rendimento dos alunos, nas disciplinas de matemática, nos primeiros anos, na Universidade parece desanimador".

Os resultados obtidos pelos alunos do curso de Matemática da UFCG nas disciplinas que fazem parte do seu ciclo profissional, também preocupam. Mesmo na realização da disciplina Álgebra I, que é uma introdução à teoria dos grupos[10], quando os alunos, em sua maioria, estão, no mínimo, no quinto semestre do curso e, às vezes, há alunos concludentes, observa-se que há semestres em que o percentual de alunos que desistem de cursar a disciplina é maior que o de alunos reprovados. Isto evidencia que o aluno ao se perceber diante das dificuldades características da disciplina, não se sente motivado a permanecer durante o semestre realizando esforços em prol de seu aprendizado, esforços esses que deveriam partir tanto do próprio aluno quanto do professor. Estas informações podem ser observadas através dos dados da Tabela 1. Os dados são relativos aos resultados finais na disciplina Álgebra I a partir do primeiro semestre de 1995 até primeiro semestre de 2001, período correspondente aos 13 semestres letivos que antecederam à minha pesquisa.

Mesmo através de uma análise superficial, percebe-se rapidamente uma variação muito grande nestes resultados percentuais. Na coluna, percentual de aprovados, tem-se uma variação de 9,1% (semestre 97.2) a 75 % (semestre 98.2); na coluna percentual de reprovados por falta, os chamados desistentes, tem-se um percentual mínimo de 12,5 % (semestre 98.1) e um máximo de 81,8 % (semestre 97.2). É curiosa e até surpreendente a diferença entre o percentual mínimo e o máximo nos dois casos, além disso, nestes 13

[10]De um modo não formal, um grupo é essencialmente constituído de um conjunto de elementos (que podem ser de qualquer natureza) e uma regra definida entre seus elementos. Dados dois elementos desse conjunto, essa regra deverá determinar um elemento do conjunto, ou seja, o resultado da operação, segundo à regra, de dois elementos do conjunto (sejam eles números, ações, movimentos,...) pertence ao conjunto. Esse conjunto deve possuir um elemento neutro, isto é, a operação de qualquer elemento do conjunto com esse elemento neutro nos dá de volta o elemento do qual partimos. Outra condição a que devem atender os elementos do conjunto é a existência de um elemento inverso para cada elemento do conjunto. Isto significa que no grupo qualquer ação, movimento ou transformação que se faça pode ser invertida, voltando-se à posição inicial. A última condição no grupo é a associatividade. Além da discussão realizada no capítulo 3 sobre a gênese do conceito de grupo, a explicitação do que seja grupo é retomada no capítulo 5 e apêndice D, de forma mais adequada a que se propõe este trabalho.

Tabela 1: Percentuais de resultados na disciplina Álgebra I

Semestre Letivo	Matriculados	% Aprovados	% Reprovados	% Desistentes
95.1	09	44,4	0	55,6
95.2	10	30	0	70
96.1	11	63,6	0	36,4
96.2	08	50	12,5	37,5
97.1	12	50	0	50
97.2	11	9,1	9,1	81,8
98.1	07	37,5	50	12,5
98.2	16	75	6,3	18,7
99.1	08	37,5	37,5	25
99.2	11	54,5	27,3	18,2
00.1	12	41,7	8,3	50
00.2	12	53,8	0	46,2
01.1	10	30	10	60

Fonte: Departamento de Matemática e Estatística

semestres, o percentual médio de aprovados é de 44,4 % e de reprovados por falta é de 43,2 %, mostrando que a média de aprovados e desistentes é quase a mesma. Entre os percentuais de alunos reprovados por nota essa variação é menor, tem-se uma média de 28,1 %. Isto significa que há muitos desistentes, mas, entre os que permanecem no curso até o fim, poucos são reprovados.

É claro que este não deve ser o único espelho da realidade dos alunos na disciplina, eles apenas dão indícios de que se faz necessário um estudo mais acurado da realidade. Além disso, são estatísticas de um período longo no qual as condições e situações em que a disciplina foi oferecida mudaram. Vou apenas citar algumas, mas sem a pretensão de discuti-las. Neste período, há semestres que houve greve de professores das Universidades Federais, a disciplina foi ministrada por diferentes professores, inclusive por mim. Alguns procedimentos ou atitudes básicas foram adotados por todos os docentes, tais como: a apresentação do conteúdo feita através de aula expositiva; toda (ou quase toda) a avaliação foi feita por meio de provas (em média, três provas) com questões envolvendo significados puramente matemáticos abstratos em sua maior parte. Uma atitude não comum diz respeito ao programa e uma das razões disto é que o conteúdo programático é extenso; há professores que se preocupam em cumprí-lo totalmente pois, assim, os alunos não são prejudicados no acompanhamento e compreensão dos conteúdos das disciplinas seguintes e na sua formação como um todo, outros acham que o programa não deve ser cumprido em detrimento do aprendizado do aluno.

Em qualquer nível de ensino, a formação de conceitos se constitui em uma necessidade, uma vez que a solução de um problema só é possível por meio da formação dos conceitos por ela exigidos. Assim, o desenvolvimento, a formação ou a ampliação de conceitos é uma das tarefas que o sistema de ensino tem diante de si.

No ensino de matemática, seja ela elementar ou avançada, em geral, não há uma vigilância relativa à formação de conceitos pelos alunos. Após o estudo de um determinado conteúdo em sala de aula, não se investiga diretamente dos estudantes se houve ou não a formação dos conceitos envolvidos naquele conteúdo ou, pelo menos, quais os conceitos formados em relação aos estudados. Em geral, a formação de um conceito está direta e fortemente associada à assimilação da própria definição e à capacidade para resolver problemas.

Há uma percepção de minha parte de que, no ensino de matemática, inclusive na minha própria experiência de ensino, há um certo equívoco no tocante à resolução de problemas, tanto na natureza dos problemas propostos quanto na análise e avaliação de suas soluções. Muitas vezes, são propostos problemas que exigem mais a elaboração de habilidades no uso das definições e teoremas, do que o próprio raciocínio para sua solução, podendo, portanto, o aluno resolvê-los corretamente sem ter construído o(s) conceito(s) que justifique(m) a existência dos mesmos. Tenho percebido, ainda, que, se a solução dada pelo aluno for correta, o professor conclui que de fato houve aprendizagem por parte desse aluno e que ele construiu o(s) conceito(s) necessário(s) para a solução daquele problema. Em geral, não se investiga como o aluno chegou àquela solução, que conhecimentos e conceitos foram por ele utilizados/mobilizados, não se faz uma análise detalhada da solução do aluno. É evidente que o foco do ensino é o produto e não o processo.

Todos estes aspectos, entre outros, serviram para mim como um incentivo no direcionamento de meus estudos para o problema da formação de conceitos matemáticos. Quando ingressei no doutorado, eu não tinha idéia da extensão e da complexidade desta temática. Com o passar do tempo, a partir de leituras, das discussões em seminários e de possíveis procedimentos metodológicos a problemática foi se esboçando mais claramente, em extensão e profundidade. A partir daí, a proposta inicial de estudo foi sendo modificada, o objeto de estudo foi delimitado e delineado, adequando-se às variáveis envolvidas em um trabalho de tese de doutorado.

Neste processo, contrui como objetivo central de estudo, a investigação do conceito de grupo em matemática formado por alunos de graduação em seu primeiro curso de álgebra abstrata, cujo conteúdo é uma introdução à teoria dos grupos.

Deste objetivo central decorrem três objetivos específicos. O primeiro deles é a investigação da concepção dos alunos sobre o objeto operação binária em um conjunto. O segundo diz respeito ao reconhecimento da estrutura de grupo implícita nas situações que lhe dão sentido. E o terceiro é a investigação da apreensão dos alunos sobre as diferentes estruturas de grupo, ou seja, sobre as particularidades de cada grupo.

Um outro objetivo buscado aqui, relevante para o estudo da didática inerente ao ensino do conceito de grupo, foi uma construção teórica explicitando alguns aspectos do campo conceitual de grupo. Isto foi possível graças aos referenciais teóricos utilizados, em especial a concepção de campo conceitual de Vergnaud, ao conhecimento sobre o desenvolvimento e a formalização do conceito de grupo na matemática e aos estudos realizados imediatamente posteriores à sua formalização, à análise de livros de álgebra abstrata comumente utilizados em um primeiro estudo da teoria dos grupos e a outros livros que se dedicam a um estudo de cunho didático-pedagógico e psico-experimental.

Para a consolidação desta investigação, escolhi dois referenciais teóricos: a teoria histórico-cultural do desenvolvimento psicológico, fundamentada predominantemente no pensamento do russo Lev Semenovich Vygotsky, e a abordagem cognitivista do psicólogo francês Gérard Vergnaud constituída na teoria dos campos conceituais.

A primeira teoria pressupõe o desenvolvimento dos conceitos numa abordagem interacionista, determinado pelo desenvolvimento das funções psicológicas do indivíduo e construído via interação do indivíduo com os outros através da linguagem. Para Vygotsky (2001) a base para a formação de conceitos está no significado da palavra. Nesta formação, duas raízes são destacadas: a primeira delas é o desenvolvimento da generalização que, desde cedo, começa a fazer com que o indivíduo selecione e agrupe objetos de acordo com suas características concretamente presentes; a segunda, atua na mente do indivíduo fazendo com que ele distinga nos objetos características cada vez mais abstratas. Algumas características consideradas mais importantes que outras pelo sujeito fazem com que ele construa hierarquia de características completanto o processo de formação de conceitos. Uma das principais conclusões de suas investigações sobre formação de conceitos é que os conceitos se desenvolvem no sujeito. Portanto, qualquer indivíduo está em um contínuo processo de desenvolvimento conceitual.

A segunda é uma abordagem cognitivo-pragmática do conhecimento que considera, ao mesmo tempo, o processo de desenvolvimento e de aprendizagem do indivíduo, propondo uma estrutura que permite estudar, compreender e situar as filiações e rupturas entre conhecimentos em um sujeito, e repensar as condições de sua aprendizagem conceitual, de forma que esta torne mais significativa à apreensão dos conceitos por esse mesmo sujeito em qualquer nível de ensino. As idéias de filiação e ruptura na aprendizagem da criança e do adolescente estão associadas ao desenvolvimento da estrutura cognitiva, já no adulto elas estão sob condições mais ligadas aos hábitos e formas de pensamento adquiridas.

Como enfoque teórico-metodológico, a pesquisa tem um caráter diagnóstico e insere-se numa perspectiva pragmática dedicada à explicitação das competências e concepções dos alunos frente às situações nas quais a estrutura de grupo é explicitável. A análise das competências diz respeito à análise das habilidades operacionais e dos esquemas utilizados no tratamento das situações com base nos pressupostos vergnaudianos. A apreciação das concepções estão dirigidas para a categorização dos conhecimentos expressos nas soluções e justificativas por meio da linguagem (natural, simbólica etc.) à luz das teorias antes mencionadas.

A pesquisa de campo foi desenvolvida com 18 estudantes do curso de Matemática da UFCG no campus de Campina Grande, que estavam cursando a disciplina Álgebra I pela primeira vez, com exce;ão de dois deles que estavam cursando pela segunda vez. Os instrumentos de análise estão constituídos por registros escritos e orais - ambos dizem respeito às soluções de três seqüências de atividades compostas de perguntas em aberto e situações-problema. Os registros orais foram obtidos por meio de gravações das entrevistas realizadas com os estudantes sobre as suas soluções dadas por escrito.

O conceito de grupo é essencial na formação do matemático, pois se trata de uma estrutura fundamental da álgebra como um todo que aparece em todas as outras estruturas estudadas no curso. Além disso, os alunos da Licenciatura, futuros professores, e, oficialmente, estão sendo preparados para atuarem nos Ensinos Fundamental e Médio, utilizarão o conceito de grupo, ainda que, implicitamente, ao trabalharem com diferentes conteúdos contemplados nos currículos nesses níveis.

Além do conceito de grupo ser uma pedra angular da álgebra, em especial da álgebra abstrata, ele tem inserção em muitas outras áreas da matemática, na geometria, na análise (real ou complexa), nas equações diferenciais etc., e também em outras áreas do conhecimento. Garding (1997, p. 48) afirma que "a teoria dos grupos é hoje uma parte rotineira da Física e da Química Quânticas".

A minha inserção profissional no campo da matemática está fortemente unida a uma prática reflexiva de educadora que ultrapassa um interesse puramente matemático. Além disso, a temática desenvolvida está vinculada à aprendizagem e ao desenvolvimento do indivíduo em sala de aula, que me parece convergir para uma aproximação das duas áreas envolvidas - matemática e educação. Por isso, acredito que as análises aqui desenvolvidas induzem a uma reflexão sobre a problemática do processo de ensino e aprendizagem na matemática superior como um todo, em especial, nos cursos de álgebra.

O percurso por mim desenvolvido para concretizar tal estudo está representado no texto da seguinte forma:

• No primeiro capítulo apresento uma revisão de literatura sobre o ensino e a aprendizagem de tópicos da teoria dos grupos, compreendendo que tal etapa tem um caráter indispensável à sequenciação do estudo a que me proponho;

• No segundo capítulo descrevo os referenciais teóricos utilizados para a realização da pesquisa, quais sejam: a visão de Vygotsky e Vergnaud sobre a formação de conceitos, que determinaram a construção dos objetivos, a elaboração dos instrumentos de investigação e a análise dos resultados. O meu interesse por seguir a linha de pensamento desses teóricos, deve-se à minha empatia pela procedência e coerência de suas abordagens psico-cognitivas da formação de conceitos e pelas suas concepções sobre a natureza dos conceitos;

• O terceiro capítulo trata da origem, do desenvolvimento e da formalização do conceito de grupo, destacando os problemas dos quais ele surgiu e as suas influências diretas e indiretas no desenvolvimento da matemática no fim do século XVIII até o início do século XX;

• O quarto, que trata da metodologia empregada, tornou-se particularmente laborioso, pela necessidade que tive de construir, de forma auto-didata, uma maneira de chegar a um consenso de análise;

• No quinto, apresento, com base nas considerações teóricas de Vergnaud, elementos constituintes do campo conceitual de grupo, com a perspectiva de criar uma forma de auxílio no tratamento didático-pedagógico do conceito de grupo;

• No sexto capítulo, apresento os resultados obtidos e a sua análise, pareando a discussão psicológica de Vygotsky e a visão cognitivo-pragmática de Vergnaud referente à formação de conceitos;

• Nas considerações finais retomo as questões centrais que orientaram o meu interesse de pesquisa, com suas implicações para o campo da psico-pedagogia e para novas investigações;

• Os fluxogramas do curso de Matemática nas habilitações Bacharelado e Licenciatura estão apresentados no anexo como figuras;

• O apêndice A traz as três seqüências de atividades aplicadas aos alunos. O apêndice B traz o Roteiro para as Entrevistas e o Roteiro para Estruturação e Análise dos Dados. O primeiro deles faz parte da abordagem semi-estruturada da entrevista - ele contém uma lista de perguntas feitas aos alunos durante a sua realização; o segundo é um roteiro de questionamentos para auxiliar na estruturação e análise dos dados - esses questionamentos foram levantados a partir das teorias utilizadas sobre a formação de conceitos e do detalhamento das três seqüências de atividades. Os apêndices C, D e E foram elaborados com o objetivo de complementar a construção de elementos do campo conceitual de grupo iniciada no capítulo 5.

Capítulo 1

Pesquisas sobre o Ensino e a Aprendizagem da Teoria dos Grupos

O meu direcionamento para estudos relativos ao ensino da álgebra abstrata no Ensino Superior, a princípio, surgiu apenas visando a possibilidade de contribuir efetivamente com a aprendizagem dos alunos nas disciplinas de conteúdos algébricos. Mais tarde, já mais envolvida com a problemática, percebi que os estudos encontrados na literatura dedicados ao ensino de álgebra são escassos embora a álgebra esteja presente nas diversas áreas da própria matemática e em várias outras áreas de conhecimento, seja na construção de modelos, como é o caso da Física e das Engenharias, seja como suporte para a elaboração de teorias, como é o caso da Ciência da Computação etc.

No Ensino Superior, a álgebra abstrata apresenta sérios problemas tanto de ensino quanto de aprendizagem. Ela abrange um conteúdo muito extenso, um conteúdo composto de várias estruturas. Em torno de cada estrutura existe uma teoria e entre elas há inúmeras relações; na verdade, trata-se de um enorme e rico tecido conceitual. Dentre as várias teorias que compõe a álgebra abstrata, existe a teoria dos grupos. Dubinsky et al (1994) afirma que na literatura existem pesquisas que legitimam a opinião de que professores e alunos, em sua maioria, considera ser a teoria dos grupos um dos assuntos mais difíceis na graduação - essa teoria apresenta dificuldades para os alunos tanto em termos do entendimento dos conteúdos, quanto em relação ao desenvolvimento de atitudes na direção de abstrações matemáticas.

Na literatura encontrei, apenas, trabalhos de cinco pesquisadores[1] que realizam investigações contínuas interligadas com um projeto de ensino e aprendizagem na matemática avançada, em longo prazo. Algumas destas investigações foram implementadas em cursos de álgebra abstrata e em tópicos da teoria dos grupos. A série de artigos a que tive acesso está constituída de uma publicação de 1994, duas de 1995 e outra de 1996, todos eles tratam de investigações realizadas em tópicos da teoria dos grupos. Eis o relato pela ordem da publicação dos artigos.

A pesquisa publicada em 1994, por um lado, traz situações vivenciadas por professores de álgebra abstrata no ensino de tópicos da teoria dos grupos, por outro, ela é muito importante para as minhas investigações, pois trata do entendimento dos estudantes sobre conceitos da teoria elementar de grupo, em particular, do conceito de grupo. Por isso, se faz então necessário um maior detalhamento desta pesquisa e não tanto das demais.

Nas pesquisas realizadas há uma tendência na utilização de abordagens alternativas nos cursos de álgebra abstrata. Duas delas foram realizadas com o auxílio de programas específicos no computador, a saber: Dubinsky et al (1994) e Leron e Dubinsky (1995). Nestas abordagens os alunos iniciam trabalhando com exemplos específicos do tópico a ser estudado e fornecidos pelo programa utilizado; em seguida, participam de discussões sobre os exemplos estudados e só depois a definição formal é introduzida. Leron et al (1995) relatam uma outra forma de abordar o conceito de isomorfismo de grupos que eles denominam de *naive isomorphism* definindo isomorfismo de forma natural antes de defini-lo formalmente. É sobre elas que vou tratar agora.

Os conceitos da teoria dos grupos aqui mencionados, a exemplo do próprio conceito de grupo, de subgrupo e subgrupo normal, grupo-quociente, de ordem de um grupo, são tratados no apêndice E. O grupo S_n de todas as permutações de $\{1, 2, 3, ..., n\}$, o grupo diedral D_n das simetrias de um polígono de n lados e o grupo aditivo $\mathbf{Z}_n$ das classes residuais módulo n estão apresentados no apêndice D.

---

[1]Uri Leron e Orit Hazzan - Departament of Education in Technology and Science Technion-Israel Institute of Technology-Israel; Rina Zazkis-School of Education Simon Fraser University-Canadá; Ed Dubinsky- Mathematics Department Purdue University-USA; Jennie Dautermann- Miami University-USA.

Pesquisa publicada em 1994

Dubinsky et al (1994) ao ministrarem um Workshop de Álgebra Abstrata durante seis semanas para professores-graduados (em serviço) de uma escola secundária, realizaram uma investigação sobre a natureza dos conhecimentos de tais estudantes sobre a teoria dos grupos e como um indivíduo pode desenvolver um entendimento de certos tópicos neste domínio.

Os instrumentos de análise (uma avaliação escrita e a entrevista) foram coletados durante as seis semanas.

As análises e interpretações das respostas dos alunos estavam apoiadas em uma abordagem construtivista baseada nas idéias de Piaget. Havia uma tentativa dos pesquisadores em estender o conceito piagetiano de abstração reflexiva[2] para o pensamento da matemática avançada. O modelo geral de aprendizagem inferido por eles ilustra uma estrutura de ação-processo-objeto-esquema dirigida a estes tópicos específicos da teoria dos grupos. Nesta perspectiva teórica, o essencial para os pesquisadores era que o indivíduo ao desequilibrar-se por meio de uma situação-problema[3], pudesse reequilibrar-se por assimilar a situação, por existirem neles esquemas disponíveis ou, se necessário, usar abstração reflexiva para reconstruir esquemas em um alto nível de sofisticação. Além disso, eles tinham um compromisso básico no referido trabalho, a integração entre teoria, prática e pedagogia que refletissem sugestões de pesquisas educacionais já realizadas.

[2]De uma forma bem simples, pode-se falar em uma variedade de abstrações construídas pelo sujeito a partir de material observável (objetos físicos) e não observável (ações sobre a realidade, ações mentais etc.). Existem dois tipos básicos de abstração: empírica e reflexionante. A abstração empírica apóia-se sobre os objetos físicos (cor, comprimento-largura-altura, área, peso-volume, quantidade etc.) ou sobre os aspectos materiais da própria ação (movimentos, empurrões etc.). Este tipo de abstração não consiste de simples leituras, uma vez que para abstrair qualquer propriedade de um objeto é preciso utilizar esquemas de assimilação não fornecidos pelo objeto, mas construídos anteriormente pelo sujeito. O processo de abstração reflexionante apóia-se em objetos mentais e atividades cognitivas do sujeito (esquemas ou coordenação de ações, ações mentais etc.), para deles (ou delas) retirar certas propriedades e utilizá-las para outras finalidades (novas adaptações, novos problemas etc.). Tendo agido sobre o meio, sobre os objetos, sobre as relações sociais, o sujeito debruça-se sobre essas ações, retirando qualidades não mais desse meio, desses objetos, mas da própria coordenação das ações. Interessam agora as ações sobre as ações práticas, as ações sobre a coordenação das ações, ou ações de segunda potência.(BECKER, 2001, p.38) A abstração reflexionante comporta dois aspectos inseparáveis: o reflexionamento e a reflexão. O reflexionamento é a projeção sobre um patamar superior daquilo que foi extraído do patamar inferior; a reflexão é um ato mental de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior daquilo que foi transferido do patamar inferior.

[3]Para os autores uma situação-problema é aquela que facilita o desenvolvimento de novos esquemas.

Resultados gerais - categorias:

Após a análise, os pesquisadores encontraram entre os alunos quatro tipos de construções: ações, processos, objetos e esquemas. Tais construções foram por eles assim definidas: a ação é qualquer manipulação física ou mental que transforma, de algum modo, objetos. Uma ação inclui a identificação de que uma certa propriedade é satisfeita. Por exemplo, para o caso de grupo seria a determinação das características de um grupo tais como: a ordem, se o grupo é cíclico ou apenas comutativo, se é um grupo de simetrias etc. A ação é uma construção estática, no sentido de que o indivíduo só consegue executar uma coisa de cada vez (por exemplo, ele consegue fazer operações entre elementos de um conjunto dadas por certas expressões algébricas, mas não dá conta quando a operação é dada em casos mais gerais).

Quando a ação pode tomar lugar inteiramente na mente do indivíduo, ou exatamente ser imaginada como tomando lugar, sem necessariamente, percorrer todos os passos específicos, diz-se que a ação foi interiorizada para vir a ser um processo. A concepção de processo envolve a idéia de uma transformação dinâmica (operação) de quantidades, de acordo com meios repetitíveis e que começa sempre com objetos do mesmo tipo. É possível para o aluno combinar dois ou mais processos para obter novos processos, conectando *inputs* e *outputs*, de forma apropriada, de tal modo que outro processo seja formado. Ou seja, os sujeitos são capazes de combinar processos ou de revertê-los.

Quando é possível um processo ser transformado por alguma ação, diz-se que ele foi "encapsulado" para vir a ser um objeto.

Um coerente conjunto de processos e objetos pode ser coletado junto e tematizado para formar um esquema identificável. Os esquemas são as formas como os conceitos existem na mente de um indivíduo. Um esquema pode ser usado para o tratamento de uma situação-problema, para desvendá-la e trabalhar com os processos e objetos individuais. Um esquema também pode ser visto como um objeto no qual ações e processos podem ser a ele aplicados. Uma conseqüência desta perspectiva teórica é que o papel dos símbolos e outros sistemas de representação são subsidiários para as construções de abstração reflexiva.

Resultados específicos exemplificando as categorias:

Na construção dos conceitos de grupo e subgrupo de um grupo - foi observado um desenvolvimento progressivo dos indivíduos, que muda através de várias fases intermediárias de entendimento desses conceitos. Primeiro, o aluno vê grupo como conjuntos de elementos discretos; depois muda para um estágio, na qual a operação, assim como os elementos, são incorporados através de uma necessária definição; e finalmente, é construído um pensamento, que entende um grupo como um objeto no qual ações podem ser aplicadas. Essa progressão no desenvolvimento da construção desses conceitos pode ser melhor entendida a partir de algumas características, de relatos e de exemplos apresentados e explicitados pelos alunos, contidos no próprio artigo.

1. Entendendo grupo e subgrupo como conjuntos de elementos

Nessa fase o indivíduo vê um grupo primariamente em termos de seus elementos, apenas como conjunto, só distingue um grupo de outro pelo número de elementos. O fato de ser subconjunto é suficiente para ser subgrupo. Algumas afirmações de alunos investigados na referida pesquisa mostram isso:

Kim diz que S_3 e $\mathbf{Z}_6$ são isomorfos porque ambos têm 6 elementos;
Sue escreve $\{0,1\}$ e $\{0,1,2\}$ como subgrupos de $\mathbf{Z}_6$, com dois e três elementos respectivamente;
Cal considera, tanto na parte escrita quanto na entrevista, $\mathbf{Z}_3$ sendo vários conjuntos: $\{0,1,2\},\{1,2,3\},\{0,2,3\}$ ou $\{0,2,4\}$. (DUBINSKY et al, 1994, p. 274)

2. Vendo grupo e subgrupo como conjuntos com operações

Os autores dizem que há uma certa evidência de que um indivíduo nessa fase já percebeu que sua concepção de grupo apenas como conjunto é inadequada, e pode começar a incluir uma operação. Ele sabe que um dado conjunto tem certas propriedades, uma das quais é que nele pode ser construída uma operação binária satisfazendo certas condições; o conjunto é o aspecto dominante, a operação é secundária. Aqui, um subgrupo é um subconjunto ao qual alguma operação foi acrescentada fazendo-o um grupo.

Na entrevista realizada pelos pesquisadores, para a pergunta: "$\mathbf{Z}_3$ é um subgrupo de $\mathbf{Z}_6$" muitos alunos respondem "sim", mas as justificativas dadas são diferentes:

Tim pensa e responde: "depende da operação";
Kim no meio da discussão sobre $\{0, 1, 2\}$ com a operação aditiva módulo 6 induzida de $\mathbf{Z}_6$ porque $\{0, 1, 2\}$ é um subconjunto de $\mathbf{Z}_6$, diz: "isso é $\mathbf{Z}_3$, eu posso usar adição módulo 3";
Ann diz: "$\mathbf{Z}_3$ é o conjunto $\{0, 1, 2\}$ e se eu fizer a tabela da operação é fechado e tem todas as propriedades..." ao lhe perguntarem com que operação, ela diz que é adição módulo 3;
Cal explica de uma forma bem sucinta: "$\mathbf{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ é um subconjunto de $\mathbf{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e um grupo sobre ele mesmo". (DUBINSKY et al, 1994, p. 276-277)

Em suma, para os estudantes nesta fase, para um subconjunto ser subgrupo de $\mathbf{Z}_6$, ele precisa ser fechado sobre qualquer operação.

3. Entendendo que a operação do subgrupo é induzida do grupo maior

Uma vez que os indivíduos reconheçam o papel da operação, eles são capazes de entender que a operação do subgrupo deve ser a mesma do grupo maior. Porém, este requisito pode mostrar-se para o aluno como sendo algo arbitrário e ele não relaciona a operação como a restrição de uma função do grupo maior para o subgrupo. Vê-se isso nas afirmações dos estudantes em resposta a pergunta: "$\mathbf{Z}_3$ é um subgrupo de $\mathbf{Z}_6$?"

May inicialmente diz que "sim", mas (pensa um pouco), depois reconhece que eles não têm a mesma operação. Ela observa a definição de subgrupo e diz que a operação é a mesma...
Os autores acreditam que May vê que a operação tem que ser a mesma ou mostra que ela conhece porque a adição módulo 6 ocorre.
Já o aluno Sam, aparentemente entende que a operação do subconjunto é uma restrição da operação em $\mathbf{Z}_6$. Nota-se isso quando ele afirma: "$\mathbf{Z}_3$ é o conjunto $\{0, 1, 2\}$ e $\mathbf{Z}_6$ é o conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Para ser subgrupo deve ser fechado sob a operação que você está usando em $\mathbf{Z}_6$".(DUBINSKY et al, 1994, p. 278-279)

4. Coordenação de grupo e subgrupo

Nessa fase o indivíduo já deve ter desenvolvido o conceito de subgrupo coordenado com o conceito de grupo. É possível que o estudante considere um subconjunto ser um subgrupo de um grupo se ele é fechado sobre a operação induzida. Vários destes entendimentos foram explicitados durante a entrevista realizada por Dubinsky et al (1994):

Para Sam ser fechado em relação à operação é o suficiente para ser subgrupo, $\{0, 2, 4\}$ é subgrupo de $\mathbf{Z}_6$ porque é fechado sob a adição módulo 6;
Ann entende que as condições para um subconjunto ser um subgrupo são garantidas a partir do fechamento, que as propriedades do grupo são automaticamente preservadas no subconjunto que é fechado sob a operação induzida;
Lon afirma que, ser subgrupo é necessário somente que a identidade esteja no subconjunto, no entanto, investiga todas as outras propriedades;

Kim verifica que $\{0, 2, 4\}$ é fechado, possui elemento neutro, olha o inverso de cada elemento, não menciona a associatividade, diz que é um grupo sob a adição módulo 6, portanto, é um subgrupo de $\mathbf{Z}_6$. (p. 279-280)

5. Entendendo grupo como objeto

Para os pesquisadores, ver um grupo como objeto pode ser muito difícil e demorado, isto pode ocorrer em um e outro não, em um momento e outro não. Para chegar a isso, o estudante precisa encapsular um processo dentro de um objeto. Quando um estudante está em uma situação em que é solicitado a aplicar ações, ele pode tentar encapsular processos a fim de ter objetos nos quais as ações podem ser aplicadas. Em outras palavras, tentar tratar algo como um objeto pode levar a fazê-lo um objeto. Um tipo de ação que requer o entendimento de grupo como objeto é ver que dois grupos (e suas operações) podem ser o mesmo, isto é, isomórficos em um sentido simples. A consciência de propriedades de grupo pode levar à reconstrução do conceito de grupo de modo que um grupo é visto como um objeto.

Provavelmente, nesse último estágio o teorema de Lagrange[4] seja aplicado como uma condição *a priori* para verificar se um dado subconjunto é um subgrupo de um grupo. Na visão de DUBINSKY et al (1994) existem experiências consideráveis sugerindo que é muito difícil para os alunos alcançarem esse estágio e muitos deles não o fazem. Na pesquisa, um dos alunos, quando solicitado para encontrar um subgrupo de ordem 4 de D_3, afirmou explicitamente que um tal subgrupo não existe porque 4 não divide 6. Outros, entretanto, tentaram criar vários possíveis subconjuntos de elementos de D_3, evidenciando assim não ter atingido o estágio que vê grupo como um objeto.

Também neste estágio, ao tentar determinar se um subconjunto é subgrupo de um grupo, o trabalho de verificar as propriedades de grupo é simplificado pelo uso de certos atalhos. Além disso, o aluno compreende e usa o fato de que se o subconjunto é fechado com a operação induzida, em acréscimo, ele tem a associatividade, que é inerente aos elementos. Neste caso, é necessário somente verificar se a identidade original e o inverso de todo elemento do subconjunto estão no subconjunto.

[4]Uma formulação típica do teorema de Lagrange é a seguinte: seja G um grupo finito. Se H é um subgrupo de G, então a ordem de H divide a ordem de G.

Desenvolvendo os conceitos de classe, de normalidade e de grupo quociente

A opinião geral entre os pesquisadores é de que a maioria dos estudantes não consegue um entendimento do conceito de grupo quociente. Geralmente, a matemática envolvida nestes conceitos é extremamente difícil para os estudantes. A maior dificuldade para os estudantes parece começar a aparecer com a introdução de classes, agravando-se com normalidade e com a construção de grupo quociente. Não houve exceção com os estudantes desta pesquisa. Suas dificuldades começaram a aparecer na avaliação escrita e foi mais evidente nas entrevistas. Cinco dos dez entrevistados fizeram explicitamente afirmações tais como: "eu não sei o que é um subgrupo normal" ou "normalidade significa que é comutativo". (DUBINSKY et al, 1994, p. 293)

Conclusão dos pesquisadores:

Os pesquisadores afirmam que o desenvolvimento do entendimento de grupo e subgrupo de um grupo ocorre de um modo um tanto paralelo. Existem exemplos específicos nos quais o que é entendido em relação a um conceito é usado na construção de novos entendimentos do outro. Além disso, para os estudantes entenderem grupo e subgrupos de um grupo é preciso fazer uso de outros conceitos matemáticos, os mais importantes são os conceitos de conjunto e de função. O passo final na construção do conceito de grupo começa com a compreensão de que outros grupos, aparentemente diferentes de um grupo dado, podem ser construídos, mas eles não serão verdadeiramente diferentes. Neste ponto, há uma concepção de isomorfismo bem desenvolvida, o estudante pode começar o processo de construir grupos específicos e estabelecer isomorfismos entre eles. Para os autores, nenhum dos alunos entrevistados na pesquisa, fez afirmações e/ou relatos que pudessem ser interpretados como tendo alcançado esse passo. Existem suspeitas de que apenas um deles (Lon) potencialmente o alcançou, uma vez que em referência a $\{0,2,4\}$, que ele conhece ser um subgrupo de $\mathbf{Z}_6$, afirma:

"Na verdade é $\mathbf{Z}_3$, mas, ou, perdão, é isomorfo a $\mathbf{Z}_3$[...] O problema aqui é que você tem dois grupos que são isomorfos um ao outro, e ainda um é um subgrupo de um certo grupo, e o outro não é". (1994, p. 281)

Os autores dizem que, nos estudantes investigados, o desenvolvimento do conceito de grupo parece ter um início muito primitivo, baseado inteiramente nas suas concepções de conjunto. À medida que o estudante ganha experiência, ele pode incluir propriedades que este conjunto pode ter, a operação binária é incluída entre estas propriedades. No início, pode não existir diferenciação entre as propriedades de fato e a operação. Para eles, um importante passo no desenvolvimento ocorre quando o estudante escolhe a operação binária e focaliza seu aspecto funcional. O requisito matemático aqui é que o conceito de função do estudante tenha uma abrangência de funções de duas variáveis. Aparentemente, a conclusão deste desenvolvimento é a encapsulação de dois objetos, um conjunto e uma função (operação binária) em pares de coordenadas que pode ser o primeiro entendimento real de grupo. Eventualmente, isto terá que ser reconstruído em um plano mais alto que inclua o conceito de isomorfismo. O estudante pode vir a entender um grupo como uma classe de equivalência de pares isomorfos.

Esta pesquisa, por um lado, tem algo em comum com a minha proposta, uma vez que ambas lidam diretamente com o conceito de grupo como objeto de estudo, por outro lado, ela se distancia por trabalhar com alunos ainda em formação e, fundamentalmente, por utilizar outro referencial teórico (ver capítulo 2).

Pesquisa publicada em 1995

Leron e Dubinsky (1995) relatam uma abordagem alternativa para o ensino de álgebra abstrata em geral e da teoria dos grupos em particular. Esta abordagem é usada e desenvolvida pelos membros da equipe em suas aulas durante vários anos.

Segundo os autores, a experiência é feita através de um método de leitura com métodos construtivos e interativos envolvendo atividades com computadores e aprendizagem cooperativa. A aprendizagem é considerada cooperativa porque os estudantes trabalham em equipe (de 2 a 4 alunos) no computador e também realizam discussões em classe. Na maior parte dos casos, as equipes são mantidas durante todo o semestre. O estudo é desenvolvido em um laboratório de computadores, com programas prontos e escritos na linguagem de programação ISETL. Segundo os próprios pesquisadores, os programas são simples e restritos para matemáticos, específicos para determinados conteúdos.

Conclusão dos pesquisadores:

Para os autores, o trabalho em equipe é um meio especial para a aprendizagem colaborativa, o ambiente de aprendizagem utilizado encoraja e capacita os alunos a fazerem as construções necessárias aos processos matemáticos inerentes ao conteúdo estudado. A abordagem alternativa é construtivista. O ambiente de aprendizagem solicita ao estudante fazer as construções mentais correspondentes a estes processos, objetos e relações matemáticas. Eles estão aprendendo pelo "método de descoberta". Para os pesquisadores, esta experiência representa um novo paradigma para o ensino da matemática avançada, em geral, e da álgebra abstrata, em particular.

Pesquisa publicada em 1995

Leron et al (1995) investigaram como os alunos de graduação, em seu primeiro curso de álgebra abstrata, aprendem o conceito de isomorfismo de grupos.

As várias faces do isomorfismo e a nova abordagem no ensino:

O próprio título do artigo[5] já aponta para a complexidade intrínseca ao conceito de isomorfismo. Na linguagem dos autores, trata-se de um conceito rico e multifacetado, pois envolve o entendimento dos conceitos de grupo, função e quantificadores.

Construir (mentalmente) o conceito de isomorfismo de grupo de acordo com a definição formal (ver apêndice E) envolve a construção do conceito de função e de isomorfismo como objeto. O estudo deste conceito, junto aos alunos, não começou com a introdução da definição formal de isomorfismo, e sim com uma outra abordagem que eles denominam de *naive isomorphism*. Nesta perspectiva a estratégia de ensino é a seguinte: eles tomam um qualquer grupo que já é conhecido pelos estudantes e renomeiam seus elementos e sua operação, e dão uma cópia isomórfica do tal grupo - os dois grupos são "os mesmos exceto a notação (os símbolos) que representam os elementos e a operação".

Para os pesquisadores, há distinções entre o isomorfismo formalmente definido e o *naive isomorphism* definido de forma natural. Estas distinções, do ponto de vista formal, podem ser completamente simples, no entanto, elas têm grande importância no processo

[5] Learning group isomorphism: a crossroads of many concepts - Aprendendo isomorfismo de grupo: uma encruzilhada de muitos conceitos (tradução minha)

de ensino e aprendizagem. Em cada uma das duas definições (formal ou natural), o profundo significado do isomorfismo é que a correspondência implícita na versão natural, ou a função, explícita na versão formal, preserva a estrutura do grupo e todas as suas propriedades abstratas. Como conseqüência disto, uma discussão interessante no ensino e na pesquisa é a íntima conexão entre o conceito de isomorfismo e o de grupo abstrato, uma vez que cada grupo específico é associado isomorficamente a um grupo abstrato.

Essa pesquisa foi realizada durante um curso de álgebra abstrata realizado em um semestre e ministrado por dois dos autores, com estudantes de universidades e situações diferentes: alunos do primeiro ano do curso de graduação em Ciência da Computação, do Israel Institute of Techonology; professores-graduados (em serviço) de uma escola secundária, alunos de um curso de verão da Kent State University ministrado por um dos autores.

Questões propostas aos estudantes investigados:

Foram colocadas duas questões para os estudantes. Na Questão 1 foram dados três grupos abstratos de ordem 6 e as respectivas tabelas de operação, cujos conjuntos base são $G = \{a, b, c, d, x, y\}$, $G^o = \{a^o, b^o, c^o, d^o, x^o, y^o\}$ e $G' = \{a', b', c', d', x', y'\}$ e as tabelas são 1.1, 1.2, 1.3, respectivamente. A tarefa dos estudantes era decidir quais grupos eram isomorfos e quais não o eram. Na Questão 2 foram dados três grupos específicos: S_3, o grupo dos elementos de $\mathbf{Z}_9$ que são relativamente primos com 9 (representado pelo símbolo U_9) e o grupo $G = \{(g_1, g_2) \mid g_1 \in \mathbf{Z}_2, g_2 \in \mathbf{Z}_3\}$ com a operação $*$ dada por: $(g_1, g_2) * (h_1, h_2) = (g_1 +_2 h_1, g_2 +_3 h_2)$ quaisquer que sejam $g_1, h_1 \in \mathbf{Z}_2$ e $g_2, h_2 \in \mathbf{Z}_3$ onde $+_2$ indica a adição de inteiros módulo 2 e $+_3$ indica a adição de inteiros módulo 3. A tarefa da Questão 2 era a mesma da Questão 1, envolvendo também os grupos da Questão 1, dando um total de seis grupos.

Resultados da pesquisa:

Primeiro, os pesquisadores perceberam um efeito ou uma influência recíproca entre o específico e o geral. Por um lado, os estudantes mostraram uma forte necessidade por procedimentos canônicos, procedimentos passo a passo para encontrar uma função de um grupo G em um grupo G'. Por outro lado, os alunos paravam ao se depararem com

$*$	a	b	c	d	x	y
a	d	y	x	a	c	b
b	c	d	a	b	y	x
c	b	x	y	c	a	d
d	a	b	c	d	x	y
x	y	c	b	x	d	a
y	x	a	d	y	b	c

Tabela 1.1: Da operação do grupo abstrato $G = \{a, b, c, d, x, y\}$

$\circ$	a^o	b^o	c^o	d^o	x^o	y^o
a^o	y^o	c^o	b^o	x^o	d^o	a^o
b^o	x^o	y^o	d^o	c^o	a^o	b^o
c^o	d^o	a^o	x^o	b^o	y^o	c^o
d^o	c^o	x^o	a^o	y^o	b^o	d^o
x^o	b^o	d^o	y^o	a^o	c^o	x^o
y^o	a^o	b^o	c^o	d^o	x^o	y^o

Tabela 1.2: Da operação do grupo abstrato $G^o = \{a^o, b^o, c^o, d^o, x^o, y^o\}$

as várias possibilidades de escolha para construir a função. Para eles, o fenômeno dos estudantes pararem na construção de isomorfismos específicos, pode ser visto como um caso especial do fenômeno geral do desejo dos estudantes por procedimentos canônicos e, ao mesmo tempo, do medo de fazer escolhas ou de realizar procedimentos incorretos.

As entrevistas também revelam que, diante da tarefa de responder se dois grupos são isomorfos, os alunos fazem um exame seqüencial nos grupos: qual a ordem do grupo, qual o elemento identidade, qual a ordem dos elementos, quais as quantidades de elementos com a mesma ordem, se o grupo é comutativo, se é cíclico. Quando perguntados sobre as propriedades que são preservadas pelo isomorfismo, eles listam as propriedades na seguinte ordem: comutatividade, ciclicidade, ordem do grupo, ordem dos elementos. Os autores sugerem determinados processos mentais como resposta para estas tendências, por eles chamados de fenômeno.

Foi distinguido, entre os alunos, níveis de entendimento dos vários conceitos envolvidos: grupo, função e quantificadores. Há dificuldades por parte dos alunos com o entendimento do conceito de isomorfismo, tanto em relação à construção de isomorfismos específicos quanto ao tratamento formal envolvendo os conceitos referidos acima. As palavras de um estudante, em uma das entrevistas, são um exemplo de um típico entendimento

$\cdot$	a'	b'	c'	d'	x'	y'
a'	b'	c'	a'	y'	d'	x'
b'	c'	a'	b'	x'	y'	d'
c'	a'	b'	c'	d'	x'	c'
d'	y'	x'	d'	b'	a'	y'
x'	d'	y'	x'	a'	c'	b'
y'	x'	d'	y'	c'	b'	a'

Tabela 1.3: Da operação do grupo abstrato $G' = \{a', b', c', d', x', y'\}$

parcial do entrelaçamento dos três conceitos: "... estes dois grupos são isomorfos porque eu posso encontrar uma função um-a-um de cada elemento em G para cada elemento em G'".(LERON et al, 1995, p.168)

Na opinião dos pesquisadores, a partir das entrevistas se pode pensar em uma concepção alternativa para o quantificador existencial: dizer que "existe uma função" de G em G', para os alunos significa dizer que "existe uma única função", ou, mais plausivelmente, que "o modo de construir a função é um algoritmo canônico". Uma hipótese deles é que a dificuldade com a formulação de definições relativas a isomorfismo pode ser um caso especial da dificuldade com funções e quantificadores, ou mais especificamente, com quantificadores sobre funções.

Os autores comentam que o esforço de alguns dos melhores matemáticos para formular as definições de grupo abstrato e isomorfismo, ver apêndice E, é uma indicação da complexidade e da sofisticação destes conceitos; e que não deve haver nenhuma admiração diante da dificuldade e da necessidade de tempo e esforço dos estudantes para desenvolvê-los em suas mentes. Uma de suas sugestões é o uso do bom senso (que não é suficientemente aplicado em classe), e que é uma atitude sábia não introduzir para os estudantes muito rapidamente uma definição de um conceito que tem uma longa história no seu desenvolvimento. Eles afirmam que, de fato, a adoção feita por eles de um isomorfismo natural é uma tentativa nesta direção.

Pesquisa publicada em 1996

Hazzan e Leron (1995) relatam os usos e abusos do teorema de Lagrange feitos por 113 estudantes no segundo semestre do curso de graduação em Ciência da Computação em um curso introdutório da teoria dos grupos da Israeli University, depois de terem completados cursos em cálculo e álgebra linear.

As duas questões propostas foram:

i) Qual é a recíproca do teorema de Lagrange?

ii) $\mathbf{Z}_3$ é um subgrupo de $\mathbf{Z}_6$?

Você vê alguma conexão substancial entre estas duas perguntas?

Os pesquisadores classificaram as formulações não típicas do teorema de Lagrange dadas como respostas para a primeira pergunta em dois tipos: a recíproca nova e a recíproca sofisticada.

A recíproca nova é formulada assim: se a ordem de H divide a ordem de G então H é um subgrupo de G, a recíproca sofisticada: se k divide a ordem de G então existe em G um subgrupo de ordem k.

Alguns estudantes encontraram conexão entre as duas perguntas. Um total de 73 estudantes responderam a segunda questão incorretamente, e 20 destes responderam a segunda questão com a seguinte afirmação (houve algumas pequenas variações desta afirmação): $\mathbf{Z}_3$ é um subgrupo de $\mathbf{Z}_6$ pelo teorema de Lagrange, porque 3 divide 6.

A partir da análise prévia das respostas dos estudantes, os pesquisadores elaboraram três exemplos e foram apresentados aos estudantes para que eles dessem breves explicações. Os exemplos 1 e 2 foram apresentados aos estudantes na quarta semana do semestre, o exemplo 3 foi incluído no exame final.

Exemplo 1:

Um estudante escreve em um exame "$\mathbf{Z}_3$ é um subgrupo de $\mathbf{Z}_6$".

Em sua opinião, esta afirmação é verdadeira, parcialmente verdadeira, ou falsa?

Por favor, explique sua resposta.

Resultados:

Em uma turma de 113 estudantes, 73 deram respostas incorretas, dentre estes, 20 responderam o seguinte: $\mathbf{Z}_3$ é um subgrupo de $\mathbf{Z}_6$ pelo teorema de Lagrange, porque 3 divide 6.

Exemplo 2:

Um estudante escreve em um exame "S_4 é um subgrupo de S_5".

Em sua opinião, esta afirmação é verdadeira, parcialmente verdadeira, ou falsa?

Por favor, explique sua resposta.

Resultados:

De uma turma de 108 estudantes, 51 deram respostas incorretas, destes, 25 invocaram o teorema de Lagrange nas três versões seguintes:

S_4 não é um subgrupo de S_5 porque 4 não divide 5 (15 estudantes);

S_4 é um subgrupo de S_5 porque 24 divide 120 (6 estudantes);

S_4 é um subgrupo de S_5 porque 24 não divide 120 (4 estudantes).

Exemplo 3:

"Em S_7 não existe um elemento de ordem 8".

Verdadeira ou falsa? Por favor, justifique sua resposta.

Resultados:

16 estudantes deram uma resposta incorreta, 12 entre eles invocou o teorema de Lagrange nas três versões seguintes:

Falsa. Existe um tal elemento porque 8 divide 5.040 (7 estudantes);

Como para todo $a, a^7 = e$, segue que $a^8 = e$ (3 estudantes);

A afirmação é verdadeira, porque 8 não divide 7 (2 estudantes).

Discussão realizada pelos pesquisadores:

Nesta pesquisa eles destacam casos especiais de dois tipos muito gerais de comportamentos. No primeiro, a solução é obtida através de uma pista ou de um fio condutor que aparece na representação textual do problema. Este tipo de comportamento aparece no contexto da matemática elementar no Ensino Fundamental. Um exemplo típico da ocorrência deste comportamento se dá na solução de problemas envolvendo dois números. O estudante, sem saber exatamente o que deve fazer, é induzido por uma palavra que aparece no enunciado do problema, ele descobre ou chuta a operação a ser realizada: a adição ou a subtração.

No caso aqui, o uso do teorema de Lagrange é feito pelo simples fato de o enunciado do problema envolver subgrupos e dois números naturais que são as ordens dos grupos. Eles dizem que a afirmação é verdadeira ou falsa considerando que os números envolvidos dividem ou não, sem o cuidado de olhar o problema e checar a solução. No segundo tipo de comportamento, dá-se o uso indistintamente do teorema e da sua recíproca. Neste caso, aparecem algumas variações, tais como: formulação incorreta da recíproca; negligência no uso do teorema ou da recíproca; deficiência em estabelecer a distinção entre o teorema e a recíproca; conclusão de que se o teorema é verdadeiro, a recíproca também o é.

O que move ou induz os estudantes a invocarem um teorema? Em resposta à pergunta, os pesquisadores dizem que parece existir dois fenômenos opostos no trabalho por eles realizado: ou os estudantes são relutantes no uso de teoremas como ferramentas para resolver problemas, ou fazem uma invocação quase automática de alguma versão de algum teorema para resolver um problema proposto. O segundo fenômeno ocorre principalmente com um certo tipo de teorema: talvez com aqueles que têm um nome, ou que é fácil de ser memorizado, que tem uma formulação simples envolvendo números etc., "como no caso do teorema de Lagrange que pode ser memorizado quase como um *slogan*, pode facilmente ficar retido na memória sobre um efeito hipnótico como uma mágica de encantamento". (HAZZAN e LERON, 1996, p. 26). Um uso desta forma pode propiciar ao estudante uma tendência de usar os teoremas sem olhar a situação ou os detalhes de suas aplicabilidades.

Vê-se que as recíprocas do teorema de Lagrange dadas pelos alunos investigados por Hazzan e Leron (1995) não são específicas destes alunos, são, também, formuladas por alunos na disciplina Álgebra I, sendo por mim constatado.

Esta última pesquisa mostra o quanto é delicado o entendimento e a aplicação de teoremas pelos nossos alunos de matemática. Mesmo na aplicação de um teorema simples como o de Lagrange os alunos ficam confusos. Diante desse relato, surge naturalmente as perguntas: Quais as causas reais de erros como esses? Que estrutura de pensamento os alimenta?

Diante deste quadro relativo ao ensino e à aprendizagem de tópicos da teoria dos grupos, a presente pesquisa se coloca como uma contribuição no sentido de discutir um aspecto essencial para a construção de qualquer conhecimento e, em especial, o conhecimento matemático: a formação de conceitos.

Capítulo 2

Considerações Teóricas

Segundo Castro (2000), as pesquisas realizadas apontam para a predominância da abordagem clássica nas salas de aula de matemática. Uma abordagem que atribui à definição um papel central na aprendizagem do conceito, baseada no pressuposto de que existe uma estratégia ideal para aquisição de conceitos, estratégia essa que deve ser adequada à estrutura formal do conceito. Considerando, apenas, o ponto de vista descritivo ou da precisão dos conceitos, se poderia dizer que a concepção clássica está fortemente presente na matemática, cujas definições são formulações satisfatórias em termos de propriedades necessárias e suficientes. No entanto, há outro aspecto a ser observado nos conceitos científicos e matemáticos, qual seja, a existência de um sistema de relações entre os conceitos. O princípio básico de uma concepção teórica é o de que cada conceito deve ser visto como parte e, ao mesmo tempo, elemento constitutivo da teoria em que está inserido. O conceito só tem existência no seio de uma teoria no sentido amplo, isto é, contextualmente. Neste sentido, os conceitos matemáticos se inserem numa concepção teórica, visto que, de fato, as teorias matemáticas são sistemas de conceitos e relações.

Para este trabalho é necessário destacar duas teorias para as quais é impossível falar de conceitos sem a perspectiva de um sistema de conceitos. Uma delas é a teoria histórico-cultural de desenvolvimento, proposta pelo psicólogo russo Lev S. Vygotsky (1896-1934) no enfoque sobre a formação de conceitos, a outra é a teoria dos campos conceituais do psicólogo francês Gérard Vergnaud. É sobre tais teorias que detenho-me no que segue.

2.1 A perspectiva histórico-cultural de Vygotsky

Um dos principais objetivos de Vygotsky era compreender os processos de desenvolvimento do ser humano, em especial, a origem e o desenvolvimento dos processos psicológicos tipicamente humanos. Para isso, ele se dedica à investigação dos processos do desenvolvimento humano nas suas dimensões filogenética (desenvolvimento da espécie humana), sociogenética (história dos grupos sociais), ontogenética (desenvolvimento do indivíduo) e microgenético (desenvolvimento de aspectos específicos do repertório psicológico dos sujeitos). Com estes desdobramentos da sua abordagem genética, há, em suas reflexões, profundas conexões e relações entre vários aspectos da experiência humana, tais como, o individual e o social, o biológico e o cultural, a aprendizagem e o desenvolvimento, o pensamento e a linguagem. (OLIVEIRA, 1995).

Para Vygotsky (1999, 2001), as características tipicamente humanas não estão presentes desde o nascimento do indivíduo, nem são resultados das pressões do meio externo simplesmente; são resultantes da interação recíproca do homem e o seu meio sócio-cultural, ocorrendo um desenvolvimento paralelo pela via natural e pela via histórico-cultural. O primeiro inclui o desenvolvimento anatômico, fisiológico e, em certa medida, psicológico. Os processos psicológicos incluídos aqui são os de origem biológica[1]. Este desenvolvimento natural é caracterizado, principalmente, pela incapacidade do indivíduo-criança de usar os meios culturais disponíveis. O desenvolvimento do homem pela via cultural ocorre nas suas interações com o meio e com os outros; estas interações, são, fundamentalmente, mediadas por instrumentos, por signos e por todos os elementos do ambiente humano carregados de significado cultural. A mediação é um dos conceitos fundamentais da proposta vygotskiana, que em termos genéricos, é o processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação; nesse processo a relação passa, então, a ser mediada. Esse elemento pode ser um instrumento ou um signo. Os instrumentos são meios que modificam o ambiente, os signos por sua vez modificam comportamentos. Os signos podem ser definidos como elementos que expressam outros objetos, eventos, situações. Exemplos

[1]São processos psicológicos naturais no sentido de que o indivíduo não tem nenhum controle sobre eles, envolve comportamentos e ações involuntárias: memória natural, atividades senso-perceptivas, atenção, motivação etc.

de signos: palavras, números, figuras, símbolos abstratos, sistemas de escrita, esquemas, diagramas, mapas etc.

Vygotsky (1999, 2001) faz uma distinção entre as funções psicológicas inferiores ou elementares e as funções psicológicas superiores. A primeira denominação refere-se às funções naturais, a segunda diz respeito aquelas que envolvem consciência (comportamentos conscientes) e processos de mediação, ações voluntárias e deliberadas (atenção e lembrança voluntária etc.), intenção, imaginação, memorização ativa, pensamento abstrato, pensamento lógico, raciocínio dedutivo, planejamento etc. que se desenvolvem por vias culturais. Um dos seus pressupostos é que os mecanismos psicológicos mais sofisticados da espécie humana, as funções psicológicas superiores, emergem dos processos psicológicos naturais ou elementares, sendo de origem sócio-cultural. Caracterizam-se pela inclusão dos signos ou meios culturais no funcionamento mental do indivíduo. Apresenta seu desenvolvimento, em grande parte, equivalente ao domínio dos vários signos e meios culturais. O signo, orientado internamente, é um meio da atividade interna dirigida para o controle do próprio indivíduo. O intelecto superior ou os processos mentais superiores pressupõem mecanismos intencionais, ações conscientemente controladas, processos voluntários que dão ao indivíduo a possibilidade de domínio sobre os instrumentos culturais e de uma certa independência em relação às características do meio ambiente.

Vygotsky observa que o desenvolvimento natural, em certa medida, é comum a todos os indivíduos de uma mesma época, no entanto, o funcionamento mental varia muito, pois depende dos vários sistemas de símbolos usados dentro das diferentes culturas. Assim, dependendo do uso desses signos, os indivíduos podem apresentar processos psicológicos superiores profundamente diferentes.

A cultura, por sua vez, determina hábitos, formas de comportamento e métodos culturais de raciocínio nos indivíduos. O indivíduo ao dominar os meios culturais em geral e a fala em particular, é também por eles transformado. O domínio dos meios culturais transforma nossa mente:"uma criança que tenha dominado o instrumento cultural da linguagem, nunca mais será a mesma criança outra vez..." (VEER e VALSINER, 1996, p. 247); não é somente o conteúdo do pensamento que muda, mas, também a maneira de pensar.

Os processos naturais não desaparecem com o desenvolvimento do indivíduo e conseqüente construção das funções psicológicas superiores. Para ele, os processos naturais e superiores têm uma relação de imbricação constante desde o início e se influenciam mutuamente, estando presente ao longo de toda a vida humana. As linhas de desenvolvimento natural e cultural caminham paralelamente, embora tenham gêneses e desenvolvimentos distintos.

Os sistemas de representação da realidade e a linguagem constituem o sistema simbólico básico de todos os grupos humanos e culturais, uma vez que eles exercem um papel fundamental na comunicação entre os indivíduos e no estabelecimento de significados compartilhados que permitem interpretações de situações do mundo real. Vygotsky dá como um exemplo disso, a criação e a formalização simbólica do número que se arrastou durante séculos. A idéia de número não é um produto do pensamento puro, independente da experiência. Os homens não adquiriram primeiro os números naturais para poder contar nem os números fracionários para poder medir; pelo contrário, ambos foram se formando lentamente, os números naturais pela prática diária da contagem de objetos e, posteriormente, os números racionais pela prática da medição de comprimento, de área, de volume etc. À medida que os números e seus símbolos foram surgindo, o comportamento do homem foi mudando.

Nas relações interpessoais do indivíduo através da linguagem há uma assimilação de formas e significados culturalmente estabelecidos. A partir dela há um processo de internalização, que não é um processo de absorção passiva, mas um processo intrapessoal de transformação, gerando algo novo e próprio daquele indivíduo. Em suma, a internalização é "a reconstrução interna de uma operação externa.[...] A internalização de formas culturais de comportamento envolve a reconstrução da atividade psicológica tendo como base as operações com signo". (VYGOTSKY, 1999, p. 74, 75). O desenvolvimento da linguagem é, portanto, constitutiva da transição das funções interpsicológicas para as funções intrapsicológicas, dos processos de assimilação vindos das formas de atividade social coletiva para os processos internos das funções individuais.

Esta específica abordagem sobre o desenvolvimento, que leva em conta a inserção do homem em um ambiente histórico e cultural, fundamenta a ênfase que Vygotsky dá à aprendizagem e a relação entre os processos de desenvolvimento e de aprendizagem em sua teoria. Assim como o desenvolvimento não é um processo espontâneo de maturação, a aprendizagem não é fruto apenas de uma interação entre o indivíduo e o meio. Nesta perspectiva, o processo ensino-aprendizagem inclui sempre aquele que ensina, aquele que aprende e a relação entre essas pessoas. A relação ensino-aprendizagem é essencial para a própria definição do processo. Oliveira (2000) diz que na concepção de Vygotsky sobre ensino-aprendizagem, a idéia de um processo que envolve, ao mesmo tempo, quem ensina e quem aprende não se refere necessariamente a situações em que haja um educador fisicamente presente. Aquele que ensina pode estar manifestado por meio dos objetos, da organização do ambiente, dos significados que impregnam os elementos do mundo cultural que rodeia o indivíduo.

Vygotsky (2001) detectou em suas experiências que o curso da aprendizagem não coincide com o curso do desenvolvimento, há, inclusive, relações muito complexas entre eles. A aprendizagem está sempre adiante do desenvolvimento, adquire-se certas habilidades numa determinada área antes de aprender a aplicá-las consciente e voluntariamente. Há discrepâncias entre o processo de aprendizagem e o desenvolvimento das funções psicológicas que dele participam diretamente. “O processo letivo tem a sua própria seqüência, sua lógica e sua organização, segue um currículo e um horário, e seria o maior dos equívocos supor que as leis externas da estruturação desse processo coincidem inteiramente com as leis internas de estruturação dos processos de desenvolvimento desencadeados pela aprendizagem” (p. 322).

É a aprendizagem que impulsiona o desenvolvimento, e, por isso, a instituição de ensino tem um papel fundamental na tríade ensino-aprendizagem-desenvolvimento. O processo de ensino-aprendizagem num ambiente sistematizado deve levar em conta o nível de desenvolvimento real do aprendiz (de um grupo ou de uma classe escolar) em um determinado conteúdo a ser estudado, estabelecendo os objetivos a serem alcançados com base no nível de conhecimentos e habilidades do mesmo (do grupo ou da classe). Deve-se definir o limiar inferior da aprendizagem e também ser capaz de definir o limiar superior. Com isso, o caminho a ser percorrido deve ser referendado pelo nível de desenvolvimento potencial dos indivíduos. Para Vygotsky (2001) o único bom ensino é aquele que se adianta ao desenvolvimento. Suas investigações mostraram que todo objeto de aprendizagem escolar sempre se constrói sobre um terreno ainda não amadurecido.

2.1.1 A formação de conceitos em Vygotsky

Os estudos de Vygotsky sobre a formação de conceitos decorrem do método de investigação utilizado para explicitar o problema da relação entre pensamento e linguagem. Para investigar esta relação, ele escolhe o método de análise psicológica que decompõe em unidades[2] a totalidade complexa. Neste caso a unidade de análise foi encontrada no significado da palavra, "que reflete da forma mais simples a unidade do pensamento e da linguagem" (VYGOTSKY, 2001, p. 398).

Esta investigação foi realizada por meio de estudos experimentais em laboratório[3] com crianças, adolescentes e adultos (alguns com distúrbios patológicos das atividades intelectuais e de linguagem), de estudos heurísticos e teóricos nos seus aspectos genéticos, estruturais e funcionais.

Vygotsky (2001) afirma que o desenvolvimento dos conceitos sejam eles espontâneos ou científicos - conceitos sistematizados e tratados intencionalmente em um ambiente escolar ou acadêmico com o apoio de agentes mediadores -, é, no fundo, uma parte do desenvolvimento da linguagem, exatamente no seu aspecto semântico porque, em termos psicológicos, o processo de desenvolvimento dos conceitos é o mesmo processo de desenvolvimento dos significados da palavra, da generalização ou do conceito, tendo apenas nomes diferentes. Há uma construção gradativa de diferentes generalizações por meio de diferentes formas de pensamento em cada estágio do desenvolvimento do indivíduo, fazendo com que ele distinga nos objetos características e relações cada vez mais abstratas.

O significado da palavra pertence à linguagem e, do ponto de vista psicológico, o

[2] A unidade é definida como um produto da análise que, diferente dos elementos, possui todas as propriedades que são inerentes ao todo e, concomitantemente, são partes vivas e indecomponíveis dessa unidade. É suscetível de explicação e contém, em sua forma primária e simples, aquelas propriedades do todo em função das quais se empreende a análise. (VYGOTSKY, 2001, p. 8, 398).

[3] Os estudos foram desenvolvidos por ele e seus colaboradores, iniciados por L. S. Sakharov e complementados por U.V. Kotiélova e E.I. Pachkóvskaia. (VYGOTSKY, 2001, p.167). Nos estudos sobre o desenvolvimento dos conceitos espontâneos (aprendizagens do dia-a-dia), Vygotsky teve a colaboração especial de A.R.Luria.

significado da palavra é uma generalização ou um conceito. Como a generalização é um ato do pensamento, conseqüentemente, o significado da palavra é também um fenômeno do pensamento. Assim, o significado da palavra é, ao mesmo tempo, um fenômeno da linguagem e um fenômeno do pensamento; um fenômeno de discurso e de intelecto. Ou seja, um fenômeno de pensamento discursivo ou da palavra consciente é a unidade da palavra com o pensamento. Para reforçar a sua explicação e evitar que essa relação seja vista apenas externamente, Vygotsky (2001) diz que "o significado da palavra só é fenômeno de pensamento na medida em que o pensamento está relacionado à palavra e nela materializado, e vice-versa: é um fenômeno de discurso apenas na medida em que o discurso está vinculado ao pensamento e focalizado por sua luz". (p. 398).

O significado da palavra se modifica no processo de desenvolvimento do indivíduo sob diferentes modos de funcionamento do seu pensamento. A mudança do significado da palavra revela-se na generalização que está contida na palavra, a palavra se modifica em sua natureza interior, e, conseqüentemente, muda também a relação do pensamento com a palavra. Essa relação é um processo, isto é, um movimento do pensamento à palavra e da palavra ao pensamento, que passa por uma série de fases e estágios e sofre todas as mudanças que podem ser suscitadas por este desenvolvimento. "Todo pensamento tem um movimento, um fluxo, um desdobramento, em suma, o pensamento cumpre alguma função, executa algum trabalho, resolve alguma tarefa".(VYGOTSKY, 2001, p. 409). O desenvolvimento da relação entre pensamento e palavra não é etário, e sim, funcional, é um movimento do próprio processo de pensamento da idéia à palavra, e está vinculado com o desenvolvimento da linguagem.

Em toda a obra de Vygotsky percebe-se a sua busca de explicações para as formas mais elevadas de comportamento humano, de modo que elas revelassem os meios pelos quais o homem aprende a organizar e dirigir o seu comportamento. Para ele, a razão central destas formas superiores de comportamento está nos meios pelos quais o homem controla o processo do próprio comportamento. Segundo ele,

> Todas as funções psíquicas superiores têm como traço comum o fato de serem processos mediados, melhor dizendo, de incorporarem à sua estrutura, como parte central de todo o processo, o emprego de signos como meio fundamental de orientação e domínio nos processos psíquicos. No processo de formação de conceitos, esse signo é a palavra, que em princípio tem o papel de meio na formação de um conceito e, posteriormente, torna-se seu símbolo.

(VYGOTSKY, 2001, p. 161)

A formação de conceito através da palavra é o resultado de uma atividade intensa e complexa do pensamento, da qual todas as funções psicológicas básicas participam em uma combinação original. Todas as funções psicológicas que participam dessa combinação já existem na criança de tenra idade, embora ela não tenha domínio sobre elas e nem o poder de regular as suas operações psicológicas.

Em termos genéticos, Vygotsky formula a conclusão da sua pesquisa experimental do processo de formação de conceitos em termos de uma lei geral que estabelece:

> o desenvolvimento dos processos que finalmente culminam na formação de conceitos começa na fase mais precoce da infância, mas as funções intelectuais que, numa combinação específica, constituem a base psicológica do processo de formação de conceitos amadurecem, configuram-se e se desenvolvem somente na puberdade. (VYGOTSKY, 2001, p. 167)

Ele acrescenta, ainda, que toda a plenitude de formas de atividade intelectual do adulto já existe de forma embrionária na criança, e que durante a idade transitória (idade pré-escolar e idade escolar) não ocorre nenhuma transformação essencial, nenhum passo na assimilação dos conceitos. Existe sim, um processo de mudança e domínio no emprego de signos, que conduz o indivíduo a uma conseqüente transformação e regulação das suas funções psicológicas superiores. É por meio do emprego funcional da palavra, que o adolescente controla as suas próprias operações psicológicas, dominando, portanto, o fluxo dos seus próprios processos psicológicos, que lhes orienta a atividade com o objetivo de resolver os problemas que tem pela frente. Esse processo é acelerado por uma aprendizagem sistemática e organizada e não se reduz às associações, ao pensamento e às representações, "embora todas essas funções sejam participantes obrigatórias da síntese complexa, que é o processo de formação de conceitos". (VYGOTSKY, 2001, p. 169)

Trata-se de um processo longo, não linear que tem uma base psicológica, e, como já foi dito, começa na fase mais precoce da infância. Ele tem início com a formação dos conceitos espontâneos e esta formação ocorre numa vinculação direta do indivíduo com o objeto, percorrendo um longo caminho de desenvolvimento no tocante ao seu conteúdo empírico. Já na formação do conceito científico o contato do indivíduo começa pelo conceito mediado pela sua definição verbal ou, equivalentemente, por outros conceitos.

No processo de formação dos conceitos espontâneos, o indivíduo tem diante de si um amontoado de objetos entre os quais ele vai estabelecendo vínculos e formando agrupamentos destes objetos (que são equivalentes funcionais do significado da palavra). No processo de formação dos conceitos científicos, o indivíduo tem à sua frente um sistema que envolve palavras, frases e proposições - um sistema de conceitos e relações. Ele vai gradativimente atribuindo ou ampliando significados para elas (palavras, frases e proposições) e criando o seu próprio sistema de conceitos e relações.

Em ambos os casos há, em cada estágio ou em cada fase, mudanças concomitantes e interdependentes de todos os elementos que compõem ou participam do processo como um todo. No primeiro caso, cada estágio é caracterizado por um tipo de agrupamento de objetos e por certos vínculos estabelecidos entre tais objetos. As mudanças entre os estágios ou fases ocorrem: na discriminação dos objetos, no caráter dos vínculos e dos elos (que são baseados nos traços e atributos dos objetos) entre os objetos que constituem os agrupamentos, nas formas de pensamento, na natureza dos agrupamentos e nas generalizações subjacentes a cada agrupamento. No segundo, cada estágio está caracterizado por um tipo de sistema de conceitos e de relações. Neste, as mudanças se dão na seleção/discriminação dos conceitos, no desenvolvimento dos conceitos (ou nas generalizações dos conceitos), nas relações entre os conceitos (que são baseadas nos atributos, generalizações e generalidades dos conceitos), nas formas de pensamento, na natureza dos sistemas.

No processo de formação de conceitos, do ponto de vista vygotskiano, há uma base histórico-cultural e também uma base psicológica, já que, por um lado, o significado da palavra é construído culturalmente e transmitido ao sujeito aprendiz e, por outro lado, há uma reconstrução interna do próprio sujeito. Este processo ocorre em três estágios e em cada um deles há diferentes fases. O estágio dos sincréticos (se desenvolve em três fases), dos complexos (ocorre em cinco fases) e dos pré-conceitos (em quatro fases). Todos os estágios e fases do desenvolvimento do significado da palavra são importantes, no entanto, é na quinta fase do segundo estágio, fase dos pseudoconceitos, e na segunda fase do terceiro estágio, fase dos conceitos potenciais, que se encontram as raízes da formação do verdadeiro conceito. Enquanto a formação não está concluída, ou seja, enquanto o conceito verdadeiro não emerge, se manifestam formações que são “equivalentes funcionais” dos conceitos.

Apesar de a descrição dos estágios no processo de generalização feita aqui supor a relação direta do indivíduo com o objeto, ela vale também para a situação em que esta relação não é direta. Nesta descrição estão explicitadas as características gerais de cada estágio no que diz respeito a cada um dos elementos mencionados e as suas mudanças.

Estágio dos sincréticos

Neste estágio, o desenvolvimento do pensamento é caracterizado por construções de imagens sincréticas que são equivalentes funcionais dos conceitos propriamente ditos. Nele o indivíduo agrupa objetos escolhidos ao acaso e de forma não sistemática, com base em impressões subjetivas, formando amontoados sincréticos. Nessa formação dos agrupamentos, o sujeito confunde as relações entre suas próprias impressões com as relações entre os objetos. O significado que o indivíduo dá às palavras neste estágio denota nada mais do que um conglomerado vago e sincrético de objetos isolados que, de uma forma ou outra, aglutinaram-se numa imagem em sua mente. Devido à sua origem sincrética, essa imagem é extremamente instável. (VYGOTSKY, 1996, p. 51)

Neste estágio são distinguidas três fases: fase de tentativa e erro, na qual a escolha dos objetos é arbitrária e quando corrigido experimenta outro objeto também escolhido arbitrariamente; a fase de predominância da percepção e organização do campo visual, em que o amontoado de objetos é formado com base nas disposições espaciais dos objetos; e, por fim, a fase da formação sincrética de um novo grupo com base em grupos antes formados também sincreticamente. O indivíduo separa os objetos em vários grupos, e desses grupos, retira objetos para formar um novo grupo sincrético.

Estágio dos complexos

Este estágio é caracterizado por um tipo de pensamento coerente e objetivo, no sentido de não ser influenciado pela subjetividade do indivíduo como ocorre no estágio sincrético. A formação de complexos ocorre com base em vínculos concretos, factuais e fortuitos, diferentemente dos vínculos típicos do pensamento por conceitos, que estabelece vínculos essenciais e uniformes. No complexo não existem vínculos e nem relações hierárquicas entre os traços. Os complexos caracterizam-se por agrupamentos de objetos construídos de forma muito semelhante ao nome de família, que são os equivalentes funcionais dos conceitos. Cinco fases são distinguidas neste estágio: complexo do tipo associativo, complexo do tipo coleção, complexo em cadeia, complexo difuso e pseudoconceito.

No complexo do tipo associativo existe um núcleo básico e, qualquer relação concreta, qualquer ligação associativa, qualquer semelhança factual descoberta pelo indivíduo, entre o núcleo e um objeto, determina a inclusão do objeto no complexo.

Na fase do complexo tipo coleção, os agrupamentos são constituídos de objetos que são complementares, freqüentemente, em sentido funcional. Vygotsky observa que esta fase é longa e persistente, e reflete profundamente a experiência prática e direta do individuo.

No complexo em cadeia, o critério de escolha dos objetos muda o tempo todo, o último objeto selecionado pelo indivíduo para o complexo o inspira na escolha do próximo. Cada objeto colocado no grupo tem um vínculo com o objeto anterior e com o seguinte, mas são vínculos diferentes. Pode não existir nenhum traço comum entre o primeiro e último objeto da cadeia, neste complexo não existe um núcleo como no complexo associativo.

A fase do complexo difuso é caracterizada por um critério difuso de escolha dos objetos para formação do complexo. Aqui, mais que nas fases anteriores, fica evidente a impossibilidade do pensamento do sujeito de estabelecer contornos e limites para o complexo. Nesta fase o indivíduo

> ingressa em um mundo de generalizações difusas, pela qual os traços escorregam e oscilam, transformando-se impercetivelmente uns nos outros. Aqui não há contornos sólidos e reinam os processos ilimitados que freqüentemente impressionam pela universabilidade dos vínculos que combinam. (VYGOTSKY, 2001, p. 189)

A última fase do estágio da formação de complexos, a fase dos pseudoconceitos, tem uma grande importância para o pensamento do sujeito, uma vez que serve como elo para um estágio novo e superior, que é a formação do conceito propriamente dito. Nesta fase, a forma externalizada pelo pensamento parece ser de um pensamento por conceitos, mas em termos internos é um pensamento por complexos. Nesta fase é preciso uma análise atenta porque fica-se diante de uma "combinação complexa de uma série de objetos fenotipicamente idênticos ao conceito, mas que não são conceitos, de maneira nenhuma, pela natureza genética, pelas condições de surgimento e desenvolvimento e pelos vínculos dinâmicos que lhe servem de base". (VYGOTSKY, 2001, p. 190).

O pseudoconceito fenotipicamente inclui os mesmos objetos que o verdadeiro conceito, porém com base em vínculos diretos, factuais e concretos, numa associação simples. É uma reprodução excedente de vínculos, a abstração é fraca, assim como, o processo de discriminação de atributos. Os agrupamentos são feitos com base em uma combinação de impressões dispersas e elementos concretos da experiência.

O pseudoconceito constitui a forma de pensamento mais disseminada e mais presente, predominante sobre todas as demais anteriormente formadas. Essa forma de disseminação do pensamento do sujeito não se desenvolve de forma livre e espontânea. Em certo sentido, ela é determinada pelas suas interações interpessoais, mediada por um discurso já estabelecido. O aprendiz recebe um produto que é semelhante ao produto do adulto/professor, só que é elaborado por meio de operações intelectuais bem diferentes. Em conseqüência disso, há uma compreensão mútua que assegura uma comunicação adequada, porque ambos se referem ao mesmo objeto ou a mesma palavra, embora, os significados atribuídos sejam diferentes. Há, então, uma consonância entre o complexo da criança e o conceito do adulto. Essa é a característica fundamental do pseudoconceito, que, por um lado, possibilita a passagem para o conceito de forma imperceptível, por outro, favorece a comunicação entre criança e adulto, acelerando, portanto, o desenvolvimento dos conceitos na criança. Conseqüentemente, a criança começa a aplicar na prática e a operar com conceitos antes de assimilá-lo de fato.

O pseudoconceito equivale, em aparência externa e funcional, a um conceito, porém elaborado por funções intelectuais inteiramente diferentes daquelas que auxiliam na formação do verdadeiro conceito. Na prática, em sala de aula, como esta situação pode se apresentar? Com o pseudoconceito o indivíduo tem condição de realizar as tarefas que lhes são propostas e que estão relacionadas ao conceito, sem a consciência exata do que está sendo feito. Ou, de outro modo, professor e aluno se referem ao mesmo objeto, sendo que os dois atribuem significados diferentes para a palavra que nomeia aquele objeto, por meio de operações intelectuais também diferentes. Em outras palavras, o professor tem o conceito daquele objeto e o aluno tem um pseudoconceito. Os dois falam do mesmo objeto, mas cada um o vê de modo diferente. Nestas circunstâncias, é importante que o professor tenha conhecimento do nível de desenvolvimento do aluno, para que ele possa se dirigir não em etapas já alcançadas pelo aluno, mas sim para estágios de desenvolvimentos não incorporados e suscetíveis de modificações e avanços.

As características discutidas acima delimitam o pensamento por complexos e esboçam os traços que o distinguem das imagens sincréticas e dos conceitos. As características dos complexos assim como do pensamento por complexos o distingue de outras formas de pensamento:

> a ausência de unidade de vínculos, de hierarquia, o caráter concreto dos vínculos que lhe servem de base, a relação original entre o geral e o particular e vice-versa, a relação original entre os elementos particulares bem como toda a lei de construção de generalização apareceram diante de nós em toda sua originalidade, em toda a diferença profunda que a distingue de outros tipos inferiores e superiores de generalização. (VYGOTSKY, 2001, p. 199)

De acordo com Vygotsky, na história da evolução dos conceitos de um indivíduo há duas raízes marcantes no desenvolvimento do seu pensamento: a primeira delas é o pensamento por complexos, mais especialmente na fase dos pseudoconceitos; a segunda é a forma de pensamento presente nos conceitos potenciais, que é a segunda fase do terceiro e último estágio da formação de conceitos.

Estágio dos pré-conceitos

O pensamento por complexos tem como elemento mais característico o momento de estabelecimento de vínculos e relações que constituem o seu fundamento, criando condições para a combinação e generalização de determinados elementos concretos da experiência. Nas palavras de Vygotsky,

> A principal função dos complexos é estabelecer elos e relações. O pensamento por complexos dá início à unificação das impressões desordenadas: ao organizar elementos descritos da experiência em grupos, cria uma base para generalizações posteriores. Mas o conceito desenvolvido supõe algo além da unificação. Para formar o conceito é necessário abstrair, isolar elementos e examinar os elementos abstratos separados da totalidade da experiência concreta de que fazem parte. (VYGOTSKY, 1996, p. 66)

Após a formação dos complexos a função genética é desenvolver a decomposição, a análise e a abstração, ausentes no pseudoconceito e necessários para a formação do conceito como pontuado na citação anterior. Enquanto a formação dos complexos tem a função de unificar as impressões do indivíduo em generalizações, a abstração tem a função de isolar os elementos para os examinar separadamente.

A primeira fase desse estágio é muito próxima do pseudoconceito. Os objetos que fazem parte do agrupamento são escolhidos com base nos atributos que o indivíduo considera fazer o objeto o mais semelhante possível à amostra que lhe foi apresentada. Estes atributos se tornam o centro da atenção do indivíduo e são abstraídos dos outros. Pela primeira vez, manifesta-se com toda nitidez um processo de abstração que freqüentemente mal se consegue distinguir.

A segunda fase desse estágio é a chamada fase dos conceitos potenciais, cuja base psicológica é um tipo de significado concreto e funcional da palavra. Nele, o indivíduo agrupa os objetos tomando por base um atributo comum, produzindo algo que se torna, de certa forma, muito semelhante ao pseudoconceito pela aparência. Tanto quanto o pseudoconceito, o conceito potencial pode ser tomado por conceito, mas eles são de naturezas diferentes.

Uma característica do pensamento puramente por complexos é o fato de ele ser extremamente instável. O pensamento cede lugar a um atributo, sem que esse atributo seja privilegiado em comparação com todos os demais, o que não ocorre com o pensamento potencial. No conceito potencial, um traço abstraído não se perde facilmente entre os outros traços.

Os conceitos potenciais têm um papel muito importante no desenvolvimento dos conceitos - com a abstração de determinados elementos o sujeito destrói a situação e o vínculo concretos, e elege um atributo privilegiado. Mesmo assim, os conceitos potenciais permanecem em uma certa fase de seu desenvolvimento, sem se transformar em um verdadeiro conceito.

A terceira e quarta fases desse processo não estão colocadas claramente por Vygotsky. Ele apenas menciona que, só na quarta fase desse estágio, o indivíduo acompanhado pelo desenvolvimento do pensamento por complexos, e com o domínio do processo de abstração, chega, então, à construção do verdadeiro conceito. “O conceito surge quando uma série de atributos abstraídos torna a sintetizar-se, e a síntese abstrata assim obtida se torna forma basilar de pensamento..." (VYGOTSKY, 2001, p. 226). A formação do conceito pressupõe mutuamente um processo de análise e de síntese. Neste processo a palavra tem um papel decisivo, já que com ela o sujeito orienta voluntariamente a sua atenção para determinados atributos, simboliza o conceito abstrato e opera com ele como lei suprema.

Em suas investigações Vygotsky descobre que a transformação dos pré-conceitos em conceitos verdadeiros é alcançada por meio das generalizações do nível anterior. Ele cita como exemplo a transformação dos conceitos aritméticos da criança em idade escolar (os pré-conceitos) em conceitos algébricos da adolescência (conceitos verdadeiros). Na aritmética certos aspectos dos objetos são abstraídos e generalizados em idéia de número. Os conceitos algébricos representam abstrações e generalizações de certos aspectos dos números, indicando assim um plano de pensamento novo e mais elevado.

2.1.2 Características, vínculos e relações entre conceitos espontâneos e conceitos científicos

O sistema de conceitos de um indivíduo é único do qual fazem parte os conceitos espontâneos e os conceitos científicos. Vygotsky pressupõe o desenvolvimento dos conceitos numa abordagem interacionista, determinada pelo desenvolvimento das funções psicológicas nas interações do sujeito com "os outros" através da linguagem. Os conceitos espontâneos, como já foi visto, são aprendidos no dia-a-dia, no contato com os objetos, fatos, fenômenos, pessoas etc., dos quais o sujeito pode não ter nem consciência. No contexto de ensino e aprendizagem o uso do termo "os outros" não se limita necessariamente a pessoas, ele refere-se também as ferramentas culturais. As interações ocorrem entre professor-aluno, aluno-livro-autor, aluno-aluno, aluno-situações-ambiente etc.

O processo de desenvolvimento destes conceitos está internamente, de maneira profunda, inter-relacionado; eles têm os mesmos estágios e fases de desenvolvimento, mas este desenvolvimento dá-se por vias diferentes. Os dois conceitos se encontram, no mesmo sujeito, próximo aos limites de um mesmo nível. O espontâneo percorrendo um caminho que Vygotsky chamou de "baixo para cima", do objeto ao conceito, isto é, de uma relação direta com o objeto para um nível mais abstrato, no qual seja possível aplicá-lo de forma não espontânea; enquanto que o conceito científico percorre um caminho contrário, de "cima para baixo", do conceito para o objeto, ou seja, de um nível mais abstrato e abrindo caminho para o objeto, vinculando-se à experiência que o sujeito já tem com os conceitos espontâneos e incorporando-os.

Os conceitos espontâneos se formam no cotidiano, mediante tentativa-erro e sobre a base dos atributos comuns dos objetos, muitas vezes não essenciais, os quais não estão organizados em um conjunto de relações conscientes e sistemáticas. Aqui o sujeito tem mais consciência do objeto representado pelo conceito do que do próprio conceito. Segundo Vygotsky (2001), um conceito espontâneo do sujeito deve atingir um determinado limiar, além do qual se torna possível a tomada de consciência, é então quando ele pode apreender o conceito científico e tomar consciência dele.

De um ponto de vista vygotskiano, o conhecimento científico abre a porta para a consciência reflexiva do indivíduo, e a aprendizagem em contextos de ensino é fundamental e imprescindível para o seu desenvolvimento. Os conceitos científicos, com o seu sistema hierárquico de inter-relações, parecem constituir o meio pelo qual a consciência e o domínio se desenvolvem, sendo mais tarde transferidos a outros conceitos e a outras áreas de pensamento.

Os conceitos, assim como este sistema hierárquico de inter-relações entre os conceitos são formados por etapas. Cada etapa de sua formação reflete uma determinada generalição cuja estrutura corresponde ao seu sistema específico de generalidade e relações de generalidades entre os conceitos gerais e os particulares. Por isso, todo conceito científico está inserido em um sistema de conceitos e relações, sem o que não se pode falar de conceito científico.

Além disso, os conceitos científicos se formam em um processo orientado, organizado e sistemático. A sua formação se processa com a conscientização das suas características essenciais expressas na introdução de uma definição verbal, e, com sua aplicação, alcança a variedade dos objetos que representa. Se o conceito científico refletisse o objeto em sua manifestação externa como o faz o conceito espontâneo, o conceito cientifico não seria necessário. Marx definiu com profundidade a essência de todo conceito científico com a seguinte afirmação: "se a forma de manifestação das coisas coincidissem imediatamente, toda a ciência seria desnecessária". (MARX *apud* VYGOTSKY, 2001, p. 293)

Os conceitos científicos são ensinados com a formalização de regras lógicas, através das quais um conceito se coordena e se subordina a outros, ou seja, se estabelecem relações entre conceitos. O conceito científico pressupõe necessariamente outra relação com o objeto, pois é uma relação mediada por outros conceitos, o que pressupõe a existência de um sistema de conceitos.

Os conceitos não surgem do nada e nem são inseridos de fora na consciência do indivíduo, eles não são assimilados e nem memorizados, mas surgem e se constituem por meio de uma grande tensão de toda a atividade de seu próprio pensamento. Com base no conceito científico, o sujeito chega a ter consciência do ato propriamente dito de pensamento através do qual concebe o objeto, da definição verbal do conceito, da possibilidade de outras palavras lhe propiciarem uma formulação verbal do conceito, do emprego voluntário desse conceito no estabelecimento de relações lógicas complexas entre conceitos.

O mais peculiar dos conceitos e do pensamento em geral é a incapacidade do sujeito para conscientizar as relações que ele é capaz de utilizar de modo espontâneo, automático e plenamente correto, quando isto não exige uma tomada de consciência especial. A apreensão do conceito científico pressupõe uma tomada de consciência e esta, por sua vez, exige uma combinação especial de todas as funções psicológicas superiores. O indivíduo é forçado a prestar a atenção aos seus atos intelectuais de generalizar e abstrair. Os conceitos se situam na mente do sujeito em um sistema de relações; quão mais perfeitas são estas relações, mais o sistema de conceitos se aproxima do sistema conceitual original constituinte de uma teoria.

Conforme Vygotsky (2001), o sujeito aprendiz começa a aplicar o conceito na prática e a operar com conceitos antes de assimilá-lo. O conceito "em si" e "para os outros" se desenvolve no sujeito antes que se desenvolva o conceito "para si". O uso do conceito começa como que por um impulso movido pelas circunstâncias ou situações que surgem, ou até mesmo por hábitos e/ou conhecimentos construídos culturalmente, sem uma análise prévia e sem uma base teórica que o ancore ou que justifique o seu uso. Ele usa o conceito sem saber explicar porquê e como o utilizou. Numa fase posterior,o indivíduo já consegue compartilhar o seu conceito com os outros e explicitá-lo mais claramente, porém ainda não sabe que conceito tem do objeto. Com o desenvolvimento do conceito pelo sujeito o seu uso é precedido por questionamentos e análise da pertinência e/ou adequação da aplicação do mesmo a um determinado contexto ou situação. O conceito se torna “para si” quando o indivíduo, de fato, toma consciência do seu próprio conceito e do objeto que o representa, o conceito foi não só formado, mas também internalizado.

Ele afirma ainda que a adolescência não é um período de conclusão da formação de conceitos, mas de crise e amadurecimento do pensamento. Quando se toma o conceito do adolescente em ação, fica bem nítido o caráter transitório do seu pensamento. Vygotsky (2001) afirma que nos experimentos se manifestou uma profunda discrepância entre a formação do conceito e a sua definição verbal. Essa discrepância se mantém em vigor não só no pensamento do adolescente, mas também do adulto, mesmo em um pensamento, às vezes, sumamente evoluído.

2.2 A perspectiva cognitivista e a formação de conceitos em Vergnaud

A teoria dos campos conceituais foi elaborada no domínio específico da matemática levando em conta, principalmente, os processos de conceitualização progressiva das estruturas aditivas e multiplicativas. Hoje, porém, ela tem se estendido a outros domínios e se revelado útil à compreensão dos processos de aquisição do conhecimento em diversas áreas, qual seja, biologia, física, história, moral. Nas palavras do próprio Vergnaud, “a teoria dos campos conceituais é uma teoria psicológica cognitivista, que visa fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, sobretudo daquelas que dependem da ciência e da técnica”. (VERGNAUD, 1990, p. 135, tradução minha)

Essa teoria, do ponto de vista cognitivo, procura compor em um mesmo foco de análise o desenvolvimento e o funcionamento cognitivo do sujeito em uma determinada situação.

Nesta perspectiva, "os processos cognitivos são entendidos como aqueles que organizam a conduta, a representação, e a percepção, assim como o desenvolvimento de competências e de concepções de um sujeito no curso da experiência". (FRANCHI, 1999, p. 157) Os processos cognitivos e as respostas do sujeito dependem das situações com que ele se confronta. As situações aqui privilegiadas são aquelas que atribuem um papel essencial aos conceitos matemáticos em si mesmos. Em cada situação vivenciada pelo sujeito, ele usa conhecimentos anteriormente formados e ao mesmo tempo incorpora novos aspectos a esses conhecimentos, desenvolvendo competências cada vez mais complexas.

Para Franchi (1999), o termo "situação" já referido, pode ser pensado como um dado complexo de objetos, propriedades e relações num espaço e tempo determinado, envolvendo o sujeito e suas ações. O conceito de situação aqui tem o sentido de tarefa. Quando se tratar de uma situação complexa, ela pode ser analisada como uma combinação de tarefas, cuja natureza e dificuldades específicas devem ser bem conhecidas. No âmbito desta teoria, é destacada a existência dos chamados espaços de situações-problema, cuja utilização adequada facilita ao aluno a compreensão das conexões existentes entre os vários conceitos, destacando a dimensão da operacionalidade entre eles.

Nesta teoria, "conhecimento" se refere tanto à competência como a concepção. A concepção é um ponto de vista local sobre um dado objeto[4] construído no quadro de um processo de aprendizagem. As concepções são em geral expressas por seqüências de enunciados, expressões verbais ou outras representações simbólicas. As competências são as habilidades, um "saber fazer" que se manifesta por meio das ações julgadas adequadas para tratar uma situação. Maia (2000) comenta que apesar das competências serem inteiramente operacionais, muitas delas são pouco explicitadas ou explicitáveis, e que o nosso interesse deve estar voltado, particularmente, para o estudo do que está implícito na ação do sujeito.

Um dos pressupostos desta teoria é que as competências são sustentadas por esquemas. O sujeito precisa destes para lidar com as situações. "Um esquema é uma totalidade dinâmica organizadora da ação do sujeito para uma classe de situações específicas.

[4] A concepção é caracterizada por: situações ligadas a sua aparição ou para as quais ela constitui um ponto de vista particularmente bem adapatado; sistemas de representações mentais, icônicas, simbólicas; propriedades, invariantes, técnicas de tratamento, métodos específicos (implícitos ou explícitos).

(VERGNAUD, 1990, p. 142). Com base nesta definição, Franchi (1999) chama de esquema a "organização invariante da atividade do sujeito para uma classe de situações dadas" e explica que "a característica de ser invariante não se refere aos elementos formais que definem uma classe de situações, nem mesmo às ações, mas refere-se essencialmente ao que é invariante na *organização das ações*" (p. 164).

Vergnaud (1990) distingui no conjunto das situações voltadas para a aprendizagem específica de um conceito duas classes de situações: uma classe em que o sujeito dispõe, no seu repertório, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação; outra classe em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e tentativas de várias abordagens, levando-o eventualmente ao sucesso ou ao fracasso.

Para a primeira classe, o conceito de esquema está bem adaptado, observam-se comportamentos automatizados e organizados por um esquema. Para a segunda, observa-se a utilização de vários esquemas sucessivos para atingir a solução desejada. À medida que vão surgindo situações novas para as quais o indivíduo não tem um esquema pronto, os esquemas já automatizados podem ser modificados, combinados.

A Teoria dos Campos Conceituais considera que existe uma série de fatores que auxiliam na formação e no desenvolvimento dos conceitos e que estes devem emergir de dentro das situações-problema. E também, que um conceito não pode ser reduzido à sua definição, principalmente se o interesse é por sua aprendizagem e seu ensino. É através das várias situações e problemas a resolver nas quais o conceito é essencial que ele adquire significado para o sujeito. Vergnaud (1990) considera um conceito constituído de três conjuntos:

S: conjunto de situações que dão um sentido ao conceito (referência). Cada elemento desse conjunto é uma concretização do conceito, um representante;

I: conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito (significado) em que se baseia a operacionalidade dos esquemas;

R: conjunto de representações lingüísticas e não lingüísticas que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento significante).

Para um melhor entendimento destes conjuntos e das relações entre eles, faz-se necessário caracterizá-los.

Damerow (1988) afirma que um meio eficiente de abstração é a representação. Segundo Piaget, o requisito principal para que haja representação é a capacidade de diferenciar significantes de significados e, assim, tornar-se capaz de evocar um para fazer surgir ou se referir ao outro. A capacidade generalizada para fazer essa distinção e, conseqüentemente, para fazer o ato de referência é o que ele chama de função simbólica. (FLAVELL, 1992). Como os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, para a sua apreensão é necessário o uso de uma representação. A noção de representação aqui não se reduz à noção de símbolo ou de signo, ela pode ser pensada como a interação entre o significado (I) e o significante (R), incluindo a noção de conceito.

Vergnaud (1991) destaca dois pontos fundamentais quanto às representações: não existe só uma representação, senão múltiplas representações de forma e níveis diferentes; existem homomorfismos não só entre a realidade e as representações, como também, entre as diferentes formas de representação (entre a representação imaginada e a linguagem, entre a representação geométrica e a algébrica etc.)

Quanto à forma, as representações podem ser distinguidas em materiais e simbólicas. A representação material, geralmente, representa qualidades materiais por protótipos, modelos materiais ou padrões. A representação simbólica (a mais importante) realiza-se por convenção livre, sem quaisquer similaridades materiais entre símbolos e objetos e ações simbolizadas.

Quanto aos níveis, as representações podem também ser distinguidas pelo seu papel no processo de desenvolvimento da estrutura cognitiva na qual é desenvolvida: de primeira ordem, segunda ordem e de ordem superior. As representações de primeira ordem são representações de objetos reais por símbolos ou modelos que permitem a execução das mesmas ações ou operações sobre os símbolos e sobre os próprios objetos reais. As ações são aplicadas sobre a realidade e estas geram operações de pensamento sobre as representações: operações conceituais e pré-conceituais sobre os significados e operações simbólicas sobre os significantes. As representações de segunda ordem e ordem superior são representações de objetos mentais por símbolos e regras de transformação de símbolos que correspondem a operações mentais pertencentes às estruturas cognitivas que constituem os objetos mentais. A representação de primeira ordem desenvolve-se numa ligação entre a idéia abstrata e suas adequadas aplicações a objetos reais. A idéia abstrata pode ser representada por um símbolo, gerando uma representação de segunda ordem. (DAMEROW, 1988)

Uma vez que as representações são de diferentes formas e níveis, as operações sobre os significados e os significantes também o são. As diferentes operações conceituais e pré-conceituais (elementos, propriedades, classes, relações, relações de relações, ...) são ajudadas pelos diferentes sistemas simbólicos formados pelos significantes. Há,portanto, vínculos profundos entre eles e os significados.

Os meios utilizados e o caminho seguido pelo estudante para resolver uma situação estão profundamente vinculados à representação que ele faz dela, uma vez que é sobre esta que ele realiza operações. Vê-se, então, o quão é importante essa noção, principalmente para a matemática que, na maioria dos casos, trabalha com a representação da representação e não diretamente com a representação da realidade.

Para que a representação seja operatória, ela tem que refletir certos aspectos da realidade e permitir ao pensamento realizar operações sobre os significados e os significantes. Em outras palavras, deve haver uma integração do aspecto sintático (cálculos, operações etc.) e do aspecto semântico (representação de algo). Estes dois aspectos são indissociáveis. É indispensável que no curso das operações envolvendo as relações, as diversas formas simbólicas estejam refletindo os mesmos objetos reais. Ou seja, o critério semântico implica que os conceitos, as imagens, os signos e, de uma maneira geral, todas as formas simbólicas remetam aos mesmos objetos. Neste sentido, tem-se a noção de invariante operatória aplicada à função simbólica. São os invariantes que dão à representação o seu cárater operatório, estes constituem o núcleo mais sólido que se pode encontrar na análise do conceito. (VERGNAUD, 1991)

Os invariantes operatórios são os mecanismos utilizados pelo sujeito na resolução das situações-problema. Eles podem ser implícitos ou explícitos. São implícitos quando estão ligados aos esquemas de ação do sujeito; podem ser reconhecidos por meio dos objetos e propriedades do problema e das relações e procedimentos feitos pelo sujeito. São explícitos quando estão ligados a uma concepção; são expressos por palavras e/ou por outras representações simbólicas.

Quando se considera um conjunto de situações que dão sentido ao conceito, não se quer dizer que o sentido está na palavra e nos símbolos matemáticos. O sentido é uma relação do sujeito com as situações e os significantes. Afirma-se, portanto, que uma representação simbólica, uma palavra ou um enunciado matemático tem sentido, ou tem vários sentidos, ou não tem nenhum sentido para um determinado sujeito. Vergnaud (1990) diz, ainda, que os esquemas evocados em um sujeito particular por uma situação ou por um significante constituem o sentido desta situação ou deste significante para aquele sujeito. Para ele, um esquema abrange regras de ações e de antecipações visto que gera uma seqüência de ações do sujeito para se atingir um objetivo, por meio de invariantes operatórios que são os conhecimentos e por inferências.

> O estudo do desenvolvimento e do funcionamento de um conceito, ao curso da aprendizagem ou quando de sua utilização, deve considerar, ao mesmo tempo: o plano das situações, o dos invariantes operatórios e o das representações simbólicas. Não há em geral, bijeção entre significantes e significados, nem entre invariantes e situações. Não se pode reduzi-lo ao significado, nem aos significantes, nem às situações. (VERGNAUD, 1990, p. 146, tradução minha).

Nesta perspectiva, fica determinada a idéia de campo conceitual - conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão. (VERGNAUD, 1986)

Segundo Vergnaud (1990), existe grande variedade de situações num campo conceitual dado, as variáveis de situação são um meio de construir sistematicamente o conjunto das classes de situações possíveis. Além disso, os conhecimentos dos alunos são elaborados por situações que eles enfrentam e dominam progressivamente, sobretudo por aquelas suscetíveis de dar sentido aos conceitos e procedimentos que se pretende ensinar-lhes.

Para o autor, a atividade da linguagem favorece o cumprimento de uma tarefa pelo sujeito, no sentido de auxiliar a descoberta das relações pertinentes, da organização temporal da ação e de seu controle. Neste sentido, a função de representação da linguagem é tríplice: representação dos elementos pertinentes da situação, representação da ação, e representação das relações entre a ação e à situação.

Em suma, a teoria dos campos conceituais baseia-se em um princípio de elaboração pragmática dos conhecimentos. Para tanto, deve-se considerar o sentido das situações, das representações e a ação do sujeito em situação e a organização do seu comportamento em função dos seus esquemas. O esquema, por sua vez, não prescinde da análise. Organizando o comportamento do sujeito, ele abrange regras de ação e antecipações. Isto só é possível, porque uma representação implícita ou explícita da situação a ser analisada em termos de objetos, propriedades e relações é parte integrante do esquema. "Tais invariantes operatórios organizam a busca da informação pertinente em função do problema a resolver ou do objeto a atingir, além de balisar as inferências". (VERGNAUD, 1990, p. 167, tradução minha)

2.3 As teorias e o objeto de pesquisa

Retomo ao objetivo central deste trabalho, qual seja: a investigação da formação do conceito de grupo por alunos do curso de Matemática, em um curso introdutório da teoria de grupo, para evidenciar as suas articulações com as teorias discutidas anteriormente.

O conceito de grupo matemático pertence ao campo dos conceitos algébricos avançados, em que todos os conceitos são estudados em um sistema organizado segundo uma metodologia própria e, como, em geral, há uma identificação metodológica entre a condução do ensino e o modelo de validação do saber matemático, o tratamento didático-pedagógico destes conceitos é, fundamentalmente, mediado pela sua definição verbal que traz a relação do conceito em estudo com outros conceitos - são relações abstratas entre conceitos matemáticos.

As duas teorias discutidas, levaram-me, em primeiro lugar, a refletir sobre a elaboração dos instrumentos a serem usados na investigação propriamente dita e, em segundo, na análise dos dados e resultados.

Por um lado, para Vygotsky (2001), é a partir das suas interações e experiências com os outros, mediadas pelos signos, em particular pela linguagem com seu duplo papel de comunicação e organização do pensamento, que no indivíduo vai se formando ou desenvolvendo o significado das palavras - os conceitos. Por outro lado, é através da linguagem do aprendiz que o ouvinte (professor) detecta o conceito que ele tem.

Além disso, para Vygotsky (2001) a investigação dos conceitos já formados no sujeito, através da definição verbal de seus conteúdos, não é um método adequado, ele possui alguns inconvenientes e fragilidades, tais como: detecta apenas o resultado da formação do conceito, "sem captar a dinâmica, o desenvolvimento, o fluxo, o começo e o fim do processo". (p. 151). As definições que o sujeito explicita ou aplica a um conceito manifestam bem mais o conhecimento, a experiência do sujeito e o grau de seu desenvolvimento verbal, do que o seu próprio raciocínio.

Vergnaud (1990) afirma que é no contato com as situações que o indivíduo vai formando o seu conceito, este se manifesta através das representações e dos esquemas utilizados nas soluções.

Compreendi, portanto, que nos instrumentos de investigação não deveriam constar exercícios e problemas encontrados nos livros, geralmente utilizados no curso, pelas seguintes razões: no início do estudo do conceito de grupo, a maioria dos exercícios que dão sentido a este conceito são sempre no mesmo estilo e solicitam o mesmo esquema de solução - são dados o conjunto e a operação e pede-se para o aluno verificar se o conjunto com a operação dada é grupo. Para esse tipo de problema, o aluno, em geral, já tem um esquema automatizado a partir da definição. À medida que o estudo prossegue, a solução dos problemas apresentados quase sempre exigem e dão ênfase à aplicação de definições e/ou resultados (lemas, teoremas, corolários etc.), que, também, não coadunam com o objetivo a que se propunham os instrumentos de investigação e a pesquisa.

Percebo que existem dois pontos que são fundamentais para essas duas abordagens sobre o conceito - as relações com outros conceitos e as representações que lhes são intrínsecas. Cada conceito está imerso em um sistema de conceitos e relações expressos por meio da linguagem.

Com base em Vygotsky, esse pressuposto conduziu minha atenção, em primeiro lugar, para a elaboração da primeira sequência de atividades sobre o conceito de operação binária sobre um conjunto. Seriam necessárias atividades que permitissem ao aluno expressar a sua compreensão sobre este conceito e os com ele inter-relacionados, ou seja, o significado da expressão operação binária. Em segundo, para a análise dos significados construídos expressos na sua linguagem no uso destas palavras e o seu papel na compreensão das situações por meio das enunciações expressas, ou seja, o entendimento da linguagem inserida na apresentação das situações, nas suas soluções e justificativas. Em síntese, a abordagem de Vygotsky possibilitou a análise da linguagem dos alunos subjacente às soluções das atividades.

Na visão vergnaudiana, o tal pressuposto significou a elaboração de situações considerando o sentido do conceito de grupo e suas relações com outros conceitos, as representações e a ação do sujeito em situação e a organização do seu comportamento em função dos seus esquemas.

A definição de conceito dada por Vergnaud permitiu-me a realização de uma análise operatória do conceito de grupo a partir dos esquemas dos alunos, uma vez que estes abrangem regras de ação e antecipações e as representações implícitas ou explícitas das situações a serem analisadas em termos de objetos, propriedades e relações. Isso redundou na categorização das competências relativas ao tratamento das situações.

Ainda com base em Vygotsky, foi possível o estabelecimento de níveis de significados construídos para as palavras que fazem a mediação entre os conceitos e os objetos por elas representados, que para o Vergnaud seriam as concepções.

Na elaboração das atividades e na análise dos dados, a linguagem tem um sentido amplo, pois é vista como um dos processos de organização do pensamento, de estruturação das representações, das soluções e justificativas. A linguagem matemática em particular é vista como um instrumento de elaboração de um conhecimento específico, da conceitualização e, sobretudo, da transformação das categorias de pensamento matemático em objetos matemáticos. Trata-se de um sistema de signos (sinais/símbolos e palavras) e um conjunto de relações e de regras de manipulação que têm significados ligados a contextos e procedimentos para resolver problemas matemáticos.

À luz destes fundamentos teóricos pude compreender os diferentes níveis e aspectos do conceito de grupo formado pelos alunos envolvidos em um estudo introdutório da teoria dos grupos.

Freqüentemente os problemas, dos quais surgem os conceitos matemáticos, são inacessíveis aos alunos que estão começando a estudá-los. Além disso, há um aspecto relevante observado por Milies e Coelho (1997) sobre os livros de matemática - são textos que apresentam as teorias já bem organizadas, partem de uma série de axiomas e demonstram ordenadamente resultados subseqüentes. Esta abordagem dá ao estudante uma impressão errada da natureza da evolução da matemática, como se primeiramente fixassem as bases para depois desenvolver a teoria. Além disso, nos livros de matemática mais avançada, a introdução de qualquer conteúdo dá-se com as definições, e isto não retrata a história de surgimento dos conceitos, a sua formalização por meio da definição é a última etapa a ser realizada, como se pode ver na própria história da origem do conceito de grupo que segue.

Capítulo 3

O conceito de Grupo - origem e influências

Este capítulo está dedicado à apresentação da origem, desenvolvimento e influências do conceito de grupo na metmática. Este relato foi feito com base, fundamentalmente, no livro *The genesis of Abstract Group Concept* que é uma tradução de *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes* escrito pelo alemão Hans Wussing em 1969.

É sabido que o conceito de grupo abstrato nasceu no fim do século XIX por uma abstração do conceito do grupo de permutações derivado da teoria das equações algébricas, e que o desenvolvimento da teoria das equações algébricas e da teoria de Galois são raízes históricas deste conceito. Entretanto, a literatura matemática do século XIX, especialmente os trabalhos voltados para a investigação e evolução do conceito de grupo abstrato, escrito no fim do século XX, deixa claro que este desenvolvimento teve três raízes históricas em três áreas da matemática igualmente importantes, a saber: a teoria das equações algébricas[1], a teoria dos números e a geometria no fim do século XVIII e início do século XIX.

Foi destas três áreas que brotou a implícita idéia de grupo, assim como os argumentos

[1]Uma equação algébrica é aquela em que a incógnita aparece apenas submetida às chamadas operações algébricas: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. Embora a potenciação inteira seja um caso particular da multiplicação de n fatores iguais, ela é bem evidente na equação, por isso está sendo deixada em destaque. São equações algébricas: $2x+3=0, x^2+3x+1=0, 4x^2+\sqrt{7}x^3+3=8, x^{-2}=4+x^{-3}$. As equações $x^3+xe^x=3$, $\cos x+x^2\cos 3x=5$, $\arctan x=\frac{\pi}{4}$ não são algébricas, são transcendentes. Quando uma equação algébrica é colocada sob a forma $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_o=0$, n natural, $n\geq 1$, diz-se que ela está em sua forma canônica e é também chamada de equação polinomial. O maior expoente da incógnita em uma equação algébrica em sua forma canônica é denominado o grau da referida equação. Se $a_n\neq 0$ a equação é de grau n.

e resultados teóricos para a posterior formação de uma teoria a ele subjacente. Os germes embrionários do conceito de grupo estão nos exemplos específicos nestas áreas, quais sejam: o grupo de classes residuais módulo n e o grupo de formas quadráticas binárias na teoria dos números; o grupo de permutações de n letras (ou elementos) na álgebra; e o grupo de transformações na geometria. Nestes exemplos a idéia de grupo estava latente, precisava ser percebida claramente, como também explicitada, o que ocorreu gradativamente. Foi um processo longo que envolveu inúmeros matemáticos, concluído com a formalização do objeto matemático grupo abstrato - no qual não se leva em conta os entes a que ele se refere.

De acordo com Courant e Robbins (2000), o desenvolvimento matemático tem suas raízes em exigências mais ou menos práticas e sempre esteve sob sua influência e, em última instância, sob a influência do progresso técnico, material. Estas exigências quando desencadeadas pela pressão de aplicações necessárias, ganham impulso por si e transcendem à utilidade imediata. Esta tendência da ciência aplicada para a teórica aparece na História Antiga e também em muitas contribuições à matemática moderna por engenheiros e físicos.

A história da matemática também mostra, no seu desenvolvimento, uma tendência para uma ciência especulativa e para a criação ou surgimento de objetos inteligíveis (que podem ser conhecidos) que se opõem ao prático, é o caso do objeto hoje denominado grupo. Além disso, processos de formação de conceitos pelos matemáticos nos mostram que muitos conceitos emergiram na resolução de problemas internos à matemática, e que também não podem ser reduzidos à experiência. Assim, rigorosamente falando, pode-se dizer que muitos conceitos matemáticos são teoréticos[2] e não teóricos que estão condicionados tanto à observação dos fenômenos como ao próprio uso dos instrumentos de observação, como é o caso dos conceitos físicos.

A matemática é uma ciência essencialmente abstrata, isto é, prescinde das qualidades das coisas, os seus objetos não representam diretamente a realidade dada, são frutos

[2]Segundo ABBAGNANO (1982), teorético [no latim é Speculativus (adjetivo)] corresponde a especulação [no latim é Speculatio (substantivo)]. Especulação tem dois significados: o primeiro, de contemplação ou conhecimento desinteressado, que se contrapõe à ação; o segundo, de conhecimento ultra-empírico ou sem base na experiência, que se contrapõe ao conhecimento natural.

da abstração. Esta abstração, em geral, não é uma abstração empírica e nem pseudo-empírica, trata-se, falando em termos piagetianos, de uma abstração reflexionante. O abstrato do objeto matemático, algumas vezes, é percebido como elemento inicial e independente de seu conteúdo. Em tais casos os elementos dos conjuntos que se investigam, são representados como desvinculados dos objetos do mundo real, como também os sistemas de axiomas, as definições e as operações são introduzidas arbitrariamente.

O objeto grupo é um bom exemplo disto, ele está inserido em uma teoria matemática, a teoria dos grupos, constituída de objetos, conceitos, relações e representações sumamente refinados e abstratos. Trata-se de uma estrutura algébrica que tem por base um conjunto e regras de operação entre os elementos do conjunto dadas através de um conjunto de axiomas.

É sobre a origem e o desenvolvimento deste objeto e do seu conceito que detenho-me a partir de agora. Muitos dos conceitos relativos à teoria dos grupos aqui mencionados estão apresentados no capítulo 4 e nos apêndices C, D e E.

3.1 A teoria dos números, as congruências e as formas binárias

De acordo com a definição do filósofo alemão Friedrich Engels (1820-1895), o objeto central de investigação na matemática se constitui das relações quantitativas entre números e das formas espaciais do mundo real e os seus métodos de demonstração. As áreas da matemática, por mais diferentes que sejam, estão unidas pelo aspecto geral do seu objeto de investigação. Elas se distinguem pelas especificidades destas formas e relações ou pelas singularidades de seus métodos.

Os objetos de investigação da matemática mais conhecidos são as relações quantitativas entre números naturais. Estas relações inicialmente envolviam as chamadas operações fundamentais[3]. Um outro tipo de relação quantitativa entre números é a relação de congruência, uma relação mais abstrata do que a relação aditiva, por exemplo. Já no século

[3] A expressão operações fundamentais (ou elementares), em geral, está associada à adição, subtração, multiplicação e divisão entre números naturais. No capítulo 4 está feita uma discussão sobre estas "operações".

III aC, em obras chinesas, são encontrados problemas envolvendo congruências como uma generalização dos problemas aritméticos, envolvendo divisões residuais módulo m para alguns casos particulares[4]

A relação de congruência foi introduzida pelo francês P. Fermat (1601-1665), responsável por grande parte dos fundamentos da teoria dos números. Depois de uma longa pausa, os estudos envolvendo congruências são retomados pelo suíço L. Euler (1707-1783) e o alemão C. F. Gauss[5] (1777-1855) por meio das potências residuais. A primeira fonte da idéia implícita de grupo na teoria dos números é encontrada nas investigações de Euler sobre as potências residuais em 1761. Posteriormente, essa idéia surge com Gauss, em 1801, em outras situações: no estudo das congruências, na teoria das equações ciclotômicas[6] e na teoria da composição das formas quadráticas binárias[7]. Os estudos de Gauss sobre a congruência geral $x^n \equiv a \,(mod\, m)$, m e a primos entre si, em particular a congruência $x^n \equiv 1 \,(mod\, p)$, p um número primo, e composição de formas tiveram grande importância para a formação do conceito de grupo, o mesmo não acontece com os resultados encontrados por Euler sobre as potências residuais. Estes serviram, apenas, como embrião para a construção dos grupos das classes residuais de inteiros módulo n, hoje representados por $\mathbf{Z}_n$.

Inicialmente, o estudo das formas quadráticas binárias esteve vinculado à teoria dos números porque o principal objetivo era encontrar a representação de inteiros por meio de formas, ou seja, dado um número M e uma forma $ax^2 + 2bxy + cy^2$, desejava-se saber se existiam inteiros m e n tais que $M = am^2 + 2bmn + cn^2$. Com esse objetivo, Lagrange[8] usa, sistematicamente, transformações de variáveis para formas quadráticas binárias, chega a conclusão de que o número de formas não equivalentes com o mesmo determinante é

[4]Os problemas encontrados diziam respeito à resolução de sistemas de congruências lineares, tais como: "encontrar os números que quando divididos por 3, 5 e 7 dêem restos 2, 3 e 2 respectivamente".(RÍBNIKOV, 1987, p. 42).

[5]O principal trabalho de Gauss nesta área é *Disquisitiones arithmeticae* de 1801. (WUSSING, 1984).

[6]Uma equação ciclotômica é uma equação do tipo $x^n - 1 = 0$, n inteiro não nulo. A razão deste nome é pelo fato da solução da equação está vinculada à construção de um polígono regular de n lados inscrito em um círculo dado.

[7]Uma forma quadrática binária é uma função $F : K \times K \to K$, K um corpo comutativo, que associa cada par ordenado $(x, y) \in K \times K$ ao elemento $F(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$, A, B e C são elementos fixos e arbitrários de K.

[8]O estudo da teoria das formas tem sua origem em 1773 com o italiano J.-L. Lagrange (1736-1813), no entanto, o desenvolvimento e a sistematização são atribuídos a Gauss.

finito. Este resultado se torna o ponto inicial para as investigações de Gauss na teoria da composição de formas.

No estudo sobre as formas quadráticas binárias, Gauss considera a forma quadrática binária geral $ax^2+2bxy+cy^2$ com a, b e c inteiros, e define $D = b^2-ac$ como o determinante da forma. Ele ordena as formas por igualdade de discriminante, depois as classifica com base no que se pode chamar de relação de equivalência, da seguinte forma. Primeiro ele diz quando é que duas formas são equivalentes: seja $F = ax^2 + 2bxy + cy^2$ uma forma binária geral nas indeterminadas x e y. Se ao substituir $x = \alpha x' + \beta y'$ e $y = \gamma x' + \delta y'$ com α, β, γ e δ números inteiros, encontra-se uma forma $F' = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$ nas indeterminadas x' e y', então a forma F' contém F ou F está contida em F'. Se F' também pode ser transformada em F, então F contém F' e as formas F e F' são equivalentes.

Como foi definido acima, $D = b^2 - ac$ e $D' = b'^2 - a'c'$ são, respectivamente, os discriminantes de F e F'. Se F' contém F, realizando os devidos cálculos, tem-se que $D' = D(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$, conseqüentemente, D divide D' e ambos tem o mesmo sinal. De modo análogo, se F contém F' então F e F' têm o mesmo determinante, e $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = 1$.

A igualdade dos determinantes é uma condição necessária para que duas formas sejam equivalentes, mas não suficiente. Gauss prova um dos principais resultados obtidos por Lagrange: o número de formas não equivalentes com o mesmo determinante é finito.

Além disso, ele discute vários casos de valores de D e prova todas as propriedades inerentes à partição do conjunto de formas em classes de equivalência, de acordo com sua definição de formas equivalentes.

Gauss afirma que dado um número inteiro D, é possível encontrar um número finito de formas $F, F', F'', F''', ...$ não necessariamente equivalentes, cujo discriminante de cada uma delas é D, de modo que, dada uma forma G arbitrária diferente destas, ela é diretamente equivalente a uma das formas $F, F', F'', F''', ...$ Continuando este processo, ele separa o conjunto das formas binárias quadráticas em classes de equivalência, de modo que cada uma das formas $F, F', F'', F''', ...$ pode ser a representante de uma classe, e, em cada classe todas as formas são equivalentes a esta forma representante e entre si.

Após essa partição, Gauss define a composição entre classes do seguinte modo: quando a forma $F = AX^2+2BXY+CY^2$ puder ser escrita como um produto de formas $f = ax^2+2bxy+cy^2$ e $f' = a'x'^2+2b'x'y'+c'y'^2$ sob a substituição $X = pxx'+p'xy'+p''yx'+p'''yy'$ e $Y = qxx'+q'xy'+q''yx'+q'''yy'$ diz-se que a forma F é transformada em ff'. Além disso, se os números $pq'-qp'$, $pq''-qp''$, $pq'''-qp'''$, $p'q''-q'p''$, $p'q'''-q'p'''$, $p''q'''-q''p'''$ não tem divisor comum, então diz-se que a forma F é composta de f e f' e escreve-se $F = ff'$. Ele afirma que, em um certo sentido essa composição é comutativa, pois mudando a ordem das formas f e f', é preciso mudar apenas os coeficientes p', q' e p'', q'', respectivamente, deixando cada um dos outros coeficientes no seu lugar.

Gauss diz que a construção da forma composta F com as formas componentes f e f', é sempre possível e mostra que o resultado da composição de formas, independe da escolha dos representantes das classes. Isto garante que a composição de classes está bem definida. Ele prova o fechamento e a associatividade dessa composição definida no conjunto finito de classes de formas. O papel do elemento unidade é jogado para uma "classe principal", ou seja, a classe das formas equivalentes a uma "forma principal" $E = x^2-Dy^2$. Segundo o entendimento de grupo da época e usando a linguagem de hoje, ele prova que um conjunto finito de classes de formas binárias constitui um grupo abeliano finito sob a operação de composição.

3.2 As equações algébricas e o grupo de permutações

Como consequência das relações quantitativas entre números, um dos objetos de estudo da matemática, o seu problema central é a resolução de equações ou de sistema de equações, pois toda equação enuncia e representa uma relação entre elementos, que podem ser números, quantidades etc. É muito comum uma situação matemática na qual se conhecem relações entre números e se deseja saber quais são os números. Em geral, a solução de problemas deste tipo depende da solução de uma equação, e a dificuldade desta solução está diretamente ligada à quantidade dos números envolvidos nas relações, uma vez que é esta quantidade que determina o grau da equação. Por exemplo, a solução de problemas em que se pede para achar dois números quando são conhecidos o produto e a soma (ou a diferença) deles, se reduz à solução de uma equação algébrica de grau dois.

A história mostra que o problema de resolução de equações algébricas se prolongou por muito tempo, para ser mais específica, por muitos séculos. A investigação deste problema reúne os esforços de muitos matemáticos, e, embora sua solução só tenha conexão com o surgimento da idéia de grupo de permutações a partir do século XVIII com os trabalhos de Lagrange, o problema da solução das equações algébricas está diretamente vinculado ao desenvolvimento da álgebra como um todo, do conceito de número - elemento indispensável para a formação de qualquer conceito matemático por lidar direto com ele ou por abstraí-lo -, e da simbologia algébrica - um dos elementos fundamentais na mediação do conceito com o objeto por ele representado.

As tentativas de solução das equações algébricas pelos matemáticos eram muitas e variadas em termos de abordagem e métodos de solução. Durante muito tempo os trabalhos eram limitados à resolução de casos particulares, ou de um conjunto de equações do mesmo tipo, entretanto, alguns matemáticos já percebiam a necessidade de encontrar uma solução geral. Os matemáticos S. Del Ferro (?1465-1526), N. Tartáglia (?1500-1557), G. Cardano (1501-1576) e L. Ferrari (1522-1565) dão um impulso muito grande ao processo de resolução das equações algébricas com a resolução das equações de grau três e quatro - suas soluções não eram aproximadas, eram soluções de grande importância lógica e se tornaram estímulos para o desenvolvimento da álgebra. (BOYER,1996, p. 196-197)

Até o século XV, duas dificuldades na busca da solução para as equações algébricas já eram conhecidas - uma estava associada a não aceitação dos números negativos pelos matemáticos e outra à simbologia, no entanto, nos métodos de resolução contidos nos trabalhos dos italianos surgiram mais dois obstáculos. O primeiro era uma questão prática que dizia respeito à complexidade e ao incômodo no tratamento e manipulação das fórmulas obtidas, vinculado à ausência de uma simbologia adequada - um problema que já existia anteriormente, todavia, ele ficou mais evidente com os métodos para solução de equações de graus três e quatro, uma vez que os cálculos eram mais extensos. O segundo tinha raízes mais profundas, uma delas estava na formação do conceito de número.

Tanto os números negativos como os imaginários tiveram suas origens na resolução das equações algébricas com a forma de suas raízes[9], diferentemente do que aconteceu com

[9]Um número c é dito ser raiz da equação algébrica $P_n(x) = 0$ se $P_n(c) = a_n c^n + ... + a_3 c^3 + a_2 c^2 +$

os números racionais que surgiram de uma necessidade externa à matemática, necessidade de medição de comprimentos, áreas, volumes,tempo etc., vinda das atividades práticas[10]. Assim como houve resistências dos matemáticos com os números negativos, houve também com os números imaginários, para eles era difícil imaginar e aceitar números que não tivessem diretamente vinculados às atividades práticas. Solução da equação $x^2 + 1 = 0$ não era, ainda, possível - os algebristas diziam que não tinha solução. Estava instalada mais uma problemática, a da irredutibilidade das equações algébricas. O conceito de número precisava ainda ser ampliado e mais uma vez por uma necessidade interna da matemática.

No século XVII continuam as tentativas de resolução das equações algébricas, neste caso, a prioridade era por um método geral de solução. A busca de soluções por meio de radicais[11] ou através de métodos aproximados e o aperfeiçoamento do aparato simbólico literal introduzido pelo francês F. Viète[12](1540-1603) eram concomitantes.

Em paralelo à tentativa de encontrar soluções por radicais para as equações, havia um grande número de trabalhos na busca de métodos puramente numéricos e métodos geométricos. Estes últimos serviam como auxiliares para a estimativa aproximada das raízes das equações. Os métodos geométricos, elaborados na geometria analítica, tinham por base a escolha de uma curva para a resolução geométrica da equação, essa escolha era determinada pela facilidade de construção da curva ou pelo fato da equação algébrica correspondente a esta curva ter menor grau.

No século XVIII, o problema central da álgebra se torna a busca de um método geral de resolução das equações algébricas de qualquer grau, uma vez que os métodos até então apresentados não se aplicavam para uma equação genérica e de grau arbitrário. A

$a_1c + a_o = 0$. Isto é, ao colocarmos o número c no lugar de x e realizarmos todos os cálculos indicados, obtemos como resultado o número zero.

[10] A inerente tendência humana de apegar-se ao "concreto" foi responsável pela lentidão na criação de um sistema aritmético abstrato que fizesse com que os números racionais fossem vistos com a mesma legitimidade que a dos inteiros positivos. Com tais números, fica removido o obstáculo aritmético relativo a divisão de números inteiros, a equação $a \cdot x = b$ poderia ser resolvida sem nenhuma restrição aos números inteiros a e b

[11] A solução por radicais estava vinculada com a extração e representação das raízes por meio de combinações de radicais, isto é, de raízes n-ésimas e operações racionais.

[12] Viète organiza e faz um uso inovador de símbolos em sua obra *Isagoge* (1591), uma vez que já havia um gradativo uso de símbolos com a busca de resolução das equações algébricas (RÍBNIKOV, 1987, p. 133).

partir dos trabalhos de Tartaglia e Cardano com o método para encontrar as raízes das equações de grau três e o método de Ferrari para a solução da equação de grau quatro, os matemáticos procuravam métodos adequados para a resolução de equações de grau superior a quatro. Os métodos de resolução na busca da solução por meios algébricos elementares utilizados tinham sempre o mesmo caminho. Primeiro procurava-se uma equação auxiliar (a resolvente), se possível de grau menor que a equação dada, por meio de uma conveniente substituição (ou uma transformação); depois, resolvia-se a equação auxiliar e a partir de suas raízes eram encontradas as raízes da equação original, pois havia uma relação entre a solução de ambas. Esta equação auxiliar, em 1732, Euler a denomina de resolvente, posteriormente cria-se a teoria algébrica da resolvente. Aparece uma enorme quantidade de trabalhos seguindo este caminho. Dentre os vários trabalhos nesta direção além do de Euler, está o do saxão E.W. von Tschirnhaus[13] (1651-1708).

O *insight* fundamental de Lagrange

As investigações continuam com Lagrange[14], que dá um passo fundamental para toda a problemática de resolução das equações algébricas, mudando radicalmente o tipo de pensamento algébrico de sua época e usa "um tipo de cálculo combinatorial", termo usado pelo próprio Lagrange. Ele deixa de lado o cálculo das raízes de uma equação e volta-se para o estudo da estrutura do conjunto de raízes.

Primeiro ele faz um estudo crítico de todos os métodos acumulados até sua época, observando qual era, precisamente, a natureza dos métodos de resolução das equações de terceiro e quarto graus, e examina porque esses métodos funcionam para equações de grau três e quatro e falham para equações de graus maiores. Em tal estudo, Lagrange começa analisando as soluções das equações de graus dois e três de Ferro, Tartaglia, Cardano e Hudde. Ele analisa a solução da equação geral de grau três $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$, e substituindo x por $x - \frac{m}{3}$, a transforma em uma do tipo $x^3 + bx + c = 0$. Para resolver a equação obtida ele usa uma substituição devido a Hudde, que coloca x igual a soma de duas indeterminadas, $x = y + z$. Substituindo $x = y + z$ em $x^3 + bx + c = 0$ se obtém a

[13]Este trabalho desenvolvido por Tschirnhaus é apresentado em *Acta Eruditorum* (1683). (BOYER, 1996)

[14]*Réflexions sur la résolution algébrique des équations* de 1771-72 foi a grande obra de Lagrange sobre o problema das equações algébricas (WUSSING, 1984).

resolvente $y^6 + cy^3 - \frac{b^3}{27}$. Isto reduz a solução de uma equação de grau três a solução de uma de grau dois, pois:

$(y + z)^3 + b(y + z) + c = 0$

$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + b(y + z) + c = 0$

$y^3 + z^3 + (3yz + b)(y + z) + c = 0$

Na última igualdade, fazendo $3yz + b = 0$, obtém-se $y^3 + z^3 = -c$.

Além disso, $0 = (3yz + b)^3 = 27y^3z^3 + 3(9y^2z^2)b + 3(3yz)b^2 + b^3$ e como $b^2 = 9y^2z^2$, obtém-se $y^3z^3 = -\frac{b^3}{27}$.

Disto tudo vem que $y^3 + z^3 = -c$ e $y^3z^3 = -\frac{b^3}{27}$, portanto, y^3 e z^3 são soluções da equação de grau dois, $x^2 + cx - \frac{b^3}{27} = 0$.

Lagrange continua analisando os procedimentos para a solução de equações de grau três. Como resultado de sua análise, referindo-se às formas das raízes da resolvente associadas aos diferentes procedimentos de resolução, indicando 1, α e α^2 as raízes cúbicas da unidade e x', x'' e x''' as raízes de uma dada equação, ele afirma:

> Nossa análise mostra que estes métodos são basicamente os mesmos, eles consistem em encontrar os resolventes cujas raízes são representadas muito geralmente por $x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''$ ou por $(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3$, ou, equivalentemente, por quantidades proporcionais a estas. Se a raiz da resolvente é da forma $x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''$, então a resolvente é de grau seis, mas pode ser resolvida como uma quadrática, porque ela contém apenas a terceira e a sexta potências desconhecidas. ... No caso em que a raiz da resolvente é $(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3$, a resolvente é necessariamente uma quadrática. (LAGRANGE, 1771-72 *apud* WUSSING, 1984, p.73, tradução minha)

Ele diz que a solução das raízes cúbicas da unidade tem um papel importante para a investigação da solução das equações de grau três, e, que a investigação deve ser direcionada para a expressão $x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''$.

Depois, analisa as soluções das equações de grau quatro dadas por Ferrari, Tschirnhaus, Euler, E. Bezout[15] (1730-1783) e outros. Lagrange verifica a conexão e a interdependência dos métodos por eles utilizados e, volta-se, principalmente, para a análise do grau da resolvente e da variação desse grau, comparando com o grau da equação dada, também, para o exame das raízes da resolvente. Para ele as raízes da equação resolvente

[15] Em sua obra *Mémoire sur la résolution générale des équations de tous les degrés* (1765). (WUSSING, 1984)

são os valores assumidos por funções das raízes (denominadas de funções racionais) da equação dada. Os valores assumidos por cada uma dessas funções são obtidos a partir da permutação das raízes da equação de todas as maneiras possíveis. Ele conclui que a conexão entre o grau da resolvente e os valores das funções racionais era a essência do procedimento para a solução do problema da solução das equações algébricas. (WUSSING, 1984, p. 71-74)

Lagrange conclui que a solução geral da equação de grau quatro depende unicamente da existência da equação resolvente. Guiado por esta hipótese, ele pensa que as equações algébricas de grau maior que quatro podem ser solúveis por radical e tenta encontrar os correspondentes resolventes. Conhecendo duas abordagens, uma de Tschirnhaus, de 1683, e outra usada por Euler e Bezout, em 1765, que, em sua opinião, tinham perspectivas de sucesso, envolve-se com o trabalho de encontrar soluções por radical para equações de grau maior que quatro. Na página 305 do seu *Réflexions* ele coloca:

> Nós concluímos destas reflexões que é muito duvidoso que os métodos que temos discutido possam dar uma completa solução para as equações de grau cinco e, todas além desta, de graus maiores. Esta dúvida, combinada com o tamanho dos cálculos requeridos por estes métodos, desencorajam no avanço de tudo que pode ser tentado em usá-los para resolver um dos mais celebrado e importante problema da álgebra. (LAGRANGE, 1771-72 *apud* WUSSING, 1984, p.75, tradução minha)

Mais adiante nesta mesma obra, depois de todos os esforços sem sucesso para resolver equações de graus maiores que quatro, ele conclui que elas não podem ser solúveis por radicais através dos métodos conhecidos para a solução de equações de grau menor. Isto fortalece a convicção dos matemáticos de que tal solução não era possível.

Lagrange completamente envolvido com as funções racionais e com seus valores sob a ação das permutações, não opera com as permutações e, certamente, não se dá conta do fechamento de um sistema de permutações.

Mais ou menos no mesmo tempo da obra de Lagrange, o francês A. Vandermonde[16] (1735-1796), que além de matemático era físico, tinha também percebido a conexão entre a solubilidade das equações algébricas e a combinatória, mas seus procedimentos eram menos significativos que os de Lagrange do ponto de vista da idéia de grupo.

[16]Em sua obra *Mémoire sur la résolution des équations* de 1774. (WUSSING, 1984).

Os resultados de Lagrange foram aceitos muito lentamente. Em 1797, aparece alguns extratos do *Réflexions* de Lagrange através de A.-C. Clairaut[17] (1713-1765), e, que o próximo passo significativo no problema da solubilidade das equações algébricas, antes do trabalho de Galois, decididamente de natureza grupo-teorético, foi dado 30 anos depois da publicação do *Réflexions*, pelo italiano P. Ruffini[18] (1765-1822).

A idéia de Lagrange foi, de fato, o embrião para o surgimento dos grupos de permutações, por isso é importante entendê-la completamente e, esta é uma das razões pelas quais ela está exemplificada no apêndice D.

Sobre o trabalho de Ruffini

Viu-se até aqui os esforços de alguns matemáticos para encontrar soluções por radicais para equações gerais de grau dois, três e quatro. Fórmulas similares para resolver as equações gerais de grau cinco estavam se mostrando difíceis e inúteis.

A partir da percepção de Lagrange de que havia conexão entre a solubilidade das equações, as funções racionais de n quantidades e seus valores sob a ação das permutações destas n quantidades de todas as possibilidades, as funções racionais passam a ser um tema muito estudado por aqueles que se dedicavam à investigação da solução das equações algébricas.

Ruffini retoma as idéias de Lagrange e demonstra a impossibilidade de encontrar uma solução por radical da equação geral de grau maior que quatro. Sua demonstração é muito imperfeita - não é completa, contém muitas lacunas e algumas falhas. O próprio Ruffini faz muitas correções da sua demonstração e, neste processo ele vai além do reconhecimento de uma simples conexão entre a solubilidade de equações algébricas e a combinatória (referente às permutações), trabalha numa perspectiva mais estrutural que computacional e tem um progresso significativo em relação a seus predecessores.

Ruffini investiga sistematicamente os efeitos das permutações sobre as funções racionais de n variáveis que Lagrange tinha trabalhado e trata com a totalidade e pro-

[17]Em sua obra *Eléments d'algèbre* de 1797. (WUSSING, 1984)

[18]Tem uma produção de 10 artigos e a obra intitulada *Teoria generale delle equazioni* em dois volumes de 1799, mas, tudo isso está inserido na obra maior *Opere matematiche* (vol. 1, publicada em 1915; vol. 2, publicada em 1953). (WUSSING, 1984)

priedades das permutações que deixam uma função racional da equação invariante[19]. O conjunto de todas estas permutações é chamado por ele de *permutazione*, que coincide com o que depois Cauchy chama de "sistema de substituições conjugadas" e Galois de "grupo" (permutação).

No trabalho de 1799, Ruffini afirma consistentemente que sua *permutazione* é fechada tanto em conexão com a composição de permutações agindo sobre uma função, como em conexão com a questão de geradores do *permutazione* com o propósito de classificar grupos. Independentemente da terminologia usada por Ruffini, o seu conceito de grupo de permutações aparece com completa clareza. Ele define *permutazione semplice* e *permutazione composite* de acordo com o *permutazione* ser gerado por uma ou mais de uma *sostituzione*, respectivamente. Classifica os *permutazioni composite* em grupos intransitivos, grupos transitivos primitivos e grupos transitivos não primitivos e demonstra uma série de teoremas importantes.

Ruffini (1801) foi o primeiro a ver as permutações num conjunto e chamá-lo de *permutazione* e seus elementos de *sostituzione*. Ele percebe que o *permutazione* é fechado no que se refere a composição de permutações agindo sobre uma função. Vê-se claramente que o seu conceito de grupo o colocava no estágio de estabelecer elos e relações entre os elementos concretos das situações - geradores do *permutazione* (que o caracterizava em simples ou composto), determinação de subgrupos do *permutazione*, e assim por diante.

Sobre o trabalho de Cauchy

Wussing (1984) afirma que o desenvolvimento da teoria das permutações, dos grupos de permutações e a evolução da teoria dos grupos abstrato foram acompanhados pela formulação de uma apropriada terminologia.

No período que vai de 1815 a 1870, após os trabalhos de Lagrange, Vandermonde e Ruffini, e do francês O. Cauchy[20] (1789-1857), há um avanço muito grande no desenvolvi-

[19]Dizer que uma permutação deixa uma função racional invariante, significa que a permutação leva a função nela mesma, como o que ocorreu com as permutações do subgrupo H para a função $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ (ver apêndice D.)

[20]Cauchy publicou 31 artigos, aqui os mais importantes são: *Sur les Nombre des Valeurs qu'une Fonction peut acquérir, lorsqu'on e permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme* e *Sur les Fonctions que ne peuvent obtenir que deux valeurs éguals et de signes contraíres par suíte des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment*, ambos de 1815; *Mémoire sur les arrange-*

mento da teoria das permutações, no qual este último teve um papel fundamental.

O trabalho de Cauchy, diferentemente do de Ruffini, teve uma grande influência no público matemático, tanto que, no fim do século XVIII e início do século XIX, a teoria das permutações acumulou uma quantidade enorme de resultados tornando-se, inclusive, uma independente área de investigação dentro da matemática. Cauchy, além de sistematizar os resultados de seus predecessores, usa os resultados acumulados e desenvolve muitos conceitos fundamentais e apresenta um grande número de teoremas gerais na teoria das permutações, constituindo-se, posteriormente, em resultados básicos da teoria dos grupos de permutações. Além disso, elabora consistentemente uma terminologia que foi amplamente adotada por seus sucessores.

Os dois artigos de Cauchy, de 1815, são importantes para o desenvolvimento fundamental de conceitos e resultados, cujo foco é o valor de funções racionais de n quantidades sob a ação de permutações de S_n. Ele analisa os trabalhos de Lagrange, Vandermonde e Ruffini e, a partir deles, conclui que nem sempre é possível formar uma função de um dado número de variáveis que tome um número específico de valores. Ruffini tinha provado que uma função de cinco variáveis não podia assumir quatro diferentes valores, Cauchy vai além, prova que: "o número de diferentes valores de uma função não simétrica de n quantidades não pode ser menor que o maior dos primos p que divide n". (CAUCHY, 1815 *apud* WUSSING, 1984, p. 88, tradução minha)

Quanto à terminologia, em 1815, Cauchy chama de "uma permutação", uma n-upla ordenada $a_1, a_2, ..., a_n$; em 1844, ele muda de "permutação" para "arranjo", significando uma ordem, em filas, de quantidades (que podem ser representadas por números), e usa "permutação" ou "substituição" para indicar a transição de arranjo para outro. Quando ele chama a permutação de arranjo, usa letras para representar as quantidades a serem permutadas por meio da seguinte notação: $\begin{pmatrix} x & y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}$. As letras representam quantidades independentemente de sua natureza, as quantidades não são consideradas como raízes das equações, considerando, portanto, as funções com um maior grau de generalidade. Ele denota a permutação por uma simples letra e usa a palavra "produto" para a composição

ments que l'no peut former avec des letrres données, et sur les permutations ou substitutions à l'aide desquelles on passe d'um arrangement à um autre de 1844. (WUSSING, 1984).

de duas permutações. Ele diz que duas permutações são "permutáveis" (comutativas) se o resultado do produto delas independe da ordem dos fatores. Introduz o símbolo 1 para a "permutação idêntica". Em 1815, introduz a notação para potência, S, S_2, S_3,..., a potência zero ele chama de "permutação idêntica"; usa o termo "grau" para a ordem de uma permutação e, em 1845, usa também "ordem"; utiliza as expressões "permutação inversa" e "substituição inversa".

Em 1844 ele usa a expressão "sistema de substituições conjugadas" para nomear o conjunto das permutações com o significado dado abaixo:

> Dada uma ou mais substituições envolvendo algumas ou todas as n letras $x, y, z, \ldots$, eu chamo os produtos destas substituições, por elas mesmas ou por uma outra, em qualquer ordem, de substituições derivadas. As dadas substituições, juntas com outras substituições derivadas, formam o que eu chamo de um *sistema de substituições conjugadas*. A ordem do sistema é o número de substituições do sistema, incluindo a substituição com as duas linhas iguais, que se reduz à identidade. (CAUCHY, 1844 *apud* WUSSING, 1984,p.89, tradução minha)

Em 1815 ele usa "permutação circular" e "substituição circular" para uma permutação cíclica, entretanto, a representação de uma permutação como um produto de ciclos disjuntos e a notação cíclica $(x_1x_2...x_n)$ aparecem pela primeira vez em 1844, assim como, as expressões "permutação similar" ou "substituição semelhante" para permutações que tem representação cíclica análoga. Ele, então, define permutações similares: "duas substituições diferentes são ditas ser similar, se os ciclos de uma podem ser emparelhados com os ciclos da outra de modo que ciclos correspondentes tenham/têm o mesmo número de letras, isto é, a mesma ordem". (CAUCHY,1844 *apud* WUSSING,1984, p.89,tradução minha)

Seguindo, ele enuncia o seguinte teorema:

> Toda substituição similar para uma dada substituição P é o produto de três fatores, no qual os fatores extremos são inversos um do outro e o fator do meio é precisamente P. Reciprocamente, todo produto de três fatores no qual os fatores extremos são inversos um do outro e o fator do meio é P é uma substituição similar de P. (CAUCHY, 1844 *apud* WUSSING, 1984, p. 89, tradução minha)

Apesar de Cauchy, em sua definição de "sistema de substituições conjugadas" não contemplar todos os traços que o sistema de fato possuía, e de não ter a palavra pronta para nomear as permutações e a operação entre elas (são usadas as palavras permutação ou substituição), ele já tinha uma compreeenão mais refinada das permutações em si, das suas formas (cíclica ou não cíclica) e de suas representações (com letras ou números). A sua representação $\begin{pmatrix} x & y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}$, para uma permutação usando as letras no lugar de quantidades numéricas, mostra o seu nível de entendimento do que era uma permutação, sua capacidade de abstrair e isolar as quantidades a serem permutadas separadas da experiência concreta de serem raízes de uma equação. O seu conceito de grupo estava no estágio além de um pseudoconceito, pois, já lhe dava uma base para generalizações.

Até 1846 a conexão entre a teoria das permutações e a teoria de solubilidade das equações algébricas era vaga e indireta, a rápida independência da teoria das permutações diminui, gradualmente, a força de sua conexão com o problema da solubilidade das equações algébricas. Cauchy faz a transição da teoria das permutações para a teoria dos grupos de permutações sem nenhuma interação conceitual entre estas duas teorias e a teoria das equações algébricas, embora Abel e Galois tivessem um entendimento profundo da conexão entre elas.

Sobre o trabalho de Abel

Na seqüência das investigações sobre a solução das equações algébricas e do desenvolvimento da idéia implícita de grupo de permutações, aparece a de N. H. Abel[21] (1802-1829).

Abel munido de uma nova visão da natureza dos métodos matemáticos de sua época, dá, em 1824, uma primeira prova da insolubilidade da equação geral de grau cinco por radicais, um problema em aberto havia séculos e perseguido por muitos matemáticos: Lagrange, em torno de 1772, aponta para a possibilidade de não solução; Ruffini, em 1801, dá a demonstração incompleta da não solubilidade; Gauss, em 1801, afirma a não solubilidade, mas não prova.

Abel volta ao trabalho de Ruffini, pois, mesmo depois das várias versões da prova da insolubilidade por radical da equação geral de grau maior que quatro dadas pelo próprio Ruffini, algumas falhas permanecem, a principal delas dizia respeito à falta do conceito

[21] O trabalho de Abel sobre esta temática é apresentado em *Sur la résolution algébrique des équations* escrito em 1823 e publicado 1881 e *Mémoire sur les équtions algébriques, ou l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation génerale du cinquième degré* escrita em 1824 e publicada em 1881; *Mémoire sur une class particulière d'équations résolubles algébriquement* escrito em 1829 e publicado em 1881. (WUSSING, 1984)

de um domínio de racionalidade (de corpo). Como parte de seu programa para a teoria das equações algébricas, Abel elimina a principal falha deixada por Ruffini, provando que: "se uma equação algébrica é solúvel, então, sempre se pode escrever cada uma das raízes, por meio de expressões algébricas cujas componentes são expressas em termos de funções racionais das raízes da equação dada".(ABEL, 1881 *apud* WUSSING, 1984, p. 99, tradução minha)

Abel cita a obra de Gauss sobre as equações ciclotômicas, contudo resolve a tal equação usando a idéia de função racional de Lagrange. Quanto a isso Abel começa dizendo:

> Enquanto a solução algébrica das equações não é possível em geral, existem equações particulares de todos os graus que admitem uma tal solução. Tais são, por exemplo, as equações $x^n - 1 = 0$. A solução destas equações é baseada em certas relações entre as raízes. Tenho tentado generalizar este método sob a suposição de que duas raízes da dada equação estão tão relacionadas, que uma é expressa racionalmente em termos da outra. (ABEL, 1881 *apud* WUSSING,1984,p.100, tradução minha)

Ele prova o caso especial em que as raízes da equação ciclotômica $x^n - 1 = 0$ podem ser calculadas por interação de uma mesma função racional de uma das raízes, isto é: se x é uma das raízes da equação e $\theta(x)$ é uma função racional de x, então, para uma qualquer raiz x_1 da equação, $\theta(x_1)$, $\theta^2(x_1), \theta^3(x_1), ...$ são funções da mesma forma que $\theta(x)$ com $\theta^n(x_1) = x_1$, e x_1, $\theta(x_1)$, $\theta^2(x_1), \theta^3(x_1), ..., \theta^{n-1}(x_1)$ são as raízes da equação. Prova ainda que se substituir a raíz x_1 por uma outra raiz x_i para algum i, na função racional θ_k, $k = 1, 2, ..., n$, então $x_1 = \theta_1(x_i), x_2 = \theta_2(x_i), ..., x_n = \theta_n(x_i)$ são de novo as raízes da equação, possivelmente, em uma ordem diferente. Ou seja, $x_1 = \theta_1(x_i), x_2 = \theta_2(x_i), ..., x_n = \theta_n(x_i)$ são as permutações de $x_1, x_2, ..., x_n$.

No artigo publicado em 1828, Abel dá as condições necessárias e suficientes para que a equação $x^n - 1 = 0$ tenha solução algébrica: se para quaisquer duas destas raízes, $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$, a relação $\theta_2\theta_1(x) = \theta_1\theta_2(x)$ sempre ocorre, então a equação é solúvel por radicais (WUSSING, 1984). Em suma, Abel mostrou que cada uma destas funções permuta as raízes da equação $x^n - 1 = 0$ e que estas funções são elementos de um grupo de permutações das raízes. A propriedade comutativa deste grupo de permutações associada com a solubilidade da equação, induziu Jordan em seu *Traité* de 1870 ao uso do nome grupo abeliano, que passou a ser aplicado aos grupos comutativos em geral.

Assim como aconteceu com Cauchy e outros, com Abel também se vê o espontâneo uso da palavra grupo em um sentido não técnico, como um sinônimo para conjunto ou coleção. A sua atenção para o grupo de permutações estava centrada na procura de condições (em termos algorítmicos ou de cálculos) que lhe permitisse decidir se a equação era ou não solúvel algebricamente.

Sobre o importante trabalho de Galois

As investigações relativas ao problema de solução das equações algébricas finalmente são concluídas com os trabalhos de E. Galois[22] (1811-1832), nos dois últimos anos anteriores a sua morte. No entanto, seu trabalho só pode ser apreciado pela próxima geração de matemáticos, depois que parte de seus artigos foram apresentados pela via tradicional.

Nos trabalhos anteriores ao de Lagrange, era comum o uso de cálculos aritméticos na busca de solução por radicais para essas equações. Com o trabalho de Lagrange o foco das investigações muda um pouco, pois se direciona para as funções racionais de n quantidades e os valores por elas assumidos quando estas n quantidades são permutadas de todas as formas possíveis.

Galois duvida da existência de fórmulas gerais para a solução das equações, e se superpõe à idéia dos matemáticos clássicos frente a este problema, que se resumia em respoder às duas perguntas: dado um conjunto de equações algébricas, existem soluções para estas equações? Se existem, como determiná-las? E ousa por fim ao uso do cálculo como um método e coloca a necessidade de se fazer "a análise da análise" e de descobrir o centro abstrato de vários domínios e métodos. Wussing (1984) comenta que querendo ou não Galois também fazia parte de uma tradição matemática. Para estender o que lhe era familiar aos resultados de Abel, ele adequa-se à abordagem tradicional da teoria das equações, refere-se a estes resultados com muita freqüência. Galois estuda os trabalhos de Lagrange, Cauchy e Abel. A este último ele se refere como a pessoa que mais entendia de

[22]Todos os trabalhos de Galois estão contidos em duas obras: *Oeuvres mathématiques d'Evariste Galois*, publicada pela Société Mathématique de France (1897) e *Manuscripts de Galois*, publicados por J. Tannery (1908). Dentre eles, estão: *Analyse d'une Mémoire sur la résolution algébrique des equations* escrito em Abril de 1830; *Note sur la résolution des équations numériques* escrito em Junho de 1830; *Sur la théorie des nombres* escrito também em junho de 1830; *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux* escrito em janeiro de 1831 e publicado somente em 1846 por Ed. J. Liouville; *Des équations primitives qui sont solubles par radicaux* escrito em 1832, publicado em 1846 por Ed. J. Liouville. (WUSSING, 1984). No texto, na medida do possível, eu não os cito com base nestas duas obras, refiro-me a cada um isoladamente explicitando o ano.

solubilidade de equações algébricas, porém, enquanto Abel obtém os resultados através de cálculos ele obtém por um argumento de grupo.

Wussing (1984) diz que o trabalho de Galois mostra explicitamente uma nova metodologia e uma deliberada habilidade de pensamento em termos de estrutura.

Em seus artigos e manuscritos, Galois explicita coerentemente suas reflexões sobre a natureza da matemática e o método nela utilizado. Para ele no tempo de Euler o cálculo era ferramenta indispensável para o progresso, porém, em seu tempo, a contínua ênfase nos cálculos e nos algoritmos, ao invés de ajudar, tornava-se grande obstáculo. Ele percebia que os matemáticos a ele contemporâneos tinham tendência pela elegância, tratava-se de uma certa simplicidade e clareza e uma brilhante apresentação, atavés das quais se podia compreender um grande número de operações em pouco tempo, entretanto, ele via um certo limite neste método e a necessidade da mudança e o que isto representava. É exatamente isto que o coloca no começo da matemática moderna, ou na transição de uma matemática tradicional para uma nova matemática. Suas reflexões sobre a nova forma da matemática caminha de mãos dadas com a determinação conceitual da estrutura de grupo, que, até o seu tempo, tinha sido estudada de forma implícita apenas.

Galois adota dos outros estudiosos não só o problema da solubilidade das equações algébricas, mas também os resultados das tentativas de sua solução, a teoria das equações algébricas em sua fase já bem avançada e a teoria das permutações. Sua descoberta das conexões internas entre o problema de solução das equações e as permutações o faz considerar a necessidade do vínculo estabelecido por Lagrange como um critério à priori para a solubilidade das equações por radicais. A estrutura das raízes de uma equação pode agora ser vista a partir da estrutura de um certo grupo de permutações associado com a equação. A essência da idéia de Galois não foi a descoberta de grupo, mas da estrutura do grupo unicamente associado com a equação e o papel de alguns subgrupos deste grupo, os ditos subgrupos normais. (WUSSING, 1984, p. 102-105).

Não faço uma exposição completa e detalhada das investigações e descobertas de Galois, isto está além do principal objetivo deste trabalho, todavia, procuro no material, exposto por Wussing (1984), destacar as situações em que a palavra grupo e seu significado são explicitados, assim como as palavras permutação, substituição e a expressão grupo de permutações com o objetivo de saber como o significado destas palavras foram se desenvolvendo no curso da própria apresentação de Galois.

Galois, em seu artigo de junho de 1830, seguindo A. M. Legendre (1752-1833), investiga o problema de determinar os valores numéricos das raízes de uma equação que pode ser posta na forma $f(x) = x$. Seu artigo de junho de 1830 contém novas idéias, que tornam-se o ponto-chave da teoria dos corpos (comutativo) finitos, conhecida hoje como a teoria dos corpos de Galois. Nele ocorre a investigação das soluções da congruência $F(x) \equiv 0\,(mod\,p)$ em que $F(x)$ é uma função algébrica e p é um número primo. Neste trabalho, Galois adquire um completo entendimento da estrutura das soluções da congruência $F(x) \equiv 0\,(mod\,p)$, qual seja, que todas as raízes dessa equação são raízes de equações da forma $x^{p^v} = x$ e que todas as raízes não nulas são potências de uma outra, isto é, que existe uma raiz primitiva (que gera todas as outras). Segundo Wussing (1984), na prova da existência da raiz primitiva, Galois faz apenas uma passagem referente à teoria dos números. Além da prova deste resultado, o artigo se destaca por dois modos específicos de raciocínio:

- O primeiro deles contém a prova do fato de que o número de elementos de um corpo de Galois de característica p é uma potência de p, p primo. Aqui é a primeira vez que Galois usa a palavra grupo, embora no sentido de "grupo de quantidades".

- O segundo raciocínio lança em grande parte uma "luz" no processo mental associado com a evolução de um "grupo" do sentido comum para o sentido matemático. No começo de seus escritos Galois usa o substantivo "o grupo" e o verbo "agrupar", as duas palavras são usadas no sentido comum, como sinônimo de conjunto ou coleção, e não no sentido técnico; só depois a palavra grupo vai tendo para ele o sentido de grupo no sentido de um grupo de permutações (WUSSING,1984, p. 102-105).

Com os estudos sobre a estrutura das soluções da congruência $F(x) \equiv 0\,(mod\,p)$, ele toma a equação algébrica $f(x) = 0$ de grau p^v com p primo, supõe $x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_{p^v}$ suas raízes com $k^{p^v} \equiv k(modp)$; e supõe V uma função racional das raízes x_k para todo $k = 1, 2, ..., p^v$. Galois diz que a função V é transformada quando cada raiz x_k é substituída por uma raiz de índice $(ak+b)^{p^r}$ onde a e b são constantes arbitrárias satisfazendo as condições $a^{p^v-1} \equiv 1$ e $b^{p^v} \equiv b\,(mod\,p)$, r um inteiro. Sob estas condições, existem $p^v(p^v-1)v$ possibilidades de mudar as raízes x_k por meio da permutação que leva a raiz x_k na raiz $x_{(ak+b)^{p^v}}$. Como conseqüência de todas estas possibilidades de substituição das raízes $x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_{p^v}$, a função V, em geral, toma $p^v(p^v-1)v$ diferentes formas. E conclui que, se toda função V das raízes de $f(x) = 0$ de grau p^v for invariante sobre estas permutações, então, a equação é solúvel por radicais. Reciprocamente, ele afirma, sem provar, que uma equação primitiva que não satisfaz essa condição não é solúvel por radical (exceto as equações de grau 9 e 25). Ele afirma ainda:

> Assim, para cada número da forma p^v é possível formar um grupo de permutações tal que, quando uma equação de grau p^v é primitiva e solúvel por radicais, então toda função das raízes invariante sobre estas permutações, tem que admitir um valor racional. (GALOIS, 1830 *apud* WUSSING, 1984, p. 109, tradução minha)

Aqui Galois já tinha uma profunda compreensão da conexão entre as condições de solubilidade das equações algébricas e a teoria das permutações. Ele percebia a associação de um "grupo" para cada equação e que sua estrutura inferia sobre a solubilidade da equação.

Em seu *Mémoire*, de janeiro de 1831, Galois faz uma apresentação de uma forma não condensada, uma exceção em relação a todas as outras, do que ele chama de "princípios", que são definições, conceitos e lemas pertinentes a sua teoria. Dentre as definições e explicações que ele apresenta, a que interessa aqui são aquelas dadas na tentativa de precisar o significado da palavra grupo enquanto termo técnico matemático, e de outras que estejam a ela diretamente relacionadas.

Wussing (1984) diz que, estranhamente, a palavra "grupo" aparece duas vezes entre as ditas "definições conhecidas", mas não é realmente definida. O termo "grupo" não era ainda usado consistentemente como um termo matemático, talvez por isso Galois não tencionou definí-lo. A primeira vez que a palavra "grupo" aparece, ela é usada no sentido comum, na segunda vez, a palavra grupo designa um conjunto de permutações fechado sob a multiplicação, mas isso não é sempre garantido, de modo que o "grupo" não precisa ser necessariamente um grupo. Em outras palavras, numa boa parte do texto "grupos" são conjuntos de permutações, no final do texto "grupos" são realmente conjuntos fechados sob a multiplicação. Galois explica o que significa permutações e substituições e mostra como operar com elas:

> Quando se lida com funções, a permutação inicial que determina as substituições é muito arbitrária, visto que, no caso de uma função de muitas letras não existe razão para que uma particular letra ocupe uma posição preferivelmente que uma outra. Contudo, como alguém pode dificilmente conceber a idéia de uma substituição sem aquela de uma permutação. No texto faremos, frequentemente, o uso de permutações e somente consideraremos as substituições como a passagem de uma permutação a outra. Quando agruparmos substituições, devemos fazê-lo de modo que todas resultarem elas sejam resultado de uma permutação. Como sempre, consideramos questões para as quais a disposição inicial das letras não tem nenhuma influência nos grupos que estaremos considerando, devemos ter as mesmas substituições independentemente da permutação inicial. Assim, quando se tem no mesmo grupo as substituições S e T, é certo se ter a substituição ST. (GALOIS, 1831 *apud* WUSSING, 1984, p.111, tradução minha)

Neste mesmo trabalho ele prova uma proposição que garante a existência de um grupo associado a uma dada equação e as propriedades deste grupo. O conteúdo da proposição é o seguinte:

> Dada uma equação com raízes $a, b, c, ...$ existirá sempre um grupo de permutações das letras $a, b, c, ...$ com as seguintes propriedades: 1. Todas as funções das raízes que são invariantes sobre as substituições do grupo são racionalmente determináveis, e, 2. Reciprocamente, todas as funções das raízes, racionalmente determinavéis, são invariantes sobre as substituições. (GALOIS, 1831 *apud* WUSSING, 1984, p.112, tradução minha)

Galois associa para toda equação (com raízes simples) um grupo de permutações ou, como ele dizia, um grupo de arranjamento das raízes, chamado o "grupo da equação". Ele tinha consciência de que o "grupo da equação" era fechado sob a multiplicação, diz o que isto significa e usa implicitamente, mas não prova.

Em 29 maio de 1832, na noite antes de sua morte, Galois escreve sua famosa carta a Auguste Chevalier, tida como um testamento científico, fazendo um sumário de seus resultados anteriores, esboçando o desenvolvimento da sua teoria de solubilidade das equações algébricas envolvendo o seu *insight* sobre o fundamental papel da "decomposição própria", ou seja, da série de subgrupos normais. Na carta o uso de *le groupe* oscila entre "grupo" e "complexo".

Pelo que já foi visto até aqui, vê-se que paralelamente ao processo de desenvolvimento da teoria das permutações e dos grupos de permutações, havia o desenvolvimento da linguagem ou de uma terminologia específica e inerente a essas teorias.

Vê-se, numa análise retrospectiva da história da gênese do conceito de grupo, que houve um processo gradativo e concomitante de descobrimento e desenvolvimento do objeto, da palavra que o representasse e do significado desta palavra, enfim, durante o período 1761-1882 e, principalmente, de 1771-1882 houve a formação de equivalentes funcionais do objeto e do conceito hoje simbolizados pela palavra grupo.

Vygotsky afirma que um nome nunca é um conceito no início do seu surgimento. Do ponto de vista lógico o nome é, por um lado, insuficiente por ser estreito demais, no sentido de que o objeto nomeado não se esgota naqueles atributos fixados pelo nome, e, por outro lado, demasiadamente amplo porque o nome se aplica a toda uma série de objetos. (VYGOTSKY, 2001, p. 214)

Divulgação, apreciação e complementação do trabalho de Galois

Os próximos passos na investigação da solubilidade das equações algébricas foram em direção do entendimento do trabalho de Galois por seus contemporâneos matemáticos. Vários aspectos e circunstâncias internas e externas aos trabalhos de Galois fizeram com que eles fossem entendidos e apreciados por estágios.

O primeiro deles foi a demora na publicação do seu trabalho. Em setembro de 1832, foi publicada a carta de Galois para Auguste Chevalier e, somente, em 1846, J. Liouville (1809-1882) publica os escritos essenciais de Galois.

O segundo, foi o próprio estilo de Galois e seu método de apresentação de suas idéias - uma forma de excessiva brevidade, quase sempre por meio de aforismos. Isto fez com que só a próxima geração de matemáticos pudesse entendê-lo completamente.

Terceiro, após a publicação de Liouville, o italiano C.G.Jacobi (1804-1851), um dos indicados pelo próprio Galois para avaliar o seu trabalho, chamou atenção para as lacunas nele encontradas e da urgência de eliminá-las.

Quarto, os artigos foram apresentados pela via tradicional para a comunidade matemática poder ir reconhecendo a profundidade dos mesmos. Além disso, havia uma dificuldade intrínseca ao conteúdo dos artigos de Galois quanto ao entendimento da essência de suas idéias. Galois, baseado na clareza dos conceitos por ele definidos e nos cálculos, descobre muitos resultados sem prová-los.

Wussing (1984) diz que o trabalho de Galois forçou um substancial desenvolvimento em duas direções. Por um lado, pela necessidade encontrada por seus sucessores em cobrirem muitas das lacunas existentes em seus escritos. Por outro lado, pela dificuldade em provar a validade dos teoremas por ele formulados, e pela extração da substância e do cerne de grupo-teorético. O reconhecimento do significado do trabalho de Galois brotou com o crescimento do *insight* sobre a base conceitual de sua teoria e a simultânea criação de cálculos que a fizesse lógica e computacionalmente acessível e controlável. Este processo foi longo...

O primeiro estágio do entendimento e apreciação do trabalho de Galois, classificado como negativo por Wussing (1984), teve início com a publicação da carta de Galois para Auguste Chevalier em setembro de 1832 e foi até 1846. Tal estágio está caracterizado pelo esforço dos matemáticos em entender seus escritos e tentar preencher as lacunas existentes em suas apresentações, deixando de lado o entendimento da essência do seu método e da idéia de grupo.

O segundo estágio começa em 1846 e foi caracterizado como construtivo e também de transição, pois havia um esforço em extrair a essência da idéia de grupo na solução das equações algébricas e dar uma forma conclusiva às idéias de Galois. A edição dos trabalhos de Galois por Liouville impulsiona o restabelecimento da conexão entre a crescente teoria das permutações e a concepção básica de Galois quanto à formulação de grupo da teoria da solubilidade das equações algébricas. No início, a procura da essência do grupo-teorético na teoria de Galois teve um progresso lento, mas depois as linhas de desenvolvimento devidas a Cauchy e Galois fundiram-se, havendo um profundo e rápido avanço que revelou uma extensa ordenação do conceito de grupo-teorético de permutações por toda a matemática. Foi, finalmente, restaurada a interação entre a teoria de solubilidade das equações algébricas e a teoria dos grupos baseada na teoria das permutações, o que contribuiu muito para o desenvolvimento do conceito de grupo de permutações. Ocorre o reconhecimento do significado objetivo dos resultados de Galois e estes são incorporados ao edifício da álgebra por volta da metade do século XIX, entretanto, a formalização axiomática do conceito de grupo abstrato ocorre em 1882, 50 anos após sua morte. (WUSSING, 1984, p. 85-86, 117-118)

Na Alemanha, a atitude típica era decididamente a de formulação de conceitos e métodos dos trabalhos de Galois, sem nenhuma contribuição para o desenvolvimento da teoria dos grupos de permutações.

Após o alerta de Jacobi sobre as falhas dos trabalhos de Galois, o alemão Th. Schonemann[23] (1812-1868) faz um grande esforço no sentido de eliminar as falhas do artigo de Galois escrito em janeiro de 1831, embora não tenha compreendido a profundidade do conteúdo do referido artigo nem a essência de grupo. Schonemann usa permutações de raízes de uma dada equação igualmente como fez Abel e Galois, introduzindo sistemas de permutações, mas não as vê como uma nova entidade. A palavra grupo ou seu sinônimo não surge e o fechamento sob a multiplicação do grupo de permutações não é usado.

Diferentemente do que aconteceu na Alemanha, na França e Itália, se estendendo também pela Inglaterra, entre 1848 e 1853, houve um avanço maior na teoria das permutações numa base de grupo-teorético, que conduziu para o desenvolvimento do conceito de grupo de permutações durante os anos 1850 e 1860.

Na Inglaterra, havia preocupações com os fundamentos abstratos da matemática no início da década de 40. Como resultado disto, houve, em torno dos ingleses G. Boole (1815-1864), A. Cayley (1821-1895) e J. J. Sylvester (1814-1897), um desenvolvimento do conceito de grupo abstrato no sentido de um arbitrário sistema de elementos determinado apenas por definir relações. Esta abordagem não foi geralmente aceita, mas, 25 anos depois, sob diferentes condições, foi vital para a evolução final do conceito de grupo abstrato.

Na Itália, em 1851, acontece a primeira importante publicação pós Galois, através de um dos dirigentes da escola matemática italiana, E. Betti[24] (1823-1892), que tinha o objetivo de tornar a teoria de Galois mais precisa.

Em 1852, Betti ratifica o seu propósito de sistematizar a teoria de Galois e acrescentar coisas novas para completar a solução do problema da solubilidade das equações algébricas. Neste artigo, a abordagem da teoria da solubilidade das equações algébricas

[23] O trabalho de Schonemann é encontrado no artigo *Über die Beziehungen* publicado em 1853. (WUSSING, 1984)

[24] Betti publica uma série de nove artigos, divididos entre a teoria das equações algébricas e a teoria das permutações, dentre eles: *Sopra la risolubilità per radicali delle equazioni algebriche irriduttibili di grado primo* de 1851; *Un teorema sulle risolventi delle equazione risolubili per radicali* de 1851; *Sulla risoluzione dell'equazioni algebriche* de 1852; uma monografia sob o título *Sopra la teorica delle sostituzioni* em 1855; *Sur les substitutions de six lettres* de 1866. (WUSSING, 1984)

é descrita por meio de grupo-teorético e a estrutura mostra como o conceito de grupo de permutações tinha se tornado estabelecido. Neste trabalho, ele define uma substituição como a operação de transição de uma permutação à outra; a permutação é um arranjo de n elementos x_i representada por $\begin{pmatrix} x_i \\ x_{\varphi(i)} \end{pmatrix}$ onde a função $\varphi(i)$ toma todos os n índices i. Ele denota permutação por letras θ, Ψ, ... e define permutação derivada de θ por Ψ como sendo a permutação $\alpha = \Psi^{-1}\theta\Psi$.

Um grupo de permutações é definido como segue:

> Nós chamamos uma série de permutações um grupo de permutações, se existe uma substituição que nos permite passar de uma permutação para qualquer outra e que, quando aplicada a todas, simplesmente permuta-as entre elas mesmas sem produzir novas permutações que não faça parte do grupo. As substituições que passam de uma permutação para todas as outras permutações do grupo são chamadas as substituições do grupo. Se o grupo consiste de φ_o, φ_1, ..., φ_{p-1}, então $\varphi_m\varphi_n = \varphi_r$, onde r é um inteiro que depende de m e n e menor que p. Um grupo contendo n permutações será dito de grau n. (BETTI, 1852 *apud* WUSSING, 1984, p. 126, tradução minha)

Após um grande número de questionamentos quanto ao aparato conceitual e computacional de vários aspectos da complexidade dos problemas originados com Galois e o relatado desenvolvimento da idéia de grupo, Betti decide, em 1855, apresentar os princípios da teoria das permutações. Este trabalho se distingue por uma forte confiança no simbolismo, levada em consideração também no grupo linear, um assunto que foi extensivamente estudado por Jordan (1870) em seu *Traité*.

O desenvolvimento das idéias de Galois na França, sua pátria natal, foi mais complicado que na Alemanha, Itália e Inglaterra.

Na França, por um lado, há, inicialmente, resistências no que se refere à uma divulgação mais ampla através de comentários sobre os trabalhos de Galois, e, por outro, há um desenvolvimento unilateral da teoria dos grupos de permutações que desviou o curso das investigações da essência da formação do conceito de grupo abstrato.

Todo o processo de abstração e desenvolvimento do conceito de grupo de permutações começa em 1840. De 1854 a 1866 há um progresso considerável, todavia, a fase final ocorre com o crescimento da teoria dos grupos de permutações como área independente de investigação e sua consolidação revela uma multiplicidade de possíveis aplicações desta teoria em outras áreas da matemática, o que impulsiona o conceito de grupo de permutações para a posição de um conceito fundamental da matemática. Isto foi feito pelos franceses J. A. Serret (1819-1885) em seu livro[25] e C. Jordan (1838-1922). Ambos elaboram, no início, experimentos para aplicar o conceito de grupo de permutações na análise, geometria, e outras áreas tais como mecânica teórica.

Em seu trabalho, do ponto de vista de conteúdo, Serret fez poucos acréscimos e comentários à teoria de Galois. Ele completa a fusão da abordagem de Cauchy com a de Galois. Prova que é possível associar um grupo para cada equação com raízes simples. Ele usa a terminologia de Cauchy, mas o seu "sistema de substituições conjugadas próprio da equação" é o mesmo que o "grupo da equação" de Galois: "seja $f(x) = 0$ uma equação com n raízes distintas $x_1, x_2, ..., x_n$. Sempre existe um sistema de substituições conjugadas G...".(SERRET, 1866 *apud* WUSSING, 1984, p. 135, tradução minha)

Como contribuição para o fenômeno da independência da teoria das permutações em relação à teoria das equações algébricas, em 1859, seguindo Galois e Ch. Hermite (1822-1901), Serret imagina uma aplicação da teoria das permutações indo além da teoria das equações algébricas. Trata-se de uma aplicação do pensamento grupo-teorético a um conjunto de funções lineares fracionárias de uma variável.

As substituições eram funções da forma $\theta(x) = \frac{ax+b}{a'x+b'}$, cujos coeficientes a, b, a' e b' podiam ser números arbitrários, as quais ele chama de "funções lineares". Ele define recursivamente $\theta^2(x) = \theta(\theta(x)), ..., \theta^m(x) = \theta(\theta^{m-1}(x))$; e interessa-se em investigar as condições necessárias e suficientes para que a m-ésima potência de θ fosse igual a função identidade, isto é, $\theta^m(x) = \frac{a_m x+b_m}{a'_m x+b'_m} = x$, a, b, a' e b' coeficientes quaisquer.

Após alguns cálculos elementares ele obtém a igualdade $(a+b')^2 - 4(ab' - ba')cos\frac{\lambda\pi}{\mu} = 0$

[25] Serret é responsável por um excelente e inovador livro-texto de álgebra avançada em três edições, *Cours d'Algèbre supérieure*: 1849, 1854 e 1866 (dois volumes). A edição de 1866 é um novo livro se comparada com a de 1854, com 5 seções subdivididas em capítulos. Para a história da teoria dos grupos são interessantes as seções IV e V do livro 2, ambas estão constituídas de 5 capítulos. Na seção IV, intitulada "As substituições", os capítulos são os seguintes: (I) Propriedades gerais das substituições; (II) Propriedades dos sistemas de substituições conjugadas; (III) Dos índices dos sistemas conjugados; (IV) Sobre quaisquer casos particulares da teoria das substituições; (V) Aplicações da teoria das substituições. Na seção V, intitulada "A resolução algébrica das equações das equações", são: (I) Das equações do terceiro e do quarto graus. Considerações gerais sobre a resolução algébrica das equações; (II) Da impossibilidade da resolução algébrica das equações gerais ou da de quarto grau; (III) Das equações abelianas; (IV) Sobre uma classe de equações do nono grau resolúvel algebricamente; (V) Sobre as equações resolúveis algebricamente. Nas duas últimas edições ele define álgebra como "a análise das equações". (WUSSING, 1984).

onde λ e μ são relativamente primos. Supondo os coeficientes a, b, a' e b' números reais, ele nota que pode supor $ab' - ba' = 1$ sem perda de generalidades, e obtém $a + b' = 2cos\frac{\lambda\pi}{\mu}$ como uma condição necessária e suficiente para que $\theta^{\mu}(x) = x$ com λ e μ relativamente primos. E finaliza com o seguinte resultado: "dada uma função linear $\frac{a_m x + b_m}{a'_m x + b'_m}$, encontra-se uma função linear $\theta(x) = \frac{ax+b}{a'x+b'}$ tal que se tem identicamente $\theta^m(x) = \frac{a_m x + b_m}{a'_m x + b'_m}$ e $\theta^{\mu}(x) = x$". (SERRET, 1866 *apud* WUSSING, 1984, p.149, tradução minha)

Continuando, Serret apresenta resultados, na maioria estabelecidos por ele mesmo, envolvendo uma interação entre análise, teoria dos números e a teoria das permutações; tais resultados se constituem uma ajuda para avançar na teoria dos grupos. O próprio Serret reconhece isso. Ele então considera $\theta(z) = \frac{az+b}{a'z+b'}$ com a, b, a', b' inteiros, e toma todos esses números módulo p, p primo ímpar; elimina o caso em que θ se reduz a uma constante e chama $\Delta = ab' - ba'$ de determinante da função linear θ. Serret divide as funções $\theta(z)$ em duas classes: a primeira constituída pelas funções $\theta(z)$ cujo determinante é um resíduo quadrático módulo p, isto é, a equação $x^2 \equiv \Delta (mod\, p)$ tem solução; a segunda está constituída pelas funções que não verificam esta condição.

Serret mostra que existe um número finito de funções lineares, define a composição de funções e conclui que o conjunto de todas as funções lineares da primeira classe é fechado para a composição (um tipo de multiplicação), o mesmo não acontecendo para as funções da segunda classe. Apenas com a garantia do fechamento da composição de funções, ele afirma que o conjunto de funções da primeira classe forma um grupo.

Em seguida, ele usa o raciocínio de Euler sobre o estudo das congruências residuais, define a ordem de uma função linear módulo p abstratamente, como sendo o menor inteiro positivo n tal que $\theta^n(z) = z\, (mod\, p)$, independentemente da natureza dos números envolvidos.
Serret diz que $\theta^0(z) = z\, (mod\, p)$, que $\theta^{-1}(z) = \theta_{n-1}(z)\, (mod\, p)$ e prova que $\theta(z)$ e toda potência $\theta^e(z)$ com e relativamente primo com p, geram grupos cíclicos de ordem n. Calcula a inversa de $\theta(z)$, $\theta^{-1}(z) = \frac{-b'z+b}{a'z-a}$.

Serret considera também o problema de construir todas as funções lineares de ordem n e de contar o número dos diferentes tipos de tais funções.

Um exemplo destes é dado por meio do conjunto $\Phi = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ de funções definidas em $D = \mathbf{R} - \{0, 1\}$ e tomando valores no conjunto $\mathbf{R}$ dos números reais em que: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$, $f_3(x) = 1 - x$, $f_4(x) = \frac{x}{x-1}$, $f_5(x) = \frac{1}{1-x}$, $f_6(x) = \frac{x-1}{x}$. Vê-se pela tabela abaixo, que a composição de funções é uma operação binária no conjunto e que lhe dá uma estrutura de grupo[26].

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_5	f_6	f_3	f_4
f_3	f_3	f_6	f_1	f_5	f_4	f_2
f_4	f_4	f_5	f_6	f_1	f_2	f_3
f_5	f_5	f_4	f_2	f_3	f_6	f_1
f_6	f_6	f_3	f_4	f_2	f_1	f_5

Tabela 3.1: Da operação do grupo $\Phi = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$

Sobre o trabalho de Jordan

Os comentários, investigações e/ou extensões de alguns artigos de Galois seguem com Jordan[27]. Este tinha um profundo desejo de produzir (sobre) uma síntese conceitual da matemática do seu tempo. Seu trabalho, em especial o de 1870, representa não somente uma definitiva solução do problema formulado por Galois e uma formulação completa do conceito de grupo de permutações, mas também uma revisão de toda a matemática que lhe foi contemporânea de um ponto de vista da ocorrência do pensamento de grupo-teorético em termos de permutação-teorético. Ele marca uma ruptura na evolução e aplicação do conceito de grupo de permutações, traz formulações de problemas que só foram resolvidos poucos anos depois com a ajuda de uma nova concepção de grupos, através da ampliação do conceito de grupo de permutações empreendida pelos alemães Felix Klein (1849-1925) e Sophus Lie (1842-1899).

Em 1865, Jordan tenta deixar os resultados de Galois transparentes e comprováveis e, ainda, adequá-los à matemática contemporânea. Jordan usa a expressão "transfor-

[26]Este grupo é apresentado em Alencar Filho (1978) e Lichtenberg (1981)

[27]O trabalho de Jordan está expresso em *Commentaire sur le Mémoire de Galois* (1865); *Commentaire sur Galois* (1869); *Sur les groupes de mouvements* (1867); *Mémoire sur les groupes de mouvements* (1968-69); *Traité des substitutions et des équations algébriques* (1870) constituído de 667 páginas em quatro volumes de 1870; *Mémoire sur lês équations différentielles linéaires à intégrale algébrique* (1878); *Sur la réduction des subtitutions linéaires* (1880). (WUSSING, 1984)

mação de um grupo" para descrever a propriedade de normalidade de um subgrupo da seguinte forma: *Se todas as raízes de uma equação* $\Psi(x) = 0$ *são funções racionais de qualquer uma delas, então os diferentes grupos* $1, a, a_1, a_2, ...$; $1, b^{-1}ab, b^{-1}a_1b, b^{-1}a_2b, ...$; $1, c^{-1}ac, c^{-1}a_1c, c^{-1}a_2c, ...$ *são todos formados pelas mesmas substituições. O único grupo é transformado nele mesmo por todas as substituições de* G (JORDAN, 1865 *apud* WUSSING, 1984, p. 136, tradução minha)

Em termos de conteúdo, a principal contribuição de Jordan neste artigo é a elaboração do papel fundamental do subgrupo normal para a solubilidade de equações por radicais.

Em 1869, Jordan vai além de Galois no que se refere ao conteúdo principal de grupo-teorético. Ele escreve sobre o que hoje se define como ordem de um elemento, prova que todo grupo contém um elemento unidade e que para cada substituição a, existe outra substituição a^{-1}, mas não usa nenhuma denominação para o inverso. Ele apresenta tudo isso em um mesmo enunciado, como segue:

> As sucessivas potências de uma substituição a são todas distintas até a potência a^{λ} que se reduz a unidade. Além disso, neste ponto elas se repetem periodicamente. Todos os grupos contêm uma substituição unidade. Se um grupo contém a, ele também contém a^{-1}. (JORDAN, 1869 *apud* WUSSING, 1984, p. 138, tradução minha).

Ele usa a expressão "grupo de substituições" e dá uma definição explícita de grupo na qual o fechamento sobre a multiplicação é a única propriedade requerida para um grupo: "um sistema de substituições forma um grupo se o produto de quaisquer duas substituições do sistema é ainda um membro do sistema". (JORDAN, 1869 *apud* WUSSING, 1984, p. 137, tradução minha)

A partir daí, ele define "o grupo derivado de $a, b, c, ...$" onde $a, b, c, ...$ são permutações, do seguinte modo: "as diferentes substituições obtidas por aplicar certas substituições dadas $a, b, c, ...$ tantas vezes quanto se queira e em qualquer ordem, formam um grupo derivado de $a, b, c, ...$". (JORDAN, 1869 *apud* WUSSING, 1984, p. 137, tradução minha)

Em termos modernos este é o grupo gerado por $a, b, c, ...$. A definição de um subgrupo normal é baseada no conceito da transformação de uma permutação a por uma permutação b: $b^{-1}ab$ é chamada a "transformação de a por b". Se $(a, a_1, a_2, ...)$ é o grupo gerado por $a, a_1, a_2, ...$ (na terminologia de Jordan, o grupo derivado), então

$(b^{-1}ab, b^{-1}a_1b, b^{-1}a_2b, ...)$ é chamado a "transformação do grupo $(a, a_1, a_2, ...)$ por b". Se este coincide com $(a, a_1, a_2, ...)$ então ele é dito comutar com b (ou ser permutável com b). Independentemente da terminologia, isto coincide com a "decomposição própria" de Galois.

Jordan caracteriza um subgrupo de um grupo dizendo que "um grupo contém outro se ele contém todas as suas substituições..."e prova o teorema que garante que a ordem de um subgrupo divide a ordem do grupo: "se um grupo H está contido em um outro grupo G, então sua ordem n divide a ordem N de G". (JORDAN, 1869 *apud* WUSSING, 1984, p. 138, tradução minha)

A existência do grupo de Galois de uma equação é confirmada por Jordan em um teorema com o seguinte enunciado:

> Seja $F(x) = 0$ uma equação com raízes distintas $x_1, x_2, ..., x_m$, para as quais se deve ter adjuntado certas quantidades auxiliares $y, z, ...$. Sempre existe um grupo de substituições das raízes $x_1, x_2, ..., x_m$ de modo que uma função das raízes é racionalmente expressível se, e somente se, seu valor numérico não é alterado pelas substituições deste grupo. (JORDAN, 1869 *apud* WUSSING, 1984, p.139, tradução minha)

A primeira metade da prova que estabelece a conexão entre a teoria das equações e a teoria dos grupos de permutações, é a mesma prova de Galois. A existência do grupo introduzido pelo teorema depende da escolha das quantidades $y, z, ...$ adjuntadas para a equação. Jordan denota este grupo como "o grupo da equação relativo à adjunção das quantidades $y, z, ...$". Entre todos os grupos obtidos desta maneira, um grupo é notável e pode ser designado como o "grupo da equação", é o grupo obtido quando nenhuma quantidade é adjuntada para a equação.

Ele discute também isomorfismo do grupo de permutações, deixando uma porta aberta para uma variedade de investigações futuras. A sua definição de isomorfismo de grupos é inteiramente moderna, no entanto, no início da definição se refere a um grupo como se fosse um grupo abstrato, mas, ao falar de seus elementos usa a palavra substituições. Nas palavras de Jordan:

> Um grupo Γ é dito isomorfo a um grupo G se é possível estabelecer entre suas substituições uma correspondência de modo que: 1. para cada substituição de G, corresponda uma única substituição de Γ e para cada substituição de Γ uma ou mais substituições de G; 2. o produto de quaisquer duas substituições de G corresponda ao produto de suas respectivas

> substituições correspondentes. (JORDAN, 1870 *apud* WUSSING, 1984, p.143, tradução minha)

A condição (1) garante a existência de uma função de G em Γ, a condição (2) aponta com a possibilidade da função não ser injetiva, com isso, o que se tem é a definição de homomorfismo. Esta vem seguida brevemente por uma distinção: "um isomorfismo é dito ser *meriedric* se muitas substituições de G correspondem a mesma substituição de Γ; e *holoedric* no caso contrário". (JORDAN, 1870 *apud* WUSSING, 1984, p. 143, tradução minha)

Nesta definição, Jordan fica preso ao fato de que os elementos de um grupo devem ser substituições, isto o impediu de fazer uma exploração completa da idéia inerente ao conceito de "isomorfismo de grupos de permutações". Não há uma formulação abstrata. O seu conceito de grupo ainda não estava separado do conceito de grupo de permutações. Isto também o impede de descobrir o teorema que afirma a existência do isomorfismo entre duas diferentes séries de composição de um mesmo grupo, um teorema provado pelo alemão O. Hölder[28] (1859-1937) em 1889, com base em uma visão abstrata da natureza dos elementos do grupo.

Nos anos 1867-68-69, Jordan faz uma longa classificação de grupos de movimentos. Isto contibuiu objetivamente, em seu *Traité*, para uma tendência objetiva no uso da teoria dos grupos (de permutações) na geometria, em especial na geometria analítica. Os problemas geométricos foram transformados em equações algébricas e a aplicação da teoria dos grupos para a geometria limita-se à resolução das equações algébricas originadas de tais problemas.

Jordan nota que um dos problemas mais comuns da geometria é determinar pontos, curvas e superfícies satisfazendo determinadas condições. Quando o número de soluções é finito, as coordenadas dos pontos ou os parâmetros das curvas e superfícies são determinados por um sistema de equações e isto tornou possível, sem maiores dificuldades, a aplicação dos métodos de Galois.

[28]Os trabalhos de Hölder estão em *Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen* (1889); *Ueber den Söderberg'schen Beweis des Galois'schen Fundamentalsatzes* (1889); *Die einfachen Gruppen im ersten und zweiten Hundert der Ordnungszahlen* (1892); *Die Gruppen der Ordnungen* (1893); *Die Gruppen mit quadratfreier Ordnungszahl* (1895); *Bildung zusammengesetzter Gruppen* (1895). (WUSSING, 1984).

Para resolver os problemas geométricos na forma como foi apresentado, Jordan tinha como modelo um cálculo de grupos de permutações que lhe permitia usar a abordagem grupo-teorético correspondente a um dado problema geométrico. Com isso, ele foi capaz de classificar os grupos relativos aos problemas da geometria e isolar resultados por meio de grupo e descrevê-los em termos de afirmações sobre subgrupos do grupo linear.

Em todo o *Traité*, Jordan não vai além do pensamento de um grupo como um grupo de permutações, entretanto, de um ponto de vista histórico, a concepção associada com o termo "representação analítica de permutações" é uma fase de transição entre o conceito de um grupo de permutações e o conceito de um grupo (finito) de substituições lineares nos quais as substituições lineares são os elementos do grupo. Jordan também usa os resultados envolvendo "grupo linear" no estudo do grupo de equação modular e da teoria de funções elípticas, permanecendo dentro dos limites do conceito de grupo de permutações.

Ambos, Serret e Jordan, aplicam o pensamento grupo-teorético em 1859 e 1870, respectivamente, promovem a extensão do conceito de um grupo de permutações. A abordagem de Jordan lhe permitiu dar uma apresentação unificada dos resultados devido a Galois, Betti, Hermite, Mathieu, Jacobi, Kronecker, Krikman e outros.

Um ponto discutido por Vygotsky, que também é válido aqui, é a aplicação que um indivíduo faz de um conceito antes de formá-lo, isto, inclusive, o auxilia na própria formação do conceito. Antes que a palavra "grupo" emergisse na literatura matemática e o conceito de grupo fosse explicitamente formalizado, existiu um longo período de desenvolvimento no qual matemáticos aplicavam os resultados e o pensamento grupo-teoréticos. Isto aconteceu com Serret, Jordan, Klein, Lie, entre outros, no que segue.

A evolução e especificação do conteúdo conceitual da palavra "grupo" no sentido de um grupo de permutações fez surgir, nos anos 50 e 60 do século XIX, uma correspondência histórica e lógica entre o conceito de grupo e a teoria das equações algébricas, área que o produziu e na qual ele era explicitamente aplicado.

Com o desenvolvimento e ampliação da teoria dos grupos de permutações e o resultado das aplicações do conceito de grupo de permutações fora da teoria das equações e da matemática, o conteúdo conceitual da teoria das permutações foi forçado a abrir-se e, gradativamente, liberar a teoria dos grupos da necessidade de representar os elementos de um grupo por meio de permutações. Nos trabalhos de Serret, de 1866, e de Jordan, de 1870, isto foi visto apenas como uma tendência; nestes trabalhos não é possível discernir realmente uma consciência dos autores da extensão do conceito de um grupo de permutação.

Nos anos 70 e 80 do mesmo século, a teoria do grupo rapidamente adquiriu significado essencial na geometria, na teoria dos números e nas várias áreas da análise. Os frutos dos conceitos e métodos grupo-teoréticos se tornaram evidentes, em face do crescente conhecimento subjetivo dos matemáticos dentro do seu papel e das novas condições internas destas disciplinas que favoreciam objetivamente sua aplicação.

Isto já começa em 1871, quando uma detalhada revisão do *Traité* de Jordan foi feita por J.Höuel, na qual ele designa a geometria "como a nova atração da teoria das permutações", provocando uma profunda penetração do ponto de vista grupo-teorético na geometria. A partir daí, o conceito de grupo de permutações invade a geometria e a teoria das permutações como uma disciplina independente que foi deixada para trás.
(WUSSING, 1984, p. 162)

3.3 A geometria e o grupo de transformações

Sabe-se que um dos objetos de investigação da matemática é a forma. Tal estudo está no âmbito da geometria e se traduz por meio de propriedades das figuras no plano ou no espaço. Desde a Antiguidade até o século XVII, havia a idéia de que existia apenas a geometria euclidiana. Esta era vista, principalmente, como a arte de medição. Os modos fundamentais de pensamento em e sobre geometria eram ditados pelo hábito. O ponto era visto como o elemento fundamental de toda a geometria e o espaço era algo intrínseco ao espaço físico. Além disso, toda a investigação da forma era realizada pelo método sintético. Neste método o assunto é construído sobre fundamentos puramente geométricos independentes da álgebra e do conceito do contínuo numérico; os teoremas são deduzidos por raciocínios lógicos a partir de um corpo inicial de afirmações denominados axiomas ou postulados. De acordo com Courant e Robbins (2000), o método axiomático[29] em matemática sempre existiu, pelo menos desde a época de Euclides, este fez da geometria o protótipo de uma disciplina axiomatizada. O método axiomático euclidiano foi importante e necessário durante um certo tempo, todavia em decorrência do próprio desenvolvimento da matemática, aparecem momentos e situações em que ele chegou a ser obstáculo para outras formas de pensamento e até mesmo para outros métodos. “O peso da tradição da geometria grega retardou a inevitável evolução do conceito de número e da manipulação algébrica, que mais tarde se constituíram a base da ciência moderna” (COURANT e ROBBINS, 2000) com a inserção, na matemática, do método analítico que tem por base a introdução de coordenadas numéricas e a utilização da álgebra considerando o contínuo numérico.

O uso das quantidades variáveis e a quebra de todo o aparato euclidiano começam com R. Descartes (1596-1650), que foi ajudado, principalmente, por Fermat (1601-1665), com a utilização do método analítico que conduziu à geometria cartesiana. Inicialmente, não era bem uma nova geometria, mas, sim, um novo método, uma nova forma de abordagem da geometria existente. Nos trabalhos de Descartes e Fermat começa a se formar a geometria analítica como um método de expressão das relações numéricas das dimensões, formas e propriedades dos objetos geométricos, utilizando, essencialmente, o método de coordenadas e métodos da álgebra. Desta forma, foram substituídos os pontos de um plano por pares de números e as curvas por equações. Com isso, o estudo das propriedades das curvas mudou para o estudo das propriedades algébricas das equações correspondentes, e a geometria foi provisoriamente então reduzida à álgebra.

O francês G. Monge[30] (1746-1818), fundador e administrador da referida escola, es-

[29]Em termos gerais, o ponto de vista axiomático pode ser descrito assim: provar um teorema em um sistema dedutivo consiste em demonstrar que o teorema é uma conseqüência lógica necessária de algumas proposições anteriormente provadas; estas, por sua vez, devem ser elas próprias provadas; e assim por diante. Como esse processo não é infinito, deve haver uma série de afirmativas chamadas de postulados ou axiomas, aceitos como verdadeiros e, para os quais, não se exige prova. A partir destes, os teoremas são deduzidos por meio de raciocínios puramente lógicos. As teorias matemáticas, em geral, são apresentadas de uma forma axiomática, nestas, os fatos são colocados em uma ordem lógica de modo que se possa mostrar que todos decorrem de um certo número de enunciados escolhidos. Esta é uma forma de decifrar a rede de relações entre os diferentes fatos e exibir a lógica essencial da estrutura de uma determinada teoria. Como é o caso da teoria dos conjuntos, da teoria dos grupos etc.

[30]Monge no desenvolvimento de suas atividades como professor, tanto na École Polytechnique como na École Normale (1794-1795), escrevia textos para suprir a necessidade de livros adequados para os

pecialista em geometria de um modo geral, teve uma participação especial e fundamental no desenvolvimento inicial desta área. A sua primeira obra estabelece os fundamentos da geometria descritiva[31], a segunda é resultado do seu curso "aplicação da análise à geometria" uma vez que o nome geometria analítica não estava em uso geral e também não havia geometria diferencial[32]. A geometria descritiva, naturalmente, se torna o centro do programa educacional destinado para a rápida satisfação das necessidades impostas pela tal Revolução. Os textos de geometria analítica, desenvolvidos por seus alunos, exerceram uma forte influência na formação matemática dos estudantes nas universidades, preparando a base e impulsionando o desenvolvimento de toda a geometria. No período de 1798 a 1802, surgem quatro geometrias analíticas elementares, a de S. F. Lacroix (1765-1843), J. B. Biot (1774-1862), L. Puissant (1769-1843) e F.L. Lanfrançais, todas inspiradas nos cursos da École Polytechnique e resultando em um igual número de livros na década seguinte. (BOYER, 1996, p. 328-330).

Com issso, a idéia de que a geometria é algo único começa a mudar. Conceitos como os de coordenada, comprimento, paralelismo e distância; o hábito de considerar o ponto como o elemento fundamental de toda a geometria; a geometria vista como a arte de medição, tudo isso mostra ser capaz de uma generalização ou de uma necessidade de revisão crítica. Desfeito o conceito de unidade em geometria, há uma rica produção de "geometrias" determinadas somente por seus atributos: não euclidiana, n-dimensional, plana, projetiva e assim por diante. (WUSSING, 1984, p. 26). Havia uma preocupação

seus cursos, que se constituíram mais tarde nas suas principais obras: *Leçons de géométrie descriptive* de 1794-1795 e *Feuilles d'analyse* de 1795. (BOYER, 1996). A primeira obra surgiu do assunto chamado estereotomia ensinado por Monge nos cursos universitários. Neste assunto, além do estudo da sombra, perspectiva e topografia, era dada atenção a propriedades de superfícies incluindo retas normais e planos tangentes.

[31]Os fatos dos estudos sobre perspectiva surgiram e foram desenvolvidos com artistas e arquitetos do Renascimento. O matemático G. Desargues (1593-1662), em 1636, aplicou pela primeira vez os métodos de coordenadas para a construção de perspectivas e a correspondente origem da projeção axionométrica. Monge em sua obra sistematiza a transformação de figuras no espaço sob a ação de projeções ortogonais sobre planos coordenados cartesianos. (RÍBNIKOV, 1987)

[32]A geometria diferencial começou no século XVIII como resultado de aplicações geométricas da análise infinitesimal. Desde a época de Leibniz e Newton o cálculo diferencial vinha sendo aplicado ao estudo das curvas em duas dimensões, que em certo sentido se constituiu o protótipo da geometrial diferencial, mas o seu estabelecimento ocorreu somente em 1827 com Gauss por meio de sua obra *Disquisitions circa superfícies curvas*. (BOYER, 1996). Em termos genéricos, diferentemente das outras geometrias que estuda as figuras em sua totalidade, a geometria diferencial tem como objeto de estudo as propriedades de uma curva ou uma superfície numa vizinhança imediata de um de seus pontos.

dos matemáticos com o surgimento desordenado de diversas geometrias.

Em 1872, é levantado por Klein[33] um aspecto para a classificação das geometrias, que "profundamente impressionado com as possibilidades unificadoras do conceito de grupo", através dos estudos realizados por Jordan com os grupos de permutações, tinha como meta a "unificação dos aspectos discreto e contínuo da Matemática", segundo essa noção. Por isso, passou "boa parte do resto de sua vida desenvolvendo, aplicando e popularizando" o conceito de grupo. (MIORIM, 1998, p. 65). Combinando o desenvolvimento alcançado pelas geometrias não-euclidianas e pela geometria projetiva com a teoria dos invariantes e a teoria dos grupos, expõe a idéia de classificar as diferentes geometrias segundo o caráter do conteúdo dos seus teoremas independentemente dos métodos utilizados para prová-los. Segundo a sua proposta, para a construção de uma geometria é necessário dar: uma variedade de elementos; um grupo de transformações que dê a possibilidade de aplicar os elementos de uma variedade dada em uma outra (RÍBNIKOV, 1987, p. 443-445). Aqui a geometria estaria definida por meio de um grupo de transformações no seguinte sentido: associada a um dado grupo de transformações está um conjunto de teoremas que expressam propriedades que não mudam sob a ação de qualquer transformação do grupo. O corpo de teoremas que trata destas propriedades constitui a geometria associada a este grupo de transformações. Assim, a geometria[34] deveria estudar as relações dos elementos que são invariantes sob a ação das transformações do grupo dado.

Entre os estudiosos da metade do século XIX, o problema das conexões internas entre as diferentes geometrias e os métodos geométricos produz muita perplexidade. Seus esforços em resolver o caos existente e superar a crescente desordem fornecem um significativo incentivo para o desenvolvimento da matemática como um todo e, em particular, dos futuros métodos em termos de grupo-teorético. A proposta de Klein torna-se fundamental para o desenvolvimento do conceito de grupo-teorético, uma vez que a teoria dos

[33]Klein, em sua aula inaugural na Universidade de Erlangen na Alemanha, apresenta suas idéias sob o título característico de *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* comumente conhecido como Erlangen Program - 1872.

[34]Com a proposta de Klein a geometria euclidiana da reta, do plano, do espaço,... é o conjunto das propriedades das figuras que ficam invariantes sob o grupo das isometrias; a geometria afin é o conjunto das propriedades das figuras geométricas do espaço arguesiano, que são invariantes pelas transformções afins; a geometria projetiva da reta ou do plano é o conjunto das propriedades invariantes sobre o grupo das transformações projetivas,...

grupos fornece a ferramenta decisiva como um princípio ordenador da geometria. Isto é, ao mesmo tempo, causa e conseqüência da transição do conceito de grupo de permutações para um conceito de grupo mais abrangente, o conceito de um grupo de transformações.

O processo de elaboração e aperfeiçoamento do Erlangen Program[35] é lento e extenso.

Certos aspectos da evolução da geometria são notáveis como pontos de partida para os modos de pensamento do implícito grupo-teorético da geometria. Os pontos mais importantes destes aspectos são:

1. A extensão do conceito de coordenada além do tradicional conceito de coordenadas paralelas (cartesianas);

2. A eliminação da aparente ligação indissolúvel entre geometria e métrica, e o relativo crescimento da conexão entre geometria projetiva[36] e geometria métrica;

3. O desenvolvimento de geometrias não-euclidianas;

4. A volta em direção à abstração devido à introdução de um número arbitrariamente grande (finito) de dimensões. (WUSSING, 1984, p. 26)

Estes quatro aspectos, a elaboração e o aperfeiçoamento do Erlangem Program estão muito interligados que fica difícil discutí-los separadamente. Além disso, uma discussão de forma detalhada de todos eles estaria além do objetivo mais imediato deste trabalho. Por isso faço uma abordagem dos mesmos de uma forma mais geral e sem uma separação explícita. Vale salientar que estes desenvolvimentos nem sempre serviram como suporte

[35]A produção vinculada às investigações de Klein está inserida na obra *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Vol.1, 2 e 3 publicados em 1921, 1922 e 1923, respectivamente, nos quais estão incluídos 47 artigos, além de sua autobiografia, algumas notas históricas e uma seleção dos seis trabalhos que serviram de suporte para a classificação da geometria apresentada no Erlangen Program - 1872. E mais, a obra *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen*, Vol. 1 e 2 publicados em 1890 e 1892 respectivamente; *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik*, Vol. 1 e 2 publicados em 1926 e 1927 respectivamente; *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auuflösung der Gleichungen vom fünften Grade* (1884); *Höhere Geometrie* (Lecture notes) (1893); *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie* (1928). (WUSSING, 1984)

[36]O aperfeiçoamento e a elaboração de diferentes métodos de projeção constituíram o conteúdo fundamental dos estudos na geometria projetiva. As obras *Bosquejo del camino hacia los fenômenos que ocurren durante el encuentro de um cono com um plano* (1639) de Desargues e *Experiencia sobre las secciones cônicas* (1640) de B. Pascal (1623-1662) foram fundamentais na constiuição do conteúdo da geometria projetiva. No entanto, a sua construção teórica e formalização ocorreu somente com a obra *Traité des propriétés des figures* (1822) do geômetra francês J.-V. Poncelet (1788-1867) inspirado nas obras *De la corrélation des figures de géométrie* (1801) e *Géométrie de position* (1803) de L.N.M.Carnot (1753-1823). (BOYER, 1996).

direto para a formação do conceito de grupo.

Durante o começo do século XIX, muitos geômetras percebem que a geometria analítica está sobrecarregada por muitos cálculos algébricos incômodos e, por isso, começam a abreviar drasticamente as notações. Este fato repercute diretamente no conceito de coordenada que está fortemente associado aos procedimentos algébricos. O tal conceito, que foi importantíssimo para a introdução dos grupos de transformações, naturalmente se torna objeto de investigação e conseqüentemente surge a necessidade de sua ampliação.

As principais contribuições para a ampliação deste conceito vêm dos alemães A. F. Möbius[37] (1790-1868) e J. Plücker[38] (1801-1868).

Möbius dá uma significativa contribuição para reorganizar o conceito de coordenada da época, introduzindo o que se chama de coordenadas baricêntricas[39], Plücker traz uma visão geral de pontos coordenados, formula suas coordenadas "triangular" e "tetraédrica", que são, essencialmente, idênticas às coordenadas baricêntricas de Möbius. Ambos preparam a base para o uso geral de coordenadas homogêneas, que teve aceitação universal através de O. Hesse (1811-1874), responsável por um elegante aparato formal associado ao seu uso. A ligação entre a ampla visão do conceito de coordenada e a transição para coordenadas homogêneas teve um importante papel na controvérsia entre/sobre a geometria analítica e a geometria sintética e assegurou um eventual triunfo da abordagem analítica nos anos 60 e 70 do século XIX.

Como conseqüência da geometria descritiva desenvolvida por Monge, no início do século XIX, era comum a distinção entre as propriedades métrica e descritiva (de incidência) das figuras invariantes sobre projeções ortogonais. Esta distinção e as idéias a ela pertinentes foram inspiradas nas duas obras de L.N.M.Carnot (1753-1823), e, principal-

[37] As investigações de Möbius sobre este tópico é encontrada na obra conhecida por *Der barycentrische Calcul*, (1827). Outra obra que traz investigações discutidas aqui é *Gesammelte Werke* (Vol.1, 1885; Vol. 2, 1886; Vol.3, 1886; Vol.4, 1887). (WUSSING, 1984)

[38] Plücker desenvolve seus trabalhos em *Ueber ein neuues Coordinatensystem* (1829); *System der analytischen Geometrie* (1835); *System der Geometrie des Raumes* (1846); *Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement* (vol.1,1864), entre outros. (WUSSING, 1984)

[39] As coordenadas baricêntricas entram na matemática através de Plücker, pois, sua versão de coordenadas era determinada por ferramentas matemáticas, diferentes das de Möbius que estavam marcadas por motivações e definições derivadas da mecânica. (WUSSING, 1984).

mente, na obra de Poncelet (1788-1867), pois ambos tinham estudado com Monge. Poncelet em 1822, sinteticamente, tinha como problema central à investigação das diferenças entre propriedade métrica e de incidência sobre uma projeção central. Isto lhe possibilita a estabelecer a distinção entre as propriedades das figuras que são ou não preservadas por projeções centrais, assim como propriedades que são invariantes por outras projeções.

Esta abordagem de Poncelet e um tratamento analítico das figuras geométricas, ou seja, a mudança de uma projeção sintética para o estudo analítico de transformações coordenadas com o objetivo de encontrar seus invariantes, trouxe a possibilidade de aplicar a teoria dos invariantes, enraizada na teoria dos números, para a classificação de objetos geométricos. Isto traz dois aspectos que foram intensamente estudados e nos quais se encontram sinais do pensamento de grupo-teorético, a saber, as relações geométricas[40] e a teoria dos invariantes.

O estudo das relações geométricas começa na primeira metade do século XIX e, em parte, é resultado do esforço de encontrar a conexão interna entre as várias geometrias, tornando-se uma importante ferramenta na geometria para o desenvolvimento de grupo-teorético. As relações entre figuras geométricas são muito enfatizadas pelas geometrias descritiva e projetiva. Carnot, em 1803, dizia que duas figuras geométricas conectadas por uma projeção estavam ligadas por um corpo de propriedades. Com o tempo, a atenção foi sendo desviada do corpo de propriedades para as transformações entre as figuras e que implicam em particulares relações entre elas. Isto era uma forma reconhecível do princípio de continuidade[41] de Poncelet, que estabelece posições equivalentes para duas figuras conectadas por uma transformação contínua, incluindo neste caso projeções centrais.

Möbius, em 1827, formula o problema das relações geométricas na linguagem do tradicional modo de pensamento geométrico; lista e define as relações geométricas de congruência, similaridade (semelhança), afinidade e colineações e explicita suas conexões mútuas. O estudo das relações geométricas torna-se associado ao estudo das transformações que fazem a ligação entre as figuras e, entre 1830 e 1870, as transformações surgem como

[40] A expressão relações geométricas refere-se às relações entre figuras geométricas correspondentes obtidas através de um estudo analítico de suas propriedades.

[41] O princípio de continuidade garante que as propriedades métricas descobertas para uma figura primitiva permanecem aplicáveis, sem modificações além de mudança de sinal, a todas as figuras que podem ser consideradas como provindo da primeira. (BOYER, 1996, p. 370)

objeto de investigações especializadas e amplamente independentes, conduzindo para as teorias das transformações circulares, transformações esféricas, inversões, transformações afins, incidência etc. e as conexões entre elas e, de certa forma, conduzindo, também, para a teoria dos invariantes. Estas investigações conduzem para a classificação das transformações e para a síntese do grupo-teorético da geometria. (WUSSING, 1984, p. 35-36)

Entre 1885 e 1887 Klein prepara uma coletânea dos trabalhos de Möbius para publicação. Ele capta a conexão interna da vigorosa tentativa de Möbius em explicar o mistério conceitual da geometria, e encontra nela o modelo da sua proposta só que usando explicitamente as requeridas ferramentas do grupo-teorético.

O desenvolvimento da geometria n-dimensional também dá um impulso essencial ao esforço para classificação das geometrias por meio do grupo-teorético. Este desenvolvimento não é imediato, há obstáculos para a aceitação universal da geometria multidimensional. Um deles é o hábito do pensamento geométrico tri-dimensional. Uma fonte importante neste desenvolvimento é o trabalho de Lagrange, Jacobi, Gauss, entre outros, que consideram espontaneamente superfícies n-dimensionais e estabelecem uma estreita conexão entre matemática e física. Com os problemas, principalmente, na mecânica e eletromagnetismo, estes são forçados a considerar simultaneamente duas magnitudes físicas. Isto conduz para o estudo com vetor e o cálculo dos quatérnios por W. R. Hamilton[42] (1805-1865).

O trabalho de Cayley[43] na teoria dos invariantes traz um importante estímulo para o desenvolvimento desta área nos anos 80 do século XIX, influencia profundamente o desenvolvimento da álgebra avançada e se torna o estágio preliminar na preparação do Erlangen Program para ordenação da geometria.

Durante séculos, o conjunto de axiomas de Euclides foi objeto de estudos intensivos,

[42]Após a publicação das palestras de Hamilton em *Lectures of Quaternions* (1853), os Quatérnios se tornam um tópico de extremo interesse na Inglaterra. Em 1866, Hamilton publica *Elements of Quaternions*. (WUSSING, 1984). Boyer (1996) diz que, assim como Lobachewsky criara uma nova geometria abandonando o postulado das paralelas, Hamilton cria uma nova álgebra abandonando o postulado da comutatividade da multiplicação. Hamilton considerava muito importante a descoberta dos quatérnios, não tanto pelo particular tipo de álgebra que era significativo, mas pela descoberta da liberdade de construir álgebras que não precisam satisfazer às restrições impostas pela ditas "leis fundamentais" que eram invocadas sem exceção. (BOYER, 1996, p. 405).

[43]Os trabalhos de Cayley estão apresentados em *The Collected Mathematical Papers*- Vol. 1 e Vol. 2 (1889), Vol. 4 (1891), Vol. 8 (1895), Vol. 10 (1896). (WUSSING, 1984).

em especial, o famoso postulado das paralelas. A discussão de que o postulado das paralelas é conseqüência dos outros, conduz a descoberta de um número de seus equivalentes alternativos e ao surgimento de outras geometrias. Há nos anos 1820-1830, o descobrimento pelo russo N. I. Lobachevsky (1793-1856), pelo húngaro J. Bolyai (1802-1860) e dos eixos fundamentais da primeira geometria não-euclidiana por Gauss.

Logo após esse período, começa um debate científico sobre a recém surgida geometria não-euclidiana e sobre o significado de espaço, espaço físico, espaço geométrico, espaço abstrato etc. que Wussing (1984) denominou de "problema epistemológico do espaço"[44]. O desenvolvimento das várias geometrias acontece, fundamentalmente, independente dessas especulações. Em 1854, Riemann teve um papel importantíssimo nessa discussão, ele apresenta geometrias não-euclidianas num sentido mais geral do que a de Lobachevsky. Em termos modernos, ele propunha uma visão global da geometria como um estudo de variedades de qualquer número de dimensões em qualquer tipo de espaço. Nos seus estudos geométrico-diferenciais da intrínseca geometria de superfícies (no espaço n-dimensional), Riemann introduz o elemento distância/métrica como uma forma quadrática diferencial. Esta formulação inclui a métrica euclidiana ordinária e aponta para a existência das duas geometrias não-euclidianas conhecidas na terminologia de Klein como hiperbólica e elíptica. Com a finalidade de separar a geometria da física, Riemann usa o termo "espaço" para denotar o espaço físico e o termo "superfície" para denotar o espaço geométrico. Assim, na terminologia de Riemann o problema epistemológico é determinar a natureza do espaço como uma superfície. Esta separação estabelecida por Riemann traz uma base epistemológica para a classificação das geometrias e elaboração do Erlangen Program -1872.

Klein, entre 1866 e 1868, enquanto é assistente de Plücker, inteira-se do estado geral das questões na geometria, fica perfeitamente ciente da divergência das diferentes direções de desenvolvimento da geometria. Com a ajuda de A. Clebsch (1833-1872) se familiariza com a teoria dos invariantes e com os invariantes das formas quadráticas binárias e, com a concepção invariante-teorética da geometria, obtêm os meios "para organizar através de

[44]Além de alguns matemáticos já citados, participam da discussão sobre o problema epistemológico do espaço a filosofia kantiana, a Universidade de Charkov e a Universidade de Kazan onde Lobachevsky ensina. (WUSSING, 1984)

uma concepção total unificada" os contrastes entre as várias direções das investigações em curso.

A teoria dos invariantes é uma das raízes intelectuais do Erlangen Program de 1872 como uma transição histórica para a classificação grupo-teorético na geometria, tanto no sentido objetivo da mudança na concepção geral dos matemáticos do problema da geometria, como no sentido subjetivo da mudança progressiva da visão do próprio Klein sobre a geometria. O programa de 1872 é o elemento-chave para a consumação da transição da concepção invariante-teorética do problema da geometria para um pensamento implícito grupo-teorético e, daí, para uma aplicação e manipulação explícita do pensamento em termos de grupos (WUSSING, 1984, p. 178)

No final dos anos 60, Klein e Lie começam a trabalhar juntos, depois, por causa dos diferentes interesses no conteúdo das investigações, tomam, em um certo sentido, rumos diferentes em suas pesquisas. Os trabalhos realizados conjuntamente estão refletidos na elaboração do Erlangen Program - 1872.

Inicialmente, Klein e Lie, apoiam-se numa suposição cinemática que se torna o princípio subjacente ao problema que objetivavam. Os autores se referem explicitamente a um livro texto de Cinemática e enfatizam:

> Faremos uso consistente de um argumento geométrico bem conhecido que queremos expor com toda clareza logo no início do nosso artigo. Esse argumento é usado na investigação de todos os objetos geométricos para os quais conhecemos as transformações que levam esses objetos neles mesmos. O argumento em questão, pode ser resumido no teorema que afirma que qualquer outro objeto geométrico relacionado com o objeto original por uma relação que não seja destruída pelas transformações associadas, transformam-se por estas transformações em objetos geométricos que se mantém na mesma relação com o objeto original. (KLEIN, 1921 *apud* WUSSING, 1984, p.183, tradução minha)

Eles explicam a importância deste princípio e mostram sua conexão com a questão das curvas e afirmam que o objetivo do trabalho é achar: "as curvas planas que são transformadas nelas mesmas por um sistema fechado simplesmente infinito de transformações comutáveis". (KLEIN, 1921 *apud* WUSSING, 1984, p. 184, tradução minha)

A expressão "simplesmente infinito", em termos modernos se refere a uma superfície contínua de dimensão um, o significado da expressão sistema fechado é explicado por eles assim:

> Duas transformações arbitrárias aplicadas em sucessão, em qualquer ordem, produzem a mesma nova transformação. Esta nova transformação é na verdade uma transformação do sistema. Na perspectiva da primeira propriedade, as transformações do sistema são ditas comutativas. Na perspectiva da segunda propriedade, o sistema é dito fechado. (KLEIN, 1921 *apud* WUSSING, 1984, p.183, tradução minha)

Eles dizem que, no caso de uma classe de transformações de um sistema simplesmente infinito, a primeira propriedade segue necessariamente a partir da segunda. A palavra "grupo" aparece pela primeira vez no trabalho de Klein e Lie: "assim a expressão 'um sistema fechado de transformações' corresponde exatamente ao que é designado na teoria da substituição como um 'grupo de substituições'." (KLEIN, 1921 *apud* WUSSING, 1984, p.185, tradução minha). Este depois é chamado de 'grupo de transformações'.

Eles deixam claro seu conceito de superfície n-dimensional - que consiste de todas as n-uplas de números complexos - e define uma transformação da superfície como sendo a transição de cada elemento a um elemento associado (ou elementos). Quanto à natureza das transformações ele diz ser irrelevante, mas afirma que, em muitos casos, são dadas por equações de transformações algébricas, que as equações correspondentes às transformações são irreversíveis, e que

> Equações invertidas representam o que será chamado de transformação inversa. Se designarmos uma transformação por uma letra tal como $A, B, ...$, e a composição de duas transformações A, B pelo símbolo (produto) AB, então o inverso de A será A^{-1} ... Agora dada uma seqüência de transformações $A, B, C, ...$, se esta sequência tem a propriedade que a composta de quaisquer duas de suas transformações produz uma transformação que novamente pertence à sequência, então a última será chamada de um grupo de transformações. (KLEIN, 1921 *apud* WUSSING, 1984, p.185, tradução minha)

Klein e Lie enfatizam que a expressão "grupo de transformações" vem da teoria das permutações e mencionam que o que aqui é chamado de grupo de transformações tinha, previamente, sido denominado de "um sistema fechado de transformações".

A definição de Klein de um grupo é equivalente à definição de Jordan no *Traité*. Ambos assumem o fechamento do conjunto com respeito à operação. Quando assumem (Klein e Jordan) a invertibilidade das equações de transformações e das permutações, respectivamente, ambos assumem o conjunto fechado com respeito à operação, só que no caso de Klein o grupo não é finito.

Klein e Lie fazem referência ao livro texto de Serret e ao *Traité* de Jordan e observam que há uma grande diferença entre estes autores e eles próprios no sentido de que os primeiros trabalham com "quantidades discretamente variáveis", enquanto eles usam "quantidades continuamente variáveis". Assim, percebem que suas investigações iniciam uma extensão do conceito de grupo de permutação-teorética.

Em 1871-72, Klein chama grupos similares o que Jordan chama grupos isomórficos. Sem provar, Klein afirma em um teorema (verdadeiro sob certa restrição), que cada um dos dois grupos similares um é obtido a partir do outro pelo uso de uma transformação auxiliar. Como forma de exemplo, Klein afirma que se obtém grupos similares associando-se cada transformação A de um grupo às transformações $C^{-1}AC$ do outro grupo, para as diferentes transformações C. Ele interpreta grupos similares como sendo grupos que "surgem de um outro pela aplicação de uma transformação C". (KLEIN, 1921 *apud* WUSSING, 1984, pp. 186-187) Klein então introduz o novo conceito de grupo principal:

> A Geometria não pode... ocupar-se com quaisquer propriedades de objetos geométricos no espaço exceto aquelas que são independentes da posição no espaço ocupado por estes objetos e da sua magnitude absoluta. Tampouco pode ela (sempre sem o auxílio de um terceiro corpo) diferenciar entre as propriedades de um objeto e aquelas da sua imagem simétrica. Estas sentenças caracterizam um grupo de transformações do espaço - chamá-lo-emos de grupo principal (Hauptgruppe) - cujas transformações preservam a totalidade das propriedades geométricas de um objeto. Este grupo consiste do 6-ply coleções infinitas de movimentos, de uma coleção infinita de transformações de similaridade, e a transformação de reflexão em um plano. (KLEIN, 1873 *apud* WUSSING, 1984, p. 187, tradução minha)

Klein afirma que quanto maior o grupo menor o número de propriedades preservadas de um objeto geométrico no espaço. A diferença entre os "métodos usuais de geometria" pode ser relacionada "pela natureza dos grupos de transformações adicionados no processo de estudo". Os diferentes métodos de geometria são caracterizados pelo grupo de transformações associado e expressam a idéia central de Klein. O conceito de grupo passa a ser a varinha mágica para ordenar a geometria, de modo que para cada "geometria" existe um definido grupo de transformações: "a essência dos diferentes métodos geométricos desenvolvidos nos tempos modernos consiste na introdução de tais grupos mais gerais no lugar do grupo principal". (KLEIN, 1873 *apud* WUSSING, 1984, p. 188, tradução minha)

Klein achava que cada grupo de transformações tinha que conter o grupo principal. O grupo para o qual ele imediatamente se voltou foi o grupo de todas as colineações, incluindo as colineações complexas que ele afirma ser o grupo "associado" à geometria projetiva.

É feita a diferença entre "espaço" e "variedade", e entre "imagem física" e "forma abstrata". Para ele o estudo das variedades é uma generalização da geometria, o espaço é apenas uma variedade estendida. Segundo as palavras de Klein,

> Descartamos a imagem física do espaço, pois não é matematicamente essencial, e vemos no espaço apenas uma variedade estendida; mais especificamente, de acordo com a representação usual de um ponto como elemento do espaço, vemos uma variedade estendida tridimensional. Seguindo a analogia com transformações do espaço falamos de transformações de uma variedade. Elas também formam grupos. Entretanto, em contraste com o grupo das transformações do espaço, nenhum grupo é diferenciado por sua importância; todos eles possuem o mesmo valor. Deste modo, o seguinte programa abrangente surge como uma generalização da geometria: Dada uma variedade e nela um grupo de transformações, investigar os objetos geométricos pertencentes à variedade quanto às propriedades que permanecem inalteradas pelas transformações do grupo. (KLEIN, 1873 *apud* WUSSING, 1984, p. 189, tradução minha)

No texto do Erlangen Program, Klein explica o método de investigação a ser adotado para resolver o problema de determinar os elementos geométricos pertencentes à variedade cujas propriedades ficam inalteradas sob a ação das transformações do grupo associado à variedade. Em outras palavras, ele relata como encontrar os elementos constituintes da geometria associada a um grupo.

Wussing (1984) comenta que, entre 1866 e 1872, graças aos esforços conjuntos de Klein e Lie, que culmina com a elaboração do Erlangen Program, o conceito de grupo de transformações foi elaborado com muita precisão permanecendo, entretanto, no que pode se chamar de estado natural, numa certa extensão como resultado de uma tentativa evidente de exprimir a teoria dos grupos aplicável na forma dada pela teoria dos grupos de permutações, estendendo o escopo do conceito de grupo.

Klein e Lie usam o pensamento grupo-teorético e os grupos de permutações com o propósito de resolver o problema de classificação das geometrias e, com isso, elaboram completamente os grupos de transformações. No entanto, a noção de transformação foi por eles aplicada sem se ter consciência do seu significado nem de seu alcance.

Por um lado, do ponto de vista epistemológico, os escritos preparatórios e o programa em si contribuíram grandiosamente para clarear as sérias dificuldades filosóficas que afetam cientistas e matemáticos daquela época. Por outro lado, existia o pensamento grupo-teorético inerente a solução das equações algébricas que foi impresso em todo o sistema de pensamento geométrico e depois modificado para uma classificação explicitamente grupo-teorética na geometria.

Do ponto de vista do próprio desenvolvimento do coneito, por um lado, o programa contribuiu para a formulação do conceito de grupo como um grupo de transformações promovendo a sua ampliação, mas, por outro, graças ao seu longo período de aperfeiçoamento trouxe uma mudança na maneira de apresentar um grupo e nas suas definições, isto, de certa forma, retardou a sua formalização. "Logicamente e historicamente existe uma diferença entre o uso do raciocínio grupo-teorético na geometria e o uso de movimentos ou transformações como elementos do grupo. Esta distinção é crucial, levando-se em conta o desenvolvimento que conduz ao conceito de grupo abstrato". (WUSSING, 1984, p. 194). Neste sentido, o Erlangen Program de 1872 representa uma genuína quebra ou desvio na história da ascensão e desenvolvimento da teoria dos grupos.

Klein e Jordan são levados a idéia de associar à matemática a concepção de movimento geométrico como um estudo dos grupos de movimentos. Isto se refletiu em seus trabalhos cujo desenvolvimento motivou a extensão do conceito de grupo de permutações-teorético para o conceito de um grupo de transformações. Emerge então, um pensamento movimento-teorético que consiste na identificação do movimento geométrico com o movimento físico que, historicamente, possibilitam o aperfeiçoamento do conceito de um grupo de transformações e a classificação de tais grupos.

Desde a Revolução Industrial no final do século XVIII até a metade do século XIX, as atividades de muitos matemáticos levam ao desenvolvimento de aspectos essencialmente novos da conexão entre a matemática e as ciências naturais em geral e a física em particular. Com isso, de acordo com Wussing (1984), na física matemática desta época, a transformação coordenada foi conscientemente usada apenas para uma reflexão matemática do real movimento físico-mecânico. Como conseqüência surge um ramo de pesquisa que visa o estudo da geometria do espaço físico através da "descrição dos seus movimentos por meios de transformações de pontos, nos quais os pontos representam pontos materiais e estão sujeitos à condições analíticas conectadas com o tratamento de um corpo físico como um sistema de pontos". (p. 194)

H. Helmholtz (1821-1894) também estava envolvido com o estudo dos movimentos. Dois de seus trabalhos, no período entre 1866 e 1870, são uma tentativa de axiomatizar a geometria. Em 1866 ele introduz "movimento" na qualidade de conceito fundamental da geometria e avança o ponto de vista que objetiva entender a geometria do espaço físico através do movimento. Sua hipótese básica é a de que a geometria é a estrutura do espaço físico e como tal pode ser descrita e deve ser definida em termos dos possíveis movimentos dos corpos físicos. Nas palavras de Helmholtz:

> Minha hipótese inicial foi que todas as medidas originais no espaço baseiam-se na verificação de congruência, portanto, o sistema de medição do espaço deve assumir condições sob as quais a única coisa que possamos falar é a verificação da congruência. (HELMHOLTZ, 1866 *apud* WUSSING, 1984, p. 195, tradução minha)

A possibilidade de constatar a congruência está ligada à hipótese de mobilidade dos corpos e é tratada em quatro grupos de axiomas no que diz respeito: à continuidade e dimensionalidade do espaço, à existência de corpos rígidos móveis, mobilidade livre e à independência da forma dos corpos rígidos sob rotação.

A visão de que os movimentos que levam à congruência de dois objetos geométricos têm um papel distinto e são realizados/percebidos analiticamente como isometrias por meio de transformações de ponto, e o pensamento grupo-teorético de que movimentos formam grupos abrem o caminho para a formulação do conceito de grupo de transformações.

Após o trabalho de Helmholtz de 1866, Jordan, em 1868-69, também influenciado pelo desenvolvimento contemporâneo da cristalografia faz uma ampla classificação de grupos de movimentos na geometria. Ele investiga os movimentos fisicamente possíveis de um corpo rígido. Movimentos que podem ser obtidos pela composição de translações e rotações, deixando de fora as reflexões, deformações e as transformações coordenadas que não podem ser mecanicamente percebidas no caso de corpos rígidos.

A introdução dos grupos de movimentos na geometria e seus geradores introduzidos pelo trabalho de Jordan produzem o avanço encontrado no trabalho de Klein sobre grupos de isometrias de poliedros regulares[45]. Tal avanço permite-lhe não só aplicar os princí-

[45]Um poliedro é um sólido cuja superfície consiste em um certo número de faces poligonais. No caso dos sólidos regulares, todos os polígonos são congruentes e todos os ângulos nos vértices são iguais. Um poliedro será simples se nele não houver "buracos", de modo que sua superfície possa ser deformada continuamente na superfície de uma esfera. (COURANT e ROBBINS, 2000, p.286-287).

pios fundamentais da teoria das permutações à geometria, mas também trabalhar com o conceito de um grupo discreto de transformações. O reconhecimento e a clarificação do potencial desse conceito coloca a geometria, a álgebra e a teoria de conjuntos de funções em um desenvolvimento de longo alcance.

Klein percebe que a geometria euclidiana e a geometria de Lobachewsky têm grupos de movimentos diferentes. Em termos gerais, pode-se dizer que a geometria do espaço se caracteriza pelas propriedades dos grupos de movimentos deste espaço e, o movimento é precisamente aquela transformação que permite comparar figuras com propriedades idênticas.

O tratamento grupo-teorético das simetrias do poliedro regular dado por Klein, demonstra a natureza mutante do conceito de grupo no contexto de uma outra classe de problemas. Ele, "apropriadamente, enfatiza uma visão de isomorfismo de certos grupos de permutações e certos grupos de simetria de poliedro regular - uma idéia que aponta em direção ao futuro conceito de grupo abstrato". (WUSSING, 1984, p. 198).

Já no Erlangen Program, Klein chama à atenção para a questão das conexões entre grupos e a teoria das equações e pede um estudo grupo-teorético dos corpos (figuras) regulares. Em direção ao tratamento analítico deste problema, ele sugere que os números complexos sejam representados no que agora chama-se de esfera de Riemann. Tal idéia provê, entre outras coisas, uma ligação com a teoria das formas.

Em 1871, Klein visualiza as n raízes de uma equação algébrica de grau n como elementos de um espaço de dimensão $n-2$. Para estudá-los analiticamente, ele substitui as permutações das n raízes por transformações lineares de um espaço contínuo. Klein descreve o método que ele aplicou da seguinte forma: "pr meio desta representação pode-se estabelecer uma conexão notável entre a teoria das equações de grau n e a teoria dos covariantes de n elementos de um espaço de $n-2$ dimensões, de modo que cada teoria pode ser vista como uma imagem da outra". (KLEIN, 1871 *apud* WUSSING, 1984, p. 199, tradução minha)

Em 1873, Klein percebe que há uma íntima conexão entre o icosaedro e a teoria das quínticas. Este exemplo promove a interpretação das equações em termos dos poliedros regulares e isto implica numa abordagem que deu proeminência aos grupos de isometrias. Neste sentido, a teoria das equações de grau cinco pode ser vista como inspiradora do desenvolvimento do conceito de um grupo de transformações.

Em 1875, Klein realiza um trabalho cuja característica técnica é o uso sistemático de coordenadas homogêneas. Seu principal resultado é a construção de todos os grupos finitos de transformações lineares fracionárias, termo usando por ele para referir-se ao que Serret chamou de transformação lineares. Ele afirma que, quando se quer determinar todos os grupos finitos de transformações lineares fracionárias, deve-se considerar apenas as transformações que se reproduzem após um número finito de vezes.

Em 1878-79, Klein volta sua atenção para as funções modulares elípticas e percebe que há uma forte relação entre o seu trabalho nessa área e o de R. Dedekind (1831-1916) de 1876, tanto no que se refere a seqüência de pensamento, como entre os resultados deste trabalho e alguns de seus próprios resultados, em particular, a construção de todos os grupos finitos de transformações lineares em uma variável e a interpretação função-teorética dos mapeamentos de cobertura dos poliedros regulares através da esfera de Riemann. A abordagem grupo-teorética desempenha um papel importante neste trabalho e nos subseqüentes sobre funções modulares, nos quais Klein está fortemente inclinado a prover uma base grupo-teorética para os resultados.

De acordo com Wussing (1984), para Klein esses sucessos têm um óbvio valor psicológico e o encorajam a seguir adiante. Com relação à teoria dos grupos, a crescente pesquisa matemática de ponta da época fornece provas do poder unificador do conceito de grupo, além disso, a abordagem grupo-teorética demonstra sua utilidade e sugere o problema geral de funções que, assim como as funções duplamente periódicas, são invariantes sob um grupo de transformações finito ou infinito de uma ou mais variáveis. Em 1884, Klein afirma o mesmo propósito assumido no final dos anos 60 junto com Lie: "considerar objetos geométricos ou analíticos que se transformam em si mesmos por grupos de mudanças/movimentos". (KLEIN, 1884 *apud* WUSSING, 1984, p. 211, tradução minha)

Em 1884, Klein apresenta uma investigação basicamente diferente de outras já realizadas sobre os poliedros regulares, fazendo um estudo sistemático dos seus grupos de isometrias. Para formular o estudo dos movimentos geométricos como um problema grupo-teorético, "Klein naturalmente baseia-se na bem desenvolvida teoria dos grupos de permutações". (WUSSING, 1984, p. 203)

Nesta obra de 1884, Klein acrescenta uma seção na qual ele define a ordem de um grupo finito, subgrupo, a conjugação de um elemento por outro, subgrupo normal, estabelece a conexão entre os grupos de isometrias e a teoria dos grupos de permutações e define também isomorfismo de grupos. Com relação ao isomorfismo, Klein vai muito além de Jordan no sentido de ter desenvolvido abstratamente a idéia da identidade dos grupos isomórficos, embora use a terminologia de Jordan:

> Dois grupos são ditos isomórficos se podemos estabelecer uma correspondência de suas operações S e S' tal que, se S_i corresponde a S_i' e S_k a S_k', então S_iS_k corresponde a $S_i'S_k'$. Se o isomorfismo for um-a-um, ele será chamado de holoédrico. Então os dois grupos são abstratamente idênticos e podem diferir apenas no significado das suas respectivas operações. Os subgrupos de um grupo correspondem aos subgrupos do outro e assim por diante. (KLEIN, 1884 *apud* WUSSING, 1984, p. 203, tradução minha)

Nota-se, nesta citação, que a palavra operação não tem o significado que tem hoje.

Klein apresenta o grupo constituído de n rotações cíclicas que surge quando uma esfera, circunscrita sobre um dos poliedros antes mencionados, é rotacionada sobre um eixo fixo através do centro da esfera, o grupo de rotações diedrais de ordem $2n$ aparece quando o diedro é um n-ágono regular, exibe o grupo de rotações tetraedrais, o grupo de rotações octaedrais e o grupo de rotações icosaedrais.

Para descobrir a inter-relação entre a teoria dos grupos, a teoria das formas e a solução da quíntica, Klein conta com os isomorfismos entre os grupos de transformações e os grupos de permutações. Já em conexão com um grupo de rotação cíclica de ordem n, ele ressalta a importância de se achar o isomorfismo dos grupos de isometrias e grupos de permutações. Aqui, no mais simples dos casos, ele usa os isomorfismos como uma essência das permutações cíclicas de n elementos numa ordem definida para se praticar o conceito de isomorfismo. Os bem conhecidos isomorfismos dos vários grupos de isometrias de poliedros regulares e dos grupos de permutações são descobertos e explicitamente formulados.

Wussing (1984) comenta que todos esses trabalhos têm pouco efeito na extensão e aprofundamento do novo conteúdo conceitual de um grupo, porque Klein e seus companheiros de trabalho haviam contado com os isomorfismos entre os grupos de isometrias e os grupos de permutações, ficando dentro do ambiente conceitual destes grupos. Todavia, ele, conscientemente, estabelece um vínculo com o desenvolvimento de grupo abstrato que foi tomando lugar no século XVIII.

A obra de Klein de 1884 contém o que hoje é conhecido por grupo de Klein, todavia ele não é apresentado por Wussing (1984).

Sobre o trabalho de Lie

Historicamente, a extensão natural do conteúdo conceitual dos grupos de permutações para aquela dos grupos de transformações, a princípio, completada no Erlangen Program, foi seguida pelo refinamento do conceito de um grupo de transformações nas diversas formas nas quais a idéia foi aplicada.

Tem-se na aplicação dos grupos discreto e contínuo de transformações, o poder intrínseco do método grupo-teorético. Na verdade, a clarificação do escopo total do conceito de um grupo de transformações provê o pano de fundo geral e a motivação para a emergência simultânea do conceito de um grupo abstrato, uma idéia que se torna um conceito chave da matemática. O reconhecimento do poder unificador da teoria dos grupos é promovido pelo reconhecimento da multiplicidade das suas possíveis e decisivas aplicações. Na aplicação da teoria dos grupos discretos, as duas principais áreas envolvidas são a teoria das equações, especialmente a teoria da equação quíntica e a teoria das funções automórficas[46].

Lie, diante as investigações dos grupos de movimentos de Klein e Jordan, escolhe ir na direção da íntima conexão entre a geometria e a teoria das equações diferenciais. Neste trabalho, ele segue Monge e Plücker. A preocupação geral de Lie é a mesma de Klein: a procura por invariantes geométricos ou analíticos sob a ação de um sistema fechado de transformações. O conceito geral de um grupo de transformações foi explicitamente introduzido por Lie.

[46]O termo funções automórficas para funções, especialmente, as de valor singular de uma variável, invariantes sob um grupo de transformações finito ou infinito foi sugerido por Klein somente em 1890.

Entre 1871 e 1874 e, especialmente, durante o inverno de 1873-74, Lie trabalha intensamente para desenvolver a teoria dos grupos de transformações estimulado pela multiplicidade de aplicações que ele visiona. Ele percebe que a teoria dos grupos de transformações é, sem dúvida, uma poderosa ferramenta na geometria e nas teorias das equações diferenciais parciais e ordinárias, e isto é enfatizado em todo o seu trabalho. Ele está decidido a desenvolver uma teoria auxiliar extensiva à teoria dos grupos de transformações. O principal motivo de Lie era desenvolver um estudo sistemático dos grupos de transformações e a sua resultante classificação.

No final de 1874, Lie publica o trabalho programático que tem relação direta com os grupos de transformações. Aqui ele define o grupo de transformações (contínuas) de parâmetro r, como segue:

> O conceito de um grupo de transformações, primeiramente desenvolvido na teoria dos números e teoria da substituição, tem sido recentemente aplicado nas investigações geométricas e analíticas gerais, respectivamente. Dizemos que um conjunto de transformações $x' = f_1(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_r)$ (os x são as variáveis originais, x' as novas variáveis e os α são parâmetros que supostamente variam continuamente) é um grupo de parâmetro r quando a composição de quaisquer duas transformações do conjunto produz uma transformação que pertence ao conjunto, ou seja, quando as equações $x_i' = f_i(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_r)$, $x_i'' = f_i(x_1, ..., x_n, \beta_1, ..., \beta_r)$, implicam que $x_i'' = f_i(x_1, ..., x_n, \gamma_1, ..., \gamma_r)$ em que γ denota as quantidades que dependem de α e β apenas. (LIE, 1924 *apud* WUSSING, 1984, p. 215-216, tradução minha)

Os resultados obtidos por Lie, no seu primeiro trabalho, envolvem uma única variável x. No caso dos grupos de parâmetro 1, há somente um tipo de grupo de transformações, a saber, a translação tipo $x' = x + a$. No caso de grupos de parâmetro 2, há também somente um tipo, a saber, o tipo $x' = yx + \delta$ de uma transformação linear obtida por uma combinação de uma translação com uma transformação de similaridade. O grupo de transformações de parâmetro 3 é representado pela totalidade das transformações lineares $x' = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$.

Para uma variável, não há grupos de transformações com mais de três parâmetros (independentes). Os resultados de Lie requerem apenas cálculos elementares. Ele os resume no seguinte teorema: "se um grupo de transformações em uma variável contém apenas um número finito de parâmetros, então este número não excede três. Tal grupo é similar ao grupo de todas as transformações lineares ou ao subgrupo daquele grupo". (LIE, 1924 *apud* WUSSING, 1984, p. 215, tradução minha)

Lie define dois grupos de transformações como "similares" se a forma analítica das transformações em um dos grupos puder ser mudada para a forma analítica das transformações do outro pela introdução de um sistema coordenado apropriado. Ao final do trabalho, seguindo os resultados relativamente diretos dos grupos de transformações em uma variável, Lie se volta para os grupos de transformações em duas variáveis "significativamente mais complicados" e faz referência aos seus resultados anteriores sobre transformações de contato em conexão com a teoria das equações diferenciais e o Erlangen Program - 1872.

No limiar de 1876, Lie começa a escrever uma série de trabalhos sobre a teoria dos grupos de transformações. De acordo com Wussing (1984), seu entusiasmo pelo poder unificador do conceito de grupo brilha através do seu estilo moderado. Isto fica claro nesse trecho da introdução do seu trabalho sobre a teoria dos grupos de transformações:

> Este é o primeiro de uma série proposta de trabalhos nos quais eu pretendo desenvolver uma nova teoria, a qual chamarei de teoria dos grupos de transformações. O leitor perceberá que as investigações relevantes passam por muitas disciplinas matemáticas, como a teoria das substituições, geometria e a teoria moderna da superfície [ou seja, a geometria n-dimensional (Wussing)] e, finalmente, a teoria das equações diferenciais. Até um certo ponto, essas investigações irão unificar estas disciplinas tão desconectadas. A importância e o escopo da nova teoria serão apresentados em futuros trabalhos. (LIE, 1924 *apud* WUSSING, 1984, p. 217, tradução minha)

Lie determina todos os grupos de transformações em uma variável ou, usando sua definição, todos os grupos de transformações de uma superfície uni-dimensional. Ele escreve: "todo grupo de transformação de uma superfície simplesmente estendida é semelhante a um grupo linear e assim contém, no máximo, três parâmetros". (LIE, 1924 *apud* WUSSING, 1984, p. 218, tradução minha)

No que se refere à definição de um grupo de transformações, ele afirma como segue: "a sucessão de duas transformações do conjunto (deve ser) equivalente a uma simples transformação nesse mesmo conjunto". (LIE, 1924 *apud* WUSSING, 1984, p. 218, tradução minha)

Nos demais trabalhos sobre a teoria dos grupos de transformações, ele trata dos teoremas gerais sobre os grupos de transformações de uma superfície estendida arbitrariamente, ou seja, grupos que dependem de n variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$, determina todos os grupos de uma superfície duplamente estendida e dá todas as transformações de contato em um plano. Nestes trabalhos a propriedade de grupo continua a ser o fechamento sob a composição de transformações, a existência de uma identidade de grupo de transformações e dos inversos é provada.

Em 1879, o tratamento dos grupos de transformações por meio de transformações infinitesimais torna-se um "método direto". Este método faz surgir o conceito de um "grupo contínuo" e a distinção entre grupos contínuos finitos e infinitos. Além dos grupos de transformações contínuos e descontínuos, há uma terceira categoria à qual pertence, por exemplo, os grupos de movimentos e reflexões do plano. Lie percebe esse fato e o menciona em conexão com sua divisão dos grupos de transformações. O ano de 1883 pode ser considerado como o ano em que a classificação dos grupos de transformações foi completada por Lie, grupos descontínuos haviam sido classificados antes por Klein. O desenvolvimento subsequente da teoria dos grupos de transformações não ocorre somente com a participação de Lie, o trabalho de outros matemáticos foi imprescindível.

Em colaboração com F. Engel (1861-1941), mais tarde, o editor dos seus trabalhos, Lie publica um material abrangente sobre a teoria dos grupos de transformações que ele havia desenvolvido como uma ferramenta para o tratamento das equações diferenciais. Em conexão com as equações diferenciais, Lie havia antes formulado uma analogia exata da teoria de Galois sobre as equações algébricas. Em uma carta escrita a Mayer, no início de 1874, Lie afirma

> Antes de Galois, a questão que existia na teoria das equações algébricas era: "é possível solucionar a equação por radicais, e como ela é resolvida?". Uma das questões que se pergunta depois de Galois é, "Qual o caminho mais simples para resolver a equação por radicais?"... Acredito que chegou o tempo para um avanço semelhante na teoria das equações diferenciais. (LIE, 1924 *apud* WUSSING, 1984, p. 222, tradução minha)

No final dos anos 70 e início dos 80, Lie persegue energicamente a difícil busca dentro da teoria dos grupos contínuos, por conceitos análogos às idéias da teoria dos grupos de permutações, que haviam provado ser relevante na teoria de Galois. A real formulação de uma "Teoria de Galois das equações diferenciais" não se deve a Lie, mas a E. Picard (1856-1952) entre 1883 e 1887 e E. Vessiot (1865-1952) com trabalho conclusivo em 1892.

O desenvolvimento promovido pela extensão do conceito de grupo de permutações para o de grupo de transformações inaugurada por Klein e Lie, contribui para a evolução do conceito de grupo e produz uma tremenda expansão das aplicações da teoria dos grupos. Lie desempenha um papel importante não somente na classificação dos grupos de transformações, como também na sua formulação axiomática.

Os trabalhos iniciais de Lie sobre a teoria dos grupos contínuos (finitos) datados de 1876-78 estabelecem, por meio de cálculos, a existência de (pelo menos) uma identidade de transformação e de (pelo menos) uma transformação inversa para uma dada transformação. Ele reconhece através do seu estudo dos grupos de transformações que a notória diferença entre grupos finitos e infinitos é que, no último caso, a existência de um inverso é uma das propriedades essenciais de grupo. A validade da aplicação da lei associativa não é mencionada. A partir de um ponto de vista abstrato, a definição de um grupo de permutações de Klein e de um grupo de transformações de Lie requeria como único axioma o de fechamento em relação à regra para combinar os elementos.

O desenvolvimento subseqüente da teoria dos grupos contínuos está associado ao nome de Poincaré e, acima de tudo, de E. Cartan (1869-1951), o mais importante seguidor de Lie. Entre 1893 e 1894 Cartan tem como objeto de investigação a "estrutura" dos grupos de transformações contínuos finitos. O fruto dos resultados da tal investigação são vários artigos seguidos pela famosa Tese de Paris de 1894, que contém uma análise exaustiva de questões abertas associadas à teoria contemporânea dos grupos finitos de transformações contínuas.

A evolução do conceito de um grupo contínuo finito para o de um grupo topológico está associada a um desenvolvimento extremamente frutífero do seu conteúdo. Em 1900, no Congresso Internacional de Matemáticos, em Paris, o prussiano D. Hilbert (1862-1943) em 1894-95 apresenta uma famosa conferência programática, cuja "Quinta Tese" propunha a investigação da necessidade das condições de diferenciabilidade associadas com a formulação do conceito de um grupo contínuo (finito) de transformações dada por Lie. Isto e a formulação conjunto-teorético do conceito de grupo abstrato facilitam o caminho para O. Schereier (1901-1929) estabelecer a teoria dos grupos topológicos[47] em

[47]Um grupo topológico é um conjunto munido de uma estrutura algébrica (grupo) e de um estrutura topológica (espaço topológico).(LLORENTE, 1975).

1925.

3.4 A formalização do conceito de grupo

Até aqui tem-se a descrição da idéia de grupo-teorético implícita na teoria dos números, o fundamental grupo de permutações inerente à teoria das equações algébricas e os grupos de transformações pertinentes à geometria, além das várias aplicações da teoria dos grupos e da utilização do implícito método grupo-teorético em diferentes situações. O resgate feito até agora já é suficiente para se perceber que o estágio final de um desenvolvimento histórico de um conhecimento científico e, especificamente, de um conceito não é algo previsível.

O processo final de formulação do conceito de grupo abstrato pelos matemáticos não foi imediato. Isto levanta duas questões importantes. A primeira delas está ligada às profundas mudanças que ocorreram na matemática e que coincidiram no tempo com o processo de abstração na teoria do grupo e deram a este processo um eventual apoio. Estes fatores agiram de duas formas, fornecendo ao desenvolvimento da teoria dos grupos tanto com um modelo metodológico como com um modelo de analogia. A segunda questão tem a ver com o fato histórico de que o conceito de grupo abstrato emergiu não de um ato único ou da criação de um único estudioso, mas foi o resultado de um processo de abstração não essencialmente lógicos em natureza, ao invés disso, representaram a extensão variável para a qual o processo de abstração foi concluído. Estes passos dependeram largamente do grau de discernimento do papel básico do conceito de grupo e são, conseqüentemente, uma função da interação histórica entre a própria abstração progressiva e o reconhecimento fundamental deste papel.

Para completar o relato histórico do desenvolvimento do conceito de grupo, falta descrever a formalização do conceito de grupo abstrato, um conceito genérico que engloba todos os casos específicos. Para tal formulação acontecer, os matemáticos precisavam, por um lado, abstraír-se das especificidades dos grupos até então conhecidos, e, por outro lado, abstrair destes mesmos grupos todos os axiomas válidos. Houve várias tentativas nesta direção.

Sobre a formulação de Cayley

Em 1849, Cayley[48] une suas idéias as de Cauchy sobre os grupos de permutações. Em 1854, além das investigações sobre a teoria dos invariantes, realiza pesquisas sobre a teoria dos gruposs e encaminha uma primeira formalização do conceito de grupo abstrato, que não é aceita, fazendo-o voltar em 1878 com o mesmo propósito.

Em 1854, quando a teoria das equações de Galois tinha começado a ser conhecida e os únicos grupos explicitados eram os grupos de permutações. Cayley, em contato com as posições abstratas de Boole, realiza investigações que, pela natureza abstrata de suas considerações, é fundamental para a concepção abstrata de um grupo como um sistema de definir relações. Ele introduz uma operação símbolo geral θ para um sistema de quantidades $x, y, ...$ do seguinte modo: escreve $\theta(x, y, ...) = (x', y', ...)$ onde $x', y', ...$ são funções arbitrárias de $x, y, ...$ cujo número não é necessariamente o mesmo que o de $x, y, ...$ e continua:

> Em particular, $x', y', ...$ podem representar uma permutação de $x, y, ...$, θ é neste caso o que é denominado de uma substituição; e se, ao invés de um conjunto $x, y, ...$, o operando for um uma única quantidade x, de forma que $\theta(x) = x' = fx$, θ é um símbolo funcional ordinário. Não é necessário (mesmo que isso pudesse ser feito) anexar nenhum significado a um símbolo tais como $\theta = \pm\phi$; ou para o símbolo θ, nem conseqüentemente a uma equação, tal como $\theta = 0$ ou $\theta = \pm\phi = 0$; porém, o símbolo 1 naturalmente denotará a operação que (tanto de forma geral ou em relação a um operando particular) deixa o operando inalterado, e a equação $\theta = \phi$ denotará que a operação θ é (tanto de forma geral ou em relação a um operando particular) equivalente a ϕ e, claro, $\theta = 1$ denotará semelhantemente a equivalência da operação θ com a operação 1. (CAYLEY, 1854 *apud* WUSSING, 1984, p. 231, tradução minha)

O símbolo $\theta\phi$ denota as "operações compostas". Ele diz que, em geral, $\theta\phi$ é diferente de $\phi\theta$, mas a associatividade é válida.

Cayley define grupo e introduz tabelas de grupos, como segue:

> Um conjunto de símbolos $1, \alpha, \beta, ...$ todos eles diferentes, e tais que o produto de dois quaisquer deles (não importa em que ordem) ou o produto de qualquer um por ele mesmo, pertence ao conjunto, é dito ser um grupo. Segue que se o grupo inteiro é multiplicado por qualquer um destes símbolos, tanto com um fator mais próximo ou mais distante o efeito é simplesmente reproduzir o grupo; ou o que é a mesma coisa, que se os símbolos do grupo são multiplicados conjuntamente tal como para formar uma tabela, assim: que, assim como bem cada linha e cada coluna da tabela conterá todos os símbolos $1, \alpha, \beta, ...,$

[48]Cayley escreve sobre a teoria dos grupos em: *Note on the Theory of Permutations* (1849); *On the Theory of Groups, as Depending on the Symbolic Equation* $\theta^n = 1$, 1^a e 2^a partes (1854); *A Theorem on Groups* (1878); *On the Theory of Groups* (1878).(WUSSING, 1984).

	1	α	β	$\cdots$
1	1	α	β	$\cdots$
α	α	α^2	$\beta\alpha$	$\cdots$
β	β	$\alpha\beta$	β^2	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

> também segue que o produto de qualquer número dos símbolos, com ou sem repetição, e em qualquer ordem, é um símbolo do grupo. (CAYLEY, 1854 *apud* WUSSING, 1984, p. 231, 232, tradução minha)

Seu trabalho com o conceito de grupo estende-se a cálculos particulares com matrizes e a teoria dos quatérnios de Hamilton. Em 1878, por causa do crescente reconhecimento da importância da teoria dos grupos, Cayley retorna as suas investigações sobre este tópico e usa "funções símbolos", cada símbolo opera sobre um mesmo número de letras, produzindo como resultado o mesmo número de funções dessas letras. Ele diz que estas operações podem ser reiteradas e compostas, geralmente, não comutativas, sempre associativas e incluem uma identidade, isto é, uma função símbolo que mantém as letras fixas. Desta vez, ele traz uma visão generalizada dos grupos de permutações e uma abordagem mais abstrata de grupo, ele afirma que as funções símbolos podem ser substituições e considera as funções símbolos como os elementos do grupo: "um conjunto de símbolos $\alpha, \beta, \gamma, ...$, tais que o produto $\alpha\beta$ de cada dois deles (em cada ordem, $\alpha\beta$ ou $\beta\alpha$) é um símbolo do conjunto, é um grupo... Um grupo é definido por meio de leis de combinação dos seus símbolos". (CAYLEY, 1878 *apud* WUSSING, 1984, p. 233, tradução minha).

Cayley, então, volta-se para o problema de construir todos os grupos finitos de uma determinada ordem n e vê uma saída para tal:

> Embora a teoria mencionada acima seja uma teoria geral, incluindo como um caso particular a teoria das substituições, ainda assim, o problema de encontrar todos os grupos de uma dada ordem n, é realmente idêntico ao problema aparentemente menos geral de encontrar todos os grupos da mesma ordem n, que podem ser formados com as substituições sobre as n letras. (CAYLEY, 1878 *apud* WUSSING, 1984, p. 233, tradução minha)

Este é o conteúdo do importante teorema de Cayley que garante que todo grupo finito pode ser visto como grupo de permutações. As investigações de Cayley de 1854, em direção ao conceito de grupo abstrato, não tiveram impacto imediato, não havia um terreno fértil para tal, os únicos grupos conhecidos eram os grupos de permutações e não havia interesse nem razão para generalizá-lo. No entanto, a resposta ao seu trabalho de 1878 foi diferente. Este inspira Hölder no seu trabalho de 1893 baseado no conceito de grupo abstrato e W. v. Dyck[49] (1856-1934) que reduz o conceito de grupo de transformações a um exemplo do caso abstrato.

A primeira tentativa de Cayley de transição para um conceito de grupo abstrato no sentido de ser uma extensão do escopo e um refinamento do conteúdo de um grupo de permutações foi "prematura". Isto aconteceu porque, em 1854, ele não tinha condições de especificar, nem as disciplinas matemáticas nem as circunstâncias que poderiam oferecer ao conceito de grupo abstrato, necessidades e oportunidades associadas à formulação abstrata. Na época do segundo trabalho de Cayley havia um reconhecimento generalizado da necessidade de uma visão mais profunda da matemática e dos métodos necessários para a lógica matemática.

Sobre as formulações de Kronecker, Netto e Weber

Os estudos das equações ciclotômicas e das formas, realizados por Gauss em 1801, conduz diretamente para o estudo dos corpos de números algébricos e para a elaboração da origem de grupo-teorético em tais corpos. As contribuições neste sentido vêm dos alemães e amigos E.E. Kummer[50] (1810-1893) e Kronecker[51] (1823-1891). O primeiro teve um importante papel na tentativa de construir a composição multiplicativa de números algébricos, com a introdução do conceito de "número complexo ideal" e o segundo, em 1870, em completa conexão com o trabalho do primeiro, apresenta claramente fundamentos de um ponto de vista que é parte da essência da álgebra moderna. Wussing (1984) diz que Kronecker estava interessado, essencialmente, em usar a axiomatização como uma ferramenta para uma apresentação mais compreensível e conveniente do material estruturado. Por isso, sem estabelecer nenhuma conexão com o conceito de um grupo de permutações, ele apresenta formalmente as leis que governam uma operação abstrata

[49] O trabalho de Dyck referente ao conceito de grupo aparece em *Gruppentheoretische Studen I* (1882) e *Gruppentheoretische Studen II* (1883). (WUSSING, 1984).

[50] Kummer escreve *Zur Theorie der complexen Zheln* em 1845.(WUSSING, 1984).

[51] Aqui os artigos importantes são: *Über die algebraisch auflösbaren Gleichngen* (I Abhandlung) (1853); *Über die algebraisch auflösbaren Gleichngen* (II Abhandlung) (1856); *Mitteilung über algebraische Arbeiten* (über Gleichungen fünften Grades) (1861). Para o posterior desenvolvimento da álgebra são: *Auseinandersetzung einniger Eigenschaften der Klssenanzahl idealer complexer Zahlen* (1870); a monografia *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* (1882).(WUSSING, 1984).

em um conjunto de elementos indefinidos e que formam um sistema de axiomas para um grupo finito abeliano. Com a suposição de finitude do número de elementos, as leis são o fechamento, a associatividade e comutatividade sobre a operação, a existência de um elemento unidade e a existência e unicidade do elemento inverso para cada elemento do conjunto segundo a operação. Nas palavras de Kronecker:

> Sejam $\theta', \theta'', \theta''', ...$ finitos elementos tais que com quaisquer dois deles nós podemos associar um terceiro por meio de um procedimento definido. Assim se f denota o procedimento e θ' e θ'' são dois elementos (possivelmente iguais), então existe um θ''' igual a $f(\theta', \theta'')$.
> Além disso, nós requeremos que $f(\theta', \theta'') = f(\theta'', \theta')$, $f(\theta', f(\theta'', \theta''')) = f(f(\theta', \theta''), \theta''')$ e se θ'' é diferente de θ''', então $f(\theta', \theta'')$ é diferente de $f(\theta', \theta''')$.
> Uma vez que isto é assumido nós podemos substituir a operação $f(\theta', \theta'')$ pela multiplicação $\theta'\theta''$, por isso em vez da igualdade nós empregamos equivalência. Assim usando o símbolo usual de equivalência "$\sim$" nós definimos a equivalência $\theta' \cdot \theta'' \sim \theta'''$ por meio da equação $f(\theta', \theta'') = f(\theta''')$. (KRONECKER, 1870 *apud* WUSSING, 1984, p. 65, tradução minha)

Além da finitude do conjunto de elementos, Kronecker deduz genericamente o que já tinha sido apresentado por Euler e Gauss lidando com casos particulares. Em termos de grupo-teorético, esta dedução se refere ao teorema que trata dos geradores básicos para grupos abelianos:

> Um "sistema fundamental" de elementos $\theta_1, \theta_2, \theta_3, ...$, tal que a expressão ${\theta_1}^{h_1}{\theta_2}^{h_2}{\theta_3}^{h_3}...$, $(h_i = 1, 2, 3, ..., n_i)$ representa cada elemento θ, por equivalência, exatamente uma vez. Os números $n_1, n_2, n_3, ...$ para os quais, $\theta_1, \theta_2, \theta_3, ...$ pertencem, respectivamente, são tais que cada um é divisível por seu sucessor, o produto $n_1 n_2 n_3 ...$ é igual a totalidade n de elementos θ, e assim n não tem outros fatores primos que os n_i. (KRONECKER, 1870 *apud* WUSSING, 1984, p. 66, tradução minha)

Kronecker, entretanto, não interpreta e nem aplica o tal teorema em termos de grupo-teorético, embora tivesse conhecimento da teoria de Galois.

A direta e extremamente frutificante influência de Kronecker está no livro texto do seu aluno E. Netto[52] (1846-1919) de 1882, que aplica este teorema usando grupo de permutações. Neste livro, Netto sofre grande influência da excelente e clássica apresentação da teoria dos grupos de permutações por Serret e do *Traité* de Jordan. A definição de um grupo dada por Netto e sua dependência no estudo do valor das funções racionais inteiras de n variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ por motivações pedagógicas e metodológicas refletiam o ponto de vista associado com os grupos de permutações:

[52]O trabalho de Netto aparece em *Die Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra* de 1882. (WUSSING, 1984)

> As substituições $s_1 = 1, s_2, s_3, s_\alpha, s_r, ...$ que não altera uma dada função $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ forma ... um grupo fechado no sentido que sua totalidade não muda como um resultado da multiplicação das substituições constituintes mutuamente. O termo "grupo" denotará sempre um complexo de substituições possuindo a... propriedade característica da reprodução do complexo através da multiplicação dos seus membros. (NETTO, 1882 *apud* WUSSING, 1984, p. 236, tradução minha)

Por outro lado, Netto foi além da tradição dos grupos de permutações no tratamento com grupos abelianos e, especialmente, na derivação do teorema base a partir do resultado de Kronecker:

> Em nosso caso, o elemento θ deve ser substituido por substituições comutáveis. O número n de elementos θ se torna a ordem r do grupo. Temos assim o Teorema IV: Se as substituições de um grupo comutam entre si, então existe um sistema fundamental de substituições $s_1, s_2, s_3, ...$ tal que a expressão ${s_1}^{h_1}{s_2}^{h_2}{s_3}^{h_3}...$, $(h_i = 1, 2, ..., r_i)$ representa cada uma das substituições do grupo exatamante uma vez. Os números $r_1, r_2, r_3, ...$ são as ordens de $s_1, s_2, s_3, ...$ e têm a propriedade que cada um é igual ou divisível pelo próximo. O produto $r_1 r_2 r_3 ...$ das ordens é igual a ordem r do grupo. (NETTO, 1882 *apud* WUSSING, 1984, p. 237, tradução minha)

Wussing (1984) afirma que Netto usa o conceito de grupo abstrato para combinar de uma forma imperfeita e inconsistente duas das três raízes históricas da teoria dos grupos abstrato, a saber, a já explicitamente desenvolvida e independente teoria dos grupos de permutações e as idéias de grupo presentes implicitamente na teoria dos números, deixando fora o grupo de transformações.

Mais uma tentativa de formalização do conceito de grupo abstrato vem com H. Weber[53] (1842-1913), aluno de Dedekind que, em 1882, interpreta o sistema implícito de axiomas de Kronecker para grupos abelianos, citado por Netto, em termos de grupo-teorético, cujo conteúdo está muito próximo de Gauss, Dirichlet e do próprio Kronecker. Neste trabalho (1882), o conceito de grupo abstrato (finito) aparece em uma nota de rodapé e no seu trabalho de 1893, é apresentada uma axiomatização do conceito de grupo abstrato incluindo grupos infinitos e este é enfatizado como sendo o conceito fundamental da álgebra.

Weber considera necessário introduzir uma definição de grupo abstrato, apesar de achar que os conceitos que os matemáticos associavam com a palavra grupo eram bastante

[53]Os trabalhos de Weber que contemplam suas tentativas são: o artigo *Beweis des Satzes, dass jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig ist.* (1882), o livro *Lehrbuch der Álgebra* (vol.1, 1895; vol.2, 1896) e mais quatro escritos nos anos de 1886 e 1887. (WUSSING, 1984).

uniformes e claros, apresenta uma definição axiomática consistente de grupo abstrato que inclui grupos infinitos:

> Um sistema Ξ finitamente de muitas ou infinitamente de muitas coisas (elementos) arbitrárias forma um grupo se ele satisfaz as seguintes condições:
> 1) Uma regra é dada que designe para um primeiro e segundo elementos do sistema um terceiro elemento definido daquele sistema.
> Nós não assumimos que esta composição sempre satisfaça a lei comutativa..., mas
> 2) Nós assumimos a lei associativa ...
> 3) Nós assumimos que se $AB = AB'$ ou se $AB = A'B$, então necessariamente $B = B'$ ou $A = A'$.
>
> Se Ξ contém um número finito de elementos, então o grupo é chamado de um grupo finito e o número de seus elementos é chamado seu grau. No caso de grupos finitos (1), (2) e (3) implicam que
> 4) Se dois ou três elementos A, B, C são pegos arbitrariamente de Ξ então o terceiro pode ser sempre unicamente determinado de forma que $AB = C$. (WEBER, 1893 *apud* WUSSING, 1984, pp.247, 248, tradução minha)

Weber introduz a notação simbólica $AB = C$ e $C = AB$ em que C refere-se à "composição" de A e B. Depois de provar (4), ele continua: "esta conclusão não necessita ser válida para grupos infinitos. Assim no caso dos grupos infinitos deveremos incluir a propriedade (4) como um dos axiomas requeridos". (WEBER, 1893 *apud* WUSSING, 1984, p.248, tradução minha). Deduz conseqüências desta definição, prova a existência de uma identidade e introduz definições adicionais, como as de comutatividade e isomorfismo.

Sobre a formulação de Dyck

O ano de 1882 marca o estágio de transição na evolução do conceito de grupo abstrato, ao mesmo tempo pode ser considerado decisivo para a elaboração completa desse conceito com o trabalho de Dyck. Este, em 1879, obtém o grau de doutor sob a orientação de Klein e é seu assistente no período entre 1881-83. Ele conscientemente combina todas as três raízes históricas do conceito - a teoria das equações algébricas, a teoria dos números e a geometria - pois, estava familiarizado com elas. Dyck não somente completa a elaboração do conceito de grupo abstrato, como também se refere às fontes intelectuais de sua abordagem num esforço de justificá-las, uma vez que ele está ao alcance de todas as influências necessárias para o desenvolvimento de um abrangente conceito de grupo abstrato. Isto se aplica às influências devido ao desenvolvimento da própria teoria dos grupos assim como as tendências, que estavam se tornando mais explícitas no final do século XIX de prover à matemática de um fundamento abstrato formulado através de axiomas e justificado através da lógica matemática.

Wussing (1984) afirma que há poucas dúvidas de que o avanço de Cayley, em 1878, em direção a um conceito de grupo abstrato e seu esforço quanto ao papel dos geradores de grupos, provoca e influencia o trabalho de Dyck. Este adota a mesma proposta de definição de grupo dada por Cayley, "um grupo é definido através das leis de combinação dos seus símbolos". Graças à sua estreita relação com Klein em 1879, Dyck inclui os grupos (discretos) de transformações no seu conceito de grupo abstrato. Além disso, os grupos infinitos, em particular, os grupos infinitos de transformações são conscientemente agrupados sob a base axiomática do conceito de grupo por ele estabelecido. Os únicos não incluídos são os grupos de transformações contínuas porque estes grupos ainda não tinham sido reconhecidos.

Por causa de sua familiaridade com as três áreas de aplicação do conceito de grupo, Dyck foi capaz de identificar entre as idéias contemporâneas, os elementos mais significantes para a teoria dos grupos. Ele entendia mais a literatura alemã relevante, porém apóia-se substancialmente nos trabalhos de Cayley de 1878, de Hamilton de 1866, assim como no de Netto de 1882. Para o seu conceito de grupo abstrato, ele aproxima-se especialmente de Grassmann, Hankel e Schröder. Em particular, Schröder tinha discutido mais de uma vez, a posição da teoria do grupo no que ele se referia como álgebra "absoluta". Conseqüentemente, Dyck chega ao arranjo da teoria dos grupos no esquema geral da álgebra, uma formulação bem moderna no sentido da "álgebra universal" contemporânea:

> Se nós ... virmos as operações grupo-teoréticas formalmente, então sua posição num desenvolvimento formal de todas as operações analíticas está bem clara. Elas são operações de multiplicação que obedecem o princípio associativo mas não comutativo. Também, certas regras de multiplicação dão a essas operações o caráter de um círculo especial de operações, que inclui um grupo finito ou infinito de operações. (DYCK, 1882 *apud* WUSSING, 1984, p. 240, tradução minha)

Um dos pontos interessantes na apresentação de Dyck é a intima conexão entre o conceito de isomorfismo e de grupo abstrato. Exceto para a definição formal, parece que se pode dificilmente pensar e entender o significado de grupo abstrato sem recorrer a algum conceito de isomorfismo. Isto é evidenciado na citação de Dyck (1882):

> A meta da investigação seguinte é continuar o estudo das propriedades de um grupo em sua formulação abstrata. Em particular, isto colocará a questão da extensão para que estas

> propriedades tenham um caráter invariante presente em todas as diferentes realizações do grupo, e a questão que conduz para a exata determinação do conteúdo essencial do seu grupo-teorético. (DYCK, 1883 *apud* WUSSING, 1984, p. 242, tradução minha)

Ele formula um problema geral, objetivado na definição abstrata de um grupo: "definir um grupo de operações discretas que são aplicadas a um certo objeto, ignorando a forma particular de representação das operações individuais, considerando-as como dadas apenas em termos das propriedades essenciais para a construção do grupo". (DYCK, 1882 *apud* WUSSING, 1984, p. 240, tradução minha).

Seguindo o exemplo de Cayley, Dyck usa o método de geradores para resolver o problema. Ele começa:

> A partir de certas operações geradoras $A_1, A_2, A_3, ...$, sobre cujas naturezas particulares não são feitas nenhuma hipótese, é possivel especificar cada grupo que pode ser construído por meio de iteração e combinação destas operações através do conhecimento de certas relações que ocorrem em conexão com a composição das operações originais. (DYCK, 1882 *apud* WUSSING, 1984, p. 241, tradução minha)

Na linguagem matemática atual, Dyck está construindo o grupo livre sobre os elementos $A_1, A_2, A_3, ...$ A passagem mencionada acima é idêntica ao teorema que afirma que cada grupo com um número finito de geradores é um grupo fator de um grupo livre de classe finita. Assim como faz-se hoje, Dyck constrói expressões $A_1{}^{\mu_1} A_2{}^{\mu_2} ... A_1{}^{\nu_1} A_2{}^{\nu_2} ...$ que agora são chamadas "palavras". Ele escreve as relações iniciais dadas na forma $F_h(A_1) = 1$ e, sem provar, admite a lei associativa e enfatiza: "neste caminho todos os grupos *holoedrically isomorfic* são incluídos em um simples grupo... [e]... a essência de um grupo não está expressa por uma particular forma de representação de suas operações, mas antes, por suas relações mútuas". (DYCK, 1882 *apud* WUSSING, 1984, p. 241, tradução minha).

Este é o ponto inicial intelectual de Dyck. No seu trabalho de 1882, ele investiga o grupo livre de m geradores $A_1, A_2, A_3, ...$ que ele simboliza por G. Ao introduzir as relações definidoras $F_h = 1$, $h = 1, 2, ..., n$, ele chega a um grupo $\bar{G}$ que, em termos modernos, mostra ser um grupo fator de G.

Dyck foi o primeiro a unir todos os diferentes elementos integrantes das definições parciais de grupo abstrato e recorrer no mesmo parágrafo à noção de isomorfismo.

A primeira parte do trabalho é também uma ligação com a interpretação grupo-teorético de Klein sobre grupos discretos finitos. Dyck relaciona sua teoria ao estudo dos grupos "concretos" conhecidos através do problema por ele formulado (que ele resolve para grupos finitos) em determinar estes grupos através de "modificações apropriadas das relações $F_h = 1$, $h = 1, 2, ..., n$". Desta forma, ele obtém, em 1883, as teorias dos grupos de permutações e dos grupos poliedrais. Discute extensivamente sua posição em relação às investigações grupo-teoréticas "concretas", ou seja, a teoria dos grupos de permutações, os grupos numérico-teoréticos e os grupos de transformações. Há uma longa passagem que ilustra muito claramente sua tentativa consciente de unificar as raízes históricas da teoria dos grupos através do conceito de grupo abstrato:

> As seguintes investigações têm o objetivo de continuar o estudo das propriedades de um grupo em sua formulação abstrata. Em particular, isto estabelecerá a questão de até que ponto estas propriedades têm um caráter invariante presente em todas as diferentes realizações do grupo, e a questão do que leva à exata determinação do conteúdo grupo-teorético essencial. Eu gostaria de enfatizar aqui, logo no início, que esta abordagem não tem o objetivo de abandonar as vantagens individuais que podem ser derivadas de uma formulação particular de cada problema particular. Para cada problema específico temos à nossa disposição um tesouro de informações específicas - parece ser arduamente necessário mencionar as questões algébricas, funções-teoréticas e números-teoréticos conectados com os problemas grupo-teoréticos - que podem ser usados de forma vantajosa em cada caso dado. São, precisamente, estas conecções especiais que chamam para uma discussão da extensão nas quais elas estão baseadas simplesmente em grupo-teorética, em contraste com outras propriedades do problema colocado. (DYCK, 1883 *apud* WUSSING, 1984, p. 242, tradução minha)

Dyck exige explicitamente a existência de um inverso: "requeremos para as nossas considerações que um grupo que contém a operação T_k deva conter também o seu inverso $T_k{}^{-1}$". (DYCK, 1883 *apud* WUSSING, 1984, p. 243, tradução minha).

O conceito de grupo de Dyck preenche todos os requisitos exigidos de uma abordagem abstrata plenamente desenvolvida. Trata-se de uma definição axiomática que inclui todas as definições de grupos "concretos". Ele demonstra um desenvolvimento cuja apresentação tinha sido tentada mais ou menos conscientemente, porém mais casualmente por muitos outros.

Sobre a formulação de Hölder

Hölder, em 1889, citando o trabalho de Dyck de 1882, coloca uma definição abstrata de um grupo. Especificamente, ele afirma:

> Nossos... teoremas valem para todos os grupos finitos de operações. A natureza das operações é irrelevante. Tudo que admitimos é a propriedade do grupo. A última pode ser

descrita sob os seguintes aspectos:
1. O resultado da combinação (multiplicação) de duas operações em uma ordem dada deve ser uma operação unicamente determinada que também pertence à classe de operações.
2. A composição das operações deve obedecer a lei associativa mas não precisa obedecer a lei comutativa.
3. Cada uma das equações simbólicas $AB = AC$, $BA = CA$ deve implicar que $B = C$.
Estas hipóteses, junto com a finitude do número de operações, implica que existe uma única operação J chamada *identidade*, que é a única operação que deixa todas as outras inalteradas sob a multiplicação, e que para cada operação A existe uma única operação inversa A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = J$. (HÖLDER, 1889 *apud* WUSSING, 1984, p. 245, tradução minha)

Sobre as formulações de Klein e Lie

Em 1888, Lie muda de atitude na questão de tornar explícitas as hipóteses definidoras para os grupos de transformações, uma mudança de especial interesse na conexão com o desenvolvimento do conceito de grupo abstrato. Ele, sob a influência da evolução inicial do método axiomático e do desenvolvimento da lógica matemática, afirma que "a tão chamada lei associativa" é válida, em toda generalidade, para as transformações porque "podemos considerar as transformações como operações". Ela é baseada na interpretação abstrata de conceitos matemáticos fundamentais como "elemento", "composição", "operação" entre outros, alcançada na época por matemáticos, como G. Peano (1858-1932) e Dedekind. A partir da lei associativa válida para grupos de transformações em geral e para grupos contínuos de parâmetro r em particular, Lie deduz várias outras asserções sobre tais grupos, a exemplo de uma formulação mais conveniente da afirmação do isomorfismo de dois grupos contínuos de transformações finitos.

Em 1889, Lie lista como uma exigência de grupo a possibilidade de agrupar as transformações da classe em pares mutuamente inversos. Esta hipótese explícita torna-se necessária para a definição da propriedade de grupo de uma classe de transformações em termos do requerimento de que a interação de duas soluções de um sistema de equações diferenciais seja também uma solução do sistema.

Em 1891, Lie dá um passo decisivo na elaboração dos axiomas de grupo, embora seja um passo distante da definição abstrata de um grupo, já que ele define um grupo contínuo infinito em termos das soluções de um sistema de equações diferenciais parciais. O progresso na evolução dos axiomas de grupo consiste no fato de que a existência dos inversos faz parte da definição de grupo e é explicitada. Lie mostra que os grupos (infinitos) contínuos de transformações, que ele considera, sempre satisfazem essa hipótese. Na verdade, os elementos do grupo são soluções de um sistema de equações diferenciais e produzem sob interação outros elementos da mesma classe.

Em 1895, Lie apresenta um trabalho que é importante para a formulação axiomática do conceito de grupo. Ele contém uma bela e profunda avaliação do conceito de grupo estudado pelos matemáticos do final do século XIX. Na verdade, o melhor tributo a Galois foi a descrição das muitas áreas da matemática, nas quais o conceito de grupo desempenhava um papel fundamental. Lie afirma: "todos sabem hoje que a noção de um grupo, descoberta por Galois, refere-se não somente às substituições, mas, ao contrário, admite generalizações em muitas direções". (LIE, 1927 *apud* WUSSING, 1984, p. 226, tradução minha).

Ele começa esse trabalho com o conceito de permutação-teorético de Jordan e prossegue substituindo-o por outro mais acentuado, que é, todavia, bem inferior à definição abstrata de um grupo que havia sido dada nesse meio tempo. Nele aparece: "a seguir está a definição mais geral que foi feita até agora: um conjunto de operações é dito formar um grupo se o produto de duas dessas operações for equivalente a uma única operação pertencente ao conjunto". (LIE, 1927 *apud* WUSSING, 1984, p. 227, tradução minha).

Ao relacionar essa definição com a do grupo de transformações, Lie afirma que mudar "operação" para uma mais especial "transformação" e "produto" para "sucessão" pode levar a uma definição "possivelmente definitiva" de um grupo de transformações:

> Na prática, nós tornamos essa definição específica em cada caso particular. Por exemplo, dividimos grupos em contínuos, descontínuos e mistos. Cada uma dessas classes consiste de grupos finitos e infinitos. No caso de grupos contínuos pareceu-me conveniente deixar de lado os grupos não definidos por equações diferenciais. Finalmente, ainda não foi demonstrado, de uma forma inteiramente satisfatória de um ponto de vista teórico, se é necessário adicionar à definição de grupos contínuos, que entre suas transformações há também a transformação da identidade. Quando estendemos a definição de um grupo para operações arbitrárias não temos o direito de concluir que a definição dada acima implica na divisão das operações de grupo em pares de operações mutuamente inversas. Além disso, o princípio de associatividade não é válido para todos os grupos de operações. (LIE, 1927 *apud* WUSSING, 1984, p. 227, tradução minha)

"Assim Lie requer, implicitamente, todos os modernos axiomas de grupo. No entanto, este não é o conjunto-teorético e a formulação axiomática do conceito de grupo. Nem

Lie nem Klein deram este passo" (WUSSING, 1984, p. 227). Klein, que viveu para ver a evolução do método axiomático e a transição da chamada "álgebra moderna" no início dos anos 20 do século XIX, opôs-se à perda das representações concretas dos elementos de um grupo. Entretanto, em palestras proferidas entre 1915 e 1919, publicadas em 1926, ele enfatiza a importância da teoria dos grupos: "a teoria dos grupos aparece como uma disciplina distinta ao longo de toda a matemática moderna. Ela penetra as mais variadas áreas como um princípio ordenador e clarificador". (KLEIN, 1926 *apud* WUSSING, 1984, p. 229).

Klein avalia corretamente o papel histórico das suas próprias contribuições, bem como as de Lie, no que concerne ao desenvolvimento do conceito de grupo, dizendo:

> Então [Após a publicação do *Traité* de Jordan (Wussing)] eu e Lie decidimos elaborar a significância da teoria dos grupos para as diferentes áreas da matemática. Dissemos que um grupo é uma classe de operações únicas $A, B, C, ...$ tal que a combinação de quaisquer duas operações A, B novamente produz uma operação C da classe $A \cdot B = C$.
>
> No curso das investigações seguintes sobre grupos infinitos Lie achou necessário exigir que, para cada A, o grupo deva conter seu inverso A^{-1}. Matemáticos modernos empregam uma definição mais apagada, porém mais precisa. Fala-se de um sistema de coisas ou elementos ao invés de operações. Postula-se então que
> 1. O "produto" ou combinação $A \cdot C = B$ pertença ao sistema (a exigência do fechamento).
> 2. A lei associativa vale, ou seja, $(AB) \cdot C = A \cdot (BC)$.
> 3. Existe uma identidade E tal que $AE = A$ e $EA = A$.
> 4. Existe um inverso, ou seja, a equação $Ax = E$ é solúvel. (KLEIN, 1926 *apud* WUSSING, 1984, p. 228, tradução minha)

O primeiro passo notável dentro da abstração progressiva foi a fusão, com a ajuda da teoria abstrata dos grupos abelianos, da teoria dos grupos de permutações por um lado e, por outro, dos padrões grupo-teoréticos implícitos no pensamento da teoria dos números, em particular, na teoria das formas quadráticas.

No final do século XIX o conceito de grupo abstrato se espalha rapidamente, acompanhado por uma proliferação de trabalhos, especialmente na França, nas áreas dos grupos de permutações e transformações, embora por razões metodológicas muitos autores tenham mantido esse tema fora dos livros[54] ou introduzido de forma indutiva.

Em conexão com a aplicação do conceito de grupo abstrato encontra-se o típico desejo de ver até que ponto os teoremas a partir da teoria dos grupos "concreto" são indepen-

[54]Um livro muito bom sobre a teoria dos grupos é *Teoria dos Grupos de Ordem Finita* de W. Burnside (1852-1927), 1^a ed. em 1897 e 2^a ed. em 1911. Além deste, Burnside tem um enorme trabalho desenvolvido na teoria dos grupos, 12 artigos no período 1894-1905. (WUSSING, 1984).

dentes da natureza específica dos elementos do grupo, se os teoremas familiares poderiam possivelmente ser incluídos numa apresentação final de uma teoria abstrata dos grupos, como a teoria dos grupos de permutações, por exemplo. Como um exemplo de tais tendências Wussing (1984) cita o trabalho de Frobenius[55] (1849-1917), de 1887.

Além dos esforços com o objetivo de extrair o conteúdo grupo-teorético essencial das investigações grupo-teoréticas "concretas", encontram-se estudos e construções conceituais baseadas em um fundamento abstrato. Muitas das últimas tendências deve-se aos matemáticos da América do Norte e da Alemanha. Em uma base abstrata, Dedekind e G. A. Miller[56] (1863-1951) investigam, no fim dos anos 90, os chamados grupos hamiltonianos, ou seja, grupos não-abelianos cujos subgrupos são invariavelmente normais, introduzindo abstratamente os conceitos de um comutador e de um subgrupo comutador. Finalmente, Hölder e E. M. Moore (1862-1932) introduzem abstratamente o conceito de automorfismo de grupo, uma ferramenta de pesquisa metodológica extremamente importante.

O conceito de um grupo fator, uma das idéias centrais da teoria clássica de grupo, assim como a segunda metade do teorema de Jordan-Hölder sobre o isomorfismo dos fatores primos de duas diferentes séries de composição de um grupo, foram deduções do conceito de grupo abstrato. Os trabalhos de Hölder de 1892-1893 estão dedicadas aos grupos simples e o de 1895 aos grupos compostos.

Weber, em seu trabalho de 1893, dar exemplos de grupos, incluindo o grupo aditivo de números complexos, o grupo de rotações poliedrais (refere-se especificamente a Klein), os grupos de permutações, o grupo aditivo das classes residuais com respeito a um módulo arbitrário, e o grupo das classes das formas binárias segundo à regra de composição das formas dada por Gauss. Os exemplos de Weber de grupos finitos e infinitos são marcantes no sentido de que eles estão associados aos estágios decisivos na evolução do conceito de grupo abstrato. Ele não menciona os grupos de Lie, provavelmente porque a teoria dos grupos de Lie ainda não havia ganho aceitação geral nessa época.

[55] Os trabalhos de Frobenius envolvendo a teoria dos grupos foram: *Neuer Beweis des Sylowschen Stazes* (1887); *Über endliche Gruppen* (1895); *Über Gruppencharaktere* (1896). (WUSSING, 1984).

[56] Sobre os grupos hamiltonianos, Miller produz: *On the Commutador Groups* (1898); *On the Hamilton Groups* (1898); *History of the Theory of Groups* to 1900; *The Group-theory Element of the History of Mathematics* (1921). (WUSSING, 1984).

Para concluir pode-se dizer que o incentivo para a axiomatização do conceito de grupo abstrato nos anos 80 e 90 do século XIX foi a variedade de aplicações da teoria dos grupos e a resultante revelação do vasto alcance do conceito de grupo como uma idéia central de toda a matemática. A transição para o conceito de grupo abstrato foi também a causa e, ao mesmo tempo, o efeito parcial da crescente aceitação geral do método axiomático no sentido do termo proposto por Hilbert.

Vygotsky (2001) levanta dois pontos fundamentais que emergiram das investigações do psicólogo N. Ach (1871-1946) relativos ao surgimento e ao desenvolvimento de um conceito, e que estão bem exemplificados com o conceito de grupo.

Quanto ao surgimento, Ach conclui que a formação de conceitos é um processo de caráter produtivo e não reprodutivo, o conceito surge e configura-se no curso de uma operação complexa voltada para a solução de algum problema.

De fato, os conceitos de grupo de permutações e de grupo de transformações surgiram na solução do problema das equações algébricas e do problema de classificação das geometrias, respectivamente.

Quanto ao desenvolvimento, ele observa que a formação de conceitos não segue o modelo de uma cadeia associativa, em que um elo suscita e acarreta outro. Tal formação segue um processo orientado para um fim, uma série de operações que serve como meio para a solução de um problema central.

Viu-se, também, que a formação do conceito de grupo abstrato não ocorre imediatamente. Houve modificações deste conceito que refletiam as necessidades das novas áreas em que ele ia sendo aplicado, principalmente, na geometria e análise. A própria matemática da época não ancorava a nova forma de pensar e de fazer matemática. Alguns mátemáticos não aceitavam e não entendiam aquela nova forma de pensamento desvinculada dos cálculos algébricos conhecidos. Além disso, a formalização do conceito de grupo abstrato só foi possível e aceita em 1882, 50 anos após o trabalho de Galois, visto que outros desenvolvimentos, imprescindíveis para a sua elaboração (entre eles o de um fundamento abstrato axiomatizado e justificado através da lógica matemática), vinha ocorrendo. E, ainda, porque Dyck estava familiarizado com as três áreas nas quais o conceito surge implícita ou explicitamente e dispõe de todas as influências necessárias para o desenvolvimento de um abrangente conceito de grupo. Foi somente nestas circunstâncias que houve a transição para o conceito de grupo abstrato que é, de fato, uma generalização de todos os grupos que até então tinham sido elaborados.

Outro aspecto que deve ser destacado aqui é a importância do trabalho em grupo, um outro ponto levantado por Vygotsky. Foi visto na história do conceito de grupo que, durante todo o processo, as investigações e descobertas surgiam de diferentes matemáticos de vários países da Europa, os trabalhos que iam surgindo eram estudados e apreciados por eles. As investigações de um servia, pode-se ver, como ponto de partida para o trabalho do outro, ou fonte de mediação para outras investigações. Por exemplo, o trabalho de Galois foi apreciado, corrigido e complementado durante alguns anos, até se chegar na essência de suas descobertas e elaborações. A formação ou formalização deste conceito dentro da matemática não é mérito de um ou outro matemático, mas de todo um grupo de matemáticos durante mais de um século.

Todo este aparato lógico-matemático incluindo, principalmente, a formação do conceito de grupo abstrato culminou em uma mudança na matemática como um todo. Isto confirma, por um lado, o pressuposto vygotskyano de que nenhum conceito existe fora de um sistema de conceitos e relações, a própria natureza do conceito pressupõe o enriquecimento do objeto representado no conceito, e, por outro, a idéia de conceito de Vergnaud como um conjunto de situações dando sentido ao conceito, um conjunto de elementos que proporcionam ao indivíduo a realização de operações sobre um conjunto de representações simbólicas das situações em estreita conexão.

A aceitação geral do método e do pensamento estrutural associado na apresentação dos trabalhos, livros-texto, monografias e palestras em termos grupo-teoréticos baseadas no conceito de grupo abstrato só vieram a aparecer no início do século XX. Tal aparição marca o nascimento da teoria dos grupos abstrato.

A fase de construção e consolidação da teoria do grupo abstrato envolveu dificuldades metodológicas consideráveis. No entanto, a produtividade dos grupos de permutações e transformações, a adoção do conceito de grupo abstrato estendeu a aplicação da teoria dos grupos para uma grande variedade de disciplinas matemáticas. Assim, já na virada de século, do XIX para o XX, a primeira estrutura conceitualizada na história da álgebra teve um papel ativo no desenvolvimento da matemática.

Este desenvolvimento da teoria dos grupos foi também parte - tanto causa e efeito - de um processo de organização dentro da álgebra. A aceitação universal do método axiomático e do fundamento conjunto-teorético da matemática causa, nos anos 30 do século XX, a transição da álgebra moderna no sentido de van de Waerden para uma teoria de estrutura matemática no qual um grupo é apenas um exemplo de uma estrutura algébrica com uma operação binária. Isso dá origem ao estudo da teoria dos conjuntos de forma axiomatizada no ensino da matemática e ao movimento nos anos 60, denominado de Movimento da Matemática Moderna.

A partir do início do século XX, a palavra estrutura ocupa uma posição central na matemática. Há um crescente uso na literatura moderna e um reconhecimento do estudo de estruturas como uma ferramenta essencial que favorece o desenvolvimento unificado da matemática. De certo modo, o método axiomático que constitui a própria essência da matemática, baseia-se sobre o conceito de estrutura, produzindo, sob um ponto vista, a própria caracterização da matemática segundo o grupo Bourbaki, que vê a matemática como sendo o estudo geral dos sistemas conceituais (estruturas) conjuntistas, módulo uma certa lógica (KRAUSE et al, 1997) ou uma hierarquia de estruturas. (WUSSING, 1984).

A teoria dos grupos em geral e a teoria dos grupos finitos em particular, tornou-se um ramo florescente da Matemática. Esta última teve como um dos seus principais problemas o estudo da classificação dos grupos finitos e dos grupos simples finitos. Dentre os grupos simples finitos, alguns deles se tornaram interessantes aos matemáticos surgindo uma série de descobertas dos chamados “monstros”, pelo fato da ordem desses grupos serem monstruosas. O primeiro deles foi descoberto, em 1966, por Z. Janko que possui 175.560 elementos. (DAVIS e HERSH, 1986, p. 431)

Capítulo 4

Procedimentos Teórico-metodológicos

Tal como já foi dito, o objetivo central deste trabalho é a investigação do conceito de grupo formado por alunos do curso de Matemática, em um curso introdutório da teoria dos grupos.

Um outro objetivo é a elaboração de elementos constitutivos do campo conceitual de grupo. Essa elaboração teve como base teórica a definição de conceito dada por Vergnaud (1990), e como fontes de inspiração o próprio processo de construção e formalização do conceito de grupo na matemática, o detalhamento das atividades realizado no capítulo anterior, as referências Alencar Filho (1979), Carvalho et al (1984), Domingues et al (1979) e Fraleigh (1989), utilizadas nos cursos de álgebra abstrata, e outras referências voltadas para estudos de cunho didático-pedagógico e psicológico-experimental: Vergnaud (1991), Dienes e Jeeves (1974), Dienes e Golding (1975) e Farmer (1999), que também serviram como fontes de pesquisa e de reflexões.

4.1 O *locus* da investigação

Para a realização da pesquisa propriamente dita, escolhi como sujeitos para a investigação os alunos que estavam cursando a disciplina Álgebra I do curso de Matemática na Universidade Federal de Campina Grande, Campus de Campina Grande, da qual sou professora. Essa escolha foi feita considerando-se, principalmente, a adequação ao objeto de estudo. O curso ministrado nesta disciplina é uma introdução à teoria de grupo no qual o conceito de grupo é estudado durante todo o semestre letivo.

O curso de Matemática é oferecido pelo Departamento de Matemática e Estatística. O departamento desenvolve atividades de ensino nos níveis de graduação e pós-graduação, de pesquisa e de extensão. Além de oferecer as disciplinas de Matemática para o ciclo básico de todos os cursos da área das Ciências Exatas e para alguns da área das Ciências Humanas, oferece a formação em Matemática em nível de graduação e mestrado[1]. Hoje o DME conta com um total de 30 docentes efetivos: 12 (40%) doutores, 6 (20%) doutorandos, 10 (33%) mestres, 2 (7%) especialistas. Os mestres e doutores têm sua qualificação em Estatística, Matemática Pura ou Matemática Aplicada.

4.2 A disciplina e o ensino sobre o qual a pesquisa foi realizada

A investigação foi realizada com estudantes do curso de Matemática que estavam cursando a disciplina Álgebra I. Esta disciplina está alocada no 5^o semestre para o Bacharelado e no 6^o para a Licenciatura (ver fluxogramas, anexos 1 e 2), 4 créditos/60 horas-aula, cujo conteúdo programático é uma introdução à teoria de grupo. Sua ementa se constitui dos seguintes tópicos: Estrutura de grupos. Grupos de permutações e grupos cíclicos. Subgrupos e subgrupos normais. Grupos quocientes. Homomorfismo e Isomorfismo. Teorema de Sylow e aplicações. Grupos abelianos finitamente gerados. Produtos direto e semi-direto de grupos.

Por ocasião da pesquisa de campo, a disciplina estava sendo oferecida em dois turnos, o diurno (Turma 1) e o noturno (Turma 2) por diferentes professores. Em todo o curso de Álgebra I, tanto na Turma 1 quanto na Turma 2, o objeto grupo foi visto apenas como um objeto matemático abstrato, com o seu significado puramente matemático. Durante o curso o professor da Turma 1 desenvolveu todo o conteúdo programático. O professor da Turma 2 ministrou o seu curso em um ritmo diferente, mais lento do que ocorreu na Turma 1 e por isso não desenvolveu os dois últimos tópicos do programa. Em geral, há uma defasagem, que privilegia o diurno, entre os alunos do curso noturno em relação

[1]O mestrado foi criado em agosto de 2002 e credenciado pela CAPES em dezembro do mesmo ano; em março de 2003 houve o ingresso da primeira turma. As áreas de pesquisa no mestrado são: Probabilidade e Estatística, Equações Diferenciais Parciais e Matemática Aplicada.

ao diurno, tanto de frequência quanto de aproveitamento, em função da necessidade de combinar trabalho e estudo.

De minha parte, o acompanhamento do curso em relação ao assunto que estava sendo estudado, deu-se por meio de informações fornecidas pelos próprios professores através de conversas informais e pelo programa da disciplina.

Por se tratar da formação de um conceito que é estudado durante todo o semestre letivo, a investigação em sala de aula ocorreu em três diferentes momentos do decorrer da disciplina.

De acordo com o calendário civil, a coleta de dados foi realizada durante o período de junho a setembro/2002, que correspondia, pelo calendário letivo, ao primeiro semestre de 2002. Esta defasagem é conseqüência de anteriores paradas das atividades docentes durante períodos de greve de professores das universidades federais.

A coleta dos dados teve por base a aplicação de três sequências de atividades, formadas por questões em aberto e situações-problema, a serem resolvidas por escrito e a realização de entrevistas sobre as soluções. A aplicação das atividades ocorreu em três sessões, previamente definidas, durante um período de aproximadamente quatro meses: a primeira ocorreu na terceira semana de aula, a segunda um mês e meio após o início das aulas e a terceira quatro mêses depois da realização da primeira, após o término das aulas e do período de provas finais do semestre letivo.

A realização da parte escrita (seqüências de atividades) ocorreu em sala de aula com todos os alunos em um tempo estabelecido de duas horas-aula. Após o término deste tempo e à medida que cada um dos participantes devolvia as suas soluções registradas por escrito, era agendado com ele o dia e a hora da sua entrevista.

As entrevistas foram semi-estruturadas[2], guiadas pela solução dada pelo estudante por escrito e pela sua verbalização nas explicações e justificativas de suas soluções. Com as entrevistas pretendia buscar, na expressão oral dos alunos, descrição de seus procedi-

[2]A entrevista semi-estruturada consiste de perguntas básicas comuns para todos os sujeitos, que vão sendo ampliadas e complementadas de acordo com as respostas dos sujeitos para poder interpretar o melhor possível o que vão dizendo. (DELVAL, 2002). Os roteiro de perguntas para as entrevista estão no apêndice B.

mentos, explicações de suas afirmações e justificativas, enfim, buscava os conhecimentos implícitos nas soluções das atividades.

Durante as entrevistas, apoiada pela abordagem vygotskyana e, principalmente, pelo seu conceito de mediação, houve interação entre pesquisador e os alunos investigados. A minha intervenção, enquanto mediadora, deu-se por meio de pistas, explicação de uma regra, de perguntas, de questionamentos etc. A intervenção ocorreu mais vezes nas discussões relativas as quatro situações-problema das Seqüências 2 e 3, com a finalidade de promover a continuidade do próprio diálogo entre investigado e investigador, quando percebia que o entrevistado estava bloqueado em seguir adiante e que havia possibilidade de manifestação de um conhecimento potencial.

Desta forma, para efeito de análise sobre a formação do conceito de grupo por alunos do curso de Álgebra I, os principais dados foram os registros escritos das soluções das atividades e os registros orais das entrevistas considerando-se as mediações.

Os registros escritos explicitam soluções dadas pelo aluno (sozinho) a partir do seu conhecimento real. Os registros orais trazem soluções dadas com a ajuda de uma pessoa mais experiente na perspectiva de promover a manifestação de um conhecimento potencial.

4.3 A amostra

A intenção inicial era fazer a investigação com todos os alunos matriculados na disciplina, porém, durante esse processo, houve evasão de parte dos alunos.

Na Turma 1 havia 19 alunos matriculados. Destes, 16 participaram da primeira fase da pesquisa, 13 da segunda fase, dos 13 que estavam com a primeira e a segunda fase concluídas, só 12 realizaram a terceira fase. Dois desses 12 alunos estavam cursando a disciplina pela segunda vez. Havia um aluno ouvinte que também fêz parte da amostra. Portanto, 13 alunos desta turma participaram de todas as etapas da investigação.

Na Turma 2 havia 14 alunos matriculados. Somente 9 participaram da primeira e segunda fases da pesquisa, dentre estes, apenas 5 realizaram a terceira fase integralmente. Assim, apenas 5 fizeram as três seqüências de problemas e foram entrevistados nos três momentos. Assim sendo, a amostra ficou constituída de 18 alunos, cujo material coletado foi analisado.

Os 18 estudantes investigados no curso de Álgebra I apresentavam características heterogêneas quanto à situação sócio-econômica, à procedência e às atividades desenvolvidas durante a realização da disciplina. Além dos estudantes de Campina Grande (6), alguns deles são procedentes de outros municípios do Estado (7) e de outros estados (5). A maioria dos alunos (11) é oriunda do Ensino Médio de escola pública, os demais (7), de escola privada.

Além das atividades como aluno do Curso de Matemática, os alunos investigados, em sua maioria, tinham outras tarefas no referido semestre. Havia oito alunos desenvolvendo estudos de iniciação cientifica[3], um exercendo monitoria da disciplina Cálculo Diferencial e Integral II oferecida pelo DME, e quatro com atividades de ensino, eram professores do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio.

4.4 Os instrumentos de investigação

Aspectos gerais dos instrumentos

Um dos pressupostos básicos para a elaboração dos instrumentos, assim como para a análise dos dados, é o fato de que a atitude do estudante diante das atividades e situações-problema não se explica apenas levando em consideração a sua inserção no ambiente da disciplina Álgebra I, mas toda a sua história e trajetória escolar relativa ao estudo e às situações experienciadas com os conceitos aqui envolvidos. Trata-se de um tecido conceitual que vem sendo elaborado e desenvolvido desde o Ensino Fundamental e quase sempre de uma forma sistematizada. Este pressuposto tem por base, tal como visto no capítulo 3, a visão de Vygotsky sobre o desenvolvimento dos conceitos pelo indivíduo e de Vergnaud sobre a importância das situações por ele vivenciadas que dão sentido ao conceito, aos esquemas construídos e às concepções formadas ao longo das

[3]As atividades de inicicação científica eram financiadas por bolsas do PIBIC/CNPq - Programa de Iniciação Científica, IM-AGIMB/CNPq - Instituto Milênio - Avanço Global Integrado da Matemática Brasileira, vinculado ao IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada ou do convênio com o Setor de Petróleo e Gas Natural da ANP - Agência Nacional de Petróleo.

várias experiências.

Faço, no que segue, um detalhamento dos instrumentos de investigação, destacando o meu objetivo com cada atividade; um entendimento, uma interpretação e as soluções mais coerentes, os significados atribuídos às atividades e situações-problema mais esperados e os conceitos que poderiam ser mobilizados nas soluções.

Para efeito de facilitar a identificação das atividades de cada uma das três seqüências, a partir de agora, a referência a um qualquer item de uma determinada seqüencia será feita com uma notação indexada referindo-se à seqüência e ao item, por exemplo: o item 4 da Seqüência 1 será indicada por S1.4; o item 2 da Seqüência 3 por S3.2.

Um detalhamento da Seqüência 1

A inspiração para algumas das perguntas aqui colocadas veio de Fraleigh (1989), em especial de exercícios em que ele faz uma afirmação e pede para o estudante dizer se ela é verdadeira ou falsa.

A Seqüência 1 tinha como objetivo central a investigação da formação do conceito de operação binária em um conjunto, pelo aluno. Para a investigação de um conceito uma situação, um problema, uma pergunta não é suficiente, por isso várias perguntas foram feitas relativas a este tópico. Como qualquer conceito científico, este conceito não está isolado pois traz à tona o próprio conceito de conjunto e os conceitos de relação e de função, e embora as palavras relação e função não tenham sido usadas textualmente nas atividades desta seqüência, os conceitos por elas representados estavam implícitos.

Além disso, pretendia-se investigar a concepção do estudante sobre grupo antes do estudo propriamente dito sobre grupo em matemática. Por essa razão, esta sequência foi aplicada após o estudo do assunto operação binária e antes do início do estudo de grupo, antes mesmo dos alunos terem contato com a definição de grupo.

Nas atividades desta seqüência os conhecimentos que poderiam ser mobilizados são o de conjunto, par ordenado, produto cartesiano, relação, relação ternária, função e operação binária, quantificadores, propriedades da operação.

S1.1 O que você entende quando se diz que a operação binária é uma <u>regra</u>? A palavra <u>regra</u> poderia ser substituída por outra(s)? Qual(is)?

Trata-se de uma questão em aberto com o objetivo de verificar a concepção de regra, o significado dado à palavra regra neste particular contexto pelo aluno.

Dizer que a operação binária em S é uma regra, significa que existe uma definição *a priori* de como dois elementos quaisquer do conjunto S vão ser levados a um elemento do mesmo conjunto. É essa regra que particulariza a operação. A operação só fica estabelecida, ou só se torna conhecida quando essa regra é dada. Por exemplo, quando se define $a * b = mmc(a, b)$, significa que todas as vezes que se for calcular $a * b$ o cálculo do menor múltiplo comum de a e b tem que ser realizado.

Neste contexto a palavra regra tem um significado mais amplo, podendo ser substituída por função, por correspondência, por lei de composição, cuja representação não está limitada às expressões algébricas (leis de composição). Outras formas de explicitação de uma operação binária é por meio de uma TABELA de dupla entrada, de uma palavra ou de uma expressão lingüística.

A palavra regra é muito utilizada na matemática e com outros significados, como por exemplo: quando se está estudando o conceito de derivada, estuda-se as regras de derivação. Mesmo que seja dado um significado matemático pertinente ao contexto aqui tratado, ele pode estar restrito às regras de adição, subtração, multiplicação e divisão (de números) já bem conhecidas. Se o aluno não estiver atento ao contexto em que a palavra regra está sendo usada pode atribuir-lhe um outro significado, inclusive fora da matemática, um significado comum de ordem, imposição, lei, algo que deve ser obedecido.

A forma como foi dito o que é uma operação binária em um conjunto S nesta seqüência, imbuiu o significado dado à palavra regra de um papel fundamental para a formação do conceito de operação binária.

S1.2.b Você acha importante que o par seja ordenado? Por quê ?

Tem-se aqui uma questão em aberto com o objetivo de investigar a vinculação que o aluno faz entre a ordem dos elementos a e b no par, a regra que define uma operação e o elemento-resultado de $a * b$, e se faz alguma associação disso tudo com a propriedade comutativa da operação.

Essa situação lida, de forma sutil, com a comutatividade da operação. Espera-se que o aluno percebesse isso, que não necessariamente há mudança do elemento-resultado quando se muda a ordem dos elemnetos no par. Em outras palavras, que a importância da ordem dos elementos no par está vinculada à propriedade comutativa da operação: para todos $a, b \in S$, $a * b = b * a$. Ao par ordenado (a, b) associa-se o elemento $a * b$ e ao par ordenado (b, a) associa-se o elemento $b * a$. Os elementos $a * b$ e $b * a$ não são necessariamente iguais se a operação não for comutativa.

S1.2.c O que se pode dizer sobre o elemento do conjunto S que está associado ao par ordenado de elementos do conjunto S? Ele pode ser igual ao primeiro elemento do par? Ou ao segundo? Ou será sempre um elemento diferente dos dois elementos do par?

Aqui aparecem vários questionamentos com a intenção de investigar o entendimento do aluno sobre a imagem da função chamada operação binária. O objetivo é verificar se ele tem consciência das possiblidades de resultado da operação entre dois elementos de um conjunto e qual o real significado dado ao elemento neutro e à propriedade do elemento neutro.

Existem inúmeras possibilidades para se definir uma função de $S \times S$ em S e, *a priori*, qualquer elemento de S pode ser imagem do par (x, y) inclusive os próprios elementos x e y, como é o caso da operação definida em S1.6. O conjunto imagem de uma operação binária pode ser todo S ou um subconjunto qualquer de S. É raro acontecer mas esse subconjunto de S pode ter um único elemento, para isso basta definir a operação como sendo a função constante, a operação que leva todos os pares (x, y) de $S \times S$ em um mesmo elemento $c \in S$.

Quando não se considera a existência do elemento neutro no conjunto segundo a operação, dado por meio da propriedade $x * e = x \ \forall x \in S$ e $e * y = y \ \forall y \in S$, espera-se que o resultado de $x * y$ seja um elemento diferente de x e de y.

S1.3 Como você explica ou justifica o termo operação binária?

Trata-se de uma questão em aberto cujo objetivo é investigar o significado da expressão operação binária para o aluno e sua compreensão sobre como esse significado se reflete na prática. Isto é, detectar se o significado dado ao termo operação binária diz respeito, apenas, ao fato da operação estar definida em $S \times S$, portanto, realizada entre pares de elementos de S, ou se, além disso, o aluno tem consciência de que não se opera, simultaneamente, mais que dois elementos de um conjunto. Quando se vai operar um número qualquer de elementos de um conjunto, opera-se, a cada momento dois deles e o elemento-resultado dessa operação é operado com o elemento seguinte, e assim sucessivamente. Esse é um aspecto implícito e muito sutil que só se revela no uso prático da operação, e que, em geral, não é percebido.

Além disso, aqui entram aspectos bem sutis dos conceitos de relação, função e operação que podem ser percebidos, quais sejam: uma função de S em S é também uma relação binária em S; uma operação binária em S que é uma função de $S \times S$ em S é uma relação ternária em S.

S1.2.a O que você entende quando se diz que a operação é uma <u>regra</u> que associa a cada par ordenado de elementos do conjunto S um elemento do conjunto S? Escreva o que você entende em linguagem matemática.

S1.4 Reescreva a definição de operação binária como você a entende, com suas próprias palavras.

S1.2.a e S1.4 são duas questões em aberto com o objetivo de permitir ao aluno expressar, com suas próprias palavras e em linguagem matemática, a sua concepção/o seu conceito de operação binária.

Além do que já foi discutido em S1.1, aqui espera-se que o aluno destaque os dois outros traços de uma operação, que estão inseridos na própria pergunta e que podem ser vistos conjuntamente. Trata-se do fato de que todo par de elementos de $S \times S$ está em correspondência (ou está associado), por meio da <u>regra</u> dada, a um elemento e que este elemento não pode ser de um qualquer conjunto, deve ser um elemento do próprio conjunto S. Ou seja, nenhum par ordenado de $S \times S$ pode ficar sem um correspondente em S. A não existência da primeira condição faz com que não se tenha uma função de $S \times S$ em S, e, sim, uma relação. O segundo traço garante que, de fato, existe uma operação no conjunto S; para alguns autores significa dizer que S é fechado segundo a operação. Enfim, estas condições são necessárias e suficientes para que se tenha uma operação binária em S. Um contra-exemplo disso é a regra da subtração em $\mathbf{N}$ que não se verifica para todos os pares de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, não sendo uma operação binária em $\mathbf{N}$.

Se o significado dado à operação binária é, de fato, de uma função de $S \times S$ em S, provavelmente será utilizada a representação funcional $\begin{array}{rccc} * : & S \times S & \rightarrow & S \\ & (x, y) & \mapsto & x * y \end{array}$

A notação relacional pode ser usada mesmo que o significado dado à operação seja o de função, embora ela esteja mais associada ao conceito de relação apenas: dados $a, b \in S$, $a * b = c \in S$ com (ou sem) o destaque de que esta relação deve ocorrer para todos os pares a e b de S.

S1.5 No Ensino Fundamental (antigo 1^o Grau) e no Ensino Médio (antigo 2^o Grau) você trabalhou com conjuntos nos quais estavam definidas operações binárias. Quais conjuntos e quais operações você lembra? Especifique o conjunto e a operação (ou as operações) definida(s) em cada um deles. Nesse(s) conjunto(s), você acha que podemos ter (definir) outras operações? Justifique sua resposta.

Essa é uma questão em aberto, cujo objetivo central é investigar o quão as diferenças entre as "operações" estudadas no Ensino Fundamental e a operação binária estudada em Álgebra I, tinham sido apreendidas pelo estudante.

Aqui espera-se que o aluno liste os conjuntos por ele estudados nos Ensinos Fundamental e Médio, quais sejam: os conjuntos $\mathbf{N}$ dos números naturais, $\mathbf{Z}$ dos números inteiros relativos, $\mathbf{Q}$ dos números racionais, $\mathbf{R}$ dos números reais e $\mathbf{C}$ dos números complexos, como também as operações estudadas em cada um desses conjuntos, com a distinção clara entre as expressões operações fundamentais (ou operações elementares) e operação binária - a primeira é comumente utilizada para as relações ternárias estudadas no Ensino Fundamental, a segunda usada e formalmente definida nos cursos de álgebra abstrata.

As chamadas operações fundamentais de adição e multiplicação são, de fato, operações em $\mathbf{N}$. A subtração e a divisão não o são porque não estão definidas para todo par de números naturais, sendo apenas relações ternárias.

Em $\mathbf{Z}$ se tem as operações de adição, subtração e multiplicação. Já a regra de divisão não é uma operação, pois, dados a e b em $\mathbf{Z}$ nem sempre $\frac{a}{b} \in \mathbf{Z}$. Em outras palavras, não é possível calcular $\frac{a}{b}$, $\forall a, b \in \mathbf{Z}$. Por exemplo, os números 1 e 2 estão em $\mathbf{Z}$, mas $\frac{1}{2} \notin \mathbf{Z}$.

Em $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ tem-se as operações de adição, subtração e multiplicação. A divisão denotada por $a \bullet b = \frac{a}{b}$, $\forall a, b \in \mathbf{Q}$ ou em $\mathbf{R}$ não é uma operação nesses conjuntos porque não é possível realizá-la para os pares do tipo $(a, 0)$, $\forall a \in \mathbf{Q}$ ou $a \in \mathbf{R}$. Existe sim a operação divisão em $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} - \{0\}$ e $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$.

Outras operações também podem ser definidas nos conjuntos $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ ou em subconjuntos destes, como por exemplo, $a * b = a^b$ para todos $a, b \in \mathbf{N}$; $a \bullet b = a + 2b$ para todos $a, b \in \mathbf{Z}$; $a \odot b = mdc(a, b)$ (máximo divisor comum de a e b em $\mathbf{N}$); $a * b = a$ para todos $a, b \in \mathbf{R}$.

S1.6 Considere o conjunto $\mathbf{Z}_+ = \{x \in \mathbf{Z} \,|\, x \geq 0\}$. Para a e b elementos quaisquer de $\mathbf{Z}_+$, $a * b$ é igual ao menor dos elementos a e b ou é igual ao valor comum se $a = b$. De acordo com a definição dada no início, $*$ é uma operação binária em $\mathbf{Z}_+$? Justifique.

O objetivo com esta questão, assim como com S1.7, é verificar o esquema utilizado pelo estudante para verificar se uma dada regra definida entre pares de elementos de um dado conjunto é uma operação binária.

Para se obter o elemento-resultado de $x * y$ aqui não se realiza nenhuma operação (no sentido das operações usuais) entre os dois elementos, apenas associa-se ao par um de seus elementos, observando a relação de ordem em $\mathbf{Z}_+$.

A regra $a * b$ define uma operação binária em $\mathbf{Z}_+$ uma vez que dados quaisquer dois elementos x e y em $\mathbf{Z}_+$, ou $x < y$ ou $x > y$ ou $x = y$. Logo $x * y$ é igual a x ou a y, portanto, está em $\mathbf{Z}_+$.

Conceitos que podem ser mobilizados aqui: números inteiros relativos, relação de ordem em $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Z}_+$.

S1.7 No conjunto dos números racionais $\mathbf{Q}$, defina $\bullet$ por $a \bullet b = \frac{a}{b}$, a e b elementos em $\mathbf{Q}$. Faz sentido dizer que $\bullet$ é uma operação binária em $\mathbf{Q}$ do ponto de vista da definição dada? Justifique.

Embora a regra dada pela expressão $a \bullet b$ seja utilizada para representar a divisão no conjunto dos números racionais, ela não define uma operação binária em $\mathbf{Q}$, uma vez que não existe elemento de $\mathbf{Q}$ associado ao par $(a, 0)$ qualquer que seja $a \in \mathbf{Q}$. Como o zero não pode aparecer na segunda coordenada do par, então, a expressão $a \bullet b = \frac{a}{b}$ só define uma operação binária no conjunto $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} - \{0\}$.

Outros possíveis conceitos a serem mobilizados são o de número racional e o de divisão de números racionais.

S1.8 Considere a equação linear $a * x = b$ com a e b elementos quaisquer de um conjunto numérico S. Naturalmente surge a pergunta: sob que condições essa equação tem solução? Por exemplo, se a operação $*$ for a adição, a equação $a + x = b$ tem solução em qualquer conjunto(s)numérico(s) S, quaisquer que sejam a e b em S? Justifique sua resposta. Se a operação $*$ for a multiplicação, a equação $a \cdot x = b$ tem solução em qualqer conjunto(s) numérico(s) S, para quaisquer valores de a e b? Justifique sua resposta. Determine a solução das equações $a + x = b$ e $a \cdot x = b$. Alguma propriedade é necessária para se obter a solução dessas equações? Se for o caso, cite a propriedade em cada momento que você a utilize. Quais a(s) propriedade(s) que o conjunto numérico S deve ter para que a equação $a * x = b$ tenha sempre solução?

O objetivo central com essa atividade é investigar a compreensão do aluno sobre a solução destas equações. Elas só têm solução em um conjunto com estrutura de grupo, uma vez que existe a necessidade de utilização das propriedades da operação vinculadas ao grupo para resolvê-las. Em termos mais específicos, pretende-se verificar qual o esquema utilizado pelo aluno para resolver cada uma das equações $a + x = b$ e $a \cdot x = b$. Quais os invariantes operatórios usados explicita e implicitamente, e qual o entendimento do aluno sobre as propriedades da operação, se ele sabe quando e como utilizá-las.

Há um esquema de resolução para equações desta forma e que rapidamente se torna disponível e confiável desde a 6^a série. No tal esquema existe uma organização invariante, apoiada ao mesmo tempo em hábitos adquiridos, nos dois teoremas - "mantém-se a igualdade adicionando o elemento $-a$ nos dois membros da equação" para o caso $a + x = b$" e "mantém-se a igualdade multiplicando os dois membros da equação pelo elemento a^{-1} " para a equação $a \cdot x = b$ -, e nas propriedades da operação binária, com exceção da comutativa.

De fato, a solução da equação $a + x = b$ é econtrada
adicionando $-a$ em ambos os membros da equação: $(-a) + (a + x) = (-a) + b$;

usando a lei associativa: $[(-a)+a]+x=(-a)+b$;

usando a propriedade do elemento inverso ou calculando (-a) + a: $0+x=(-a)+b$;

usando a propriedade do elemento neutro ou do elemento 0: $x=(-a)+b$.

As justificativas em cada passo estão embasadas nos seguintes invariantes:

P_1. O conjunto S possui elemento neutro "0" segundo a operação $+$ tal que $a+0=0+a=a$ para todo $a \in S$;

P_2. Para cada elemento $a \in S$ existe $-a \in S$ tal que $a+(-a)=(-a)+a=0$

P_3. A operação $+$ em S é associativa, isto é, $(a+b)+c=a+(b+c)$, $\forall a,b,c \in S$.

Para resolver a equação $a \cdot x = b$ repete-se o mesmo esquema anterior:
multiplicando por $\frac{1}{a}$ os dois membros da equação: $\frac{1}{a}(a \cdot x)=\frac{1}{a}\cdot b$;
usando a lei associativa: $(\frac{1}{a}\cdot a)\cdot x=\frac{1}{a}\cdot b$;
usando a propriedade do elemento inverso ou calculando $\frac{1}{a}\cdot a1\cdot x=\frac{1}{a}\cdot b$;
usando a propriedade do elemento unidade ou do número 1: $x=\frac{1}{a}\cdot b$;
calculando $\frac{1}{a}\cdot b$ com $a \neq 0$:$x=\frac{b}{a}$.
Agora as justificativas estão embasadas em:

P_1. O conjunto S possui o elemento unidade "1" segundo a operação $\cdot$ tal que $a{\cdot}1=1{\cdot}a=a$ para todo $a \in S$;

P_2. Para cada elemento $a \in S$ existe $a^{-1} \in S$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

P_3. A operação $\cdot$ em S é associativa, $(a \cdot b)\cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $\forall a,b,c \in S$.

Com essa atividade o aluno tem a possibilidade de revelar se tem consciência de que as equações carregam em si uma operação binária e da necessidade do uso das propriedades da operação para resolvê-las. Enfim, ele pode mostrar claramente o quão o seu conceito de operação tinha sido ampliado, sua habilidade para usá-lo e as propriedades deste conceito.

Encontrar a solução dessas equações não se limita, apenas, em dizer quais são os valores de x que as tornam verdadeiras ($x=b-a$ ou $x=\frac{b}{a}$, $a \neq 0$), uma vez que todas as propriedades da definição de grupo são usadas.

S1.9 Em matemática, o que é grupo? O que você entende por um grupo em matemática?

Essa é uma questão em aberto cuja intenção é identificar o (s) significado (s) e as associações feitas pelo estudante sobre o objeto grupo antes mesmo de tê-lo como objeto de estudo.

À palavra grupo pode ser atribuído um significado comum fora da matemática, como um conjunto, um agrupamento, uma classe, uma coleção qualquer de objetos, de pessoas, de coisas. Como objeto matemático, o grupo pode ser visto, apenas, como um objeto puramente abstrato dado por meio de uma definição. Todavia, com base nas situações-problemas S2.1, S2.2, S3.1 e S3.2, nos capítulos 3 e 5, ao objeto grupo muitos outros significados podem ser atribuídos.

Aspectos gerais das Seqüências 2 e 3

A idéia base para as situações-problema S2.1, S3.1 e S3.2 foram obtidas em Dienes e Golding (1975), havendo alteração no texto de apresentação e elaboração de perguntas. Em cada uma das situações-problema S3.1 e S3.2 existe a (ou uma) estrutura de grupo implícita a ser reconhecida.

O objetivo geral com estas seqüências refere-se diretamente à formação do conceito de grupo. Trata-se de verificar as ações e operações dos alunos frente às situações nas quais a estrutura de grupo é explicitável.

O significado atribuído às situações passa pelos significados dados às palavras-chave do texto e pelas relações estabelecidas entre elas, enfim, pela compreensão da linguagem que as representam. É ele (o significado) que faz a mediação entre a situação e a representação, que faz com que essa representação seja (ou não) operatória no sentido colocado por Vergnaud (1991) e permita (ou não) a elaboração de novas representações. Para isso é preciso uma íntima conexão entre a situação e a (s) representação (ões) e as operações realizadas sobre esta última para a correta identificação dos objetos básicos da estrutura, quais sejam: o conjunto, a operação e a validade das propriedades da operação inerente ao conjunto.

Em todas essas situações a proposta é identificar a estrutura de grupo, assim, todas elas podem ser resolvidas basicamente com a utilização do esquema abaixo:

– Descobrir/identificar o conjunto vinculado à situação;

– Representar esse conjunto em linguagem matemática;

– Identificar alguma regra definida entre os elementos do conjunto em questão;

– Verificar se essa regra é de fato uma operação;

– Verificar se as três propriedades da definição são satisfeitas por ambos, pelo conjunto e pela operação.

Para verificar que um conjunto com uma operação tem estrutura de grupo é necessário usar a definição matemática de grupo. O uso da definição também requer um esquema, não se pode verificar que cada elemento do conjunto tem inverso antes de saber se o conjunto tem elemento identidade. O uso destes esquemas reflete uma articulação correta e completa dos três conceitos-chave básicos da definição de grupo.

Um detalhamento da Seqüência 2

Esta sequência está constituída de duas situações-problema e foi aplicada após os estudantes terem iniciado o estudo de grupo em sala de aula, mas antes do estudo de grupo-quociente, um estudo que favorece muito a ampliação do conceito de grupo pelo aluno.

O objetivo geral com ela é investigar o quão os estudantes já tinham assimilado do conceito de grupo, se eram capazes de reconhecer a estrutura de grupo em situações não tão abstratas, que, de alguma forma, envolvem elementos concretos. S2.1 A figura abaixo representa as diferentes ações.

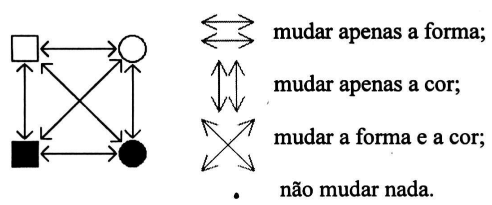


Figura 4.1: Diagrama de ações

A realização (operação) de duas quaisquer das ações acima é equivalente a uma outra? Em caso afirmativo, como representar isso, ou seja, como garantir que a operação de duas quaisquer dessas ações é ainda uma delas? O que acontece quando realizamos uma das três primeiras ações duas vezes consecutivas?
Para cada uma delas podemos falar de uma ação inversa?
Você percebe alguma relação entre as três primeiras ações?
O conjunto formado por essas quatro ações possui alguma estrutura algébrica? Em caso afirmativo, como é essa estrutura?

O objetivo específico com esta atividade é investigar as ações e operações realizadas pelos alunos frente a uma situação que é de fácil entendimento e representação, porque lida com coisas bem "concretas" (formas e cores), porém completamente nova para eles - esta situação difere muito dos problemas que aparecem nos livros de álgebra, com os quais os alunos estão familiarizados, uma vez que os elementos em jogo são ações (ou transformações) dadas através de regras: mudar apenas forma, mudar apenas cor, mudar forma e cor, não mudar nada.

Espera-se que o aluno reconheça o vínculo da figura como um todo com as ações - as ações realizadas sobre as figuras geométricas são no sentido de transformá-las quanto à forma, quanto à cor ou as duas coisas simultaneamente - representadas pelas setas na figura.

A figura como um todo representa as ações que podem ser realizadas sobre os quadrados e círculos pequenos de cores branca e preta. Cada vez que a ação é realizada ela envolve duas figuras iguais de cores diferentes (mudança de cor) ou duas figuras diferentes de mesma cor (mudança de forma), ou as duas coisas juntas, pois a própria figura e a legenda vinculada às ações mostram essas possibilidades. O diagrama (através das setas colocadas ao lado de cada ação e entre os quadrados e os círculos) indica as operações (a combinação ou a composição) entre as ações. O resultado da operação entre duas ações, efetuando-se uma ação depois da outra de modo que a segunda seja feita a partir do resultado da primeira, também é indicado na figura através das setas que representam as ações e ao mesmo tempo as operação entre as ações.

Vê-se que há quatro possibilidades para cada uma das três primeiras ações. Por exemplo, com a ação de mudar apenas a forma pode-se passar do quadrado branco para o círculo branco, do círculo branco para o quadrado branco, do quadrado preto para o círculo preto, do círculo preto para o quadrado preto.

Observa-se, também, que o resultado correspondente à realização de duas quaisquer ações (dentre as três primeiras ações) é igual ao resultado dado pela outra ação (a que não foi realizada). Por exemplo, quando se faz uma mudança apenas de forma (uma delas seria do quadrado preto para o círculo preto), e em seguida uma mudança apenas de cor (do círculo preto para o círculo branco), há uma mudança de forma e cor (do quadrado preto para um círculo branco). A terceira ação sozinha faz o que as duas primeiras juntas fazem, ou seja, a ação de mudar apenas forma composta com a ação de mudar apenas cor é igual a ação de mudar forma e cor quando realizadas em quaisquer uma das duas figuras nas duas cores.

A operação entre essas ações pode também ser representada usando a figura dada. Por exemplo, a ação de mudar apenas forma composta com a ação de mudar forma e cor que tem como resultado a ação de mudar apenas cor, essa composição pode ser assim representada.

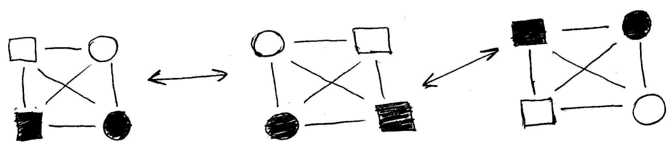


Figura 4.2: Composição de ações utilizando o diagrama

Uma outra forma de trabalhar e que parece exigir um outro nível de abstração e representação, seria olhar as ações como sendo funções bijetoras definidas no conjunto formado pelas figuras menores que constituem a figura grande como um todo. Neste caso, indicando por a, b, c, e (ou mesmo pelas setas) tais ações como segue,

a a ação de mudar apenas a forma,

b a ação de mudar apenas a cor,

c a ação de mudar a forma e a cor,

e a ação de não mudar nada,

tem-se que:

a leva o quadrado branco no círculo branco e vice-versa, e o quadrado preto no círculo preto e vice-versa;

b leva o quadrado branco no quadrado preto e vice-versa, e o círculo branco no círculo preto e vice-versa;

c leva o quadrado branco no círculo preto e vice-versa, e o quadrado preto no círculo branco e vice-versa;

e leva cada figura nela mesma, ou seja, e é a função identidade do conjunto F.

No caso em que não se pensa em termos de funções, as operações podem ser feitas visualmente e mentalmente, sem a utilização da definição matemática de composição de funções explicitamente; isso exigirá um trabalho meticuloso para que nenhuma possibilidade escape.

De qualquer uma das formas que se faça, para ver que se tem uma operação no conjunto A das ações é preciso fazer a TABELA da operação.

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Tabela 4.1: Da operação do grupo A de ações

Vendo cada ação como uma função definida em F é fácil ver que a operação composição (de funções) é associativa. Vê-se que cada elemento de G é seu próprio inverso e que e é o elemento unidade de G segundo a operação. A operação composição dá ao conjunto G uma estrutura de grupo isomorfa ao grupo de Klein.

S2.2 Consideremos quatro pontos A, B, C e D em uma circunferência de modo que $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DA}$. Nela, estão sendo aplicados movimentos, e cada movimento será dado pela referência à posição dos pontos A, B, C e D.
Estamos considerando apenas os movimentos que, quando efetuados quatro vezes consecutivas, restituem os quatro pontos à situação inicial.
No nosso caso, são permitidos apenas os movimentos de rotação.
Quantos e quais são esses movimentos?
A composição(operação) de dois desses movimentos permitidos é ainda um movimento permitido?
Em caso afirmativo, represente isso, isto é, explicite o resultado da operação entre dois quaisquer desses movimentos.
Existe alguma relação entre esses movimentos?
O conjunto formado por esses movimentos possui alguma estrutura algébrica?
Em caso afirmativo, qual e como é essa estrutura?

O objetivo específico aqui é investigar se o aluno é capaz de identificar o grupo representante desta situação. Um grupo que tem um lado um tanto "concreto", pois trata-se de uma idéia intuitiva de movimento em torno de algo, cujo significado começa a ser formado com experiências do dia-a-dia, quanto um outro abstrato, formal, associado a um conjunto de funções (permutações), uma vez que os movimentos são rotações do plano. Mais especificamente, pretende-se pesquisar a concepção do aluno da estrutura determinada pelos movimentos, a representação exibida e os invariantes utilizados.

Considere-se uma cincunferência de raio r com centro na origem do plano cartesiano.

Os pontos obtidos pela interseção da cincunferência com os eixos coordenados são indicados por A, B, C e D cujas coordenadas são: $A = (0, r)$, $B = (r, 0)$, $C = (0, -r)$ e $D = (-r, 0)$. Sob a ação da rotação a circunferência permanece a mesma, embora cada um de seus pontos mude de posição entre eles. Aqui não se tem interesse na ação da rotação em todos os pontos da circunferência, mas apenas nos pontos referidos.

Desta forma, as rotações são funções restritas ao conjunto $X = \{A, B, C, D\}$. Trata-se de quatro rotações realizadas em torno da origem através dos ângulos 0, $\frac{\pi}{2}$,π e $\frac{3\pi}{2}$ radianos, que serão indicadas por R_0, $R_{\frac{\pi}{2}}$, R_π e $R_{\frac{3\pi}{2}}$. Todas elas, com exceção da primeira, permutam esses quatro pontos entre si. Para determinar os valores das rotações nesses pontos usa-se a lei de formação da função rotação realizada em torno da origem, uma função de $\mathbf{R}^2$ em $\mathbf{R}^2$ dada por $R_{(0,\theta)}(x,y) = (xcos\theta - ysen\theta, xsen\theta + ycos\theta)$, $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$. Para a apresentação das imagens dos pontos A, B, C e D vou usar simplesmente a notação R_θ ao invés de $R_{(0,\theta)}$.

A ação da rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos nestes pontos é dada por:

$R_{\frac{\pi}{2}}(A) = R_{\frac{\pi}{2}}(0,r) = (-r,0) = D$;

$R_{\frac{\pi}{2}}(B) = R_{\frac{\pi}{2}}(r,0) = (0,r) = A$;

$R_{\frac{\pi}{2}}(C) = R_{\frac{\pi}{2}}(0,-r) = (r,0) = B$;

$R_{\frac{\pi}{2}}(D) = R_{\frac{\pi}{2}}(-r,0) = (0,-r) = C$.

A ação da rotação de π radianos nestes pontos é dada por:

$R_\pi(A) = R_\pi(0,r) = (0,-r) = C$;

$R_\pi(B) = R_\pi(r,0) = (-r,0) = D$;

$R_\pi(C) = R_\pi(0,-r) = (0,r) = A$;

$R_\pi(D) = R_\pi(-r,0) = (r,0) = B$.

A ação da rotação de $\frac{3\pi}{2}$ radianos nestes pontos é dada por:

$R_{\frac{3\pi}{2}}(A) = R_{\frac{3\pi}{2}}(0,r) = (r,0) = B$;

$R_{\frac{3\pi}{2}}(B) = R_{\frac{3\pi}{2}}(r,0) = (0,-r) = C$;

$R_{\frac{3\pi}{2}}(C) = R_{\frac{3\pi}{2}}(0,-r) = (-r,0) = D$;

$R_{\frac{3\pi}{2}}(D) = R_{\frac{3\pi}{2}}(-r,0) = (0,r) = A$.

Uma representação mais comum e mais prática das imagens de cada um desses pontos pelas quatro rotações acima é dada por

$$R_0 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix} \quad R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{pmatrix}$$
$$R_\pi = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix} \quad R_{\frac{3\pi}{2}} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix}$$

Como se trata de um conjunto finito $\Sigma = \{R_0, R_{\frac{\pi}{2}}, R_\pi, R_{\frac{3\pi}{2}}\}$ a operação (composição) nele definida está representada pela TABELA abaixo:

Vê-se, pela TABELA 4.2, que R_0 é o elemento identidade do conjunto em relação à operação composição; o elemento R_π é seu próprio inverso; os elementos $R_{\frac{\pi}{2}}$ e $R_{\frac{3\pi}{2}}$ são

$\circ$	R_0	$R_{\frac{\pi}{2}}$	R_π	$R_{\frac{3\pi}{2}}$
R_0	R_0	$R_{\frac{\pi}{2}}$	R_π	$R_{\frac{3\pi}{2}}$
$R_{\frac{\pi}{2}}$	$R_{\frac{\pi}{2}}$	R_π	$R_{\frac{3\pi}{2}}$	R_0
R_π	R_π	$R_{\frac{3\pi}{2}}$	R_0	$R_{\frac{\pi}{2}}$
$R_{\frac{3\pi}{2}}$	$R_{\frac{3\pi}{2}}$	R_0	$R_{\frac{\pi}{2}}$	R_π

Tabela 4.2: Da operação do grupo $\Sigma = \{R_0, R_{\frac{\pi}{2}}, R_\pi, R_{\frac{3\pi}{2}}\}$

inversos um do outro; e como a composição de funções é associativa, então o conjunto Σ com a operação composição é um grupo.

Se os movimentos de rotação forem aplicados a um modelo, os pontos A, B, C e D não serão identificados por suas coordenadas cartesianas, serão vistos como pontos (adimensionais) da geometria euclidiana.

Um elemento de mediação para a solução desta situação é o conceito de rotação. Se não se tem tal conceito estes dois pontos de vista não são compreendidos e trabalhados conjuntamente, a rotação reduz-se ao modelo ou, apenas, a um pretexto para a construção e representação dos elementos do conjunto Σ. Para resolver S2.2 sabendo o significado real do que estava sendo feito, o conceito de rotação (no sentido de movimento rígido do plano) era chave e a associação estabelecida acima era fundamental. É claro que essa compreensão real não era esperada. Esperava-se que ocorresse a compreensão de que os elementos do conjunto são funções bijetoras definidas no conjunto de pontos $\{A, B, C, D\}$.

Um detalhamento da Seqüência 3

Esta seqüência está constituída de duas situações-problema dando sentido ao conceito de grupo e de duas questões em aberto.

O objetivo geral com esta seqüência é investigar nos alunos os significados atibuídos às representações exibidas e os invariantes utilizados nas soluções e justificativas. Em outras palavras, pretendia-se com esta seqüência dar condições ao aluno de explicitar o seu conceito de grupo formado no processo de aprendizagem e de desenvolvimento relativo ao sistema conceitual de grupo.

Um objeto de mediação para a solução de S3.1 e S3.2 é o grupo $\mathbf{Z}_n$ dos inteiros módulo $\mathbf{N}$, uma vez que a idéia é distribuir as palavras em classes e trabalhar com o conjunto de classes e não exatamente com as palavras. A estrutura implícita no conjunto formado pelas classes com a operação de união (que também pode ser vista como uma multiplicação) é o que se chamou de gramática.

Na Seqüência 3 foram colocadas duas situações-problema, ambas relativas à identificação da estrutura da gramática de uma língua artificial. Não vou apresentar o texto da Seqüência 3 integralmente porque ele é muito longo (ver apêndice A). O texto completo traz uma exposição dos detalhes necessários à construção da língua e em seguida vem o trecho aqui colocado.

S3.1 ...Você já deve ter percebido que para inventar uma língua deste tipo precisamos de um alfabeto e de regras que determinem o uso das palavras dessa língua. Vamos então, construir duas línguas artificiais.
1) Para a primeira, vamos ter o alfabeto constituído só de uma letra, a letra A e adotaremos apenas uma regra, a seguinte:
o agrupamento AAAAAA pode ser inteiramente suprimido ou acrescentado.
Para dizer qual é a estrutura da gramática dessa língua, alguns passos precisam ser seguidos, por exemplo:
a) A partir da regra já explicitada, escreva cada uma das classes, isto é, escolha uma palavra representante para cada classe e enumere alguns de seus elementos;
b) A operação sobre o conjunto das classes é de reunião (que também pode ser vista como uma multiplicação). Use a regra, acima citada, para fazer a operação de duas quaisquer dessas classes - veja que o resultado é ainda uma classe. Construa a tábua da operação reunião sobre o conjunto de classes e verifique que essa operação é binária;
c) A partir da tábua feita no item b, você obtém uma gramática. Ao fazer uma análise dessa gramática, você descobre a sua estrutura. Essa estrutura tem um nome específico? Qual é esse nome?

Aqui se tem um alfabeto constituído por uma só letra e a adoção de uma única regra. Na língua artificial construída com esse alfabeto há uma palavra que não possui nenhuma letra (palavra vazia) e um grande número de palavras que comportam uma, duas, três, ou um número qualquer de repetições da letra A. Desta forma, tem-se E representando a palavra vazia e as palavras A, AA, AAA, AAAA, AAAAA, AAAAAA, AAAAAAA, AAAAAAAA,..., AAAAAAAAAAAAAAA, ...

Para distribuir essas palavras em classes, deve-se observar o número de repetições da letra A em cada palavra. A representação das classes será feita por extensão.

Uma das classe é a representada pela palavra E que não possui nenhuma letra. Nesta classe estão todas as palavras cujo número de repetições da letra A é congruo a 0 módulo 6 uma vez que o agrupamento AAAAAA pode ser inteiramente suprimido ou acrescentado. Assim, $\overline{E} = \{E, \text{AAAAAA}, \text{AAAAAAAAAAAA}, ...\} = \{nA \,|\, n \equiv 0 \,(mod\, 6)\}$;

A classe representada pela palavra A será indicada por $\overline{A}$. Nela estão as palavras cujo número de repetições da letra A é côngruo a 1 módulo 6. Assim,

$\overline{A} = \{\text{A}, \text{AAAAAAA}, \text{AAAAAAAAAAAAA}, ...\} = \{nA \,|\, n \equiv 1 \,(mod\, 6)\}$;

Na classe representada pela palavra AA, indicada por $\overline{AA}$, estão as palavras cujo número de repetições da letra A é côngruo a 2 módulo 6. Então,

$\overline{AA} = \{\text{AA}, \text{AAAAAAAA}, \text{AAAAAAAAAAAAAA}, ...\} = \{nA \,|\, n \equiv 2 \,(mod\, 6)\}$;

Na classe representada pela palavra AAA, indicada por $\overline{AAA}$, estão as palavras cujo número de repetições da letra A é côngruo a 3 módulo 6. Então, $\{nA \,|\, n \equiv 3 \,(mod\, 6)\} = \overline{AAA} = \{\text{AAA}, \text{AAAAAAAAA}, \text{AAAAAAAAAAAAAAA}, ...\}$;

Na classe representada pela palavra AAAA, indicada por $\overline{AAAA}$, estão as palavras cujo número de repetições da letra A é côngruo a 4 módulo 6. Então, $\{nA \,|\, n \equiv 4 \,(mod\, 6)\} = \overline{AAAA} = \{\text{AAAA}, \text{AAAAAAAAAA}, \text{AAAAAAAAAAAAAAAA}, ...\}$

Na classe representada pela palavra AAAAA, indicada por $\overline{AAAAA}$, estão as palavras cujo número de repetições da letra A é côngruo a 5 módulo 6. Então, $\{nA \,|\, n \equiv 5 \,(mod\, 6)\} = \overline{AAAAA} = \{\text{AAAAA}, \text{AAAAAAAAAAA}, \text{AAAAAAAAAAAAAAAAA}, ...\}$

Com isso obtém-se 6 classes e estas constituem o conjunto G no qual está definida a operação multiplicação. Para realizar tal operação é necessário utilizar a mesma regra adotada para a separação das palavras em classes como se vê na TABELA que segue.

$\cdot$	$\overline{E}$	$\overline{A}$	$\overline{AA}$	$\overline{AAA}$	$\overline{AAAA}$	$\overline{AAAAA}$
$\overline{E}$	$\overline{E}$	$\overline{A}$	$\overline{AA}$	$\overline{AAA}$	$\overline{AAAA}$	$\overline{AAAAA}$
$\overline{A}$	$\overline{A}$	$\overline{AA}$	$\overline{AAA}$	$\overline{AAAA}$	$\overline{AAAAA}$	$\overline{E}$
$\overline{AA}$	$\overline{AA}$	$\overline{AAA}$	$\overline{AAAA}$	$\overline{AAAAA}$	$\overline{E}$	$\overline{A}$
$\overline{AAA}$	$\overline{AAA}$	$\overline{AAAA}$	$\overline{AAAAA}$	$\overline{E}$	$\overline{A}$	$\overline{AA}$
$\overline{AAAA}$	$\overline{AAAA}$	$\overline{AAAAA}$	$\overline{E}$	$\overline{A}$	$\overline{AA}$	$\overline{AAA}$
$\overline{AAAAA}$	$\overline{AAAAA}$	$\overline{E}$	$\overline{A}$	$\overline{AA}$	$\overline{AAA}$	$\overline{AAAA}$

Tabela 4.3: Da operação do grupo $G = \{\overline{E}, \overline{A}, \overline{AA}, \overline{AAA}, \overline{AAAA}, \overline{AAAAA}\}$

Essa operação é associativa - operar com estas classes é, basicamente, associar seqüências de A (somar o número de vezes que a letra A se repete). Segundo a operação a classe $\overline{E}$ é o elemento identidade do conjunto. Cada elemento possui inverso. A classe $\overline{AAA}$ é a sua própria inversa, as classes $\overline{A}$ e $\overline{AAAAA}$ são inversas uma da outra, assim como $\overline{AA}$ e $\overline{AAAA}$. Logo, o conjunto G com a operação multiplicação tem uma estrutura de grupo, um grupo cíclico de ordem 6 gerado pela classe $\overline{A}$.

A idéia grupo-teorética da teoria dos números foi trazida, implicitamente, por Euler e Gauss a partir do conjunto $G = \{a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, ..., a^n, ...\}$ com a operação dada por $a^n \circ a^m = a^{n+m} = a^r$ em que $n+m = r(mod\, \alpha)$ para todos $a^n, a^m \in G$, α o menor inteiro diferente de zero tal que $a^\alpha \equiv 1\ (mod\, p)$ p primo. Agora, a mesma idéia pode ser vista no conjunto $X = \{\mathrm{E, A, AA, AAA, AAAA, AAAAA, AAAAAA, AAAAAAA, AAAAAAAA}, ...\}$ no qual para cada par de elementos iA, jA define-se $iA * jA = (i+j)A = rA$ em que $i + j \equiv r(mod\, 6)$ com a correspodência entre os elementos de G e de X dada por

$$\begin{array}{lccc} \varphi & G \longrightarrow & & X \\ & a^i & \longmapsto & iA \end{array}$$

S3.2 Agora, vamos construir a outra língua artificial. Para obter outra língua, precisamos mudar o alfabeto e as regras, ou apenas um deles. No caso, vamos mudar os dois. O alfabeto será constituído pelas letras A e B e as regras a serem adotadas são as seguintes:
AB e BA são permutáveis, isto é, AB substitui BA e vice-versa;
podemos cancelar ou introduzir AAA em qualquer lugar;
podemos cancelar ou introduzir BB em qualquer lugar.
Para construirmos completamente essa língua, precisamos explicitar a estrutura da gramática, para isso, antes de qualquer coisa, você deverá examinar as conseqüências provocadas pela mudança do alfabeto e das regras no conjunto de palavras e nas classes. É claro que tudo mudou: as palavras e as classes. Por exemplo, antes, a palavra AAA e a palavra que não possui nenhuma letra pertenciam a classes diferentes, agora as duas pertencem à mesma classe. Você precisa verificar também se o número de classes é o mesmo ou se mudou. Para saber qual é estrutura da gramática, você pode seguir os mesmos passos da questão anterior especificados nos itens a, b e c.

Essa língua artificial é um pouco diferente da anterior, mas a construção de ambas é semelhante. Nessa língua também há uma palavra que não possui nenhuma letra (palavra vazia). Porém, as palavras que possuem letras, possuem só a letra A, só a letra B ou ambas.

Existe, então, um grande número de palavras que comportam um número qualquer de repetições das letras A e B e em qualquer ordem. Para distribuí-las em classes, a idéia é observar em cada uma delas o número de repetições de cada uma dessas letras. Aqui, a representação das classes será feita por compreensão.

Com o uso da primeira regra, dada uma qualquer palavra com as letras A e B em qualquer ordem, é possível juntar todas as repetições da letra A, seguida de todas as repetições da letra B. Usando a segunda regra, o número de letras A que resta em cada palavra é igual a 0, ou a 1, ou a 2. Da terceira regra vem que o número de letras B que resta em cada palavra é igual a 0, ou a 1. Desta forma, obtém-se, então, seis classes:

Na classe representada pela palavra que não possui nenhuma letra, indicada por $\overline{E}$, estão todas as palavras que possuem apenas a letra A repetida **N** vezes, n côngruo a 0 módulo 3; todas que possuem apenas a letra B repetida m vezes, m côngruo a 0 módulo 2; e todas que possuem as letras A e B, A aparecendo r vezes, r côngruo a 0 módulo 3, e B aparecendo s vezes, s côngruo a 0 módulo 2. Matemáticamente essa classe pode ser assim representada

$\overline{E} = \{nA, mB, rAsB \,|\, n, m, r, s \in N;\; n, r \equiv 0\,(mod\,3),\; m, s \equiv 0\,(mod\,2)\}.$

Na classe representada pela palavra A, denotada por $\overline{A}$, estão todas as palavras que possuem apenas a letra A repetida n vezes, n côngruo a 1 módulo 3; e as que possem as letras A e B, a letra A aparecendo t vezes, t côngruo a 1 módulo 3, a letra B aparecendo m vezes, m côngruo a 0 módulo 2. Em termos simbólicos, essa classe é dada por

$\overline{A} = \{nA, tAmB \,|\, n, t, m \in N;\; n, t \equiv 1\,(mod\,3), m \equiv 0\,(mod\,2)\}.$

Na classe representada pela palavra AA, indicada por $\overline{AA}$, estão todas as palavras que possuem apenas a letra A repetida n vezes, n um número côngruo a 2 módulo 3; as que possuem as letras A e B onde a letra A aparece t vezes, t côngruo a 2 módulo 3, e a letra B aparece m vezes, m côngruo a 0 módulo 2. Simbolicamente

$\overline{AA} = \{nA, tAmB \,|\, n, t, m \in N;\; n, t \equiv 2\,(mod\,3), m \equiv 0\,(mod\,2)\}.$

Na classe representada pela palavra B, indicada por $\overline{B}$, estão todas as palavras que possuem apenas a letra B repetida m vezes, m côngruo a 1 módulo 2; as palavras que possuem as letras A e B onde a letra A aparece n vezes, n côngruo a 0 módulo 3, e a letra

B t vezes, t côngruo a 1 módulo 2. Em símbolos a classe $\overline{B}$ é dada por

$$\overline{B} = \{mB, nAtB \,|\, m, n, t \in N;\; n \equiv 0\,(mod\,3),\; m, t \equiv 1\,(mod\,2)\}.$$

Na classe da palavra AB, denotada por $\overline{AB}$, estão todas as palavras que possuem as letras A e B nas quais aparece a letra A n vezes, n côngruo a 1 módulo 3; e a letra B m vezes, m côngruo a 1 módulo 2. Sua representação simbólica é

$$\overline{AB} = \{nAmB \,|\, n, m \in N;\; n \equiv 1\,(mod\,3), m \equiv 1\,(mod\,2)\}$$

Finalmente, na classe representada pela palavra AAB, denotada por $\overline{AAB}$, estão todas as palavras que possuem as letras A e B onde a letra A aparece repetida m vezes, m côngruo a 2 módulo 3, e a letra B aparece repetida n vezes, n côngruo a 1 módulo 2. Ou seja,

$$\overline{AAB} = \{nAmB \,|\, n, m \in N;\; n \equiv 2\,(mod\,3),\; m \equiv 1\,(mod\,2)\}$$

Como na situação anterior, a operação definida no conjunto de classes G' é a multiplicação, $G' = \{\overline{E}, \overline{A}, \overline{AA}, \overline{B}, \overline{AB}, \overline{AAB}\}$. Para fazer a multiplicação utiliza-se as mesmas regras adotadas para a separação das palavras em classes, ver TABELA abaixo:

$\cdot$	$\overline{E}$	A	$\overline{AA}$	$\overline{B}$	$\overline{AB}$	$\overline{AAB}$
$\overline{E}$	$\overline{E}$	$\overline{A}$	$\overline{AA}$	$\overline{B}$	$\overline{AB}$	$\overline{AAB}$
$\overline{A}$	$\overline{A}$	$\overline{AA}$	$\overline{E}$	$\overline{AB}$	$\overline{AAB}$	$\overline{B}$
$\overline{AA}$	$\overline{AA}$	$\overline{E}$	$\overline{A}$	$\overline{AAB}$	$\overline{B}$	$\overline{AB}$
$\overline{B}$	$\overline{B}$	$\overline{AB}$	$\overline{AAB}$	$\overline{E}$	$\overline{A}$	$\overline{AA}$
$\overline{AB}$	$\overline{AB}$	$\overline{AAB}$	$\overline{B}$	$\overline{A}$	$\overline{AA}$	$\overline{E}$
$\overline{AAB}$	$\overline{AAB}$	$\overline{B}$	$\overline{AB}$	$\overline{AA}$	$\overline{E}$	$\overline{A}$

Tabela 4.4: Da operação do grupo $G' = \{\overline{E}, \overline{A}, \overline{AA}, \overline{B}, \overline{AB}, \overline{AAB}\}$

Pela TABELA 4.4, vê-se que, de fato, se tem uma operação binária sobre o conjunto G de classes. Além disso, essa operação é associativa, pois, com a utilização da primeira regra, pode-se juntar todas as repetições da letra A seguida de todas as repetições da letra B, então a ordem de combinação das classes não modifica o resultado. Segundo a operação o conjunto de classes possui elemento identidade, a classe $\overline{E}$. Cada elemento possui um inverso: a classe $\overline{B}$ é a sua própria inversa, a classe $\overline{A}$ é a inversa de $\overline{AA}$ e a classe $\overline{AB}$ é a inversa da classe $\overline{AAB}$. Conseqüentemente o conjunto das classes com a operação de multiplicação tem estrutura de grupo - um grupo cíclico de ordem seis gerado pela classe $\overline{AB}$.

Para entender essa língua artificial o aluno precisa se abstrair do alfabeto, das palavras, dos seus significados e da língua conhecida e ir construindo a língua a partir das informações dadas.

S3.3 Agora que você já reconheceu a gramática das duas línguas, analise a construção e a estrutura de cada uma delas atentando para os aspectos explicitados nas seguintes questões. Você pode listar algumas características da estrutura dessas duas gramáticas? Elas podem ser comparadas? De que forma? Existe alguma similaridade entre elas? Fale sobre isso.

O objetivo com estas perguntas era verificar o quão as particularidades da estrutura de um grupo tinha sido percebida.

A gramática de cada uma das línguas artificiais tem estrutura de grupo, mas cada grupo em si possui uma particular estrutura vinculada às relações entre seus elementos dadas pela operação definida no conjunto base. A estrutura de que falo diferencia ou iguala dois grupos quaisquer finitos de mesma ordem, segundo a existência ou não de um isomorfismo entre eles.

Aqui, os dois grupos (ou as duas gramáticas) são cíclicos de ordem seis, portanto são isomorfos. Dizer que estes grupos são isomorfos significa dizer que os grupos G e G' são similares sobre um apropriado ato de abstração. É preciso abstrair-se da representação dos elementos de cada grupo e deter-se, apenas, nas relações entre eles. O primeiro gerado pela classe da palavra A, o segundo gerado pela classe da palavra AB. Fazendo a associação entre esses geradores, isto é, $A \to AB$, as outras vêm como consequência: $AA \to AA$, $AAA \to B$, $AAAA \to A$, e $AAAAA \to AAB$.

Para a solução desta atividade, os conceitos a serem mobilizados explicitamente eram de homomorfismo e isomorfismo de grupos, de grupo cíclico, de ordem de um elemento.

S3.4 O que você entende por grupo matemático? Dê exemplos de conjuntos com estrutura de grupo e de conjuntos que não têm estrutura de grupo, dando as razões pelas quais estes últimos não são grupos.

Aqui o objetivo não é o mesmo que em S1.9, uma vez que neste estágio o aluno já terá realizado todas as atividades inerentes à disciplina, terá estudado outros conceitos que o auxiliaram na formação do conceito de grupo, e, possivelmente, terá tido contato com muitas situações relacionadas a grupo. Conseqüentemente, o seu entendimento ou a sua concepção sobre o que seja grupo matemático poderá ser explicitada de uma forma bem mais elaborada (no sentido de envolver e articular significados construídos) que em S1.9.

Quanto aos exemplos, estava fácil apresentá-los por causa da diversidade na natureza dos elementos de um conjunto e das possíveis operações que podem ser definidas. Para dar exemplos de estruturas que não são grupos, poderia-se abusar dos exemplos de grupóides, semi-grupos e monóides apresentados no apêndice D.

4.5 Os procedimentos de análise

A análise dos dados foi realizada por etapas. Primeiro fiz um levantamento preliminar dos dados (escritos e orais) e neste levantamento observei um espectro de respostas muito diversificado e de difícil categorização, sob os diversos aspectos em que as soluções estavam sendo analisadas.

Em seguida, para auxiliar na organização e estruturação das soluções apresentadas pelos alunos, foi elaborado um roteiro de questões, com base nas teorias de formação de conceitos estudadas e no detalhamento das atividades realizado no item anterior, que estou denominando de Roteiro para Estruturação e Análise dos Dados (ver apêndice B).

Este roteiro está constituído de questionamentos gerais e/ou específicos sobre as atividades destacando, com base em Vygotsky, aspectos relacionados aos significados das palavras e expressões-chave e aos enunciados das soluções e justificativas como um todo. E, com base em Vergnaud, perguntas relativas às competências e às concepções expressas nas soluções das atividades, às situações-problema, aos significados, às representações e aos invariantes pertinentes ao conceito de grupo.

Num primeiro momento, foi feita uma análise individual seguida de uma análise comparativa de semelhanças e regularidades entre as soluções individuais com o propósito de compor os elementos para a estruturação de soluções comuns, analisando-se a hierarquização das estruturas das soluções obtidas.

Após uma análise comparativa das soluções por escrito e das expressões orais, considerando as mediações realizadas durante as entrevistas, foi possível sistematizá-las em categorias. Tais categorias foram sugeridas pelos próprios dados, embora tivessem como pano de fundo a realização do detalhamento das atividades. Para a categorização dos conhecimentos expressos (concepções, significados atribuídos às palavras que fazem a mediação entre o conceito e o objeto que são fundamentais para o entendimento das atividades e elaboração de suas soluções, significados atribuídos às situações, representações exibidas, procedimentos e invariantes utilizados, tal como visto no capítulo 3) foram sugeridas cinco categorias de análise. A partir disso, algumas atividades foram deixadas isoladas, outras foram reorganizadas e agrupadas (ver capítulo 6).

Cada categoria apresenta uma certa quantidade de itens. Cada item representa um nível de solução de uma ou de várias atividades. Os itens de cada categoria estão dispostos em uma ordem de gradação ascendente de solução em relação a algum (ns) aspecto (s) daquela (s) atividade (s) - que podem ser em relação a entendimentos, a concepções, a significados, a representações etc., partindo de uma solução, segundo o meu ponto de vista, menos elaborada (inferior) para uma mais elaborada (superior) (ver capítulo 6).

A princípio, apesar do roteiro ter sido extremamente útil para a sistematização das soluções em categorias, ele sozinho não me permitia agrupar os alunos em subconjuntos que tivessem um entendimento comum em relação a todas as categorias, uma vez que havia uma enorme variação de itens associados aos alunos em relação às categorias. Havia, de minha parte, um entendimento mais ou menos claro, do nível de desenvolvimento de cada estudante quanto ao seu conceito de grupo, mas não de subconjuntos destes estudantes. Tornou-se, portanto, quase impossível separá-los em níveis de formação do conceito com base numa análise subjetiva, ficando evidente a necessidade de usar uma técnica estatística para a realização do agrupamento dos alunos em diferentes níveis de construção do conceito de grupo.

A técnica estatística utilizada foi a de Análise de Agrupamento (*Cluster Analysis*) usando o método K-means e o software SPSS[4]. Análise de Agrupamento é o nome dado

[4] O SPSS - Statistical Package for the Social Sciences é um software usado para condução de análises

às técnicas de análise que dividem os dados em grupos. Tal análise classifica objetos e pessoas sem preconceitos, isto é, observando apenas as semelhanças ou dissimilaridades entre elas, sem definir previamente critérios de inclusão em qualquer agrupamento. Os métodos de análise de agrupamentos tentam organizar um conjunto de indivíduos, para os quais é conhecida informação detalhada, em grupos relativamente homogêneos. Para este trabalho, definiu-se, previamente, que a análise seria realizada na perspectiva de três agrupamentos, que aqui estão sendo denominados de níveis.

Para a realização da análise estatística, foi confecionada, com base na estruturação das categorias, uma matriz que estou chamando de matriz-resultado (ver capítulo 6). A matriz-resultado tem 18 linhas (correspondentes aos 18 alunos) e 11 colunas (correspondentes aos 11 itens-categorias: 1, 2A, 2B, 2C, 2D, 3A, 3B, 3C, 3D, 4 e 5, nesta ordem). O elemento a_{ij} que está na linha i e coluna j da matriz, indica o item-solução do aluno $i, 1 \leq i \leq 18$ em relação à categoria $j, 1 \leq j \leq 11$, da lista de categorias. Por exemplo, a categoria 3B está na coluna 7 e como ela possui 5 itens, então $a_{i,7}$ poderia ser igual a 1, 2, 3, 4 ou 5, para qualquer i, $1 \leq i \leq 18$. Assim, o elemento $a_{5,7}$ da matriz-resultado indicava o item-solução do aluno número 5 relativo à categoria 3B. Se a solução do aluno 5 nesta categoria estava caracterizada no item 3, então $a_{5,7} = 3$.

estatísticas, manipulação de dados e gerenciamento de tabelas e gráficos que sintetizam dados.

Capítulo 5

Aspectos do Campo Conceitual de Grupo

Embora Vergnaud não tenha tratado especificamente do campo conceitual de grupo, as suas considerações teóricas, discutidas no capítulo 2, conduziram-me a uma elaboração teórica de elementos constituintes do campo conceitual de grupo.

Antes da abordagem propriamente dita de aspectos e elementos do referido campo, faz-se necessário discutir o significado da palavra grupo.

Quando o sujeito entra em contato pela primeira vez com uma determinada palavra (seja fora ou dentro do ambiente escolar), o processo de desenvolvimento do significado dessa palavra, ou equivalente, do conceito mediado por essa palavra, está apenas começando. "Neste período ela é sempre uma palavra imatura. O gradual desenvolvimento interno do seu significado redunda também no amadurecimento da própria palavra". (VYGOTSKY, 2001, p. 394).

Na matemática, a princípio, a idéia de grupo está associada a de conjunto. Um grupo é um conjunto, porém não é qualquer conjunto. É um conjunto no qual está definida uma operação entre seus elementos, como também não é todo conjunto com uma operação que é grupo. A operação definida neste conjunto é uma operação binária. Além disso, um conjunto com uma operação binária para ser um grupo tem que satisfazer algumas propriedades. Assim sendo, um grupo é um conjunto com uma operação binária que satisfaz certas propriedades.

Com base em Vygotsky (2001), o conceito de grupo é o significado da palavra grupo e este, por sua vez, é uma generalização. O que significa isso?

Do ponto de vista matemático, significa que, quando me refiro à palavra grupo, não estou pensando em um particular grupo, estou pensando no objeto matemático chamado grupo de um modo geral. Essa palavra diz respeito a todos os tipos de grupos que podem ser identificados segundo a combinação de dois traços essenciais, um traço refere-se à ordem (finito ou infinito), o outro refere-se à natureza da estrutura (algébrica ou topológica). Contudo, se nenhuma restrição for feita quando falo a palavra grupo, esta inclui todos os grupos algébricos e todos os grupos topológicos, finitos ou infinitos. Vê-se, portanto, que a expressão grupo algébrico tem uma generalidade diferente daquela dada pela palavra grupo. Esta última é mais geral, porque todo grupo algébrico é também grupo. Já a expressão grupo algébrico é mais geral que grupo algébrico finito, porque nem todo grupo algébrico é finito. Aqui, a palavra grupo refere-se apenas aos grupos algébricos finitos ou infinitos.

A natureza dos elementos do conjunto base e a operação nele definida conduzem à diversidade de situações que dão sentido ao conceito de grupo e de sistemas de representação sobre os quais o indivíduo realiza operações fazendo uso dos invariantes operatórios. O conjunto dos invariantes está constituído de objetos, propriedades, conceitos, teoremas e relações entre eles. Todos estes elementos - situações, representações e invariantes operatórios - em estreita conexão, determinam o campo conceitual de grupo.

Para uma organização preliminar do campo conceitual de grupo, é preciso considerar um conjunto de situações, cujo tratamento pressupõe *a priori* um conjunto de elementos sobre o qual está definida uma operação binária, um conjunto de propriedades, conceitos e teoremas que permitem analisar tais situações como tarefas matemáticas. São componentes básicos da estrutura de grupo os conceitos de conjunto, par ordenado, produto cartesiano, relação (binária, ternária etc.), relação de equivalência, função, operação binária, quantificadores, propriedades da operação binária.

Neste capítulo limitar-me-ei à apresentação dos conceitos explicitamente utilizados na definição de grupo: conjunto e operação binária, e nas propriedades da operação binária. Os demais conceitos inter-relacionados com o conceito de grupo estão apresentados nos apêndices de forma resumida e sem o peculiar rigor matemático, uma vez que estes foram mapeados, como ferramentas de apoio para a apresentação de elementos que constituem o campo conceitual de grupo.

Significados para as palavras conjuntos, operação e propriedades de uma operação vêm sendo formados pelo indivíduo espontaneamente ou em um ambiente sistematizado desde o Ensino Fundamental. Entretanto, para o estudo introdutório da teoria de grupo, vê-se, portanto, que é imprescindível uma generalização, ampliação e abstração de todos estes conceitos e de uma certa flexibilidade no seu uso, principalmente pela diversidade da natureza dos elementos dos conjuntos que servem de suporte para uma estrutura algébrica e das operações neles definidas.

Sobre o conceito de conjunto e suas representações

A formação do conceito de conjunto se inicia com uma noção intuitiva. Há uma idéia intuitiva de que conjunto é uma dada coleção de objetos. Essa idéia é muito comum. Resta saber até onde vai esse conhecimento para cada indivíduo, o que cada um imagina que tais objetos sejam ou que podem ser, a quantidade e o que pode ser feito com eles, isto é, que operações podem ser realizadas entre eles. De um ponto de vista formal e abstrato, considera-se conjunto uma noção primitiva que não se define.

Há dois caminhos a serem seguidos quanto à representação de um conjunto. Apresenta-se um conjunto listando os seus elementos ou através de uma propriedade característica de seus elementos. Por exemplo, no nosso alfabeto pode-se definir o conjunto das vogais escrevendo $S = \{a, e, i, o, u\}$ ou usando uma propriedade característica, a saber $S = \{x \,|\, x \text{ é uma vogal }\}$. Nos dois casos, dado um elemento é possível dizer se ele está ou não no conjunto. Dada qualquer letra do alfabeto, ao acaso, é possível averiguar e dizer se essa letra pertence ou não ao conjunto S, ou seja, se essa letra é uma vogal. Vê-se que no segundo caso, os elementos do conjunto estão bem determinados pela tal propriedade, esta explicita o(s) traço(s) ou o(s) atributo(s) que é(são) comum(ns) a todos eles. No conjunto $\{a, x, i, 2, 10\}$ não existe, a priori, uma característica ou um traço comum a todos os seus elementos.

Em geral, quando se lida com um conjunto de objetos pertencentes a um dado universo, refere-se a objetos bem determinados, de modo que, dado um objeto qualquer, no universo dos objetos considerados, se pode averiguar com rigor se aquele objeto pertence ou não ao conjunto com o qual se trabalha. Se A é um conjunto cujos elementos possuem a propriedade P, então, simbolicamente escreve-se $A = \{x \mid x \text{ possui a propriedade } P\}$. Esta propriedade determina o vínculo essencial e uniforme entre os objetos abrangidos por aquele particular conjunto. A generalização da palavra conjunto ou do conceito de conjunto se dá à medida que essa propriedade vai sendo ampliada, pois ela determina cada conjunto em si. No estudo da matemática avançada é com essa formalização de conjunto que se trabalha.

Sobre o conceito de operação e suas representações

Um componente básico da matemática em geral e da álgebra em particular é a operação no seu sentido mais amplo. Existem vários exemplos de operação: operações lógico-matemáticas (comparar, selecionar, classificar, seriar, relacionar, quantificar, tomar decisões etc.), operações aritméticas (envolve apenas números naturais), operações numéricas (envolvendo números quaisquer), operações algébricas (envolve expressões algébricas), operação binária, operação aditiva, operação multiplicativa, operação composição (de funções), operação diferença simétrica etc.

Um objeto básico da teoria de grupo e também da álgebra é a operação binária[1], um conceito estudado somente em nível superior.

A formação do conceito de operação binária envolve os conceitos de conjunto, par ordenado, produto cartesiano, relação e de função, uma vez que, formalmente, uma operação binária $*$ definida em um conjunto S é uma função definida em $S \times S$ tomando valores em S, que para cada par ordenado (x, y) de elementos de S associa o elemento $x*y$ pertencente a S. Simbolicamente a operação pode ser indicada por $\begin{array}{rccc} * : & S \times S & \rightarrow & S \\ & (a, b) & \mapsto & a * b \end{array}$

A palavra binária refere-se ao fato da operação ser definida/realizada entre dois elementos de S, em pares de elementos (a, b) de $S \times S$. Isto significa que, em cada momento, operam-se dois elementos de S. Estes elementos não são necessariamente distintos.

[1]Nos livros de álgebra várias terminologias aparecem como referência ao mesmo objeto matemático que aqui está sendo chamado de operação binária, são eles: lei de composição interna, operação interna, operação binária ou, apenas, a palavra operação.

Para designar o elemento resultante da operação dos elementos a e b de um conjunto S, usa-se um símbolo denotativo da operação entre as letras a e b. As operações são indicadas por símbolos como $+$, $\cdot$, $*$, $\circ$, $\bullet$,$\otimes$,$\odot$,... A operação entre os elementos a e b é representada por: $a + b$, $a \cdot b$, $a * b$, $a \circ b$, $a \bullet b$,$a \otimes b$, $a \odot b$, ... Por analogia com as operações de adição e multiplicação são muito usuais a notação aditiva $a + b$ e a notação multiplicativa $a \cdot b$ (ou simplesmente a justaposição ab) para simbolizar uma operação entre esses elementos. Os algebristas quase não usam símbolos especiais para representar uma operação binária diferentes dos convencionais $(+)$ e $(\cdot)$, além disso, frequentemente, fazem a justaposição das letras ab no lugar de $a \cdot b$.

O uso de uma TABELA de dupla entrada representando uma operação em um conjunto S é muito útil e freqüente quando o conjunto S tem um número finito de elementos e este número é pequeno. Para construí-la coloca-se na linha do topo (parte superior) e na coluna da extrema esquerda da TABELA os elementos do conjunto e na mesma ordem. Se $S = \{a_1, a_2, ...a_n\}$ o resultado $a_i * a_j = a_{ij}$ correspondente a cada par ordenado (a_i, a_j) de elementos de S, é encontrado na interseção da linha i com a coluna j como indicado na TABELA que segue.

$*$	a_1	a_2	$\cdots$	a_j	$\cdots$	a_n
a_1	a_{11}	a_{12}		a_{1j}		a_{1n}
a_2	a_{21}	a_{22}		a_{2j}		a_{2n}
$\vdots$						
a_i	a_{i1}	a_{i2}		a_{ij}	$\cdots$	a_{in}
$\vdots$						
a_n	a_{n1}	a_{n2}		a_{nj}		a_{nn}

Tabela 5.1: Da operação no conjunto genérico $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

Tabela 5.2: Da operação no conjunto $S = \{e, a, b, c\}$

A TABELA 5.2 define uma operação sobre o conjunto $S = \{e, a, b, c\}$, visto que todo par de elementos do conjunto S tem um correspondente em S, basta ver a interseção de cada linha i com cada coluna j, $1 \leq i, j \leq 4$.

Ampliar um domínio com a introdução de novos símbolos, de tal forma que as leis válidas para o domínio original prevaleçam no domínio maior, é um aspecto do processo matemático característico da generalização. Desta forma, a operação binária é uma generalização das operações de adição e multiplicação nos conjuntos numéricos estudadas no Ensino Fundamental.

Sobre as propriedades de uma operação

O conceito de propriedade é muito usado na matemática e em diferentes domínios. Uma propriedade de um objeto é uma qualidade própria, uma característica ou um atributo daquele objeto. Esses objetos podem ser dos mais variados tipos, tais como: elementos de um conjunto, relações, funções, figuras etc.

Quando se fala de propriedades de uma operação binária, há uma questão muito sutil e que exige do estudante um certo poder de abstração.

As propriedades vinculadas à operação binária são: associativa, comutativa, do elemento identidade e do elemento inverso. Se $*$ uma operação binária em um conjunto S, então

A: a operação $*$ é associativa se, e somente se, $(a*b)*c = a*(b*c)$ para todos $a, b, c \in S$;

C: a operação $*$ é comutativa se, e somente se, $a * b = b * a$ para todos $a, b \in S$;

E: o conjunto S possui elemento identidade segundo a operação S se, e somente se, existe um elemento $e \in S$ tal que $e * x = x * e = x$ para todo x em S;

I: cada elemento do conjunto S possui um inverso também em S segundo a operação $*$ se, e somente se, dado qualquer elemento $a \in S$, existe um elemento $a' \in S$ tal que $a' * a = a * a' = e$.

Há propriedades que são estritamente operatórias e outras que não. Em geral, uma propriedade, que é estritamente operatória, mostra as várias formas pelas quais os elementos de um determinado domínio podem ser operados sem alterar os resultados provenientes de qualquer uma das formas de operação.

Somente as propriedades associativa e comutativa estão direta e exclusivamente associadas às formas de combinação dos elementos. São de fato propriedades operatórias, porém, o mesmo não acontece com as outras duas que, embora sejam utilizadas para determinar os tais elementos, de certa forma, dizem o que o objeto é. Elas estão entre as propriedades da operação, mas como o próprio nome diz - propriedade do elemento identidade e propriedade do elemento inverso - elas são propriedades do elemento. Além disso, existe uma diferença entre as duas. O elemento identidade, que é único no conjunto, é também uma propriedade do conjunto vinculado à operação (ele possui ou não tal elemento), enquanto que o elemento inverso é uma propriedade de cada elemento, pois este possui um único inverso segundo à operação. Esse entendimento não é imediatamente assimilado pelo estudante.

Assim como há várias expressões para nomear o ente operação binária, existem várias terminologias que são usadas para os elementos caracterizados nas propriedades do elemento identidade e do elemento inverso e várias notações para os mesmos.

Para o primeiro elemento referido, as expressões comumente utilizadas são: elemento identidade, elemento neutro e elemento unidade; para o segundo elemento aparecem as expressões: elemento oposto, elemento inverso, elemento simétrico (ou elemento simetrizável), inverso aditivo, inverso multiplicativo. Entretanto, em geral, há uma associação do uso de determinadas expressões com a operação/representação utilizada.

Se a operação/representação utilizada for a aditiva o elemento caracterizado em E é indicado pelo símbolo 0 (zero) e chamado de elemento neutro; o elemento relativo à I é indicado por $-a$ e chamado de elemento simétrico, elemento oposto, ou ainda, inverso aditivo. Se a operação/representação for a multiplicativa chama-se elemento indicado em E por elemento unidade ou elemento identidade e indica-se por 1 (um), e elemento inverso ou inverso multiplicativo para o elemento definido em I e indica-se tal elemento por a^{-1}.

Se a operação/notação não é explicitamente aditiva e nem multiplicativa usa-se as expressões elemento identidade em E e representa-se pelas letras e ou u e elemento inverso para referir-se ao elemento tratado em I ou diz-se que o elemento é inversível e representa-se por a' ou mesmo por a^{-1}.

Em geral, nos livros de álgebra abstrata a única estrutura que se apresenta em um conjunto munido de uma só operação é a de grupo. Nos livros pesquisados, apenas Alencar Filho (1978) e Carvalho et al (1984) consideram explicitamente um conjunto com estrutura, quando nele se define uma operação binária. Nesta perspectiva e de um ponto de vista mais especifico da matemática, "quando um conjunto foi dotado ou munido de uma operação interna, diz-se que se lhe conferiu uma estrutura ou que ele foi algebrizado" (CARVALHO et al, 1984, p. 193). A partir daí é apresentada uma hierarquia de estruturas munidas de uma única operação, partindo da menos exigente ou a mais pobre para, paulatinamente, acrescentar restrições que devem ser satisfeitas, enriquecendo a estrutura. Tratarei agora da estrutura de grupo, as demais estruturas estão apresentadas no apêndice D.

A estrutura de grupo

Seja G um conjunto e seja $*$ uma operação binária definida sobre G. Diz-se que esta operação define uma estrutura de grupo sobre o conjunto G se, e somente se, as seguintes propriedades forem satisfeitas:

G_1: a operação $*$ é associativa, isto é, $(a * b) * c = a * (b * c)$ para todos $a, b, c \in G$;

G_2: o conjunto G possui um elemento identidade segundo a operação $*$. Isto é, existe um elemento $e \in G$ tal que $e * x = x * e = x$ para todo x em G;

G_3: cada elemento de G possui um inverso também em G segundo a operação $*$. Isto significa que dado qualquer elemento $a \in G$, existe um elemento $a' \in G$ tal que $a' * a = a * a' = e$.

Tal como foi visto, a notação $(G, *)$ indica que o conjunto G está munido de uma operação binária $*$. A frase "seja $(G, *)$ um grupo com a operação $*$", frequentemente, é substituída por "seja G um grupo".

Se a operação $*$ satisfaz a propriedade G_4: a operação $*$ é comutativa, ou seja, $a * b = b * a$ para todos $a, b \in G$, diz-se que G é um grupo comutativo ou abeliano.

Com esse texto lingüístico o entendimento da definição de grupo parece ser facilitado. Nesta definição as propriedades de uma operação binária estão claramente explicitadas por G_1, G_2 e G_3, assim como as relações entre o conjunto, a operação e os elementos.

Em G_2 diz-se que existe um elemento $e \in G$ satisfazendo uma certa condição e que esse elemento é o elemento identidade para a operação $*$. Em G_3 vê-se que o elemento a' é o inverso de a com respeito a operação $*$. Ou seja, o elemento identidade e o inverso de cada elemento pertencem ao conjunto, mas a existência deles depende da operação definida no conjunto.

A propriedade G_3 traz um aspecto fundamental da estrutura de grupo, que é a inversibilidade. Quaisquer que sejam a natureza do elemento do conjunto e a operação nele definida, existe sempre a possibilidade de se desfazer o que foi feito ou de retorno à posição original após um movimento ou transformação realizada.

Por exemplo, sabe-se que o conjunto Q^* dos números racionais não nulos com a multiplição usual é um grupo, em que o o elemento 1 (um) verifica a condição dada por G_2 e que para cada elemento $\frac{a}{b} \in Q^*$, existe $\frac{b}{a} \in Q$ tal que $\frac{a}{b} \cdot (\frac{b}{a}) = 1$. Ou seja, $e = 1$ e $(\frac{a}{b})' = \frac{b}{a}$. Entretanto, o conjunto Q^* com a operação $*$ dada por $a * b = \frac{ab}{2}$ também é grupo, porém o elemento que verifica a condição dada em G_2 é o elemento 2, isto é, $e = 2$. Além disso, para cada $\frac{a}{b} \in Q^*$ o seu inverso segundo a operação $*$ é $\frac{4}{a}$, assim, $(\frac{a}{b})' = \frac{4}{a}$.

Das propriedades da operação binária decorrem outras propriedades ou resultados, tais como:

Se G é um grupo, então:

a) O elemento identidade de G é único;

b) Todo $a \in G$ tem um único inverso;

c) Para todo $a \in G$, $(a^{-1})^{-1} = a$;

d) Para todos $a, b \in G$, $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$;

e) Dados $a, b \in G$, as duas equações $a*x = b$ e $y*a = b$ têm soluções únicas para $x, y \in G$;

f) Vale a lei do cancelamento à esquerda (se $a*b = a*c$ então $b = c$) e a lei do cancelamento à direita (se $b * a = c * a$ então $b = c$).

Estes invariantes são fundamentais para o tratamento das situações, cuja proposta é a identificação (ou a demonstração) das estruturas de monóide, semigrupo, grupo e subgrupo. As estruturas de monóide, semigrupo e grupo são dadas no apêndice D; a estrutura de subgrupo está apresentada no apêndice E.

Há muitos problemas envolvendo o conceito de grupo em que somente as propriedades da operação ou as que delas decorrem são suficientes para resolvê-los. Diante disto, torna-se fundamental os significados atribuídos a estas propriedades e a forma como elas são utilizadas.

Fraleigh (1989) destaca que uma das motivações para o estudo de grupo é a variada possiblidade do seu uso para resolver equações. Isso está fortemente impresso na origem e no desenvolviemnto deste conceito como se viu.

No caso das equações lineares do tipo $a * x = b$, a e b elementos fixos e arbitrários em um dado conjunto S, x elemento (incógnito) de S a ser determinado (ver capítulo 5). Esse uso é imediato e, muitas vezes, de forma inconsciente. Este tipo de equação é uma ferramenta importante na matemática, ela aparece freqüentemente representando situações em vários domínios.

Pela diversidade da natureza dos elementos que podem ser relacionados através destas equações (números, funções, matrizes, conjuntos etc.) e pela necessidade do uso das propriedades para resolvê-las, determinar a solução destas equações pode ser uma tarefa muito útil para a formação de significados (pelo estudante) para o objeto matemático chamado grupo. Encontrar a solução para essa equação faz com que o indivíduo mobilize o seu conceito de operação binária e de propriedades da operação vendo, inclusive, a necessidade de S ser grupo para que a equação tenha solução.

Pode-se dar exemplos em que não é possível resolver uma tal equação por haver operações binárias que não dão todas as condições necessárias para isso. É o caso da equação $3 + x = 1$ no conjunto dos números naturais, cuja solução envolve uma transformação negativa, que é representada por um número inteiro relativo; e da equação $a * x = a$ no conjunto $S = \{a, b, c\}$ com a operação $*$ dada pela próxima TABELA, no qual não existe nenhum elemento x que operado com a dê como resultado o próprio a.

$*$	a	b	c
a	b	c	b
b	a	c	b
c	c	b	a

Tabela 5.3: Da operação no conjunto $S = \{a, b, c\}$

Sobre as representações de grupos

Visto que a estrutura de um grupo está associada a um par $(G, *)$, a sua representação está constituída pela representação do conjunto G e da operação $*$. Já foram discutidas representações para um conjunto e para uma operação binária, inclusive a representação de uma operação por meio de uma TABELA. Todavia, para que uma TABELA, apresentando uma operação binária em um conjunto finito, represente um grupo, é preciso que ela apresente algumas características.

Já é sabido que, se a operação é dada por uma TABELA, os elementos do conjunto aparecem na sua linha superior (linha do topo) e na sua extrema coluna da esquerda e na mesma ordem. Sabe-se por G_2 que existe um elemento no conjunto que atua como a identidade. A condição $x * e = x$ para todo $x \in G$, significa que a coluna da TABELA que contém o elemento e em sua parte superior, deve conter exatamente os elementos que aparecem na coluna da extrema esquerda e na mesma ordem. Similarmente, a condição $e * x = x$ para todo $x \in G$ significa que a linha da TABELA, que contém o elemento e na sua extrema esquerda, deve conter todos os elementos que aparece no topo e na mesma ordem.

O fato de que cada elemento a tem um inverso à direita $(a * a^{-1} = e)$ e a esquerda $(a^{-1} * a = e)$ e que estes inversos coincidem, significa que o elemento e deve aparecer no cruzamento da linha que contém o elemento a com a coluna que contém o elemento a^{-1}. Assim o elemento e deve aparecer uma única vez em cada linha e em cada coluna, já que as equações $a * x = e$ e $y * a = e$ têm uma única solução em S, ou seja, $x = y$. Pela lei do cancelamento à direita e à esquerda tem-se que cada elemento a do grupo deve aparecer somente uma vez em cada linha e em cada coluna da TABELA.

Em suma, se na TABELA de uma operação sobre um conjunto (finito) há um elemento atuando como identidade, se em cada linha e em cada coluna, cada elemento do conjunto aparece exatamente uma única vez, conseqüentemente a operação define no conjunto uma estrutura de grupo se, e somente se, a operação for associativa. Se a operação $*$ estiver definida por uma regra ou lei que caracterize o elemento $a * b$, a lei associativa, em geral, é fácil de ser verificada. Entretanto, quando a operação é dada por uma TABELA, verificar a lei associativa torna-se uma tarefa difícil.

Além das representações dos elementos do par $(G, *)$, já discutidas, há uma outra - a representação permutacional. Foi visto, no capítulo 3, que o primeiro exemplo de grupo na matemática foram os grupos de permutações (ver apêndice D) e foi a partir deles que o pensamento grupo-teorético estendeu-se em toda a matemática. Eles serviram de suporte para o surgimento de outros grupos e para o desenvolvimento do conceito de grupo como um todo. São grupos de fácil representação e operacionalidade e têm um papel fundamental na teoria de grupo, pois há um resultado, devido à Cayley (ver apêndice E), de que todo grupo é estruturalmente equivalente a um grupo de permutações. Estes grupos são extremamente úteis ao tratamento das situações, pois existe a possiblidade da passagem de uma representação de um grupo (finito) qualquer à uma representação permutacional e da obtenção de informações do grupo original a partir destes.

Sobre as situações

À luz das discussões feitas no capítulo 2, para que, de fato, o conceito de grupo seja formado de forma significativa é preciso lançar mão de situações-problema envolvendo este conceito em seus diversos significados. Os problemas que envolvem este conceito trazidos pelos livros de álgebra abstrata, com exceção dos grupos diedrais, quase sempre contemplam o seu significado matemático abstrato. Entretanto, outros livros (citados no início do capítulo) trazem situações-problema com outros significados.

Tal como foi visto no capítulo anterior, as diferentes situações nas quais o pensamento grupo-teorético foi sendo aplicado foram moldando este conceito, o que lhe atribui uma natureza extremamente dinâmica e fértil.

Cada uma das situações, que dão sentido ao conceito em estudo, está representada por uma estrutura de grupo e entre estas, certamente, há estruturas que se repetem. O meu objetivo não é fazer um mapeamento das situações que ofereçam a mesma estrutura, mas, sim, fazer um paralelo com o processo de desenvolvimento deste conceito, processo este que induziu-me a pensar em três classes de situações.

Com base na teoria dos campos conceituais, a expressão situações-problema refere-se aqui, àquelas tarefas que tornam os conceitos significativos, e que exigem do estudante o entendimento de cada conceito participante da situação. São tarefas nas quais o conceito está implícito, surgindo durante a solução, para a qual o aluno não tem um esquema automatizado. A tarefa em si é uma situação de aprendizagem e de formação de significados relativos ao conceito.

No processo de desenvolvimento do conceito de grupo, as áreas em que ele surgia e/ou era aplicado eram dispersas e havia especificidades na forma como ele era dado, percebido e aplicado. Cada caso era um caso, não havia regras fixas. Com o prosseguimento das investigações, os grupos de transformações foram sendo formalizados e, ao mesmo tempo, aparecendo formas mais claras e uniformes de suas representações. Só depois da formalização deste conceito é que surgiram os grupos envolvendo os conjuntos númericos e, mais tarde, os grupos cujos elementos são classes.

As classes de situações têm por base este desenvolvimento do conceito. A primeira classe engloba situações dispersas em vários contextos - ela, de certa forma, reflete a desordem com que os grupos foram surgindo em várias direções. Na segunda classe, isso já não ocorre, as situações têm origem na geometria e significados bem característicos desta área -, os elementos dos grupos são transformações e a operação é a composição (de transformações). As situações da terceira classe, à primeira vista, parecem dispersas, todavia, elas têm um ponto em comum - envolvem significados matemáticos abstratos.

As três classes conjuntamente percorrem um certo caminho quanto à natureza de seus elementos, às operações e às representações. Partem de elementos mais concretos, de significados mais comuns e de representações pouco formais e simbólicas, para elementos e significados mais abstratos e representações formais e simbólicas.

No que segue, apresento as classes de situações, seus significados, os invariantes e as representações necessárias para o tratamento matemático das mesmas. Para um maior entendimento das classes, algumas situações-exemplo são necessárias, assim como a representação dos grupos associados a cada uma delas. As estruturas de grupo que representam as situações-problema são encontradas em quase todos os livros de álgebra utilizados no curso.

A primeira classe de situações

Como já foi dito, as situações desta classe são bem específicas e provenientes de diferentes contextos, conseqüentemente, envolvem diferentes significados, uma vez que os elementos do conjunto base dos grupos, que as representam, são de natureza bem distintas.

Esta classe agrupa situações que têm uma caracterização básica - são determinadas por regras, às vezes, tanto para a constituição dos elementos do conjunto base quanto para a operação. Não há regras fixas, cada caso é um caso, por isso as situações podem ser muito diferentes uma das outras, os seus significados, os elementos e a operação envolvidos variam bastante. Dienes e Golging (1975) afirmam que para resolver estas situações o estudante deve jogar segundo as regras dadas, mas, depois disso, ele deve procurar jogar com estas regras e, neste processo, ele vai descobrindo as estruturas internas dos grupos e as semelhanças entre elas.

Os elementos envolvidos nas situações desta classe são transformações, operações/ações realizadas sobre determinados objetos (figuras geométricas, interruptores de acender uma lâmpada etc.), composições de relações, transformações sobre proposições lógicas etc.

Quando as situações envolvem figuras geométricas (com formas ou cores diferentes) elas diferem uma da outra à medida que há variação quanto ao número de formas e ao número de cores. Por exemplo, pode-se examinar uma mudança/tranformação de forma das figuras considerando seis formas diferentes (círculo, quadrado, retângulo, triângulo, losango, trapézio) de uma mesma cor, ou transformações que combinem mudança de forma e cor: duas formas e duas cores (ver a primeira situação-problema do segundo instrumento de investigação), três formas e duas cores etc.

Exemplo 1 (DIENES e GOLDING, 1975): Considere as três formas (círculo, quadrado, triângulo) de duas cores diferentes (branco e preto) formando um conjunto com 6 elementos. Sobre o tal conjunto realizam-se as seis transformações seguintes:

T_1: círculo $\rightarrow$ quadrado $\rightarrow$ triângulo $\rightarrow$ círculo, combinada com a mudança de cor;

T_2: círculo $\rightarrow$ triângulo $\rightarrow$ quadrado $\rightarrow$ círculo, conservando a cor;

T_3: conservar a forma e mudar a cor;

T_4: círculo $\to$ quadrado $\to$ triângulo $\to$ círculo, conservando a cor;

T_5: círculo $\to$ triângulo $\to$ quadrado $\to$ círculo, mudando a cor;

T_6: nada mudar.

A composição entre todos os elementos do conjunto $\{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ está dada pela TABELA que segue.

$\circ$	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_1
T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_1	T_2
T_3	T_4	T_5	T_6	T_1	T_2	T_3
T_4	T_5	T_6	T_1	T_2	T_3	T_4
T_5	T_6	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
T_6	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6

Tabela 5.4: Da operação do grupo $\{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$

Pela TABELA 5.4, vê-se que T_6 é o elemento identidade do conjunto e que cada elemento possui inverso: o inverso de T_1 é T_5 e vice-versa; o inverso de T_2 é T_4 e vice-versa; T_3 é seu próprio inverso. A lei associativa é válida, pois $(T_i \circ T_j) \circ T_k = T_i \circ (T_j \circ T_k)$ para todos $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. O conjunto das transformações $\{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$ com a operação composição é um grupo, grupo cíclico de ordem 6, pois efetuando-se a transformação T_1 duas vezes seguidas, por um lado, muda-se a cor duas vezes seguidas e, desta forma, volta-se à cor inicial. Por outro lado, a mudança de forma obtida é círculo $\to$ quadrado $\to$ triângulo $\to$ círculo, ou seja, obtém-se T_2. Ao se realizar T_1 três vezes seguidas, obtém-se uma cor diferente da inicial, mas volta-se a forma inicial. O que é equivalente a realização de T_3. Se operar T_1 quatro vezes seguidas, alcança-se a cor inicial, mas quanto a forma tem-se a seqüência: círculo $\to$ triângulo $\to$ quadrado $\to$ círculo, isto é, obtém-se T_5. Ao se aplicar T_1 seis vezes seguidas, ter-se-á a forma e a cor idênticas às iniciais, o que equivale à realização de T_6.

Exemplo 2 (VERGNAUD, 1991): Sejam quatro conjuntos de pessoas, conjuntos A, B, C e D dispostos da seguinte maneira:

Consideram-se as seguintes relações:

F: xFy significa que a pessoa x encontra-se no conjunto em frente do conjunto onde

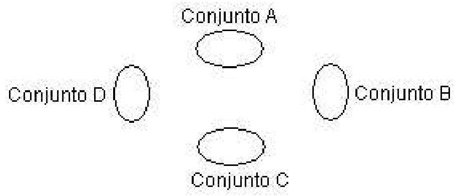


Figura 5.1: Representação dos quatro conjuntos de pessoas

encontra-se a pessoa y;

E: xEy significa que a pessoa x encontra-se no conjunto à esquerda do conjunto onde está a pessoa y;

D: xDy significa que a pessoa x encontra-se no conjunto à direita do conjunto onde está a pessoa y;

I: xIy significa que a pessoa x encontra-se no mesmo conjunto que a pessoa y.

Realizar a composição das relações F, E, D e I consiste em saber/dizer que relação existe entre duas pessoas x e z quando se conhecem as relações de x com uma outra pessoa y e de y com z. Ou seja, se xRy e $yR'z$ qual a relação entre x e z? Por exemplo, se xFy e yEz então xDz, e escreve-se $F \circ E = D$.

A composição de duas quaisquer das relações F, E, D e I tem um significado e todas as composições estão representadas na TABELA que segue.

$\circ$	I	F	E	D
I	I	F	E	D
F	F	I	D	E
E	E	D	F	I
D	D	E	I	F

Tabela 5.5: Da operação do grupo $\{I, F, E, D\}$

Vê-se que o conjunto $\{I, F, E, D\}$ com a tal operação tem estrutura de grupo: o elemento identidade é o I, o elemento F é seu próprio inverso, os elementos D e E são inversos um do outro. Resta verificar a validade da propriedade associativa. Além disso, $E^2 = E \circ E = F$, $E^3 = E^2 \circ E = F \circ E = D$ e $E^4 = E^3 \circ E = D \circ E = I$. Ou seja, as potências do elemento E geram os outros elementos do grupo, conseqüentemente, o grupo é cíclico de ordem 4.

A segunda classe de situações

As situações desta classe se assemelham pelos significados (movimentos e deformações) que carregam. Há uma certa uniformidade quanto aos seus elementos e suas operações.

Quantos aos movimentos/deslocamentos, estes podem ser mais simples, como movimentos numa reta (para direita e para esquerda), no plano (para cima, para baixo, para direita e para esquerda); ou movimentos dados pela geometria sobre um eixo segundo um determinado ângulo, que são os movimentos de rotação, reflexão e translação. As deformações são as distenções e as contrações. Todos estes objetos estão apresentados no apêndice D.

Os movimentos dados pela geometria e as deformações são transformações que estão definidas em qualquer espaço $\mathbf{R}^n$, todavia, aqui, estão sendo consideradas, apenas, as transformações do plano, do espaço $\mathbf{R}^2$. As transformações quando aplicadas ao plano ou a subconjuntos do plano, deslocam/movimentam, deformam ou fazem as duas coisas com os tais conjuntos. Os deslocamentos preservam distâncias entre dois pontos do plano e são chamados de isometrias. Os grupos obtidos a partir dos movimentos e das deformações são chamados de grupos de transformações. Para o estudo e tratamento destes grupos, além dos conceitos e resultados da geometria analítica, vários outros da álgebra vetorial e da álgebra linear são necessários, a exemplo dos conceitos de espaço vetorial sobre um corpo e de transformação linear. Todos estão apresentados no apêndice D.

Exemplo 1 (DIENES e GOLDING, 1975): Considere o ponteiro de relógio que se desloca no mostrador. O 'movimento de base' será constituído por um deslocamento do ponteiro de duas horas, isto é, o ponteiro será deslocado de duas em duas horas, no sentido do ponteiro do relógio. Um destes movimentos é $12 \to 2$, $2 \to 4$, $4 \to 6$, $6 \to 8$, $8 \to 10$, $10 \to 12$.

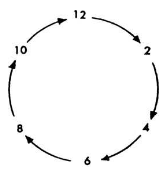


Figura 5.2: Representação das horas pares para o 'movimento de base'

O tratamento desta situação pode ser feito fazendo-se uso da linguagem natural. De fato, primeiro pode-se ver que dois dos movimentos, executados um após outro, vão gerar um novo movimento, que será um deslocamento de 4 horas. A sucessão de três movimentos de base vai gerar um deslocamento do ponteiro de 6 horas. A sucessão de quatro movimentos de base vai gerar um deslocamento do ponteiro de 8 horas (o que equivale a um deslocamento de 4 horas oposto aos ponteiros do relógio). A sucessão de cinco movimentos de base vai gerar um deslocamento do ponteiro de 10 horas (o que equivale a um deslocamento de 2 horas oposto aos ponteiros do relógio). Finalmente, a aplicação do movimento de base 6 vezes consecutivas, levará o ponteiro do relógio à sua posição inicial. Este movimento será o movimento neutro. Cada movimento realizado possui um movimento inverso.

Cada 'movimento de base' é um movimento de rotação em torno da origem. Como os símbolos 2, 4, 6, 8, 10 e 12 representam horas e estão fixados na circunferência, então o primeiro movimento (M_1) corresponde à rotação de $\frac{\pi}{3}$ radianos, o segundo (M_2) à rotação de $\frac{2\pi}{3}$ radianos, o terceito (M_3) à rotação de π radianos, o quarto (M_4) à rotação de $\frac{4\pi}{3}$ radianos, o quinto (M_5) à rotação de $\frac{5\pi}{3}$, finalmente, o sexto (M_6) à rotação de 2π radianos. Em outras palavras, cada movimento de base é uma rotação restrita ao conjunto $X = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ e também uma permutação de X. Assim, cada movimento pode ser representada na forma permutacional como segue,

$$M_1 = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 4 & 6 & 8 & 10 & 11 & 2 \end{pmatrix}$$
$$M_3 = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 6 & 8 & 10 & 12 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 8 & 10 & 12 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$
$$M_5 = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 10 & 12 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad M_6 = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 12 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

A operação entre tais elementos está representada na TABELA 5.6.

Desta TABELA e das propriedades da definição de grupo, é facil ver que o conjunto $\{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6\}$ é um grupo cujo elemento identidade é o movimento $E = M_6$.

A partir das operações entre os elementos do conjunto, vê-se que esta situação é a materialização do grupo cíclico gerado pelo movimento M_1 que tem ordem 6. Assim, cada um dos outros elementos é igual a uma potência de M_1. De fato, $(M_1)^2 = M_2$, $(M_1)^3 = M_3$, $(M_1)^4 = M_4$, $(M_1)^5 = M_5$ e $(M_1)^6 = M_6 = E$.

$\circ$	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_1
M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_1	M_2
M_3	M_4	M_5	M_6	M_1	M_2	M_3
M_4	M_5	M_6	M_1	M_2	M_3	M_4
M_5	M_6	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
M_6	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6

Tabela 5.6: Da operação do grupo $\{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6\}$

Como se viu, na segunda solução, o conceito de rotação foi usado de uma forma muito particular. As rotações estão restritas a um conjunto finito e representadas por permutações, o que facilitou muito a solução.

Exemplo 2 (DIENES e GOLDING, 1975): Pode-se tomar três alunos (Antônio, Benedito e Carlos) e pedir-lhes que se mantenham de frente para os colegas. E, em seguida, considerar as seguintes permutações:

P_0: ninguem se mexe;

P_1: Anônio toma o lugar de Benedito, Benedito o de Carlos, Carlos o de Antônio;

P_2: Anônio toma o lugar de Carlos, Carlos o de Benedito, Benedito o de Antônio;

P_3: Carlos e Benedito trocam de lugar, enquanto Antônio fica onde está;

P_4: Anônio e Carlos trocam de lugar, enquanto Benedito fica onde está;

P_5: Anônio e Benedito trocam de lugar, enquanto Carlos fica onde está.

Na representação usada acima, o movimento das três pessoas foi determinado pelo nome de cada uma delas e não pelo lugar ocupado. Pode-se usar outra representação, na qual entram as posições ao invés dos nomes. Para isso, tome A, B e C os três vértices de um triângulo no qual as pessoas se movimentam. As permutações anteriores podem, também, ser descritas pelos movimentos:

P_0: ninguem se mexe;

P_1: Cada um se desloca em direção ao vértice mais próximo, girando no sentido horário;

P_2: Cada um se desloca em direção ao vértice mais próximo, girando em sentido anti-horário;

P_3: B e C trocam de lugar, A fica onde está;

P_4: C e A trocam de lugar, B fica onde está;

P_5: A e B trocam de lugar, C fica onde está.

Vê-se que os movimentos indicados por P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 são permutações das letras A, B e C e podem ser representados como segue:

$$P_0 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix} \quad P_1 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$$
$$P_3 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix} \quad P_4 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix} \quad P_5 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$$

Analisando as permutações acima, vê-se que as três primeiras são rotações e que as três últimas são reflexões. Estes movimentos constituem o conjunto das simetrias do triângulo equilátero. Há, portanto, seis movimentos que põem o triângulo equilátero em coincidência consigo mesmo, as três rotações e as três reflexões, estas constituem o grupo das simetrias do triângulo, o chamado grupo Diedral D_6 (ver apêndice D).

Vê-se que, aqui, interessa, apenas, a ação destes movimentos nos pontos A, B e C do plano e isto significa restrição das rotações e reflexões ao conjunto $Y = \{A, B, C\}$. Para construir o tal grupo de uma forma significativa é preciso encontrar as rotações e as reflexões que o constituem.

Para isso, primeiro, é preciso encontrar os elementos de Y, ou seja, encontrar as coordenadas cartesianas dos pontos A, B e C de plano. Considera-se o triângulo com vértices A, B, e C no sistema de eixos coordenados de modo que o seu circuncentro-mediatrizes[2] fique na origem dos tais eixos conforme a figura abaixo.

Como o triângulo é eqüilátero e de acordo com a figura vê-se que:

$d(A, B) = d(A, C) = d(B, C) = a$;

$d(P, B) = d(P, C) = \frac{a}{2}$;

$d(A, O) = d(B, O) = d(C, O) = b$;

Tem-se também que $\alpha = \frac{\pi}{3}$ e $\beta = \frac{2\pi}{3}$

[2]É o ponto onde as mediatrizes dos lados de um triângulo se interceptam. Este ponto está a igual distância dos vértices do triângulo.

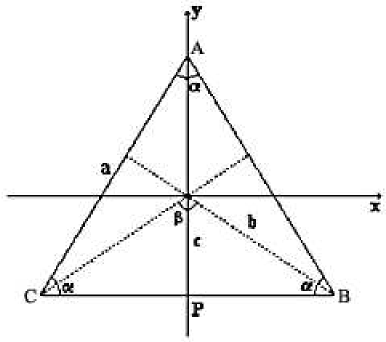


Figura 5.3: Triângulo equilátero com seus vértices coordenados

Usando a lei dos senos no triângulo COB tem-se que

$\frac{b}{sen\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{sen\beta} \Rightarrow bsen\beta = asen\frac{\alpha}{2} \Rightarrow bsen\frac{2\pi}{3} = asen\frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}b = \frac{1}{2}a \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$

Usando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo POB tem-se que

$b^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow c^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2-3a^2}{12} = \frac{a^2}{12} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{3}a}{6}$

Obtém-se então, as coordenadas dos vértices do triângulo:

$A = (0, \frac{\sqrt{3}a}{3})$, $B = (\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{6})$ e $C = (-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{6})$.

As rotações do triângulo são de 0, 120 e 240 graus ou 0, $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$ radianos, realizadas no sentido anti-horário em torno do seu centro e serão indicadas por R_0, $R_{\frac{2\pi}{3}}$ e $R_{\frac{4\pi}{3}}$, respectivamente. Aqui, dois deslocamentos são considerados "iguais" quando eles produzem o mesmo efeito. Por exemplo, uma rotação de 0 grau produz o mesmo efeito que uma rotação de 360 graus. Uma rotação de 120 graus no sentido horário produz o mesmo efeito que uma rotação de 240 graus no sentido anti-horário.

Calculando a ação das rotações em cada um dos pontos A, B e C, tem-se:

A rotação R_0 corresponde à P_0. De fato, R_0 deixa todos os vértices na mesma posição, isto é, $R_0(A) = A$; $R_0(B) = B$; $R_0(C) = C$.

A rotação $R_{\frac{2\pi}{3}}$ corresponde à P_1. De fato,

$R_{\frac{2\pi}{3}}(A) = R_{\frac{2\pi}{3}}(0, \frac{\sqrt{3}a}{3}) = (-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{6}) = C;$

$R_{\frac{2\pi}{3}}(B) = R_{\frac{2\pi}{3}}(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{6}) = (0, \frac{\sqrt{3}a}{3}) = A;$

$R_{\frac{2\pi}{3}}(C) = R_{\frac{2\pi}{3}}(-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{6}) = (\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{6}) = B.$

A rotação $R_{\frac{4\pi}{3}}$ corresponde à P_2. De fato,

$R_{\frac{4\pi}{3}}(A) = R_{\frac{4\pi}{3}}(0, \frac{\sqrt{3}a}{3}) = (\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{6}) = B;$

$R_{\frac{4\pi}{3}}(B) = R_{\frac{4\pi}{3}}(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{6}) = (-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{6}) = C;$

$R_{\frac{4\pi}{3}}(C) = R_{\frac{4\pi}{3}}(-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{6}) = (0, -\frac{\sqrt{3}a}{3}) = A.$

O triângulo também não se modifica quando nele são aplicadas as reflexões. Cada reflexão é feita em torno de uma reta que passa por um dos vértices e pelo ponto médio do lado oposto. Para obter cada umas delas, vira-se o triângulo de modo a voltar para cima a face que está por/em baixo, conservando-se fixo um dos vértices. Como as letras A, B e C representam os vértices do triângulo, as reflexões serão indicadas por R_A, R_B e R_C e estão assim definidas:

• R_A é a reflexão feita em torno da reta que passa pelo vértice A e pelo ponto médio do lado BC, isto é, é a reflexão em torno do eixo dos y, corresponde a P_3.

Assim, $R_A(x, y) = (-x, y)$ e $R_A(A) = A$, $R_A(B) = C$ e $R_A(C) = B$

• R_B é a reflexão feita em torno da reta que passa pelo vértice B e pelo ponto médio do lado CA, corresponde à P_4. Esta reta faz um ângulo $\alpha = 2\pi - \frac{\pi}{6}$ com o eixo dos x.

Como $cos\alpha = cos(-\frac{\pi}{6})$ e $sen\alpha = sen(-\frac{\pi}{6})$, então

$R_B(x, y) = [xcos(-\frac{\pi}{3}) + ysen(-\frac{\pi}{3}), xsen(-\frac{\pi}{3}) - ycos(-\frac{\pi}{3})] = (\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}y}{2}, -\frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{y}{2})$. Conseqüentemente, $R_B(A) = C$, $R_B(B) = B$ e $R_B(C) = A$.

• R_C é a reflexão realizada em torno da reta que passa pelo vértice C e pelo ponto médio do lado AB, corresponde à P_5. Esta reta faz um ângulo $\beta = \frac{\pi}{6}$ com o eixo dos x. Assim, $R_C(x, y) = (xcos\frac{\pi}{3} + ysen\frac{\pi}{3}, xsen\frac{\pi}{3} - ycos\frac{\pi}{3}) = (\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}y}{2}, \frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{y}{2})$. Portanto, $R_C(A) = B$, $R_C(B) = A$ e $R_C(C) = C$.

A operação no conjunto $D_6 = \{R_0, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}, R_A, R_B, R_C\}$ é dada pela TABELA que segue

A operação é associativa uma vez que se trata de composição de funções. Pela TABELA 5.7, vê-se que R_0 é o elemento identidade e que cada elemento tem inverso. Isso mostra que o par $(D_6, \circ)$ é um grupo.

$\circ$	R_0	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$R_{\frac{4\pi}{3}}$	R_A	R_B	R_C
R_0	R_0	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$R_{\frac{4\pi}{3}}$	R_A	R_B	R_C
$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$R_{\frac{4\pi}{3}}$	R_0	R_B	R_C	R_A
$R_{\frac{4\pi}{3}}$	$R_{\frac{4\pi}{3}}$	R_0	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	R_C	R_A	R_B
R_A	R_A	R_C	R_B	R_0	$R_{\frac{4\pi}{3}}$	$R_{\frac{2\pi}{3}}$
R_B	R_B	R_A	R_C	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	R_0	$R_{\frac{4\pi}{3}}$
R_C	R_C	R_B	R_A	$R_{\frac{4\pi}{3}}$	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	R_0

Tabela 5.7: Da operação do grupo $D_6 = \{R_0, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}, R_A, R_B, R_C\}$

De um ponto de vista algébricos, estes movimentos são vistos aplicados a um modelo que é construído da seguinte forma. Recorta-se um cartão na forma de um triângulo eqüilátero. Marcam-se os seus vértices com os números 1,2 e 3, e marca-se, de igual modo, os vértices no verso do papel, de modo que os vértices possam ser identificados, mesmo quando se vire o papel. Coloca-se o cartão sobre um plano com os eixos fixados de modo que o centro do triângulo coincida com a origem do plano e que um dos lados, por exemplo, o lado marcado com os números 2 e 3 fique na horizontal e o vértice oposto marcado pelo número 1 fique acima deste, conforme a figura abaixo:

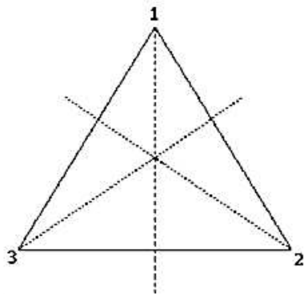


Figura 5.4: Triângulo equilátero com seus vértices numerados

Comparando as figuras 5.3 e 5.4 e fazendo as identificações $A \leftrightarrow 1, B \leftrightarrow 2$ e $C \leftrightarrow 3$, vê-se que os elementos obtidos são os mesmos. O perigo é que o uso do modelo se torne mecânico, que o estudante utilize-o sem ter consciência do que está fazendo, vendo-o como um jogo sem nenhum significado.

Esta classe é muito rica de situações e de conceitos que dão origem a diversas estruturas de grupo (finito ou infinito). Além dos grupos já discutidos e que representam às situações desta classe, vários outros surgem, tais como: o grupo das translações do plano, grupo das transformações lineares inversíveis do plano, o grupo das isometrias do plano, o grupo das transformações afim, o grupo das homotetias. Todos eles estão apresentados no apêndice D.

Os movimentos mais elementares que, também, estão inseridos nesta classe podem ser exemplificados de uma forma menos analítica e mais intuitiva.

Considere todos os deslocamentos possíveis que se pode realizar ao longo de uma reta. Pode ser um 'grande' deslocamento ou um 'pequeno' deslocamento, efetuado em um ou outro sentido em relação à origem. O conjunto desses infinitos movimentos possui uma estrutra de grupo. De fato, a realização de dois desses movimentos (o ponto de partida do segundo coincide com o ponto de chegada do primeiro) equivale a realização de um movimento. Todo movimento pode ser invertido (o trajeto é 'voltar pelo mesmo caminho'). Existe um elemento neutro (movimento em que o ponto de partida coincide com o ponto de chegada). O jogo de deslocamentos é associativo.

O mesmo acontecerá ao se considerar movimentos no espaço físico, onde os movimentos não precisam ser realizados, necessariamente, numa linha. Supondo que se tenha uma maneira de identificar pontos no espaço, suponha que alguém esteja no ponto A e se desloque para o ponto B. O deslocamento de A para B pode ser feito pelo caminho mais curto ou por outro qualquer, de modo que comece em A e termine em B. Este deslocamento será chamado AB. Movendo-se do ponto B para o ponto C, da maneira que quiser, a pessoa realiza o deslocamento BC. O deslocamento da A para B e de B para C poderia ter sido feito diretamente do ponto A para o ponto C pelo deslocamento AC. Ou seja, o deslocamento AB seguido pelo deslocamento BC tem o mesmo efeito do deslocamento AC e escreve-se: $AB \cdot BC = AC$.

Se a pessoa for de A para B, é possível voltar de B para A. Isto é equivalente a ir de A para A, isto é, de não ir a lugar nenhum. O deslocamento AA será indicado pelo símbolo I, então, $AA = I$. Assim, ao fazer o deslocamento AB e em seguida o deslocamento BA, a pessoa voltou ao ponto de partida, ou seja, realizou o deslocamento inverso de AB. De acordo com isso BA é o inverso de AB e será denotado por $BA = (AB)^{-1}$. Se X é um qualquer deslocamento, $X \cdot X^{-1} = I$. É evidente que o inverso do inverso é o deslocamento original, ou seja, $(X^{-1})^{-1} = X$.

Se a pessoa for de A para B, depois de B para C e de C para D, na realidade ela foi de A para D. Os dois primeiros deslocamentos podem, também, ser substituídos por AC, ou os dois últimos por BD e, num caso ou no outro, ela termina em D. Assim,

Substituindo $AB \cdot BC$ por AC ou $BC \cdot CD$ por BD vem que: $AC \cdot CD = AB \cdot BD = AD$, ou mais detalhadamente que $(AB \cdot BC) \cdot CD = AB \cdot (BC \cdot CD)$. Portanto, o conjunto de todos os deslocamentos possíveis entre pontos do espaço físico com a operação multiplicação, já definida no início, forma um grupo.

A terceira classe de situações

Os grupos numéricos foram os últimos a surgirem na matemática. Eles aparecem nos livros do matemático Weber em 1895-96, várias vezes reimpresso, que torna-se o livro texto alemão padrão neste campo e desempenha um papel fundamental na modelação das visões da próxima geração de matemáticos. Weber dar exemplos de grupos, incluindo o grupo aditivo de números complexos e o grupo aditivo das classes residuais com respeito a um módulo arbitrário, entre outros.

Os elementos envolvidos nas situações são números ou classes determinadas/dadas por relações de equivalência (ver apêndice E). Os grupos cujos elementos são classes residuais foram introduzidos na matemática em 1893 por Weber.

Pode-se ver a contagem como a primeira atividade de medida. Quando se define no conjunto constituído de conjuntos de objetos isolados (conjuntos discretos) a relação de equivalência 'tem o mesmo número de elementos que', tem-se como pressuposto o conceito de cardinal. Todos os conjuntos de uma mesma classe têm a mesma cardinalidade, ou seja, têm um número como propriedade comum. Os números mais simples são aqueles que correspondem às medidas desses conjuntos, são os cardinais 1, 2, 3, 4, ... Acrescentando-se a estes o cardinal 0 (zero), que corresponde à medida do conjunto vazio, tem-se o que se chama conjunto dos números naturais $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

Os conjuntos não são os únicos objetos mensuráveis, existem os segmentos, as figuras planas, os sólidos, as massas etc. cujas grandezas a eles associadas (comprimento, área, volume, peso etc.) são também medidas e utlizadas no dia-a-dia.

Do mesmo modo que a cada conjunto de objetos isolados associa-se uma medida, que é o seu cardinal, a cada segmento de reta associa-se a medida do seu comprimento, a cada figura plana a medida de sua área, a cada figura tri-dimensional a medida de seu volume etc., estes números pertencem ao conjunto dos números reais não negativos, $\mathbf{R}_+$.

Como as medidas são sempre positivas (ou nulas), o conjunto de medidas com a operação de adição não forma um grupo. A maior parte dos exemplos de grupos concretos (para diferenciar do grupo abstrato) que se pode imaginar são, de fato, grupos de transformações ou de relações. Isto ocorre porque a propriedade do inverso é uma propriedade das transformações e das relações e não de objetos ou funções elementares como a medida, a união e a interseção. Por exemplo, os números naturais não têm sinal, por isso não podem representar transformações porque estas são positivas e negativas, entretanto, os números inteiros relativos representam transformações aditivas (adições e subtrações) que se podem efetuar sobre a medida de um conjunto discreto acrescentando ou retirando elementos do conjunto Vergnaud (1991). Não somente os números inteiros relativos representam transformações, isso também ocorre com os números racionais e os números reais.

Um outro aspecto a ser analisado aqui é o agrupamento de objetos, de entes matemáticos abstratos etc. Agrupar objetos é uma atividade precoce do indivíduo. Esta tarefa apóia-se na comparação dos objetos entre si, e na análise de suas semelhanças, suas diferenças, suas equivalências e suas complementariedades. Pode-se, então, agrupar os objetos em uma mesma classe ou em classes distintas em função de suas semelhanças e suas diferenças, ou ainda, juntar os objetos porque se complementam tão bem que podem formar um outro objeto ou um conjunto novo, com um outro significado. Como exemplo clássico disso, tem-se o $\mathbf{Z}_n$ que é resultado de uma classificação em $\mathbf{Z}$.

Nesta atividade de comparação, na matemática é fundamental o conceito de relação de equivalência, conseqüentemente, o de classe de equivalência e de grupo-quociente (ver apêndice E).

Exemplo 1: A construção do grupo dos inteiros módulo n, o grupo $\mathbf{Z}_n$ das classes residuais módulo n, por si só é significativa (ver apêndice D).

Exemplo 2 (DIENES e GOLDING, 1975): A proposta aqui é encontrar a estrutura dada pela gramática de uma língua artificial[3] cujo alfabeto é constituído pelas letras X e Y e as regras para manipulação das palavras são as seguintes:

Regra 1. XXXX pode ser suprimido ou acrescentado;

Regra 2. YYYY pode ser suprimido ou acrescentado;

Regra 3. XX pode ser substituído por YY e vice-versa;

Regra 4. XYX pode ser substituído por Y e vice-versa.

Se uma palavra p puder ser obtida de uma outra palavra q, através de algumas transformações segundo as regras adotadas, diz-se que as palavras p e q pertencem à mesma classe. As regras dão uma relação entre as palavras, ou melhor, define uma relação de equivalência no conjunto de todas as palavras formadas pelas sucessão das letras X e Y, repetidas um número qualquer de vezes e em qualquer ordem.

A tarefa é separar as palavras em classes respeitanto essas quatro regras. Uma das classes é aquela representada pela palavra que não possui nenhuma letra (palavra vazia), chamar-lhe-ei de $\overline{E}$. A partir da regra 1 mais três classes podem ser encontradas, são as representadas pelas letras X, XX e XXX. A partir da regra 2 tem-se mais três classes, as representadas pelas letras Y, YY e YYY, entretanto, pela regra 3 a palavra YY=XX.

Bem, até aqui foram encontradas seis classes: $\overline{E}$, $\overline{X}$, $\overline{XX}$, $\overline{XXX}$, $\overline{Y}$ e $\overline{YYY}$. As classes encontradas são representadas por palavras que possuem só a letra X ou só a letra Y e que não podem ser suprimidas. As palavras a serem observadas agora são as que possuem as duas letras. Um caminho seria fazer o produto das classes (duas a duas) representadas pelas palavras X, XX, XXX, Y e YYY e analisar as palavras encontradas. Dadas duas classes A e B no conjunto de classes, A $= A_1A_2A_3...A_n$ e B $= B_1B_2B_3...B_k$, o produto AB é dado por A$B = A_1A_2A_3...A_nB_1B_2B_3...B_k$ com A$_i, B_j \in \{X, Y\}$, $\forall i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., k$.

Fazendo os produtos encontram-se as palavras XY, XYYY, XXY, XXYYY, XXXY, XXXYYY, YX, YXX, YXXX, YYYXXX. Utilizando as regras, obtém-se

[3]Não vou repetir aqui como é feita a construção desta língua porque é semelhante às dadas na Seqüência 3, muda somente o alfabeto e as regras (ver Apêndice A).

as seguintes igualdades: XYYY=XYXX=YX; XXY=YYY; XXYYY=XXXXY=Y; XXXY=XXXYXXXX=XXYXXX=XYXX=YX; YXX=YYY; XXXYYY=XXXXXY=XY; YXXX=XXXXYXXX=XXXYXX=XXYX=XY; YYYX=XXYX=XY; YYYXX=YXXXX=Y; YYYXXX=YXXXXX=YX.

Vê-se que surgiram, somente, duas palavras novas, XY e YX. Enfim, depois de algumas manipulações com as palavras e regras constata-se que só existem oito classes: $\overline{E}$, $\overline{X}$, $\overline{XX}$, $\overline{XXX}$, $\overline{Y}$ e $\overline{YYY}$, $\overline{XY}$ e $\overline{YX}$. A operação entre todos os pares de classes está representada na TABELA que segue.

$\cdot$	$\overline{E}$	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{XY}$	$\overline{XX}$	$\overline{YYY}$	$\overline{XXX}$	$\overline{YX}$
$\overline{E}$	$\overline{E}$	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{XY}$	$\overline{XX}$	$\overline{YYY}$	$\overline{XXX}$	$\overline{YX}$
$\overline{X}$	$\overline{X}$	$\overline{XX}$	$\overline{XY}$	$\overline{YYY}$	$\overline{XXX}$	$\overline{YX}$	$\overline{E}$	$\overline{Y}$
$\overline{Y}$	$\overline{Y}$	$\overline{YX}$	$\overline{XX}$	$\overline{X}$	$\overline{YYY}$	$\overline{E}$	$\overline{XY}$	$\overline{XXX}$
$\overline{XY}$	$\overline{XY}$	$\overline{Y}$	$\overline{XXX}$	$\overline{XX}$	$\overline{YX}$	$\overline{X}$	$\overline{YYY}$	$\overline{E}$
$\overline{XX}$	$\overline{XX}$	$\overline{XXX}$	$\overline{YYY}$	$\overline{YX}$	$\overline{E}$	$\overline{Y}$	$\overline{X}$	$\overline{XY}$
$\overline{YYY}$	$\overline{YYY}$	$\overline{XY}$	$\overline{E}$	$\overline{XXX}$	$\overline{Y}$	$\overline{XX}$	$\overline{YX}$	$\overline{X}$
$\overline{XXX}$	$\overline{XXX}$	$\overline{E}$	$\overline{YX}$	$\overline{Y}$	$\overline{X}$	$\overline{XY}$	$\overline{XX}$	$\overline{YX}$
$\overline{YX}$	$\overline{YX}$	$\overline{YYY}$	$\overline{X}$	$\overline{E}$	$\overline{XY}$	$\overline{XXX}$	$\overline{Y}$	$\overline{XX}$

Tabela 5.8: Da operação do grupo $G'' = \{\overline{E}, \overline{X}, \overline{Y}, \overline{XY}, \overline{XX}, \overline{YYY}, \overline{XXX}, \overline{YX}\}$

Da TABELA 5.8, vê-se a validade das propriedades da definição de grupo, com exceção da propriedade associativa. Para verificar a associatividade utiliza-se a operação e as quatro regras dadas. O conjunto $G'' = \{\overline{E}, \overline{X}, \overline{XX}, \overline{XXX}, \overline{Y}, \overline{YYY}, \overline{XY}, \overline{YX}\}$, de fato, tem estrutura de grupo.

Os elementos $\overline{X}$, $\overline{XXX}$, $\overline{Y}$, $\overline{YYY}$, $\overline{XY}$ e $\overline{YX}$ têm ordem 4, apenas $\overline{XX}$ tem ordem 2 e existem três subgrupos cíclicos de ordem 4, a saber: $\{\overline{E}, \overline{X}, \overline{XX}, \overline{XXX}\}$; $\{\overline{E}, \overline{Y}, \overline{XX}, \overline{YYY}\}$; $\{\overline{E}, \overline{XY}, \overline{XX}, \overline{YX}\}$. Embora seja um conjunto constituído de classes a sua estrutura não é ciclíca, ele tem a mesma estrutura do grupo dos Quatérnios (ver Apêndice D), ou seja, $G'' = < X, Y | X^4 = E, Y^4 = E, X^2 = Y^2, X^{-1}YX = Y^{-1} >$.

Entre as diversas situações-problemas relacionadas com o conceito de grupo certamente há pontos comuns. O interessante é que no decorrer das soluções das situações, o estudante faça as abstrações necessárias para identificar/reconhecer o que está se repetindo. Se as semelhanças e as difernças forem apreendidas, significa que o estudante será capaz de abstrair traços essenciais da estrutura e isso o permitirá/habilitará descobrí-la em situações novas para ele. Quanto mais situações dando sentido ao conceito de grupo, são experienciadas pelo estudante, mais habilidade ele terá de reconhecimento dessa estrutura.

É essencial a apreensão de que, além do conjunto satisfazer todas as propriedades G_1, G_2 e G_3 (explicitadas na definição dada no início do capítulo e no apêndice D) enquanto grupo, existem particularidades do grupo que são determinadas pela operação definida no conjunto base. Estas particularidades revelam-se através das relações entre os elementos do conjunto e que são específicas de cada grupo com uma certa estrutura, independentemente da cara destes elementos. São estas relações que diferenciam ou identificam dois grupos de mesma ordem.

As reflexões, por mim realizadas, sobre as considerações teóricas de Vygotsky e Vergnaud e a elaboração deste capítulo, levaram-me a compreensão de que estas abordagens são complementares e interdependentes no processo de formação de um conceito matemático pelo indivíduo. Além disso, analisando as duas propostas conjuntamente, percebo que nenhum dos elementos inerentes a um conceito por eles considerados pode ser negligenciado no momento de seu ensino. Estes elementos são: o significado da palavra que simboliza o conceito ou que faz a mediação entre o conceito e o objeto, o significado das palavras que simbolizam os conceitos que com ele estão inter-relacionados e das próprias relações entre eles, o conjunto de situações-problemas que envolvem o conceito e os significados impressos a partir destas situações, o conjunto de representações e o conjunto de invariantes necessário ao tratamento das situações.

Para deixar mais clara a minha idéia, devo acrescentar que, à medida que o significado da palavra grupo se desenvolve no aluno, assim como o significado das palavras que simbolizam os outros conceitos com ele inter-relacionados, em especial o de operação binária, muda a relação do pensamento com estas palavras e, conseqüentemente, mudam as relações entre os conceitos por elas representados e isso se revela em um maior controle de sua atenção, de seu pensamento, enfim, de todas as suas funções psicológicas superiores e, portanto, de suas ações frente às situações.

Por outro lado, quanto maior for o contato do aluno com difierentes situações-problema, com as representações e os invariantes operatórios envolvendo o conceito de grupo, mais possibilidades ele tem de apreensão e tomada de consciência das características e atributos essenciais do objeto representado pela palavra grupo. Isso exige uma combinação de todas as suas funções psicológicas, forçando-o a prestar atenção aos seus atos, inclusive às suas generalizações e à sua linguagem.

Exemplificando: à medida que o aluno vai utilizando a propriedade do elemento inverso nas situações-problema, ele vai se dando conta da relação entre essa propriedade e a do elemento identidade e da interdepência de ambas com a operação e o conjunto, conseqüentemente o significado dessa propriedade vai se desenvolvendo nele. Do mesmo modo, à medida que esse significado vai sendo ampliando pelo aluno, a sua capacidade de identificação e de aplicação dessa propriedade no tratamento das situações-problema vai se intensificando.

Procurei, neste capítulo, destacar objetos e conceitos básicos do campo conceitual de grupo e, ao mesmo tempo, estabelecer as conexões existentes entre eles. Acredito que a abordagem levada a efeito nesta elaboração auxilia na compreensão e formação do conceito de grupo.

A vigilância de todos os aspectos aqui considerados é fundamental para que a construção do conceito de grupo pelo aluno seja plena de significados, tanto em termos psicológicos como pragmáticos.

Capítulo 6

Estruturação e Análise dos dados

Como acentuado no capítulo 4, para efeito de categorização dos conhecimentos expressos, foram consideradas cinco categorias de análise. A partir disso, algumas atividades foram deixadas isoladas, outras foram reorganizadas e agrupadas. As categorias e as atividades foram estabelecidas e reorganizadas, respectivamente, da seguinte forma:

A primeira categoria refere-se à formação do conceito de operação binária - o que é operação binária para cada estudante. O conceito de operação binária está imerso em todas as atividades, e isso fez com que a análise da formação de tal conceito pelo estudante, fosse realizada em todas as atividades, em especial nas atividades da Seqüência 1 onde ele está claramente explicitado, exceto em S1.9.

A segunda categoria refere-se ao tratamento das situações S2.1, S2.2, S3.1 e S3.2 quanto aos significados a elas atribuídos e às representações exibidas. A categorização para todas estas situações é a mesma, embora elas tenham sido analisadas em separado, uma vez que as soluções variam muito de uma para outra para cada estudante.

A terceira está, relacionada com o tratamento das situações S2.1, S2.2, S3.1 e S3.2, desta vez, voltada à identificação da estrutura de grupo. Para isso fazia-se necessário a identificação do conjunto, da operação e do uso das propriedades da operação[1]. A categorização para estas situações, também, são as mesmas e foram analisadas separadamente.

A quarta, diz respeito às semelhanças e diferenças entre estruturas de grupo, em es-

[1]De acordo com a definição de grupo dada no capítulo 5, as propriedades da operação - associativa, elemento neutro e elemento inverso - estão referidas nas categorias pelos símbolos G_1, G_2 e G_3, respectivamente.

pecial às semelhanças entre os grupos associados às situações S3.1 e S3.2. Também a compreensão dos alunos sobre grupos abelianos, grupos cíclicos. Por isso, os conhecimentos expressos em S3.3 foram categorizados isoladamente. A solução de S3.3 só poderia ser dada depois de encontradas as soluções para S3.1 e S3.2.

Embora cada atividade traga elementos para a análise da formação do conceito de grupo pelo aluno, nas atividades S1.9 e S3.4 estes elementos são mais expl[icitos; conseqüentemente, estas atividades foram analisadas separadas das outras e conjuntamente. Considerando que a forma como os alunos encontraram para responder as atividades S1.9 e S3.4 foi através da definição de grupo, fiz uma classificação das definições levando em consideração três aspectos: se os três conceitos-chave - conjunto, operação e propriedades da operação - da definição de grupo foram mencionados, se foram explicitados[2] e se estavam articulados[3]. Foi analisado, também, se a definição dada refletia a forma como as situações foram resolvidas e os exemplos fornecidos. Assim, a quinta categoria refere-se à forma como o entendimento sobre grupo foi expresso pelos alunos e a conexão desta com as (ou tentativas de) soluções e os exemplos.

A categoria 1 apresenta três itens, as categorias 2 e 4 tem 4 itens, as demais (3 e 5) têm 5 itens. Cada item elaborado representa uma fragmentação máxima de uma solução, de um entendimento, de uma concepção, de um significado, de uma representação, etc., expressos pelos alunos por escrito ou oralmente, partindo, segundo uma perspectiva organizacional, de um nível menos elaborado para um mais elaborado de cada um destes aspectos, isto é, em uma ordem de gradação ascendente.

Categoria 1 - O conceito de operação binária expresso nas atividades, em especial nas atividades da Seqüência 1

1. A operação binária é vista como uma regra que associa alguns pares de elementos de S (no máximo dois) a um elemento de S. Esta regra, na maioria das vezes, diz respeito somente à adição e à multiplicação de números. A diferença estabelecida entre as operações fundamentais e a operação binária ainda é confusa. A interdependência entre

[2]Dizer que os três conceitos-chave foram todos mencionados significa que os três objetos (conjunto, operação e propriedades - associativa, elemento neutro e elemento inverso) foram mencionados.

[3]Dizer que os conceitos-chave estão articulados implica que os significados e as relações estabelecidas entre eles estão de acordo com a definição de grupo dada pela matemática.

conjunto e operação continua incompreendida. Enfim, não há uma compreensão clara do que seja uma operação binária definida em um conjunto. Em algumas situações a condição para ser operação binária é satisfazer as propriedades (da operação).

2. Nem sempre é garantido que a operação binária definida no conjunto S é uma regra que associa cada (todo) par de elementos de S a um elemento de S, nem sempre há referência de que a operação seja uma função e nem o cuidado de observar nas soluções que todo par de S está associado a um elemento de S. O significado da palavra regra é mais amplo que no item anterior, a regra não precisa ser necessariamente a adição e a multiplicação de números. Já se percebe diferenças entre as operações fundamentais e a operação binária, porém ainda não se sabe exatamente o que as distinguem. O entendimento da interdependência entre conjunto e operação não é tão claro;

3. Uma operação (binária) definida em um conjunto S é uma função de $S \times S$ e, portanto, todo par de elementos do conjunto S tem um correspondente em S através de uma regra (uma lei de composição) que pode ser definida por meio de uma expressão algébrica, de uma tabela, etc. Há uma distinção clara entre as chamadas operações fundamentais que são, de fato, operações binárias e as que não são. A interdependência entre conjunto e operação é totalmente compreendida.

Categoria 2A - O significado e a representação expressos na atividade S2.1

1. É atribuído à situação outro significado e outra representação muito distantes do esperado. Há associação de imagens e de formas de modo arbitrário[4].

2. Nada é escrito, ou nenhum significado é atribuído à situação e não lhe é dada nenhuma representação, ou, apenas, alguns traços e/ou aspectos são explicitados;

3. Ou os elementos da situação são vistos como um jogo[5], ou o significado atribuído à situação é próximo do esperado[6]. A representação nem sempre é exibida integralmente e nem sempre permite a realização de operações. A situação não é entendida completa-

[4]Um exemplo de significado distante do esperado: a forma (quadrada) da figura dada fez com que fosse feita associações com o grupo diedral D_4.

[5]Os elementos são vistos como jogo quando as ações não são associadas às quatro figurinhas, é a ação pela ação.

[6]Um significado próximo do esperado é o caso em que cada a ação é realizada sobre as quatro figurinhas, mas não conjunta e simultaneamente.

mente;

4. O significado atribuído à situação é o esperado, a representação é operatória, isto é, possibilita a realização de operações.

Categoria 2B - O significado e a representação expressos na atividade S2.2

1. É atribuído à situação outro significado e outra representação muito distantes do esperado[7]. São feitas associações de imagens e de formas de modo intuitivo, espontâneo.

2. Nada é escrito, ou nenhum significado é atribuído à situação e não lhe é dada nenhuma representação, ou, apenas, alguns traços e/ou aspectos são explicitados;

3. O significado atribuído à situação é próximo do esperado[8]. A representação nem sempre é exibida integralmente e nem sempre permite a realização de operações. A situação não é entendida completamente;

4. O significado atribuído à situação é o esperado, a representação é operatória, isto é, possibilita a realização de operações.

Categoria 2C - O significado e a representação expressos na atividade S3.1

1. É atribuído à situação outro significado e outra representação muito distantes do esperado[9]. São feitas associações de palavras e frases de modo arbitrário, ao acaso;

2. Nada é escrito, ou nenhum significado é atribuído à situação e não lhe é dada nenhuma representação, ou, apenas, alguns traços e/ou aspectos são explicitados;

3. É atribuído à situação um significado próximo do esperado[10], a representação nem sempre é exibida integralmente e nem sempre permite a realização de operações. A

[7]Três exemplos de significados distantes do esperado: a) imagina-se que os movimentos são realizados sob a circunferência e que o resultado é uma mudança de arcos; b) imagina-se infinitos movimentos com os pontos mudando de posição continuamente de $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow$... c) imagina-se oito movimentos, feito a partir de cada ponto, dando uma volta completa em sentido horário e antihorário - $A \circ B \circ C \circ D \circ A = A$, $C \circ B \circ A \circ D \circ C = C$.

[8]Dois exemplos em que o significado atribuído é próximo do esperado são: a) usa-se o modelo, faz-se a associação aos ângulos, mas não ver os movimentos como função; b) imagina-se quatro movimentos todos de 90^o, cada movimento começa onde o outro termina. As rotações não são vistas como função.

[9]Um exemplo de significado distante do esperado é o caso em que são considerados o alfabeto e as palavras da língua portuguesa. A regra não é considerada.

[10]Aqui, um significado é considerado próximo do esperado quando considera-se o alfabeto dado, sabeentende-se que as palavras devem ser separadas em classes, mas a regra é compreendida de outra forma.

situação não é entendida completamente; ;

4. O significado atribuído à situação é o esperado, a representação é operatória, isto é, possibilita a realização de operações.

Categoria 2D - O significado e a representação expressos na atividade S3.2

1. É atribuído à situação outro significado e outra representação muito distantes do esperado. São feitas associações de palavras e frases de modo arbitrário, ao acaso;

2. Nada é escrito, ou nenhum significado é atribuído à situação e não lhe é dada nenhuma representação, ou, apenas, alguns traços e/ou aspectos são explicitados;

3. É atribuído à situação um significado próximo do esperado[11], a representação nem sempre é exibida integralmente e nem sempre permite a realização de operações. A situação não é entendida completamente;

4. O significado atribuído à situação é o esperado, a representação é operatória, isto é, possibilita a realização de operações.

Categoria 3A - O reconhecimento da estrutura de grupo em S2.1

1. Não são identificados os elementos do conjunto e nem a operação. São exibidos alguns outros elementos, realiza-se uma operação entre esses elementos, afirma-se que é ou que não é grupo sem analisar a validade das propriedades;

2. Não são identificados os elementos do conjunto e nem a operação. São exibidos alguns outros elementos, realiza-se uma operação entre esses elementos, mas nada é afirmado quanto à estrutura;

3. São encontrados alguns elementos do conjunto, é realizada a operação entre tais elementos, nenhuma das propriedades G_1, G_2 e G_3 é utilizada explicitamente. As perguntas são respondidas sem que haja consciência do que, de fato, está sendo feito. Nem sempre afirma-se que é grupo;

4. São identificados todos ou quase todos os elementos do conjunto, é realizada a

[11] Aqui, um significado é considerado próximo do esperado quando considera-se o alfabeto dado, entende-se que as palavras devem ser separadas em classes, mas as regras são compreendidas de outra forma.

operação entre os elementos encontrados, as propriedades G_1, G_2 e G_3 são pelo menos mencionadas. Afirma-se que é grupo;

5. É identificado o conjunto, é construída a TABELA (se nenhum elemento aparece repetido em nenhuma linha ou coluna, há a afirmação de que é grupo) ou todos os pares são operados livremente, são utilizadas as propriedades G_1, G_2 e G_3, mas nem sempre são explicitadas. Afirma-se que é grupo.

Categoria 3B - O reconhecimento da estrutura de grupo em S2.2

1. Não são identificados os elementos do conjunto e nem a operação. São exibidos alguns outros elementos, realiza-se uma operação entre esses elementos, afirma-se que é ou que não é grupo sem analisar a validade das propriedades;

2. Não são identificados os elementos do conjunto e nem a operação. São exibidos alguns outros elementos, realiza-se uma operação entre esses elementos, mas nada é afirmado quanto à estrutura;

3. São encontrados alguns elementos do conjunto, é realizada a operação entre tais elementos, nenhuma das propriedades G_1, G_2 e G_3 é utilizada explicitamente. As perguntas são respondidas sem que haja consciência do que, de fato, está sendo feito. Nem sempre afirma-se que é grupo;

4. São identificados todos ou quase todos os elementos do conjunto, é realizada a operação entre os elementos encontrados, as propriedades G_1, G_2 e G_3 são pelo menos mencionadas. Afirma-se que é grupo;

5. É identificado o conjunto, é construída a TABELA (se nenhum elemento aparece repetido em nenhuma linha ou coluna, há a afirmação de que é grupo) ou todos os pares são operados livremente, são utilizadas as propriedades G_1, G_2 e G_3, mas nem sempre são explicitadas. Afirma-se que é grupo.

Categoria 3C - O reconhecimento da estrutura de grupo em S3.1

1. Não são identificados os elementos do conjunto e nem a operação. São exibidos alguns outros elementos, realiza-se uma operação entre esses elementos, afirma-se que é ou que não é grupo sem analisar a validade das propriedades;

2. Não são identificados os elementos do conjunto e nem a operação. São exibidos alguns outros elementos, realiza-se uma operação entre esses elementos, mas nada é afirmado quanto à estrutura;

3. São encontrados alguns os elementos do conjunto, é realizada a operação entre os elementos por meio de uma TABELA sem o uso consciente da regra, as propriedades G_1, G_2 e G_3 nem sempre são mencionadas. Afirma-se que é grupo;

4. São encontrados todos os elementos do conjunto, é realizada a operação entre os elementos por meio de uma TABELA, as propriedades G_1, G_2 e G_3 são pelo menos mencionadas. Afirma-se que é grupo;

5. É identificado o conjunto, é construída a TABELA (se nenhum elemento aparece repetido em nenhuma linha ou coluna, há a afirmação de que é grupo) ou todos os pares são operados livremente, as propriedades G_1, G_2 e G_3 são utilizadas, mas nem sempre explicitadas. Afirma-se que é grupo.

Categoria 3D - O reconhecimento da estrutura de grupo em S3.2

1. Não são identificados os elementos do conjunto e nem a operação. São exibidos alguns outros elementos, realiza-se uma operação entre esses elementos, afirma-se que é ou que não é grupo sem analisar a validade das propriedades;

2. Não são identificados os elementos do conjunto e nem a operação. São exibidos alguns outros elementos, realiza-se uma operação entre esses elementos, mas nada é afirmado quanto à estrutura;

3. São encontrados alguns os elementos do conjunto, é realizada a operação entre os elementos por meio de uma TABELA sem o uso consciente da regra, as propriedades G_1, G_2 e G_3 nem sempre são mencionadas. Afirma-se que é grupo;

4. São encontrados todos os elementos do conjunto, é realizada a operação entre os elementos por meio de uma TABELA, as propriedades G_1, G_2 e G_3 são pelo menos mencionadas. Afirma-se que é grupo;

5. É identificado o conjunto, a TABELA é construída (se nenhum elemento aparece repetido em nenhuma linha ou coluna, há a afirmação de que é grupo) ou todos os pares

são operados livremente, as propriedades G_1, G_2 e G_3 são utilizadas, mas nem sempre explicitadas. Afirma-se que é grupo.

Categoria 4 - As semelhanças e diferenças entre os grupos associados às situações-problema S3.1 e S3.2

1. Não se tem idéia do que seja a estrutura de grupo e não se responde nada ou são listadas características irrelevantes para o estabelecimento da similaridade da estrutura dos grupos;

2. A única estrutura comum percebida é a de grupo, embora sabe-se da existência de grupo comutativo;

3. Apenas a estrutura de grupo comutativo é mencionada ou explicitada;

4. Há a compreensão de uma estrutura cíclica além da de grupo. Isso é percebido em pelo menos um dos grupos.

Categoria 5 - A conexão entre as soluções das situações-problema, a definição de grupo explicitada e os exemplos fornecidos na atividade S3.4

1. Numa tentativa de dizer o que é grupo são usados termos matemáticos (às vezes da própria definição de grupo) de forma confusa, descaracterizando o objeto grupo. Isso se reflete nas tentativas de solução das situações e nos exemplos dados;

2. O entendimento do que seja grupo é dado por meio de uma definição. Na tentativa de defini-lo os três conceitos-chave nem sempre são todos mencionados, não estão explicitados e não estão articulados. Isso se reflete nas tentativas de solução das situações e nos exemplos dados;

3. O entendimento do que seja grupo é dado por meio de uma definição, na qual os três conceitos-chave nem sempre são todos mencionados, nem sempre explicitados e nem sempre estão articulados. Isso se reflete nas soluções das situações e nos exemplos fornecidos;

4. O entendimento do que seja grupo é dado por meio de uma definição, na qual os três conceitos-chave são todos mencionados, nem sempre são explicitados e estão articu-

lados. Isso nem sempre se reflete nas tentativas de solução das situações e nos exemplos fornecidos;

5. Ao expressar o entendimento do objeto grupo os conceitos-chave são todos mencionados, nem sempre são explicitados e estão articulados. Isso se reflete nas soluções das situações e nos exemplos fornecidos.

Uma vez que a elaboração das categorias teve como base, principalmente, os dados coletados junto aos alunos considerando tanto os registros escritos como os orais apresentados pelos alunos e as mediações realizadas durante as entrevistas, foi possível associar, a cada um deles, um item em cada categoria correspondente às suas soluções/respostas. Desta forma foi confeccionada a matriz-resultado referida no capítulo 4, com a qual realizou-se a análise estatística de agrupamento usando o método K-means. Eis, então, a matriz-resultado.

Tabela 6.1: Matriz-resultado das soluções escritas e orais

Aluno	1	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4	5
A_1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	2	3
A_2	3	4	4	4	4	5	5	5	5	4	5
A_3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	4	4
A_4	3	3	4	4	4	4	4	5	5	4	5
A_5	2	4	4	3	4	4	4	4	4	2	5
A_6	1	3	3	3	3	3	3	3	3	2	3
A_7	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5
A_8	1	3	4	3	3	3	4	3	3	2	3
A_9	2	4	4	3	3	3	4	4	4	4	5
A_{10}	1	3	3	4	4	3	3	4	4	3	3
A_{11}	1	4	3	3	3	4	3	3	3	1	1
A_{12}	2	4	4	4	4	4	4	4	4	2	3
A_{13}	3	4	4	4	4	5	5	5	5	4	5
A_{14}	1	3	3	3	2	3	3	3	2	1	3
A_{15}	2	3	3	2	2	3	3	3	2	1	2
A_{16}	3	4	4	4	3	5	4	4	4	2	4
A_{17}	3	4	4	4	4	3	4	5	5	2	4
A_{18}	1	3	3	2	2	3	3	2	2	1	4

Concluído esse processo, obteve-se três níveis hierárquicos (ascendente) nos quais os 18 alunos investigados estão assim distribuídos: 7 alunos (39 %) ficaram no nível 1, 6 alunos (33 %) ficaram no nível 2 e 5 alunos (28 %) ficaram no nível 3.

A partir destes resultados, para proceder a caracterização de cada um dos níveis, foram obtidas da matriz-resultado (18×11), três submatrizes com o número de linhas variando de acordo com o número de alunos em cada nível, e o número de colunas sempre igual a 11 (correspondente às categorias). Obteve-se, então, uma submatriz de ordem 7 por 11, outra 6 por 11 e, por fim, uma 5 por 11 para os níveis 1, 2 e 3, respectivamente. Ei-las:

Tabela 6.2: Submatriz-resultado das soluções escritas e orais - Alunos Nível 1

Aluno/Categoria	1	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4	5
A_1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	2	3
A_6	1	3	3	3	3	3	3	3	3	2	3
A_8	1	3	4	3	3	3	4	3	3	2	3
A_{11}	1	4	3	3	3	4	3	3	3	1	1
A_{14}	1	3	3	3	2	3	3	3	2	1	3
A_{15}	2	3	3	2	2	3	3	3	2	1	2
A_{18}	1	3	3	2	2	3	3	2	2	1	4

Tabela 6.3: Submatriz-resultado das soluções escritas e orais - Alunos Nível 2

Aluno/Categoria	1	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4	5
A_5	2	4	4	3	4	4	4	4	4	2	5
A_9	2	4	4	3	3	3	4	4	4	4	5
A_{10}	1	3	3	4	4	3	3	4	4	3	4
A_{12}	2	4	4	4	4	4	4	4	4	2	3
A_{16}	3	4	4	4	3	5	4	4	4	2	4
A_{17}	3	4	4	4	4	3	4	5	5	2	4

Tabela 6.4: Submatriz-resultado das soluções escritas e orais - Alunos Nível 3

Aluno/Categoria	1	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4	5
A_2	3	4	4	4	4	5	5	5	5	4	5
A_3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	4	4
A_4	3	3	4	4	4	4	4	5	5	4	5
A_7	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5
A_{13}	3	4	4	4	4	5	5	5	5	4	5

É preciso observar que mesmo entre os alunos de um mesmo nível e em certas categorias houve variações entre os itens que lhes são associados. Entretanto, para efeito da caracterização de cada nivel foi considerado o item predominante em cada categoria, ou seja, a caracterização foi realizada exatamente a partir do item predominante em cada categoria no respectivo nível.

Considerando que:

• a proposta nas quatro situações-problema S2.1, S2.2, S3.1 e S3.2 era a mesma - identificação da estrutura de grupo implícita -, e que nas categorias 2 (relativa ao significado e a representação) e 3 (relativa aos invariantes) os itens são os mesmos para todas elas;

• a mediação realizada nestas atividades se refletiu numa melhor compreensão de uma situação, de uma representação, de uma regra, de um aspecto de um conceito até então não observado, em um número variável de situações e que tudo isso se apresentou como uma possibilidade de repensar a solução dada anteriormente, uma vez que foi-lhes dada a oportunidade de refazê-las, modificá-las ou complementá-las se assim o quisessem;

• os resultados das soluções escritas, nas quais os alunos deram sozinhos sua solução, diferem dos resultados considerando as soluções como um todo (escrita e oral), nas quais houve a minha mediação;

os resultados das soluções escritas, para essas duas categorias, estão sendo apresentados de forma conjunta em cada um dos níveis. Para tanto, em cada nível serão exibidas seis tabelas e nesta ordem de caracterização:

A **primeira tabela** explicita o item correspondente às categorias 2 (2A, 2B, 2C e 2D) e 3 (3A, 3B, 3C e 3D) considerando apenas as soluções escritas de cada aluno;
A **segunda tabela**, obtida da primeira, destaca o número de vezes que um item da categoria 2 foi repetido por cada aluno;
A **terceira tabela**, obtida da primeira, destaca o número de vezes que um item da categoria 3 foi repetido por cada aluno;
A **quarta tabela** apresenta as mesmas características da primeira tabela só que com os resultados das soluções como um todo (texto e entrevista) em relação às categorias 2 e 3 - trata-se de um extrato da matriz-resultado;
A **quinta tabela**, obtida da quarta, tem as mesmas características da segunda;
E, finalmente, a **sexta tabela**, obtida da quarta, tem as mesmas características da terceira.

Os resultados das três primeiras tabelas não serão aqui caracterizados, uma vez que eles refletem o desempenho dos alunos somente nos registros escritos. Eles estão sendo apresentados com o objetivo de mostrar a mudança ocorrida no desempenho dos estudantes com a mediação levada a efeito durante as entrevistas. Para as caracterizações feitas, em cada um dos níveis, foram considerados os itens explicitados na quarta, quinta e sexta tabelas, uma vez que estas refletem o resultado das soluções das quatro situações-problema como um todo. As exemplificações das caracterizações apresentadas são feitas por meio de soluções por escrito como figuras e de trechos de entrevistas relativos às situações-problema.

A caracterização dos resultados referentes às categorias 1, 4 e 5 também será feita por nível. Para estas categorias as exemplificações são feitas através da transcrição das soluções dadas pelos próprios alunos e, quando necessário, complementadas por trechos de entrevistas.

No decorrer das apresentações e exemplificações dos resultados, os alunos estão identificados pelo símbolo A_i em que i é um dos números entre 1 e 18 - A_1, A_2, A_3, ..., A_{17}, A_{18}.

Nível 1 - Características e soluções-exemplo

Categoria 1 - O que é operação binária

Para os alunos deste nível a operação binária é vista como uma regra que associa pares de elementos de S (basta alguns, no máximo três) a um elemento de S. Esta regra, na maioria das vezes, diz respeito, somente, à adição e à multiplicação de números. A diferença estabelecida entre as operações fundamentais e a operação binária ainda é confusa. A interdependência entre conjunto, operação, elemento neutro e elemento inverso de cada elemento do conjunto, ainda, não é percebida. Enfim, não há uma compreensão clara do que seja uma operação binária definida em um conjunto. Em algumas situações a condição para ser operação binária é satisfazer às propriedades (da operação).

A concepção de que a operação binária é apenas uma regra fica claro em vários trechos da escrita e da entrevista do aluno identificado por A_{18}:

– Em S1.1, como resposta as perguntas: o que você entende quando se diz que a operação binária é uma regra? A palavra regra poderia ser substituída por outra(s)?, ele escreve: "porque determina como operar dois elementos de um conjunto, e ainda se obter um elemento do mesmo conjunto. A palavra regra poderia ser substituída por método".

– Em S1.2a a sua representação de operação em linguagem matemática é: "seja $a, b, c \in S$, e Δ uma operação $(a, b) \to c \Rightarrow a\Delta b = c$".

– Em S1.4 o seu entendimento do que seja operação binária é expresso assim: "operação binária definida em um conjunto S é um método que leva um par ordenado de elementos do conjunto S a um elemento do conjunto S".

– Em S1.5 ele escreve: "os conjuntos numéricos ($\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$), estão definidas operações como adição, subtração, multiplicação, divisão, entre outras".

Vê-se que em nenhuma de suas respostas aparece que essa regra deve ser realizada em todos os pares de elementos do conjunto. Para ele é preciso, somente, que a regra realizada entre dois elementos do conjunto dê como resultado um elemento do conjunto. Embora a sua representação simbólica dada em S1.2a não deixe claro que o elemento $c = a\Delta b$ depende de a e b, na entrevista ele afirma sim. Em S1.5, o aluno refere-se aos conjuntos e às operações sem estabelecer vínculos entre eles. A sua forma de escrever não deixa claro se todas estariam sendo vistas como operação em todos os conjuntos. Poderia se pensar que ele não tivesse conseguido se expressar claramente. Na entrevista, o aluno mostra que não foi isso o que aconteceu.

P: Você escreveu que a palavra regra poderia ser substituída por método. Por que método?
A_{18}: Porque determina... é um método que você opera dois elementos de um conjunto e ainda ... leva essa operação a um outro elemento do mesmo conjunto.
P: Você escreveu todos os conjuntos e operações que você estudou no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Em cada um deles estão definidas todas essas operações?
A_{18}: Com algumas *regras*, né? Por exemplo, nos naturais
P: Que operações estão definidas nos naturais?
A_{18}: Essas aí estão nesses quatro conjuntos.
P: A subtração está definida em $\mathbf{N}$ como uma operação binária?
A_{18}: Não. Está definida com algumas *regras*.
P: Como com algumas *regras*?
A_{18}: Por exemplo, é ... tem que ser sempre em uma ordem... onde um número maior e um menor, não pode ser...

Vê-se que, para ele, o significado da palavra operação é transferido para o da palavra regra. A operação é a regra. A regra, por sua vez, refere-se a um método, a cálculos. Além da regra dizer como é que a operação deve ser realizada (em $a * b = 2a + b$ a regra é: tome o dôbro do primeiro número e some com o segundo ou, multiplique a por 2 e some com b), a regra também estabelece restrições, ela indica como os elementos devem ser escolhidos (é o caso da subtração em $\mathbf{N}$, o elemento a deve ser maior que o elemento b). Essa é uma concepção de operação formada a partir de situações envolvendo o conjunto dos números naturais, nas quais esse ponto de vista está bem adaptado.

Para um outro aluno, A_{14}, a operação não precisa ser realizada para todos os pares de elementos do conjunto, embora expresse isso de forma diferente. Em S3.4, para exibir um conjunto sem estrutura de grupo, escreve: "$(\mathbf{Z}, \div)$ 'fura' quando $\frac{a}{b}$ não for exato".

Em primeiro lugar, vê-se, pela sua afirmação, que não há o significado (esperado) formado para o símbolo $(\mathbf{Z}, \div)$. Quando se escreve $(G, *)$ significa que o conjunto G está munido da operação $*$, o que não ocorre em $(\mathbf{Z}, \div)$, pois a regra que estabelece a associação $(a, b) \to \frac{a}{b}$ não define uma operação em $\mathbf{Z}$ dos números inteiros relativos.

Quando A_{14} diz que "$(\mathbf{Z}, \div)$ fura quando $\frac{a}{b}$ não for exato", ele confunde um atributo da regra de divisão em $\mathbf{Z}$ com um atributo do símbolo $(\mathbf{Z}, \div)$ - usa o símbolo para dizer que não existe elemento em $\mathbf{Z}$ associado à fração $\frac{a}{b}$ quando a divisão de a por b não for exata -, em outras palavras, ele quer dizer que a operação não existe quando $\frac{a}{b} \notin \mathbf{Z}$. Além disso, A_{14} não afirma que o par $(\mathbf{Z}, \div)$ não tem estrutura de grupo porque a divisão não é uma operação no conjunto $\mathbf{Z}$, e sim que a estrutura não existe quando $\frac{a}{b} \notin \mathbf{Z}$. Assim, para ele, a estrutura e a operação existem quando $\frac{a}{b} \in \mathbf{Z}$, caso contrário, não.

Um outro aluno, A_6, em resposta à S1.6, escreve: "$a + b$ com o valor de ambos iguais e onde $a = b = 1$. Sim, pois cada par de elementos é levado a um valor que também pertence ao conjunto $\mathbf{Z}$". Na entrevista com A_6, há os seguintes esclarecimentos:

A_6**:** No caso, eu botei aqui como a adição
P: Você entendeu a operação que foi definida ?
A_6**:** Entendi, podia ser qualquer operação.
P: Quem é o elemento a operado com o elemento b?
A_6**:** [Ele relê a questão e continua insistindo na necessidade de definir a operação] É o menor valor dos elementos a e b ou é igual ao valor comum. Precisava definir a operação... onde a e b continuavam sendo inteiros.

P: Por exemplo, nessa operação o par ordenado $(1,2)$ vai ser levado em que número?
A_6**:** No número 3 ... mas tem que se definir a operação, não professora?
P: A operação é $a * b$ é igual ao menor dos elementos a e b. O par $(1,2)$ eu vou associá-lo a quem?
A_6**:** Ah, sim... Eu não entendi, eu vou definir ainda a operação. Porque, geralmente, professora, quando a gente vai fazer a operação binária, a gente nunca se lembra que pode ser levado a um valor, sempre a gente relaciona a uma operação.

O entrevistado (A_6) não estava aceitando uma operação entre dois elementos a e b que não realizasse nenhum cálculo entre eles, como era o caso da operação em questão. Operação para ele significa "fazer algum cálculo" e a adição é um bom exemplo. Esta atividade trouxe-lhe desconforto - ele estava habituado com operações nas quais se realizam cálculos para obter o elemento-resultado $x * y$.

A concepção de que a operação é apenas uma regra que pode ser aplicada para alguns pares de números é predominante nos alunos deste nível.

Categorias 2 e 3 -

Os significados, as representações, os invariantes e as estruturas de grupo

Tabela 6.5: Resultado das soluções escritas Categorias 2 e 3 - Nível 1

Situação-problema	S2.1		S2.2		S3.1		S3.2	
Aluno/Categoria	2A	3A	2B	3B	2C	3C	2D	3D
A_1	1	1	1	1	1	1	1	1
A_6	1	1	1	1	3	3	3	3
A_8	2	1	2	1	2	2	2	2
A_{11}	4	4	3	1	3	2	3	1
A_{14}	3	3	1	1	3	3	2	2
A_{15}	3	3	1	1	2	2	2	2
A_{18}	3	3	1	2	2	2	2	2

Vê-se, pela tabela 6.6, que os itens 1, 2 e 3 se repetem o mesmo número de vezes na categoria 2. Nota-se, também, dois resultados bem característicos, o de A_1 que repetiu 4 vezes o item 1 - atribuíu às quatro situações outros significados e outras representações muito distantes do esperado - e o de A_8 que nada escreveu como solução em S3.1 e S3.2, apenas alguns traços e/ou aspectos são explicitados para S2.1 e S2.2. Apenas um (14 %) aluno atribuiu o significado esperado e em uma única situação (S2.1).

Na tabela 6.7 há uma grande concentração dos alunos deste nível nos itens 1 e 2 (12

Tabela 6.6: Repetições de item na Categoria 2 - Soluções escritas - Nível 1

Categoria 2				
Aluno/Item	1	2	3	4
A_1	4	-	-	-
A_6	2	-	2	-
A_8	-	4	-	-
A_{11}	-	-	3	1
A_{14}	1	1	2	-
A_{15}	1	2	1	-
A_{18}	1	2	1	-
Total de repetições do item	9	9	9	1

Tabela 6.7: Repetições de item na Categoria 3 - Soluções escritas - Nível 1

Categoria 3					
Aluno/Item	1	2	3	4	5
A_1	4	-	-	-	-
A_6	2	-	2	-	-
A_8	2	2	-	-	-
A_{11}	2	1	-	1	-
A_{14}	1	1	2	-	-
A_{15}	1	2	1	-	-
A_{18}	-	3	1	-	-
Total de repetições do item	12	9	6	1	0

e 9 vezes, respectivamente) - isso significa que nas situações S2.1, S2.2, S3.1 e S3.2 nem os elementos do conjunto e nem a operação são identificados. São exibidos alguns outros elementos e realiza-se uma operação entre esses elementos. Ou afirma-se que é grupo ou nada é afirmado quanto à estrutura. Conseqüentemente, não houve o reconhecimento da estrutura de grupo. Em uma única situação (S2.1) os elementos e a operação são identificados por um aluno.

Durante a entrevista, através de mediações do entrevistador através de perguntas, pistas, explicação de uma regra, de questionamentos etc., houve uma maior compreensão das situações pelos alunos, fazendo com que o significado impresso na situação fosse mudado, mesmo que a situação não tenha sido completamente entendida. Neste processo, uma outra tentativa de solução foi levada a efeito por aproximadamente 71 % dos alunos. Em conseqüência disso houve alteração no resultado anterior, como mostram as três tabelas que seguem.

Tabela 6.8: Resultado das soluções escritas e orais Categorias 2 e 3 - Nível 1

Situação-problema	S2.1		S2.2		S3.1		S3.2	
Aluno/Categoria	2A	3A	2B	3B	2C	3C	2D	3D
A_1	3	3	3	3	3	3	3	3
A_6	3	3	3	3	3	3	3	3
A_8	3	3	4	4	3	3	3	3
A_{11}	4	4	3	3	3	3	3	3
A_{14}	3	3	3	3	3	3	2	2
A_{15}	3	3	3	3	2	3	2	2
A_{18}	3	3	3	3	2	2	2	2

Tabela 6.9: Repetições de item na Categoria 2 - Soluções escritas e orais - Nível 1

Categoria 2				
Aluno/Item	1	2	3	4
A_1	-	-	4	-
A_6	-	-	4	-
A_8	-	-	3	1
A_{11}	-	-	3	1
A_{14}	-	1	3	-
A_{15}	-	1	3	-
A_{18}	-	2	2	-
Total de repetições do item	0	4	22	2

Após a realização da entrevista, nota-se a predominância do item 3 (repetido 22 vezes) na categoria 2 (2A, 2B, 2C e 2D), ou seja, é atribuído à situação um significado fenotipicamente equivalente ao esperado, a representação nem sempre é exibida e nem sempre permite a realização de operações.

Na categoria 3 (3A, 3B, 3C e 3D), a predominância é também do item 3 (22 vezes)(ver tabela 6.10). Isto significa que, quanto à identificação do grupo em S2.1 e S2.2, alguns elementos do conjunto são encontados, é realizada a operação entre tais elementos, mas nenhuma das propriedades G_1, G_2 e G_3 é utilizada explicitamente. As perguntas são respondidas sem que haja consciência do que, de fato, está sendo feito. Quanto aos grupos associados à S3.1 e S3.2 todos os elementos do conjunto são encontrados, é realizada a operação entre os elementos por meio de uma TABELA sem o uso consciente da regra, as propriedades G_1, G_2 e G_3 nem sempre são mencionadas. Em quase todas as situações afirma-se que é grupo.

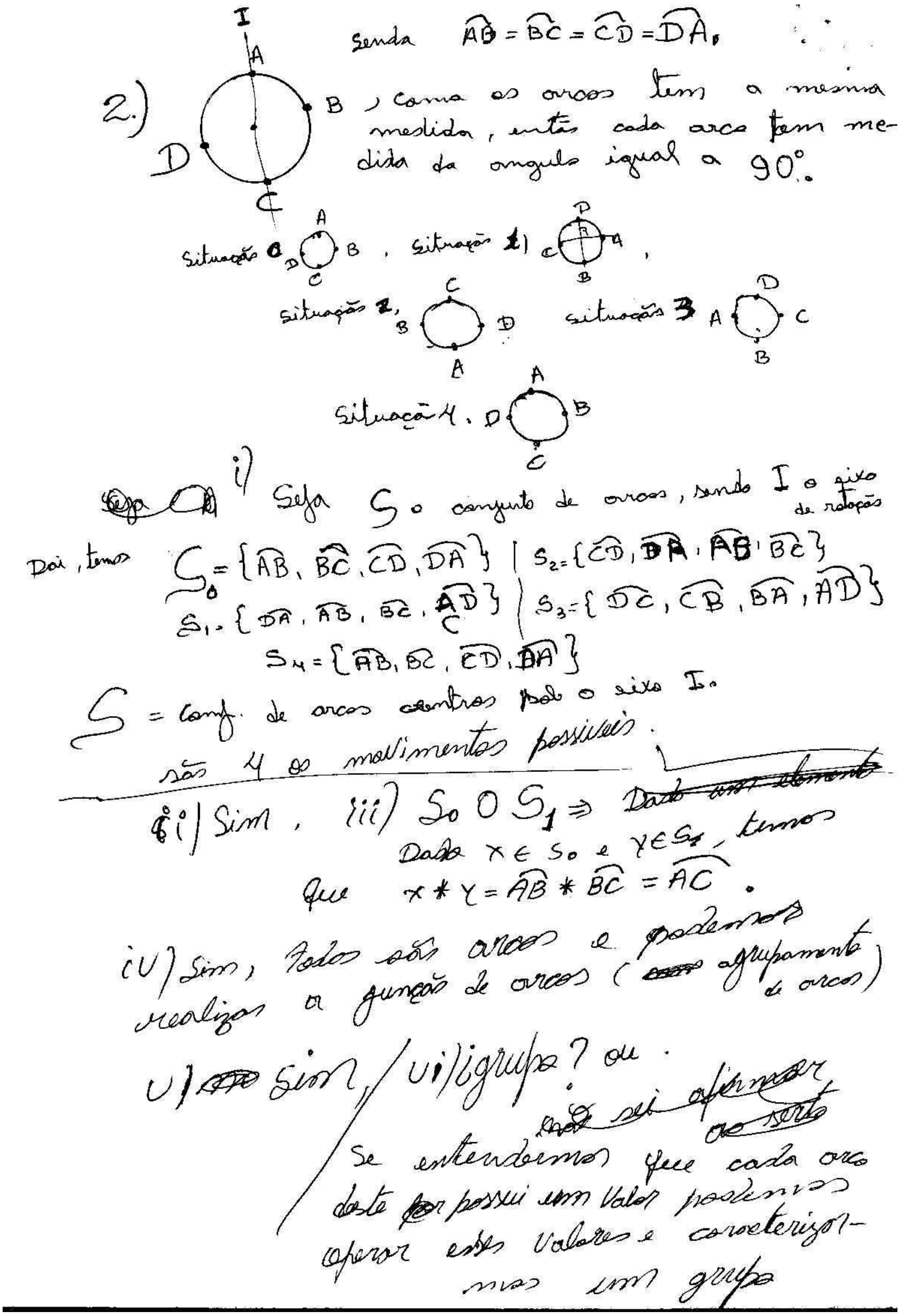


Figura 6.1: Solução (escrita) para S2.2, aluno A_{14}, nível 1

A solução dada por escrito à situação S2.2 por A_{14} exemplifica as categorias 2B e 3B neste nível, como mostra a figura 6.1 e os trechos de sua entrevista.

Tabela 6.10: Repetições de item na Categoria 3 - Soluções escritas e orais - Nível 1

Categoria 3					
Aluno/Item	1	2	3	4	5
A_1	-	-	4	-	-
A_6	-	-	4	-	-
A_8	-	-	3	1	-
A_{11}	-	-	3	1	-
A_{14}	-	1	3	-	-
A_{15}	-	1	3	-	-
A_{18}	-	2	2	-	-
Total de repetições do item	0	4	22	2	0

A solução exibida mostra que A_{14} não tinha formado o conceito matemático de rotação. É dada uma representação geométrica dos movimentos, aparentemente, correta, no entanto, a representação algébrica exibida traz a idéia de que o movimento é de arcos e que os elementos são conjuntos de arcos - S_0, S_1, S_2, S_3 e S_4 como se fossem representantes dos movimentos. Com base nestes conjuntos, afirma que são 4 os movimentos possíveis sem observar que os conjunto são iguais. Ele tenta operar S_0 com S_1 pegando um elemento de cada um deles, e não percebe que o resultado, segundo a sua operação, é um arco que não pertence aos conjuntos. Por fim, afirma que é grupo, mas sem muita convicção uma vez que põe uma interrogação do lado da palavra grupo. Sua afirmação, "se entendermos que cada arco deste possui um valor podemos operar esses valores e caracterizarmos um grupo", significa que qualquer coleção de objetos que podem ser operados, não importa como, pode ser caracterizada como grupo. Na sua escrita, "S = conj. de arcos centros sob o eixo I", ocorre uma combinação de objetos heterogêneos e de conceitos (conjunto, arco, centro, eixo) de natureza diversas, sem nenhuma conexão entre eles, muito comum nesse nível.

Na entrevista, eu lhe peço para ler o enunciado do problema. Concluída a leitura, pergunto-lhe: O que você entendeu disso? Eis suas explicações:

A_{14}**:** Eu entendi assim. Vou imaginar aqui uma circunferência e esses 4 pontos. Então você aplica esses movimentos, vou dá uma rotação nesses pontos...
P: Você faz uma rotação de quem?
A_{14}**:** Da circunferência? Eu posso estar errado, mas na minha interpretação, eu acho que é nos pontos, mudar a posição dos pontos. Deixa eu ver aqui, A, B, C e D. Então eu vou fazer um movimento completo, pronto. Eu mudei, o ponto A estava aqui e veio pra cá, certo? Está aqui o ponto A. Mas não tem que permanecer com o mesmo comprimento, os arcos? Permanece. A posição dos pontos vai ser mudada, como se um ponto tomasse o lugar do outro.
P: Quem são esses conjuntos S_0, S_1, S_2, S_3 e S_4?
A_{14}**:** Eu pensei o seguinte: coloquei a circunferência, marquei os pontos aí aleatórios. Eu dei uma rotaçaozinha, girei um pouquinho a circunferência mudando os pontos em cada giro, cada movimento que eu fazia, eu fiz tipo um ângulo de um arco de 90 graus...
P: O que você fez mesmo?
A_{14}**:** Quando eu rotacionei... eu estava aqui, ai eu girei, ai rodou tudo. Aí eu escrevi esses 4 arcos dentro da circunferência. Esse arco AB, o arco BC, o arco CD e o arco DA. Eu coloquei esse eixo I, como se fosse assim, tudo começasse por ele, certo. Só pra dar uma referenciazinha, pra quando eu mudar aqui... imagine que isso aqui seja o começo de tudo. Chamei isso aqui de situação zero. Eu rotacionei... chamei de situação 1, tendo como referência esse eixozinho aqui... ai peguei os arcos, DA, sempre pegando assim, a partir desse eixo, ai vem, DA, AB, BC e CD.
P: Quantos conjuntos você tem aí? Eles são diferentes?
A_{14}**:** É, agora eu vejo, é o mesmo conjunto.
P: Você já fez Álgebra Linear e Cálculo III. Acho que em algumas dessas disciplinas você já ouviu falar em rotação.
A_{14}**:** Já, mas sabe aquela história de você só saber o mecânico. Eu não sei explicar o que é rotação, cada movimento possível, que só dava para fazer no máximo 4.

Esse diálogo mostra que havia, apenas, uma idéia intuitiva de rotação como um giro, um movimento, mas sem saber exatamente de quê. Existiam dúvidas se a rotação era somente dos pontos A, B, C e D ou só dos arcos determinados por esses pontos, ou da circunferência. Diante disso, fui dando uma idéia do que é uma rotação.

P: Você não rotaciona só esses pontos, ou só esses arcos ou somente a circunferência... você rotaciona (gira) todo o plano. Você fixa um ponto e faz as rotações do plano em torno desse ponto. Quando você rotaciona o plano, todos os outros pontos do plano mudam de posição, inclusive estes (referia-me aos pontos A, B, C e D]. Aqui, você não está interessado em dizer o que acontece com todos os pontos do plano após uma dada rotação, você quer saber o que acontece com alguns pontos, apenas. Que pontos você acha que interessam aqui?
A_{14}**:** São os pontos A, B, C e D.
P: Por exemplo, o que a rotação de 90 faz?
A_{14}**:** o A vai para o B.
P: o B?
A_{14}**:** Para o C.
P: E o C?
A_{14}**:** Para o D e o D para o A.
P: Como seria a rotação de 180 graus?

A_{14}: Seria a mesma base, A, B, C, D. O A tomaria o lugar do C. Então seria C, D,A, B...porque é o seguinte, pegar o ponto do próprio conjunto e rotacionar 180.
P: Quem seria a de 270 graus?
A_{14}: A, B, C, D [referindo-se ao que ele chamou de base]. Na de 270 o A tomaria o lugar do D; então D, A, B, C.

Embora fizesse corretamente as correspondências dos pontos A, B, C e D nas específicas rotações, A_{14} não tinha consciência de que se tratava de uma função. Para ele tratava-se de uma mudança na posição dos pontos. As correspondências eram feitas como se fosse um jogo. Ele via o correspondente do ponto A e a partir deste dizia os outros, respeitando a ordem sequencial A, B, C e D. Além disso, a dificuldade em representar à ação de cada rotação sobre esses pontos era evidente. Com o objetivo de verificar a sua compreensão sobre a operação entre as rotações, foi-lhe pedido para ler a pergunta no texto que se referia a isto e respondê-la.

A_{14}: A composição (operação) de dois desses movimentos permitidos, é ainda um movimento permitido? [E depois diz:] ... no caso seria, né, eu estou apenas rotacionando [Lê o que vem depois] Em caso afirmativo, represente isso, isto é, explicite o resultado da operação entre dois quaisquer desses movimentos. [Depois pergunta:] Seria esse negócio que eu fiz agora? Essa seria uma representação do movimento? [Referia-se às representações permutacionais que tinha usado, por sugestão minha, para as rotações, chamando de r_0, r_1, r_2 e r_3 as rotações de 0, 90, 180 e 270 graus, respectivamente] Realmente isso aqui acontece, se eu rotacionar qualquer movimento, vai dar um movimento ainda que é permitido.
P: Por exemplo, quando a gente pega a rotação de 90 graus e compõe com a rotação de 180 graus, qual é o resultado?
A_{14}: Seria uma rotação de 270. Ah! sim, por exemplo, estou pegando aqui a rotação de 90, o A nessa posição. Quem é a rotação de 180? O A que estava aqui, vem pra cá, se eu vou compor esses dois aqui [pausa] seria isso aqui? o A começando aqui na rotação de 270, não? Aqui, e aqui, então eu vou pegar o A como se estivesse aqui. [Estava fazendo oralmente, depois diz:] Vou passar para o papel. [Escreve $r_1 \circ r_2$, depois abre parênteses e coloca na linha do topo as letras A, B, C e D, e diz:] Isso aqui permanece, isso aqui é sempre o começo [Referindo-se as letras A, B, C e D]. Eu tenho que compor esse elemento com esse aqui, não é professora? O B e o C, pegar o B aqui e rotacionar 180. Então começaria aqui do B? Pegar o B e rotacionar 180, seria assim? Porque eu não ia fazer uma rotação de 180, depois disso aqui?

Havia a idéia de fazer a rotação a partir de um dos quatro pontos e uma confusão com os pontos na hora de fazer a composição. Existiam duas possíveis explicações para a sua atitude: ou ele não estava vendo as rotações como função e, por isso, não estava usando o conceito de composição de funções, ou o problema era só na realização de composição de funções. Insistindo na questão:

P: O que eu perguntei para você foi o seguinte: quando se faz uma rotação de 90 e depois uma rotação de 180, qual é o resultado disso?
A_{14}**:** O ponto D.
P: Por que dá isso?
A_{14}**:** Eu peguei essa rotação de 90, não é isso? Ai, fiz uma composição com a rotação de 180. Então, a segunda eu ainda rotacionei 270. Então, quando eu for pegar o B, eu vou rotacionar também 270, pegar a mesma composição, esse com esse, então A, o B passa a ser A, o C passa a ser B e D passa a ser C. Se eu pegar a rotação de 0 grau e a rotação de 90... o que seria a rotação de 0? Ah! a idéia de função, A vai em A, não é, na rotação de 0? E depois na rotação de 90, A vai em B, então A vai em B. Na de 0, B vai em B, e na outra B aqui vai em C, então B vai em C. Aqui já dá para dizer que a rotação de 0 operada com a de 90 dá a própria rotação de 90. Então a rotação de 0 seria o elemento neutro.
P: Faz a composição da rotação de 90 graus com ela mesma.
A_{14}**:** Vou fazer assim. [Na representação permutacional, coloca as letras A, B, C, D na linha do topo e embaixo desta as letras B, C, D, A, nesta ordem, e diz:] No caso eu teria que pegar o quê? Esse A vai em B, e no caso de novo, esse A vai em B...

Ele afirma que a composição da rotação de 90 graus com a de 180 graus é a de 270, do ponto de vista da geometria (em termos de graus), e dá a posição dos pontos a partir da própria rotação de 270, sem ter consciência de estar fazendo a composição de duas funções bijetoras. No momento de compor a rotação de 0 grau com a de 90 graus, dá-se conta de que se trata de uma função, "Ah! a idéia de função", e dá o resultado, que foi facilitado pela própria rotação de 0 grau que mantém todos os pontos onde eles estão. O mesmo não acontece com a de 90 graus que permuta todos os pontos, e isso foi suficiente para ele ficar confuso e não fazer a operação. A sua afirmação, referindo-se aos pontos A, B, C e D: "isso aqui permanece, isso aqui é sempre o começo", está associada à posição dos pontos na circunferência, sem nenhuma vinculação com o domínio das funções-rotações. Pedindo-lhe para fazer a operação entre outras rotações, confirmou-se que ele, de fato, não sabia fazer a composição de funções. Além disso, no decorrer da entrevista, a idéia de função parece ter sido abandonada, o seu conceito de função não estava no nível que o problema exigia.

Neste nível nenhum aluno sabia o que era uma rotação, ninguém resolveu S2.2 no texto. Na entrevista, mesmo os alunos que identificaram os elementos do conjunto, o fizeram de forma mecânica olhando a posição dos quatro pontos A, B, C e D associado ao movimento da circunferência, sem ter consciência do real significado do que estava sendo feito.

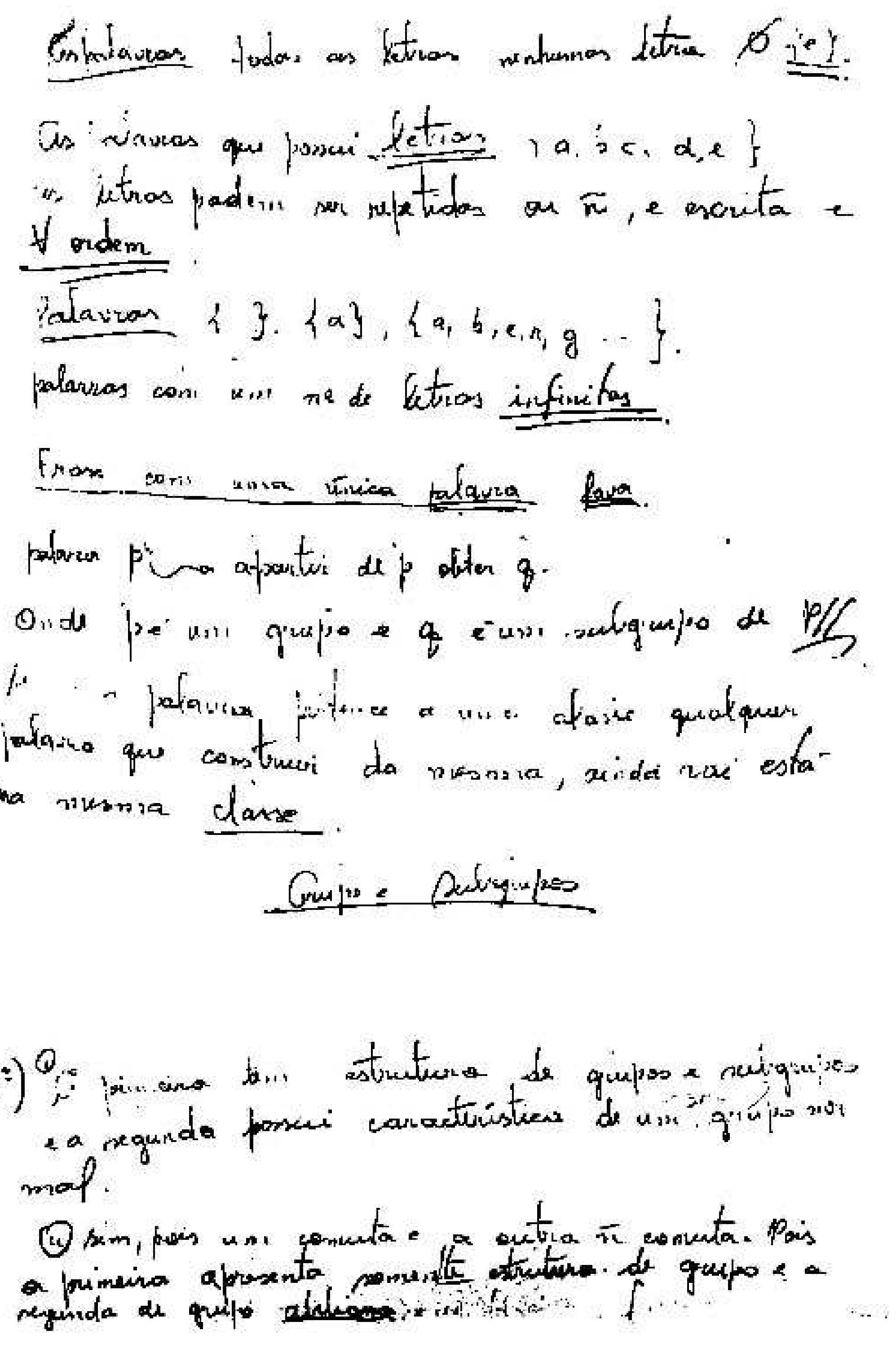


Figura 6.2: Solução (escrita) para S3.1, aluno A_1, nível 1

A solução dada por escrito (figura 6.2) à situação S3.1 por A_1 e os trechos da sua entrevista exemplificam as categorias 2C e 3C neste nível.

Constata-se na solução dada pelo estudante A_1, que sua compreensão da construção da língua artificial difere muito da construção proposta. A_1 não observa que as palavras são formadas por repetições da letra A apenas, e considera palavras formadas por letras do nosso alfabeto. Para ele, as palavras ora são conjuntos - conjunto vazio, conjunto unitário, conjunto com um número qualquer de letras -, ora são palavras da língua portuguesa. A afirmação de que uma palavra podia ser obtida de uma outra através de transformações segundo a regra adotada e que, neste caso, as duas palavras pertenciam a uma mesma classe, o fez deduzir que poderia formar uma palavra com parte de uma outra. A partir disso, tira conclusões sem nenhuma fundamentação lógica. Na entrevista ele explica como isso aconteceu...

P: Você entendeu qual era a proposta de construção da língua artificial?

A_1**:** Ele quer chegar exatamente na construção de grupo e subgrupo. Porque quando ele fala que vai ter palavras, frases... palavras que vai ter letras e palavras que não vai ter letras... Aí eu imaginei logo no vazio, o conjunto vazio. Ele diz que pode ser escrita ida e volta, então tem uma inversa, vai poder ser escrita inversa, de ordem inversa.

P: Você diz que pode ser escrita ida e volta, em que sentido? O que significa isso?

A_1**:** As palavras que possuem letras e as que não possuem dá idéia de vazia, uma coisa vazia. Porque daqui, desse conjunto, eu posso formar uma palavra usando essas letras, ta entendendo? Aí aqui as que não possuem... aí eu fui botando em qualquer ordem, quando me deu a idéia de qualquer ordem, me deu a idéia de inversa.

P: Como?

A_1**:** Se eu pegasse RARA, RARA não, ARARA, eu posso ir e voltar, vai dar a mesma ARARA.

P: Você colocou outras letras e um número infinito de letras

A_1**:** Exatamente, porque diz aí também né?

P: Aqui diz que o alfabeto é formado só pela letra A e que haverá sempre uma palavra que não possui nenhuma letra e um grande número de palavras que comportam uma, duas, três ou um número qualquer de letras.

A_1**:** Ah, é. Um número grande, não deu idéia de que seja infinito. Então foi isso, p a partir de q e obter q... eu tava tendo a idéia aí que p era um grupo e pegava agora q... dá idéia aí que é com respeito a uma mesma operação.

P: p e q são palavras

A_1**:** É exatamente, p e q são palavras. Eu estava pensando em tomar uma palavra p e dessa palavra p formar uma nova palavra, aí dava a idéia de que p era um grupo e esse q agora ia ser subgrupo de p.

P: Como você explica que p é um grupo se p é uma palavra qualquer?

A_1**:** Como a gente vê esse grupo, né, palavras que obedecem aquelas regras. Agora para ser subgrupo, tem que ser um grupo com a mesma operação, né? Eu tava vendo assim, se eu tomasse uma palavra... deixe-me ver uma palavra... SARA, eu poderia tomar uma nova palavra dessa palavra, só SA, aí eu diria que p era SARA e q era SA

Vê-se que A_1 faz associações arbitrárias entre palavras, frases, idéias. A afirmação de que havia palavras sem letras o fez pensar no conjunto vazio e com isso vem os conjuntos formados com letras do nosso alfabeto referidos antes. O fato de que as letras podem ser escritas em qualquer ordem o fez pensar em ler a palavra da direita para a esquerda. Além disso, as posições entre as palavras p e q mudam o tempo todo - ora p é obtida de q, ora é o contrário, q é obtida de p. É claro que se pode usar as letras indistintamente centrado na mesma idéia, mas não é isso o que ocorre. Nota-se a associação indevida de grupo como uma palavra e de subgrupo com parte dela, uma vez que uma palavra é considerada grupo e parte dessa palavra um subgrupo. Ele afirma: "agora para ser subgrupo, tem que ser um grupo com a mesma operação". No entanto, o seu exemplo com as palavras não reflete isso. É uma repetição de algo que já ouviu sem ter a compreensão exata do que está sendo dito. Com o objetivo de investigar a sua compreensão sobre a regra dada, perguntei-lhe:

P: O que você entendeu quando ele diz que o agrupamento AAAAAA pode ser inteiramente suprimido ou acrescentado ?
A_1: Eu não tive uma visão... quando eu vi o AAAAAA eu não soube... eu não pensei em usar essa regra.
P: Como seria uma palavra dessa língua, usando o alfabeto constituído só da letra A.
A_1: Seria AAAAAAAAAA...
P: Eu posso ter uma palavra com 10 A, 50 A, com 500 A?
A_1: Pode [Ele lê a parte que fala da formação de classes]
P: A palavra que tem 10 A pode ser transformada numa outra, usando essa regra ?
A_1: Pode, classe de duas a duas
P: Qual seria a outra palavra?
A_1: Usando o alfabeto que só tem o A [pausa] eu não posso jamais usar números ? Mas, ele não diz que o agrupamento pode ser inteiramente suprimido ou acrescentado? Eu posso fazer AA.
P: Por que AA? Você usou a regra? Quando você diz isso o que você está pensando?
A_1: Escrever dois a dois. Eu tenho 10 A e posso agrupar ele dois a dois, não posso?
P: O que significa isso, escrever dois a dois?
A_1: Agrupar os A. Por que o que diz essa regra, não pode ser acrescentada ou suprimida ? Ele diz que o agrupamento aqui... pode ser acrescentado ou suprimido
P: Quantos A?
A_1: 6, então quer dizer que desses 10 A, se usar essa regrinha, então no caso, eu poderia, além dos 10, ou suprimir 6 ou acrescentar 6. Ta certo. Poderia fazer assim ou assim [E escreve 16 A e 4A].
P: Nessa palavra, você usou a regra e obteve essas duas palavras. O que você pode dizer agora?
A_1: Que eu formei uma nova classe, que é do A, né?
P: Que classe é essa?
A_1: [pausa]

P: [Ele escreve várias palavras, mudando a quantidade de A, eu então lhe pergunto:] Quem são as palavras que estão na mesma classe?
A_1**:** Essa palavra aqui e essas outras duas [Apontanto para as palvras 10 A, 4 A e 16A]
P: Então, quantas classes vamos ter?
A_1**:** Infinitas classes
P: Tem certeza?
A_1**:** Tem a classe de suprimir e a classe de aumentar por causa da regra. [Ele pára e lê o trecho que refere-se à formação das classes]...nessa língua cada palavra pertence sempre a uma das classes e apenas a uma...
P: Uma palavra com 25 A, em que classe ela está?
A_1**:** Na classe dos 25 A. Poderia aumentar
P: Por que você está querendo aumentar e não suprimir?
A_1**:** Eu não posso fazer as duas coisas? A idéia de usar a regra é mostrar que essas palavras estão em uma única classe. Não que a gente vai suprimir ou acrescentar, a idéia não é mostrar que ela [a palavra] vai está contida em uma classe.
P: Ele diz aqui que o uso dessas palavras não é funcional, não é prático, porque você pode ter palavras muito compridas. Então, qual é a idéia de usar a regra?
A_1**:** [pausa] Usar a regra para suprimir e para deixar ela pequena
P: Se eu tenho uma palavra com 25 A
A_1**:** A idéia é suprimir, ficar uma palavra com 19 A, ou senão, você pode reduzir mais ainda, deixar com 7 A, ainda melhor, deixar com um A.
P: Uma palavra com 40 A, em que classe ela vai ficar ?
A_1**:** 4 A
P: Por que?
A_1**:** 40 dividido por 6 dá resto 4, 4 A
P: Quantas classes eu vou ter?
A_1**:** Mas eu já disse que a idéia é reduzir em uma única classe.

Vê-se em todo esse diálogo a dificuldade de A_1 em compreender a regra. A discriminação dos traços inerentes à situação é fraca e mesmo tendo discriminado algum traço, facilmente ele o perde. Ele demora a compreender que só pode ser suprimido ou acrescentado exatamente AAAAAA, e não apenas AA ou outra qualquer quantidade de A. Até esse momento o significado da regra e a necessidade de sua utilização ainda não tinham sido apreendidos.

P: Você quer colocar todas as palavras em uma única classe? Você viu que não se pode usar essa regra para sair, por exemplo, dessa palavra para essa [referia-me à palavra 10 A para a palavra AAA].
A_1**:** Vai ter um monte de classes
P: Quantas?
A_1**:** [pausa] uma, duas, três, quatro, cinco classes, a classe de um A, 2 A, 3 A, 4 A, 5 A.
P: E a classe da palavra que tem 6 A onde fica?
A_1**:** Vai cair na identidade
P: Que identidade? Quem é a identidade ?

A_1**:** Quem é a identidade aqui? É o zero.
P: Quem é o zero? Você está só substituindo um nome por outro. Eu quero saber quem é a identidade nesse caso e o que isso significa?
A_1**:** [pausa] eu não sei. [Ele lê outro trecho falando sobre as classes] ...essa regra também é necessária para distribuir essas palavras em classes. É importante observar que, de acordo com essa regra, a palavra AAAAAA e a palavra que não possui nenhuma letra pertencem à mesma classe. [Depois fala:]Então, eu disse que era 6 A
P: Quais são as outras palavras que estão nessa classe?
A_1**:** Todos os múltiplos de 6. Qualquer palavra que você pegar vai estar nessas classes. Tem 6 [Depois disso ele faz a TABELA da operação no conjunto das 6 classes]
P: E agora o que você pode dizer?
A_1**:** Eu vi o seguinte: que A tem um inverso, qualquer elemento aqui tem inverso, tem elemento neutro. Pelos meus conhecimentos eu diria que tem estrutura de um grupo
P: Por que? Explique isso
A_1**:** Eu vi que cada elemento tem um inverso e cada elemento admite elemento neutro
P: Cada elemento admite elemento neutro?
A_1**:** Não o grupo das classes tem um elemento neutro
P: Quem é o elemento neutro?
A_1**:** É esse parentes aqui que eu usei, e vi que é associativa
P: Como ?
A_1**:** Eu posso associar porque é tudo A

Nota-se que há um pensamento desordenado e instável. Por exemplo, primeiro ele diz que vão ter infinitas classes; em seguida, que as palavras podem ser colocadas em uma única classe, depois que existe um monte de classes e, por fim, que existem 5 classes, sem considerar a classe das palavras que podem ser transformadas na palavra vazia. Ora as afirmações são feitas arbitrariamente como aconteceu em relação às classes, ora o entedimento parece claro quando afirmou que todos os múltiplos de 6 (para referir-se a todas as palavras com um número de letras múltiplo de 6) estão na classe da palavra 6A. Embora ele tenha listado 6 classes, não houve a exibição de seus elementos e nenhuma afirmação foi feita sobre eles, exceto com a classe da palavra 6A.

Nota-se que as relações entre as palavras que correspondem aos conceitos da teoria dos grupos estabelecidas por A_{14} e A_1 são, ainda, muitas imperfeitas tanto nas justificativas escritas quanto nas orais.

Os alunos deste nível tiveram muita dificuldade na atribuíção de significados e, portanto, na exibição de representações para as quatro situações e em identificar realmente os elementos dos conjuntos a elas associados. Eles não tinham um esquema automatizado para o uso da definição de grupo, e, menos ainda, para a solução das situações. Conseqüentemente, as soluções são imprecisas, as afirmações e justificativas são arbitrárias, vagas, desconexas.

Categoria 4 - As semelhanças e diferenças entre os grupos

De acordo com a submatriz/tabela 6.2, nesta categoria o item predominante foi o de número 1, isto é, não se tem idéia do que seja uma estrutura de grupo. Em S3.3 não se responde nada ou são listadas características irrelevantes para o estabelecimento da similaridade das estruturas dos grupos.

No texto escrito, o aluno A_1, a partir da solução apresentada na figura 6.3, escreve em S3.3: “a primeira tem estrutura de grupos e subgrupos e a segunda possui característica de grupo normal. Sim, pois um comuta e a outra ñ comuta. Pois a primeira apresenta somente estrutura de grupo e a segunda de grupo abeliano”.

As afirmações são feitas sem nenhum elemento que as justifique/respalde. Além disso, ele usa a expressão ‘grupo normal’ em associação ao conceito de subgrupo normal de um grupo.

Durante a entrevista sobre a situação S3.1, embora falasse de classes, ele não tinha a compreensão exata do significado da construção das classes e nem da operação entre elas. A operação foi realizada entre as palavras, sem a consciência de que cada uma delas era representante de uma classe. Mesmo assim, as tabelas dos grupos associados a S3.1 e S3.2 foram feitas. Após isso, ele olha o que é pedido em S3.3 e referindo-se à operação dada pelas tabelas, afirma:

A_1: É uma operação binária, porque quando eu tomei dois elementos do conjunto, as classes, ainda é uma classe. O que ele quer saber mais? Ver a estrutura, se é um grupo? É um grupo. Se comuta, é abeliano, eles comutam. [Ele lê a questão 3 e diz:] a estrutura das duas gramáticas, uma, a estrutura da primeira gramática é um grupo abeliano, a outra... isso aqui também vai ser um grupo, esse grupo aqui...vai ser um grupo normal.
P: O que é grupo normal?
A_1: Porque o conjunto das classes, elas não comutam, né? se tomar... dado um ... isso é subgrupo já. Todos dois são grupos, as duas estruturas. [Ele, alternadamente, lê as perguntas colocadas em S3.3 e as responde] Elas podem ser comparadas? De que forma? Existe alguma similaridade entre elas? Pode comparar porque a gente está falando de classes, né? De que forma eu posso fazer essa comparação? [Depois responde] Eu comparo assim, observando as classes, observando a tábua dessa construção.

Em primeiro lugar, nota-se que ele torna a falar de grupo normal mas não consegue explicar o que seja. De acordo com sua insistência em usar essa expressão, é possível' afirmar que está sendo feita alguma associação com um resultado na teoria de grupo que diz o seguinte - Todo subgrupo de um grupo abeliano é um subgrupo normal -, uma vez que ele fala de grupo abeliano, embora não prove.

Com respeito ao item S3.3, para ele a comparação podia ser feita pelo fato de os elementos dos dois grupos serem classes. Vê-se que não existe a compeensão do que seja a estrutura interna de um grupo, uma vez que o objeto da questão - a similaridade entre os grupos -, de fato, não foi perseguido.

Um outro aluno, A_{11}, em resposta a S3.3, escreve: "a diferença é que com A e B faz-se mais palavras menores que só usando o elemento A".

Pensando que se vai sempre usar as palavras já reduzidas, a sua afirmação está correta - no caso do alfabeto com as letras A e B, qualquer palavra pode ser transformada em uma outra com no máximo três letras. Realmente, utlizando o fato de que AB=BA nas palavras escritas com as letras A e B, pode-se juntar todos os A e todos os B também. Em seguida, suprime-se AAA e BB o número de vezes que for possível, ficando, portanto, no máximo AA e B juntos. No outro caso, só se pode suprimir quando tiver seis A juntos, isso faz com que se tenha palavras com até cinco letras iguais a A. Isso somente não explica nada sobre as semelhanças dos grupos.

Categoria 5 - A conexão entre as soluções, a definição de grupo e os exemplos

Neste nível e nesta categoria o item predominante foi o 3 (ver tabela 6.2). Isto significa que o entendimento do que seja grupo é dado por meio de uma definição, na qual os três conceitos-chave nem sempre são todos mencionados, nem sempre são explicitados e nem sempre estão articulados. Isso se reflete nas soluções das situações e nos exemplos fornecidos.

O aluno A_{14}, na tentativa de dizer o que é grupo em S1.9, escreve: "o nome grupo leva a entender uma acumulação de operações binárias sujeitas a certas normas, lei de formação e conhecimento de algumas propriedades".

Na primeira entrevista ao ser indagado sobre o que é grupo em matemática, responde:

A_{14}**:** Em matemática, o que é grupo? O nome grupo, em si. Quando é grupo, porque eu nunca ouvi falar isso em matemática, quer dizer, falar já. O nome grupo nos leva a... uma certa junção de pessoas ou de elementos, com o mesmo propósito, se formaram um grupo porque tinha um propósito único. Grupo de pessoas que se unem em busca de um mesmo objetivo, aí para todo grupo tem um certo estatuto, isso é certo, isso é errado, se é bom fazer, se é bom fazer aquilo, acho que tudo entra em consenso com o grupo. O nome grupo leva a entender a acumulação de operações binárias, sujeitas a certas normas, leis de formações e conhecimento de algumas propriedades. Então, o conceito de grupo que eu tenho é esse.

Esse mesmo aluno, para expressar o que é grupo na última atividade, escreve:
"dado um conjunto G, será um grupo se:
i) $x \in G$, $x^{-1} \in G$.
ii) $x, y \in G$, $x * y \in G$ e outras propriedades
iii) elemento neutro e tal que, dado $x \in G$, $e * x = x * e = x \ \forall x \in G$".

Vê-se no seu enunciado, na primeira atividade, que há uma combinação de palavras e expressões matemáticas de uma forma solta, sem nenhum sentido matemático, que de jeito nenhum caracteriza o objeto grupo. Na entrevista ele fala de grupo no sentido comum de grupo social.

Na atividade S3.4 já existe uma tentativa de utilizar as palavras que representam os conceitos que entram na definição de grupo, porém o seu texto demonstra que os conceitos estão dissociados. Em primeiro lugar, nota-se que a referência feita à operação no item (ii) de forma simbólica $(x * y)$ sem o uso da palavra, dá a entender que para A_{14} a operação é um simples detalhe da estrutura e não um conceito fundamental. Em segundo, pelo item i) onde simbolicamente é dito que para cada elemento do conjunto, o inverso está no conjunto, sem antes falar de uma operação e do elemento neutro. Fica claro que não existe, para ele, ligações entre esses elementos. Enfim, apesar de ter mencionado alguns elementos que constituem a definição de grupo, a forma como eles aparecem (caracterizada no item 2) não representa de maneira nenhuma o objeto que, de fato, é sugerido pela definição de grupo.

Vê-se, pela tabela 6.10, que, neste nível, na categoria 3, os itens que aparecem são 2 e 3, com predominância do item 3. Isso mostra a não existência de um esquema para a identificação da estrutura de grupo, esquema este que vem como conseqüência da formação dos conceitos-chave da definição e das relações entre eles. A solução dada para S2.2 por A_{14} mostra a mesma desordem mental constatada no estabelecimento das relações entre os conceitos da definição de grupo na categoria 1, assim como o exemplo dado por ele em S3.4.

Os alunos deste nível nem sempre tinham consciência de qual era o centro ou o cerne de uma pergunta. Até mesmo o enunciado de certas situações-problema não era compreendido. Muitos deles não se detinham na essência da pergunta, a atenção era desviada para elementos secundários que apareciam no texto.

Um outro aspecto bem característico neste nível é que há quase sempre um pensamento desordenado e uma linguagem confusa. As palavras surgem de forma não ordenada, há associação de palavras sem nexo e, portanto, de frases sem sentido. Os significados das palavras são vagos, as relações entre elas são difusas (superabundantes) e arbitrárias (sem regras). As relações entre as palavras que correspondem aos conceitos da teoria de grupo são muito imperfeitas tanto nas justificativas escritas quanto nas orais. Usando um termo do próprio Vygotsky, as palavras são ainda muito imaturas.

Nível 2 - Características e soluções-exemplo

Categoria 1 - O que é operação binária

Neste nível e nesta categoria o item predominante foi o 2 (ver tabela 6.3). Isto significa que, para esses alunos, nem sempre é garantido que a operação binária definida no conjunto S seja uma regra que associa cada (todo) par de elementos de S a um elemento de S, nem sempre há referência de que a operação seja uma função e nem o cuidado de observar que todo par de S está associado a um elemento de S. O significado da palavra regra é mais amplo que no item anterior, a regra não precisa ser necessariamente a adição e a multiplicação. Já se percebe diferenças entre as operações fundamentais e a operação binária, porém ainda não se sabe exatamente o que as distinguem. O entendimento da interdependência entre conjunto e operação não é tão claro.

O aluno identificado por A_{12}, no momento de substituir a palavra regra por uma outra afirma: "no momento não teria uma palavra para substituir regra, no entanto, acho que existem outros no qual podemos substituí-la", embora tenha utilizado a notação funcional $\begin{array}{rccc} * : & S \times S & \longrightarrow & S \\ & (a,b) & \longmapsto & a * b \end{array}$ e em S1.2a e S1.4 tenha escrito que "uma operação $*$ do conjunto S, que para cada par ordenado do conjunto S associa um elemento do conjunto S é denominada operação binária". Na solução de S2.1 que será analisada mais adiante isso não é observado.

O aluno A_5 em resposta a S1.1 afirma que "A operação binária é uma regra, pois para que exista uma relação entre o par ordenado de um conjunto e um elemento deste conjunto deve-se obdecer a 'regra' ".

Durante a entrevista A_5 explica mais claramente a sua compreensão sobre regra:

> Quando eu vi assim, que ela é uma regra, eu escrevi isso, mas ficou meio confuso. Eu entendo que é o seguinte: ela é uma regra porque, pra que ocorra a operação ela tem que obedecer alguma coisa. regra sempre dá a idéia de algumas metas que tem que ser cumpridas, de algumas coisas que tem que ser obedecidas, pra que a operação binária aconteça e seja uma operação binária, tem que ter alguma coisa. Tem por exemplo, a regra do par ordenado ter que ser associado ou relacionado com um elemento desse conjunto, é uma regra por isso.

Ainda não satisfeito com sua explicação, complementa:

> Então é a maneira como se dá a relação entre o par e o elemento, tem que obedecer a essa regra, a maneira como vai sendo realizada essa relação. Eu coloquei lei para substituir a palavra regra. Pelo que eu falei, eu tinha pensado assim: para que ocorra a operação binária tem que haver a relação, tem que ter a lei que ligue o par ordenado ao elemento desse conjunto; a regra seria uma lei que o par, o conjunto e o elemento, eles teriam que estar submetidos para que a operação fosse binária.

Em primeiro lugar, é interessante observar a mudança na argumentação de A_5 quanto ao significado e ao papel da palavra regra na constituição do próprio objeto operação binária. A sua compreensão sobre o papel da regra vai se tornando mais clara à medida que ele vai explicando, isto porque a linguagem enquanto instrumento de comunicação tem também a função de organização do pensamento. Vygotsky (2001) afirma que "a linguagem não serve como expressão de um pensamento pronto. Ao transformar-se em linguagem, o pensamento se reestrutura e se modifica. O pensamento não se expressa mas se realiza na palavra". (p. 412)

Na atividade S1.3 A_5 escreve: "a operação binária é uma relação que associa dois termos de um conjunto, um par de elementos ordenados, a um elemento do conjunto". Aqui não fica claro que a regra é aplicada em todos os pares de elementos de S. Na prática isso também ocorre.

Para exemplificar o fato de se poder definir outras operações nos conjuntos numéricos, A_{17} responde escrevendo que "Para todos os conjuntos podemos definir outras operações diferentes das citadas, por exemplo: para o conjunto dos números reais podemos ter a seguinte operação $(\mathbf{R}, \Delta)$, onde $x \Delta y = x$". Existe, portanto, a compreensão de que a regra ou a lei que detemina a operação entre um par arbitrário de elementos do conjunto pode ser qualquer, não necessáriamente a adição ou a multiplicação.

Categorias 2 e 3 -

Os significados, as representações, os invariantes e as estruturas de grupo

Tabela 6.11: Resultado das soluções escritas Categorias 2 e 3 - Nível 2

Situação-problema	S2.1		S2.2		S3.1		S3.2	
Aluno/Categoria	2A	3A	2B	3B	2C	3C	2D	3D
A_5	3	4	3	4	3	2	3	2
A_9	3	3	3	4	1	1	1	1
A_{10}	3	3	1	2	4	4	3	3
A_{12}	3	3	3	3	3	2	3	2
A_{16}	3	3	1	2	3	3	3	2
A_{17}	3	3	2	2	4	5	4	5

Vê-se, na tabela 6.12, que nas soluções dadas, por escrito, pelos alunos deste nível, na categoria 2 (2A, 2B, 2C e 2D) houve predominância do item 3 (repetiu-se 16 vezes). Isto significa que é atribuído um significado fenotipicamente equivalente ao esperado. A

Tabela 6.12: Repetições de item na Categoria 2 - Soluções escritas - Nível 2

Categoria 2				
Aluno/Item	1	2	3	4
A_5	-	-	4	-
A_9	2	-	2	-
A_{10}	1	-	2	1
A_{12}	-	-	4	-
A_{16}	1	-	3	-
A_{17}	-	1	1	2
Total de repetições do item	4	1	16	3

Tabela 6.13: Repetições de item na Categoria 3 - Soluções escritas - Nível 2

Categoria 3					
Aluno/Item	1	2	3	4	5
A_5	-	2	-	2	-
A_9	2	-	1	1	-
A_{10}	-	1	2	1	-
A_{12}	-	2	2	-	-
A_{16}	-	2	2	-	-
A_{17}	-	1	1	-	2
Total de repetições do item	2	8	8	4	2

representação nem sempre é exibida e nem sempre permite a realização de operações.

A instabilidade ocorrida na categoria 2, se reflete na identificação dos elementos do conjunto e da operação, uma vez que na categoria 3 (3A, 3B, 3C e 3D) os itens 2 e 3 se repetem na mesma proporção (8 vezes) - ora são exibidos alguns outros elementos, realiza-se uma operação entre esses elementos, mas nada seja afirmado quanto à estrutura; ora são encontrados alguns elementos do conjunto, é realizada a operação entre tais elementos e não há o uso explícito das propriedades G_1, G_2 e G_3. As perguntas referentes à S2.1 e S2.2 são respondidas sem que haja consciência do que está sendo feito, porém nem sempre afirma-se que é grupo.

Tabela 6.14: Resultado das soluções escritas e orais Categorias 2 e 3 - Nível 2

Situação-problema	S2.1		S2.2		S3.1		S3.2	
Aluno/Categoria	2A	3A	2B	3B	2C	3C	2D	3D
A_5	4	4	4	4	3	4	4	4
A_9	4	3	4	4	3	4	3	4
A_{10}	3	3	3	3	4	4	4	4
A_{12}	4	4	4	4	4	4	4	4
A_{16}	4	5	4	4	4	4	3	4
A_{17}	4	3	4	4	4	5	4	5

Um aspecto chave para os alunos deste nível era o quão o significado atribuído permitia uma representação e o quão essa representação era operatória - a representação nem sempre era exibida integralmente e nem sempre permitia a realização de operações. Quanto mais próximo do esperado estivesse o significado atribuído mais facilidade era a representação e isso significava tarefa realizada, uma vez que havia um esquema automatizado para a verificação dos traços da definição de grupo e que era facilmente adaptado,

Tabela 6.15: Repetições de item na Categoria 2 - Soluções escritas e orais - Nível 2

Categoria 2				
Aluno/Item	1	2	3	4
A_5	-	-	1	3
A_9	-	-	2	2
A_{10}	-	-	2	2
A_{12}	-	-	-	4
A_{16}	-	-	1	3
A_{17}	-	-	-	4
Total de repetições do item	0	0	6	18

Tabela 6.16: Repetições de item na Categoria 3 - Soluções escritas e orais - Nível 2

Categoria 3					
Aluno/Item	1	2	3	4	5
A_5	-	-	-	4	-
A_9	-	-	1	3	-
A_{10}	-	-	2	2	-
A_{12}	-	-	-	4	-
A_{16}	-	-	-	3	1
A_{17}	-	-	1	1	2
Total de repetições do item	0	0	4	17	3

o que não ocorria no nível anterior. Na entrevista estes resultados mudam...

De acordo com a tabela 6.15, nota-se que no desempenho dos alunos no todo (parte escrita e oral), na categoria 2 (2A, 2B, 2C e 2D) predominou o item 4 (repetiu-se 18 vezes). Ou seja, os significados atribuídos às situações S2.1, S2.2, S3.1 e S3.2, em sua maioria, é o esperado.

Na categoria 3 (3A, 3B, 3C e 3D) o item 4 também predominou (repetiu-se 17 vezes). Isto significa que, em S2.1 e S2.2, todos ou quase todos os elementos do conjunto são identificados, pois é realizada a operação entre os elementos encontrados. Já em S3.1 e S3.2 todos os elementos do conjunto são encontrados, sendo realizada a operação entre os elementos por meio de uma TABELA. Nas quatro situações as propriedades G_1, G_2 e G_3 são pelo menos mencionadas. Em todos os casos afirma-se que é grupo.

Vendo agora as soluções dos alunos, vem:

A solução dada por A_{12} para S2.1 apresentada na figura 6.3 exemplificando as categorias 2A e 3A.

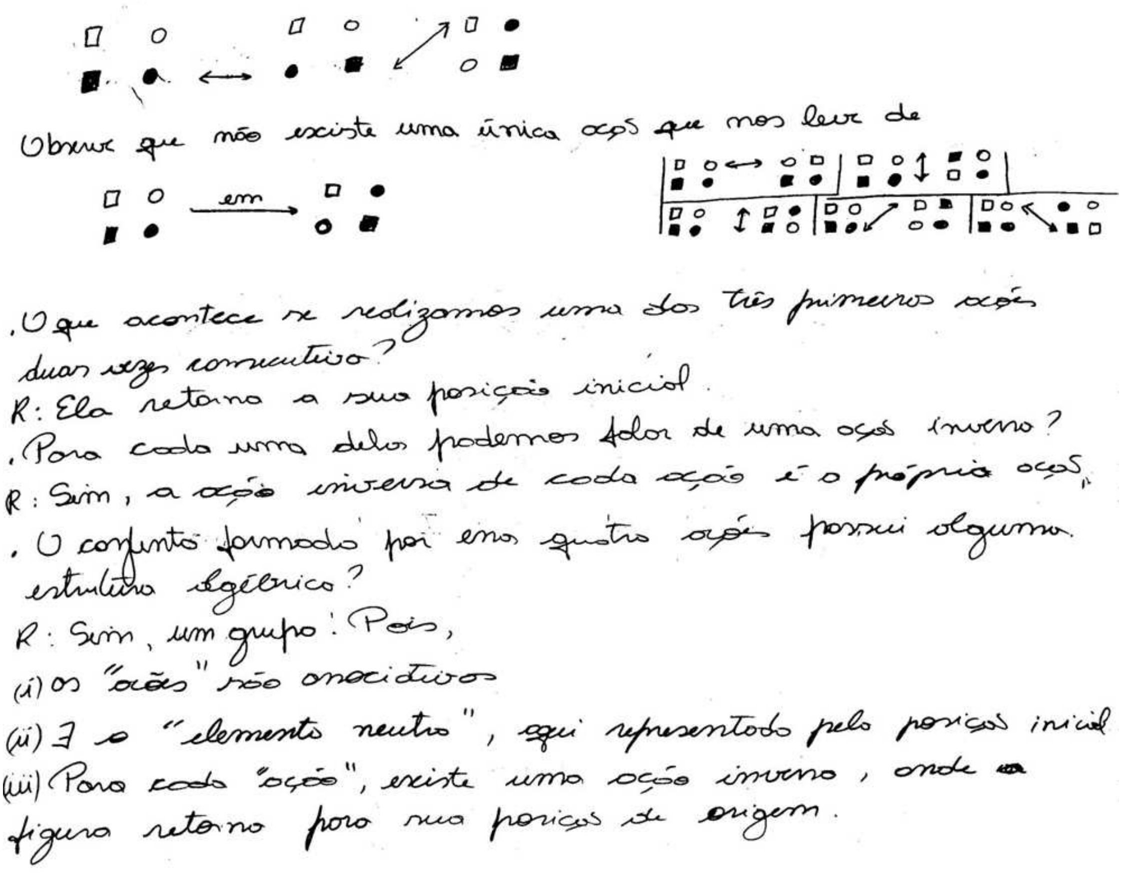


Figura 6.3: Solução (escrita) para S2.1, aluno A_{12}, nível 2

No início da solução, A_{12} tenta fazer a operação entre as ações. Toma um par de ações e tem a intenção de fazer a representação do resultado das duas ações usando a figura que foi dada, alterando-a de acordo com as ações consideradas. Não nota que sua representação não é fiel à realização das duas ações: mudar apenas a forma seguida da ação mudar a forma e a cor, e vê, pela disposição das figurinhas segundo a sua representação, que não existe uma ação que leve da figura original à figura obtida após a realização das duas ações. Isto significa dizer que existem duas ações, cuja composição não é equivalente a nenhuma outra. Mesmo assim, ela continua a solução, afirma que cada ação é a inversa de si mesma, que existe um elemento neutro, enfim, que o conjunto das quatro ações é um grupo.

Pelo que foi expresso no texto, era preciso investigar se a relação entre a figura e as ações tinha sido compreendida ou se o problema era apenas na representação.

P: Por que você afirma que não existe uma única ação que leve dessa situação para essa ?[aponto para as duas figuras que ela coloca abaixo da sua observação]
A_{12}**:** Na verdade o que foi que eu quis mostrar... eu tenho aqui duas ações e observei... que do ponto de origem [referia-se à figura dada] para esse aqui [referia-se à figura obtida após ter realizado as operações] não existe uma só que leve. Eu peguei um caso particular, eu fiz essa operação aqui, mudança de forma e uma segunda operação foi... mudança de forma e cor.... Foi isso que eu entendi, aí eu vi que não...não existia nenhuma.
P: Primeiro você queria mudar a forma, não foi?
A_{12}**:** Foi. A segunda foi cor.
P: Você disse antes que era mudança de forma e cor. Para a mudança de cor a indicação não é com essa seta.
A_{12}**:** Na realidade não seria essa... eu entendi agora... eu vi agora que realmente isso daqui ia mudar as duas, e nesse caso aqui mudou só a cor. Aí talvez, realmente agora tenha como... É isso, a idéia realmente é essa. Porque eu me peguei na história da seta, a primeira setinha, peguei essas duas, essa setinha, seria mudar as duas, aí no caso aqui mudaria minha idéia. Dada duas operações existe uma outra que eqüivale a ela.
P: Como você poderia garantir que isso vale para quaisquer duas ações que você pegue, que o resultado de duas ações é uma dessas ações? Você acha que é preciso garantir isso?
A_{12}**:** É preciso, mas como eu poderia garantir? E eu sei como poderia garantir? [pausa] Vamos ver... mudar forma e depois mudar cor, tem essa que eqüivale as duas. Se eu mudo a cor, e depois mudo a forma e mudo a cor, essa anula essa, então eu mudo só a forma. E no caso de mudar a forma, depois mudar a forma e mudar a cor, essa anula essa, então no caso fica só mudar a cor. Aí eu não sei como fica não. Seria como se eu tivesse aqui a e b, então ficava $a * b$.

Como se vê, ele percebeu que tinha errado a representação. A compreensão completa da figura e das ações deu-se durante a entrevista. Ele constatou que a realização de duas ações dá como resultado uma ação, mas a garantia de que isso ocorria para todos os pares de ações parecia difícil - não via como trazer o que foi visto formalmente numa situação geral para uma específica, ou melhor, como sair do nível abstrato para um nível concreto.

No texto escrito ele afirma que é grupo, e justifica escrevendo que as ações são associativas e não a operação, que existe o elemento neutro representado pela posição inicial e não pela ação de não mudar nada, que para cada ação, existe uma ação inversa em que a figura retorna para a posição de origem. Há uma confusão entre as ações e a posição da figura, como se a figura fosse elemento do conjunto. Para investigar melhor sobre isso, pergunto-lhe:

P: Em resposta à pergunta, o que acontece se realizarmos uma das três primeiras ações duas vezes consecutivas, você colocou: “ela retorna a sua posição inicial”. O que você quer dizer com isso?
A_{12}**:** Que as figuras retornam a sua posição inicial. [riso] Você fazendo duas vezes ela volta ao ponto inicial, seria o elemento inverso.
P: Dizer que a figura retorna à sua posição inicial, em termos de ação significa dizer o que?
A_{12}**:** O ponto, no caso. A ação de não mudar nada. Realmente a gente tem... é que associar ao que a gente está trabalhando em álgebra mesmo, seria aqui o $a * a^{-1}$ dá o elemento neutro, dá a identidade. No caso aqui, seria pegar esse operado com ele mesmo, dá o ponto. Podia ser setinha $*$ setinha dá o ponto.[risos]

De fato, havia um entendimento correto do que estava acontecendo, entretanto, havia dificuldade no uso da linguagem, seja a linguagem matemática ou simbólica. Vê-se, nesta solução, uma vontade do aluno de exemplificar as representações abstratas com as ações.

De um modo geral, nos alunos deste nível, embora com dificuldade, havia sempre uma tendência de fazer a associação entre o que estava sendo estudado numa situação abstrata e numa situação específica. Vygotsky (2001) afirma que este é o caminho percorrido pelo conceito científico. O conceito do sujeito precisa vincular-se às suas experiências nas situações concretas.

A solução dada por A_{16} para S2.2, exibida através da figura 6.4, exemplifica as categorias 2B e 3B. Aqui, um outro significado é atribuído à S2.2.

P: Você disse que são oito movimentos? Quais são?
A_{16}**:** Eu entendi assim: podia partir de cada ponto, tanto para a direita, nesse sentido... quanto para esquerda, no sentido horário ou no sentido anti-horário, partindo de cada ponto, foi nisso que eu me baseei ...
P: Em cada movimento que você faz o que é que acontece?
A_{16}**:** Chega no próprio ponto. É isso?
P: O que vai mudar de um movimento para o outro?
A_{16}**:** A direção... o sentido horário ou anti-horário. Eu não sei... eu pensei que saía de A nesse sentido, de B, C, eu pensei nisso na hora
P: Aqui no texto está colocado que na circunferência estão sendo aplicados os movimentos e cada movimento será dado pela referência à posição dos pontos A, B, C e D. O que você entendeu disso?
A_{16}**:** [pausa] Eu não estou entendendo isso não.

Há sempre uma noção intuitiva de rotação e que não suficiente para resolver a situação. Ele não percebe que mesmo fazendo os movimentos da forma como estava pensando,

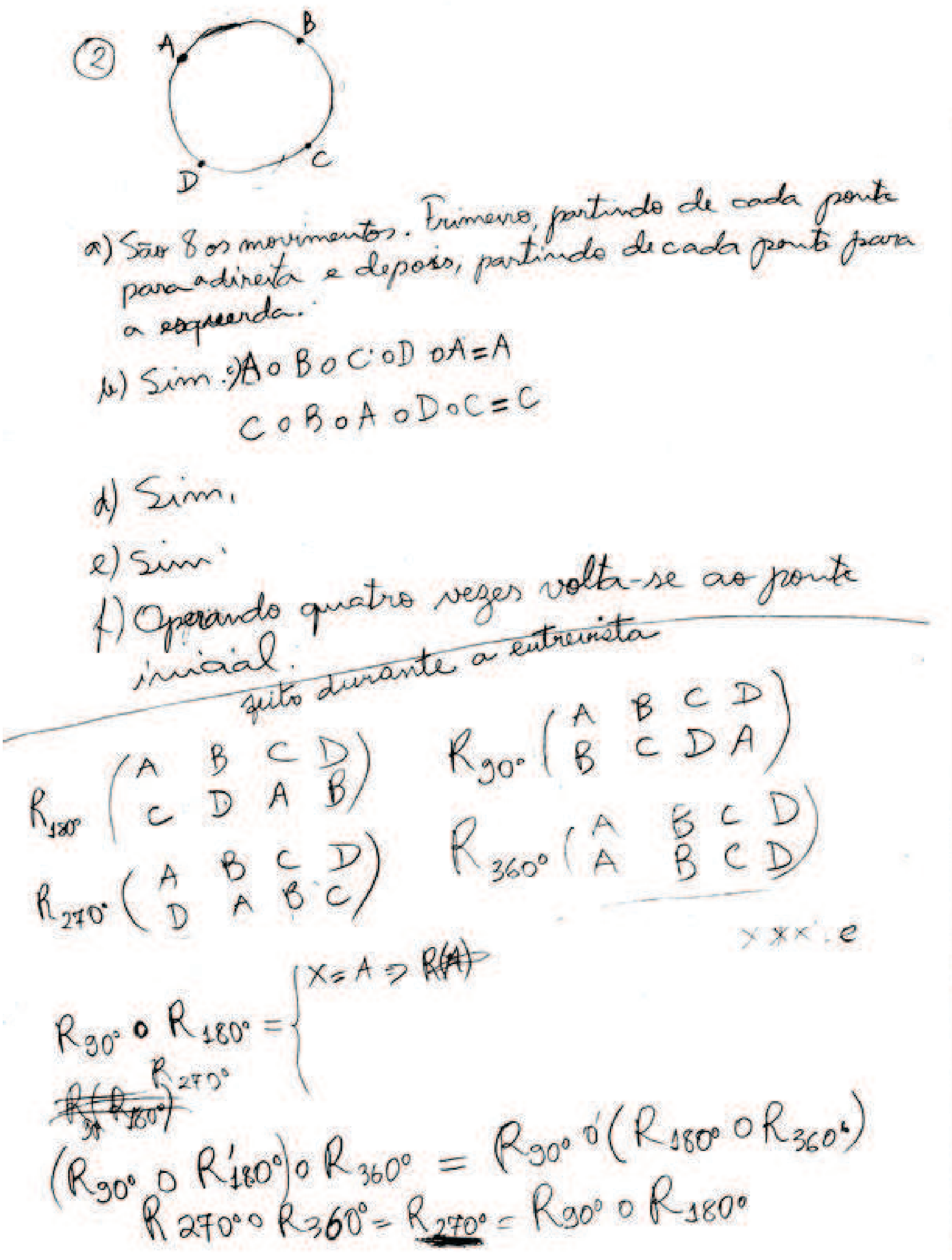

②
A B C D
a) São 8 os movimentos. Primeiro, partindo de cada ponto para a direita e depois, partindo de cada ponto para a esquerda.
b) Sim: A∘B∘C∘D∘A=A
C∘B∘A∘D∘C=C
d) Sim.
e) Sim.
f) Operando quatro vezes volta-se ao ponto inicial.
feito durante a entrevista
$R_{90^\circ}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix}$
$R_{180^\circ}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix}$
$R_{360^\circ}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$
$R_{270^\circ}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{pmatrix}$
$R_{90^\circ} \circ R_{180^\circ} = \begin{cases} X = A \Rightarrow \cancel{R(A)} \end{cases}$
R_{270°
$(R_{90^\circ} \circ R'_{180^\circ}) \circ R_{360^\circ} = R_{90^\circ} \circ (R_{180^\circ} \circ R_{360^\circ})$
$R_{270^\circ} \circ R_{360^\circ} = R_{270^\circ} = R_{90^\circ} \circ R_{180^\circ}$

Figura 6.4: Solução (escrita) para S2.2, aluno A_{16}, nível 2

saindo de cada ponto no sentido horário, por exemplo, os quatro movimentos seriam iguais. O mesmo acontece no outro sentido, o que resultaria em apenas dois movimentos (em relação à posição dos pontos).

P: Você trabalhou com rotação no curso de Álgebra Linear e de Cálculo III?
A_{16}**:** Eu vi rotação. Mas eu não me lembro mais da definição.
P: O que é uma rotação? O que é que vai acontecer em cada rotação que você fizer aqui ?
A_{16}**:** Tomando... tomando como referência um ponto né? Se eu tomo como referência o ponto C, eu faço a rotação passando por D, A e B, não é isso?
P: Como você representaria os movimentos?
A_{16}**:** Os elementos são esses pontos.
P: Mas eu só tenho quatro pontos.
P: Você consegue ver o que seria uma rotação de 90 graus?
A_{16}**:** Uma rotação de 90 graus, só vai mudar os pontos, né? Nesse sentido, ai vai mudar os pontos, o A vai para a posição do B, o B vai para a posição do C, ...
P: Como que você pode representar isso?
A_{16}**:** [silencio] Não estou sabendo representar. Eu sei que a de 180, levaria o A no C, o B no D, D no B, e o C no A. A de 270, leva o A no D, o B no A, C no B e o D no C. A de 360 é um giro completo, o A no A, o B no B,... dá a identidade.
P: Então quantos movimentos são?
A_{16}**:** Quatro movimentos, só. Quatro movimentos, entendi agora.
P: Como seria o conjunto formado por esses movimentos? E que estrutura tem esse conjunto?
A_{16}**:** De grupo... agora é... tem elemento neutro, eu já consegui, é o movimento de 360, que leva ele mesmo nele próprio, é associativa...
P: Qual é a operação definida nesse conjunto?
A_{16}**:** Permutação
P: Esse conjunto que nós estamos analisando, é formado de que?
A_{16}**:** É formado de pontos, né?
P: Aqui no texto pergunta assim: "o conjunto formado por esses movimentos possui alguma estrutura algébrica?"
A_{16}**:** É o conjunto formado pelos movimentos... a rotação de 90, de 180...
P: Como você escreve isso?
A_{16}**:** Eu não sei escrever não.

Ele tinha o esquema pronto para resolver situações-problema depois de modeladas, a dificuldade nas suas soluções estava na representação. Havia a idéia de permutação dos pontos ao se fazer uma rotação, mas existia dificuldade em representar isso. Certamente, o seu significado para a palavra permutação não o estava auxiliando. A minha intervenção teria que ir na direção desta palavra.

P: Ainda há pouco, quando eu lhe perguntei qual era a operação definida no conjunto de movimentos você disse que era a permutação. O que é uma permutação?

A_{16}**:** Ah! já sei. [E escreve as rotações usando a representação permutacional] Por exemplo, se fosse no caso de B em 180... a rotação de 180 vai de A, B, C, D em C, D, A e B. A rotação de 270, A, B, C, D em D, A, B e C, e a de 360 é a identidade, de A em A, B em B, C em C e D em D, esse seria o conjunto. Falta a de 90 no caso, eu representaria assim o conjunto. Agora daria para ver a associatividade. 90 operado com R de 180. Ah, 90 com 180, vai ser um elemento desse aqui X, ser igual a ... ai quer dizer que R de A...
P: Que operação é essa que você está fazendo?
A_{16}**:** Composição. [silencio] 90, 180, 360, se eu fizer isso, eu vou ter R de 270[a] operado com R de 360, isso é igual a R de 270, porque eu vi que esse é neutro [a R de 360]. E se eu fizer R de 90 operado com... isso aqui dá a de 180, então esse aqui são iguais. Isso aqui eu tinha feito aqui, que são iguais, quando chega nessa, então, eu provo que é associativa. É. Pelo menos nos outros eu acho que chega, né.
P: O que mais que você teria que olhar?
A_{16}**:** Seria ter inverso, ser inversível, se cada elemento possui inverso. De 90 operado com 180 eu vi que dá 270... Daqui eu ainda não posso concluir que é inversível não. Eles ainda não são inverso, 90 e 180 não são inversos. Porque poderia ser o inverso de 90 deveria ser 270, A leva em B, B leva em A; B leva em C, C leva em B; C leva em D e D leva em C; D leva em A, A leva em D. Pronto, daqui eu concluo que 270 e 90 são inversos, nesse caso, 180 é inverso de si próprio. Pronto, 90 é inverso de 270 e 180 é inverso dele mesmo. Esse é a identidade, portanto é um grupo. A dificuldade é porque eu não me lembrei da rotação.

[a]O aluno A_{16} representou as rotações de 0^o, 90^o, 180^o e 270^o por R_{0^o}, R_{90^o}, R_{180^o} e R_{270^o}, respectivamente e lia R de tantos graus.

Quando eu falo de permutação, ele diz, "Ah! já sei", e imediatamente escreve as representações permutacionais das rotações. Desta forma, fica claro que, no mínimo, foi feita a associação com o modelo visto nos capítulos 4 e 5. Certamente, isso foi possível porque ele entendia a construção dos grupos de permutações.

Dos seis alunos deste nível, quatro dão a representação permutacional das rotações vinculada ao modelo, sem a garantia de que o modelo foi completamente entendido. A rotação tal como está sendo realizada é um jogo específico do desenho da circunferência, uma troca de letras simplesmente. Enfim, nos níveis 1 e 2 é evidente a não formação do conceito de rotação pelos alunos no nível em que a situação exige para que a solução fosse permeada pelo seu significado real.

A solução da figura 6.5, dada por A_5 para S3.1, exemplifica as categorias 2C e 3C.

Respostas

1) o agrupamento AAAAAA pode ser inteiramente suprimido ou acrescentado.

a) classe$_1$: AAAAAA

classe$_2$: AAAAA (suprimiu-1)

classe$_3$: AAAA (suprimiu-2)

classe$_4$: AAA (suprimiu-3)

classe$_5$: AA (suprimiu-4)

classe$_6$: AAAAAAA acrescentou-1)

classe$_7$: A (suprimiu-5)

classe$_8$: AAAAAAAA

classe$_9$: AAAAAAAAA

⋮

b) classe 1 * classe 7 = AAAAAA = classe6 $\in$ Z

operação

classe$_2$ * classe$_7$ = classe$_1$

Tábua

*	classe 1	classe 2	classe 3	classe 4	classe 5	
classe 1	12	11	10	9	8	...
classe 2	11	10	9	8	7	...
classe 3	10	9	8	7	6	...
classe 4	9	8	7	6	5	...
classe 5	8	7	6	5	4	...
⋮						

Figura 6.5: Solução (escrita) para S2.2, aluno A_5, nível 2

Nesta solução, observa-se que A_5 não entendeu a regra dada em S3.1: o agrupamento AAAAAA pode ser inteiramente suprimido ou acrescentado. Isso comprometeu a construção das classes e, conseqüentemente, do conjunto de classes e a relização da operação. Com a pretensão de saber como ele havia entendido a construção da língua, pergunto-lhe:

P: Você entendeu qual era a proposta para a construção dessa língua?
A_5**:** Eu lembro que tinha palavras, não tinha frases, ou nenhuma palavra também estava dentro desse... eu ia formar classes, mas a minha dificuldade ficou no seguinte: se eu botasse infinitos A agrupados, eu ia ter infinitas classes. Eu tenho 6A, se eu acrescentasse A ... acrescentado só uma letra, o alfabeto só é formado pela letra A, eu podia acrescentar uma vez o A, duas vezes o A, três vezes o A, ...
P: Porque você está pensando só na idéia de acrescentar?
A_5**:** Porque ele diz que o agrupamento pode ser inteiramente suprimido ou acrescentado, quando ele diz isso eu vi que posso acrescentar A a esse grupo de A e posso retirar. Cada palavra forma uma classe? Se cada palavra fosse uma classe, eu ia ter infinitas.
P: E assim fazia sentido formar classes?
A_5**:** Foi aí que eu vi que tinha um problema. Ele fala que esse agrupamento pode ser suprimido ou acrescentado.
P: Você percebeu que aqui tem exatamente 6A e que você pode suprimir ou acrecentar 6A? Se eu lhe dou uma palavra com 8A, utilizando essa regra o que vai acontecer?
A_5**:** Vão ficar 2A, eu quero mostrar que 2A fica na classe de 8A.
P: A palavra somente com um A, em que classe ela está ou quem está na classe dela?
A_5**:** 7A
P: A palavra com 3A, se tem 3A, você não pode suprimir.
A_5**:** Ah! então, eu só ia poder suprimir a partir de 7A. Então nessa classe eu teria 3A, 9A, 15A, ... É como um que a gente estudou, do resto... um grupo... como é o nome dele... daquele conjunto... quociente, não congruência ... era o $\mathbf{Z}_6$ aqui. Quando eu fui fazendo aqui, eu sei que poderia ser melhorado a operação... o meu problema é que eu chamei as classes erradas, algumas eu chamei corretamente, isso era uma classe, quando suprimisse.

É interessante observar que A_5, por um lado, começa colocando a palavra AAAAAA (chama de classe 1). Desta classe ele suprime um, dois, três, quatro, cinco letras A, imagina que cada palavra forma uma classe, tenta operar alguns pares de palavras (das supostas classes), realiza uma operação que se resume em contar a quantidade de A das duas palavras, mas, por outro lado, acha que não faz sentido ter uma palavra em cada classe, e nada afirma em relação à estrutura. Aqui não há mais afirmações tão ao acaso como oocorre no nível anterior.

Durante a entrevista, ele se dá conta de que só iria suprimir letras A das palavras que tivessem mais de sete letras A, quando ela diz: “ah! então, eu só ia poder suprimir a partir de 7A”. Isso é o suficiente para compreender a construção que teria que ser feita para a obtenção das classes e fazer a TABELA da operação.

Neste nível apenas dois alunos entenderam e resolveram essa situação. A dificuldade para resolver S3.1 e S3.2, nos dois níveis 1 e 2, era a não compreensão da construção dos grupos $\mathbf{Z}_n$, uma vez que elas têm uma afinidade parcial com estes grupos. Nas tentativas textuais de solução, ocorreu com frequência a não identificação dos elementos. Durante a entrevista, através de mediações de minha parte, para alguns a compreensão das situações foi ampliada e houve uma outra tentativa de solução - os elementos foram identificados, a tabela foi confeccionada -, mesmo sem a compreensão global da essência do problema.

Neste nível, na verificação da existência de uma operação binária vinculada ao conjunto associado à situação, os alunos olham apenas se o resultado da operação de alguns pares (dois ou três) de elementos do conjunto é ainda um elemento do conjunto e depois disso, quase sempre, afirmam que vale para todos. Nem sempre há o cuidado de olhar se cada elemento de $S \times S$ está associado a um elemento de S. Esquecem exatamente a condição que caracteriza uma relação como função.

Categoria 4 - As semelhanças e diferenças entre os grupos

A tabela 6.3 mostra que o item predominante nesta categoria foi o 2 (repetiu-se 4 vezes). A palavra estrutura, para estes estudantes, dizia respeito apenas à estrutura de grupo, uma vez que não estavam conscientes do seu significado e nem das particularidades de cada grupo determinada pelas relações entre os elementos, segundo a operação definida entre eles. As relações entre os elementos de um grupo dizem respeito apenas às propriedades da operação binária. Essa compreensão está caracterizada no item 2 desta categoria.

O aluno A_{17} escreve: "a palavra que não possui nenhuma letra, em ambas as gramáticas age como o elemento neutro. As duas possuem 6 classes. As duas têm estrutura de grupo".

Na entrevista, para verificar se A_{17} tinha algo mais a acrescentar, pergunto-lhe:

P: Você diz que as duas gramática têm estrutura de grupo. O que mais você pode dizer sobre esses grupos? Ou você acha que dizer que é grupo já é suficiente?
A_{17}**:** Para mim eu acho que é
P: Vocês estudaram homomorfismo e isomorfismo de grupos. Você lembra o que é um isomorfismo?
A_{17}**:** Não
P: Você sabe dizer quando que dois grupos são isomorfos?
A_{17}**:** Sei não.

A atenção de A_{17} está voltada exclusivamente para a estrutura de grupo. Para ele, verificar a estrutura de grupo era tudo o que precisaria ser feito.

Já o aluno A_{10} em resposta a S3.3 escreve: "a estrutura das duas gramáticas, é uma estrutura de grupo. Na 1^a o elemento neutro é a palavra que não possui letras, e na 2^a também".

Na entrevista ele lê uma das perguntas postas em S3.3 e justifica-se:

A_{10}**:** Elas podem ser comparadas? Aí eu fiz só essa comparação. Só vi que era um grupo, ia falar sobre isso, do elemento neutro, que as duas possuem inverso. Mas, eu teria que comparar cada elemento?
P: Quando eu pergunto se existe alguma similaridade entre eles, o que você acha que deveria ser olhado?
A_{10}**:** Se eles são similares? Se um grupo seria isomorfo ao outro, se eles tem a mesma estrutura?
P: O que você acha?
A_{10}**:** Acho que é. [pausa] Como é que a gente faz. Não lembro como é que olha se um grupo é isomorfo a outro, esqueci.
P: Você consegue dizer alguma coisa sobre esses grupos?
A_{10}**:** Como assim?
P: Como são esses grupos? Que características eles têm?
A_{10}**:** [silencio] Eles são abelianos. Toda vez que eu operar... eles são comutativos, AB com AA é igual a B, AB com AA é igual a B. O outro também é abeliano e finito. É só isso.
P: Você pode dizer mais alguma coisa sobre a estrutura desses dois grupos?
A_{10}**:** Pelo que a gente vê aqui, eles são isomorfos, não é? Eu sei que é, mas eu não lembro como é que eu faço para verificar o isomorfismo. Meu Deus do céu, eu fiz tanto. [pausa] Não sei.

O aluno A_{10} sabe da existência de um isomorfismo entre grupos, porém teoricamente. Há uma afirmação vaga de que grupos isomorfos têm a mesma estrutura, visto que não há uma compreensão real do que seja um isomorfismo.

Categoria 5 - A conexão entre as soluções, a definição de grupo e os exemplos

Para os alunos deste nível, nesta categoria o item predominante é o 4 (ver tabela 6.3). Isto significa que o entendimento do que seja grupo é dado por meio de uma definição, na qual os três conceitos-chave são todos mencionados, nem sempre são explicitados e estão articulados. Isso nem sempre se reflete nas tentativas de solução das situações e nos exemplos fornecidos.

Um dos alunos (A_{10}) deste nível na solução para S3.4 afirma: "para um conjunto ter uma estrutura de grupo é preciso que seja definido uma operação e com relação a essa operação, tem que existir dentro do conjunto, o elemento neutro, o inverso, e haja associatividade".

O exemplo e contra-exemplo foram, por ele, expressos do seguinte modo: "$(\mathbf{Z}, +)$ é um exemplo de grupo, pois com relação a adição $\mathbf{Z}$ possui elemento neutro, possui inverso e é associativo. $(\mathbf{Z}, \cdot)$ é um exemplo de um conjunto que não tem estrutura de grupo, pois com relação a multiplicação não existe para cada elemento do conjunto $\mathbf{Z}$ o seu inverso".

Em primeiro lugar, observa-se que esta definição não é precisa, muito dela fica implícito (no ar). A_{10} escreve o que para ele é o objeto grupo: "para um conjunto ter uma estrutura de grupo é preciso que seja definido uma operação..." [uma operação em quem?] "...tem que existir dentro do conjunto, ..., o inverso, e haja associatividade". O inverso de quem? É preciso que haja associatividade de quem?

Quanto ao exemplo ele diz que "...$\mathbf{Z}$ possui inverso [uma propriedade do elemento segundo a operação e não do conjunto] e é associativo [uma propriedade da operação]".

Um outro, o aluno A_5, escreve: "um grupo matemático é um conjunto regido por uma operação binária que satisfaz as seguintes condições. Seja A um conjunto e $*$ uma operação.

1) Associa, $(a * b) * c = a * (b * c)$ $\forall a, b, c \in A$ (conjunto)

2) Possui elemento identidade, $\exists e \in A$ tq. $a * e = a$ $\forall a \in A$

3) Possui inverso, $\forall a \in A$ temos que $\exists a' \in A$ tq. $a * a' = e$". .

Para apresentar o exemplo e contra-exemplo A_5 escreve: "Grupos: $(\mathbf{Z}, +)$. $(\mathbf{R}, +)$ e $(\mathbf{R}^*, \cdot)$. Não grupos: (1) $(\mathbf{Z}, \cdot)$, (2) $(\mathbf{N}, +)$. (1) Não é grupo pois não $\exists$ um elemento inverso. (2) Não é grupo pois seu inverso não pertence a $\mathbf{N}$".

Embora A_5 explicite as propriedades, a sua forma de escrever não deixa clara a relação entre o conjunto, a operação e as propriedades. A sua justificativa para o contra-exemplo não é clara: em (1) "...não $\exists$ um elemento inverso ... " [quem não possui inverso? ou, não existe o inverso de quem?], em (2) "...pois seu inverso não pertence a $\mathbf{N}$" [o inverso de quem?]. Enfim, as afirmações são imprecisas. Isso mostra que a inter-dependência entre os conceitos e propriedades que aparecem na definição não foi conscientizada. Isso se reflete na solução das situações, basta ver os itens a eles associados na categoria 3.

Nestes alunos o processo de discriminação e abstração dos elementos e seus traços imersos nas quatro situações que dão sentido ao conceito de grupo era falho, por isso, nem sempre reconheciam o grupo implícito nas mesmas. Com isso, a análise e a síntese não são eficientes.

Neste nível, nem sempre eles tinham consciência de qual era o centro ou o cerne de uma pergunta, de um enunciado. Houve dificuldade no entendimento das situações-problema S3.1 e S3.2. Não se detiveram na essência da construção da língua artificial.

Nos seus discursos, ainda há dúvidas envolvendo os conceitos e relações tanto nas soluções como nas justificativas. Já não se fazem tantas associações entre palavras como no nível 1, mas o significado das palavras nem sempre é preciso, não há um domínio completo do que está sendo dito. Embora estejam presos aos traços do conceito determinados diretamente pela definição, a definição em si não foi apreendida e conscientizada. As relações que decorrem das propriedades da operação nem sempre são observadas.

Para os alunos deste nível, o grupo é visto como um objeto matemático puramente abstrato dado por força de uma definição. Na solução das situações, há dificuldade em sair do nível abstrato em direção ao concreto. Trata-se de um modelo de estrutura caracterizado apenas pelas propriedades vinculadas à operação, existe a estrutura de grupo ou uma classe chamada grupo.

Nível 3 - Características e soluções-exemplo

Categoria 1 - O que é operação binária

De acordo com a tabela 6.4, o item predominate nesta categoria é o 3. Isto é, está claro para os alunos aqui nivelados que uma operação binária definida em um conjunto S é uma função de $S \times S$, portanto, todo par de elementos do conjunto S tem um correspondente em S através de uma regra (uma lei de composição) que pode ser definida por meio de uma expressão algébrica, de uma tabela, etc. Há uma distinção clara entre as chamadas operações fundamentais que são operações binárias e as que não são. A interdependência entre conjunto e operação é totalmente compreendida.

O aluno identificado por A_2 em S1.1 escreve: “é uma regra porque estabelece através de uma ‘lei’ uma correspondência entre elementos de dois conjuntos. Poderíamos substituir a palavra regra por aplicação”.

Para expressar o seu entendimento sobre operação binária, em S1.4, escreve: “dado um conjunto $A \neq \emptyset$, definimos uma operação binária em A como sendo uma aplicação de $A \times A$ em A, ou seja, é uma regra que leva um par ordenado de $A \times A$ em um elemento de A”.

Para A_2 o significado dado à palavra regra é amplo, inclui todo tipo de correspondência entre pares de elementos de $A \times A$ e elementos de A. A operação é, de fato, uma função, apesar da frase “..., é uma regra que leva um par ordenado de $A \times A$ em um elemento de A” não refletir o que foi dito antes, é mais limitado.

Na última entrevista realizada com A_2, quando eu menciono sua resposta para S3.4, ele vê que sua solução precisava de um complemento.

P: Você colocou o conjunto dos números reais com a multiplicação como sendo um grupo
A_2**:** Os reais sem o zero
P: Como exemplo de um conjunto que não tem estrutura de grupo, você colocou os naturais com a adição, pois a operação não admite inverso
A_2**:** [risos]na realidade são os elementos que não têm inverso, mas com a operação que for definida

Uma solução na qual a distinção entre operações fundamentais e operação binária é explicitada por A_{13} como resposta à S1.5, na qual ele cita os conjuntos e as operações nele definidas: “Conjunto dos reais ($+$, $-$, $\div$, $\times$, exponenciação), conjunto dos inteiros ($+$, $-$, $\times$), conjunto dos naturais ($+$, $\times$)”.

Aqui já há uma distinção clara entre a regra que determina uma operação em um conjunto e a que não determina, e isso redunda numa cuidadosa separação dos conjuntos com suas respectivas operações.

Categorias 2 e 3 -

Os significados, as representações, os invariantes e as estruturas de grupo

Já na solução escrita os alunos deste nível apresentam os seguintes resultados.

Tabela 6.17: Resultado das soluções escritas Categorias 2 e 3 - Nível 3

Situação-problema	S2.1		S2.2		S3.1		S3.2	
Categoria/Aluno	2A	3A	2B	3B	2C	3C	2D	3D
A_2	4	5	4	5	4	5	4	5
A_3	4	5	4	5	4	5	3	4
A_4	3	4	4	4	3	4	3	4
A_7	4	4	4	5	4	5	4	5
A_{13}	4	5	4	5	4	5	4	5

Tabela 6.18: Repetições de item na Categoria 2 - Soluções escritas - Nível 3

Categoria 2				
Aluno/Item	1	2	3	4
A_2	-	-	-	4
A_3	-	-	1	3
A_4	-	-	2	2
A_7	-	-	-	4
A_{13}	-	-	-	4
Total de repetições do item	0	0	3	17

Tabela 6.19: Repetições de item na Categoria 3 - Soluções escritas - Nível 3

Categoria 3					
Aluno/Item	1	2	3	4	5
A_2	-	-	-	-	4
A_3	-	-	-	1	3
A_4	-	-	-	4	-
A_7	-	-	-	1	3
A_{13}	-	-	-	-	4
Total de repetições do item	0	0	0	6	14

Nota-se, pelas tabelas 6.18 e 6.19, a predominância dos itens 4 e 5 nas categorias 2 e 3, respectivamente, nas soluções dadas por escrito e, especialmente, na oralidade quanto ao tratamento das situações S2.1, S2.2, S3.1 e S3.2.

Isso mostra que quase todos os alunos deste nível, sozinhos, já atribuíram os significados que eram esperados, apenas um aluno não atribuiu o significado esperado para uma única situação (S2.1). Estes serviram de mediação para a exibição de uma representação (operatória) do conjunto e da operação (dada através de uma TABELA ou realizada livremente entre os pares de elementos do conjunto). As propriedades G_1, G_2 e G_3 são utilizadas, mas nem sempre explicitadas - em cada caso foi verificada a existência do elemento neutro no conjunto e do inverso de cada elemento segundo a operação. A propriedade associativa era apenas mencionada. No geral, todos os traços do conceito eram discriminados.

Tabela 6.20: Resultado das soluções escritas e orais Categorias 2 e 3 - Nível 3

Situação-problema	S2.1		S2.2		S3.1		S3.2	
Aluno/Categoria	2A	3A	2B	3B	2C	3C	2D	3D
A_2	4	5	4	5	4	5	4	5
A_3	4	5	4	5	4	5	4	5
A_4	3	4	4	4	4	5	4	5
A_7	4	5	4	5	4	5	4	5
A_{13}	4	5	4	5	4	5	4	5

Tabela 6.21: Repetições de item na Categoria 2 - Soluções escritas e orais - Nível 3

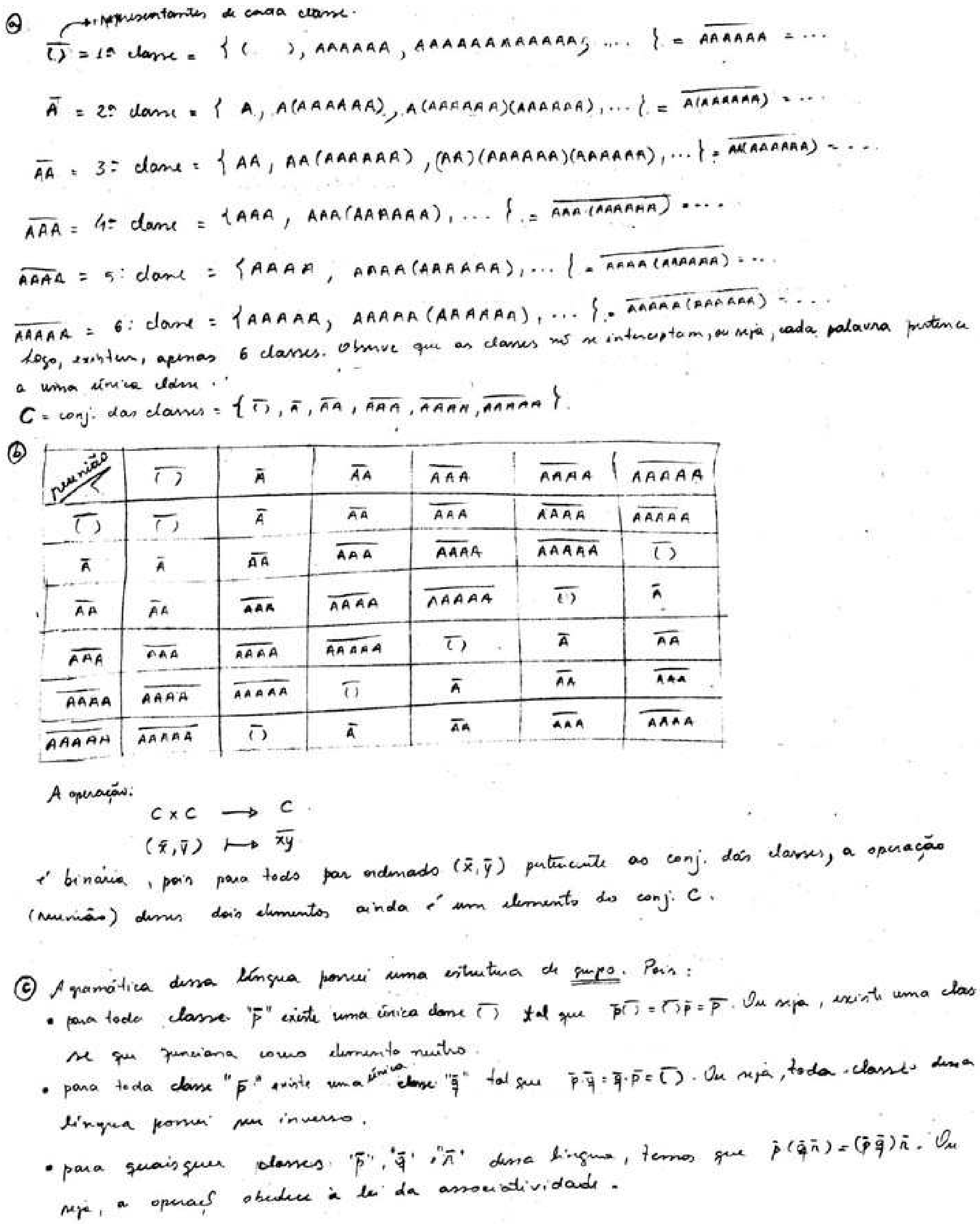
Categoria 2				
Aluno/Item	1	2	3	4
A_2	-	-	-	4
A_3	-	-	-	4
A_4	-	-	1	3
A_7	-	-	-	4
A_{13}	-	-	-	4
Total de repetições do item	0	0	1	19

Tabela 6.22: Repetições de item na Categoria 3 - Soluções escritas e orais - Nível 3

Categoria 3					
Aluno/Item	1	2	3	4	5
A_2	-	-	-	-	4
A_3	-	-	-	-	4
A_4	-	-	-	2	2
A_7	-	-	-	-	4
A_{13}	-	-	-	-	4
Total de repetições do item	0	0	0	2	18

Visto que a compreensão das atividades já havia sido conseguida desde as soluções escritas, quase todas as explicações e justificativas já haviam sido enunciadas integralmente, neste nível não houve mudanças significativas nos resultados após a realização das entrevistas, como mostram as tabelas 6.21 e 6.22.

A solução dada por escrito à situação S3.1 pelo aluno A_2 (figura 6.6) exemplifica as categorias 2B e 3B neste nível.



(a) representantes de cada classe.

$\overline{(\ )}$ = 1ª classe = { ( ), AAAAAA, AAAAAAAAAAAA, ... } = $\overline{AAAAAA}$ = ...

$\overline{A}$ = 2ª classe = { A, A(AAAAAA), A(AAAAAA)(AAAAAA), ... } = $\overline{A(AAAAAA)}$ = ...

$\overline{AA}$ = 3ª classe = { AA, AA(AAAAAA), (AA)(AAAAAA)(AAAAAA), ... } = $\overline{AA(AAAAAA)}$ = ...

$\overline{AAA}$ = 4ª classe = { AAA, AAA(AAAAAA), ... } = $\overline{AAA(AAAAAA)}$ = ...

$\overline{AAAA}$ = 5ª classe = { AAAA, AAAA(AAAAAA), ... } = $\overline{AAAA(AAAAAA)}$ = ...

$\overline{AAAAA}$ = 6ª classe = { AAAAA, AAAAA(AAAAAA), ... } = $\overline{AAAAA(AAAAAA)}$ = ...

Logo, existem, apenas 6 classes. Observe que as classes não se interceptam, ou seja, cada palavra pertence a uma única classe.

C = conj. das classes = { $\overline{(\ )}$, $\overline{A}$, $\overline{AA}$, $\overline{AAA}$, $\overline{AAAA}$, $\overline{AAAAA}$ }.

(b)

reunião	$\overline{(\ )}$	$\overline{A}$	$\overline{AA}$	$\overline{AAA}$	$\overline{AAAA}$	$\overline{AAAAA}$
$\overline{(\ )}$	$\overline{(\ )}$	$\overline{A}$	$\overline{AA}$	$\overline{AAA}$	$\overline{AAAA}$	$\overline{AAAAA}$
$\overline{A}$	$\overline{A}$	$\overline{AA}$	$\overline{AAA}$	$\overline{AAAA}$	$\overline{AAAAA}$	$\overline{(\ )}$
$\overline{AA}$	$\overline{AA}$	$\overline{AAA}$	$\overline{AAAA}$	$\overline{AAAAA}$	$\overline{(\ )}$	$\overline{A}$
$\overline{AAA}$	$\overline{AAA}$	$\overline{AAAA}$	$\overline{AAAAA}$	$\overline{(\ )}$	$\overline{A}$	$\overline{AA}$
$\overline{AAAA}$	$\overline{AAAA}$	$\overline{AAAAA}$	$\overline{(\ )}$	$\overline{A}$	$\overline{AA}$	$\overline{AAA}$
$\overline{AAAAA}$	$\overline{AAAAA}$	$\overline{(\ )}$	$\overline{A}$	$\overline{AA}$	$\overline{AAA}$	$\overline{AAAA}$

A operação:

$$C \times C \longrightarrow C$$
$$(\bar{x}, \bar{y}) \longmapsto \overline{xy}$$

é binária, pois para todo par ordenado $(\bar{x}, \bar{y})$ pertencente ao conj. das classes, a operação (reunião) desses dois elementos ainda é um elemento do conj. C.

(c) A gramática dessa língua possui uma estrutura de grupo. Pois:

- para toda classe "$\bar{p}$" existe uma única classe $\overline{(\ )}$ tal que $\bar{p}\overline{(\ )} = \overline{(\ )}\bar{p} = \bar{p}$. Ou seja, existe uma classe que funciona como elemento neutro.
- para toda classe "$\bar{p}$" existe uma única classe "$\bar{q}$" tal que $\bar{p}\cdot\bar{q} = \bar{q}\cdot\bar{p} = \overline{(\ )}$. Ou seja, toda classe dessa língua possui seu inverso.
- para quaisquer classes "$\bar{p}$", "$\bar{q}$", "$\bar{n}$" dessa língua, temos que $\bar{p}(\bar{q}\bar{n}) = (\bar{p}\bar{q})\bar{n}$. Ou seja, a operação obedece à lei da associatividade.

Figura 6.6: Solução (escrita) para S3.1, aluno A_2, nível 3

O texto exibido na figura 6.6 não é a solução completa dada por A_2 para S3.1. Esta é a síntese posterior a uma análise minunciosa da proposta de construção da língua artificial, com a separação de todos os elementos que a compõem. Aqui, vê-se uma explicitação clara das classes, do conjunto das classes, da operação entre todos os pares de elementos do conjunto através da TABELA e das propriedades da operação no conjunto de classes. Enfim, é feito o processo de análise e síntese da situação como um todo. A_2 tinha um esquema de resolução adequado à situação-problema, o que se verifica com quase todos (80 %) os alunos deste nível.

Categoria 4 - As semelhanças e diferenças entre os grupos

Olhando a tabela 6.4, vê-se que o item predominante nesta categoria foi o 4. Os alunos percebem algo além de uma simples estrutura de grupo no par conjunto-operação. Eles distinguem grupos cíclico e não cíclicos; percebem semelhanças e diferenças entre grupos; têm um entendimento de isomorfismo além de uma simples definição. Porém, o reconhecimento de que os dois grupos associados à S3.1 e S3.2 tinham a mesma estrutura não ocorreu. Apenas um aluno (A_7) percebeu isso durante a entrevista.

No momento da realização da atividade S3.3 por escrito, o aluno A_7 afirma: "uma dessas gramáticas tem estrutura de um grupo isomorfo ao $\mathbf{Z}_6$ e outra tem estrutura de um grupo isomorfo a S_3". Durante a entrevista...

P: Você colocou que esse primeiro grupo era cíclico, mas é interessante que em lugar nenhum você mostrou. Você afirmou isso baseado em quê?
A_7**:** Na aparência [risos]
P: Esse outro, você fez a tábua e disse que era um grupo isomorfo ao S_3. Você olhou isso?
A_7 Porque teve um ... a professora mostrou que um grupo de ordem 6 ou é isomorfo a $\mathbf{Z}_6$ ou a S_3, não estava bem lembrado não, ainda não estou bem lembrado, mas é uma coisa desse tipo. Aí eu olhei aqui, primeiro eu vi se os elementos tinham inverso, esse aqui eu olhei, não estou bem lembrado quais são agora, mas eu olhei na hora. E contei seis elementos, e não era cíclico.
P: Por que não é cíclico ? Você fez as contas?
A_7 [silencio] Por que não é cíclico? Tinha um elemento... Será que é cíclico.

Ele começa a fazer as contas e percebe que é cíclico, que a classe da palavra AB gera todos os outras classes.

P: Acho que você não esperava que esse desse cíclico, não é?
A_7 Não, não esperava [risos]

P: Então, o que acontece? Esses dois grupos são diferentes ou não?
A_7 Pelo menos na estrutura, falando a respeito assim de grupo cíclico, a estrutura dele que dá a ordem dos elementos, pelos menos assim não.
P: Vocês viram isomorfismo entre grupos. Você acha que esse conceito é importante no estudo da teoria de grupo?
A_7 Não sei falar assim se é importante e dizer porquê. Só se for assim, no sentido de você está estudando alguma coisa em relação a um grupo cíclico de ordem 6, aí ele é isomorfo a um outro grupo de ordem 6 também, se você está estudando as características dele, o outro também é a mesma coisa, quer dizer, a mesma coisa sendo diferente
P: O que muda de um pro outro ?
A_7 Os elementos

Ele tomou como base uma amostra (um modelo), porém sem discriminação prévia dos traços do objeto que estava sendo analisado em relação aos da amostra, para o estabelecimento do isomorfismo. A semelhança com a amostra é estabelecida apenas pela aparência, o que mostra a não formação do conceito de isomofismo.

No texto escrito, o aluno A_3 não apresenta solução para S3.3, uma vez que ele só tinha resolvido S3.1. Durante a entrevista, concluída a solução de S3.2, sugeri-lhe que se voltasse para a atividade 3. Ele lê o enunciado de S3.2 e diz:

A_3**:** Eu vou comparar em que sentido? Não posso comparar. Todos esses elementos estão contidos no conjunto...na união dessas classes. A^5 tá contido aqui no A^5, todos os elementos estão contidos aqui. [referia-se ao grupo do item 2 em relação ao grupo do item 1].
P: Como é essa inclusão? Quando é que um conjunto está contido em outro?
A_3**:** Se todos os elementos dele estiver contido no outro
P: Quem são os elementos desse? [referia-me ao grupo do item 1]
A_3**:** São $A^0, A^1, A^2, A^3, A^4, A^5$.
P: Você viu que todos esses elementos são classes [referia-me aos elementos relativos aos itens 1 e 2]. Essas classes estão aqui? [referia-me às classes do item 1 em relação às do item 2]
A_3**:** Não, ta não. Hum... e agora? Elas podem ser comparadas? Não, sei não professora.
P: Esse grupo aqui lembra algum grupo que você já estudou [do item 1]?
A_3**:** Lembra. Vai ser o $\mathbf{Z}_5$... $\mathbf{Z}_6$. É, a classe de 1, a classe de 2, e por aí vai.
P: Como é o $\mathbf{Z}_6$?
A_3**:** O $\mathbf{Z}_6$ é formado por classes de equivalência... sei responder não. Sei não. Eu sei que $\mathbf{Z}_6$ é um grupo.
P: $\mathbf{Z}_5$, $\mathbf{Z}_6$, S_3 todos são grupos. Eu posso dizer algo mais sobre um grupo?
A_3**:** Pode, esse mais alguma coisa é o que eu não estou sabendo dizer.
P: Esse outro, faz você lembrar de algum outro grupo? [referia-me ao grupo do item 2]
A_3**:** [silencio longo] Esse aqui me lembrou o $\mathbf{Z}_3$ [referia-se ao conjunto formado pelas classes A^o, A^1, A^2 do item 2]. Esse aqui é o $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$ cartesiano $\mathbf{Z}$, agora complicou aqui. Esse grupo aqui é o $\mathbf{Z}_3$ cartesiano alguma coisa. Tem 6 elementos. Ele é o $\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_2$. Porque eu estou dizendo isso? Por causa da quantidade de elementos, 6 elementos.

P: Só por isso?
A_3**:** Por definição. Porque esse conjunto aqui ele é o $\mathbf{Z}_2$ [ele diz apontanto para as classes B^1, A^1B^1, A^2B^1].
P: O $\mathbf{Z}_2$?
A_3**:** Não, 0, 1, 2, ele é o $\mathbf{Z}_3$. Porque seria $\mathbf{Z}_3$?
P: Como é construído o $\mathbf{Z}_4$, por exemplo?
A_3**:** $\mathbf{Z}_4$ vai ser... para você construir o $\mathbf{Z}_4$... você vai ter as classes, 0, 1, 2 e 3
P: Quem é a classe do 1 ?
A_3**:** A classe do 1 vai ser a divisão desse número, ... o resto da divisão desse número pode ser que dar 1, o resto da divisão de 4, o resto... Todo elemento que dividir ele, esse 4, e tiver resto 1, ele está na classe
P: Todo elemento de $\mathbf{Z}$ que for dividido por 4...
A_3**:** Ok, que dividido por 4 tiver resto 1, ele está nessa classe
P: Que ordem tem a classe da palavra B?
A_3**:** Qual é a ordem de B? Desse conjunto, da classe?
P: Sim.
A_3**:** Eu vou olhar pra ver... por exemplo, nessa classe a ordem vai ser 3. Essa, A^2. Espere aí, eu estou confundindo. A sra. está querendo a ordem do elemento. Então, quem vai ser a ordem de A^0? Vai ser um inteiro que dê a identidade.
A_3**:** A^0 é a identidade. Ah, vai ter que dá B^0. Tudo bem, então a ordem desse vai ser 2. De B^1. Sim, eu quero chegar aonde mesmo? Eu quero chegar que... sim, pronto, provado. Se a ordem dele é 2, então ele vai ter que ser o $\mathbf{Z}_2$. Não, não é isso que eu vou concluir.
P: Quem é o $\mathbf{Z}_3$? Quem é o $\mathbf{Z}_2$? Escreve o $\mathbf{Z}_2$.
A_3**:** [Ele escreve o $\mathbf{Z}_2$ e depois diz:] Ah, rapaz. Todos os elementos aqui possuem... qual é a ordem desse elemento aqui? É 1, tudo bem, porque é a identidade, então não conta. Vamos ver esse elemento aqui, a ordem dele é 2. Que grupo é esse? Ele tem um nome... grupo cíclico de ordem 2. O outro é o grupo cíclico de ordem 3. Se eu fizer o produto cartesiano vai dar o $\mathbf{Z}_6$. Esse aqui, qualquer elemento vai gerá-lo? Não, esse aqui eu tenho certeza que é gerado pela a classe do A^1 [referindo-se ao grupo do item 1]. O gerador desse aqui... será que é o A^1 também? O A^1, A^2... esse aqui vai ser gerado por A^1B^1. Pra poder gerar todos os elementos, não pode ser só pelo A^1, não pode ser só o B^1, então eu acho que vai ser o A^1B^1. É isso mesmo.

Embora A_3 tivesse estudado os grupos $\mathbf{Z}_n$ e tivesse resolvido S3.1 e S3.2, havia dúvidas sobre eles, principalmente em falar sobre a sua construção e sobre as diferenças entre as classes dos distintos $\mathbf{Z}_n$. Havia dúvidas, como também uma certa facilidade de mobilização dos conhecimentos estudados, o que facilitou o estabelecimento de relações entre eles e a manifestação de conhecimentos potenciais, para isso bastava uma ajuda, uma pergunta. Ele constatou que os dois grupos eram isomorfos ao $\mathbf{Z}_6$, mas isso não estava completamente assimilado.

Categoria 5 - A conexão entre as soluções, a definição de grupo e os exemplos

De acordo com a tabela 6.4, o item predominante nesta categoria foi o 5, isto é, o entendimento do que seja grupo quase sempre é dado por meio de uma definição, na qual os três conceitos-chave são todos mencionados, nem sempre são explicitados e estão articulados.

Por exemplo, o aluno A_2, em resposta a S1.9, escreve: "Um grupo matemático é um conjunto B munido de uma operação "$*$" binária $\begin{array}{cccc} * : & B \times B & \to & B \\ & (a,b) & \mapsto & a * b \end{array}$

satisfazendo as propriedades a seguir:

a)$(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall a, b, c \in B$.

b) $\forall a \in B$, $\exists$ um $e \in B$ tal que $a * e = e * a = a$ (elemento neutro).

c) $\forall a \in B$, $\exists a' \in B$ tal que $a * a' = a' * a = e$".

Em S3.4 sua forma de dizer o que é um grupo muda: "Um grupo matemático é um conjunto munido de uma operação binária, a qual satisfaz três condições: possui elemento neutro, elemento inverso e é associativa".

Nota-se que há uma mudança na forma de expressar o que é grupo. A primeira é mais precisa, traz as relações existentes entre todos os elementos que constituem o grupo. Na segunda isso não ocorre. Durante a entrevista, com a intenção de saber o porquê disso, quando eu digo, veja sua definição no primeiro teste e a definição de agora, ele se explica da seguinte forma: "a do primeiro está mais matemática. Aqui ta mais assim, como se fosse uma síntese para quem já sabe, já viu o conceito formal".

Um outro aluno, A_4 na primeira atividade em S1.9 escreve: "define-se grupo pelo par $(G, *)$, onde G é um conjunto não vazio que satisfaz as seguintes condições:

i) $*$ é associativa, isto é, $a * (b * c) = (a * b) * c$, $\forall a, b, c \in G$

ii) $*$ admite elemento neutro, isto é, $\exists e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$, $\forall a \in G$

iii) Para todo $a \in G$, existe $a' \in G$ tal que $a * a' = a' * a = e$".

Em S3.4, A_4 expressa o que é grupo assim: "é um conjunto munido de uma operação binária, que obedece a algumas características, tais como - associativa, elemento neutro e existência de inverso de cada elemento". E continua: "um exemplo de conjunto com a estrutura de grupo é o conjunto dos números reais em relação ao produto $(\mathbf{R}^*, \cdot)$. Dois exemplos de conjuntos que não têm estrutura de grupo é o conjunto dos n^{os} naturais em relação à soma $(\mathbf{N}, +)$, pois não existe o elemento inverso de nenhum elemento natural. $(\mathbf{Q}^*, +)$, pois não existe o elemento neutro da operação adição".

O aluno A_{13} em S1.9 afirma que grupo é um "conjunto de elementos onde está definida uma operação binária". Durante a entrevista, com o objetivo de investigar o seu entendimento sobre grupo, pergunto:

P: Para você, grupo é isso?
A_{13}**:** Faltou botar que essa operação satisfaz três axiomas: associatividade, elemento inverso e elemento neutro. O primeiro axioma é da associatividade ... diz que a operação binária é associativa. Depois ... por isso que eu achei estranho - quando eu vi que aquela propriedade de operar o elemento com o seu inverso, dá o elemento neutro -, mas, na hora que eu tava aprendendo, ela não falou assim, a operação binária faz com que tenha um inverso dentro do conjunto, independente da operação binária, cada elemento tem seu inverso, ... tá, tudo bem, se tu aplicar a operação binária nesses dois elementos vai dar a identidade.
P: você acha que essa propriedade de cada elemento ter um elemento inverso independe da operação. O elemento inverso está relacionado a quem?
A_{13}**:** ao elemento do conjunto ... cada elemento de um conjunto tem seu inverso também no conjunto ... o que é que isso tem a ver com a operação binária ?
P: Eu que pergunto pra você ?
A_{13}**:** a primeira vista, não dá pra ver uma relação assim...
P: por exemplo, no conjunto dos números naturais que operação binária você tem ?
A_{13}**:** a soma
P: cada elemento em **N** tem inverso em relação à operação adição ?
A_{13}**:** não
P: Você acha que isto está relacionado somente ao conjunto **N** e não a operação?
A_{13}**:** A impressão que dá é que está relacionado a **N** e não a operação. É a operação que faz com que tenha inverso ? Quer dizer que se eu tenho um conjunto de elementos, se eu não tenho uma operação definida, eu não tenho inverso ?
P: Não. Você fala do inverso vinculado à operação. Você diz, cada elemento do conjunto tem inverso, segundo essa operação.
A_{13}**:** Qando eu falo em inverso, quer dizer que eu estou falando, implicitamente, que é inverso, porque operado com o outro elemento dá o elemento neutro.
P: Isso.
A_{13}**:** Tá bom, entendi

Ele compreende que as propriedades não são atributos apenas da operação, há uma relação de dependência entre o conjunto, a operação e as propriedades, apesar de se falar em propriedades da operação.

Como resposta à mesma pergunta feita em S1.9, em S3.4 ele escreve: "grupo matemático: conjunto de elementos munidos de uma operação binária associativa que admite inverso e elemento neutro". Na entrevista ele explica a sua definição...

A_{13}: È que existem dois elementos lá que associados resultam no elemento neutro, ou seja, que admite inverso para cada elemento, tem um outro que é seu inverso, ou seja, associado com ele resulta no elemento neutro. Elemento neutro, não, existe um elemento neutro no conjunto. Uma operação, quando tu estudas só operação binária, eles não falam lá que a operação admite um inverso. Ela é aplicada num conjunto... mas é a operação que determina quem é o inverso. [pausa] Você tem um conjunto lá, se você colocar uma operação... vai ter inverso para uma e pode ter outro inverso para outra operação.
P: No exemplo que não é grupo, você colocou $(\mathbf{R}^*, +)$ não admite elemento neutro
A_{13}: É... quando eu fiz isso, eu estava pensando nessa minha definição. Está bem estranho, ao pé da letra realmente não está definido corretamente. O que eu quis dizer, é que os elementos... a multiplicação atuando nos elementos de $\mathbf{Z}$.... é difícil explicar isso em palavras... a operação não admite inverso. Se a operação for aplicada a qualquer dois elementos nunca vai dar o elemento neutro, no caso de $(\mathbf{Z}, .)$.

Quase sempre eles conseguiam discriminar e abstrair todos os traços pertinentes a estrutura de grupo, conseqüentemente, reconheciam facilmente os grupos implícitos nas situações. Em geral, para estes alunos não foi necessário a reelaboração de soluções por escrito durante as entrevistas. Houve a complementação oral de um ou outro aspecto observado ou a explicação da validade de uma propriedade que não foi mencionada, sendo verificada mentalmente (segundo o próprio aluno).

Neste nível, nota-se que os conceitos básicos estão formados e há o uso de uma linguagem bem articulada envolvendo os conceitos (com exceção do conceito de isomorfismo) e relações tanto nas soluções como na oralidade. A comunicação flui bem, sem embaraços.

Para os alunos deste nível, o grupo é visto como um objeto matemático abstrato que pode estar configurado em situações variadas. Para eles a estrutura não se refere somente à estrutura de grupo, mas também à uma outra estrutura interna, determinada não somente pela operação e propriedades, como também pelas relações entre os elementos decorrentes de ambas. Há a compreensão da existência de grupos cíclicos e não cíclicos. Não houve reconhecimento de que os grupos de S3.1 e S3.2 são isomorfos.

Uma síntese quantitativa dos resultados

Os resultados da análise dos conhecimentos expressos sobre operação binária em um conjunto, explícita ou implicitamente, mostram que mais da metade (61%) dos alunos investigados não têm o conceito formado de operação binária.

Quanto ao tratamento das situações é importante destacar a mudança nos resultados em relação às soluções escritas e após a realização das entrevistas.

De acordo com as atividades propostas, cada aluno deveria solucionar quatro situações-problema. Isto significa que num total de 18 alunos investigados, 72 (18 alunos $\times$ 4 situações) significados deveriam ser atribuídos e 72 grupos, implícitos nas situações, deveriam ser reconhecidos. Os resultados das soluções dadas por escrito, mostram que 29% dos significados esperados foram atribuídos, e 35 % dos grupos esperados foram identificados. Os resultados das soluções orais são diferentes: 54 % dos significados esperados foram atribuídos e 72% dos grupos foram identificados.

Considerações Finais

O meu objetivo maior na realização desta pesquisa voltou-se para a análise do conceito de grupo formado pelos alunos e, conseqüentemente, para a verificação das dificuldades dos alunos na compreensão deste conceito.

No processo de estruturação dos dados, constatei uma grande heterogeneidade de conhecimentos mobilizados para as soluções das atividades, o que evidencia a complexidade desse conceito e a necessidade de uma diversidade de situações em longo prazo para auxiliar na sua formação pelo estudante.

Na análise dos conceitos mobilizados e expressos que se revelaram, quer seja na escrita ou na oralidade, por meio das competências e concepções explicitadas nas soluções, concentrei-me, prioritariamente, nos conceitos relativos às três primeiras categorias, ou seja, no conceito de operação binária sobre um conjunto e nos conceitos diretamente envolvidos no tratamento das quatro situações-problema.

Tal como já foi acentuado no final do capítulo 6, de acordo com a análise das atividades como um todo, os 18 alunos investigados ficaram distribuídos em três níveis hierárquicos (ascendente) de formação do conceito de grupo: 7 alunos (39 %) ficaram no nível 1, 6 alunos (33 %) ficaram no nível 2 e 5 alunos (28 %) ficaram no nível 3.

Pelas características observadas no decorrer da caracterização dos três níveis, pode-se fazer um paralelo com os níveis de formação de conceitos explicitados por VYGOTSKY (2001) tal como foram discutidos no capítulo 2.

Para a maioria dos alunos do nível 1, na tentativa de resolver as situações, alguma característica, algum traço, alguma palavra, era suficiente para estabelecer um vínculo associativo com a palavra grupo (objetos heterogêneos, sem vínculos uniformes podiam ser denominados grupo). O processo de discriminação e abstração dos traços pertinentes às situações era muito fraco, por isso os alunos deste nível eram capazes de incluir na classe chamada grupo quaisquer objetos. De um ponto de vista mais abstrato na compreensão dos alunos, ora o grupo é um conjunto qualquer, ora o grupo é somente um conjunto com uma operação, ora a condição para ser grupo é satisfazer as propriedades. Enfim, o grupo é um objeto ainda não definido. Portanto, essas são características típicas das fases iniciais de formação de complexos de grupo.

No segundo nível, foi observado um nível mais elevado de abstração e do processo de discriminação dos traços das situações, um traço discriminado ou abstraído não se perdia entre os outros. A ação e forma de pensamento são determinados, de certa modo, por modelos e discursos estabelecidos, mas por meio de outras operações de pensamento, sem a conscientização real do que está sendo feito - as definições são dadas, mas não há um uso habitual das mesmas no tratamento das situações. A definição é dada como uma simples necessidade formal, porém o seu papel não é claro nas soluções. O reconhecimento do objeto grupo e as afirmações não são feitas tão ao acaso como no nível anterior, mas também não têm como base um processo de análise e síntese como no nível 3. Em suma, essas características colocam os alunos deste nível na fase de formação do pseudoconceito de grupo.

Os alunos do terceiro e último nível, tal como foi visto, já têm o processo de análise e síntese bem definidos. A atenção dirigida às situações lhes permitiu extrair os elementos e traços essenciais das mesmas. Neste processo, foi feita a decomposição dos objetos básicos do conceito - conjunto e operação - e, a partir daí, ocorreu a verficação das propriedades da operação, algumas vezes implicitamente. Diante disso, pode-se dizer que estes alunos encontram-se no último estágio de formação do conceito de grupo.

Quanto ao segundo objetivo, apresentei uma elaboração teórica de elementos constituintes do campo conceitual de grupo. Esta elaboração representa uma primeira tentativa de mapeamento de elementos do referido campo, por considerá-la de fundamental importância para o desenvolvimento das atividades didático-pedagógicas relativas ao ensino de um conceito abrangente como este.

O que percebo, ao longo de anos de experiência pedagógica, é que, em geral, na sala de aula, inicia-se o estudo da teoria de grupo com o objeto operação binária e em seguida o objeto matemático chamado grupo, ambos introduzidos por meio da definição. Depois de explicitada a definição do conceito de grupo, apresenta-se os exemplos clássicos de grupo e propõe-se problemas para a verificação da existência da estrutura de grupo no par conjunto-operação, dados previamente. Desta forma, o professor espera que por meio da repetição do mesmo esquema de solução em diversos problemas, o aluno chegue a identificar a estrutura de grupo, é claro, em problemas semelhantes àqueles.

Nos livros textos de matemática encontra-se o conceito identificado à definição. Castro (2000) afirma que muitos educadores matemáticos discordam desta identificação, considerando o conceito como algo mais abrangente que sua definição. A investigação da aprendizagem de conceitos matemáticos tem se apresentado no campo da Educação Matemática quase sempre relacionada à noção de representação. "Uma visão bastante recorrente é aquela que procura relacionar estes três termos [definição, conceito e representação] da seguinte maneira: enquanto a representação estaria ligada a diferentes modos de se apresentar ou de se observar o conceito, a definição nos forneceria os seus limites, a sua fronteira". (p. 2)

Ao se definir um conceito, na verdade, está sendo dada para o estudante a síntese do conceito. O desenvolvimento de um conceito não se esgota no momento do ensino dado ao sujeito e nem na assimilação da definição do conceito por esse mesmo sujeito. "Aprender o significado de um conceito não é permanecer na exterioridade de uma definição, pois a sua complexidade não pode ser reduzida ao estrito espaço de uma definição lingüística". (PAIS, 2001, p. 56). Na definição, opera-se diretamente com a palavra, chega-se ao significado de uma palavra através de outra palavra, opera-se mais com as relações existentes entre certas famílias convencionais de palavras, que com a efetiva representação dos conceitos. (VYGOTSKY, 2001).

De fato, saber escrever a definição ou dar exemplos de grupo não garante a apropriação dos conceitos envolvidos e nem das características existentes no objeto grupo e nem o seu reconhecimento. Além disso, o fato de o aluno checar as propriedades em um conjunto com uma dada operação não o habilita a modelar situações em que o conceito de grupo está implícito. Isso ficou claro entre os alunos do nível 2.

O próprio Vygotsky chama a atenção para o fato de que a elaboração de conceitos não é idêntica à elaboração de habilidades, ainda que essa habilidade tenha um alto nível de complexidade. Tal como foi visto, a formação de um conceito científico é uma apreensão mental que exige uma atenção exclusiva do sujeito sobre ele, abstraindo do mesmo os aspectos essenciais e inibindo os secundários para que se chegue a generalizações mais amplas por meio de uma síntese. Ao mesmo tempo em que se faz esse processo de análise e síntese, de abstração e inibição de traços, o indivíduo deve caminhar do particular para o geral e deste para o particular. Em suma, o processo deve ser dialético de síntese-análise/análise-síntese. (VYGOSTKY, 1996, 2001).

Teoricamente todos os alunos da pesquisa pertencem a uma faixa etária (entre 20 e 27 anos) em que não só o desenvolvimento e o aperfeiçoamento das funções psicológicas já devem ter acontecido, mas também as mudanças de vínculos e relações entre elas. Conseqüentemente, todos os sujeitos são capazes de controlá-las, de agir voluntariamente quanto à atenção, o pensamento e a memória, e, portanto, de tomar consciência dos seus conceitos, no entanto, com o conceito de grupo isso não ocorre. Em suas investigações sobre o desenvolviemnto cultural do indivíduo, VYGOTSKY (2001) observa que,

> onde o meio não cria os problemas correspondentes, não apresenta novas exigências, não motiva nem estimula com novos objetivos o desenvolvimento do intelecto, o pensamento do adolescente não desenvolve todas as potencialidades que efetivamente contém, não atinge as formas superiores ou chega a elas com um extremo atraso.

Na análise ficou constatado que, apenas no nível 3 verificou-se o processo de análise e síntese. Já no nível 2 há um processo de discriminação e abstração de traços do conceito inseridos nas situações, porém fraco. No nível 1, esse processo é praticamente inexistente, existe o estabelecimento de associações e relações entre objetos bem distintos. Desta forma, os alunos dos dois primeiros níveis, principalmente os do nível 1, que não se basearam e nem realizaram os processos de análise e de síntese, tiveram dificuldade no reconhecimento e uso do conceito de grupo.

Um outro aspecto a ser destacado é que a formação de um conceito é realizada a partir de componentes anteriores - que podem ser conceitos elaborados e que revelam a existência de uma extensa e complexa rede de costruções precedentes -, por meio de uma síntese coordenada pelo sujeito. A realização dessa síntese é uma atividade criativa e, embora envolva outras dimensões, exige uma efetiva participação do próprio sujeito. Diante de uma classe de situações, a busca dos significados, das representações e dos invariantes, enfim, dos esquemas, consiste na manifestação das operações mentais e da criatividade referente ao conceito fundamental, articulando-os com os outros conceitos aprendidos. Esse processo torna-se mais lento e díficil quando há ênfase em problemas já modelados que exigem sempre os mesmos esquemas e as mesmas representações para suas soluções.

Além de formados, esses conceitos precisam ser internalizados. A internalização dos conceitos matemáticos ocorre à medida que a mente do aprendiz registra os conceitos com todos os seus contornos. A internalização, tal como já foi vista no capítulo 2, é a transformação interna de uma operação externa mediatizada por um sistema de representação. Ao realizar atividades envolvendo o conceito, o indivíduo vai formando representações a seu respeito. Quanto mais variadas forem as situações, mais facilmente os traços e as representações do conceito vão se esboçando na mente do aprendiz, auxiliando-o na construção de uma imagem mental real do conceito.

O próprio Vergnaud (1990) afirma que o conhecimento conceitual deve emergir de dentro das situações-problema - é a partir de uma variedade de situações, que as características dos conceitos vão se delineando ou vão se tornando explícitas para o sujeito. Isso possibilita-lhes a ampliação e representações mentais do conceito formado e a sua internalização. Portanto, uma das principais tarefas no ensino de matemática é elaborar situações que auxiliem os estudantes na formação de conceitos. A complexidade das situações depende da sua estrutura, do contexto envolvido, da forma dos enunciados, da natureza e do número de elementos envolvidos, da característica dos dados e de sua apresentação. O professor deve estar atento a elaboração de uma seqüência de situações para a elaboração de um conceito que leve em conta todos esses aspectos.

A elaboração de bons problemas matemáticos, em especial, os algébricos, deve se constituir no verdadeiro eixo condutor de toda a atividade da disciplina. FREITAS (1999) afirma que,

> A especificidade educativa da matemática na prática pegagógica tradicional ou é simplesmente desconsiderada ou canalizada exclusivamente para os aspectos científicos. A essência do trabalho didático consiste, ao contrário, em construir situações artificiais no quadro de suas condições pedagógicas. [...] O processo de construção do conhecimento matemático não se reduz a dar "boas respostas", mas também a elaborar "boas questões". (1999, p. 68-72)

Entendo que professores capazes de elaborar atividades e ter idéias que promovam a aprendizagem de seus alunos estarão desenvolvendo um ensino de matemática de qualidade. As atividades propostas por nós docentes devem provocar nos alunos exercício mental constante voltado para as operações que devem realizar sobre determinados problemas. Isso favorece o estudante a centrar sua atenção nas tarefas que tem à sua frente, a tomar consciência de suas atitudes, conseqüentemente da resolução de problemas e da matemática como um todo.

Da mesma forma que identifica-se a existência de um problema na gênese do desenvolvimento histórico de um conceito matemático, a exemplo do conceito de grupo, o mesmo pode acontecer no contexto de ensino.

A abordagem trazida pelas situações-problema utilizadas na investigação e que estavam em sintonia com a proposta de Vergnaud - os conceitos devem ser estudados como conjuntos de conceitos inter-relacionados com conjuntos de situações -, é muito diferente da que os alunos estavam familiarizados. A abordagem proposta pelas situações exige a exibição de uma representação sobre a qual fosse possível a realização de operações.

O fato de os alunos estarem acostumados a trabalhar apenas com situações modeladas e representações algébricas, trouxe-lhes dificuldades em exibir outras representações, a exemplo de uma representação para a situação S2.1.

Além disso, a identificação da estrutura de grupo nas situações pressupõe a articulação entre os conceitos básicos inter-relacionados com o conceito de grupo. Conseqüentemente, o esquema utilizado para a identificação da estrutra de grupo em situações já modeladas (conjunto e operação dados previamente), não serve, precisa ser modificado. Para os alunos do nível 3 esse esquema já conscientizado e automatizado foi facilmente alterado. Os alunos do nível 2 que já o tinham, não automatizado, depois de algumas tentativas de solução, começaram a mudá-lo e adequá-lo à identificação da estrutura de grupo nas situações-problema em jogo. Os alunos do nível 1 sem o referido esquema e sem o centramento ativo diante das situações, foram levados a muitas tentativas menos bem sucedidas como foi mostrado no capítulo 6.

Na solução escrita, 72 % dos estudantes não realizaram as operações que deveriam realizar e nem tiveram consciência da solução do problema. Está claro na análise dos dados e eles próprios estavam conscientes disso. Alguns depoimentos servem como exemplo de tal afirmação: após a reelaboração das soluções de S3.1 e S3.2, um aluno comenta que acha "muito estranho tudo isso, não imaginei que tivesse vinculação com a teoria de grupo, nem imaginei que fosse um conjunto de classes e com uma estrutura de grupo". Um outro aluno, depois de entender a situação S2.1, fala: "Mas rapaz, isso é álgebra? Agora eu vejo que tem estrutura de grupo. É rapaz, eu entendi esse negócio. Não, pelo menos eu agora estou entendendo, agora se eu pegar qualquer coisa parecida com isso eu desenrolo [risos]". Embora tenham tido dificuldade no tratamento das situações propostas na investigação - atividades artificiais dando sentido ao conceito de grupo -, os alunos perceberam que os objetos e conceitos algébricos também têm sua contraparte "concreta".

A princípio, as minhas intervenções durante as entrevistas tinham como objetivo central a busca dos conhecimentos implícitos nas soluções das atividades dadas pelos alunos. Todavia, durante o processo de realização das entrevistas esse objetivo se ampliou.

No decorrer das entrevistas realizadas, constatei que muitas das mediações levadas a efeito, faziam com que o aluno pensasse no que tinha escrito ou até mesmo no que tinha acabado de falar e reelaborasse o seu pensamento. Isso acontecia em um momento de pausa (silêncio), ou mesmo enquanto explicava o que tinha feito. Percebi o quanto é importante para o sujeito falar sobre as suas soluções no seu processo de aprendizagem. Um dos alunos investigados justifica por escrito que o par $(\mathbf{Z}, \cdot)$ não é grupo dizendo: "$(\mathbf{Z}, \cdot)$ não admite inverso". Na entrevista, quando questionado sobre a sua justificativa, ele diz: "está bem estranho, ao pé da letra realmente não está definido corretamente. O que eu quis dizer, é que os elementos... [pausa] a multiplicação atuando nos elementos de $\mathbf{Z}$... É difícil explicar isso em palavras. [pausa]A operação não admite inverso... se a operação for aplicada a qualquer dois elementos nunca vai dar o elemento neutro, no caso de $(\mathbf{Z}, \cdot)$". Durante a explicação, ele se dá conta da sua dificuldade em utilizar a linguagem verbal, mas continua e consegue organizar e externar seu pensamento. Nos dados referentes à oralidade, essas situações se repetem - a dificuldade aparece no início do diálogo, depois o pensamento se organiza e se materializa numa linguagem mais articulada.

Os resultados relativos às categorias 2 e 3 indicam mais claramente que as atividades devem ser compartilhadas pelos sujeitos em aprendizagem. A análise das argumentações dos alunos a partir das minhas intervenções trouxe elementos significativos nesse sentido. Trabalhando em conjunto ou sendo questionado e/ou auxiliado por uma outra pessoa de forma adequada, o estudante vivencia, no plano exterior, o que irá internalizar posteriormente, a linguagem oral é um suporte para isso. É no ato de transmitir oralmente aquilo que pensa sobre a solução da questão, que o aprendiz descobre o que tem que organizar no próprio pensamento, transformando-o em palavras - este é um dos aspectos da abordagem de Vygotsky - expresso por MOURA (2005). O estudante aprende porque contrapõe o seu pensamento com o do outro e assim percebe as semelhanças e diferenças.

Percebo que é notório que, no curso superior, quanto mais avançado e abstrato for o conteúdo de uma disciplina matemática, maior tempo de suas aulas é dedicado à demonstração de resultados constantes nos livros, produzidos e aceitos pela comunidade matemática ao longo do tempo. Neste sentido, há um aspecto fundamental e que me preocupa muito e certamente os educadores matemáticos em geral. Existe a necessidade de se demonstrar certos resultados, ao mesmo tempo que se faz isso, precisa-se estar atento em observar se o aluno os compreende; para isso, ele deve ter formado e internalizado os conceitos envolvidos nestes resultados e nestas demonstrações.

Os resultados como um todo e os relativos às situações-problemas em especial, apontam para a necessidade de o professor, mesmo em nível de Ensino Superior, interagir mais diretamente com seus alunos durante o seu processo de aprendizagem e desenvolvimento dos conceitos, e não somente ficar no âmbito da "percepção" das dificuldades sem convergir para a ação.

Neste sentido, acredito que as reflexões decorrentes deste estudo apontam para uma necessidade de mudança na rotina do professor. Este teria tarefas a cumprir:

- investigar o nível de formação dos conceitos do aluno inter-relacionados com o conceito a ser estudado, uma vez que a manifestação dos significados, das representações e a utilização dos invariantes operatórios nas soluções dos problemas, envolve a articulação do conceito fundamental com os outros;

- propor o maior número possível de situações-problema com o objetivo de facilitar não só a formação do conceito central, para o qual elas foram criadas, como também, auxiliar no desenvolvimento dos outros conceitos e na construção das representações para a modelagem das situações que vão, aos poucos, permitindo que o aluno vá construíndo a representação mental do conceito. Ao invés disso, se o professor trabalhar com problemas já modelados, envolvendo significados puramente abstratos, ele não vai ajudar o aluno no desenvolvimento de suas capacidades criativas quanto às representações, e vai ter dificuldade de compreender os processos envolvidos na solução de um problema e as concepções do aluno, ficando limitado ao resultado final;

- promover espaços de discussão em sala de aula entre alunos, com a sua participação efetiva, pelos motivos já discutidos no capítulo 6, e pelo fato de que é através dos discursos do aluno sobre suas soluções, seus erros, suas dúvidas, suas idéias que se conhecem a concepção do aluno sobre os conceitos em jogo. Isto foi por mim constatado na investigação. Ao falar sobre suas soluções, seus conhecimentos, o aluno vai fazendo as transformações no seu próprio pensamento, ao mesmo tempo em que o ouvinte vai percebendo em que ponto ele está e em que pode ajudá-lo.

- sempre que possível, não começar o estudo do conceito por sua definição. Para isso, é preciso fornecer situações em que os traços do conceito vão se mostrando, assim como os outros conceitos, e as relações entre eles e o conceito fundamental. Com as discussões empreendidas, o professor vai introduzindo as características, os traços, os conceitos, as relações que não foram ainda percebidas nem explicitadas pelos alunos.

Em face dos estudos realizados, do processo de investigação junto aos alunos e dos resultados obtidos e da análise, tomei consciência de que a formação de conceitos pelo aluno é um processo delicado que exige muito esforço do professor no sentido de auxiliá-lo na formação de conceitos matemáticos, uma vez que isso é condição necessária para a aquisição de conhecimentos. Certamente estarei vigilante, daqui por diante, a essa temática em minha atuação didático-pedagógica. Como acréscimo, essa pesquisa levou-me a entender posturas e crenças equivocadas que as possuía, tal como relatei no início deste trabalho.

Com referência a esta pesquisa, é importante apontar para algumas de suas limitações. Foi investigado o conceito de grupo formado e não o processo de formação do referido conceito. Além disso, seria pertinente a investigação das causas das dificuldades dos alunos que não atingiram o nível de conclusão da formação do conceito e, especialmente, dos alunos do nível 1, não tendo sido este o objetivo deste trabalho.

Acredito que há um espaço aberto para outras investigações sobre a temática tratada, já que durante o percurso que trilhei para a construção deste trabalho, constatei que as investigações voltadas para o ensino da álgebra abstrata, em particular da teoria de grupo são raras.

Como consequência das limitações com as quais nos deparamos em um trabalho desta magnitude, sugiro maiores aprofundamentos sobre o processo de formação do conceito de grupo por alunos de Matemática sob a abordagem proposta. Mesmo consciente de que os conteúdos algébricos são áridos e, do ponto de vista didático, apresentam-se pouco flexíveis a qualquer tipo de abordagem, acredito ser possível realizá-la.

Finalizo esperando ter traçado um percurso, cujos resultados encontrados e conclusões consideradas, possam vir a auxiliar na compreensão do saber matemático e sobre as implicações que esse saber possa trazer ao âmbito acadêmico.

Referências Bibliográficas

ABBAGNANO, N. *Dicionário de Filosofia.* 2^a ed. São Paulo: Mestre Jau, 1982.

ALENCAR FILHO, E. *Elementos de Álgebra Abstrata.* São Paulo: NOBEL, 1978. 281p.

BACHELARD, G. *A formação do espírito cientifico*: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Tradução Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996. 314p.

BARBOSA, G. O. *Raciocínio formal e aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral*: o caso da Universidade Federal do Ceará, 1994, 106f. Dissertação (Mestrado em Educação)- Facudade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 1994.

BECKER, F. *Educação e Construção do Conhecimento.* Porto Alegre: Artes Médicas, 2001.125p.

BITTENCOURT, J. Obstáculos Epistemológicos e a Pesquisa em Didática da Matemática. *Educação Matemática em revista*, São Paulo, n.6, Ano 5, p.13-20, maio.1998.

BOYER, C. B. *História da Matemática.* Tradução Elza F. Gomide. 2^a ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996. 496p.

CARVALHO, M. S. et al. *Fundamentação da Matemática Elementar.* Rio de Janeiro: Campus, 1984. 264p.

CASTRO, M.R. et al. Produção de Significados, funções e representações sociais. Disponível em <http://www.anped.br. *GT-EDUCAÇÃO MATEMATICA*>. Acesso em: 05 nov. 2000.

COURANT, R.; ROBBINS, H. *O que é Matemática?* Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Tradução Alberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000. 621p.

CRESCE, L. L. P de. *Na Universidade, cada um acaba sendo seu principal mestre ...*- Dificuldades de ensino e de aprendizagem na matemática do terceiro grau, 1991.

194p. Dissertação (Mestrado em Educação)- Centro de Educação e Ciências Humanas, Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 1991.

DAMEROW, P. *Abstraction and Representation* Essays on the Cultural Evolution of Thinking. London: KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS, 1988.

DAVIS, P.J.; HERSH, R. *A Experiência Matemática.* 3ª ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1986. 482p.

DELVAL, J. *Introdução à Prática do Método Clinico*: descobrindo o pensamento das crianças. Porto Alegre: Artes Médicas, 2002. 267p.

DIENES, Z. P.; GOLDING, E. W. *A geometria pelas transformações, III Grupos e coordenadas.* São Paulo: EPU/MEC, 1975. 146p.

DIENES, Z. P. ; JEEVES, M. A. *O pensamento em estruturas.* Tradução Maria Pia Brito de Macedo Charlier e René François Joseph Charlier. São Paulo: EPU/UFRGS, 1974. 130p.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. *Álgebra Moderna.* São Paulo: Atual, 1979. 261p.

DUBINSKY, E. et al. On learning fundamental concepts of group theory. *Educational Studies in Mathematics.* Netherlands, v.27, n.3, p.267-305, 1994.

FARMER, D. W. *Grupos e Simetria* Um guia para descobrir a matemática. 1ª ed. Tradução Cristina Isabel Januário. Lisboa: Gradiva, 1999. 139p.

FLAVELL, J. H. *A psicologia do desenvolvimento de Jean Piaget.* 4ª ed. São Paulo: Pioneira, 1992. 479p.

FREITAS, J. L. M. Situações didáticas. In: FRANCHI, A. et al *Educação Matemática: uma introdução.* São Paulo: Ed. PUC, 1999. p.65-113.

FRALEIGH, J. B. *A First course in Abstract Algebra.* 4ª ed. USA: Addison-Wesley Publishing Company, 1989. 447p.

FRANCHI, A. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. In: FRANCHI, A. et al. *Educação Matemática: uma introdução.* São Paulo: Ed. PUC, 1999. p.155-195.

GARDING, L. *Encontro com a matemática.* 2^a ed. Tradução Célio Alvarenga e Maria Manuela Alvarenga. Brasília: Ed. UnB, 1997. 323p.

GLAESER, G. Epistémologie des nombres négatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v.2, n.3, p. 303-346, 1981.

HERNSTEIN, I. N. *Tópicos de Álgebra.* Tradução Adalberto P. Bergamarso e L. H. Jacy Monteiro. São Paulo: Polígono, 1970. 413p.

HAZZAN, O.; LERON, U. Students' Use and Misuse of Mathematical Theorems: The Case of Lagrange's Theorem. *For the Learning of Mathematics*, Canadá, v.16, n.1, p.23-26, Feb.1996.

IGLIORI, S.B.C. A noção de "obstáculo epistemológico" e a Educação Matemática. In: FRANCHI, A. et al. *Educação Matemática: uma introdução.* São Paulo: Ed. PUC, 1999. p. 89-113.

KRAUSE et al. Estruturas em Ciência. *BOLETIM da Sociedade Paranaense de Matemática*, Curitiba, v.17, n. 1-2, p. 91-111, 1997.

LERON et al. Learning group isomorphism: a crossroads of many concepts. *Educational Studies in Mathematics*, Netherlands, v. 29, p. 153-174, 1995.

LERON, U.; DUBINSKY, E. An Abstract Algebra Story. *The American Mathematical Monthly*, v. 102, n.3, p.227-242, 1995.

LICHTENBERG, D. R. A group whose elements are functions. *The mathematics teacher*, v. 74, n. 7, p.521-523, Oct.1981.

LINS, R. C. Epistemologia, história e educação matemática: tornando mais sólidas as bases da pesquisa. *Revista da SBEM-SP*, Campinas, n.1, v.1, p.75-91, set. 1993.

LLORENTE, P. *Grupos Topológicos*, Cursos, Seminários y Tesis del PEAM. Maracaibo: Ed. de La Universidad del Zulia, 1975. 134p.

LOCHHEAD, J.; MESTRE, J. P. Das palavras à álgebra: corrigindo concepções erradas. In: COXFORD, A.F.; SHULTE, A.P. (Orgs.). *As idéias da álgebra*. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. p.144-154.

MAIA, L. de S. L. Um novo olhar sobre a teoria dos campos conceituais. *Boletim GEPEM*, Rio de Janeiro, p. 37-48, 2000.

MILIES, C. P.; COELHO, S. P. *Números* Uma introdução à Matemática. São Paulo: EDUSP, 1997. 240p.

MIORIM, M. A. *Introdução à História da Educação Matemática*. São Paulo: Atual, 1998, 121p.

MOURA, G. R. S. O ensino da matemática escolar. Disponível em <http://www.psicopedagogia.com.br/artigos>. Acesso em: 31 jan. 2005.

OLIVEIRA, M.K. Pensar a educação - Contribuições de Vygotsky. In: CASTORINA et al, *PIAGET-VYGOTSKY* Novas contribuições para o debate, 5ª ed., Tradução Claúdia Schilling, São Paulo: Ática, 1995, p. 51-83.

OLIVEIRA, M.K. *VYGOTSKY*: Aprendizado e desenvolvimento. Um processo sócio-historico. São Paulo: Scipione, 2000. 111p.

PAIS, L. C. *Didática da Matemática* Uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. 127p.

RÍBNIKOV, K. *Historia de las Matemáticas*. Moscú: Editorial Mir, 1987. 487p.

SILVA DA SILVA, C.M. A Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP e a formação de professores de Matemática. Disponível em http://www.anped.br. *GT-EDUCAÇÃO MATEMATICA*. Acesso em: 26 abr. 2002.

TALL, D. *Advanced Mathematical Thinking*. London: Kluwer Academic Publishers, 1991. 289p.

VEER, R. VAN DER; VALSINER, J. *VYGOTSKY*: uma síntese. Tradução Cecília C. Bartalotti. São Paulo: Edições Loyola, 1996. 479p.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das Matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica*, 1v, p. 75-90, 1986.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, v.10, n.23, Grenoble, p.133-169, 1990.

VERGNAUD, G. *El Ninõ, las Matemáticas y la Realidad* Problemas de la enseñanza de las Matemáticas en la escuela primária. México: Trillas, 1991. 275p.

VYGOTSKY, L. S. *Pensamento e Linguagem.* Tradução Jefferson Luiz Camargo. São Paulo: Martins Fontes, 1996. 135p.

VYGOTSKY, L. S. *A Formação Social da Mente.* São Paulo: Martins Fontes, 1999. 191p.

VYGOTSKY, L. S. *A construção do Pensamento e da Linguagem.* Texto integral Pensamento e Linguagem, traduzido do russo por Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2001. 496p.

WUSSING, H. *The genesis of the abstract group of concept.* Massachusttes: The Mit-press, 1984. 331p.

Bibliografia Complementar

ARTIGUE, M. The Teaching and Learning of Mathematics at the University Level - Crucial Questions for Contemporary Research in Education. *Notices of the AMS*, v.46, n.11, p. 1377-1385, Dec.1999.

BIRKHOFF, G.; MACLANE, S. *Álgebra moderna básica.* 4^a ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1980. 485p.

BALACHEFF, N. Conception, connaissance et concept. In: GRENIER, D. (ed.) *Sèminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques.* Grenoble: IMAG, p.219-244, 1995.

BAQUERO, R. *Vygotsky e a aprendizagem escolar*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998. 167p.

BARRETO, I. M. A. *Problemas verbais multiplicativos de quarta-proporcional*: a diversidade de procedimentos de resolução. 2001. 123f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica - SP, 2001.

CARRAHER, D. W. *Senso crítico*: do dia a dia às ciências humanas.5ª ed. São Paulo: Pioneira, 1999. 163p.

CASTRO, F.M. DE O. *A Matemática no Brasil*. 2ª ed. Campinas: Ed. UNICAMP, 1999. 83p.

CHARLOT, B. *Da Relação com o Saber*: elementos para uma teoria. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000. 93p.

COLAÇO, V. F. R. *Interações em sala de aula*: Um estudo da atividade discursiva de crianças em séries iniciais. 2001. 189p. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2001.

CORDEIRO, E. M. Implicações dos objetivos educacionais. In: PENTEADO, W.M.A (Org.) *Psicologia e ensino*. São Paulo: Papelivros, 1980. p. 180-189.

DANYLUK, O. S. A matemática, o professor de matemática e seu ensino. *Scientia*, v.2, n. 1, p.75-83, jan./jun. 1991.

DEAN, R. A. *Elementos de Álgebra Abstrata*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1974. 315p.

DOUADY, R. Jeux de cadres e dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v.7, n.22, p. 5-31, 1986.

FALCÃO, J. T. R. Lenguaje Algebraico. Un enfoque psicológico. *Uno-Revista de Didáctica de las Matemáticas*, Barcelona, n.14, p.25-60, Oct.1997.

FREEDMAN, H. A Way of teaching abstract algebra. *The Teaching of Mathematics*, Wardorp, p.641-644, 1983.

GARCIA, A. e LEQUAIN, Y. *Álgebra*: um curso de introdução, Rio de Janeiro: Ed. IMPA, 1988. 213p.

GOMES, C. M. A. *FEUERSTEIN e a Construção Mediada do Conhecimento.* Porto Alegre: Artes Médicas, 2002. 298p.

GONÇALVES, A. *Introdução à Álgebra.* Rio de Janeiro: Ed. IMPA, 1979. 194p.

GONZALEZ et al. *Numeros enteros.* Matematicas: cultura y aprendizaje. Madrid: Sintesis, 1990. 207p.

GUARNICA, A. V. M. Professor e professor de MATEMÁTICA: das informações que se tem acerca da formação que se espera. *Revista da Faculdade de Educação*, São Paulo, v.23, n.1/2, p.215-238. jan./dez.1997

INHELDER, B.; PIAGET, J. *Da lógica da criança à lógica do adolescente.* São Paulo: Pioneira, 1976. 260p.

LESH JR, R. A. The influence of two types of advanced organizers on an instructional unit about finite groups. *Journal for Research in Mathematics Education*, p. 87-91. Mar. 1976.

LIMA FILHO, A. de; REBOUÇAS, F. A. *O pensamento formal em Piaget.* Gênese, Estruturação e Equilibração. Goiânia: Dimensão, 1988. 103p.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M.E.D. *Pesquisa em Educação*: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MACLANE, S. Abstract Algebra Uses Homomorphisms. *The American Mathematical Monthly*, v.103, n. 4, 1996.

MOLL, L. C. *Vygotsky e a educação.* Implicações pedagógicas da psicologia sócio-histórica. Tradução Fani A. Tesseler. Porto Alegre: Artes Médicas, 2002. 432p.

MOYSÉS, L. *APLICAÇÕES DE VYGOTSKY À EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.* 3ª ed. Campinas: PAPIRUS, 2001. 176p.

NEVES, P. S.de O. *Um estudo sobre o significado, o ensino e a aprendizagem da álgebra.* Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 1995. 132p.

OLIVEIRA, M. B. A tradição Roschiana. In: OLIVEIRA, M. B; OLIVEIRA, M. K (Orgs.) *Investigações Cognitivas*: Conceitos, Linguagem e Cultura. Porto Alegre: Artes Médicas, 1999, p. 17-33.

PAULOVICH, L. Um estudo sobre formação de conceitos algébricos. *CIÊNCIA & EDUCAÇÃO*, v. 5, n. 2, p.39-48, 1998.

PEDOE, D. *A course of GEOMETRY for colleges and universities.* Cambridge: University Press. 1970, 449p.

PETRICIG, M. Combining Individualized Instrucion wiht the Traditional Lecture Method in a College Algebra Course. *Mathematics Teacher*, v.81, n.5, p. 385-387, 1988.

PIAGET, J. Las estruturas matemáticas y las estruturas operatórias de la inteligencia. *La enseñanza de las matemáticas.* Madri: Aguillar, 1963.

PIAGET, J. *Lógica e conhecimento científico.* Tradução Sousa Dias e Filipe Araújo. Porto: Livraria Civilização, 1980. 522p.

PIAGET, J.; GARCIA, R. *Psicogênese e história das ciências.* Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1987. 251p.

REGO, T.C. *VYGOTSKY*: uma perspectiva histórico-cultural da educação. 13ª ed. Petrópolis: Vozes, 2002. 138p.

SILVA, M. R. G. Concepções e práticas do professor de Matemática. *Quadrante: Revista Teórica e de Investigação*, Lisboa, v.3, n.2, p.11-23, 1994.

STRUIK, D.J. *História Concisa das Matemáticas.* 2ª ed. Lisboa: Gradiva, 1992. 395p.

VALENTE, W. R. História da Matemática na Licenciatura: uma contribuição para o debate. *Educação Matemática em revista.* São Paulo. Ano 9, ed. especial, p. 88-94, mar.2002.

VERGNAUD, G. Difficultés conceptuelles, erreus didactiques et vraies obstacles épistémologiques dans l'aprentissage des mathématiques. *Colloque International: Construction des savoirs - Obstacles et conflits*, Montreal: Agence d'ARC inc., 1988.

VERGNAUD, G. Au fond de l'apprendissage, da conceptualization. *Actes de la VIII Ecole d'Eté de Didactique des Mathématics*, p. 174-185, 1995.

VYGOTSKY, L. S. *Obras Escogidas III.* Madrid: Visor Distribuciones, 1995. 383p.

VYGOTSKY, L. S. *Obras Escogidas IV*: Psicologia infantil. Madrid: Visor Distribuciones, 1996. 427p.

WAERDEN, B. L. Van der. *History of Algebra.* Berlin: Springer-Verlag, 1985. 271p.

ZUFFI, E. M & PACCA, J. L. A. Sobre funções e a linguagem matemática de professores do Ensino Médio. *Zetetiké.* São Paulo: Ed. UNICAMP, v. 8, n. 13/14, p. 7-28, jan. a jun./jul. a dez. 2000.

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
COORDENAÇÃO DO CURSO DE MATEMÁTICA

BACHARELADO

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°
FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR I 4	LÍNGUA PORTUGUESA 5	REDAÇÃO TÉCNICA 1.2 4	LÍNGUA ESTRANGEIRA (INGLÊS) 5	ÁLGEBRA LINEAR II 2.2 4	INTRODUÇÃO Ã GEOMETRIA DIFERENCIAL 3.3 4	TOPOLOGIA DOS ESPAÇOS METRÍCOS 3.6 4
ÁLGEBRA VET. E GEOMETRIA ANALITICA 4	ÁLGEBRA LINEAR I 2.1 4	FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR II 1.1 4	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA 3.2 6	ÁLGEBRA I 2.3 4	ÁLGEBRA II 2.5 4	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS 3.5 4
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I 6	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II 3.1 4	CÁLCULO DOFERENCIAL E INTEGRAL III 2.2;3.2 6	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES 2.2;3.2 4	ANÁLISE I 3.3 4	ANÁLISE II 3.5 4	ANÁLISE III 3.6 4
INTRODUÇÃO A CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO 4	DESENHO GEOM. E GEOMETRIA DESCRITIVA 5	CÁLCULO NUMÉRICO 2.2;3.2;5.1 4	FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA 3.3 4	OPTATIVA 4	OPTATIVA 4	OPTATIVA 4
OPTATIVA 4	FÍSICA GERAL I 2.1 – 3.1 4	FÍSICA GERAL II 3.2 – 5.2 4	FÍSICA EXPERIMENTAL I 5.2 3	OPTATIVA 4	OPTATIVA 4	

Figura 6.7: Anexo 1 - Fluxograma do Bacharelado

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
COORDENAÇÃO DO CURSO DE MATEMÁTICA

LICENCIATURA

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°
FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR I 4	LÍNGUA PORTUGUESA 5	REDAÇÃO TÉCNICA 1.2 4	FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA EUCLIDIANA 5.2 5	LÍNGUA ESTRANGEIRA (INGLÊS) 5	ANÁLISE I 3.3 4	**OPTATIVA** 4
ÁLGEBRA VET. E GEOMETRIA ANALITICA 4	ÁLGEBRA LINEAR I 2.1 4	FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR II 1.1 4	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES 2.2;3.2 4	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA 3.2 6	ÁLGEBRA I 2.3 4	TEM (PRATICA DE ENISNO) 3.6 4
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I 6	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II 3.1 4	CÁLCULO DOFERENCIAL E INTEGRAL III 2.2;3.2 6	FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA 3.3 4	O COMPUTADOR COMO INSTRUM. DE ENSINO 1.4;5.1 3	PRÁTICA PARA ENSINO DE MATEMÁTICA I 1.1;1.4;4.1;4.5 4	PRÁT.PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA II 3.6 4
ESTRUTURA E FUNC. DO ENS. DE 1° E 2° GRAUS 4	PSICOLOGIA EDUCACIONAL ADOLESCÊNCIA 4	CÁLCULO NUMÉRICO 2.2;3.2;5.1 4	PSICOLOGIA EDUCACIONAL/APRENDIZAGEM 4	DIDÁTICA 4.4 4	**OPTATIVA** 4	**OPTATIVA** 4
INTRODUÇÃO A CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO 4	DESENHO GEOM. E GEOMETRIA DESCRITIVA 5	FÍSICA GERAL I 2.1;3.1 4	FÍSICA GERAL II 3.2;5.3 4	FÍSICA EXPERIMENTAL I 5.3 3	**OPTATIVA** 4	**OPTATIVA** 4

Figura 6.8: Anexo 2 - Fluxograma da Licenciatura

Apêndice A

Instrumentos de Investigação

A.1 Seqüência 1 de Atividades

Uma operação binária $*$ definida em um conjunto S é uma regra que associa a cada par ordenado de elementos do conjunto S um elemento do conjunto S.

1. O que você entende quando se diz que a operação binária é uma regra?

A palavra regra poderia ser substituída por outra(s)? Qual(is)?

2. a. O que você entende quando se diz que a operação é uma regra que associa a cada par ordenado de elementos do conjunto S um elemento do conjunto S ? Escreva o que você entende em linguagem matemática.

b. Você acha que é importante que o par seja ordenado? Por quê ?

c. O que se pode dizer sobre o elemento do conjunto S que está associado ao par ordenado de elementos do conjunto S ? Ele pode ser igual ao primeiro elemento do par? Ou ao segundo ? Ou será sempre um elemento diferente dos dois elementos do par ?

3. Como você explica ou justifica o termo operação binária ?

4. Reescreva a definição de operação binária como você a entende, com suas próprias palavras.

5. No Ensino Fundamental (antigo 1^o. grau) e no Ensino Médio (antigo 2^o. grau) você trabalhou com conjuntos nos quais estavam definidas operações binárias. Quais conjuntos e quais operações você lembra ? Especifique o conjunto e a operação (ou as operações)

definida (s) em cada um deles. Nesse(s) conjunto(s), você acha que podemos ter (definir) outras operações ? Justifique sua resposta.

6. Considere o conjunto $\mathbf{Z}_+ = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \geq 0\}$. Para a e b elementos quaisquer de $\mathbf{Z}_+$, $a * b$ é igual ao menor dos elementos a e b ou é igual ao valor comum se $a = b$. De acordo com a definição de operação binária dada, $*$ é uma operação binária em $\mathbf{Z}_+$? Justifique.

7. No conjunto $\mathbf{Q}$ dos números racionais defina $\bullet$ por $a \bullet b = \frac{a}{b}$, a e b elementos quaisquer em $\mathbf{Q}$. Faz sentido dizer que $\bullet$ é uma operação binária em $\mathbf{Q}$ do ponto de vista da definição dada? Justifique.

8. Considere a equação linear $a * x = b$ com a e b elementos quaisquer de um conjunto numérico S. Naturalmente surge a pergunta: quando que essa equação tem solução?

Por exemplo, se a operação $*$ for a adição, em que conjunto (s) numérico (s) S a equação $a + x = b$ tem solução quaisquer que sejam a e b em S ? Justifique sua resposta.

Se a operação $*$ for a multiplicação, em que conjunto (s) numérico (s) S a equação $a.x = b$ tem solução para quaisquer valores de a e b em S? Justifique sua resposta.

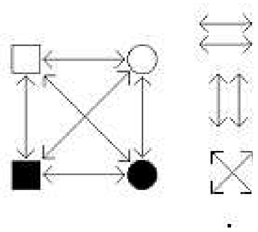
Determine a solução das equações $a + x = b$ e $a.x = b$.

Alguma propriedade é necessária para se obter a solução dessas equações ? Se for o caso, cite a propriedade em cada momento que você a utilize. Qual (is) a (s) propriedade (s) que a operação $*$ deve ter para que a equação $a * x = b$ tenha sempre solução?

9. Em matemática, o que é grupo? O que você entende por um grupo matemático?

A.2 Seqüência 2 de Atividades

1. A figura abaixo representa as diferentes ações:



mudar apenas a forma;
mudar apenas a cor;
mudar a forma e a cor;
não mudar nada

A composição(operação) de duas quaisquer das ações acima é ainda uma delas? Em caso afirmativo, represente isso, ou seja, escreva o resultado da operação entre duas quaisquer dessas ações.
O que acontece quando realizamos uma das três primeiras ações duas vezes consecutivas?
Para cada uma delas podemos falar de uma ação inversa?
Você percebe alguma relação entre as três primeiras ações?
O conjunto formado por essas quatro ações possui alguma estrutura algébrica? Em caso afirmativo, qual e como é essa estrutura?

2. Consideremos quatro pontos A, B, C e D em uma circunferência de modo que $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DA}$. Nela, estão sendo aplicados movimentos, e cada movimento será dado pela referência à posição dos pontos A, B, C e D. Estamos considerando apenas os movimentos que, quando efetuados quatro vezes consecutivas, restituem os quatro pontos à situação inicial. No nosso caso, são permitidos apenas os movimentos de rotação.
Quantos e quais são esses movimentos?
A composição(operação) de dois desses movimentos permitidos é ainda um movimento permitido? Em caso afirmativo, represente isso, isto é, explicite o resultado da operação entre dois quaisquer desses movimentos.
Existe alguma relação entre esses movimentos? O conjunto formado por esses movimentos possui alguma estrutura algébrica? Em caso afirmativo, qual e como é essa estrutura?

A.3 Seqüência 3 de Atividades

Podemos inventar uma língua artificial, na qual empregamos um número reduzido de letras. Uma palavra dessa língua será constituída de uma sucessão qualquer dessas letras ou de nenhuma letra. Nas palavras que possuem letras, estas podem ser repetidas ou não e escritas em qualquer ordem. Assim, haverá sempre uma palavra que não possui nenhuma letra e um grande número de palavras que comportam uma, duas, três, ou um número qualquer de letras. Nessa língua só reuniremos as palavras para formar palavras mais compridas e não para formar frases. Se quisermos, podemos considerar uma frase constituída de uma única palavra.

Apesar do alfabeto ter um número reduzido de letras, a escrita das palavras com elas não é funcional, uma vez que as palavras podem comportar um número qualquer de letras. Para facilitar o uso dessa língua e também para por ordem no uso dessas palavras, vamos separá-las em *classes*, e, a partir daí, passaremos a trabalhar com classes. Para isso, precisamos "inventar" regras que nos permitam transformar uma palavra em outra palavra. Se uma palavra p puder ser obtida de uma outra palavra q, através de algumas transformações segundo as regras adotadas, diremos que as palavras p e q pertencem à mesma classe. Assim, de acordo com essas regras, as palavras poderão ser reduzidas a uma sucessão de pequenos números de letras e separadas em classes. Nessa língua, qualquer palavra pertencerá sempre a uma das classes e apenas a uma.

Além disso, as mesmas regras utilizadas para distribuir as palavras em classes, serão usadas para operar essas classes, já que a operação de duas classes é feita a partir da operação entre seus representantes. Distribuídas as palavras em classes e realizadas as operações entre todas as classes (duas a duas), precisamos examinar as leis que constituirão a "gramática" dessa língua. Para isso, devemos estudar e descobrir as regras que regem as combinações das diferentes classes - são essas regras que definem a gramática. Cada língua tem sua gramática, e cada gramática tem uma particular estrutura. Surge então a pergunta:

Qual é a estrutura da gramática dessa língua?

Você já deve ter percebido que para inventar uma língua deste tipo precisamos de um alfabeto e de regras que determinem o uso das palavras dessa língua. Vamos então, construir duas línguas artificiais.

1) Para a primeira, vamos ter o alfabeto constituído só de uma letra, a letra A e adotaremos apenas uma regra, a seguinte:

o agrupamento AAAAAA pode ser inteiramente suprimido ou acrescentado.

Nesse caso, cada palavra dessa língua, ou não possui nenhuma letra ou comporta um número qualquer de repetições da letra A. Deve-se procurar escrever algumas palavras dessa língua e, como exercício, tentar fazer a reunião de duas quaisquer dessas palavras, ora utilizando a regra dada, ora não a utilizando. Veja que, sem o uso da regra a reunião de duas palavras pode ser uma palavra muito comprida. Além disso, essa regra também é necessária para a distribuição das palavras em classes. É importante observar que, de acordo com essa regra, a palavra AAAAAA e a palavra que não possui nenhuma letra pertencem à mesma classe. Lembre-se de que o uso da regra é imprescindível.

Para dizer qual é a estrutura da gramática dessa língua, alguns passos precisam ser seguidos, por exemplo:

a) a partir da regra já explicitada (**o agrupamento AAAAAA pode ser inteiramente suprimido ou acrescentado**), escreva cada uma das classes, isto é, escolha uma palavra representante para cada classe e enumere alguns de seus elementos;

b) a operação sobre o conjunto das classes é de reunião (que também pode ser vista como uma multiplicação). Use a regra, acima citada, para fazer a operação de duas quaisquer dessas classes - veja que o resultado é ainda uma classe. Construa a tábua da operação reunião sobre o conjunto de classes e verifique que essa operação é binária;

c) a partir da tábua feita no item b, você obtém uma gramática. Ao fazer uma análise dessa gramática, você descobre a sua estrutura. Essa estrutura tem um nome específico ? Qual é esse nome?

2) Agora, vamos construir a outra língua artificial. Para obter outra língua, precisamos mudar o alfabeto e as regras, ou apenas um deles. No caso, vamos mudar os dois. O alfabeto será constituído pelas letras A e B e as regras a serem adotadas são as

seguintes:

AB e BA são permutáveis, isto é, AB substitui BA e vice-versa;

podemos cancelar ou introduzir AAA em qualquer lugar;

podemos cancelar ou introduzir BB em qualquer lugar.

Para construirmos completamente essa língua, precisamos explicitar a estrutura da gramática, para isso, antes de qualquer coisa, você deverá examinar as conseqüências provocadas pela mudança do alfabeto e das regras no conjunto de palavras e nas classes. É claro que tudo mudou: as palavras e as classes. Por exemplo, antes, a palavra AAA e a palavra que não possui nenhuma letra pertenciam a classes diferentes, agora as duas pertencem à mesma classe. Você precisa verificar também se o número de classes é o mesmo ou se mudou.

Para saber qual é a estrutura da gramática, você pode seguir os mesmos passos da questão anterior especificados nos itens a, b e c.

3) Agora que você já reconheceu a gramática das duas línguas, analise a construção e a estrutura de cada uma delas atentando para os aspectos explicitados nas seguintes questões.

Você pode listar algumas características da estrutura dessas duas gramáticas?

Elas podem ser comparadas? De que forma?

Existe alguma similaridade entre elas? Fale sobre isso.

4) O que você entende por grupo matemático? Dê exemplos de conjuntos com estrutura de grupo e de conjuntos que não tem estrutura de grupo, dando as razões pelas quais estes últimos não são grupos.

Apêndice B

Roteiros

B.1 Roteiro para as Entrevistas

Primeira entrevista

- Perguntas de caráter pessoal:

1. Você é natural de onde?
2. Onde você estudou no Ensino Fundamental e no Ensino Médio? Em escola pública ou particular?
3. Você gosta de matemática ?
4. Você já cursou as disciplinas Álgebra Vetorial e Geometria Analítica, e Álgebra Linear. Como foi para você fazer essas disciplinas?
5. É a primeira vez que você está cursando Álgebra I?
6. Você tem bolsa de Iniciação Científica? Você já é professor(a)?
7. Quando é que você sabe que sabe um assunto, um conceito?

- Perguntas pertinentes às situações-problema ou ao conteúdo destas:

1. O que você entende quando se diz que a operação binária é uma regra?
2. O que é uma operação binária em um conjunto S?

3. Qual é a condição ou quais as condições para se ter uma operação binária em um conjunto?

4. Quando é que essa (s) equação (ões) tem (têm) solução? (em referência ao item S1.8)

5. Não diga somente qual é a solução, encontre a solução (ões) dessa (s) equação (ões).

6. Em matemática, o que é grupo? O que você entende por grupo?

Segunda entrevista

- Perguntas referentes à situação-problema S2.1

1. Você entendeu exatamente como funciona essa figura?

2. Que conjunto você quer verificar se é grupo? Quais são seus elementos?

3. Como você pode garantir que existe uma operação no conjunto?

- Perguntas referentes à situação-problema S2.2

1. Que conjunto você quer verificar se é grupo?

2. Quem são os elementos do conjunto?

3. O que é uma rotação?

4. Qual a operação no conjunto?

Terceira entrevista

- Perguntas de caráter pessoal:

1. O que você achou do conteúdo da disciplina Álgebra I?

2. Você gostou de estudar a teoria dos grupos?

3. Você estudou teoria dos grupos por livros? Quais?

4. Você estudava sozinho ou com outras pessoas?

5. Qual o tempo (em termos de horas) dedicado por você ao curso de Álgebra I, por semana?

6. O que você achou das seqüências das situações-problema da minha pesquisa? Foram fáceis? Foram difíceis? E dessa em particular ?

- Perguntas pertinentes às situações-problema ou ao conteúdo destas:

1. Você entendeu a construção dessa língua artificial?

2. Que conjunto você quer verificar se é grupo?

3. A construção dessa língua artificial lembra a construção de algum grupo que você conhece?

4. Quem é o grupo $\mathbf{Z}_n$? Você entendeu a contrução do $\mathbf{Z}_n$?

- Em referência aos grupos encontrados em S3.1 e S3.2

1. O que você pode dizer sobre esses dois grupos? Quais as semelhanças e as diferenças entre eles?

2. Você acha que a noção de isomorfismo é importante na teoria dos grupos?

3. O que é isomorfismo de grupos?

4. Em Matemática, o que é grupo? O que você entende por grupo?

5. Este estudo modificou o seu entendimento sobre as operações estudadas nos conjuntos numéricos (referia-me aos conjuntos representados pelas letras $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$) nos ensinos Fundamental e Médio?

B.2 Roteiro para Estruturação e Análise dos Dados

Neste roteiro há questões envolvendo aspectos gerais das quatro situações-problema quanto aos significados, às representações e aos invariantes, entre outras, e questões direcionadas para cada uma das sequências e/ou atividades. Nos dois casos, as questões contemplam aspectos a serem observados e/ou analisados nas atividades.

Roteiro para estruturação e análise das soluções dadas na Seqüência 1

1. Qual o significado da palavra regra para o aluno, é um significado matemático, é um significado comum;
2. O aluno expressa o que ele entende por operação binária em linguagem matemática;
3. O aluno escreve segundo o seu entendimento de operação binária ou apenas repete a definição pronta recebida através do texto ou do professor;
4. O aluno percebe os traços implícitos na definição, esses traços foram expicitados/discriminados;
5. Qual o significado da expressão operação binária para o aluno, ele sabe como esse significado se reflete na prática;
6. A expressão operação binária do aluno coincide com a expressão matemática operação binária em referenciabilidade e em significado;
7. Qual a relação estabelecida pelo aluno entre a operação binária formalmente definida no texto, e as operações estudadas no Ensino Fundamental nos conjuntos por ele citados;
8. O aluno faz a ponte entre as operações antes estudadas e a operação binária agora definida, ele discrimina todos os traços (atributos) das operações anteriores, vistas (ou não vistas) agora como operações binárias;
9. Qual o real significado de operação binária para o aluno;

10. Qual o esquema utilizado para resolver cada uma das equações $a + x = b$ e $a \cdot x = b$;

11. Existe apenas um conceito comum de grupo ou existe uma percepção de grupo enquanto objeto matemático.

Roteiro geral para estruturação e análise das soluções das situações-problema

- Em relação aos significados

1. Quais são os significados construídos na solução das situações-problema;
2. As situações-problema são resolvidas com qual significado, o dado pela situação ou o significado puramente abstrato;
3. Os significados são vistos, apenas, como pretextos para a existência do problema, sem grande importância;
4. A solução se restringe somente a um trabalho operatório;

- Em relação às representações

1. Quais são as representações utilizadas (as matemáticas simbólicas e fechadas[1] até as representações envolvidas com significados);
2. O aluno sabe modelar as situações-problema, tirar do significado a representação ou só as resolve depois de modeladas;
3. O aluno passa de um sistema de representação para outro;
4. O aluno trabalha com os significados ou somente com os significantes.

- Em relação aos invariantes

1. Quais são os invariantes envolvidos e os utilizados;

[1] As representações matemáticas simbólicas e fechadas aqui se referem àquelas em que dão-se o uso do símbolo pelo símbolo, sem nenhum significado.

2. Que propriedades (que compõem os conceitos) são utilizadas;

3. Quais as justificativas dadas na realização das operações sobre as representações e no uso das propriedades e dos conceitos quando da realização das operações.

- Em relação à identificação do grupo

O aluno...

1. identifica o conjunto subjacente à situação;

2. representa o conjunto em linguagem matemática;

3. identifica a operação binária definida no conjunto;

4. desconfia da existência de alguma estrutura no conjunto com a tal operação;

5. verifica se o conjunto com a operação tem de fato estrutura de grupo;

6. utiliza a definição de grupo;

7. explicita o elemento identidade do conjunto;

8. explicita o inverso de cada elemento;

9. verifica se a operação é associativa;

10. percebe o que está implícito na pergunta "como é essa estrutura";

11. identifica as particularidades do grupo.

Aspectos específicos para estruturação e análise das soluções dadas em S2.1

O aluno...

1. percebe o vínculo entre a figura e as ações;

2. entende como proceder para fazer a composição das ações com base na figura;

3. percebe que a operação definida no conjunto de ações é a composição;

4. percebe que a composição de quaisquer duas ações é ainda uma ação;

5. faz todas as possíveis composições de ações, faz a tabela da operação;

6. estabele as relações entre as três primeiras ações;

7. percebe a estrutura determinada por essas relações.

Aspectos específicos para estruturação e análise das soluções dadas em S2.2

O aluno...

1. percebe que cada movimento é uma rotação e sabe o que é uma rotação;

2. representa as rotações, escreve matematicamente o conjunto de rotações;

3. percebe que a operação definida no conjunto das rotações é a composição;

4. percebe que a composição de quaisquer duas rotações é ainda uma rotação;

5. faz a composição das rotações com base na figura, no ângulo de rotação ou na permutação associada à rotação;

6. faz todas as possíveis composições de rotações, faz a tabela da operação.

Aspectos específicos para estruturação e análise das soluções dadas em S3.1 e S3.2

O aluno...

1. entende o procedimento de invenção da língua artificial, como são as palavras e como é feita a união entre elas;

2. percebe a necessidade de separar as palavras em classes;

3. entende as regras em cada uma das situações e a necessidade de utilizá-las para fazer a separação das palavras em classes;

4. utiliza a regra de forma correta para fazer a separação das palavras em classes;

5. constrói as classes e identifica os traços dos elementos que participam de cada classe, faz a escolha do representante de cada classe;

6. entende claramente quem é o conjunto de classes, o conjunto é explicitado, quais os traços discriminados na construção das classes;

7. identifica a operação binária definida no conjunto de classes, verifica que a operação definida no conjunto das classes é a reunião (ou multiplicação);

8. faz a reunião das classes usando a regra dada;

9. conclui que a união de quaisquer duas das classes é ainda uma classe; faz todas as possíveis operações de classes, faz a tabela da operação;

10. entende o que é a gramática da língua artificial e que ela tem uma estrutura de grupo.

Aspectos específicos para estruturação e análise das soluções dadas em S3.3

1. Que características dos dois grupos são listadas pelo aluno;

2. Qual a importância das características dadas para a identificação da estrutura particular de cada grupo;

O aluno...

1. percebe alguma similaridade entre os dois grupos;

2. explicita a forma de similaridade entre os dois grupos;

3. sabe o que é isomorfismo de grupos e o que significa dois grupos serem isomorfos.

Aspectos específicos para estruturação e análise das soluções dadas em S3.4

O aluno...

1. dá exemplos de conjuntos que têm estrutura de grupo e de conjuntos que não têm estrutura de grupo;

2. reconhece bem a diferença entre um conjunto com a estrutura de grupo e um conjunto sem a estrutura;
3. diz o que ele entende por grupo ou apenas explicita a definição de grupo;
4. explicita os atributos definidores de grupo. Em caso afirmativo, a explicitação foi parcial ou integral;
5. atribui algum significado à palavra grupo;
6. tem consciência do que ele entende por grupo.

Aspectos a serem analisados nas soluções como um todo

1. Há coerência ou não entre as respostas que envolvem os mesmos conceitos;
2. Há diferença entre a resposta dada na parte escrita e a resposta dada na entrevista para a mesma atividade, isto é, há entendimento diferente ou mudança de ponto de vista da parte escrita para a parte oral;
3. As palavras usadas pelo aluno coincidem com a palavra usada no texto em referenciabilidade e em significado;
4. As soluções do aluno são espontâneas ou são determinadas por um modelo esboçado ou imposto pelo professor;
5. O processo de abstração do aluno é fraco ou não, há domínio do mesmo;
6. O aluno discrimina todos os atributos de um conceito, ou há algum atributo privilegiado.

Apêndice C

Conjunto, Relação e Função

Este apêndice assim como os demais têm o objetivo de complementar o mapeamento, iniciado no capítulo 5, dos elementos pertinentes ao campo conceitual de grupo. Neste apêndice apresento alguns conceitos básicos inter-relacionados com o conceito de grupo e que ainda não foram abordados.

Sobre operações com conjuntos

Sempre que houver referência a conjunto, subtende-se conjunto não vazio de elementos. Dados dois conjuntos pode-se combiná-los (ou operá-los) para obter novos conjuntos.

Operação união

Definição C.0.1 *A união (reunião) de dois conjuntos A e B, indicado por $A \cup B$, é o conjunto de todos os elementos que estão em A ou estão em B. Simbolicamente,* $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

Quando se diz que $x \in A$ ou $x \in B$ se quer dizer que x está em pelo menos um dos conjuntos A e B, podendo estar em ambos.

Operação interseção

Definição C.0.2 *A interseção de dois conjuntos A e B, indicada por $A \cap B$, é o conjunto de todos os elementos que estão no conjunto A e no conjunto B. Simbolicamente,* $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$.

Operação produto cartesiano

Definição C.0.3 *O produto cartesiano do conjunto A pelo conjunto B é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) com $x \in A$ e $y \in B$. O tal conjunto é representado por $A \times B$, $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\, y \in B\}$.*

O par (x_1, y_1) é igual ao par (x_2, y_2) se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

De modo análogo, define-se o produto cartesiano $B \times A$. Pela própria definição de produto cartesiano, vê-se que os conjuntos $A \times B$ e $B \times A$ são diferentes. Se os conjuntos A e B são finitos com m e n elementos, respectivamente, então os conjuntos $A \times B$ e $B \times A$ têm $m \cdot n$ elementos.

O produto cartesiano de um conjunto A por ele mesmo é representado por $A \times A$ ou por A^2, $A \times A = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in A\}$.

Dados n conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$ o produto cartesiano destes conjuntos é o conjunto $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in A_i,\, \forall i,\, 1 \leq i \leq n\}$. Se estes n conjuntos forem todos distintos, tem-se o produto cartesiano de n diferentes conjuntos. Se forem todos iguais, tem-se o produto cartesiano de um mesmo conjunto n vezes.

Um exemplo clássico de produto cartesiano e muito utilizado na matemática, é o produto do conjunto dos números reais por ele mesmo n vezes, para todo inteiro $n \geq 2$. Tem-se $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$, $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3$, $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^4$, ...,
$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbf{R},\, 1 \leq i \leq n\}$.

Sobre o conceito de relação

A formação do conceito de operação está intrinsecamente ligado aos conceitos de relação e função cujo estudo é muito extenso e amplo. O conceito de relação é absolutamente geral. Na verdade, de um modo geral, o conhecimento consiste em estabelecer relações e organizá-las em sistemas. Para se perceber a importância e amplitude do conceito de relação basta ver o objeto de estudo da matemática no capítulo 3. Há infinitas relações entre objetos no espaço, relações entre números, relações entre quantidades físicas, entre fenômenos biológicos, sociais, psicológicos etc.

Na matemática, em geral, a definição de relação entre dois conjuntos A e B é dada da seguinte forma: uma relação binária de A em B é todo subconjunto R de $A \times B$. Ou seja, R é uma relação binária de A em B se, e somente se, $R \subset A \times B$.

Este texto linguístico não explicita a relação entre os elementos dos conjuntos A e B. Na verdade, uma relação envolve conjuntos e funções proposicionais. A função proposicional dá a condição que os elementos de A e de B devem satisfazer para que $b \in B$ esteja relacionado com $a \in A$, ou seja, para que o par (a, b) pertença a R. A relação de $b \in B$ com o elemento $a \in A$ é dada por uma lei (regra) determinada pela função proposicional.

Definição C.0.4 *Uma função proposicional definida no produto cartesiano dos conjuntos A e B é uma expressão designada por $P(x, y)$, $(x, y) \in A \times b$ tal que para cada par de elementos $(a, b) \in A \times B$, $P(a, b)$ pode ser verdadeira ou falsa.*

Dependendo de quem sejam os conjuntos A e B as funções proposicionais $P(x, y)$ podem ser muito variadas.

1. Seja $\mathbf{N}$ o conjunto dos números naturais. Um exemplo de função proposicional em $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ é $P(x, y)$ dada por x é menor que $y(x < y)$. Por exemplo, $P(2, 5)$ é verdadeira e $P(8, 3)$ é falsa.

2. Se A é um conjunto de pessoas do sexo feminino e B um conjunto de pessoas do sexo masculino, uma função proposicional de A em B é $P(x, y)$ dada por "x é esposa de y".

3. Em termos matemáticos, quando se diz que Brasília é a capital do Brasil, está se tomando um par de elementos da relação R do conjunto A de capitais no conjunto B de países dada pela função proposicional $P(x, y)$ dada por "x é a capital de y".

Desta forma, uma relação binária R de A em B está constituída pela terna $(A, B, P(x, y))$. Se $(a, b) \in A \times B$ e $P(a, b)$ é verdadeira, diz-se que "a está relacionado com b" e escreve-se aRb. Caso contrário, isto é, se $P(a, b)$ não é verdadeira escreve-se $a\not{R}b$. Assim $R = \{(x, y) \in A \times B \,|\, P(x, y) \text{ é verdadeira } \}$.

Se $A = B$ diz-se que R define uma relação binária em A ou, simplesmente, que R é uma relação binária sobre A.

Uma relação ternária é uma relação entre três elementos. Uma relação ternária R de $A \times A$ em A está constituída pela terna $(A \times A, A, P(x, y, z))$ em que $P(x, y, z)$ é a função proposicional. Para cada terna de elementos (a, b, c) do produto cartesiano $A \times A \times A$, $P(a, b, c)$ pode ser verdadeira ou falsa. Assim, $R = \{(x, y, z) \in A \times A \times A \mid P(x, y, z)$ é verdadeira $\}$.

Se $A = \mathbf{N}$, uma função proposicional definida $A \times A \times A$ é $P(x, y, z)$ dada por $z = x \cdot y$. Para tal função tem-se $P(2, 4, 8)$ verdadeira e $P(2, 3, 7)$ falsa.

Outros exemplos de uma relação ternária:

a) $R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = x + 3y\}$, $\mathbf{R}$ o conjunto dos números reais;

b) $R = \{(X, Y) \in P(E) \mid X \cup Y = \emptyset\}$, $P(E)$ o conjunto das partes do conjunto E.

As relações quaternárias são relações entre quatro elementos. Um exemplo é a relação sobre o conjunto $\mathbf{Z}^2 \times \mathbf{Z}^2$ dada por: $(a, b)R(c, d)$ se, e somente se, $ad = bc$. Por exemplo, $(3, 6)R(2, 4)$ pois $3.4 = 6.2$ e $(18, 15)\not R(6, 4)$ já que $18.4 \neq 15.6$.

Propriedades das relações binárias

As principais propriedades que uma relação binária R sobre um conjunto A pode verificar são: reflexiva, simétrica, anti-simétrica e transitiva.

1. Diz-se que R é reflexiva se aRa para todo $a \in A$ ou que o par $(a, a) \in R$, $\forall a \in A$.

2. Diz-se que R é simétrica se toda vez que aRb então bRa, $a, b \in A$, ou toda vez que o par (a, b) estiver em R, o par (b, a) também está R.

3. Diz-se que R é anti-simétrica se aRb e bRa implicar $a = b$; $a, b \in A$; ou que se os pares (a, b) e $(b, a) \in R$ implicar que $a = b$.

4. Diz-se que R é transitiva se toda vez que aRb e bRc, então aRc; $\forall a, b, c \in A$; ou se os pares (a, b) e (b, c) pertencerem a R, então o par (a, c) também pertence a R.

Algumas relações por terem certas propriedades, recebem nomes especiais - são as relações de ordem e as relações de equivalência.

A atividade de comparação entre objetos está na origem do desenvolvimento das relações de ordem e de equivalência, fundamentais para o desenvolvimento do conceito de número.

Relação de ordem

Definição C.0.5 *Uma relação R sobre um conjunto A é chamada uma relação de ordem parcial sobre A se, e somente se, R é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.*

Se além disso, para quaisquer $a, b \in A$, aRb ou bRa, diz-se que R é uma ordem total ou que E é um conjunto totalmente ordenado com a relação R.

Dado um conjunto Ω, a inclusão é uma relação de ordem parcial sobre o conjunto de todos os subconjuntos de Ω, assim definida: dados dois conjuntos A e B em $P(\Omega)$, diz-se que A está relacionado com B se, e somente se, $A \subset B$. Mostra-se que tal relação é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Relação de equivalência

O conceito de relação de equivalência é extremamente importante e desempenha um papel central em toda a matemática.

Definição C.0.6 *Uma relação R sobre um conjunto A é chamada uma relação de equivalência sobre A se, e somente se, R é reflexiva, simétrica e transitiva.*

A relação de equivalência mede a igualdade a menos de alguma propriedade. A relação "é igual a": dados x e y em um conjunto qualquer, xRy se, e somente, $x = y$ é uma importante relação de equivalência que permite formar classes de expressões numéricas ou algébricas iguais entre elas.

Uma relação de equivalência R sobre um conjunto A particiona-o em classes de equivalência. Dada uma relação de equivalência R sobre A, cada elemento $x \in A$ faz parte de uma classe segundo a relação R. A classe do elemento $x \in A$ é formada por todos os elementos de A que estão relacionados com o elemento x. Se R é uma relação de equivalência sobre A, a classe de x, indicada por $\bar{x}$, é dada por $\bar{x} = \{y \in A \,|\, y \text{ R } x\}$.

Mostra-se que cada elemento de A está em uma única classe de equivalência, isto é, dadas duas classes $\bar{x}$ e $\bar{y}$, ou $\bar{x} = \bar{y}$ ou $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$.

O conjunto de todas as classes de equivalência de A, segundo a relação R é uma partição do conjunto A, pois a união de todas as classes de equivalência dá como resultado o conjunto A. Tal conjunto é chamado de conjunto-quociente de A pela relação R e indicado por A/R.

Sobre o conceito de função

O conceito de função (aplicação) é um dos conceitos mais fundamentais de toda a matemática. Este surge em todos os seus domínios e de forma muito persistente.

Textualmente, pode-se dizer o que é uma função ou definir função de várias maneiras.

1. Dados dois conjuntos A e B, uma relação R de A em B é uma função de A em B (ou uma função definida em A tomando valores em B) se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que xRy ou $(x, y) \in R$;

2. Se A e B são conjuntos, então uma função de A em B é um subconjunto S de $A \times B$ tal que para todo $a \in A$ existe um único $b \in B$ tal que o par ordenado (a, b) esteja em S.

3. Uma função é uma tripla ordenada (A, B, f) em que A e B são conjuntos e f é um subconjunto de $A \times B$ tal que, se $(x, y) \in f$ e $(x, y') \in f$, então $y = y'$.

4. Uma função é constituída de dois conjuntos não vazios A e B e uma correspondência ou uma lei que a cada $x \in A$, associa um único $y \in B$.

5. Dados os conjuntos A e B, uma função $f : A \to B$ (de A em B ou de A para B) é uma regra que associa a cada elemento $a \in A$ um elemento $b = f(a) \in B$.

O ponto fundamental a ser observado é que uma relação pode ter pares do tipo (x, y) e (x, z) com $y \neq z$, o que não ocorre na função.

É importante observar que isto não exclui a possibilidade de se ter mais de um elemento em A associado (em correspondência) a um mesmo elemento de B, ou seja, pode existir dois elementos x_1 e x_2 em A, $x_1 \neq x_2$, tal que $y = f(x_1) = f(x_2)$.

As funções para as quais não ocorre o explicitado em 1 e/ou 2 recebem nomes especiais. Seja f uma função definida no conjunto A tomando valores em B.

1. f é dita injetora se quando $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$;

2. f é dita sobrejetora se dado $b \in B$ existe um elemento $a \in A$ tal que $b = f(a)$.

3. f é dita bijetora se f for injetora e sobrejetora.

Se f é uma função de A em B que é injetora e sobrejetora, então a função $f^{-1} : B \to A$ em que $f^{-1}(y) = x$ se, e somente se, $y = f(x)$ é dita inversa de f.

Em geral, indica-se a função f de A em B por $\begin{array}{cccc} f & : & A & \to & B \\ & & x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$

O conjunto A é chamado de domínio da função f e o conjunto B é chamado de contra-domínio de f. O conjunto de todos os elementos $y \in B$ tais que $y = f(x)$ para algum $x \in A$ é chamado de conjunto imagem de f.

Sejam A um corpo e sejam f e g duas funções de A em A. Pode-se realizar operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) com estas funções e obter outras funções, as funções $f + g, f - g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ também de A em A, exceto, possívelmente, a função divisão, cujo domínio pode ser diferente de A. Estas operações estão assim definidas:

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ para todo $x \in A$;

2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ para todo $x \in A$;

3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ para todo $x \in A$;

4. $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ para todo $x \in A$.

Além dessas operações entre funções há uma outra e que muito interessa aqui. Trata-se da composição de funções. No caso da operação composição, as funções f e g não têm, necessariamente, o mesmo domínio.

Sejam A, B e C conjuntos e sejam $g : A \to B$ e $f : B \to C$. A composta de g por f é a função $f \circ g : A \to C$ definida da seguinte forma: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ para todo $x \in A$.

Mostra-se que:

1. A operação composição de funções é associativa;

2. Se f e g são injetoras, então $f \circ g$ também é injetora;

3. Se f e g são sobrejetoras, então $f \circ g$ também é sobrejetora;

Conseqüentemente, se f e g são bijetoras, então $f \circ g$ também é bijetora.

No estudo de função, em geral, os exemplos mais utilizados são de funções de $\mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}$ conjunto dos números reais. São funções bem comportadas definidas através de uma expressão algébrica. Se o estudante trabalha também com funções definidas em outros conjuntos, ele vai saber que as funções de **R** em **R** são só um exemplo entre tantos outros.

Apêndice D

Hierarquia de Estruturas

D.1 As estruturas de grupóide, semi-grupo e monóide

Paralelo ao conceito de conjunto tem-se o de estrutura. Em geral, os elementos de um conjunto estão relacionados segundo uma ou mais operações e estas determinam uma estrutura no conjunto. É preciso ter claro o significado da frase: o conjunto X tem tal estrutura, em particular, o conjunto G tem estrutura de grupo.

De um ponto de vista mais simples e mais restrito, pode-se dizer que o significado da palavra estrutura, independente do contexto ao qual ela se refere, apresenta alguns traços comuns, tais como: a interdependência de todos os elementos, o fechamento do conjunto sobre si mesmo, a possível realização de uma multiplicidade de variáveis.

No que se refere à sua perspectiva da totalidade, pode-se ter um entendimento de estrutura como possuindo um caráter de sistema, no qual a modificação de um elemento repercute sobre os demais. Numa perspectiva logicista, tem-se a informação de diferentes combinações possíveis de um número finito de elementos, ignorando as diferenças entre eles.

Do significado mais concreto ao mais abstrato, vê-se que uma estrutura é um plano segundo o qual um dado objeto é construído, e que este plano é revelado pela análise interna da totalidade, quando enfim se mostram os elementos que o compõem, as relações entre eles e a disposição dessas relações.

Os elementos de uma estrutura não são um conglomerado ou conjunto fortuito de elementos heterogêneos, ao contrário, os elementos são de mesma natureza e estão unidos entre si pelas relações derivadas das operações entre eles. (KRAUSE et al, 1997). No caso específico da matemática, a estrutura é constituída de um par que é um conjunto munido de uma ou mais operações que juntos satisfazem certos axiomas (ou propriedades). As estruturas matemáticas se diferenciam pelas operações (interna e externa) definidas no conjunto e por suas propriedades.

O caso mais simples de estrutura que se pode considerar é o grupóide. O grupóide é um conjunto S não vazio munido de uma operação binária. Para indicar que o conjunto S está munido de uma operação binária $*$ usa-se a notação $(S,*)$.

Se a operação $*$ do grupóide $(S,*)$ for associativa, o grupóide é chamado semigrupo.

Se o par $(S,*)$ for um semigrupo e possui elemento identidade segundo a operação $*$, diz-se que $(S,*)$ é um monóide.

Nesta perspectiva hierárquica de estruturas, a mais rica é a de grupo e está assim definida: seja $(S,*)$ um monóide. Se cada elemento de S possuir um elemento inverso em S, segundo a operação $*$, diz-se que $(S,*)$ é um grupo.

Se em cada uma dessas estruturas a operação $*$ é comutativa, diz-se que a estrutura é comutativa.

Para cada estrutura há uma exigência quanto às propriedades por ela satisfeita. É claro que se o par $(S,*)$ possui uma estrutura superior, superior no sentido de que a operação $*$ satisfaz mais propriedades, então ele tem a estrutura inferior correspondente às propriedades satisfeitas pela operação. Isto significa que se o par $(S,*)$ é um grupo, ele é também um monóide, um semigrupo e um grupóide. Considerando para cada par a estrutura mais superior, isto é, a que exige mais propriedades, vários exemplos podem ser dados.

Como já foi dito, a natureza dos elementos dos conjuntos nos quais se pode definir uma estrutura são muito diferentes. Mesmo com os conjuntos estudados no Ensino Básico com as operações usuais de adição $(+)$ e multiplicação $(\cdot)$ se tem diversas estruturas. Os conjuntos mais conhecidos são:

O conjunto $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ dos números naturais;

O conjunto $\mathbf{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, ...\}$ dos números inteiros relativos;

O conjunto $\mathbf{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbf{Z},\ b \in \mathbf{Z},\ b \neq 0\}$ dos números racionais;

O conjunto $\mathbf{R}$ dos números reais;

O conjunto $\mathbf{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ dos números complexos;

O conjunto $P = \{2n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ dos números pares;

O conjunto $I = \{2n + 1 \mid n \in \mathbf{Z}\}$ dos números ímpares;

O conjunto $n\mathbf{Z} = \{nz \mid z \in \mathbf{Z}\}$ dos múltiplos de n em $\mathbf{Z}$;

O conjunto $\mathbf{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, ..., \overline{n-1}\}$ dos inteiros módulo n;

O conjunto $\mathbf{Z}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$;

O conjunto $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$;

O conjunto $P(E) = \{X \mid X \subseteq E\}$ das partes de um conjunto E não vazio com um número finito de elementos;

O conjunto $\mathbf{R}^{\mathbf{R}} = \{f \mid f : R \to R\}$ das funções definidas em $\mathbf{R}$ e tomando valores em $\mathbf{R}$;

O conjunto $M_n(\mathbf{R})$ das matrizes quadradas de ordem n com elementos em $\mathbf{R}$;

O conjunto $GL_n(\mathbf{R}) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) \mid detA \neq 0\}$ das matrizes inversíveis de $M_n(\mathbf{R})$;

O conjunto $\mathbf{R}^n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_i \in \mathbf{R},\ 1 \leq i \leq n\}$ constituído das n-uplas de números reais. Quando $n = 2$ tem-se o $R^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R}\}$, quando $n = 3$ tem-se $\mathbf{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R},\ z \in \mathbf{R}\}$ e assim por diante.

Eis alguns exemplos de estruturas nestes conjuntos.

Grupóides

$(\mathbf{N}^*, *)$ tal que $a * b = a^b$ para todos $a, b \in \mathbf{N}$;

$(\mathbf{Z}, \bullet)$ tal que $a \bullet b = a + 2b$ para todos $a, b \in \mathbf{Z}$;

$(\mathbf{Z}, -)$ tal que $a - b$ é a subtração de números inteiros relativos, $\forall a, b \in \mathbf{Z}$;

$(\mathbf{R}, -)$ tal que $a - b$ é a subtração usual de números reais, $\forall a, b \in \mathbf{R}$;

$(\mathbf{R}^*, \div)$ tal que $a \div$ b é a divisão usual de números reais, $\forall a, b \in \mathbf{R}^*$;

$(P(E), -)$ em que $A - B = \{x \,|\, x \in A,\, x \notin B\}, \;\; \forall A, B \in P(E)$;

$(M_n(\mathbf{R}), *)$ tal que $A * B = A \cdot B^t$, $\forall A, B \in M_n(\mathbf{R})$, B^t representa a transposta da matriz B e o símbolo $(\cdot)$ a multiplicação usual de matrizes;

$(\mathbf{R}^n, -)$ tal que $X - Y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, ..., x_n - y_n) \in \mathbf{R}^n$ já que $x_i - y_i \in \mathbf{R}$ para todo $1 \leq i \leq n$ em $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n$;

Semigrupos

$(\mathbf{N}, \odot)$ em que $a \odot b = mdc(a, b)$ (máximo divisor comum de a e b em $\mathbf{N}$);

$(P, \cdot)$ em que $2n \cdot 2m = 2(2nm) = 2t \in P$ com $t = 2nm \in \mathbf{Z}$ para todos $2n, 2m \in P$;

$(\mathbf{R}, *)$ em que $a * b = a$ para todos $a, b \in \mathbf{R}$;

$(R^R, \cdot)$ em que $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ para todas $f, g \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ e todo $x \in \mathbf{R}$;

Monóides

$(\mathbf{N}^*, \cdot)$ em que $a \cdot b$ é a multiplicação de números naturais, $\forall a, b \in \mathbf{N}^*$;

$(\mathbf{N}^*, \otimes)$ em que $a \otimes b = mmc(a, b)$ (mínimo múltiplo comum de a e b em $\mathbf{N}$);

$(\mathbf{Z}, \cdot)$ em que $a \cdot b$ é a multiplicação de números inteiros relativos, $\forall a, b \in \mathbf{Z}$;

$(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, \otimes)$ em que $(a, b) \otimes (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, $\forall (a, b), (c, d) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$;

$(Z(\sqrt{2}), \odot)$ em que $(a + b\sqrt{2}) \odot (c + d\sqrt{2}) = ac + bd\sqrt{2}$ com $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$;

$(I, \cdot)$ em que $(2n+1) \cdot (2m+1) = 4nm + 2n + 2m + 1 = 2k + 1$ com $k = 2nm + n + m \in \mathbf{Z}$;

$(\mathbf{R}, \cdot)$ em que $a \cdot b$ é a multiplicação usual de números reais, $\forall a, b \in \mathbf{R}$;

$(\mathbf{R}, \bullet)$ em que $a \bullet b = a + b + ab$ para todos $a, b \in \mathbf{R}$;

$(P(E), \cup)$ em que $A \cup B = \{x \,|\, x \in A \text{ ou } x \in B\}, \;\; \forall A, B \in P(E)$;

$(P(E), \cap)$ em que $A \cap B = \{x \,|\, x \in A \text{ e } x \in B\}$, $\forall A, B \in P(E)$;

$(\mathbf{R}^{\mathbf{R}}, \circ)$ em que $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ para todas $f, g \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ e todo $x \in \mathbf{R}$;

$(M_n(\mathbf{R}), \cdot)$ em que $A \cdot B$ é a multiplicação usual de matrizes, $\forall A, B \in M_n(\mathbf{R})$.

D.2 A estrutura de grupo

Quando não se faz explicitamente essa hierarquia a definição de grupo é dada como segue, na qual a hierarquia está implícita. Há muitas formas de dizer o que é um grupo em matemática. É interessante perceber que as formas mudam de acordo com a formação do indivíduo que a escreve - os matemáticos puros têm uma forma concisa (em linguagem simbólica).

Definição D.2.1 *Um grupo* $< G, * >$ *é um conjunto* G *munido de uma operação binária* $*$ *tal que os seguintes axiomas são satisfeitos:*

G_1*: A operação binária* $*$ *é associativa;*

G_2*: Existe um elemento* e *em* G *tal que* $e * x = x * e = x$ *para todo* x *em* G*. Este elemento* e *é o elemento identidade para* $*$ *em* G*;*

G_3*: Para cada* a *em* G*, existe um elemento* a' *em* G *com a propriedade que* $a' * a = a * a' = e$*. O elemento* a' *é o inverso de* a *com respeito a* $*$*. (FRALEIGH 1989, p.14)*

Tenho percebido que, quanto mais concisa for uma definição de um conceito matemático e mais símbolos forem utilizados, mais díficil fica a sua compreensão e sua apreensão. Vê-se, claramente, que há uma diferença, em relação ao texto lingüístico, entre as duas definições já explicitadas na introdução e no capítulo 5 e esta.

D.2.1 Os grupos numéricos

A ordem de um grupo é igual a cardinalidade do conjunto base da estrutura. Dizer que um grupo é finito significa que o conjunto no qual a estrutura de grupo foi inserida tem um número finito de elementos, caso contrário, o grupo é infinito.

Alguns exemplos de grupos:

O grupo (comutativo) aditivo dos inteiros $(\mathbf{Z}, +)$;
O grupo (comutativo) aditivo dos racionais $(\mathbf{Q}, +)$;
O grupo (comutativo) multiplicativo dos racionais $(\mathbf{Q}^*, .)$;
O grupo (comutativo) aditivo dos números reais $(\mathbf{R}, +)$;
O grupo (comutativo) multiplicativo dos números reais $(\mathbf{R}^*, .)$;
O grupo (comutativo) aditivo dos números complexos $(\mathbf{C}, +)$;
O grupo (comutativo) multiplicativo dos números complexos $(\mathbf{C}^*, .)$;
$(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, *)$ em que $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + bc)$ com $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$;

$(\mathbf{Z}(\sqrt{2}), \oplus)$ em que $(a + b\sqrt{2}) \oplus (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$ com $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$;

$(\mathbf{Z}_p{}^*, \odot)$ em que $a \odot b = \overline{a \cdot b}$, p um número primo, é um grupo (multiplicativo) finito;

$(P, +)$ em que $2n + 2m = 2(n + m) \in P$ já que $n + m \in \mathbf{Z}$ para todos $2n, 2m \in P$;

$(n\mathbf{Z}, +)$ em que $nz_1 + nz_2 = n(z_1 + z_2) = nr \in n\mathbf{Z}$ com $r = z_1 + z_2 \in \mathbf{Z}$;

$(\mathbf{Q}(\sqrt{2}), \cdot)$ em que $(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = ac + bd\sqrt{2} \in \mathbf{Q}\sqrt{2}$ com $a, b, c, d \in \mathbf{Q}$;

$(\mathbf{R}, \odot)$ em que $a \odot b = a + b - 5$ com $a, b \in \mathbf{R}$;

$(\mathbf{R}^n, +)$ em que $X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \in \mathbf{R}^n$ já que $x_i + y_i \in \mathbf{R}$ para todo $1 \leq i \leq n$, $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbf{R}^n$;

$(\mathbf{R}^2, \bullet)$ em que $u \bullet v = (ac, bd)$ para todos $u = (a, b)$ e $v = (c, d) \in \mathbf{R}^2$;

$(\{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}, \cdot)$ é grupo;

$(\{z \in \mathbf{C} \mid z^n = 1\}, \cdot)$ é grupo;

$(P(E), \Delta)$ onde $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$, $\forall A, B \in P(E)$ é chamada diferença simétrica;

$(\mathbf{R}^{\mathbf{R}}, +)$ em que $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ para todas $f, g \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ e todo $x \in \mathbf{R}$;

$(G, \circ)$, $G = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f(x) = ax + b, a \neq 0\}$ é o conjunto de todas as retas no plano com coeficiente angular não nulo, é um grupo não comutativo (infinito) com a operação composição de funções;

$(M_n(\mathbf{R}), +)$ em que $A + B$ é a adição usual de matrizes;

$(GL_n(\mathbf{R}), \cdot)$ em que $A \cdot B$ é a multiplicação usual de matrizes.

Vê-se, então, que em um mesmo conjunto se pode definir diferentes operações dando a tal conjunto diferentes estruturas.

Além dos grupos vistos acima existem alguns grupos que são especiais, tais como os grupos de permutações, os grupos de transformações, os grupos diedrais, o grupo dos Quatérnios e os grupos $\mathbf{Z}$ módulo n. É sobre eles que falarei a partir de agora...

D.2.2 Os grupos de permutações

Antes da apresentação dos grupos de permutações, acho importante deixar clara a idéia (explicitada no capítulo 3) que o originou, exemplificando-a. A exemplificação será dada através de uma linguagem atualizada.

Suponha que seja dada uma equação de grau quatro e que suas raízes sejam x_1, x_2, x_3, x_4. Suponha, ainda, f uma função racional (das raízes) dada por $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$.

Considere o conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ das raízes da equação e $S(X)$ o conjunto de todas as funções bijetoras (permutações) definidas no conjunto X. Sabe-se que o conjunto $S(X)$ com a operação composição é um grupo, o grupo das permutações de quatro elementos.

Para facilitar a apresentação do exemplo, ao invés de trabalhar com X e $S(X)$, eu vou utilizar o conjunto $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ e $S(Y)$, o grupo de permutações do conjunto Y. Desta forma, está sendo considerado o isomorfismo existente entre $S(X)$ e $S(Y)$, e, as permutações dos elementos x_1, x_2, x_3 e x_4, estão sendo substituídas pelas permutações dos números 1, 2, 3 e 4. Neste caso o grupo de permutações é denotado por S_4. Utilizando a notação cíclica, usualmente usada nos livros de álgebra, pode-se representar todas as 24 permutações que constituem o S_4. São elas: (1)(2)(3)(4), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (12), (13), (14), (23), (24), (34), (123), (124), (132), (142), (134), (143), (234), (243), (1423), (1324), (1234), (1342), (1243), (1432). A permutação (1)(2)(3)(4) de S_4 é o seu elemento identidade que, em geral, é representada por 1.

Todas estas permutações serão aplicadas à função f.

Para representar a função $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ sob a ação da permutação α de S_4 será usada a notação $f_\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Por exemplo, a permutação (12) leva x_1 em x_2 e vice-versa, e deixa as outras raízes fixas, isto é, x_3 vai em x_3 e x_4 vai em x_4, assim, $f_{(12)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2x_1 + x_3x_4$ é resultado da ação da permutação (12) em $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Do mesmo modo, a permutação (14)(23) permuta x_1 com x_4 e x_3 com x_2, e sua ação sobre a função f é $f_{(14)(23)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4x_3 + x_2x_1$.

As raízes x_1, x_2, x_3 e x_4 podem ser permutadas de 24 maneiras diferentes na expressão $x_1x_2 + x_3x_4$, isto não significa dizer que terão 24 diferentes valores para tal expressão, e, conseqüentemente, para a função $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$.

Cabe então a pergunta: Quais e quantos são os valores da função f ao se fazer todas as 24 possíveis permutações das raízes x_1, x_2, x_3, x_4?

A permutação identidade ($1 \in S_4$) quando aplicada à função f a deixa do jeito que está, ou seja, todas as raízes permanecem fixas. Em outras palavras, $f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4 = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Olhando, agora, a ação das outras permutações sobre f.

Permutando apenas duas das raízes e deixando as outras fixas:

$f_{(12)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2x_1 + x_3x_4$; $f_{(13)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3x_2 + x_1x_4$;

$f_{(14)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4x_2 + x_3x_1$; $f_{(23)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_3 + x_3x_4$;

$f_{(24)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_4 + x_3x_2$; $f_{(34)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_4x_3$.

Permutando três das quatro raízes, uma delas fica na posição em que está:

$f_{(123)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2x_3 + x_1x_4$, a raíz x_4 está fixada;

$f_{(124)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2x_4 + x_3x_1$, a raíz x_3 está fixada;

$f_{(132)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3x_1 + x_2x_4$, de novo a raíz x_4 está fixada;

$f_{(142)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4x_1 + x_3x_2$, de novo a raíz x_4 está fixada;

$f_{(234)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_3 + x_4x_2$, a raíz x_1 está fixada;

$f_{(243)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_4 + x_2x_3$, de novo a raíz x_1 está fixada;

$f_{(134)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3x_2 + x_4x_1$, a raíz x_2 está fixada;

$f_{(143)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4x_2 + x_1x_3$, de novo a raíz x_2 está fixada.

Agora, permutando todas as quatro raízes, vem:

$f_{(12)(34)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2x_1 + x_4x_3$; $f_{(13)(24)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3x_4 + x_1x_2$;

$f_{(14)(23)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4x_3 + x_2x_1$; $f_{(1234)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2x_3 + x_4x_1$;

$f_{(1342)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3x_1 + x_4x_2$; $f_{(1243)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2x_4 + x_1x_3$;

$f_{(1324)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3x_4 + x_2x_1$; $f_{(1423)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4x_3 + x_1x_2$;

$f_{(1432)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4x_1 + x_2x_3$.

Supondo que as raízes x_1, x_2, x_3, x_4 da equação $P_n(x) = 0$ são elementos de um corpo comutativo (as operações de adição e de multiplicação são comutativas), conseqüentemente, muitos valores assumidos por f, sob a ação de certas permutações, são os mesmos. Por exemplo,

$$f_{(12)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2x_1 + x_3x_4 = x_1x_2 + x_4x_3 = f_{(34)}(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Assim sendo, os resultados acima obtidos pela função f sob a ação das permutações de S_4 podem ser comparados e reagrupados, da seguinte forma:

- As permutações de $H = \{1, (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1423), (1324)\}$

deixam a função f invariante sob a ação de suas permutações, isto é, f é levada nela mesma por todas estas permutações e assume o valor $t_1 = x_1x_2 + x_3x_4$ nas raízes x_1, x_2, x_3, x_4. De fato:

$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4;$. $f_{(12)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2x_1 + x_3x_4;$
$f_{(34)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_4x_3;$ $f_{(12)(34)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2x_1 + x_4x_3;$
$f_{(13)(24)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3x_4 + x_1x_2;$ $f_{(14)(23)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4x_3 + x_2x_1;$
$f_{(1324)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3x_4 + x_2x_1;$ $f_{(1423)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4x_3 + x_1x_2.$

- As permutações do conjunto $\{(13), (24), (123), (142), (134), (243), (1234), (1432)\}$, que constituem uma classe módulo H, levam f numa mesma função, porém diferente da função f dada inicialmente. Esta função assume o valor $t_2 = x_3x_2 + x_1x_4$ nas raízes x_1, x_2, x_3, x_4. De fato,

$f_{(13)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3x_2 + x_1x_4;$ $f_{(24)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_4 + x_3x_2;$
$f_{(142)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4x_1 + x_3x_2;$ $f_{(243)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_4 + x2x_3;$
$f_{(123)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2x_3 + x_1x_4;$ $f_{(134)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3x_2 + x_4x_1;$
$f_{(1234)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2x_3 + x_4x_1;$ $f_{(1432)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4x_1 + x_2x_3.$

- As permutações de $\{(14), (23), (124), (132), (143), (234), (1342), (1243)\}$ que pertencem à uma outra classe módulo H, levam f numa mesma função, esta diferente das duas funções anteriores, que assume o valor $t_3 = x_4x_2 + x_3x_1$ nas raízes x_1, x_2, x_3, x_4. De fato,

$f_{(14)}(x_1, x_2, x_3 e x_4) = x_4x_2 + x_3x_1;$ $f_{(23)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_3 + x_2x_4;$
$f_{(124)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2x_4 + x_3x_1;$ $f_{(234)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_3 + x_4x_2;$
$f_{(143)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4x_2 + x_1x_3;$ $f_{(132)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3x_1 + x_2x_4;$
$f_{(1342)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3x_1 + x_4x_2;$ $f_{(1342)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3x_1 + x_4x_2.$

Nota-se que cada uma das três classes acima possui oito elementos e que a função f toma, apenas, três valores diferentes quando se permuta as raízes das 24 possíveis maneiras.

Lagrange foi o primeiro a perceber tudo isto. Ele mostra que o número dos diferentes valores da função f determina o grau da equação resolvente que permite resolver a equação dada. E que, se a função f associada às raízes da equação $P_n(x)$ assume valores

$t_1, t_2, t_3, ..., t_s$, então a resolvente θ tem grau s e $\theta(t) = (t - t_1)(t - t_2)...(t - t_s)$ e que número s é um divisor de $n!$.

No exemplo acima, para uma dada equação de grau quatro, a função $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ assume três valores t_1, t_2 e t_3, então a resolvente tem grau três e é dada por $\theta(t) = (t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)$.

Os grupos de permutações constituem um fundamental sistema de representação de um grupo, por isso ele está aqui destacado. Em qualquer livro envolvendo a teoria dos grupos estes grupos são encontrados.

A idéia de permutação como um rearranjo dos elementos de um conjunto é, provavelmente, familiar a todos os estudantes. Esta idéia está associada as situações que tratam de saber/conhecer as diversas formas de dispor uma quantidade n de objetos ou de pessoas em em n lugares diferentes. Por exemplo, as diversas formas de dispor 4 pessoas em uma mesa circular em 4 lugares fixos, as diversas formas de colocar 10 livros numa estante etc.

Os elementos do conjunto $\{1, 2, 3\}$ podem ser rearranjados de várias maneiras, duas delas podem ser dadas usando o seguinte esquema:

$\begin{array}{ll} 1 \rightarrow & 3 \\ 2 \rightarrow & 1 \\ 3 \rightarrow & 2 \end{array}$ que no conjunto resulta em $\{3, 1, 2\}$;

$\begin{array}{ll} 1 \rightarrow & 2 \\ 2 \rightarrow & 3 \\ 3 \rightarrow & 1 \end{array}$ que no conjunto resulta em $\{2, 3, 1\}$.

Nestes dois exemplos a correspondência entre os elementos do conjunto X é, de fato, uma função, que leva/associa cada símbolo do conjunto X que aparece na coluna esquerda a um símbolo (não necessariamente diferente) do mesmo conjunto X listado na coluna direita. Para que uma correspondência destas seja uma permutação de X, cada símbolo de X só pode aparecer uma única vez na coluna direita. Por exemplo, o rearranjo $\begin{array}{ll} 1 \rightarrow & 2 \\ 2 \rightarrow & 2 \\ 3 \rightarrow & 1 \end{array}$ não é uma permutação de X.

A idéia geral é a seguinte. Dado um conjunto não vazio X, uma permutação de X é uma função f de X em X tal que $f(x)$ percorre X passando exatamente uma vez por cada elemento quando x faz o mesmo em X. Em outras palavras, para cada y em X a equação $f(x) = y$ tem exatamente uma única solução x. A função f é uma bijeção de X em X. A bijeção mais simples é a função identidade de X em X, isto é, $I(x) = x$ para todo x em X.

O conjunto de todas as funções bijetoras de X em X será indicado por $S(X) = \{f : X \rightarrow X \,|\, f \text{ é bijetora }\}$. Dadas $f, g \in S(X)$ a função $f \circ g \in S(X)$ uma vez que a composição de duas funções bijetoras em X é uma função bijetora em X.

Além disso, a composição de funções é associativa, isto é, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ quaisquer que sejam $f, g, h \in S(X)$, é não comutativa porque, em geral, fog e gof são funções diferentes.

A função identidade $I \in S(X)$ é o elemento unidade de $S(X)$ pois $I \circ f = f = f \circ I$ para toda $f \in S(X)$.

Como toda função bijetora possui inversa, sua inversa também é bijetora, então para cada $f \in S(X)$ existe $g \in S(X)$ tal que $f \circ g = I$. Ou seja, cada elemento $f \in S(X)$ possui um inverso também em $S(X)$.

Assim, o conjunto $S(X)$ munido da operação composição tem estrutura de grupo e o par $(S(X), \circ)$ é chamado de grupo simétrico do conjunto X.

Se $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ e f é uma permutação do conjunto X, então os elementos $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$ e $x_1, x_2, ..., x_n$ são iguais a menos da ordem. Existe uma forma muito prática para a representação de uma qualquer permutação de $S(X)$, qual seja

$$f = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & ... & x_n \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & f(x_4) & ... & f(x_n) \end{pmatrix}$$

Se $X = \{1, 2, 3, ..., n\}$ escreve-se S_n em lugar de $S(X)$ e $(S_n, \circ)$ é o grupo das permutações de n elementos. Qualquer elemento $f \in S_n$ é representado por

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & ... & n-1 & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & ... & f(n-1) & f(n) \end{pmatrix}$$

O número das diferentes permutações do conjunto X com n elementos é $n! = 1.2.3...n$, pois $f(x_1)$ pode ser escolhido de n maneiras diferentes, se $f(x_1)$ está fixado, $f(x_2)$ pode ser escolhido de $n-1$ maneiras diferentes e assim por diante.

Existe uma outra notação para uma permutação e que é muito usada. A permutação $f = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & ... & x_{n-1} & x_n \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & ... & x_n & x_1 \end{pmatrix}$ é um ciclo de comprimento n e também é representada por uma notação mais compacta, a notação cíclica $f = \left(\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & ... & x_{n-1} & x_n \end{array} \right)$

Por exemplo, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (12)(34)$.

D.2.3 Os grupos de transformações

Para Felix Klein uma geometria é o estudo das propriedades de um espaço que permanecem invariantes sobre um determinado grupo de transformações.

Acho importante discutir estes importantes grupos com o objetivo de mostrar alguns significados do conceito de grupo na geometria. Entretanto, isto será feito sem o devido tratamento dos necessários conteúdos e conceitos da geometria, uma vez que estes estão sendo usados como ferramentas de apoio para a apresentação de tais grupos.

Para abordar tais grupos será necessário o estudo de transformações do plano (espaço vetorial R^2), em especial, as deformações, os deslocamentos e a composição destas. Ou seja, são as transformações que quando aplicadas ao plano ou a subconjuntos do plano, deformam, deslocam/movimentam ou fazem as duas coisas com os tais conjuntos.

Para o estudo dos grupos de transformações além de conceitos da geometria vários outros conceitos e resultados da álgebra vetorial e da álgebra linear são necessários. Dentre eles estão o de espaço vetorial sobre um corpo e de transformação linear.

Corpo

O matemático Weber, em seu trabalho de 1893, define corpo e deixa clara a relação entre grupos e corpos; enfatiza a primazia do conceito de grupo em oposição àquela do conceito de corpo (comutativo). Para ele "um grupo se torna um corpo se ele puder ter dois tipos de composição, das quais a primeira é chamada adição e a segunda, multiplicação". (WEBER, 1893 apud WUSSING, 1984, p. 249, tradução minha)

Quanto ao texto linguístico há várias maneiras de definir o objeto matemático chamado corpo. O corpo é uma estrutura algébrica formada por um conjunto no qual estão definidas duas operações binárias: uma adição e uma multiplicação.

Se o conjunto base da estrutura for representado pela letra K, então para todos os elementos a e b em K tem-se que $a + b \in K$ e $a \cdot b \in K$. Nestas condições, diz-se que a terna $(K, +, \cdot)$ tem estrutura de corpo se, e somente se, o par $(K, +)$ e $(K^*, \cdot)$ têm estrutura de grupo, vale a propriedade comutativa da adição e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição: para quaisquer $a, b, c \in K$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Se a operação multiplicação for comutativa, diz-se que K é um corpo comutativo.

Espaço Vetorial

Para o estudo da estrutura algébrica de espaço vetorial precisa-se definir uma operação entre elementos de conjuntos diferentes. Assim como existem várias terminologias relativas a operação entre dois elementos de um mesmo conjunto, existem também as expressões 'lei de composição externa' e 'operação externa' para referir-se a operação entre elementos de conjuntos diferentes.

Um conjunto de objetos matemáticos, como por exemplo vetores geométricos (segmentos orientados $\vec{AB}$), matrizes de uma mesma ordem, funções reais etc., podem ser somados e multiplicados por números. Os tais objetos são comumente chamados vetores e os números são denominados escalares.

A operação externa é a multiplicação de um elemento de K, chamado escalar, por um elemento de V chamado vetor - é uma função definida em $K \times V$ tomando valores em V, simbolizada por: $\begin{array}{rccc} f & : & F \times V & \to & V \\ & & (\lambda, v) & \mapsto & f(\lambda, v) = \lambda \cdot v \end{array}$

Definição D.2.2 *Um espaço vetorial V, sobre um corpo K, é uma estrutura algébrica com duas operações: uma operação interna sobre V chamada de adição em que $u + v \in V$ para todos $u, v \in V$ e uma operação externa sobre $K \times V$ denominada de multiplicação escalar (à esquerda) em que $\lambda \cdot v \in V$ para todo $\lambda \in K$ e todo $v \in V$ tal que:*

1. *O par $(V, +)$ é um grupo comutativo;*

2. *Para todos $\alpha, \beta \in K$ e $u, v \in V$ as seguintes condições são satisfeitas:*

$(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$;

$\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$;

$(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$;

$1 \cdot v = v$, 1 *o elemento unidade de K.*

Os elementos do conjunto V são chamados de vetores e os do conjunto K são denominados de escalares.

Para cada n fixado, $\mathbf{R}^n$ e $M_n(\mathbf{R})$ são exemplos clássicos de espaço vetorial sobre o corpo $\mathbf{R}$. Outro exemplo é dado pelo conjunto de todas as matrizes quadradas inversíveis de ordem n com entradas em $\mathbf{R}$, simbolizado por $GL_n(\mathbf{R}) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) \,|\, det(A) \neq 0\}$.

Transformação linear de $\mathbf{R}^2$ em $\mathbf{R}^2$

Definição D.2.3 *Uma transformação (aplicação) T de $\mathbf{R}^2$ em $\mathbf{R}^2$ é dita linear se $T(u+v) = T(u) + T(v)$ para todos $u, v \in \mathbf{R}^2$ e $T(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot T(v)$ para todo $\lambda \in \mathbf{R}$ e todo $v \in \mathbf{R}^2$.*

Cada transformação linear T também é definida por $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ para todos $x, y \in \mathbf{R}$, a, b, c, d números reais fixos e arbitrários.

Para obter todas as possíveis transformações lineares do plano basta deixar a, b, c, d percorrer todos os valores de $\mathbf{R}$ em $T(x, y) = (ax + by, cx + dy), \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$.

O conjunto de todas as trasformações lineares do plano munido da operação composição é um monóide. Mostra-se que a composição de duas transformações lineares é uma transformação linear. A composição é uma operação associativa. A transformação linear $I(x, y) = (x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$ é o elemento identidade do conjunto. O tal monóide não é grupo, porque nele existem elementos não inversíveis. Por exemplo, $T(x, y) = (0, 0)$ $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$ é a transformação linear que leva todos os pares $(x, y) \in R^2$ na origem, não bijetora e, portanto, não inversível.

Já o conjunto de todas as transformações lineares inversíveis, simbolizado por

$L_2(\mathbf{R}) = \{T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \,|\, T \text{ é linear e inversível }\} = \{T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \,|\, T(x, y) = (ax + by, cx + dy),\ a, b, c, d \in \mathbf{R};\ ad - bc \neq 0\}$ com a operação composição $(\circ)$ é um grupo, pois se T é uma transformação linear inversível a sua inversa também é linear. Este grupo (infinito) é chamado de grupo linear.

Há um teorema na álgebra linear que garante a existência de uma correspondência biunívoca entre as transformações lineares $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ e as matrizes quadradas de ordem 2 com elementos em $\mathbf{R}$. Conseqüentemente, existe um isomorfismo entre os espaços vetoriais $L_2(\mathbf{R})$ e $G_2(\mathbf{R})$ e, também, um isomorfismo entre grupos, o grupo linear $L_2(\mathbf{R})$ e o grupo $G_2(\mathbf{R})$ que associa cada transformação linear $T \in L_2(\mathbf{R})$ a matriz $A \in G_2(\mathbf{R})$ a ela correspondente.

Os grupos de homotetias

As deformações não preservam distâncias no plano e são chamadas homotetias.

A homotetia é uma transformação linear que transforma o plano em si mesmo por uma distensão ou uma contração, definida por

$T_k(x, y) = (kx, ky)$ para todo $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $k \in \mathbf{R}$, $k \neq 0$.

O conjunto de todas as homotetias do plano é obtido variando-se o valor de $k \neq 0$ no conjunto $\mathbf{R}$ dos números reais. O tal conjunto munido da operação composição forma um grupo (infinito).

O elemento identidade do grupo é a transformação identidade ($k = 1$) que deixa todos os pontos (ou vetores) do plano fixos. Para cada valor de $k \neq 0$ tem-se a transformação T_k inversível cuja inversa é a transformação $T_{\frac{1}{k}}$. Se $k > 1$ então T_k é uma distensão, uma transformação que alonga todos os vetores (pontos) do plano, e sua inversa é uma contração, isto é, contrai todos os vetores (pontos) do plano. Ou seja, para cada valor de k fixado, as distensões e contrações são inversas uma da outra.

Os grupos de isometrias

Existe um tipo de transformação no plano que, diferentemente das deformações, preservam distâncias entre dois pontos do plano que são chamadas de isometrias.

Definição D.2.4 *Uma isometria do plano é uma aplicação injetiva tal que se o ponto P é aplicado em P' e o ponto Q é aplicado em Q', então, a distância de P a Q é igual a distância de P' a Q' quaisquer que sejam os pontos P e Q.*

Como decorrência desta definição, tem-se que as isometrias levam retas em retas, em particular, retas paralelas em retas paralelas. As isometrias também são chamadas de transformações congruentes ou movimentos rígidos. Realizar um movimento rígido no plano significa deslocar todo o plano como uma unidade rígida. Os deslocamentos (rotações, reflexões e translações) são exemplos de isometrias.

As rotações do plano

Definição D.2.5 *A rotação é um movimento do plano, realizado em torno de um ponto w, segundo um ângulo θ, θ e w previamente fixados. Se $w = (a, b) \in \mathbf{R}^2$, a rotação é uma função que gira todo ponto $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, em torno w, segundo um ângulo θ, $0 \leq \theta < 2\pi$, no sentido anti-horário, dada pela expressão*
$R_{(w,\theta)(x,y)} = [(x-a)cos\theta - (y-b)sen\theta + a, (x-a)sen\theta + (y-b)cos\theta + b]$, $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Se w é a origem, a expressão da função rotação reduz-se à
$R_{(0,\theta)(x,y)} = (xcos\theta - ysen\theta, xsen\theta + ycos\theta)$, $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$. Esta função rotaciona/gira tdoos os pontos do plano em torno da origem, no sentido anti-horário, através do ângulo $\theta, 0 \leq \theta < 2\pi$, ou seja, desloca/move cada ponto do plano representado por um par ordenado $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ao redor do círculo, centrado na origem, que passa pelo ponto (x, y).

O conjunto de todas as rotações do plano em torno de um ponto w fixado, é obtido variando-se o valor de θ no conjunto $\mathbf{R}$ dos números reais, o conjunto $\{R_{(w,\theta)} | \theta \in \mathbf{R}\}$, munido da operação composição de funções é um grupo (infinito).

De fato, se $R_{(w,\theta)}$ e $R_{(w,\beta)}$ são duas rotações em torno do ponto w de um ângulo θ e β, respectivamente, então a composição $R_{(w,\theta)} \circ R_{(w,\beta)} = R_{(w,\theta+\beta)}$ é a rotação de um ângulo $\theta + \beta$ que também fixa o ponto w. Ou seja, a composição de duas rotações em torno de w é uma rotação em torno de w, o que garante que o conjunto de todas as rotações de $\mathbf{R}^2$ em torno de um ponto w é fechado sob a operação composição. A operação composição é associativa. O elemento identidade é a transformação identidade de $\mathbf{R}^2$ e a inversa de uma rotação $R_{(w,\theta)}$ é a rotação $R_{(w,2\pi-\theta)}$.

Em particular, o conjunto de todas as rotações do plano em torno da origem com a operação composição é também um grupo (infinito).

As reflexões do plano

Definição D.2.6 *A reflexão é um movimento do plano que envolve uma reta e um ângulo, fixados a priori. Se l é uma reta que passa pela origem e faz um ângulo α com o eixo dos*

x, a reflexão é uma função que reflete todo ponto $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ em relação à l por meio da expressão

$$R_l(x, y) = (xcos2\alpha + ysen2\alpha, xsen2\alpha - ycos2\alpha),\ \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Se $\alpha = 0$ a reflexão é feita em torno do eixo dos x e dada por $R_{0x}(x, y) = (x, -y)$, $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$; se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ a reflexão é realizada em torno do eixo dos y dada por

$$R_{0y}(x, y) = (-x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

A composição de duas reflexões não é uma reflexão. Quando se combinam duas reflexões, obtém-se uma rotação ou uma translação. A composição da reflexão R_r em torno da reta r com a reflexão R_s em torno da reta s dá como resultado: uma translação se, e somente se, as retas r e s são paralelas; uma rotação em torno do ponto de interseção se, e somente se, as retas r e s se interceptam. Em conseqüencia disso, não se pode ter nenhuma estrutura no conjunto das reflexões do plano.

As translações do plano

Uma outra espécie de transformação do plano é a translação. Esta envolve um vetor fixo.

Definição D.2.7 *A translação é uma função que desloca todos os pontos $(x, y) \in R^2$, segundo a direção de um vetor fixo $v = (a, b) \in R^2$ e de uma distância igual ao comprimento desse vetor, dada pela expressão $T_v(x, y) = (x + a, y + b)$, $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$.*

Um caso particular da translação é a translação paralela, que pode ser na horizontal ou na vertical. Na translação horizontal (paralela ao eixo dos x) cada par (x, y) é movido na direção do vetor fixo $v = (a, 0) \in \mathbf{R}^2$, ou seja, $T_v(x, y) = (x + a, y)$ para todos $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. A translação vertical (paralela ao eixo dos y) é a função $T_u(x, y) = (x, y + b)$ para todos $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ e $u = (0, b) \in \mathbf{R}^2$ fixo.

A composição de duas translações é uma translação. De fato, se T_v é uma translação na direção do vetor $v \in \mathbf{R}^2$ e T_u é uma translação na direção do vetor $u \in \mathbf{R}^2$, então $T_v \circ T_u$ é a translação na direção do vetor $u + v$, isto é, $T_v \circ T_u = T_{u+v}$. Conseqüentemente, o conjunto de todas as translações do plano $T_2(\mathbf{R})$ é fechado sob a operação composição.

A operação é associativa. A transformação identidade ($a = b = 0$) que fixa todos os pontos é uma translação. A inversa de uma translação é também uma translação, pois se $T(x, y) = (x + a, y + b)$, $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $T^{-1}(x, y) = (x - a, y - b)$, $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$. Então, o conjunto $T_2(\mathbf{R})$ de todas as translações do plano com a operação composição é um grupo.

O conjunto de todas as isometrias do plano (rotações, reflexões e translações) com a operação composição de funções tem estrutura de grupo, chamado de grupo euclidiano.

O grupo afim

Se uma transformação linear é seguida de uma translação o resultado é uma transformação chamada de transformação afim que, em geral, não é linear.

Por exemplo, se a transformação linear $T(x, y) = (ax + by, cx + dy), \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, a, b, c, d números reais fixos e arbitrários, é seguida de uma translação na direção de um vetor fixo $v = (h, k) \in \mathbf{R}^2$, $T_v(x, y) = (x + h, y + k)$ para todos $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, o resultado é a transformação afim dada por $A(x, y) = (mx + ny + t, rx + sy + l)$ para todos $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $m, n, t, r, s, l \in \mathbf{R}$ fixos e arbitrários.

O conjunto das transformações afim inversíveis, denotado por $A_2(\mathbf{R})$, munido da operação composição forma um grupo, chamado grupo afim. Este contém como subgrupos (ver apêndice E) o grupo linear $L_2(\mathbf{R})$ e o grupo de translações $T_2(\mathbf{R})$.

O grupo de semelhanças

Uma similaridade é uma transformação injetora do plano que muda a distância entre dois quaisquer pares de pontos do plano em uma razão fixada. Ou seja, se a transformação aplica os pontos u e v nos pontos u' e v', então $|u' - v'| = k|u - v|$ para algum $k > 0$ fixado.

Se $k = 1$ a transformação é uma isometria.

Se uma homotetia $T(x, y) = (tx, ty), t \in \mathbf{R}, t \neq 0$, é seguida de uma translação na direção do vetor $v = (h, k) \in \mathbf{R}^2$, $T_v(x, y) = (x + h, y + k)$, $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, o resultado é a semelhança $S(x, y) = (tx + h, ty + k)$, $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$. Geometricamente, cada semelhança toma um vetor do plano, o contrai ou alonga e depois o desloca. O conjunto de todas as semelhanças $S(x, y) = \{(ax + b, cy + d) \,|\, a, b, c, d \in \mathbf{R}\}$ munido da operação composição também forma um grupo.

Foi visto nos estudos realizados por Klein e Lie o quão os grupos de transformações foram e são importantes na formação do conceito de grupo pelo sujeito. No entanto, a abordagem destes grupos constantes nos livros de álgebra, quase sempre, induzem o estudante a, atribuir-lhe um significado puramente abstrato, ou a vê-los, apenas, como pretexto para a existência de um problema a ser solucionado, ou vê-los como um jogo.

D.2.4 Os grupos diedrais

Foi visto que as isometrias (rotação, reflexão e translação) são funções bijetoras definidas em todo o plano. Para a construção dos grupos diedrais considera-se as isometrias definidas em subconjuntos próprios do plano, em especial, subconjuntos do plano que formam figuras geométricas. Assim, se pode pensar em isometrias aplicadas às figuras planas tais como círculos, triângulos, quadrados, ... Além disso, não se tem interesse na ação da isometria em todos os pontos da figura, mas apenas em alguns pontos especiais. Deseja-se, ainda, que a figura sob a ação da isometria não mude de posição, ou seja, que a figura permaneça a mesma, embora cada ponto da figura mude de posição. As isometrias que têm essa propriedade são chamadas de simetrias.

Por um lado, se quer figuras que tenham simetria, figuras que sob a ação de uma isometria não sejam modificadas. Por outro, deseja-se isometrias que satisfaçam esta condição quando aplicadas a certas figuras. Por exemplo, se aplicarmos qualquer isometria diferente da identidade (por exemplo, uma rotação de um ângulo $\theta \neq 2k\pi$) a um triângulo que não seja eqüilátero, o triângulo não vai mudar de forma, mas mudará de posição. O mesmo acontece ao se aplicar uma translação na direção de um vetor $v \neq 0$ a um triângulo eqüilátero.

Assim, para se obter as simetrias das figuras que a fazem coincidir consigo mesma, é preciso escolher as figuras e as isometrias adequadas. No caso, se pode escolher as rotações e reflexões aplicadas aos n-ágonos, que são figuras de n-lados e n-ângulos iguais (triângulo eqüilátero, quadrado, pentágono, hexágono,...). Está é uma situação bem específica e, até certo ponto, ideal.

O grupo Diedral D_n é o grupo das simetrias de um n-ágono (polígono regular de n lados). Para a construção de tais grupos interessa, apenas, a ação das simetrias nos n vértices do n-ágono. Sabe-se que as simetrias que deixam essas figuras na mesma são as rotações e as reflexões. O grupo diedral D_n de ordem $2n$ é formado pelas n rotações R_0, $R_{\frac{2\pi}{n}}$, $R_{2\frac{2\pi}{n}}$, $R_{3\frac{2\pi}{n}}$,..., $R_{(n-1)\frac{2\pi}{n}}$ e pelas n reflexões R_{v_i} em torno das retas que passam pelo vértice v_i e pelo ponto médio do lado oposto ao dito vértice, $1 \leq i \leq n$.

Outra forma de apresentar os grupos diedrais

Como o diedral é constituído de transformações lineares (rotações e reflexões) do plano e cada transformação linerar pode ser associada a sua matriz, no caso uma matriz quadrada de ordem 2, então a rotação de um ângulo $\theta = \frac{2\pi}{n}$ em torno da origem é representada pela matriz $A = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$, e a reflexão em torno do eixo dos x é representada pela matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Mostra-se que $A^n = I$ e que $B^2 = I$, ou seja, que os elementos A e B têm ordem n e 2, respectivamente. Fazendo $N =< A >$ e $H =< B >$ tem-se outra forma de escrever o grupo D_n:
$D_n = NH =< AB >= \{I, A, A^2, A^3, ..., A^{n-1}, B, BA, BA^2, BA^3, ..., BA^{n-1}\}$ uma vez que $N \cap H = \{I\}$, I a matriz identidade de ordem 2. Assim, o grupo Diedral D_n é um produto de dois de seus subgrupos.

Usando o teorema que estabelece uma relação aritmética entre a ordem dos quatro subgrupos N, H, $NH = HN$ e $N \cap H$ de um grupo qualquer G, a saber: $|NH| = \frac{|N||H|}{|N \cap H|}$, mostra-se que a ordem de D_n é $2n$. Esta apresentação encobre o significado associado ao grupo Diedral.

D.2.5 O grupo dos Quatérnios

Sabe-se que o $\mathbf{R}^4$ com a operação adição de 4-uplas, ou seja, $(a, b, c, d)+(a', b', c', d') = (a + a', b + b', c + c', d + d')$ tem estrutura de grupo. Entretanto, mudando a operação obtém-se no R^4 uma outra estrutura de grupo.

De fato, o par $(\mathbf{R}^4, \odot)$ tem estrutura de grupo em que $(a, b, c, d) \odot (a', b', c', d') =$

$(aa' - bb' - cc' - dd', ab' + ba' + cd' - c'd, ac' + a'c + db' - d'b, ad' + da' + bc' - b'c)$ para quaisquer (a, b, c, d) e (a', b', c', d') elementos de $\mathbf{R}^4$.

Após alguns cálculos vê-se que a operação $\odot$ é associativa. Vê-se, também, que $(1, 0, 0, 0)$ é o elemento identidade do $\mathbf{R}^4$ segundo a operação $\cdot$ e, para cada elemento não nulo $x = (a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ existe $y = \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}(a, -b, -c, -d) \in R^4$ tal que $x \odot y = y \odot x = (1, 0, 0, 0)$, ou seja, y é o inverso de x.

Para obter o grupo dos Quatérnios, faz-se as identificações dos elementos $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$ de R^4 com os símbolos 1, i, j e k, respectivamente, isto é,

$(1, 0, 0, 0) \leftrightarrow 1$,

$(0, 1, 0, 0) \leftrightarrow i$,

$(0, 1, 0, 0) \leftrightarrow j$,

$(0, 0, 0, 1) \leftrightarrow k$, mais geralmente, $a + bi + cj + dk \leftrightarrow (a, b, c, d)$.

Com estas identificações, tem-se que o par $(\mathbf{R}^4, \odot)$ pode ser representado pelo par $(Quat, \odot)$ com $Quat = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbf{R}\}$. Além disso, a operação $\odot$ restrita ao subconjunto $Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ lhe dá uma estrutura de grupo, chamado grupo dos Quatérnios. A tal operação em Q_8 está sintetizada na TABELA dada abaixo.

$\odot$	1	i	j	k	-1	$-i$	$-j$	$-k$
1	1	i	j	k	-1	$-i$	$-j$	$-k$
i	i	-1	k	$-j$	$-i$	1	$-k$	j
j	j	$-k$	-1	i	$-j$	k	1	$-i$
k	k	j	$-i$	-1	$-k$	$-j$	i	1
-1	-1	$-i$	$-j$	$-k$	1	i	j	k
$-i$	$-i$	1	$-k$	j	i	-1	k	$-j$
$-j$	$-j$	k	1	$-i$	j	$-k$	-1	i
$-k$	$-k$	$-j$	i	1	k	j	$-i$	1

Tabela D.1: Da operação do grupo $Q_8 = \{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}$

Outra representação para este grupo é $Q_8 =< x, y \mid x^4 = e,\, y^4 = e,\, x^2 = y^2,\, x^{-1}yx = y^{-1} >$.

D.2.6 Os grupos dos inteiros módulo n

As raízes destes grupos, os grupos das classes residuais de inteiros módulo n, estão nas investigações realizadas por Euler e Gauss sobre as congruências residuais.

No conjunto $\mathbf{Z}$ dos inteiros relativos define-se uma relação de equivalência - a relação de congruência módulo n - que também pode ser enunciada/referida por: 'deixar o mesmo resto na divisão por n', 'ter o mesmo resto módulo n', 'ser côngruo módulo n'. Para um qualquer inteiro n esta relação está definida, formalmente, da seguinte forma:

Definição D.2.8 *Seja $\mathbf{Z}$ o conjunto dos números inteiros relativos e $n > 0$ um número inteiro fixo. Dois inteiros $x, y \in \mathbf{Z}$ diz-se conguentes módulo n se n divide a diferença $x - y$ em $\mathbf{Z}$.*

Indica-se tal relação pelo símbolo $\equiv$. Assim $x \equiv y\,(mod\,n)$ se, e somente se, $n|(x-y)$, ou equivalentemente, se existe um inteiro q tal que $x = y + nq$.

A classe de equivalência do elemento $x \in \mathbf{Z}$, indicada por $\bar{x}$, é dada por
$\bar{x} = \{y \in \mathbf{Z} \,|\, n \text{ divide } y - x\} = \{y \in \mathbf{Z} \,|\, y = x + tn, t \in \mathbf{Z}\}$. Desta forma, a classe de x é constituída de todos os inteiros que quando divididos por n deixam resto x, por isso ela é também chamada classe residual módulo n. O conjunto-quociente de $\mathbf{Z}$ pela relação de congruência módulo n é indicado por $\mathbf{Z}/\equiv$ ou $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

O conjunto-quociente $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, obtido de $\mathbf{Z}$ pela relação de congruência módulo n, possui n classes residuais distintas. Dado um qualquer número inteiro $t \in \mathbf{Z}$, dividindo t por n, pelo algorítmo da divisão sabe-se que existem q e r (únicos) tais que $t = qn + r$ onde $0 \leq r < n$. Isto significa que a classe de t é igual a classe de r. Como $r \in \{0, 1, 2, 3, ..., n-1\}$ tem-se, apenas, n classes de equivalência.

A adição em $\mathbf{Z}$ induz uma operação adição no conjunto-quociente, denominada adição módulo n, dada pela relação: $\bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{a+b}$ para todos $a, b \in \mathbf{Z}$. O conjunto $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ com a operação adição é um grupo cíclico de ordem n, o grupo aditivo dos inteiros módulo n, indicado por $\mathbf{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, ..., \overline{n-1}\}$.

Para o caso particular em que $n = 3$, tem-se que, dado um qualquer número r no conjunto $\mathbf{Z}$, o resto da divisão de r por 3 pode ser igual a 0, 1 ou 2.

Por exemplo, todos os inteiros que divididos por 3 deixam resto zero são múltiplos de 3. São os elementos do conjunto (classe) $\{..., -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, ...\} = \{3n \,|\, n \in \mathbf{Z}\}$ que será indicado por $\bar{0}$.

Todos os inteiros que divididos por 3 deixam resto 1 são inteiros do tipo uma unidade mais um inteiro múltiplo de 3. Estes inteiros pertencem ao conjunto (classe) $\{..., -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, ...\} = \{3n + 1 \,|\, n \in \mathbf{Z}\}$, que será indicado por $\bar{1}$.

Finalmente, os demais inteiros do conjunto $\mathbf{Z}$ são aqueles que divididos por 3 deixam resto 2 e são inteiros do tipo duas unidades mais um inteiro múltiplo de 3. Estes constituem o conjunto (classe) $\{..., -10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, ...\} = \{3n+2 \,|\, n \in \mathbf{Z}\}$, que será indicado por $\bar{2}$.

Tem-se, portanto, uma partição do conjunto $\mathbf{Z}$, ou seja, $\mathbf{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2}$. Estas classes formam o grupo $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ munido da operação $\oplus$ definida antes e refletida na TABELA.

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Tabela D.2: Da operação do grupo $\mathbf{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

A multiplicação em $\mathbf{Z}$ também induz uma operação multiplicação no conjunto-quociente, denominada multiplicação módulo p, dada pela relação: $\bar{a} \bullet \bar{b} = \overline{a \cdot b}$ para todos $a, b \in \mathbf{Z}$. O conjunto $\mathbf{Z}_p - \{\bar{0}\} = \{\bar{1}, \bar{2}, ..., \overline{p-1}\}$, p um número inteiro positivo primo, com a operação $\bullet$ é um grupo, o grupo multiplicativo dos inteiros módulo p.

Apêndice E

Outros conceitos da Teoria dos Grupos

Além do que já foi discutido sobre o campo conceitual de grupo no capítulo 5 e nos dois últimos apêndices, para o tratamento das situações envolvendo o conceito de grupo outros conceitos são necessários. São eles:

Subgrupo

Um dos conceitos que ajuda muito na formação do conceito de grupo é o de subgrupo. Assim como a formação do conceito de conjunto é auxiliada com o estudo de subconjuntos, o conceito de grupo é ajudado pelo de subgrupo. Um subgrupo não é um subconjunto qualquer do grupo, trata-se de um subconjunto com algumas propriedades algébricas que derivam das do grupo.

Além do papel básico de ajudar na formação do conceito de grupo, o estudo de subgrupos de um grupo tem outras finalidades. Proporciona o surgimento de outros grupos e auxilia no reconhecimento da estrutura interna dos grupos.

Mesmo antes de se estudar subgrupos, o estudante nota que existem grupos que estão contidos em outros grupos. Por exemplo, o grupo $(\mathbf{Z}, +)$ está contido no grupo $(\mathbf{Q}, +)$ e este por sua vez está contido em $(\mathbf{R}, +)$. Se diz que $(\mathbf{Z}, +)$ é um subgrupo de $(\mathbf{Q}, +)$ e de $(\mathbf{R}, +)$, que $(\mathbf{Q}, +)$ é um subgrupo de $(\mathbf{R}, +)$. Quando se diz isso é preciso ficar claro que a adição de inteiros m e n como elementos de $(\mathbf{Z}, +)$ produz o mesmo elemento $n + m$ quando m e n são vistos em $(\mathbf{Q}, +)$ ou em $(\mathbf{R}, +)$.

De uma maneira bem simples, diz-se que H é um subgrupo de um grupo G se $H \subseteq G$ como conjunto e, além disso, H é também um grupo segundo a operação do grupo G.

Desta forma, alguns exemplos de subgrupos são facilmente obtidos. De fato, foi visto que o par

• $(P, +)$ é um grupo e como $P \subset \mathbf{Z}$ então $(P, +)$ é um subgrupo do grupo aditivo $(\mathbf{Z}, +)$;

• $(n\mathbf{Z}, +)$ é um grupo e como $n\mathbf{Z} \subset \mathbf{Z}$ então $(n\mathbf{Z}, +)$ é um subgrupo do grupo $(\mathbf{Z}, +)$;

• $(GL_n(\mathbf{R}), \cdot)$ é um grupo e como $GL_n(\mathbf{R}) \subset M_n(\mathbf{R})$, então $(GL_n(\mathbf{R}), \cdot)$ é um subgrupo de $(M_n(\mathbf{R}), \cdot)$;

• $(\{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}, \cdot)$ é um grupo e como $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbf{C}$ então é subgrupo do grupo $(\mathbf{C}^*, \cdot)$;

• $(\{z \in \mathbf{C} \mid z^n = 1\}, \cdot)$ é grupo e como $\{z \in \mathbf{C} \mid z^n = 1\} \subset \mathbf{C}$ então é um subgrupo do grupo $(\mathbf{C} - \{0\}, \cdot)$.

Há uma forma equivalente a essa de se dizer o que é um subgrupo H de um grupo G.

Seja $(G, *)$ um grupo e H um subconjunto não vazio do conjunto. Se para todo $a, b \in H$, o elemento $a * b$ computado em G for também um elemento de H, então a operação $*$ definida sobre G é uma operação em H - é a operação de G restrita à H.

Definição E.0.9 *Seja $(G, *)$ um grupo e H um subconjunto não vazio do conjunto G. O par $(H, *)$ é um subgrupo do grupo $(G, *)$ se, e somente se, $(H, *)$ é também um grupo. Tal fato é representado pelo símbolo $H < G$ ou por $H \leq G$.*

Todo grupo $(G, *)$ em que o conjunto G tem mais de um elemento admite pelo menos dois subgrupos: o próprio grupo $(G, *)$ e $(\{e\}, *)$ denominados subgrupos triviais ou subgrupos impróprios. Os demais subgrupos de $(G, *)$, se existirem, são chamados de subgrupos próprios.

Quando se diz que H é um subgrupo de um grupo G, há detalhes muito sutis que precisam ser observados. São eles:

a) A operação do subgrupo H é a mesma do grupo G, $(H, *) \leq (G, *)$;

b) $(G, *)$ e $(H, *)$ possuem o mesmo elemento identidade;

c) O inverso do elemento x em $(H, *)$ é o mesmo inverso de x vendo-o como um elemento de $(G, *)$.

Há um critério, decorrente da definição, para se avaliar quando um subconjunto de H de um grupo G é um grupo é ou não um subgrupo.

Teorema E.0.10 *Um subconjunto não vazio H de um grupo G é um subgrupo de $(G,*)$ se, e somente se:*
1. Para todos $a, b \in H$, $a * b \in H$;
2. Para todo $a \in H$ é verdade que $a^{-1} \in H$.

Mostra-se que a interseção de um número qualquer de subgrupos de um grupo G é, também, um subgrupo de G. Em linguagem matemática simbólica, tem-se:

Teorema E.0.11 *Seja $\{H_i,\, i \in I\}$ uma família de subgrupos de um grupo G. A interseção $\bigcap_{i\in I} H_i = \{x \,|\, x \in H_i,\, \forall i \in I\}$ é um subgrupo de G.*

Subgrupos gerados por um subconjunto de um grupo

Definição E.0.12 *Seja G um grupo e seja A um subconjunto não vazio de G. O subgrupo de G gerado pelo conjunto A é definido pela interseção de todos os subgrupos H de G que contém o conjunto A. Em símbolos escreve-se $< A >= \bigcap\{H \,|\, H \leq G, A \subseteq H\}$.*

Se o subgrupo $< A >= G$ diz-se que o grupo G é gerado pelo conjunto A. Se o conjunto A é finito, diz-se que o grupo G é finitamente gerado.

Subgrupos cíclicos

Um subgrupo H de G que contém o elemento $a \in G$ deve conter também a^2, a^3, ... a^{-1}, a^{-2}, a^{-3},... Em geral, para todo inteiro positivo n ele deve conter $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ vezes}}$ usando a notação multiplicativa, ou $na = \underbrace{a + a + a \cdots a}_{n \text{ vezes}}$ na notação aditiva ou $(*a)^n = \underbrace{a * a * a \cdots * a}_{n \text{ vezes}}$ para uma operação $*$ qualquer e também a^{-n} para todo inteiro postivo n.

O conjunto de todas as potências inteiras de $a \in G$ é representado por $\{a^n \,|\, n \in \mathbf{Z}\}$(na notação multiplicativa), $\{na \,|\, n \in \mathbf{Z}\}$ (na notação aditiva), $\{(*a)^n \,|\, n \in \}$ para uma qualquer operação $*$. O tal conjunto é um subgrupo de G e é o menor subgrupo de G que contém o elemento a, chamado subgrupo ciclíco de G gerado por a e denotado por

$< a >$. Em geral, usa-se a notação multiplicativa $(a \cdot b)$ ou simplesmente a justaposição dos elementos (ab). No que segue onde aparecer a justaposição dos elementos indica a operação entre eles.

Se existir algum $a \in G$ para o qual $< a >= G$, então G é um grupo cíclico.

Por exemplo, o grupo $(G, \cdot)$ é cíclico, $G = \{1, -1, i, -i\} =< i >=< -i >$.

Seja G um grupo com elemento identidade e e a um elemento de G $(a \in G)$. A ordem (ou período) do elemento a, indicada por $o(a)$ ou por $|a|$, é o menor inteiro positivo n tal que $a^n = e$. Se não existe um tal inteiro então a ordem de a é infinita. A ordem do subgrupo cíclico gerado por a é igual a ordem do elemento a.

Sobre a relação de equivalência associada a um subgrupo de um grupo

Já foi visto um exemplo de relação de equivalência no grupo aditivo dos números inteiros relativos. Esse exemplo é um caso particular da relação de equivalência definida em um grupo.

Definição E.0.13 *Seja G um grupo e H um subgrupo de G. Dados $a, b \in G$, diz-se que $a \equiv_e b \,(mod\, H)$ se, e somente se, $a^{-1} \cdot b \in H$. Em símbolos, $a \equiv_e b \,(mod\, H) \Leftrightarrow a^{-1} \cdot b \in H$.*

A relação $a \equiv_e b \,(mod\, H)$ definida em G é uma relação de equivalência. A classe de equivalência de cada $a \in G$ é definida por $\{b \in G \,|\, a \equiv_e b \,(mod\, H)\} = \{a \cdot h \,|\, h \in H\} = aH$. Como $a^{-1} \cdot b \in H$, então existe $h \in H$ tal que $a^{-1} \cdot b = h$, logo $b = a \cdot h$. aH é chamada de classe lateral à esquerda de H em G. Quando a operação for aditiva, a classe lateral à esquerda é indicada por $a + H$.

De modo análogo, pode-se definir uma outra relação de equivalência em G.

Definição E.0.14 *Seja G um grupo e H um subgrupo de G. Dados $a, b \in G$, diz-se que $a \equiv_d b \,(mod\, H)$ se, e somente se, $a \cdot b^{-1} \in H$. Em símbolos, $a \equiv_d b \,(mod\, H) \Leftrightarrow a \cdot b^{-1} \in H$.*

A relação $a \equiv_d b \,(mod\, H)$ definida em G é de equivalência. Para cada $a \in G$ a classe de a é definida por $\{h \cdot a \,|\, h \in H\}$. De fato, como $a \cdot b^{-1} \in H$, existe $h \in H$ tal que $a \cdot b^{-1} = h$, logo $b^{-1} = h \cdot a^{-1}$ e $b = (a^{-1} \cdot h)^{-1} = h^{-1} \cdot a$. Assim, $\{h^{-1} \cdot a \,|\, h \in H\} = Ha$ e é chamada de classe lateral à direita de H em G. No caso da operação ser aditiva a classe lateral à direita é indicada por $H + a$.

Mostra-se que para cada $a \in G$ a cardinalidade das classes aH e Ha é igual a cardinalidade de H. Além disso, denotando o conjunto das classes laterais à esquerda por $G/\equiv_e = \{aH \mid a \in G\}$ e o conjunto das classes laterais à direita por $G/\equiv_d = \{Ha \mid a \in G\}$, mostra-se que existe uma bijeção entre $G/\equiv_e$ e $G/\equiv_d$.

Índice de um subgrupo

Definição E.0.15 *Seja H um subgrupo de um grupo finito G. A cardinalidade do conjunto das classes laterais à direita (ou das classes laterais à esquerda) chama-se índice de H em G e é indicado por $[G : H]$.*

Com os conceitos de classe lateral, de cardinalidade, de divisibilidade em N, de ordem de um grupo e de um subgrupo, pode-se demonstrar um teorema muito importante e que introduz relações aritméticas na teoria dos grupos finitos. Ei-lo:

Teorema E.0.16 *(Lagrange) Seja $(G, *)$ um grupo finito e $(H, *)$ um subgrupo de $(G, *)$. Então a ordem de H divide a ordem de G.*

Da demonstração do teorema de Lagrange obtém-se que $[G : H] = \frac{|G|}{|H|}$, uma importante igualdade na solução de problemas envolvendo a ordem de grupos.

Consequências do teorema de Lagrange

1. A ordem de um elemento a qualquer de um grupo finito G divide a ordem do grupo;
2. Se G é um grupo finito e $a \in G$, então $a^{|G|} = e$, e o elemento identidade de G;
3. Todo grupo de ordem p, p um número primo, é cíclico;
4. Se G é um grupo de ordem n, $n \leq 5$, então G é abeliano.

Produto direto externo

O produto direto externo entre grupos possiblita a construção de grupos novos a partir de grupos já conhecidos.

Dados dois grupos $(G, *)$ e $(G', \circ)$, define-se no conjunto $G \times G' = \{(a, x) \mid a \in G,\ x \in G'\}$ uma operação binária da seguinte forma:

para quaisquer $(a,x),(b,y) \in G \times G'$, $(a,x) \otimes (b,y) = (a * b, x \circ y)$.

Mostra-se que o par $(G \times G', \otimes)$ é um grupo, chamado de produto direto externo dos grupos G e G'.

Por exemplo o produto direto de $\mathbf{Z}_2$ por $\mathbf{Z}_2$ é o grupo $(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1})\}, \otimes)$ em que $(\bar{a},\bar{x}) \oplus (\bar{b},\bar{y}) = (\overline{a+b}, \overline{x+y})$, $\forall a,b,x,y \in \mathbf{Z}_2$.

De modo análogo, define-se uma operação no produto de n grupos $G_1, G_2, ..., G_n$ e obtém-se o produto direto externo dos n grupos.

Produto direto interno de subgrupos

Viu-se que, se H é subgrupo de um grupo G e $a \in G$, então Ha consiste de todos os elementos de G que são da forma ha com $h \in H$. Essa noção pode ser generalizada. Se H e K são dois subgrupos do grupo G, considere o conjunto $HK = \{h \cdot k \mid h \in H,\ k \in K\}$.

O conjunto HK pode ser diferente de KH. O conjunto HK nem sempre é um subgrupo de G, ou seja, a operação de G restrita ao conjunto HK nem sempre lhe dá uma estrutura de grupo. Entretanto, há um resultado que afirma o seguinte: o produto HK é um subgrupo de G se, e somente se, $HK = KH$. O conjunto HK é chamado de produto direto interno dos subgrupos H e K.

Quando o grupo G é comutativo (abeliano) então $HK = KH$ sempre e, portanto, HK é um subgrupo de G.

Quando se faz o produto HK pode ocorrer elementos repetidos, ou seja, pode ser que $hk = h'k'$ com $h \neq h'$ e $k \neq k'$. Então, qual é a cardinalidade do conjunto HK? Há um resultado que responde a esta pergunta:

Teorema E.0.17 *Se H e K são subgrupos de um grupo finito G, então $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$.*

Subgrupo normal e grupo-quociente

Pode-se tomar em um mesmo grupo G dois de seus subgrupos, um subgrupo H e um subgrupo K tal que $Ha \neq aH$ e que $aK = Ka$ para $a \in G$.

Isto significa que para alguns subgrupos de um grupo a classe lateral à direita coincide com a classe lateral à esquerda e para outros não. Foi Galois quem primeiro percebeu que os subgrupos de um grupo para os quais as classes laterais à esqueda e à direita coincidem têm um papel importantíssimo. Os subgrupos que têm essa propriedade são chamados de subgrupos normais. O que decorre da igualdade $aH = Ha$ para todo $a \in G$?

Se $aH = Ha$ para todo $a \in G$, então para qualquer elemento $ah \in aH$ existe um elemento $h'a \in Ha$ tal que $ah = h'a$. Logo $h = a^{-1}h'a$ e $a^{-1}h'a \in H$ para todo $a \in G$ e $h' \in H$.

Definição E.0.18 *Um subgrupo N*[1] *de um grupo G é dito um subgrupo normal de G se, e somente se, $a^{-1}na \in N$ para todo $a \in G$ e todo $n \in N$.*

Para cada $g \in G$ define-se o conjunto $g^{-1}Ng = \{g^{-1}ng \,|\, n \in N\}$. Como $a^{-1}na \in N$ para todo $a \in G$ e todo $n \in N$ então $g^{-1}Ng \subset N$.

Existem diferentes resultados (que são equivalentes) que garantem quando um subgrupo de um grupo é um subgrupo normal. A saber:

Lema E.0.19 *Seja N um subgrupo de um grupo G. N é um subgrupo normal de G se, e somente se, $g^{-1}Ng = N$ para todo $g \in G$.*

Lema E.0.20 *Seja N um subgrupo de um grupo G. N é um subgrupo normal de G se, e somente se, toda classe lateral à esquerda de N em G é uma classe lateral à direita de N em G.*

Lema E.0.21 *Seja N um subgrupo de um grupo G. N é um subgrupo normal de G se, e somente se, o produto de duas classes laterais à direita de N em G é também uma classe lateral à direita de N em G.*

Para qualquer subgrupo H de um grupo comutativo G, as classes laterais aH e Ha são iguais para todo $a \in G$, conseqüentemente, H é um subgrupo normal.

Seja N um subgrupo normal do grupo G. A operação de G induz uma operação em G/H da seguinte maneira: dados $Na, Nb \in G/N$, $Na \cdot Nb = Nab \in G/H$, $a, b \in G$.

[1] Em geral usa-se a letra N para representar um subgrupo normal de um grupo G.

Teorema E.0.22 *Seja N um subgrupo normal do grupo G. A operação $Na, Nb \in G/N$, $Na \cdot Nb = Nab \in G/H$, $a, b \in G$ dá ao conjunto G/N uma estrutura de grupo, chamado grupo-quociente de N em G.*

Um exemplo clássico de grupo-quociente é o grupo $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ com a operação adição, já apresentado no apêndice D, obtido via relação de equivalência do grupo $(\mathbf{Z}, +)$ módulo $(n\mathbf{Z}, +)$ subgrupo de $(\mathbf{Z}, +)$. Os grupos-quociente obtidos são estruturas menores em termos de ordem. Neste caso tem-se o quociente de dois grupos infinitos dando um grupo de ordem n.

A relação conjugação e a equação das classes

Com a relação de equivalência no grupo associada a um subgrupo foi introduzido um princípio de contagem na teoria de grupo, sintetizado pelo teorema de Lagrange. Agora um outro princípio será colocado, com uma outra relação de equivalência. O procedimento para a introdução dos dois princípios é o mesmo: introduz-se uma relação de equivalência no conjunto base do grupo, encontra-se uma descrição algébrica para as classes de equivalência e compara-se o tamanho das classes.

Agora a relação definida no grupo G é uma relação denominada de conjugação, da seguinte forma:

Definição E.0.23 *Seja G um grupo. Dados $x, y \in G$, diz-se que x esta relacionado com y, indicado por $x \sim y$, se, e somente se, existir um elemento $g \in G$ tal que $y = g^{-1}xg$.*

Mostra-se que a conjugação é uma relação de equivalência em G. Para cada $a \in G$, a sua classe, segundo a relação $\sim$, é dada por $\{y \in G \,|\, a \sim y\}$. Esta é a classe de de conjugação de a em G e indicada por $C(a)$, $C(a) = \{g^{-1}ag \,|, g \in G\}$.

Como $\sim$ é um relação de equivalência, então as classes de conjugação constituem uma partição do conjunto G. Se G é um grupo finito, existem n classes representadas pelos elementos $x_1, x_2, ..., x_n$, então $G = C(x_1) \cup C(x_2) \cup ... \cup C(x_n)$.

Da igualdade acima obtém-se a equação $|\,G\,| = |\,C(x_1)\,| + |\,C(x_2)\,| + ... + |\,C(x_n)\,|$, chamada de equação das classes, que relaciona a ordem de G e as cardinalidades das classes de conjugação em G.

Centro de um grupo e centralizador de um elemento

Definição E.0.24 *Seja G um grupo qualquer. O centro de G, representado por $Z(G)$, é, por definição, o conjunto $Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg, \forall x \in G\}$.*

O centro de um grupo G é o conjunto de todos os elementos g de G que comuta com todo elemento de G.

Definição E.0.25 *Seja G um grupo qualquer. O centralizador de um elemento $a \in G$, indicado por $C_G(a)$ é, por definição, $C_G(a) = \{g \in G \mid ga = ag\}$.*

O centralizador de um elemento a em um grupo G é o conjunto de todos os elementos de G que comutam com a.

Os conjuntos $Z(G)$ e $C_G(a)$ são subgrupos de G e $Z(G) \subseteq C_G(a)$.

Alguns resultados envolvendo o centro de um grupo.

Teorema E.0.26 *Se $|G| = p^n$ em que p é um número primo, então $Z(G) \neq \{e\}$, e o elemento identidade de G.*

Corolário E.0.27 *Se $|G| = p^2$, p um número primo, então o grupo G é abeliano.*

Teorema E.0.28 *(Cauchy) Se um número primo p divide a ordem de um grupo G então G possui um elemento de ordem p.*

Normalizador de um subconjunto e normalizador de um elemento

Seja G um grupo qualquer. Dado um subconjunto M do grupo G e um elemento $g \in G$, o conjunto $M^g = \{g^{-1}mg \mid m \in M\}$ é chamado o conjugado de M pelo elemento g em G.

Definição E.0.29 *Sejam G um grupo qualquer e $M \subset G$. O normalizador de M em G, indicado por $N_G(M)$, é, por definição, o conjunto $N_G(M) = \{g \in G \mid M^g = M\}$.*

Se $M = \{a\} \subset G$, então o normalizador de M em G ou o normalizador de a em G é o conjunto $N_G(a) = \{x \in G \,|\, xa = ax\}$. Ou seja, o normalizador de a em G consiste dos elementos de G que comutam com a e, portanto, coincide com o centralizador de a em G.

O conjunto $N_G(M)$ é um subgrupo de G.

Tem-se que um elemento $a \in G$ pertence a $Z(G)$ se, e somente se, $N_G(a) = G$. Conseqüentemente, se G é finito, $a \in Z(G)$ se, e somente se, $|N_G(a)| = |G|$.

Homomorfismos

Um dos conceitos fundamentais da álgebra moderna em geral e da teoria de grupo em particular é o conceito de homomorfismo, assim como o de isomorfismo, que é um tipo especial de homomorfismo.

Definição E.0.30 *Dados dois grupos* $(G, *)$ *e* $(G', \circ)$, *um homomorfismo de* G *em* G' *é uma função (aplicação)* $\phi : G \to G'$ *tal que* $\phi(x * y) = \phi(x) \circ \phi(y)$ *quaisquer que seja* $x, y \in G$.

A partir daí define-se um monomorfismo (homomorfismo injetor), um epimorfismo (homomorfismo sobrejetor), um endomorfismo (homomorfismo de G em G), um isomorfismo (homomorfismo bijetor) e, finalmente, um automorfismo (isomorfismo de G em G).

Definição E.0.31 *Seja* ϕ *é um homomorfismo de* G *em* G'. *O núcleo de* ϕ *é o conjunto de todos os elementos de* G *que são aplicados sobre o elemento identidade de* G *por* ϕ. *Se* e' *é o elemento identidade de* G', *indicando tal conjunto por* $N(G)$, *tem-se que* $N(G) = \{x \in G \,|\, \phi(x) = e'\}$.

Mostra-se que:

1. $\phi(e) = e'$, e e e' os elementos identidade de G e G', respectivamente;

2. $\phi(x^{-1}) = (\phi(x))^{-1}$ para todo $x \in G$;

3. Se ϕ é um homomorfismo de G em G', então o núcleo de ϕ é subgrupo (normal) de G e a imagem de ϕ é um subgrupo de G'.

Quando se diz que dois grupos G e G' são isomorfos, eles podem ser vistos como idênticos, exceto quanto a natureza de seus elementos (seus nomes e notações) e as operações. Hernstein (1970) compara um isomorfismo com um dicionário, que permite a tradução de uma sentença de um idioma para outro com o mesmo significado. Assim como para realizar a tradução precisa-se do dicionário, para saber se dois grupos são isomorfos precisa-se do isomorfismo.

De um forma mais precisa, dois grupos $(G, *)$ e $(G', \circ)$ são isomorfos se existe um homomorfismo bijetor (um isomorfismo) de G em G', ou seja, se existe uma função $\phi : G \to G'$ bijetora tal que $\phi(x * y) = \phi(x) \circ \phi(y)$ para quaisquer $x, y \in G$.

Estes conceitos são estudados, somente, no meio acadêmico em cursos de álgebra abstrata. Existe uma complexidade intrínseca ao conceito de isomorfismo, especialmente quando se trata de fazer a construção de isomorfismos específicos, pois envolve o tratamento formal de funções e quantificadores. A formação do conceito de isomorfismo pressupõe (e ao mesmo tempo auxilia) a formação de conceitos matemáticos como o de função, função injetora, função sobrejetora, função bijetora, operação binária, homomorfismo de grupos, o próprio conceito de grupo e o uso de quantificadores.

Mostrar que dois grupos $(G, *)$ e $(G', \circ)$ são isomorfos consite em encontrar uma função ϕ de G em G', depois mostrar que a função ϕ é injetora (um-a-um), é sobrejetora e, finalmente, que $\phi(x * y) = \phi(x) \circ \phi(y)$ quaisquer que seja $x, y \in G$.

Há muitos resultados envolvendo os conceitos de homomorfismo e isomorfismos, quais sejam:

Teorema E.0.32 *Teorema do Homomorfismo: Sejam G e G' grupos com identidades e e e', respectivamente e ϕ um homorfismo de G em G'. Então,*
a) A imagem de ϕ é um subgrupo de G', isto é, $Im(\phi) = \{\phi(g) \mid g \in G\} \leq G'$;
b) O núcleo de ϕ é um subgrupo normal de G, além disso, ϕ é injetivo se, e somente se, $N(\phi) = \{x \in G \mid \phi(x) = e\} = \{e\}$;
c) O grupo $G/N(\phi)$ é isomorfo à $Im(\phi)$.

A letra (b) facilita a constatação de que um homomorfismo é injetor. Se ϕ for um homomorfismo sobrejetor tem-se que $G/N(\phi) \approx G'$, isto diz que tipos de grupos devem ser esperados como imagens homomorfas de um dado grupo G - eles devem ser escritos na forma G/N com N um subgrupo normal de G. Isso significa que existe uma correspodência biunívoca entre os subgrupos normais de G e suas imagens homomorfas. Assim o conjunto de todas as imagens homomorfas de G (a menos de isomorfismo) é formado por todos os grupos do tipo G/N, N subgrupo normal de G.

Teorema E.0.33 *Teorema da Representação: Se G é um grupo e H um subgrupo de G com índice n, então existe um subgrupo normal N de G contido em H tal que o grupo-quociente G/N é isomorfo ao um subgrupo de S_n.*

Teorema E.0.34 *(Cayley) Todo grupo é isomorfo a um grupo de permutações.*

No caso dos grupos finitos este teorema é enunciado assim:

Teorema E.0.35 *(Cayley) Todo grupo finito de ordem n é isomorfo a um subgrupo de S_n (grupo de permutações de n elementos).*

Reconhecer quando um dado conjunto com uma operação é grupo é muito pouco para dizer que se deu a formação do conceito de grupo pelo indivíduo. É preciso apreender e ter consciência do que realmente é o objeto grupo na matemática e não, apenas, (re)conhecer alguns exemplares de grupo.

A formação do conceito de isomorfismo está diretamente relacionada com o de grupo abstrato (ver a abordagem utilizada na pesquisa desenvolvida por LERON et al (1995) discutida no capítulo 1). Cada grupo abstrato representa, através de um isomorfismo, uma subclasse da classe de todos os grupos. Esta subclasse diz respeito a um particular conjunto de grupos que se assemelham em termos de sua estrutura interna. No caso dos grupos finitos, um dos elementos essenciais para a formação de uma subclasse é a ordem do grupo.

O grupo abstrato é definido sem referência a natureza de seus elementos - ele traz em si a essência dos grupos do qual ele é representante. Os elementos dos grupos abstratos são designados pelas letras minúsculas do alfabeto: a, b, c, d, e, ... - essas letras não têm nome, elas são identificadas pela sua ordem e pelas relações com as outras letras. Por exemplo, dado o conjunto base $\{e, a, b, c\}$, pode-se definir neste conjunto duas diferentes operações dadas pelas TABELAS E.1 e E.2.

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	c	e	b
b	b	e	c	a
c	c	b	a	e

Tabela E.1: Da operação do grupo $< a \,|\, a^4 = e >$

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Tabela E.2: Da operação do grupo $< a, b, c \,|\, a^2 = b^2 = c^2 = e, a \cdot b = c,\ a \cdot c = b, b \cdot c = a >$

Na TABELA E.1, vê-se que o grupo é cíclico de ordem 4 gerado pelo elemento a uma vez que $a^2 = b$, $a^3 = a^2 \cdot a = b \cdot a = c$ e $a^4 = a^3 \cdot a = c \cdot a = e$. Este grupo pode ser assim representado: $< a \,|\, a^4 = e >$.

Na TABELA E.2 nota-se que o grupo não é cíclico - todos os seus elementos, com excessão do elemento identidade e, tem ordem 2, ou seja, cada elemento é seu próprio inverso. É um grupo comutativo também de ordem 4, porém não cíclico. Este grupo foi construído por Felix Klein e pode ser representado por

$< a, b, c \,|\, a^2 = b^2 = c^2 = e,\ a \cdot b = c,\ a \cdot c = b,\ b \cdot c = a >$.

Mostra-se que essas são as duas únicas TABELAS possíveis para um grupo abstrato de ordem 4. Isto significa que um grupo de ordem 4 é cíclico ou é isomorfo ao grupo de Klein.

O grupo abstrato unifica e representa todos os grupos de uma determinada ordem que têm a mesma estrutura. É essencial a apreensão de que além do conjunto satisfazer as propriedades G_1, G_2 e G_3 (de acordo com a definição explicitada no apêndice B) enquanto grupo, existe uma estrutura interna determinada pelas relações entre seus elementos, são

Tabela E.3: Quantidade de grupos finitos não isomorfos de uma mesma ordem

Ordem	Números de grupos	Ordem	Número de grupos
1	1	7	1
2	1	8	5
3	1	9	2
4	2	10	2
5	1	11	1
6	2	12	5

estas relações que o diferencia de outro grupo de mesma ordem. As relações entre os elementos são específicas de cada grupo com uma certa estrutura, independentemente da cara destes elementos.

No conjunto Ψ de todos os grupos pode-se definir a relação $\approx$ da seguinte forma: dados dois grupos G e G' em Ψ diz-se que $G \approx G'$ se, e somente se, G e G' são isomorfos. Esta relação é de equivalência e, portanto, induz uma partição do conjunto Ψ.

Dado $G \in \Psi$ a classe de G é constituída de todos os grupos que são isomorfos à G. Nesta partição há classes constituídas somente de grupos finitos e outras formadas de grupos infinitos, uma vez que uma condição necessária para que dois grupos finitos sejam isomorfos é que eles tenham a mesma cardinalidade (ordem), isso decorre da injetividade da função ϕ.

Há uma grande quantidade de grupos finitos, entretanto, com o conceito de isomorfismo existe a possibilidade de se olhar todos os grupos finitos de uma mesma ordem como um só grupo, associando-se cada um deles ao grupo abstrato daquela ordem e com aquela estrutura, independentemente, da natureza dos seus elementos. Eis uma tabela que dá o número de grupos distintos não isomorfos de diversas ordens. (DAVIS e HERSH, 1986, p. 240).