



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

WENDEL MACEDO MENDES

**CAMPOS ESPINORIAIS EM CENÁRIOS DE MUNDO BRANA DE CO-DIMENSÃO
UM**

FORTALEZA

2018

WENDEL MACEDO MENDES

CAMPOS ESPINORIAIS EM CENÁRIOS DE MUNDO BRANA DE CO-DIMENSÃO UM

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho.

Coorientador: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

FORTALEZA
2018

WENDEL MACEDO MENDES

CAMPOS ESPINORIAIS EM CENÁRIOS DE MUNDO BRANA DE CO-DIMENSÃO UM

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 15/03/2018.

BANCA EXAMINADORA

Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dr. Geová Maciel de Alencar Filho (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dr. Victor Pereira do Nascimento Santos
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dr. Ozemar Souto Ventura
Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da
Fonseca (Cefet-RJ)

Dr. Marcony Silva Cunha
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M492c Mendes, Wendel Macedo.

Campos Espinoriais em Cenários de Mundo Brana de Co-Dimensão Um / Wendel Macedo Mendes. – 2018.

90 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2018.

Orientação: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho .

Coorientação: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho .

1. Relatividade (Física). 2. Teoria de Campos. 3. Férmions. 4. Gravitação. 5. Branas. I. Título.

CDD 530

À Minha Família

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus, por ter me propiciado este momento, não para minha glória mas para sua.

Agradeço à minha amada esposa, Gislânia Mendes pelo apoio e paciência. Indiretamente ela foi fundamental na elaboração deste trabalho.

Agradeço aos meus pais Edson Mendes e Eleonita Macedo, por terem me ensinado os valores morais que carrego até hoje. Sem eles não teria chegado onde cheguei.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Ricardo Renan, pela confiança no meu trabalho e por seus ensinamentos inovadores sobre vários assuntos da Física.

Agradeço ao meu co-orientador Prof. Dr. Geová Maciel, pelas discussões e sugestões que foram fundamentais na elaboração do artigo científico relacionado à esta tese.

Agradeço aos membros da banca examinadora por terem aceitado o convite e pelas críticas e sugestões.

Agradeço aos meus amigos e companheiros da Física Teórica do nosso grupo, conhecido como CREU (Cosmologia, Relatividade e Unificação) Antônio Ribeiro (Raul), Emmanoel Andrade (Manel), Emanuel Wendell (Brutos), Rodrigo (chefe), Raimundo Ivan (Prominente) e Luiz Felipe (Modo Zero) pelo convívio e pela troca de experiências. estes são “Soldados da Física Teórica”.

Agradeço aos demais os professores do Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará, em especial aos professores Paulo de Tarso, Carlos Alberto, Raimundo Nogueira e Wandemberg Paiva.

Agradeço Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

Agradeço a todos as demais pessoas que contribuíram de maneira direta ou indireta na elaboração deste trabalho.

RESUMO

Nesta tese foi analisada a localização e ressonâncias de férmions de spin $1/2$ em cenários de mundo-brana de Randall-Sundrum de co-dimensão um. Considera-se os casos em que a membrana é do tipo delta de Dirac, parede de domínio não-deformada e deformada. Além de analisar a influência do espaço-tempo D também considera-se três tipos de acoplamentos: (i) o acoplamento de Yukawa padrão com um campo escalar e parâmetro η_1 , (ii) um acoplamento Yukawa-Dilaton com dois parâmetros η_2 e λ e por fim (iii) um acoplamento de derivada do dilaton com parâmetro h . Juntos com o parâmetro de deformação s , tem-se cinco parâmetros livres que foram considerados. A localização do modo zero é dependente da dimensionalidade do espaço-tempo, porque a representação espinorial muda quando a dimensionalidade é ímpar ou par e, portanto, deve ser tratada separadamente. Para o caso (i), encontrou-se que em dimensões ímpares somente uma quiralidade pode ser localizada e em dimensões pares um espinor de Dirac não-massivo pode ser confinado sobre a brana. Nos casos (ii) e (iii) encontrou-se que, para dimensões ímpares, espinores de Weyl com diferentes quiralidades podem ser localizados através de uma escolha apropriada dos parâmetros citados. Em dimensões pares, encontrou-se também que um espinor de Dirac é localizado com uma escolha adequada dos parâmetros livres. Também calculou-se numericamente os coeficientes de transmissão para a análise dos modos ressonantes, através do método da matriz de transferência. Encontrou-se que os picos de ressonância podem aparecer com o aumento da dimensionalidade do espaço-tempo. Por exemplo, o caso $D = 5$ já analisado na literatura não induz modos ressonantes, mas quando considera-se $D = 10$, um pico de ressonância é encontrado. Portanto, no caso de campos espinoriais, a introdução de mais dimensões no espaço-tempo muda drasticamente a localização do modo zero e as ressonâncias, o que não acontece para os campos bosônicos.

Palavras-chave: Relatividade (Física). Teoria de Campos. Férmions. Gravitação. Branas.

ABSTRACT

In this thesis was analyzed the zero mode localization and resonances of $1/2$ -spin fermions in co-dimension one Randall-Sundrum braneworld scenarios. We consider delta-like, domain walls and deformed domain walls membranes. Beyond the influence of the spacetime dimension D we also consider three types of couplings: (i) the standard Yukawa coupling with the scalar field and parameter η_1 , (ii) a Yukawa-dilaton coupling with two parameters η_2 and λ and (iii) a dilaton derivative coupling with parameter h . Together with the deformation parameter s , we end up with five free parameter to be considered. For the zero mode we find that the localization is dependent of D , because the spinorial representation changes when the bulk dimensionality is odd or even and must be treated separately. For case (i) we find that in odd dimensions only one chirality can be localized and for even dimension a massless Dirac spinor is trapped over the brane. In the cases (ii) and (iii) we find that for some values of the parameters both chiralities can be localized in odd dimensions. In even dimensions we obtain a massless Dirac spinor is trapped over the brane. We also calculated numerically resonances for cases (ii) and (iii) by using the transfer matrix method. We find that, for deformed defects, the increasing of D induces a shift in the peaks of resonances. For a given λ with domain walls, we find that the resonances can show up by changing the spacetime dimensionality. For example, the same case in $D = 5$ do not induces resonances but when we consider $D = 10$ one peak of resonance is found. Therefore the introduction of more dimensions, diversely from the bosonic case, can change drastically the zero mode and resonances in fermion fields.

Keywords: Relativity (Physics). Field Theory. Fermions. Gravitation. Branes.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Picos de ressonância para férmions de quiralidade esquerda ($D = 5$) e para férmions de Dirac ($D = 10$, escolhendo $\xi_{n-}(x)$) para $\lambda = 0, 4$	72
Tabela 2 – Picos de ressonância para férmions de quiralidade direita ($D = 5$) e para férmions de Dirac ($D = 10$, escolhendo $\xi_{n+}(x)$) para $\lambda = 0, 4$	73
Tabela 3 – Picos de ressonância para férmions de quiralidade esquerda ($D = 5$) e para férmions de Dirac ($D = 10$, escolhendo $\xi_{n-}(x)$) para $\lambda = 1/(2\sqrt{p})$	75
Tabela 4 – Picos de Ressonância relacionados com a Fig. 15	76
Tabela 5 – Picos de Ressonância relacionados com a Fig. 16	77
Tabela 6 – Resumo dos resultados da localização do modo zero para férmions de spin $1/2$ em dimensões ímpares. Os espinores $\psi_0(x)$ e $\psi_{0\pm}(x)$ representam espinores de Dirac e Weyl sobre a brana, respectivamente.	79
Tabela 7 – Resumo dos resultados da localização do modo zero para férmions de spin $1/2$ em dimensões pares. Os espinores $\psi_0(x)$ e $\psi_{0\pm}(x)$ representam espinores de Dirac e Weyl sobre a brana, respectivamente.	80

LISTA DE FIGURAS

<p>Figura 1 – Esquerda: O poço de energia potencial em uma dimensão. Uma partícula encontra-se confinada no intervalo $0 < x < a$. Direita: O mesmo problema, mas com uma dimensão extra compactificada. A partícula deve-se encontrar somente na superfície cilíndrica.</p>	18
<p>Figura 2 – Orbifold S^1/\mathbb{Z}_2.</p>	20
<p>Figura 3 – O cenário do modelo de p-brana de codimensão 1.</p>	28
<p>Figura 4 – Fator exponencial $A(y)$ no cenário do modelo Randall-Sundrum.</p>	30
<p>Figura 5 – Fator de dobra $e^{A(y)}$ no cenário do modelo Randall-Sundrum.</p>	30
<p>Figura 6 – Fator exponencial $A(y)$ no cenário do modelo Randall-Sundrum “suave”.</p>	33
<p>Figura 7 – Fator de dobra no cenário do modelo Randall-Sundrum “suave”.</p>	34
<p>Figura 8 – Potencial gerado pelo campo escalar para o caso em que $D = 5$.</p>	41
<p>Figura 9 – Barreira de potencial dupla.</p>	44
<p>Figura 10 – Perfil de ressonâncias da barreira de potencial dupla da Fig. 9.</p>	44
<p>Figura 11 – Potencial aproximado por uma sucessão de barreiras de potencial.</p>	45
<p>Figura 12 – Potenciais $U(z)$ e coeficiente de transmissão $T(m^2)$ para férmions de Weyl de quiralidade esquerda ($D = 5$) e férmions de Dirac ($D = 10$) escolhendo $\xi_{n-}(x)$ e $\eta_2 = 1$ com $\lambda = 0,4$. A linha contínua representa o potencial para $D = 5$ enquanto que o pontilhado representa o potencial para $D = 10$, e $s = 1$ (a, d), $s = 3$ (b, e) and $s = 5$ (c, f).</p>	72
<p>Figura 13 – Potenciais $U(z)$ e coeficiente de transmissão $T(m^2)$ para férmions de Weyl de quiralidade direita ($D = 5$) e férmions de Dirac ($D = 10$) escolhendo $\xi_{n-}(x)$ e $\eta_2 = 1$ com $\lambda = 0,4$. A linha contínua representa o potencial para $D = 5$ enquanto que o pontilhado representa o potencial para $D = 10$, e $s = 1$ (a, d), $s = 3$ (b, e) and $s = 5$ (c, f).</p>	73
<p>Figura 14 – Potenciais $U(z)$ e coeficiente de transmissão $T(m^2)$ para férmions de Weyl de quiralidade esquerda ($D = 5$) e férmions de Dirac ($D = 10$) escolhendo $\xi_{n-}(x)$ e $\eta_2 = 1$ com $\lambda = 1/(2\sqrt{p})$. A linha contínua representa o potencial para $D = 5$ enquanto que o pontilhado representa o potencial para $D = 10$, e $s = 1$ (a, d), $s = 3$ (b, e) and $s = 5$ (c, f).</p>	75

Figura 15 –Potenciais $U(z)$ e coeficientes de transmissão $T(m^2)$ para férmions massivos de quiralidade esquerda para $D = 5$ (linha contínua) e para férmions de Dirac para $D = 10$ (pontilhado) escolhendo a função $\xi_{n-}(x)$ com $h = 1$ e $s = 1$ (a, d), $s = 3$ (b, e) and $s = 5$ (c, f) considerando um acoplamento derivativo com o dilaton. 76

Figura 16 –Potenciais $U(z)$ e coeficientes de transmissão $T(m^2)$ para férmions massivos de quiralidade direita para $D = 5$ (linha contínua) e para férmions de Dirac para $D = 10$ (pontilhado) escolhendo a função $\xi_{n+}(x)$ com $h = 1$ e $s = 1$ (a, d), $s = 3$ (b, e) and $s = 5$ (c, f) considerando um acoplamento derivativo com o dilaton. 77

LISTA DE SÍMBOLOS

η_{AB}	Métrica do espaço de Minkowski D dimensional, ela é da forma $\text{diag}(-1, 1, 1, \dots, 1)$. Os índices $A, B, \dots, J = 0, 1, \dots, D - 1$ representam índices de Lorentz.
g_{MN}	Métrica do espaço curvo D dimensional. Os índices M, N, \dots representam índices de sistemas de coordenadas referentes à variedade curva.
g	Determinante da métrica do espaço curvo D dimensional.
$\alpha, \beta, \dots, \kappa$	Índices de Lorentz. Eles variam de 0 a $D - 2$.
λ, μ, \dots	Índices relativos ao sistema de coordenadas na presença de gravidade. Possuem o mesmo range dos índices de Lorentz.
$[,]$	Comutador.
$\{ , \}$	Anti-comutador.
Γ^A	Matrizes de Dirac em D dimensões.
γ^A	Matrizes de Dirac em $D - 2$ dimensões.
Γ^+, Γ^-	Operadores de levantamento e abaixamento de spin.
\hat{N}	Operador número de estados de spin.
ζ	Espinor estado fundamental.
Σ^{AB}	Geradores do grupo $SO(1, D - 1)$.
S_j	Os operadores de spin, com $j = 0, 1, 2, \dots, k$ onde k é um inteiro relacionado com a dimensionalidade do espaço-tempo par por meio de $D = 2k + 2$ e com a dimensionalidade ímpar por $D = 2k + 3$.
$s_j = \pm 1/2$	Autovalores de spin.
Γ	Matriz que relaciona as quiralidades.
Π	Produtório.
P_R, P_L	Operadores de Projeção de quiralidades direita e esquerda, respectivamente.
Ψ	Espinor de Dirac em D dimensões
ψ	Espinor de Dirac em $D - 1$ dimensões.
Ψ_R, Ψ_L	Espinores de Weyl relativo as quiralidades direita e esquerda, respectivamente.
$\sqrt{-g}d^Dx$	Elemento de Volume invariante por transformação geral de coordenadas.
\mathcal{L}_m	Lagrangiana da matéria.
T_{MN}	Tensor energia-momento da matéria.
Γ_{MN}^P	Símbolos de Cristoffel em D dimensões.

R_{MN}	Tensor de Ricci
R	Escalar de Ricci.
G_{MN}	Tensor de Einstein.
Ω^P_{MN}	Coefficientes da conexão afim em D dimensões.
M^{D-2}	Escala de energia gravitacional em D dimensões
M_{Pl}	Escala de energia de Planck.
ϕ	Campo escalar.
$\pi(y)$	Dilaton
$W(\phi)$	Função superpotencial.
S_ϕ	Ação para um campo escalar não-massivo em D dimensões.
I_ϕ	Integral de localização para o campo escalar.
X_M	Campo vetorial em D dimensões.
S_X	Ação para o campo de gauge em D dimensões.
I_X	Integral de localização para o campo de gauge.
Y_{MN}	Tensor intensidade para o campo de gauge em D dimensões.
x^M	Sistemas de coordenadas no espaço curvo.
ξ^A	Sistemas de coordenadas no espaço plano de Minkowski.
e^A_M	Vierbeins.
Λ^A_B	Transformações de Lorentz.
$S(x)$	Representação espinorial do grupo de Lorentz.
D_A	Derivada spin-covariante.
Ω_M	Conexão de Spin.
∇_M	Derivada covariante em D dimensões.
r_c	Raio de Compactificação.
\mathbb{Z}_2	Grupo discreto $\{-1, 1\}$
S^n	Esfera n dimensional.
$g_{\mu\nu}^{(B)}$	Métrica induzida sobre a p -brana.
Λ	Constante cosmológica D dimensional.
V	Tensão da p -brana.
$V(\phi, \pi),$	Termos de interação com dois campos escalares.
$H(\phi, \pi)$	
I_{impar}	Integral de localização para férmions na dimensão ímpar.
I_{par}	Integral de localização para férmions na dimensão par.
η_1	Constante de acoplamento de Yukawa.
η_2	Constante de acoplamento Yukawa-dilaton
h	Constante de acoplamento para a interação derivativa com o dilaton.

$f(y)$	Função relativa à separação de variáveis para campos bosônicos.
$f_{\pm}(y)$	Funções relativas à separação de variáveis na dimensionalidade ímpar para os espinores de Weyl de quiralidades direita (+) e esquerda (-).
$\xi_{\pm}(y)$	Funções complexas relativas à separação de variáveis na dimensionalidade par para o espinor de Dirac.
$U(z)$	Potencial da equação tipo-Schrödinger na dimensão extra conforme.

LISTA DE SIGLAS

MPPC	Modelo Padrão de Partículas e Campos
TRG	Teoria da Relatividade Geral
GeV	Giga elétron-volt
ADD	Arkani-Harmed, Dimopoulos e Dvali
MRS-I	Modelo Randall-Sundrum tipo I
MRS-II	Modelo Randall-Sundrum tipo II

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	MUNDO-BRANA	25
2.1	Equações de Einstein	25
2.2	O Modelo Randall-Sundrum de Co-dimensão Um	27
2.2.1	<i>A geometria no modelo</i>	27
2.2.2	<i>A métrica</i>	28
2.2.3	<i>A dinâmica</i>	28
2.3	Gerando a p -Brana	32
2.4	Acoplamento com o Dilaton	34
2.5	A p -Brana Deformada	37
2.6	Localização de Campos Bosônicos	38
2.6.1	Campo Escalar	38
2.6.2	Equação Tipo Schrödinger	40
2.6.3	Campo Vetorial	41
2.7	O Método da Matriz de Transferência	43
3	ESPINORES EM D DIMENSÕES	46
3.1	Representação Espinorial	46
3.2	Representação das matrizes Γ^A	49
3.3	O Espinores de Dirac e Weyl	53
3.3.1	<i>Representação de Dirac</i>	53
3.3.2	<i>Representação de Weyl</i>	54
3.4	Espinores em Espaços Curvos	56
3.4.1	<i>Vierbiens</i>	56
3.4.2	<i>Representação de Dirac</i>	58
4	LOCALIZAÇÃO DE MODO ZERO E RESSONÂNCIAS DO CAMPO ESPINORIAL	61
4.1	Equação de Dirac em Modelos de Mundo-Brana de Co-Dimensão Um	61
4.2	Redução Dimensional	62
4.2.1	<i>Dimensionalidade ímpar</i>	62
4.2.2	<i>Dimensionalidade par</i>	63
4.3	Análise das Condições de Localização	65
4.3.1	<i>Dimensionalidade ímpar</i>	65

4.3.2	<i>Dimensionalidade par</i>	66
4.4	Casos Especiais	67
4.4.1	<i>Brana Fina</i>	67
4.4.2	<i>Brana espessa sem acoplamento com dilaton</i>	67
4.4.3	<i>Brana espessa com acoplamento com dilaton</i>	68
4.4.3.1	<i>Caso 1: $\alpha_p = 0$</i>	68
4.4.3.2	<i>Caso 2: $\alpha_p \neq 0$</i>	69
4.4.4	<i>Acoplamento derivativo com o dilaton</i>	70
4.5	Ressonâncias	71
4.5.1	<i>Acoplamento Yukawa-Dilatônico</i>	71
4.5.2	<i>Acoplamento derivativo com o dilaton</i>	74
5	CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS	79
	APÊNDICE A – PRODUTO DE KRONECKER	83
	APÊNDICE B – PROPRIEDADES ELEMENTARES DAS MATRIZES DE PAULI	85
	REFERÊNCIAS	87

1 INTRODUÇÃO

As interações fundamentais da natureza são, até o presente momento, descritas pelo Modelo Padrão de Partículas (MPPC) e a Teoria da Relatividade Geral (TGR). Estas teorias foram originalmente formuladas em um espaço-tempo quadridimensional e obtiveram sucesso em prever e medir quantidades físicas. A TRG é uma teoria clássica que inclui a interação gravitacional através da covariância sob transformações gerais de coordenadas do espaço-tempo. Já o MPPC é a formulação das interações não-gravitacionais fundamentais da natureza como uma consequência do princípio de invariância local de gauge, generalizando a Eletrodinâmica Clássica (SALVIO, 2007). Por causa da natureza de suas formulações, elas são incompatíveis, e portanto não podem ser unificadas.

A unificação de teorias tem sempre atraído a atenção dos físicos teóricos ao longo da história da física como ciência. Por volta da década de 1920 Theodor Kaluza (1885-1954) e Oscar Klein (1894-1977) formularam um modelo cujo o objetivo principal era a unificação da Eletrodinâmica e a Gravitação. Este Modelo ficou conhecido como *modelo de Kaluza-Klein* (KALUZA, 1921). O modelo que eles propuseram considerava um espaço com cinco dimensões, sendo quatro espaciais e uma temporal. Para explicar o fato de não existir nenhum efeito detectado que revele a existência dessa dimensão extra, o modelo de Kaluza-Klein (KK) leva em conta a consideração de que essas dimensões eram *compactas*. Embora esse modelo fosse completamente inovador, a teoria de Kaluza-Klein apresentava certos problemas. Dentre eles pode-se destacar a falta de estabilidade do raio da dimensão extra (SALVIO, 2013).

Embora não haja qualquer evidência experimental da existência de dimensões extras, universos com dimensões maiores do que quatro são importantes. Este é o caso da *Teoria de Cordas*, que surgiu por volta da segunda metade do século XX a partir do estudo de espalhamento de hádrons. Nesse cenário, um modelo de ressonância dupla foi descrito, sendo que o espectro dos estados no modelo foi verificado como sendo o espectro de uma corda vibrante. A motivação referente a dimensões extras é devido ao fato do modelo ser consistente com 26 dimensões se a teoria for bosônica, ou 10 dimensões se a teoria for supersimétrica (POLCHINSKI, 1994), (POLCHINSKI, 2007). A Teoria de Cordas foi inicialmente formulada para descrever interações fortes tendo uma escala hadrônica da ordem de GeV definida pela tensão da corda. Nesse ponto, a presença de um modo não massivo de spin 2, sem partícula hadrônica equivalente conhecida, mostrava-se inconsistente. Foi então que se procurou relacionar tal modo com o gráviton, substituindo então, a escala hadrônica pela escala de Planck gravitacional $M_{Pl} = 10^{-19}\text{GeV}$. A partir desta substituição, a teoria de cordas foi então a primeira fusão da teoria gravitacional com a mecânica quântica. As dimensões adicionais são in-

visíveis devido a escala natural de comprimento ser da ordem da escala de Planck, em torno de 10^{-33} cm. Dessa forma as massas dos estados excitados são da ordem da escala de Planck M_{Pl} , o que infelizmente torna difícil a viabilidade experimental da teoria. Para ilustrar esta situação, considera-se como um exemplo, o problema do poço infinito com uma dimensão extra compacta ilustrado por (ZWIEBACH, 2006). Dimensões compactas são construídas intuitivamente “ligando” as fronteiras de uma semi-reta. Matematicamente isso é chamado de *identificação*. Por exemplo, a identificação de uma reta resulta numa circunferência de um determinado raio R . A notação para uma identificação deste tipo, na dimensão y , é $x \sim x + 2\pi R$.

Figura 1 – Esquerda: O poço de energia potencial em uma dimensão. Uma partícula encontra-se confinada no intervalo $0 < x < a$. Direita: O mesmo problema, mas com uma dimensão extra compactificada. A partícula deve-se encontrar somente na superfície cilíndrica.

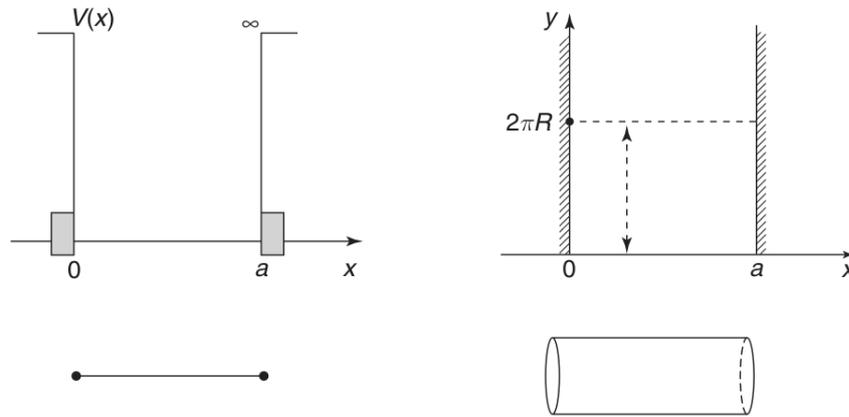


Figura extraída de (ZWIEBACH, 2006).

Então, a equação de Schrödinger para este problema é

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = E \psi. \quad (1.1)$$

Usando o método de separação de variáveis $\psi(x, y) = \psi(x)\phi(y)$, e as condições de contorno $\psi(0, y) = \psi(a, y) = 0$ na dimensão x é possível chegar nas seguintes soluções

$$\psi_n(x) = a_n \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.2)$$

$$\phi_l(y) = b_l \text{sen} \left(\frac{l\pi y}{R} \right) + c_l \cos \left(\frac{l\pi y}{R} \right), \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.3)$$

Por outro lado, não aplica-se as mesmas condições de contorno na dimensão y . A condição de contorno virá da imposição de identificação, isto é, a função de onda $\phi(y)$ deverá satisfazer $\phi(y) = \phi(y + 2\pi R)$. A solução resultante será uma combinação de senos e cossenos. Para $l = 0$ nota-se o seguinte: tem-se $\phi_0(y) = c_0$. Esta condição será de vital importância na compreensão do porquê que uma dimensão extra não altera a física da dimensão visível, neste caso, a dimensão x .

Os autovalores de energia para as funções de onda ψ_{nl} são

$$E_{n,l} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{l}{R} \right)^2 \right]. \quad (1.4)$$

Nota-se claramente que a dimensão extra modificou o espectro de energia. Uma vez que $l = 0$ é permitido, tem-se que $E_{n,0} = E_n$, isto é, os níveis de energia sem a dimensão extra. Então conclui-se que o estado fundamental deste problema é

$$E_{1,1} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{R} \right)^2 \right]. \quad (1.5)$$

Entretanto se $R \ll a$, então os autovalores de energia ficam

$$E_{1,1} \sim \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{R} \right)^2. \quad (1.6)$$

Comparando este resultado com o autovalor de energia E_n , do problema sem a dimensão extra, encontra-se que

$$n \sim \frac{1}{\pi} \frac{a}{R}. \quad (1.7)$$

Uma vez que R é muito menor que a , n deve ter valor absoluto muito grande. Assim, pode-se concluir que, para detectar as dimensões extras, deve-se acessar valores de energia muito altos.

Em outra linha, os modelos de dimensões extras surgiram em um contexto de quebra espontânea de simetria pelo campo de Higgs em teorias de gauge não abelianas. Nesse caso, a dependência espacial do valor esperado para o campo de Higgs demanda por defeitos topológicos para modelar partículas elementares. Tal motivação foi resultado do surgimento de modelos em que o universo quadridimensional é descrito por um defeito topológico chamado *parede de domínio* (RUBAKOV; SHAPOSHNIKOV, 1983), que oculta a dimensão extra para as forças forte, fraca e eletromagnética. O mesmo não pode ser feito para a gravidade, o que nesse caso, restringe qualquer dimensão extra à uma escala invisível no nosso universo observável. Esta é a ideia principal do que conhecemos sobre modelos de mundos em membranas ou “brane-worlds”. Posteriormente uma parede de domínio foi considerada em teorias de supercordas, sendo adotada como o local onde terminam as cordas.

O conceito de dimensões extras microscópicas foi usado posteriormente por Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali (ADD) para calcular o tamanho permitido para dimensões extras, tendo como principal propósito solucionar o *problema da hierarquia*. Esse problema diz respeito à grande discrepância entre às escalas de massa gravitacional e eletrofraca, $M_{Pl} = 10^{19}$ GeV e $M_{Ef} = 10^3$ GeV, respectivamente. A escala de Planck é definida pela equivalência entre a massa e energia a partir da massa de Planck, que por sua vez é representada pela unidade

de massa no sistema natural de unidades. Mais precisamente o valor de massa é dado por $m_p = \sqrt{\hbar c/G} \simeq 1,2209 \times 10^{19} \text{GeV}/c^2$, onde c é velocidade da luz no vácuo, G a constante gravitacional e \hbar é a constante de Planck reduzida. A escala eletrofraca por sua vez é determinada por $v = (G_F \sqrt{2})^{1/2}$, onde G_F é a constante de Fermi.

Neste contexto, por volta de 1999, Lisa Randall e Raman Sundrum propuseram um modelo que resolvia satisfatoriamente o problema da hierarquia de Higgs, chamado de *Modelo Randall-Sundrum* (MRS). Este modelo foi formulado assumindo a priori que o espaço-tempo é pentadimensional ($D = 5$) e que existe apenas uma única dimensão extra. Este modelo é subdividido em dois: Modelo Randall-Sundrum tipo I (MRS-I) e tipo II (MRS-II). De acordo com (RANDALL; SUNDRUM, 1999a), no primeiro modelo, a dimensão extra é compactificada sobre uma circunferência cujas metades inferior e superior são identificadas. Formalmente, essa estrutura é um *orbifold*, S^1/\mathbb{Z}_2 , que é justamente um conjunto dotado de sua topologia (no caso aqui abordado o conjunto é uma circunferência S^1) orientado por um grupo de simetria discreto $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$. Nesta construção, tem-se dois pontos fixos na dimensão extra: um na origem fixado em $\phi = 0$ e outro fixado na extremidade do círculo identificado $\phi = \pi$. Em cada uma destas fronteiras existe uma hipersuperfície quadridimensional imersa numa variedade pentadimensional, chamada de *3-brana*. Em $\phi = 0$, ou seja na 3-brana chamada de *visível*, encontra-se nosso mundo, descrito pelo MPPC e a TRG quadridimensional. O modelo Randall-Sundrum tipo I explica como uma hierarquia entre as escalas de massa pode ser gerada. Já o MRS-II assume a existência de uma única 3-brana localizada na origem que a dimensão extra não é mais compacta. Neste os autores (RANDALL; SUNDRUM, 1999b) mostram que a gravidade pode ser confinada na 3-brana e calculam a correção no potencial newtoniano devido à dimensão extra.

Figura 2 – Orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 .

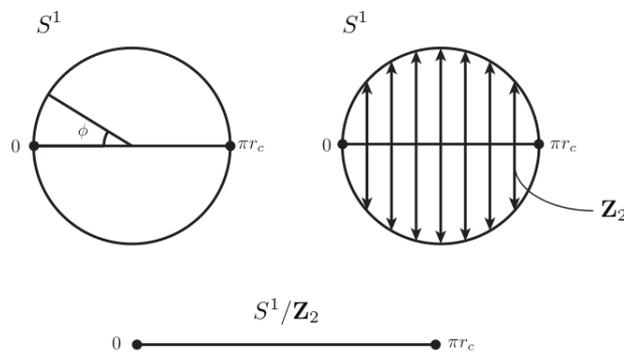


Figura extraída de (MANNHEIM, 2005).

Após a concepção do MRS-II, surgiram vários trabalhos que estudaram os campos clássicos de matéria no próprio modelo (BAJC; GABADADZE, 2000). Isto deu origem a um ramo de pesquisa chamado o *problema da localização de campos*, cuja preocupação é a

criação de mecanismos para que os campos de vários spins fiquem presos, ou confinados, sobre a membrana. Para uma melhor compreensão, considere que $S^{(D)}$ represente a ação de um campo de spin arbitrário em um espaço-tempo que possua $D > 4$ dimensões. Para o caso em que existe somente uma única dimensão extra, como no modelo Randall-Sundrum, sempre é possível escrever

$$S^{(D)} = S^{(D-1)} \int_{-\infty}^{+\infty} dy |\phi(y)|^2, \quad (1.8)$$

onde $S^{(D-1)}$ é a ação efetiva e $\phi(y)$ é uma função da dimensão extra y (CSAKI et al., 2000). Um campo é dito ser localizável se a *integral de localização*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dy |\phi(y)|^2 \quad (1.9)$$

for finita, ou seja, a função $\phi(y)$ deve ser uma função de quadrado integrável, como as funções de onda na Mecânica Quântica não-relativística (LANDAU; LIFSHITS, 1991). Assim é possível usar a representação de Schrödinger da Mecânica Quântica para estudar estes modelos. De maneira geral, os problemas de localização de campos em espaços-tempo com D dimensões com uma única dimensão extra são chamados de problemas de *co-dimensão um*. O artigo (BAJC; GABADADZE, 2000) publicado no ano 2000 trata o problema da localização de campos de vários spins para $D = 5$ no contexto do MRS-II. Neste trabalho os autores mostram que, além do modo zero da gravidade, o modo zero do campo escalar também permanece confinado na 3-brana, ou seja, os modos zero de campos de spin 0 e spin 2 são localizados, pois para estes casos a integral de localização (1.9) permanece finita. No entanto no mesmo trabalho os autores mostram que, por outro lado os modos zeros do campo de gauge (spin 1) e do campo spinorial (spin 1/2) não são localizados. Isto se torna um problema, porque o modelo não seria fisicamente aceitável, uma vez que não contemplaria a Eletrodinâmica com suas extensões, bem como a matéria ordinária, composta por férmions. Além disso, o MRS possui uma descontinuidade em virtude da presença de membranas tipo delta de Dirac, o que motivou o aparecimento de MRS com fatores de dobra “suaves”, introduzido na literatura por (KEHAGIAS; TAMVAKIS, 2001). Neste modelo é introduzido um campo escalar dependente exclusivamente da dimensão extra y , responsável por gerar a 3-brana dinamicamente, isto é, através das equações de movimento. Ainda neste contexto, os autores mostram que, além dos modos zero da gravidade e campo escalar, férmions de quiralidade esquerda (ou fermions de quiralidade direita, mas não os dois) são localizados, mas o campo de gauge ainda continua não-localizado. Com tudo, os autores resolvem o problema para o campo de spin 1 introduzindo outro campo escalar, chamado *dilaton*, que representa um novo grau de liberdade adicionado no modelo. Por outro lado, recentemente, os autores (ALENCAR et al., 2015; JARDIM et al., 2016; ALENCAR et al., 2016) mostraram

que é possível localizar campos de gauge sem a necessidade do dÍlaton, mas é preciso considerar acoplamentos não-mínimos com a gravidade. Uma vez que estes acoplamentos não introduzem novos graus de liberdade, e só possuem elementos da própria geometria do modelo, eles são chamados de *acoplamentos geométricos*. Mas todos estes trabalhos consideram somente $D = 5$ e até o presente momento ninguém estudou as condições para localização de modos zero destes campos, exceto para q -formas (LANDIM et al., 2012).

Como já mencionado no parágrafo anterior, campos espinoriais possuem problemas de localização. Este fato têm atraído vários pesquisadores no ramo de Física de Altas Energias, como por exemplo (LIU et al., 2009; ZHAO; LIU; LI, 2010; LI et al., 2011; ALMEIDA et al., 2009; BARBOSA-CENDEJAS; MALAGÓN-MOREJÓN; MORA-LUNA, 2015). No contexto do MRS-II, o modo zero para férmions livres não é localizado em membranas tipo delta de Dirac, as quais são chamadas na literatura de *branas finas*. Para se obter sucesso na localização de tais campos de matéria, deve-se introduzir um termo de interação na ação do modelo dos férmions com um campo escalar da forma $\phi\bar{\Psi}\Psi$ (JACKIW; REBBI, 1976). No contexto do modelo Randall-Sundrum suave, conforme já mencionado no parágrafo anterior, férmions de Weyl de quiralidade esquerda ou direita são localizados. Os autores do artigo (LIU et al., 2014) mostraram que o mecanismo de localização em interações tipo Yukawa funciona porque o acoplamento entre os férmions e o referido campo escalar é uma função ímpar da dimensão extra. Entretanto os mesmos autores mostraram também que, se o campo escalar for uma função par da dimensão extra, este mecanismo não funciona mais. E assim sendo os mesmos autores mostraram que deve-se introduzir um novo mecanismo de localização. No entanto, em todos estes trabalhos mencionados, o problema da localização de férmions de spin 1/2 só é abordado o caso em que $D = 5$.

Em outra direção, torna-se também importante analisar o potencial gerado pelas membranas em MRS suaves. Esta análise deve ser numérica, em virtude da complexidade dos potenciais. O espectro de massa gerado pela equação tipo Schrödinger é importante no estudo da existência e comportamento dos *modos ressonantes*, o que é feito nos trabalhos (LANDIM et al., 2011; LANDIM et al., 2012; ALENCAR et al., 2013). Nesta análise, o primeiro passo é encontrar a equação de movimento para o campo em D dimensões, que geralmente possui a forma

$$\hat{O}\Phi(x, y) = 0, \quad (1.10)$$

onde \hat{O} é um operador diferencial em D dimensões. O próximo passo é separar o operador diferencial em um operador da p -brana (\hat{O}_{D-1}) e um da dimensão extra (\hat{O}_y) na seguinte forma

$$\hat{O} = \hat{O}_{D-1} + \hat{O}_y. \quad (1.11)$$

Depois disso, usa-se o método de separação de variáveis (ARFKEN G. B., 2013) no campo $\Phi(x, y) = \phi(x)f(y)$, onde $\phi(x)$ e $f(y)$ são funções escalares (na maioria dos casos). Dessa maneira fica possível escrever

$$\frac{\hat{O}\phi(x)}{\phi(x)} = -\frac{\hat{O}_y f(y)}{f(y)} = m^2, \quad (1.12)$$

onde m^2 é a constante de separação. A motivação para a escolha desta constante fica clara quando escreve-se $\hat{O}\phi(x) = m^2\phi(x)$, que é a equação de massa do campo na p -brana. Assim a equação anterior torna-se

$$\hat{O}_y f(y) = -m^2 f(y). \quad (1.13)$$

As soluções desta equação fornecem o espectro de massa visível na p -brana. Em todos os casos, ela sempre possui a forma

$$\left[-\frac{d^2}{dy^2} + P'(y)\frac{d}{dy} + V(y) \right] f(y) = m^2 Q(y)f(y), \quad (1.14)$$

onde o “linha” representa derivada com relação a y . O problema é que esta equação não é de imediato uma equação tipo Schrödinger, sendo necessário fazer um conjunto de transformações para obter

$$\left[-\frac{d^2}{dz^2} + U(z) \right] \bar{\phi}(z) = m^2 \bar{\phi}(z), \quad (1.15)$$

que é uma equação diferencial na variável z sendo $U(z)$ o potencial a ser analisado. Nesta tese, os potenciais que serão apresentados sempre obedecerão a condição

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} U(z) = 0. \quad (1.16)$$

Assim, fazendo uma analogia com a Mecânica Quântica não-relativística, nota-se que para estes potenciais não existem modos discretos para $m^2 > 0$, ou em outras palavras a massa não é quantizada.

Os capítulos desta tese e seus conteúdos estão organizados da seguinte forma: No capítulo 2 é apresentada-se uma revisão da literatura do MRS-II no contexto de co-dimensão um, descrevendo as principais características da geometria, determinando-se as equações de movimento e introduzindo-se os defeitos topológicos não-deformados e deformados, bem como o dilaton. E por fim, neste capítulo analisa-se a localização de alguns campos bosônicos como campo escalar e o campo de gauge, e depois apresenta-se o Método da Matriz de Transferência para o estudo dos modos ressonantes. No capítulo 3 revisa-se as representações espinoriais em dimensões arbitrárias. Primeiro inicia-se construindo-se o homomorfismo do grupo

$SO(1, D - 1)$ com o grupo complexo unitário que representa os espinores. Depois procura-se construir uma representação das matrizes de Dirac para um espaço-tempo de dimensão arbitrária. Em seguida apresenta-se as representações espinoriais de Dirac e Weyl. Depois de feito tudo para o espaço de Minkowski, constrói-se as mesmas representações espinoriais no espaço curvo de Riemann, por meio dos vierbeins, finalizando assim este capítulo. O último capítulo (cap. 4) é o capítulo que contém os novos resultados e formam o cerne desta tese. Nele são discute-se a equação de massa de Dirac em dimensões arbitrárias, assim como suas principais características. Também nele é apresenta-se e discute-se as condições de localização do campo espinorial usando a geometria do MRS-II de co-dimensão um, introduzidas no capítulo 2. E, por fim, aplica-se o método numérico da Matriz de Transferência para análise dos potenciais e modos ressonantes.

2 MUNDO-BRANA

Neste capítulo será introduzido uma generalização do MRS-II no contexto de codimensão 1, ou seja será considerado um espaço-tempo D -dimensional com uma única dimensão extra não-compacta. Semelhantemente ao modelo original, para construir tal generalização será usado a TRG.

2.1 Equações de Einstein

A interação gravitacional é de caráter universal, isto é, todos os corpos estão sujeitos a ela. Albert Einstein (1879-1955) foi um dos pioneiros a formular uma teoria para a gravitação compatível com a Relatividade Especial e que no limite da Mecânica Clássica a equação de Poisson seja reproduzida. A TRG é uma teoria relativística para o campo gravitacional formulada por Einstein por volta da segunda década do século XX. Essa teoria relaciona matéria-energia com a geometria do espaço-tempo de uma forma bastante peculiar. Ela permite determinar a métrica $g_{\mu\nu}$ de onde se obtém a informação geométrica (campo gravitacional) produzida por uma distribuição de matéria-energia. Para construir tal teoria, Einstein baseou-se em uma observação, que posteriormente se tornou um princípio, chamado *princípio da equivalência*. Basicamente esse princípio diz que todas as leis da Física se reduzem localmente à relatividade especial, através de uma escolha adequada do sistema de referência (LANDAU; LIFSCHITS, 1975).

Na TRG a geometria do espaço-tempo é modificada pela existência de matéria-energia gerada por campos que podem ser acoplados com a gravidade através do *Tensor Energia-Momento Métrico*. Dado uma ação que representa uma certa teoria de campo D -dimensional

$$S_{mat} = \int_{\Omega} d^D x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{mat}, \quad (2.1)$$

de acordo com (WEINBERG, 1972), o tensor energia-momento da matéria T_{MN} fica definido como

$$\delta S_{mat} \equiv -\frac{1}{2} \int_{\Omega} T_{MN} \delta g^{MN} \sqrt{-g} d^D x, \quad (2.2)$$

onde g e g^{MN} são, respectivamente, o determinante e a inversa da métrica em D dimensões. Como um exemplo, considere a ação de um campo escalar real não-massivo e autointeragente,

$$S = - \int d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \partial_M \phi \partial^M \phi + V(\phi) \right], \quad (2.3)$$

onde $V(\phi)$ é o termo de interação. Aplicando a definição e usando a identidade $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{MN}\delta g^{MN}$, encontra-se que

$$T_{MN} = \partial_M\phi\partial_N\phi - \frac{1}{2}g_{MN}\left[\partial_A\phi\partial^A\phi + V(\phi)\right]. \quad (2.4)$$

Uma simetria essencial para a ação da matéria é a invariância por difeomorfismo (transformações gerais de coordenadas) $x^M \rightarrow x'^M$. Considere a transformação infinitesimal

$$x'^M = x^M + \varepsilon^M(x) \quad (2.5)$$

onde ε^M é um vetor que funciona como um parâmetro infinitesimal arbitrário. Nas teorias físicas, a lagrangeana da matéria possui dependência explícita da métrica g^{MN} e dos campos e de suas derivadas de primeira ordem, ou seja, $\mathcal{L}_{mat} = \mathcal{L}_{mat}(g^{MN}, \phi, \partial_M\phi)$. Essa simetria implica na conservação do tensor energia momento. De fato, através de expansões em série de Taylor (LANDAU; LIFSCHITS, 1975), mostra-se que $\delta g_{MN} = \nabla_M\varepsilon_N + \nabla_N\varepsilon_M$, e impondo que a ação da matéria seja invariante sob as transformações (2.5) obtém-se

$$\delta S_{mat} = \int d^Dx\sqrt{-g}\nabla_N T^{MN}\varepsilon_M = 0 \Rightarrow \nabla_N T^{MN} = 0, \quad (2.6)$$

onde ∇_M significa derivada covariante. Pode-se então dizer que a conservação do tensor energia-momento é uma consequência direta de exigência de que os sistemas físicos existam independente da escolha do sistema de coordenadas.

Uma vez dada uma teoria que descreve a matéria, como relacioná-la com a geometria do espaço-tempo? Nesse caso, deve-se construir uma ação escalar por transformações gerais de coordenadas que possa ser acoplada com a matéria e que forneça a informação geométrica do espaço-tempo. Em seguida, usa-se o cálculo de variações para obter a equação que descreve a dinâmica de geometria, ou seja, a dinâmica de g_{MN} (NAKAHARA, 2003). A ação que descreve a dinâmica da métrica foi proposta por David Hilbert (1862-1943), conhecida como ação de *Einstein-Hilbert*. Se o espaço tempo em sua forma fundamental possuir D dimensões, tal ação é definida como

$$S_{EH} = 2M^{D-2} \int d^Dx\sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad (2.7)$$

onde M fornece a escala de energia da gravitação em D dimensões. Para o caso quadrimensional a escala de energia é chamada de escala de Planck e têm-se que $M^{D-2} = M_{Pl}^2 = 1/16\pi G$ sendo que G é a constante da gravitação universal de Newton. A quantidade $\sqrt{-g}d^Dx$ é o elemento de volume invariante e R é o escalar de Ricci que é dado por

$$R = g^{MN}R_{MN}, \quad (2.8)$$

e R_{MN} é o tensor de Ricci, dado por

$$R_{MN} = \partial_L \Gamma^L_{MN} - \partial_N \Gamma^L_{ML} + \Gamma^P_{MN} \Gamma^L_{LP} - \Gamma^P_{LM} \Gamma^L_{NP} \quad (2.9)$$

Dessa formas as equações tensoriais que descrevem a dinâmica da geometria são obtidas pela aplicação do princípio variacional na ação $S = S_{EH} + S_m$, resultando nas *equações de campo de Einstein*, ou seja

$$\begin{aligned} \delta S = 2M^p \int_{\Omega} R \sqrt{-g} d^D x \left(R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R + \Lambda g_{MN} - \frac{1}{4M^{D-2}} T_{MN} \right) \delta g^{MN} = 0 \\ \therefore R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R + \Lambda g_{MN} = \kappa^{(D)} T_{MN} \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde definiu-se $\kappa^{(D)} \equiv 1/4M^{D-2}$.

2.2 O Modelo Randall-Sundrum de Co-dimensão Um

2.2.1 A geometria no modelo

Em um espaço-tempo D -dimensional curvo, chamado aqui de *bulk*, o intervalo infinitesimal entre dois eventos é escrito como

$$ds^2 = g_{MN} dx^M dx^N, \quad (2.11)$$

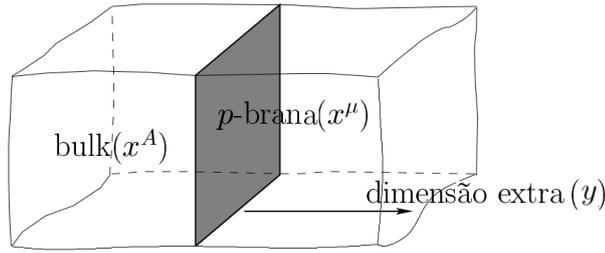
onde os índices maiúsculos denotam as coordenadas do bulk. Nele será admitido a existência de uma hipersuperfície de dimensão $p = D - 2$, chamada de *p-brana*, que representará o universo na qual o MPPC está estabelecido. Nesse cenário existe uma coordenada transversal à *p-brana*, que é chamada de *dimensão extra*, rotulada pela variável y . A configuração aqui construída é chamada na literatura de *modelo p-brana de co-dimensão um* (SALVIO, 2013).

A ação que representa o RSM-II é dada por (KIM et al., 2004)

$$S = 2M^p \int d^D x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + S_{mat}, \quad (2.12)$$

onde M é a escala fundamental de energia da teoria, Λ é uma constante cosmológica D -dimensional que desenvolverá um papel extremamente importante na determinação do tipo de geometria do bulk e por fim S_{mat} é a ação da matéria de interesse (RANDALL; SUNDRUM, 1999a; RANDALL; SUNDRUM, 1999b). No caso que será estudado, esse último termo representará a ação da brana.

Figura 3 – O cenário do modelo de p-brana de codimensão 1.



Adaptado de (KIM et al., 2004).

2.2.2 A métrica

Como o cenário de mundo-brana é construído baseado no formalismo da TRG, deve-se construir a métrica do modelo. Para isso toma-se (2.11) reescrita como

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + 2g_{\mu y}dx^\mu dy + g_{yy}dy^2, \quad (2.13)$$

onde a priori $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x, y)$, e $g_{yy} = g_{yy}(y)$. Aqui impõem-se uma simetria de reflexão $y \rightarrow -y$ (que é uma simetria de orbifold) sobre essa métrica, e assim o termo cruzado $2g_{\mu y}dx^\mu dy$ se anula. E portanto

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + g_{yy}dy^2. \quad (2.14)$$

Nesse momento, como o primeiro termo contém a geometria sobre a brana, exige-se que ela possua invariância de Poincaré na p -brana. Isso é possível se $g_{\mu\nu} \equiv e^{2A(y)}\eta_{\mu\nu}$. De fato, $e^{2A(y)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = e^{2A(y)}(\Lambda^\mu{}_\lambda \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma)dx^\lambda dx^\sigma = e^{2A(y)}\eta_{\lambda\sigma}dx^\lambda dx^\sigma$. Assim (2.14) fica

$$ds^2 = e^{2A(y)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + f^2(y)dy^2. \quad (2.15)$$

No segundo termo do membro direito, é possível fazer uma mudança de variável $dy = f(y)dy$, visando uma simplificação para a expressão da métrica. Assim, a métrica isotrópica e estática mais geral para o modelo de branas, sujeita às simetrias de Poincaré e reflexão, é

$$ds^2 = e^{2A(y)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (2.16)$$

Essa métrica representa uma geometria *não-fatorizável*, pois não é possível escrever a variedade D -dimensional do bulk como um produto de uma variedade Riemanniana pela variedade da dimensão extra.

2.2.3 A dinâmica

Uma vez que a métrica do modelo foi construída, existe a necessidade de extrair a dinâmica do modelo através das equações de Einstein. Os símbolos de Christoffel diferentes de

zero são

$$\Gamma^y_{\mu\nu} = -A'(y)e^{2A(y)}\eta_{\mu\nu}, \quad (2.17)$$

$$\Gamma^y_{\mu y} = A'(y)\delta_\mu^y. \quad (2.18)$$

Dessa forma as componentes não nulas do tensor de Ricci são

$$R_{\mu\nu} = -[A''(y) + (p+1)A'^2(y)]e^{2A(y)}\eta_{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

$$R_{yy} = -(p+1)[A''(y) + A'^2(y)]. \quad (2.20)$$

E o escalar de Ricci fica dado por

$$R = -(p+1)[2A''(y) + (p+2)A'^2(y)]. \quad (2.21)$$

E com esses resultados as componentes não-nulas do tensor de Einstein são

$$G_{\mu\nu} = p \left[A''(y) + \frac{(p+1)}{2}A'^2(y) \right] e^{2A(y)}\eta_{\mu\nu}, \quad (2.22)$$

$$G_{yy} = \frac{p(p+1)}{2}A'^2(y). \quad (2.23)$$

Agora deve-se dar atenção à matéria do modelo, isto é, a ação da matéria presente em (2.12) deve ser conhecida. Para esse trabalho será usado uma extensão dimensional do modelo Randall-Sundrum tipo II (RANDALL; SUNDRUM, 1999b). Baseado nisto, a ação da p-brana será

$$S_{mat} = -V \int \sqrt{-g^{(B)}} d^{D-1}x, \quad (2.24)$$

onde a constante V representa a densidade de energia de vácuo sobre a brana na ausência de excitações de partículas, que normalmente é chamada de *tensão* da p-brana e $g^{(B)}$ é o determinante da métrica induzida sobre a p-brana, que obedece a condição de contorno

$$g_{\mu\nu}(x, y=0) = g_{\mu\nu}^{(B)}(x). \quad (2.25)$$

Uma vez de posse da ação pode-se determinar o tensor densidade de energia-momento da p-brana por meio de (2.2),

$$T_{MN} = V \delta(y) g_{\mu\nu} \delta_M^\mu \delta_N^\nu, \quad (2.26)$$

onde a função delta de Dirac indica a localização da p-brana na dimensão extra e $g_{\mu\nu} \equiv$

$e^{2A(y)}\eta_{\mu\nu}$. As equações de Einstein resultantes desse modelo são

$$pA''(y) + \frac{p(p+1)}{2}A'^2(y) + \Lambda = \frac{V}{4M^p}\delta(y) \quad (2.27)$$

$$\frac{p(p+1)}{2}A'^2(y) + \Lambda = 0 \quad (2.28)$$

Integrando (2.28) sob a condição $A(0) = 0$, obtêm-se $A(y) = \pm\sqrt{-2\Lambda/p(p+1)}y = k_p y$. Nesse caso toma-se o sinal negativo para que a métrica seja finita quando $y \rightarrow \infty$. Além disso a métrica exibe uma simetria de paridade na coordenada y . Isso é possível se $A(y) = k_p|y|$. Logo a solução para as equações de Einstein resultates do modelo Randall-Sundrum é

$$ds^2 = e^{-2k_p|y|}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (2.29)$$

Observe que a constante cosmológica Λ deve ser negativa, para que a constante k_p seja real. Isso é típico de um espaço *anti-de Sitter*. A partir da solução $A(y)$ encontrada, é possível mostrar que existe uma relação constitutiva entre a tensão da brana V e a constante cosmológica Λ . Para isso integra-se a equação (2.28) no intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$ e depois toma-se o limite em que $\varepsilon \rightarrow 0$, que resulta em

$$V = 8pM^p k_p, \quad (2.30)$$

mostrando que, no MRS a constante cosmológica desempenha um papel fundamental, não podendo ser nula.

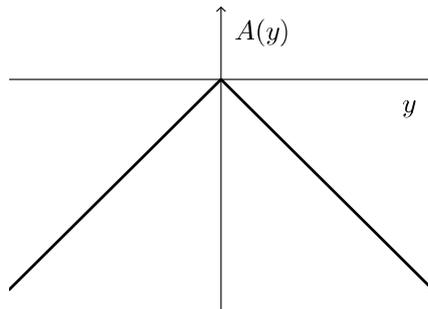


Figura 4: Fator exponencial $A(y)$ no cenário do modelo Randall-Sundrum.

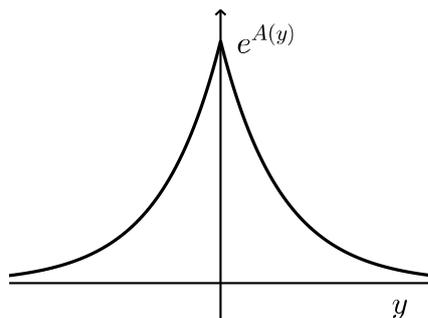


Figura 5: Fator de dobra $e^{A(y)}$ no cenário do modelo Randall-Sundrum.

Outro detalhe importante sobre a métrica do MRS-II é que existe uma transformação conforme que a deixa plana. Para provar que esta transformação existe, primeiro deve-se contrair as equações de Einstein do modelo de modo a determinar o escalar de Ricci

$$R = \frac{2}{2-D} \left(\frac{T}{4M^p} - D\Lambda \right). \quad (2.31)$$

Substituindo este resultado nas equações de Einstein,

$$R_{MN} = \frac{1}{4M^p} \left(T_{MN} + \frac{T}{2-D} \right) - (D+1)\Lambda g_{MN}, \quad (2.32)$$

onde T é o traço do tensor energia-momento. Na ausência de matéria, i.e., $T_{MN} = 0$ e $\Lambda = 0$, as equações de Einstein tornam-se

$$R_{MN} = 0. \quad (2.33)$$

Por outro lado, fazendo a mudança de variável $dz = e^{-A(y)} dy$ no intervalo (2.16), encontra-se

$$ds^2 = e^{A(z)} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2). \quad (2.34)$$

o que foi feito na verdade, foi uma *transformação conforme* na métrica, isto é, uma transformação do tipo $g_{MN}(x) \rightarrow \rho(x)g_{MN}(x)$. Mediante uma transformação conforme, o tensor de Weyl, definido por (NAKAHARA, 2003)

$$C_{MNPQ} = R_{MNPQ} - \frac{(g_{MP}R_{NQ} - g_{MQ}R_{NP} + g_{NQ}R_{MP} - g_{NP}R_{MQ})}{D-2} + R \frac{(g_{MP}g_{NQ} - g_{MQ}g_{NP})}{(D-1)(D-2)},$$

onde R_{MNPQ} é o tensor curvatura de Riemann. Uma transformação conforme anula as componentes do tensor do tensor de Weyl, i.e., $C_{MNPQ} = 0$. Além do mais, substituindo as equações de Einstein no vácuo (2.33) no tensor de Weyl, mostra-se que $R_{MNPQ} = 0$, comprovando realmente que é a matéria que produz curvatura na variedade espaço-temporal. Trazendo isso para o MRS-II, observa-se que a matéria só existe na p -brana. Por este motivo que na literatura, a métrica (2.34) é chamada de *conformalmente plana*. Para o caso da métrica (2.29), a mudança de variável torna-se $dz = e^{k_p|y|} dy$, que resulta em

$$e^{-k_p|y|} = \frac{1}{k_p|z| + 1}, \quad (2.35)$$

e portanto a função $A(z)$ fica dada por

$$A(z) = -\ln(k_p|z| + 1). \quad (2.36)$$

2.3 Gerando a p -Bрана

Até agora foi introduzido a idéia de brana como uma superfície hiperfina em relação a dimensão extra. No entanto muito antes que o modelo Randall-Sundrum fosse concebido, existia a proposta de que nosso universo poderia ser um defeito topológico tal como paredes de domínio ferromagnéticas. Essa parede de domínio pode ser representada por um campo escalar real que depende somente da dimensão extra, de forma que o MRS possa ser reestabelecido em um limite apropriado. Para descrever esse cenário, usa-se um ansatz semelhante ao da equação (2.16). No entanto exige-se agora que a função $A(y)$ seja uma função suave de y (KEHAGIAS; TAMVAKIS, 2001).

A ação que descreverá o cenário será,

$$S = \int d^{D-1}x \int dy \sqrt{-g} \left[2M^p R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi) \right], \quad (2.37)$$

onde é o campo escalar ϕ que será responsável por formar a brana e $V(\phi)$ é o potencial responsável por gerar soluções tipo *bounce*. As componentes diferentes de zero do tensor energia-momento T_{MN} , para a métrica (2.16), são

$$T_{\mu\nu} = -e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi) \right], \quad (2.38)$$

$$T_{yy} = \frac{1}{2}\phi'^2 - V(\phi). \quad (2.39)$$

E portanto, neste caso as equações de Einstein ficam

$$A''(y) + \frac{(p+1)}{2}A'^2(y) = -\frac{1}{4pM^p} \left[\frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi) \right], \quad (2.40)$$

$$\frac{(p+1)}{2}A'^2(y) = \frac{1}{4pM^p} \left[\frac{1}{2}\phi'^2 - V(\phi) \right]. \quad (2.41)$$

Em geral, o sistema de equações diferenciais parciais acima é bastante arbitrário, em virtude da ausência de condições de contorno específicas. No entanto, pode-se resolver este sistema de maneira relativamente simples com o auxílio da técnica do *superpotencial*. Segundo (KEHAGIAS; TAMVAKIS, 2001), considera-se a existência de uma função $W(\phi)$, chamada de superpotencial, definida por meio da equação

$$\phi'(y) = \frac{\partial W}{\partial \phi}, \quad (2.42)$$

onde

$$\phi(y) = a \tanh(by) \quad (2.43)$$

é a solução de kink desejada. Dessa maneira o superpotencial fica

$$W(\phi) = ab \left(\phi - \frac{\phi^3}{3a^2} \right). \quad (2.44)$$

Determinado o superpotencial $W(\phi)$, as equações (2.40) e (2.41) podem ser combinadas de maneira que

$$A''(y) = -\frac{1}{4pM^p} \phi'^2(y). \quad (2.45)$$

Substituindo (2.42) em (2.45), obtém-se

$$A'(y) = -\frac{1}{4pM^p} W(\phi). \quad (2.46)$$

Depois de determinado o superpotencial, resolve-se a equação (2.46) por meio de uma integração para $A(y)$, resultando em

$$A(y) = -\beta_p \left[\ln \cosh^2(by) + \frac{1}{2} \tanh^2(by) \right], \quad (2.47)$$

onde usou-se $\beta_p \equiv a^2/12pM^p$, e $A(0) = A'(0) = 0$. Nota-se que a função $A(y)$ também representa um fator de dobra localizado, assim como no caso do MRS puro. No entanto, a diferença fundamental é que o fator de dobra é “suavisado” pelo campo escalar, que é responsável por formar a p -brana, como mostrado na Fig. 7. No caso do MRS, um termo de constante cosmológica na ação é responsável por representar a p -brana.

Agora determina-se o potencial $V(\phi)$, o qual é feito tomando a equação (2.41) considerando a definição do superpotencial por meio da equação (2.42). O resultado é

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \phi} - \frac{(p+1)}{8pM^p} W^2. \quad (2.48)$$

Então observa-se que, uma vez escolhido o superpotencial, todas as outras grandezas ficam determinadas.

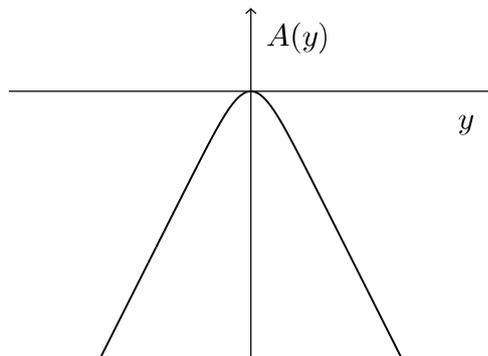


Figura 6: Fator exponencial $A(y)$ no cenário do modelo Randall-Sundrum “suave”.

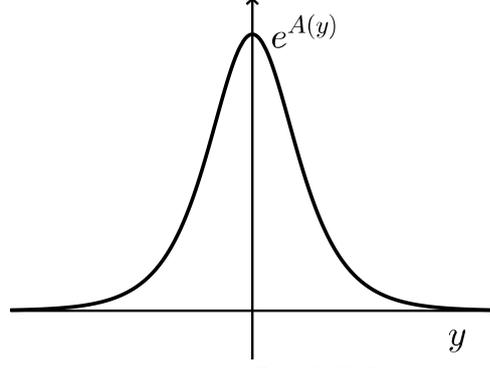


Figura 7: Fator de dobra no cenário do modelo Randall-Sundrum “suave”.

2.4 Acoplamento com o Dilaton

Em teorias de campo multidimensionais é comum, além de adicionar a p -brana com o auxílio de uma campo escalar $\phi(y)$, que exibe dependência somente na coordenada da dimensão extra, também inclui-se um novo grau de liberdade chamado *dilaton*. Esse novo campo é um campo escalar dependente da dimensão extra, o qual será representado aqui por $\pi(y)$. Esse campo é usado com frequência na localização de campos de gauge em cinco dimensões (KEHAGIAS; TAMVAKIS, 2001) ou de maneira mais geral para D dimensões, introduzido pelos autores (LANDIM et al., 2012).

A ação que descreve perfeitamente esse cenário de p -brana dilatônica é

$$S = \int d^{D-1}x \int dy \sqrt{-g} \left[2M^p R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial\pi)^2 - V(\phi, \pi) \right]. \quad (2.49)$$

O tensor densidade de energia-momento agora fica dado por

$$T_{MN} = \partial_M\phi\partial_N\phi + \partial_M\pi\partial_N\pi - g_{MN} \left[\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial\pi)^2 + V(\phi, \pi) \right], \quad (2.50)$$

e as equações de movimento resultantes da ação (2.49) são

$$G_{MN} = \frac{1}{4M^p} \left\{ \partial_M\phi\partial_N\phi + \partial_M\pi\partial_N\pi - g_{MN} \left[\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial\pi)^2 + V(\phi, \pi) \right] \right\}, \quad (2.51)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_M (\sqrt{-g} g^{MN} \partial_N \chi) = \frac{\partial V}{\partial \chi}, \quad (2.52)$$

onde $\chi = \phi, \pi$. Nesse contexto, não se pode usar o ansatz para a métrica (2.16), mas de acordo com (KEHAGIAS; TAMVAKIS, 2001) pode-se usar

$$ds^2 = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{2B(y)} dy^2, \quad (2.53)$$

onde a função $B(y)$ representa o dítalon na métrica do bulk. Usando a métrica (2.53), nota-se

que os símbolos de Christoffel não nulos quando se introduz o dÍlaton no cenÁrio sÁo

$$\Gamma^y_{\mu\nu} = -A'(y)e^{2[A(y)-B(y)]}\eta_{\mu\nu}, \quad (2.54)$$

$$\Gamma^\lambda_{\mu y} = A'(y)\delta^\lambda_\mu, \quad (2.55)$$

$$\Gamma^y_{yy} = B'(y), \quad (2.56)$$

e as componentes do tensor de Ricci diferentes de zero sÁo

$$R_{\mu\nu} = -[A''(y) + (p+1)A'^2(y) - A'(y)B'(y)]e^{2[A(y)-B(y)]}\eta_{\mu\nu}, \quad (2.57)$$

$$R_{yy} = -(p+1)[A''(y) + A'^2(y) - A'(y)B'(y)], \quad (2.58)$$

e o escalar de Ricci

$$R = -(p+1)[2A''(y) + (p+2)A'^2(y) - 2A'(y)B'(y)]e^{-2B(y)}. \quad (2.59)$$

Por fim, as componentes nÁo nulas do tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = p \left[A''(y) + \frac{(p+1)}{2}A'^2(y) - A'(y)B'(y) \right] e^{2[A(y)-B(y)]}\eta_{\mu\nu}, \quad (2.60)$$

$$G_{yy} = \frac{(p+1)}{2} [pA'^2(y) + A'(y)B'(y)]. \quad (2.61)$$

O jacobiano, neste caso é $\sqrt{-g} = e^{(p+1)A(y)+B(y)}$, e como esperado, tambÁm depende da dimensÁo do Bulk.

Com isso as equaÁes de Einstein para esse modelo sÁo

$$A''(y) + \frac{(p+1)}{2}A'^2(y) - A'(y)B'(y) = -\frac{1}{4pM^p} \left[\frac{1}{2}\phi'^2 + \frac{1}{2}\pi'^2 + e^{2B(y)}V(\phi, \pi) \right], \quad (2.62)$$

$$\frac{(p+1)}{2}A'^2(y) = \frac{1}{4pM^p} \left[\frac{1}{2}\phi'^2 + \frac{1}{2}\pi'^2 - e^{2B(y)}V(\phi, \pi) \right]. \quad (2.63)$$

As equaÁes de movimento dos campos escalares $\phi(y)$ e $\pi(y)$, representados por um único campo $\chi(y)$, para a métrica (2.53) sÁo

$$\chi'' + [(p+1)A'(y) - B'(y)]\chi' = \frac{\partial V}{\partial \chi}, \quad (2.64)$$

O sistema de equaÁes diferenciais (2.62) - (2.64) nÁo possui soluÁo única, pois nenhuma condiÁo de contorno foi especificada. Aqui pode-se usar mais uma vez o método do superpotencial. Tomando novamente as equaÁes (2.42) e (2.43), é possÍvel obter uma equaÁo

semelhante à (2.46), mas com o superpotencial dependente de ϕ e π

$$A'(y) = -\frac{1}{4pM^p}W(\phi). \quad (2.65)$$

Substituindo (2.65) em (2.63), levando em conta a definição do superpotencial mediante a equação (2.42)

$$V(\phi, \pi) = e^{-2B(y)} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 - \frac{(p+1)}{8pM^p} W^2(\phi) + \frac{1}{2} \pi^2 \right]. \quad (2.66)$$

Aqui será considerada a seguinte entre as funções $A(y)$ e $B(y)$ (FU; LIU; GUO, 2011)

$$B(y) = rA(y), \quad (2.67)$$

onde r é uma constante real positiva. Assim, substituindo (2.66) em (2.62) levando em conta a equação (2.67), determina-se a derivada do dÍlaton $\pi(y)$ em função do superpotencial

$$\pi'(y) = \frac{1}{2} \sqrt{rpM^p} W(\phi). \quad (2.68)$$

Comparando (2.65) e (2.68), determina-se $\pi(y)$ em função de $A(y)$

$$\pi(y) = -2\sqrt{rpM^p}A(y). \quad (2.69)$$

Substituindo (2.69) em (2.67), tem-se que

$$B(y) = -\sqrt{\frac{r}{4pM^p}} \pi(y). \quad (2.70)$$

Com estes resultados, pode-se escrever o potencial $V(\phi, \pi)$ em termos do superpotencial $W(\phi)$ como

$$V(\phi, \pi) = \exp \left[\sqrt{\frac{r}{pM^p}} \pi(y) \right] \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 - \frac{(p+1-r)}{8pM^p} W^2(\phi) \right]. \quad (2.71)$$

De acordo com (FU; LIU; GUO, 2011), deve-se investigar os valores que o parâmetro r pode assumir. Isto será feito mediante análise da densidade de energia T_{00} . Usando as próprias equações de Einstein, é possível escrever $T_{MN} = 4M^p G_{MN}$. Então para a métrica (2.53), O tensor energia momento T_{00} fica

$$T_{00} = -4pM^p \left[A''(y) + \left(\frac{p+1-2r}{2} \right) A'^2(y) \right] e^{2(1-r)A(y)}. \quad (2.72)$$

Assintoticamente, quando $y \rightarrow \pm\infty$, tem-se que $A(y) \rightarrow -2\beta_p|y|$, e portanto o tensor T_{00} torna-se

$$T_{00}(y) \rightarrow 8bpM^p \beta_p [2\delta(y) - (p+1-2r)b] e^{-2(1-r)b\beta_p|y|}. \quad (2.73)$$

Portanto o comportamento de T_{00} quando $y \rightarrow \pm\infty$ é

$$T_{00}(|y| \rightarrow \infty) = \begin{cases} 0, & 0 < r < 1 \\ -8b^2 p M^p \beta_p (p-1), & r = 1 \\ -\infty, & 1 < r < (p+1)/2 \\ 0, & r = (p+1)/2 > 1 \\ \infty, & r > (p+1)/2 \end{cases} \quad (2.74)$$

Como deseja-se que a densidade de energia seja finita, os valores que o parâmetro r pode assumir são $0 < r < 1$, $r = 1$ e $r = (p+1)/2 > 1$. Na literatura, usa-se frequentemente $r = 1/4$, como por exemplo (KEHAGIAS; TAMVAKIS, 2001; LANDIM et al., 2012, 2012).

2.5 A p -Branas Deformada

O número de dimensões extras define o tipo de defeito topológico a ser usado. Em teorias de mundo-brana com uma única dimensão extra, é natural usar modelos com defeito topológico de parede de domínio, como foi feito na seção anterior, usando os kinks. Nesta seção será introduzido um cenário onde a p -brana possuirá uma estrutura interna, através de uma generalização simples do modelo de brana espessa, abordada anteriormente. Este tipo de defeito, chamado de *deformação*, foi introduzido em teorias pentadimensionais por (BAZEIA; LOSANO; MALBOUISSON, 2002).

O método de deformação baseia-se na introdução de um parâmetro s , chamado de *parâmetro de deformação*, que assumirá valores ímpares. O papel dele é controlar o tipo de deformação, cuja função será simular as diferentes classes de p -branas. Primeiramente, este parâmetro é introduzido no cenário da brana acoplada com o dÍlaton. Para este caso escreve-se o intervalo como

$$ds^2 = e^{2A_s(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{2B_s(y)} dy^2. \quad (2.75)$$

Para resolver as equações de movimento do modelo, também será usado o método do superpotencial. No entanto, a solução de kink é modificada por

$$\phi_s(y) = a \tanh^s \left(\frac{by}{s} \right), \quad s = 1, 3, 5, \dots \quad (2.76)$$

Primeiramente, neste caso onde existe deformação na p -brana, deve-se determinar o superpotencial deformado $W_s(\phi)$. Pela definição da técnica, isto é, de acordo com a equação (2.42), mas introduzindo o parâmetro s por meio da equação do kink (2.76), tem-se

$$\phi'_s(y) = b\phi_s \left[\left(\frac{a}{\phi_s} \right)^{1/s} - \left(\frac{\phi_s}{a} \right)^{1/s} \right] = \frac{\partial W_s}{\partial \phi}. \quad (2.77)$$

Portanto

$$W_s(\phi) = b\phi^2 \left[\frac{s}{2s-1} \left(\frac{a}{\phi} \right)^{1/s} - \frac{s}{2s+1} \left(\frac{\phi}{a} \right)^{1/s} \right]. \quad (2.78)$$

Assim, semelhante ao que foi feito nas seções anteriores, pode-se escrever uma equação matematicamente igual a (2.46), na qual pode ser integrada resultando em

$$A(y) = -\frac{a^2 b}{4pM^p} \int \left[\frac{s}{2s-1} \tanh^{2s-1} \left(\frac{by}{s} \right) - \frac{s}{2s+1} \tanh^{2s+1} \left(\frac{by}{s} \right) \right] dy, \quad (2.79)$$

onde foi usado a fórmula de recorrência (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1964)

$$\int du \tanh^n u = -\frac{1}{n-1} \tanh^{n-1} u + \int du \tanh^{n-2} u + C, \quad (2.80)$$

para $n \neq 1$. Assim encontra-se

$$A_s(y) = -\beta_{p,s} \tanh^{2s} \left(\frac{by}{s} \right) - \frac{2s}{2s-1} \left\{ \beta_{p,s} \left[\ln \cosh \left(\frac{by}{s} \right) - \sum_{n=1}^{s-1} \frac{1}{2n} \tanh^{2n} \left(\frac{by}{s} \right) \right] \right\}, \quad (2.81)$$

onde $\beta_{p,s} \equiv \frac{a^2}{4pM^p} \frac{s}{2s+1}$. A forma da função $W_s(\phi)$ juntamente com o potencial $V_s(\phi, \pi)$ forma um novo cenário de brana mais rico e complexo do que aquele gerado por uma solução tipo kink.

2.6 Localização de Campos Bosônicos

Como já mencionado na introdução desta tese, a concepção de modelos tipo Randall-Sundrum possibilitou o aparecimento de uma nova linha de pesquisa teórica em Física de Altas Energias, chamada localização ou confinamento de campos numa p -brana. Aqui será exposto em detalhes a problemática da localização para dois campos bosônicos (campos escalar e vetorial). O autor da desta tese julgou necessário expor o assunto aqui, porque a localização de campos bosônicos serve como um exercício e um treinamento para a compreensão do mecanismo de confinamento de férmions, que é completamente diferente, em virtude da sua própria natureza de representação.

2.6.1 Campo Escalar

Considere um campo escalar real livre, não-massivo, acoplado minimamente com a gravidade. Sua ação é (NAKAHARA, 2003)

$$S_\phi = -\frac{1}{2} \int \sqrt{-g} d^D x \partial_M \Phi \partial^M \Phi. \quad (2.82)$$

A equação de movimento para o campo escalar fica

$$\partial_M(\sqrt{-g}g^{MN}\partial_N\Phi) = 0. \quad (2.83)$$

Usando a métrica (2.16), a equação de movimento pode ser escrita como

$$\partial_y^2\Phi + (p+1)A'(y)\partial_y\Phi + e^{-2A(y)}\partial^2\Phi = 0, \quad (2.84)$$

onde $\partial^2 \equiv \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ é o operador d'Alembertiano sobre a p -brana. Por meio do método de separação de variáveis $\Phi(x,y) = \phi(x)f(y)$, e com a equação de movimento com uma dimensão reduzida $\partial^2\phi = m^2\phi$, obtêm-se a equação diferencial

$$f''(y) + (p+1)A'(y)f'(y) + m^2e^{-2A(y)}f(y) = 0, \quad (2.85)$$

onde $f'(y) \equiv df/dy$. Quando $m = 0$, a respectiva solução, denotada por $f_0(y)$, é chamada de *modo zero*. Assim, para o modo zero, a equação diferencial (2.85) admite como soluções

$$f_{01}(y) = C, \quad f_{02}(y) = \int dy e^{-(p+1)A(y)}, \quad (2.86)$$

onde C é uma constante real. Como condição de contorno, admite-se que $f_0(y \rightarrow \infty) = 0$. Desta forma, somente $f_{01}(y)$ obedece esta condição. No mecanismo de Localização, o próximo passo é substituir a solução encontrada na ação (2.82) e determinar se ação efetiva em $D - 1$ dimensões é finita. Resultando em

$$S_\phi = -\frac{1}{2} \int d^{D-1}x \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{(p-1)A(y)} f_{01}^2(y) \right], \quad (2.87)$$

Assim, para que a ação efetiva para o campo escalar real não-massivo em $D - 1$ dimensões seja efetivamente confinada sobre a p -brana, a integral de localização

$$I_\phi = \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{(p-1)A(y)} [f_{01}(y)]^2, \quad (2.88)$$

deve ser finita, caso contrário o campo é dito ser não-localizável. Para o caso da solução obtida é fácil ver que para qualquer $A(y) < 0$ e $p > 1$, o modo zero do campo escalar é efetivamente localizado sobre a p -brana, como o trabalho dos autores (BAJC; GABADADZE, 2000) mostra para o caso em que $D = 5$. No caso do modo zero do campo escalar, nota-se que a dimensionalidade do espaço-tempo não influencia no mecanismo de localização, ou seja, para qualquer dimensão $D > 5$ o campo escalar é permanentemente confinado.

2.6.2 Equação Tipo Schrödinger

Na seção anterior, foi feito a análise de localização para o modo zero. Mas como proceder para os casos em que $m \neq 0$? O mesmo procedimento pode ser feito mais facilmente e de maneira geral, transformando a equação (2.85) numa equação semelhante à de Schrödinger da Mecânica Quântica não-relativística. Na verdade, este procedimento pode ser feito para qualquer equação diferencial do tipo

$$\left[-\frac{d^2}{dy^2} + P'(y)\frac{d}{dy} + V(y) \right] f(y) = m^2 Q(y)f(y) \quad (2.89)$$

as quais podem ser convertidas numa equação tipo Schrödinger

$$\left[-\frac{d^2}{dz^2} + U(z) \right] \bar{f}(z) = m^2 \bar{f}(z), \quad (2.90)$$

através das transformações

$$\frac{dz}{dy} = h(y), \quad f(y) = \Omega(y)\bar{f}(z), \quad (2.91)$$

com

$$h(y) = \sqrt{Q(y)}, \quad \Omega(y) = \exp \left[\frac{P(y)}{2} \right] Q(y)^{-1/4}, \quad (2.92)$$

e

$$U(z) = \frac{V(y)}{h(y)^2} + \frac{P'(y)\Omega'(y) - \Omega''(y)}{\Omega(y)f(y)^2}, \quad (2.93)$$

onde a linha representa derivada com relação a y . Depois de efetuadas as transformações para a variável z , é interessante notar que a condição de finitude da integral de localização é traduzida na equação

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{f}(z)|^2 dz = \text{finita}, \quad (2.94)$$

que é justamente a condição que funções de quadrado integrável satisfazem na Mecânica Quântica não-relativística. Aplicando para o caso do campo escalar, de acordo com a equação (2.85) tem-se $P'(y) = (p+1)A'(y)$, $Q(y) = e^{-2A(y)}$ e $V(y) = 0$. Assim encontra-se que

$$h(y) = e^{-A(y)}, \quad \Omega(y) = e^{-pA(y)/2}, \quad U(z) = \frac{p}{2} \left[A''(y) + \frac{(p+2)}{2} A'(y)^2 \right] e^{2A(y)}. \quad (2.95)$$

Na variável z , o potencial $U(z)$ possui a forma esboçada na Fig. 8, chamado de

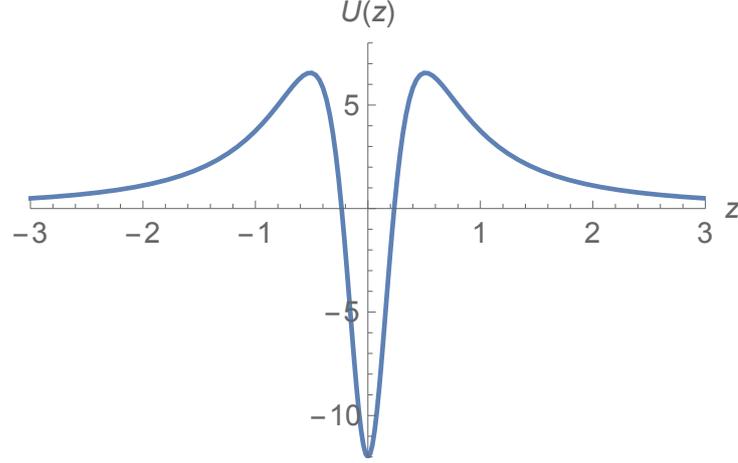


Figura 8: Potencial gerado pelo campo escalar para o caso em que $D = 5$.

volcano. Ele obedece a condição

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} U(z) = 0. \quad (2.96)$$

Portanto em analogia com a mecânica quântica não-relativística, pode concluir que não existe um espectro discreto para $m > 0$. Além disso, qualquer solução para m positivo possui uma contribuição oscilatória, fazendo com que a função de onda $\bar{f}(z)$ não seja de quadrado integrável. Como consequência deste fato, de acordo com a equação (2.91), tem-se que $f(y)$ não é finita, quando $y \rightarrow \infty$. Baseado no que foi exposto, pode-se concluir que somente modos de massa zero são efetivamente localizados sobre a p -brana.

2.6.3 Campo Vetorial

A localização do campo vetorial de gauge é de extrema importância porque, obviamente, o Eletromagnetismo existe sobre a p -brana. Por este motivo, vários autores estudaram e estudam mecanismos de localização para este tipo de representação do grupo de Lorentz. A ação do campo vetorial de gauge X_M no bulk D -dimensional é definida por

$$S_X = -\frac{1}{4} \int d^D x \sqrt{-g} Y^{MN} Y_{MN}, \quad (2.97)$$

onde $Y_{MN} = \partial_M X_N - \partial_N X_M$. As equações de movimento resultantes desta ação são

$$\partial_N \left(\sqrt{-g} g^{MP} g^{NQ} Y_{PQ} \right) = 0. \quad (2.98)$$

Usando o gauge $\partial_\mu X^\mu = X_y = 0$, tem-se o conjunto de equações diferenciais parciais

$$\partial^2 X_\mu + e^{-(p-3)A(y)} \partial_y \left[e^{(p-1)A(y)} \partial_y X_\mu \right] = 0. \quad (2.99)$$

usando o método de separação de variáveis

$$X_\mu(x, y) = A_\mu(x) f(y), \quad (2.100)$$

onde $A_\mu(x)$ é o vetor potencial sobre a p -brana, que satisfaz a equação de Klein-Gordon $\partial^2 A_\mu = m^2 A_\mu$ e a definição do tensor intensidade do campo eletromagnético $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Assim, a equação diferencial ordinária em y para a função $f(y)$ fica

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + (p-1)A'(y) \frac{d}{dy} \right] f(y) = -m^2 e^{-2A(y)} f(y). \quad (2.101)$$

As soluções para o modo zero, são

$$f_{01}(y) = C, \quad f_{02}(y) = \int dy e^{-(p-1)A(y)}, \quad (2.102)$$

onde C é uma constante real. Como $A(y) < 0$, então a solução $f_{02}(y)$ não é normalizável, tem-se como solução localizada somente $f_{01}(y) = C$. A ação efetiva para esta solução torna-se

$$S_X = -\frac{1}{4} \int d^{D-1}x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \left[C^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{(D-5)A(y)} \right]. \quad (2.103)$$

Então a integral de localização fica definida por

$$I_X = C^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{(D-5)A(y)}. \quad (2.104)$$

Nota-se que para $D > 5$ a integral de localização é finita e portanto o campo vetorial de gauge é confinado sobre a p -brana. Mas se $D = 5$, tem-se o oposto: a integral de localização diverge comprometendo o mecanismo de localização. Neste contexto, torna-se necessário a introdução de outros elementos, como por exemplo o *dilaton*.

A ação do campo vetorial acoplado com o dÍlton $\pi(y)$ de acordo com (KEHAGIAS; TAMVAKIS, 2001) é

$$S_X^{(D)} = -\frac{1}{4} \int d^D x \sqrt{-g} e^{-\lambda\pi(y)} Y^{MN} Y_{MN}, \quad (2.105)$$

onde λ é a constante de acoplamento com o dÍlton. Deve-se tomar cuidado porque quando introduz-se o dÍlton, a métrica do bulk não é mais (2.16) e sim (2.53), com $\sqrt{-g} = e^{(p+1)A(y)+B(y)}$. Utilizando-se o mesmo procedimento do caso anterior (sem o dÍlton), levando-se em conta a seção 2.4 chega-se na seguinte equação para $\psi(y)$

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + \alpha_{p,r} A'(y) \frac{d}{dy} \right] f(y) = -m^2 e^{2[B(y)-A(y)]} f(y), \quad (2.106)$$

onde

$$\alpha_{p,r} \equiv p + 1 - r + 2\lambda \sqrt{rpM^p}. \quad (2.107)$$

A única solução normalizada para o modo zero é idêntica ao caso sem o dilaton, isto é, $f(y) = \text{cte}$. Desta maneira, a ação efetiva toma a forma

$$S_X = -\frac{1}{4} \int d^{D-1}x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \left[C^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{(D-5+r+2\lambda\sqrt{rpM^p})A(y)} \right], \quad (2.108)$$

e a integral de localização fica definida por

$$I_X(\lambda) = C^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{[D-5+2\lambda\sqrt{r(D-2)M^{D-2}}]A(y)}. \quad (2.109)$$

Logo, para que o mecanismo de localização seja bem sucedido, deve-se ter $D - 5 + 2\lambda\sqrt{rpM^p} > 0$, que implica em

$$\lambda > \frac{5 - D - r}{2\sqrt{r(D-2)M^{D-2}}}. \quad (2.110)$$

como exposto anteriormente, a introdução do dÍlaton no mecanismo de localização do modo zero do campo vetorial de gauge só é necessário se a dimensionalidade do bulk for igual a cinco. Nestes casos, para $r = 1/4$, a constante de acoplamento do dilaton obedece a condição $\lambda > -1/4\sqrt{3M^3}$.

2.7 O Método da Matriz de Transferência

Agora discute-se em detalhes o algoritmo computacional utilizado para o cálculo do coeficiente de transmissão, chamado de *matriz de transferência* (LANDIM et al., 2011; LANDIM et al., 2012; ALENCAR et al., 2013). Primeiro torna-se necessário escrever a equação diferencial $f(y)$ como uma equação tipo Schrödinger, através das transformações mostradas na seção 2.6.2. Devido a semelhança com a Mecânica Quântica não-Relativística, pode-se calcular o coeficiente de transmissão numericamente, pelo referido método da matriz de transferência. A idéia do método é extremamente simples, pois basea-se no conceito de barreira de potencial.

Considere como exemplo o caso de uma barreira de potencial dupla, mostrada na Fig. 9. É um fato conhecido dos cursos de Mecânica Quântica em nível elementar, que as soluções da equação de Schrödinger antes e depois da barreira de potencial são ondas planas. Para cada região $j = 1, 2, 3, 4, 5$, a solução da equação tipo Schrödinger é dado por

$$\bar{f}_j(z) = A_j e^{ik_j z} + B_j e^{ik_j z}, \quad k_j \equiv \sqrt{2(E - U_j)}. \quad (2.111)$$

De posse da solução, pode-se plotar o gráfico do coeficiente de transmissão T como função da energia E . Como mostrado na Fig. 10, observa-se dois picos de ressonâncias.

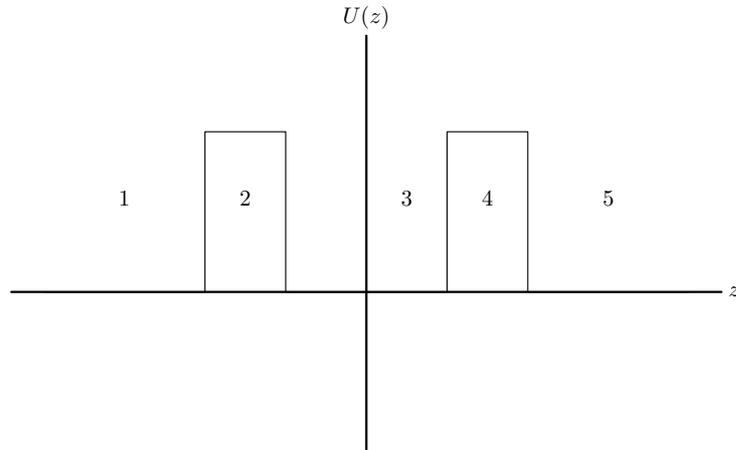


Figura 9: Barreira de potencial dupla.

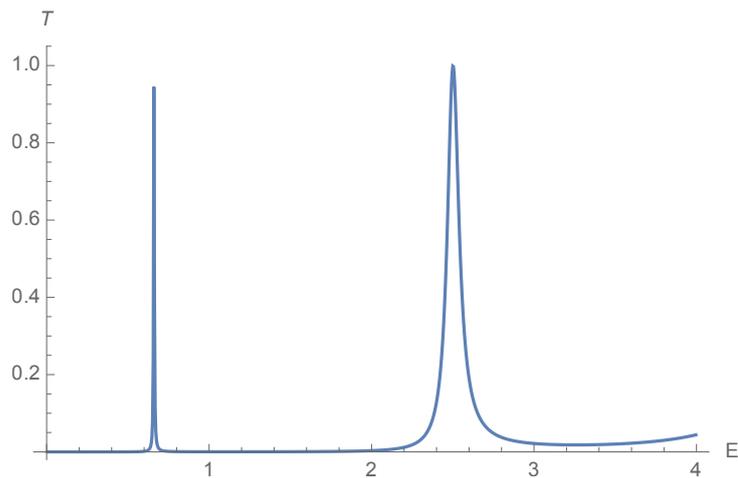


Figura 10: Perfil de ressonâncias da barreira de potencial dupla da Fig. 9.

A idéia é aplicar estes resultados oriundos da Mecânica Quântica para o caso geral. Para este propósito, aproxima-se o potencial $U(z)$ por uma série de barreiras de potencial de acordo com a Fig 11. A equação tipo Schrödinger deve ser resolvida para cada intervalo $z_{j-1} < z < z_j$, onde a seguinte aproximação se torna válida

$$U(z) = U(\bar{z}_{j-1}) = U_{j-1}, \quad \bar{z}_{j-1} = (z_j + z_{j-1})/2. \quad (2.112)$$

A solução neste intervalo é

$$\bar{f}_{j-1}(z) = A_{j-1}e^{ik_{j-1}z} + B_{j-1}e^{-ik_{j-1}z}, \quad k_{j-1} \equiv \sqrt{m^2 - U_{j-1}}. \quad (2.113)$$

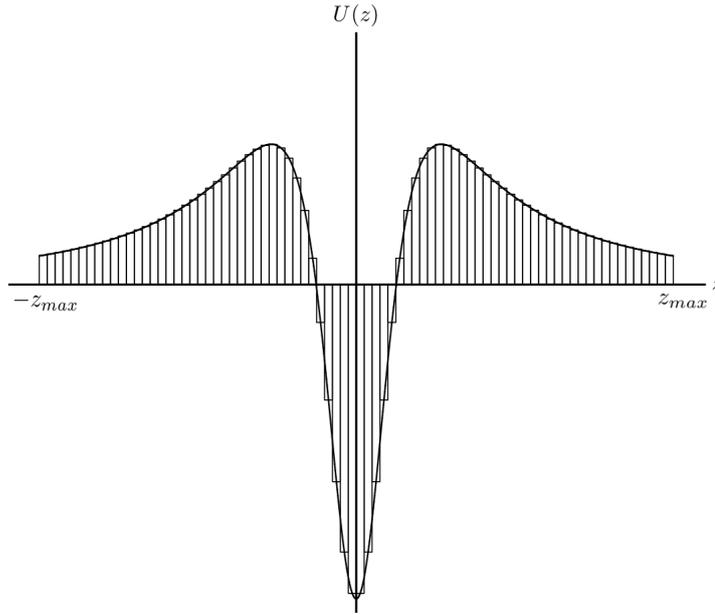


Figura 11: Potencial aproximado por uma sucessão de barreiras de potencial.

A continuidade da função de onda $\bar{f}_{j-1}(z)$ e de sua derivada $\bar{f}'_{j-1}(z)$ em $z = z_j$ fornece

$$\begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix} = M_j \begin{pmatrix} A_{j-1} \\ B_{j-1} \end{pmatrix}. \quad (2.114)$$

E assim, da equação anterior, tem-se

$$M_j = \frac{1}{2k_j} \begin{bmatrix} (k_j + k_{j-1})e^{-i(k_j - k_{j-1})z_j} & (k_j - k_{j-1})e^{-i(k_j + k_{j-1})z_j} \\ (k_j - k_{j-1})e^{i(k_j + k_{j-1})z_j} & (k_j + k_{j-1})e^{i(k_j - k_{j-1})z_j} \end{bmatrix}. \quad (2.115)$$

Fazendo o processo iterativamente, tem-se

$$\begin{pmatrix} A_N \\ B_N \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix}, \quad (2.116)$$

onde,

$$M = M_N M_{N-1} \dots M_2 M_1. \quad (2.117)$$

O coeficiente de transmissão é portanto dado por

$$T = \frac{1}{|M_{22}|^2}. \quad (2.118)$$

Esta expressão deve ser função de m^2 . Para obter os valores numéricos das ressonâncias, foi escolhido z_{max} de tal maneira que $U(z_{max}) \sim 10^{-4}$ e m^2 fique de $U_{min} = U(z_{max})$ a U_{max} (valor máximo do potencial). A variável $2z_{max}$ foi dividida por 10^4 or 10^5 , resultando em $10^4 + 1$ or $10^5 + 1$ matrizes de transferência.

3 ESPINORES EM D DIMENSÕES

3.1 Representação Espinorial

A teoria de grupos foi um marco essencial na Física Teórica de Altas Energias. Por meio dela foi possível formular teorias de forma consistente, tais como Mecânica Quântica e as teorias da Relatividade Especial e Geral. Aqui nessa seção será abordado o *grupo de Lorentz* em D dimensões.

Seja $(t, x^1, x^2, \dots, x^{D-1})$ as coordenadas de um evento no espaço de Minkowski D dimensional. O grupo de Lorentz, denotado por $SO(1, D-1)$, é caracterizado pelo conjunto de transformações lineares

$$x^M = \Lambda^M_N x^N, \quad M, N = 0, 1, 2, \dots, D-1, \quad (3.1)$$

que deixam a forma quadrática

$$ds^2 = \eta_{MN} dx^M dx^N = -dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^{D-1})^2, \quad (3.2)$$

invariante. Impondo essa condição no intervalo, obtêm-se

$$\eta_{MN} = \Lambda^A_M \eta_{AB} \Lambda^B_N, \quad (3.3)$$

que é a relação de fechamento do grupo de Lorentz. É importante salientar que compõem esse grupo transformações de Lorentz puras, que são os chamados *boosts*, (translações dos eixos coordenados com velocidade constante caracterizados por $D-1$ parâmetros), e as rotações espaciais, que é um grupo de Lie caracterizado por $(D-1)(D+1)/2$ parâmetros em $D-1$ dimensões espaciais. Essa quantidade de parâmetros independentes é o mesmo número de componentes independentes de um tensor antissimétrico de segunda ordem. Isso aparece de maneira natural quando trabalha-se com transformações de Lorentz infinitesimais da forma $\Lambda^M_N = \delta^M_N + \delta\omega^M_N$, onde $\delta\omega^M_N$ são os parâmetros da transformação, que obedecem $\delta\omega_{MN} = -\delta\omega_{NM}$ (RAMOND, 1981).

Na teoria quântica, as simetrias são representadas por operadores unitários (ou anti-unitários) (WEINBERG, 2005). Isso implica que para cada transformação de Lorentz é possível associar um operador unitário $U(\Lambda)$. Esses operadores lineares devem obedecer a seguinte relação de fechamento

$$U(\Lambda'\Lambda) = U(\Lambda')U(\Lambda). \quad (3.4)$$

Essa é a essência da *teoria das representações de grupo* (TUNG, 1985). Como o grupo de Lorentz é um grupo de Lie, define-se uma transformação infinitesimal por

$$U(1 + \delta\omega) \equiv I + \frac{i}{2} \delta\omega_{MN} L^{MN}, \quad (3.5)$$

onde I é o operador identidade e L^{MN} são os *geradores* do grupo de Lorentz. Considerando a relação de composição (3.4) para o caso de transformações infinitesimais, demonstra-se que os geradores L^{MN} transformam-se como

$$U^{-1}(\Lambda) L^{MN} U(\Lambda) = \Lambda^M_P \Lambda^N_Q L^{PQ}. \quad (3.6)$$

Essa transformação caracteriza uma representação tensorial no grupo de Lorentz. Por meio dessa equação pode-se determinar a *álgebra de Lie* do $SO(1, D-1)$. Para isso, basta substituir as transformações de Lorentz infinitesimais em (3.6), que resulta em

$$[L^{MN}, L^{PQ}] = i(\eta^{MP} L^{NQ} - \eta^{MQ} L^{NP} + \eta^{NQ} L^{MP} - \eta^{NP} L^{MQ}). \quad (3.7)$$

Como no grupo de Lorentz estão incluídos rotações e boosts, pode-se identificar as componentes do momento angular \mathbf{J} e as componentes dos boosts, respectivamente por meio das equações

$$J_a \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} L^{bc}, \quad (3.8)$$

$$K_a \equiv L_{0a}, \quad (3.9)$$

onde os índices latinos minúsculos a, b, c, \dots representam componentes espaciais em D dimensões. Essas quantidades obedecem a álgebra

$$\begin{aligned} [J_a, J_b] &= i\varepsilon_{abc} J_c, \\ [J_a, K_b] &= i\varepsilon_{abc} K_c, \\ [K_a, K_b] &= -i\varepsilon_{abc} J_c. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Para desacoplar essa álgebra, define-se os operadores não-hermitianos

$$\begin{aligned} N_a &\equiv \frac{1}{2}(J_a + iK_a), \\ N_a^\dagger &\equiv \frac{1}{2}(J_a - iK_a) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Com isso, mostra-se que esses novos operadores satisfazem de maneira independente a álgebra de Lie do grupo de rotações, isto é,

$$[N_a, N_b] = i\varepsilon_{abc} N_c,$$

$$\begin{aligned} [N_a^\dagger, N_b^\dagger] &= i\varepsilon_{abc}N_c^\dagger, \\ [N_a, N_b^\dagger] &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

As equações (3.13) informam que os geradores N_a e N^a obedecem, de forma independente, a mesma álgebra do momento angular. Assim é possível representar o grupo de Lorentz por meio do grupo de rotações, através dos operadores de Casimir $N_a N^a \equiv N^2$ e $N_a^\dagger N^{\dagger a} \equiv N'^2$, possuem autovalores $n(n+1)$ e $n'(n'+1)$, respectivamente. Esses autovalores assumem os valores $n, n' = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$. Esses índices rotulam as *representações irreduzíveis do grupo de Lorentz* quanto ao seu spin.

Será abordado aqui a representação $(1/2, 1/2)$ do grupo de Lorentz, a qual é chamada de *representação espinorial*. O objetivo agora é construir esse tipo de representação. Primeiro, nesse contexto, considere que os geradores matriciais do grupo de Lorentz possam ser definidos por

$$(L^{MN})^P_Q \equiv \left. \frac{\partial \Lambda^P_Q}{\partial \omega_{MN}} \right|_{\omega=0}. \quad (3.13)$$

Com essa definição, pode-se determinar a forma explícita desses geradores. Para tal basta derivar a relação de fechamento do grupo de Lorentz (3.3) com relação aos parâmetros e depois tomá-los como zero. Assim, obtêm-se

$$(L^{MN})_{PQ} = -(L^{MN})_{QP}. \quad (3.14)$$

Já sabia-se que os geradores matriciais eram antissimétricos nos índices interiores (M e N), e agora por meio da definição (3.13) observa-se que eles são antissimétricos também nos índices matriciais. Logo pode-se construí-los a partir de tensores invariantes no espaço de Minkowski,

$$(L^{AB})_{CD} = -i(\delta_C^A \delta_D^B - \delta_D^A \delta_C^B). \quad (3.15)$$

Uma forma de construir uma representação espinorial é postular que cada vetor do espaço de Minkowski x^A está associado a uma matriz X por meio da relação

$$X = \Gamma^A x_A, \quad (3.16)$$

onde Γ^A é um conjunto de matrizes, até aqui, arbitrárias. Calculando-se X^2 , obtêm-se

$$X^2 = \frac{1}{2} \{\Gamma^A, \Gamma^B\} x_A x_B, \quad (3.17)$$

onde $\{\Gamma^A, \Gamma^B\} \equiv \Gamma^A \Gamma^B + \Gamma^B \Gamma^A$ é o anticomutador das matrizes Γ . Como X^2 não possui índices

de Lorentz ele deve reproduzir $X^2 = \eta^{AB}x_Ax_B$. Isso é possível somente se

$$\{\Gamma^A, \Gamma^B\} = 2\eta^{AB}. \quad (3.18)$$

Essa relação, obtida também no desenvolvimento de Dirac na busca de uma teoria que representasse o elétron, é chamada de *álgebra de Clifford* das matrizes $\{\Gamma^A\}$ de Dirac.

A matriz X mediante transformações de Lorentz, obedece $X' = S(\Lambda)XS^{-1}(\Lambda)$. No entanto, por outro lado, de acordo com a equação (3.16), essa mesma matrix se transforma como $M' = \Lambda_A{}^B\Gamma^A x_B$. Combinando essas equações chega-se a

$$S(\Lambda)\Gamma^A S^{-1}(\Lambda) = \Lambda_B{}^A\Gamma^B, \quad (3.19)$$

onde as matrizes $S(\Lambda)$ são os elementos da representação espinorial do grupo de Lorentz. Os geradores dessa representação podem ser definidos como

$$\Sigma^{AB} \equiv \left. \frac{\partial S}{\partial \omega_{AB}} \right|_{\omega=0}. \quad (3.20)$$

Derivando a equação (3.19) com relação aos parâmetros do grupo de Lorentz e usando a definição dos geradores, demonstra-se que

$$[\Sigma^{AB}, \Gamma^C] = \frac{\partial \Lambda_D{}^C}{\partial \omega_{AB}} \Gamma^D. \quad (3.21)$$

No entanto a derivada da equação acima pode ser determinada com o auxílio da relação $\Lambda^A{}_B\Lambda_A{}^C = \delta_B^C$. Assim, escreve-se

$$[\Gamma^C, \Sigma^{AB}] = (L^{AB})^C{}_D \Gamma^D. \quad (3.22)$$

Substituindo (3.15) em (3.22), obtêm-se a expressão para os geradores da representação espinorial,

$$\Sigma^{AB} = -\frac{i}{4}[\Gamma^A, \Gamma^B]. \quad (3.23)$$

Calculando o comutador $[\Sigma^{AB}, \Sigma^{CD}]$ pode-se mostrar que os geradores da representação espinorial obedecem também a álgebra de Lie do grupo de Lorentz, da mesma forma que os geradores L^{AB} . Agora fica fácil determinar os elementos $S(\Lambda)$, via teorema de Lie (TUNG, 1985).

3.2 Representação das matrizes Γ^A

Na seção anterior foi introduzido as matrizes de Dirac, bem como a álgebra que elas obedecem. No entanto muitos aspectos sobre essas matrizes ficaram obscuros, como a ordem

desses matrizes, suas representações e o número de matrizes que fecham a álgebra.

Primeiro, prova-se que a *ordem dessas matrizes deve ser par*. Para isto, toma-se a álgebra de Clifford (3.18) com $A = 0$ e $B = 1$, e aplica-se o determinante em ambos os membros da igualdade, obtendo $\det(-I) = 1 \Rightarrow (-1)^k = 1$, onde I é a matriz identidade e k é um inteiro. Logo conclui-se que n deve ser par.

Baseado nessa prova, nota-se que o menor inteiro positivo é o número 2. Assim, pode-se dizer que a ordem mínima das matrizes de Dirac é também 2. Como a métrica está presente na álgebra de Clifford, quando $n = 2$, o espaço-tempo também será bidimensional. Logo com base na informação que o espaço-tempo deve possuir dimensionalidade par D , pode-se introduzir $D \equiv 2k + 2$, onde $k = 0, 1, 2, \dots$.

As representações das matrizes de Dirac serão contruídas usando uma álgebra semelhante ao oscilador harmônico, por meio de operadores de levantamento e abaixamento de estados (POLCHINSKI, 2007). Para isso define-se $k + 1$ operadores

$$\Gamma^{0\pm} \equiv \frac{1}{2}(\pm\Gamma^0 + \Gamma^1) \quad (3.24)$$

$$\Gamma^{a\pm} \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^{2a} \pm i\Gamma^{2a+1}), \quad a = 1, 2, \dots, k, \quad (3.25)$$

que satisfazem as relações de anticomutação,

$$\{\Gamma^{0+}, \Gamma^{0-}\} = 1, \quad (3.26)$$

$$\{\Gamma^{0+}, \Gamma^{0+}\} = \{\Gamma^{0-}, \Gamma^{0-}\} = 0, \quad (3.27)$$

$$\{\Gamma^{a+}, \Gamma^{b-}\} = \delta^{ab}, \quad (3.28)$$

$$\{\Gamma^{a+}, \Gamma^{b+}\} = \{\Gamma^{a-}, \Gamma^{b-}\} = 0, \quad (3.29)$$

como também $(\Gamma^{0\pm})^2 = (\Gamma^{a\pm})^2 = 0$. Todas essas equações podem ser provadas mediante o uso de (3.18). Definindo os operadores número

$$\hat{N}_0 \equiv \Gamma^{0+}\Gamma^{0-}, \quad (3.30)$$

$$\hat{N} \equiv \Gamma^{a+}\Gamma^{a-}, \quad (3.31)$$

similares ao oscilador harmônico na mecânica quântica, é fácil ver que eles formam um conjunto de observáveis compatíveis bem como o mesmo conjunto de autovetores. Suas respectivas equações de autovalor são

$$\hat{N}_0|n_0, n_a\rangle = n_0|n_0, n_a\rangle, \quad (3.32)$$

$$\hat{N}|n_0, n_a\rangle = n_a|n_0, n_a\rangle, \quad (3.33)$$

e eles obedecem as relações de comutação

$$[\hat{N}_0, \Gamma^{0\pm}] = \pm \Gamma^{0\pm}, \quad (3.34)$$

$$[\hat{N}, \Gamma^{a\pm}] = \pm \Gamma^{a\pm}. \quad (3.35)$$

Nota-se então que Γ^{0+} e Γ^{a+} fazem o papel de $k+1$ operadores de levantamento enquanto que Γ^{0-} e Γ^{a-} fazem o papel de $k+1$ operadores de abaixamento similares e ao oscilador harmônico. Os autovalores n_0 e n_a assumem somente os valores 0 ou 1.

Como existem $k+1$ operadores de criação e aniquilação de estados, e cada operador tem a possibilidade de atuar ou não em um estado, tem-se que a dimensão do espaço de estados dessa representação espinorial é 2^{k+1} . Como $D \equiv 2k+2$, então a dimensão do espaço fica $2^{\lfloor D/2 \rfloor}$, onde $\lfloor \cdot \rfloor$ representa o menor inteiro.

A representação espinorial pode ser construída definindo $n \equiv s+1/2$, na qual $s = \pm 1/2$, forma-se uma base $\mathbf{s} = (s_0, s_1, \dots, s_k)$ onde agora o estado de “vácuo” é definido pelo espinor $\zeta = |-1/2, -1/2, \dots, -1/2\rangle$, tal que

$$\Gamma^{0-} \Gamma^{a-} |s_0 = -1/2, s_1 = -1/2, \dots, s_k = -1/2\rangle = \Gamma^{0-} \Gamma^{a-} \zeta = 0. \quad (3.36)$$

Então um estado generalizado pode ser escrito como sucessivas aplicações dos operadores de levantamento, de maneira indutiva,

$$|s_0, s_1, \dots, s_k\rangle \equiv (\Gamma^{k+})^{s_k+1/2} \dots (\Gamma^{1+})^{s_1+1/2} (\Gamma^{0+})^{s_0+1/2} \zeta. \quad (3.37)$$

Considerando $D=2$, observa-se que existem apenas os operadores de levantamento/abaixamento Γ^{0+} e Γ^{0-} , que atuam nos estados $|s_0 = +1/2\rangle \equiv |+\rangle$ e $|s_0 = -1/2\rangle \equiv |-\rangle$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Gamma^{0-} |+\rangle &= |-\rangle \\ \Gamma^{0+} |-\rangle &= |+\rangle \\ \Gamma^{0+} |+\rangle &= \Gamma^{0-} |-\rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

e pode-se construir as matrizes Γ^0 e Γ^1 por meio de

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \langle + | \Gamma | + \rangle & \langle + | \Gamma | - \rangle \\ \langle - | \Gamma | + \rangle & \langle - | \Gamma | - \rangle \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

na qual Γ^0 e Γ^1 ficam dadas por

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Para $D = 4$ o espaço de estados é composto por $\{|+, +\rangle, |+, -\rangle, |-, +\rangle, |-, -\rangle\}$ e existirão os operadores escada $\Gamma^{0\pm}, \Gamma^{1\pm}$ cuja atuação é regida por (3.37). Então, dessa forma, as representações matriciais para as matrizes Γ podem ser escritas como

$$\begin{aligned}\Gamma &= \langle s'_1, s'_0 | \Gamma | s_0, s_1 \rangle \\ &= \langle s'_1 | \otimes \langle s'_0 | \Gamma | s_0 \rangle \otimes | s_1 \rangle \\ &= \langle - | \otimes \langle - | (\Gamma^{0-})^a (\Gamma^{1-})^c \Gamma (\Gamma^{1+})^d (\Gamma^{0+})^b | - \rangle \otimes | - \rangle\end{aligned}\quad (3.41)$$

onde $a, b, c, d = 0, 1$. Na equação anterior está implícito um produto direto de duas matrizes 2×2 ; a primeira é dada pela combinação dos índices a (linha) e b (coluna) enquanto que a segunda matriz que faz parte produto é construída a partir dos índices c, d , e podemos escrever as duas primeiras matrizes de Dirac como $\Gamma^{(\alpha)} = \gamma^{(\alpha)} \otimes X^{(\alpha)}$, onde, somente aqui, $(\alpha) = 0, 1$, $\gamma^{(\alpha)}$ são as matrizes de Dirac em duas dimensões e $X^{(\alpha)}$ é uma matriz a ser determinada. Usando (3.41), encontra-se que

$$\Gamma^{(\alpha)} = \gamma^{(\alpha)} \otimes \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\gamma^{(\alpha)} \otimes \sigma^3, \quad (\alpha) = 0, 1. \quad (3.42)$$

Para as matrizes Γ^2 e Γ^3

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2,3)} &= \langle - | \otimes \langle - | (\Gamma^{0-})^a (\Gamma^{1-})^c \Gamma^{(2,3)} (\Gamma^{1+})^d (\Gamma^{0+})^b | - \rangle \otimes | - \rangle \\ &= \langle - | \otimes \langle \pm | (\Gamma^{1-})^c \Gamma^{(2,3)} (\Gamma^{1+})^d | \pm \rangle \otimes | - \rangle \\ &= \mathbf{1}_2 \otimes \langle - | (\Gamma^{1-})^c \Gamma^{(2,3)} (\Gamma^{1+})^d | - \rangle \\ &= \mathbf{1}_2 \otimes X^{(2,3)}.\end{aligned}\quad (3.43)$$

A partir das matrizes $X^{(2,3)}$, obtêm-se

$$\Gamma^2 = \mathbf{1}_2 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \otimes \sigma^1, \quad \Gamma^3 = \mathbf{1}_2 \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \otimes \sigma^2, \quad (3.44)$$

onde σ^1, σ^2 e σ^3 são as três matrizes de Pauli definidas no apêndice B.

A generalização para $D = 2k + 2$ ocorre de forma indutiva. Deve-se primeiro conhecer a representação das matrizes de Dirac em $D - 2$ dimensões, as quais podem ser denotadas por γ^A e que possuem ordem 2^k , e a partir delas constrói-se as matrizes de Dirac

$$\Gamma^{(\alpha)} = -\gamma^{(\alpha)} \otimes \sigma^3, \quad \Gamma^{D-2} = \mathbf{1} \otimes \sigma^2, \quad \Gamma^{D-1} = \mathbf{1} \otimes \sigma^1, \quad (3.45)$$

onde $(\alpha) = 0, 1, \dots, D - 3$. Até aqui deve ficar bem claro que a dimensionalidade do espaço-tempo deve ser par. Questões sobre a dimensionalidade ímpar no contexto de representações

espinoriais ficarão claras na próxima seção.

3.3 O Espinores de Dirac e Weyl

3.3.1 Representação de Dirac

Seguindo a linha de raciocínio de (POLCHINSKI, 2007), foi visto anteriormente que a principal estrutura presente na representação espinorial são as matrizes de Dirac. Assim uma das principais representações para férmions relacionadas à álgebra de Clifford é a *representação de Dirac*. Ela consiste em vetores colunas que possuem a mesma dimensão da álgebra de Clifford (isto é $2^{\lfloor D/2 \rfloor}$). Esses vetores colunas satisfazem uma equação especial, chamada *equação de Dirac*, a qual será construída nesse momento.

Historicamente a equação de Dirac foi proposta para solucionar problemas relacionados à equação de Klein-Gordon, os quais são expostos claramente em (RYDER, 1996). O próprio Dirac notou que para eliminar tais problemas, o hamiltoniano deveria possuir somente termos de momento elevados à primeira potência. No entanto, para isso ser consistente com a equação relativística da energia, houve a necessidade da introdução das matrizes Γ . Ele postulou, (LAHIRI; PAL, 2005)

$$H = i\Gamma^0(i\Gamma \cdot \mathbf{p} - M), \quad (3.46)$$

onde M é a massa da partícula. Com essa relação, ao elevar esse hamiltoniano ao quadrado, tem-se

$$H^2 = \frac{1}{2}\{\Gamma^0\Gamma^j, \Gamma^0\Gamma^k\}p_jp_k - M\{\Gamma^0\Gamma^j, \Gamma^0\}p_j - M^2(\Gamma^0)^2. \quad (3.47)$$

Por comparação direta com a expressão para a energia relativística de Einstein $H = E = p^2 + M^2$, tem-se

$$\{\Gamma^0\Gamma^j, \Gamma^0\Gamma^k\} = 2\delta^{jk}, \quad (3.48)$$

$$\{\Gamma^0\Gamma^j, \Gamma^0\} = 0, \quad (3.49)$$

$$(\Gamma^0)^2 = -\mathbf{1}. \quad (3.50)$$

Manipulando adequadamente estas equações, mostra-se que $\{\Gamma^j, \Gamma^0\} = 0$ e $\{\Gamma^j, \Gamma^k\} = 2\delta^{jk}$. Logo torna-se possível reproduzir a álgebra de Clifford (3.18). A partir dela, demonstra-se a propriedade

$$(\Gamma^A)^\dagger = \Gamma^0\Gamma^A\Gamma^0. \quad (3.51)$$

Por meio da equação de Schrödinger, com o Hamiltoniano dado por (3.46), chega-se na equação

de movimento para partículas de spin $1/2$. Assim,

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x) = H \Psi(x), \quad (3.52)$$

onde aqui x representa as dimensões espaço-temporais e $\Psi(x)$ é um vetor coluna de dimensão $2^{[D/2]}$, para que a equação fique consistente. Esse vetor coluna é chamada de *espinor de Dirac*. Substituindo o Hamiltoniano proposto por Dirac na equação de Schroedinger, obtêm-se

$$(\Gamma^A \partial_A - M) \Psi(x) = 0. \quad (3.53)$$

que é a famosa equação de Dirac, que descreve férmions massivos. No entanto também é possível escrever essa equação na sua forma adjunta, a qual é satisfeita por um vetor linha, chamado de *espinor adjunto*. Para isso toma-se o conjugado hermitiano na própria equação de Dirac e multiplica-se à direita por Γ^0 a equação. Com essas operações chega-se a

$$\bar{\Psi}(x) (\Gamma^A \overleftarrow{\partial}_A + M) = 0, \quad (3.54)$$

onde $\bar{\Psi}(x) \equiv \Psi^\dagger(x) \Gamma^0$ é o espinor adjunto e $\bar{\Psi} \Gamma^A \overleftarrow{\partial}_A \equiv \partial_A \bar{\Psi} \Gamma^A$.

Tratando o espinor de Dirac como um campo espinorial, é de extremo interesse construir uma ação que forneça a equação de Dirac obtida anteriormente. Essa ação deve satisfazer os requisitos: (i) invariância por transformações de Lorentz e (ii) hermiticidade. Na ação deve-se ter quantidades escalares como $\bar{\Psi} \Psi$ e $\bar{\Psi} \Gamma^A \partial_A \Psi$, pois o espinor de Dirac se transforma como $\Psi' = S(\Lambda) \Psi$, ou $\bar{\Psi}' = S^{-1}(\Lambda) \bar{\Psi}$. Logo, escreve-se a ação do campo espinorial de Dirac em D dimensões como

$$S_{1/2} = \int d^D x \bar{\Psi}(x) (\Gamma^A \partial_A - M) \Psi(x). \quad (3.55)$$

Mais a frente, no estudo da localização do modo zero, M será substituído por um termo de interação.

3.3.2 Representação de Weyl

A representação de Dirac não é uma representação espinorial irredutível, do grupo de Lorentz $SO(1, D-1)$. O interesse aqui então é saber como construir outra representação. Para investigar isto, introduz-se a matriz

$$\Gamma \equiv i^{-k} \prod_{l=0}^{D-1} \Gamma^l = i^{-k} \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^{D-1}, \quad (3.56)$$

que satisfaz as equações

$$(\Gamma)^2 = \mathbf{1}, \quad \{\Gamma, \Gamma^A\} = 0, \quad [\Gamma, \Sigma^{AB}] = 0, \quad (3.57)$$

Os autovalores de Γ , os quais serão chamados daqui para frente de quiralidades, são ± 1 . Antes, na representação de Dirac a dimensão do espaço de estados é 2^{k+1} . Agora tomando por referência os autovalores da matriz Γ , o espaço de estados fica dividido em duas partes independentes; os 2^k estados com quiralidade $+1$ formam uma *representação de Weyl* da álgebra de Lie do grupo de Lorentz, enquanto os outros 2^k estados com quiralidade -1 formam uma segunda representação independente de Weyl. Nessa representação torna-se conveniente definir os operadores de projeção

$$P_R \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \Gamma), \quad P_L \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \Gamma), \quad (3.58)$$

os quais satisfazem as propriedades

$$P_R^2 = P_R, \quad P_L^2 = P_L, \quad P_R + P_L = \mathbf{1}, \quad P_R P_L = P_L P_R = 0. \quad (3.59)$$

Esses operadores devem ser invariantes por transformações de Lorentz. Atuando esses operadores em um espinor de Dirac Ψ obtêm-se novos espinores

$$\Psi_R \equiv P_R \Psi, \quad \Psi_L \equiv P_L \Psi, \quad (3.60)$$

chamados espinores chirais ou de Weyl. Eles satisfazem vínculos covariantes de Lorentz

$$\Gamma \Psi_R = \Psi_R, \quad \Gamma \Psi_L = -\Psi_L. \quad (3.61)$$

Dessa forma fica claro que Ψ_R e Ψ_L são as formas de Dirac dos espinores de Weyl de quiralidade direita e esquerda.

Para $D = 2k + 2$, a relação entre as dimensionalidades das representações de Dirac e Weyl são

$$2_{Dirac}^{k+1} = 2_{Weyl}^k + 2_{Weyl}^k \quad (3.62)$$

onde o lado esquerdo da igualdade é a dimensionalidade da representação de Weyl. O “linha” significa quiralidade -1 .

Para o caso em que o número de dimensões é ímpar, pode-se escrever $D = 2k + 3$. Mas como construir as representações espinoriais do $SO(1, 2k + 2)$ nesse caso? Uma forma bastante simples de resolver esse aparente problema consiste em acrescentar uma nova matriz ao conjunto de matrizes Γ do caso em que a dimensionalidade do espaço-tempo é par de tal forma que a álgebra de Clifford continue sendo satisfeita (POLCHINSKI, 2007). Boas candidatas seriam as matrizes $\Gamma^D = \Gamma$ ou $\Gamma^D = -\Gamma$ isso por causa das duas primeiras equações de (3.57). Dessa forma resolve-se o problema e nota-se que a dimensão da representação nesse caso é a mesma do caso par.

Não existe uma forma única para representar a matrizes Gamma de Dirac. Uma forma bastante útil que será usada nesta tese, será (PARK, 2005)

$$\Gamma^{(\alpha)} = \gamma^{(\alpha)} \otimes \sigma^1, \quad \Gamma^{D-2} = \gamma \otimes \sigma^1, \quad \Gamma^{D-1} = \mathbf{1} \otimes \sigma^3, \quad (3.63)$$

onde $(\alpha) = 0, 1, 2, \dots, D-3$, $\gamma^{(\alpha)}$, γ e $\mathbf{1}$ são $2k \times 2k$ matrizes de Dirac, quiralidade e identidade em $D-2$ dimensões, respectivamente. Portanto, as matrizes gamma em dimensões pares podem ser escolhidas de maneira que possuam diagonal secundária em blocos.

3.4 Espinores em Espaços Curvos

Uma vez introduzidas as representações espinoriais no espaço de Minkowski, agora deseja-se construí-las na presença de gravidade. Uma forma relativamente simples de estabelecer uma conexão entre as representações do grupo de Lorentz no espaço de Minkowski e no espaço curvo é usando o formalismo de *vierbeins* (RAMOND, 1981).

3.4.1 Vierbiens

Na ausência de gravidade as Leis da física são invariantes por transformações de Lorentz *globais*, isso é o que afirma o princípio da relatividade. Para incorporar gravidade nesse contexto é necessário recorrer ao *princípio da equivalência de Einstein*, no qual é sempre possível escolher um sistema de referência tal que a gravidade desapareça localmente, chamado de “referencial de queda livre”. Existe a necessidade de relacionar quantidades que estão em um referencial inercial com outras que estão no referencial do campo ou, em termos técnicos, como relacionar quantidades no espaço “flat” com as do espaço curvo (também chamado de espaço físico)?

A resposta para esse questionamento está na *transformação de coordenadas*. Seja $\{x^M\}$ um sistema de coordenadas D dimensional curvo associado a variedade curvada Ω e $\{\xi^A\}$ são as coordenadas “flats”(locais) tangente à variedade. Aqui deve-se fazer uma distinção nos índices relacionados as coordenadas locais e globais: Quando forem K, L, M, N, \dots , se tratam do sistema de coordenadas curvo e quando forem A, B, C, \dots, J se tratam das coordenadas locais, e ambos variam de 0 a $D-1$. Quando as coordenadas forem $(D-1)$ -dimensionais, usa-se os correspondentes gregos, isto é, α, β, \dots para as coordenadas locais e λ, μ, \dots para as coordenadas globais.

Esclarecido a notação dos índices, realiza-se uma transformação de coordenadas $\{x^M\} \rightarrow \{\xi^A\}$ e com isso pode-se escrever $\xi^A = \xi^A(x^M)$ ou de forma equivalente,

$$d\xi^A = \frac{\partial \xi^A}{\partial x^M} dx^M \quad (3.64)$$

onde as derivadas são avaliadas no ponto de interesse. Os elementos da matriz de transformação entre as coordenadas envolvidas são chamados de *vierbeins*, definidos como

$$e^A_M(x) \equiv \frac{\partial \xi^A}{\partial x^M} \quad (3.65)$$

sendo que os índices sobrescritos designam a linha e os subscritos a coluna da matriz. Dessa forma (3.64) se torna

$$d\xi^A = e^A_M(x) dx^M \quad (3.66)$$

e os elementos da matriz da transformação inversa são os *vierbeins inversos*,

$$dx^M = \frac{\partial x^M}{\partial \xi^A} d\xi^A \equiv e_A^M(x) d\xi^A. \quad (3.67)$$

A relação entre esses vierbeins obtida de

$$d\xi^A = e^A_M dx^M = e^A_M e_B^M d\xi^B \Rightarrow e^A_M e_B^M = \delta_B^A, \quad (3.68)$$

como também

$$dx^M = e_A^M d\xi^A = e_A^M e_N^A dx^N \Rightarrow e_A^M e_N^A = \delta_N^M. \quad (3.69)$$

A métrica do sistema de coordenadas curvo pode ser escrita em termos da métrica “flat”, levando em conta que na transformação $\{\xi^A\} \rightarrow \{x^M\}$ o tensor métrico pode ser escrito na forma

$$g_{MN}(x) = e^A_M(x) e^B_N(x) \eta_{AB}. \quad (3.70)$$

E, de maneira análoga, a métrica inversa é escrita como $g^{MN} = e_A^M(x) e_B^N(x) \eta^{AB}$. Pode-se verificar facilmente, usando (3.70) e a inversa da métrica que $g^{ML} g_{LN} = \delta_N^M$. De maneira análoga η_{AB} pode ser escrita em termos das tetradas inversas da forma

$$\eta_{AB} = e_A^M e_B^N g_{MN} \quad (3.71)$$

e a inversa fica dada por $\eta^{AB} = e^A_M e^B_N g^{MN}$. A álgebra de Clifford (3.18) na presença de gravidade se torna

$$\{\Gamma^M, \Gamma^N\} = 2g^{MN} \quad (3.72)$$

onde se torna necessário definir a relação entre as matrizes de Dirac no espaço plano e no espaço curvo $\Gamma^M = e_A^M \Gamma^A$.

3.4.2 Representação de Dirac

A ação de Dirac no espaço de Minkowski possui uma simetria com relação às *transformações de Lorentz globais*, isto é, transformações de Lorentz que não exibem dependência das coordenadas espaço-temporais. De fato, como foi mostrado anteriormente, no caso da representação espinorial de Dirac, um espinor $\Psi(x)$ transforma-se de acordo com $\Psi(x) \rightarrow S(\Lambda)\Psi(x)$, com $S(\Lambda)$ independentemente das coordenadas do espaço-tempo.

No entanto, na presença de gravidade, não é da mesma forma. Isso acontece principalmente porque o grupo de simetria relativo ao espaço-tempo não é independente das coordenadas, devido ao fato da gravidade ser a própria geometria. Assim deve-se exigir que a ação de Dirac seja invariante por *transformações de Lorentz locais*, que dependerão das coordenadas do espaço-tempo. Em outras palavras, agora as transformações de Lorentz sofrerão modificações em cada ponto do espaço tempo, por meio dos vierbeins. Nessas condições, o espinor de Dirac irá se transformar localmente como

$$\Psi'(x) = S(x)\Psi(x), \quad (3.73)$$

onde $S(x) \equiv S(\Lambda(x))$, e a derivada do espinor se transforma como

$$(\partial_M \Psi)' = \Lambda_M^N(x) \partial_N S(x) \Psi + \Lambda_M^N(x) S(x) \partial_N \Psi. \quad (3.74)$$

Note que no caso em que S não depende de x a covariância da transformação é mantida, mas no caso exposto aqui, ela é quebrada. Esse problema pode ser resolvido introduzindo uma *derivada spin-covariante* D_A , definida por

$$D_A \equiv e_A^M (\partial_M + \Omega_M), \quad (3.75)$$

onde o campo Ω_M é a *conexão de spin*. Ela desempenha um papel similar ao da conexão afim para o caso de derivadas de vetores e tensores em geometrias curvas (BIRRELL; DAVIES, 1984). Aqui ela é introduzida para que a derivada de um espinor no espaço curvo mantenha seu caráter espinorial. Para que essa definição surta o efeito desejado, impõe-se que $D_M \Psi$ transforme-se como um espinor, isto é,

$$(D_M \Psi)' = \Lambda_A^B S(x) D_B \Psi, \quad (3.76)$$

e como consequência, descobre-se a lei de transformação da conexão de spin

$$\Omega'_M = -\partial_M S(x) S^{-1}(x) + S(x) \Omega_M S^{-1}(x). \quad (3.77)$$

Agora para determinar a forma da conexão de spin, considera-se transformações de lorentz

locais,

$$\Lambda^A_B \equiv \delta^A_B + \delta\omega^A_B(x), \quad (3.78)$$

onde os $\delta\omega^A_B(x)$ são os parâmetros do grupo de Lorentz local e continuam obedecendo a relação $\delta\omega_{AB}(x) = -\delta\omega_{BA}(x)$. A matriz $S(x)$ em sua forma infinitesimal, que compõe a representação espinorial do grupo de Lorentz local, possui a mesma forma de $S(\Lambda)$ no caso sem gravidade, que é

$$S(x) = 1 + \frac{i}{2}\Sigma_{AB}\delta\omega^{AB}, \quad (3.79)$$

onde Σ_{AB} continua sendo dado por (3.23). Assim substituindo (3.79) na transformação da conexão de spin (3.77), obtêm-se

$$\Omega'_M \simeq \Omega_M - \frac{i}{2}\Sigma_{AB}\partial_M\delta\omega^{AB}(x) - \frac{i}{2}[\Omega_M, \Sigma_{AB}]\delta\omega^{AB}(x). \quad (3.80)$$

Por outro lado, os vierbeins se transformam como

$$e'^A_M(x) = \Lambda^A_B(x)e^B_M(x) = e^M_M(x) + \delta\omega^A_B(x)e^B_M(x). \quad (3.81)$$

Assim pode-se avaliar a transformação da quantidade $e^A_L\nabla_M e^{BL}$ até a primeira ordem em $\delta\omega$:

$$e'^A_L\nabla_M e'^{BL} \simeq e^A_L\nabla_M e^{BL} + \partial_M\delta\omega^B_C\eta^{AC} + \delta\omega^B_C e^A_L\nabla_M e^{CL} + \delta\omega^A_L e^C_L\nabla_M e^{BL}.$$

Multiplicando essa equação por $i\Sigma_{AB}/2$ e comparando com (3.77), pode-se inferir que a quantidade $ie^A_L\nabla_M e^{BL}\Sigma_{AB}/2$ satisfaz a equação de transformação para Ω_M . Logo, baseado nesse fato, pode-se escrever a conexão de spin como

$$\Omega_M = e^A_L\nabla_M e^{BL}\Sigma_{AB} = e^A_L(\partial_M e^{BL} + \Gamma^L_{MN}e^{BN})\Sigma_{AB} = \frac{i}{2}\Omega_M^{AB}\Sigma_{AB}, \quad (3.82)$$

onde os Ω_M^{AB} são chamados de coeficientes da conexão de spin, que satisfazem a relação de antissimetria $\Omega_M^{AB} = -\Omega_M^{BA}$. Com esses resultados a derivada spin covariante fica escrita como

$$D_A = e_A^M \left(\partial_M + \frac{1}{4}\Omega_M^{AB}\Gamma_A\Gamma_B \right), \quad (3.83)$$

bem como a ação de Dirac

$$S_{1/2} = \int d^D x \bar{\Psi}(x) \left[\Gamma^M \left(\partial_M + \frac{1}{4}\Omega_M^{AB}\Gamma_A\Gamma_B \right) - M \right] \Psi(x), \quad (3.84)$$

e a respectiva equação de movimento

$$\left[\Gamma^M \left(\partial_M + \frac{1}{4} \Omega_M^{AB} \Gamma_A \Gamma_B \right) - M \right] \Psi(x) = 0. \quad (3.85)$$

Esta é a equação de Dirac acoplada com gravidade. No próximo capítulo, ela será analisada no contexto do MRS-II de co-dimensão um.

4 LOCALIZAÇÃO DE MODO ZERO E RESSONÂNCIAS DO CAMPO ESPINORIAL

Neste capítulo analisa-se a localização do modo zero do campo espinorial sobre a p -brana. Aqui obtém-se as condições para que a ação efetiva de Dirac seja bem definida. Logo neste capítulo encontram-se soluções da equação de movimento tais que a integral (1.8) seja finita, o que é justamente a condição de quadrado integrável na Mecânica Quântica.

4.1 Equação de Dirac em Modelos de Mundo-Brana de Co-Dimensão Um

Como mencionado na introdução e na seção 2.6, o espectro de massa dos campos no MRS-II é determinado por uma equação tipo Schrödinger. Nesta seção será obtida esta equação para o caso do campo espinorial levando-se em conta um espaço-tempo com dimensão arbitrária. Os resultados desta seção em diante foram o objeto de estudo desta tese e publicados na forma de artigo científico intitulado “Spinors Fields in Co-dimension One Braneworlds” (MENDES; ALENCAR; LANDIM, 2018).

Aqui serão usados os conteúdos introduzidos nos capítulos de revisão 2 e 3. Como ponto de partida, considera-se a seguinte ação D -dimensional para férmions de Dirac não-massivos no espaço curvo

$$S_{1/2} = \int d^D x \sqrt{-g} \bar{\Psi} [\Gamma^M D_M - F(\phi, \pi) - \Gamma^M \partial_M H(\phi, \pi) \Gamma] \Psi, \quad (4.1)$$

onde $F(\phi, \pi)$ e $H(\phi, \pi)$ são termos de interação que envolvem o campo escalar ϕ e o dilaton π . A equação de Dirac resultante da ação (4.1) é

$$[\Gamma^M D_M - F(\phi, \pi) - \Gamma^M \partial_M H(\phi, \pi) \Gamma] \Psi(x, y) = 0. \quad (4.2)$$

Os vierbeins diferentes de zero para a métrica de Randall-Sundrum (2.16) são $e^\alpha{}_\mu = e^{A(y)} \delta_\mu^\alpha$ e $e^A{}_y = e^{B(y)} \delta_y^A$. Desta maneira, as componentes não-nulos da conexão de spin são

$$\Omega_\mu = \frac{1}{2} A'(y) e^{A(y)-B(y)} \Gamma_\mu \Gamma_y. \quad (4.3)$$

Com o resultado dos coeficientes da conexão de spin, pode-se avaliar o operador de Dirac $\Gamma^M D_M \Psi(x, y)$:

$$\begin{aligned} \Gamma^M D_M \Psi(x, y) &= (\Gamma^\mu \partial_\mu + \Gamma^\mu \Omega_\mu + e_y{}^y \Gamma^y D_y) \Psi(x, y), \\ &= \left\{ e^{-A(y)} \left[\Gamma^\mu \partial_\mu + \frac{1}{2} A'(y) e^{A(y)-B(y)} \Gamma_y \right] e^{-B(y)} \Gamma^y \partial_y \right\} \Psi(x, y), \end{aligned}$$

onde usou-se $\Gamma^\mu \Gamma_\mu = p + 1$ das matrizes gamma de Dirac e $\Gamma^\mu = e_\alpha{}^\mu \Gamma^\alpha$. E, portanto, a equação

de Dirac nesta geometria pode ser escrita como

$$\left\{ \Gamma^\mu \partial_\mu + e^{A(y)-B(y)} \left[\partial_y + \frac{(p+1)}{2} A'(y) \right] \Gamma_y - e^{A(y)} [F(\phi, \pi) + \partial_y H(\phi, \pi)] \right\} \Psi(x, y) = 0. \quad (4.4)$$

Como mencionado no capítulo 3, a representação espinorial do grupo de Lorentz muda com relação a dimensionalidade do espaço-tempo. Sendo mais específico, quando D é ímpar, existe uma matriz que divide o espinor de Dirac em duas representações disjuntas, a qual são chamadas de representação de Weyl, e quando D é par, esta matriz não existe e portanto nesta dimensionalidade trabalha-se somente com a representação de Dirac. Assim, nas próximas seções a representação espinorial será analisada separadamente, ou seja, casos em que D é ímpar ou par.

4.2 Redução Dimensional

4.2.1 Dimensionalidade ímpar

Mais uma vez, de acordo com o que foi exposto no capítulo 3, a equação (4.4) admite uma separação de variáveis da forma $\Psi(x, y) = \psi(x)f(y)$, onde $\psi(x)$ é o espinor de Dirac na p -brana e $f(y)$ é uma função escalar da dimensão extra y . Uma vez que a dimensão do bulk neste caso é ímpar, conclui-se que a dimensionalidade da p -brana é par, pois o modelo é de co-dimensão um. Então sobre a p -brana, além da representação de Dirac, existe as representações de Weyl $\psi_+(x)$ e $\psi_-(x)$ selecionadas pela matriz de quiralidade γ , por meio de $\gamma\psi_{n+}(x) = \psi_{n+}(x)$ e $\gamma\psi_{n-}(x) = -\psi_{n-}(x)$. Logo, pode-se admitir a seguinte decomposição para os modos de Kaluza-Klein

$$\Psi(x, y) = e^{-\frac{(p+1)}{2}A(y)} \sum_n [\psi_{n+}(x)f_{n+}(y) + \psi_{n-}(x)f_{n-}(y)]. \quad (4.5)$$

As equações massivas para os espinores na p -brana são

$$\gamma^\alpha \partial_\alpha \psi_{n+}(x) = m_n \psi_{n-}(x), \quad (4.6)$$

$$\gamma^\alpha \partial_\alpha \psi_{n-}(x) = m_n \psi_{n+}(x). \quad (4.7)$$

Assim, substituindo (4.5) em (4.4), as equações diferenciais para as funções $f_{n\pm}(y)$ tornam-se

$$\left\{ \partial_y + e^{B(y)} [F(\phi, \pi) + \partial_y H(\phi, \pi)] \right\} f_{n-}(y) = m_n e^{B(y)-A(y)} f_{n+}(y), \quad (4.8)$$

$$\left\{ \partial_y - e^{B(y)} [F(\phi, \pi) + \partial_y H(\phi, \pi)] \right\} f_{n+}(y) = -m_n e^{B(y)-A(y)} f_{n-}(y). \quad (4.9)$$

Substituindo uma equação na outra, obtém-se duas equações diferenciais ordinária de segunda ordem, semelhante a (2.89). Então de acordo com a discussão da seção 2.6.2, obtém-se duas

equações tipo Schrödinger, cujos potenciais são

$$U_{\pm}(z) = e^{2A(y)} [F(\phi, \pi) + \partial_y H(\phi, \pi)]^2 \pm \frac{e^{-B(y)}}{2} \partial_y \{e^{2A(y)} [F(\phi, \pi) + \partial_y H(\phi, \pi)]\}. \quad (4.10)$$

Diferentemente dos campos bosônicos, para os férmions, a dependência com a dimensionalidade do espaço-tempo não aparece explicitamente nas equações dos potenciais.

4.2.2 Dimensionalidade par

Para o caso em que a dimensionalidade do espaço-tempo é par, a separação de variáveis usada anteriormente não é mais válida. Para explicar isto de maneira clara, sabe-se do capítulo 3 que a dimensão da representação espinorial tem a forma $2^{\lfloor D/2 \rfloor}$, onde $\lfloor D/2 \rfloor$ representa a parte inteira da divisão $D/2$. Então, para $D = 4$, o espinor de Dirac é uma matriz coluna com $2^2 = 4$ linhas. Para $D = 5$ o espinor de Dirac tem o mesmo número de componentes do caso quadrimensional; mas para $D = 6$ o espinor de Dirac é uma matriz coluna de $2^3 = 8$ linhas. O problema reside na volta: quando a dimensão é reduzida de seis para cinco, o espinor de Dirac deve reduzir o número de componentes de oito para quatro. Por isso que a simples separação de variáveis como foi feita no caso em que a dimensionalidade era ímpar, não é mais válida. Então a separação de variáveis consistente com esta situação deve ser do tipo $\Psi(x, y) = \psi(x) \otimes \xi(y)$, onde $\psi(x)$ é o espinor de Dirac sobre a p -brana, o qual possui $2^{\lfloor D/2 \rfloor - 1}$ componentes, $\xi(y)$ é um bi-espinor (matriz coluna com duas colunas) e \otimes representa o produto de Kronecker (Apêndice A) ou produto direto de duas matrizes. Então a decomposição dos modos de Kaluza-Klein pode ser da forma

$$\Psi(x, y) = e^{-\frac{(p+1)}{2}A(y)} \sum_n \psi_n(x) \otimes \xi_n(y). \quad (4.11)$$

Desta feita, de acordo com com as equações (3.45), o operador $\Gamma^\alpha \partial_\alpha$ pode ser escrito como

$$\Gamma^\alpha \partial_\alpha = \Gamma^{(\alpha)} \partial_{(\alpha)} + \Gamma^{D-2} \partial_{D-2} = \left[\gamma^{(\alpha)} \partial_{(\alpha)} + \gamma \partial_{D-2} \right] \otimes \sigma^1 = (\gamma^\alpha \partial_\alpha) \otimes \sigma^1, \quad (4.12)$$

e escolhe-se $\Gamma_y = \Gamma^{D-1}$. Assim, o termo $\Gamma^\alpha \partial_\alpha \Psi(x, y)$ presente na equação (4.4) torna-se

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha \partial_\alpha \Psi(x, y) &= (\gamma^\alpha \partial_\alpha) \otimes \sigma^1 e^{-\frac{(p+1)}{2}A(y)} \sum_n \psi_n(x) \otimes \xi_n(y), \\ &= e^{-\frac{(p+1)}{2}A(y)} \sum_n \gamma^\alpha \partial_\alpha \psi_n(x) \otimes \sigma^1 \xi_n(y). \end{aligned}$$

Usando a equação de Dirac $\gamma^\alpha \partial_\alpha \psi_n(x) = m_n \psi_n(x)$, a equação anterior torna-se

$$\Gamma^\alpha \partial_\alpha \Psi(x, y) = e^{-\frac{(p+1)}{2}A(y)} \sum_n m_n \psi_n(x) \otimes \sigma^1 \xi_n(y). \quad (4.13)$$

Usando as propriedades das matrizes de Pauli expostas no apêndice B, chega-se na seguinte equação diferencial para $\xi(y)$

$$\frac{d\xi_n(y)}{dy} - e^{B(y)} \left\{ [F(\phi, \pi) + \partial_y H(\phi, \pi)] \sigma^3 - m_n e^{-A(y)} i \sigma^2 \right\} \xi_n(y) = 0. \quad (4.14)$$

A matriz σ^3 é a matriz de quiralidade em duas dimensões considerando $\Gamma^0 = i\sigma^2$ e $\Gamma^1 = \sigma^1$ como as matrizes de Dirac. Desta maneira, escreve-se o bi-espinor $\xi_n(y)$ como

$$\xi_n(y) = \begin{bmatrix} \xi_{n+}(y) \\ \xi_{n-}(y) \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

onde $\xi_{n+}(y)$ e $\xi_{n-}(y)$ são funções complexas. Portanto, substituindo (4.15) em (4.14), chega-se no seguinte sistema de equações diferenciais

$$\left\{ \partial_y + e^{B(y)} [F(\phi, \pi) + \partial_y H(\phi, \pi)] \right\} \xi_{n-}(y) = m_n e^{B(y)-A(y)} \xi_{n+}(y), \quad (4.16)$$

$$\left\{ \partial_y - e^{B(y)} [F(\phi, \pi) + \partial_y H(\phi, \pi)] \right\} \xi_{n+}(y) = -m_n e^{B(y)-A(y)} \xi_{n-}(y). \quad (4.17)$$

Estas equações são idênticas ao caso em que a dimensionalidade era ímpar. E, portanto, a forma matemática dos potenciais associados a cada equação tipo Schrödinger também são idênticos ao caso ímpar. No entanto a interpretação de cada potencial é diferente do caso ímpar. Se D é ímpar, sobre a p -brana existe espinores de Weyl com quiralidades direita ($\psi_{n+}(x)$) e esquerda ($\psi_{n-}(x)$), e portanto, os potenciais são associados a cada espinor de Weyl. Já quando D é par, a representação espinorial proíbe a existencia de espinores de Weyl sobre a p -brana. Assim, sobre a membrana, existe apenas férmions de Dirac. Logo, quando a dimensionalidade é par, os potenciais $U_{\pm}(z)$ estão associados ao mesmo espinor de Dirac. Então, foi percebido pelo autor desta tese que no caso em que a dimensionalidade é par, existe uma maior liberdade de escolha para os bi-espinores $\xi_{n+}(y)$ e $\xi_{n-}(y)$. Por exemplo, na próxima seção será mostrado que as escolhas $\xi_{n+}(y) \neq 0$ e $\xi_{n-}(y) = 0$ ou $\xi_{n+}(y) = 0$ and $\xi_{n-}(y) \neq 0$ podem localizar o modo zero do espinor de Dirac. No entanto estas escolhas particulares implicam na proibição de modos massivos sobre a membrana. Este fato pode ser verificado por substituição direta nas equações (4.16) (4.17). No estudo das ressonâncias, esta escolha não pode ser levada em conta, pois deve-se tomar $m_n \neq 0$.

O procedimento feito nesta seção é equivalente tomar, de início, na equação de Dirac (4.4), os espinores de Weyl

$$\Psi_+(x, y) = \sum_n \psi_n(x) \otimes \begin{bmatrix} \xi_{n+}(y) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi_-(x, y) = \sum_n \psi_n(x) \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_{n-}(y) \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Este procedimento não é verdade para o caso em que a dimensionalidade é ímpar, em virtude

da inexistência da matriz de quiralidade no bulk. Estes resultados serão usados para o estudo da localização do modo zero e das ressonâncias de férmions em dimensões arbitrárias.

4.3 Análise das Condições de Localização

Nesta seção faz-se uma análise geral acerca da localização do modo zero, levando em conta a ação (4.1) e a equação de Dirac (4.4). Aqui também será analisado em quais condições o espinor de Dirac é localizado sobre a p -brana, como a localização depende da dimensionalidade e quais parâmetros são fundamentais para o sucesso do mecanismo.

4.3.1 Dimensionalidade ímpar

Para o caso em que a dimensionalidade do espaço-tempo é ímpar, deve-se tomar as equações (4.8) e (4.9). Para o modo zero elas fornecem

$$f'_{\pm 0}(y) \mp e^{B(y)} [F(\phi, \pi) + \partial_y H(\phi, \pi)] f_{\pm 0}(y) = 0. \quad (4.19)$$

Têm-se aqui um conjunto de duas equações diferenciais de primeira ordem independentes. Logo, suas soluções são

$$f_{\pm 0}(y) = C_{\pm} \exp \left\{ \pm \int_y dy' e^{B(y')} [F(\phi(y'), \pi(y')) + \partial_{y'} H(\phi(y'), \pi(y'))] \right\}, \quad (4.20)$$

onde o índice (+) refere-se a quiralidade direita e o índice (-) corresponde à quiralidade esquerda dos espinores de Weyl e C_{\pm} são constantes de integração arbitrárias. A seguir mostra-se que, neste cenário, o termo de interação é fundamental para o sucesso da localização do modo zero. De fato, substituindo-se (4.5) em (4.1), a ação efetiva $(D-1)$ -dimensional torna-se

$$S_{1/2} = \int d^{D-1}x \bar{\psi}_{0+} \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi_{0+} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-A(y)+B(y)} |f_{0+}(y)|^2 \right] + \\ + \int d^{D-1}x \bar{\psi}_{0-} \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi_{0-} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-A(y)+B(y)} |f_{0-}(y)|^2 \right]. \quad (4.21)$$

Nota-se então que a localização do modo zero depende da convergência das integrais

$$I_{\text{impar}\pm} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-A(y)+B(y)} |f_{0\pm}(y)|^2. \quad (4.22)$$

Portanto, usando as soluções (4.20), tem-se

$$I_{\text{impar}\pm} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp \left\{ -A(y) + B(y) \pm 2 \int_y dy' e^{B(y')} [F(\phi, \pi) + \partial_{y'} H(\phi, \pi)] \right\}. \quad (4.23)$$

Como mencionado anteriormente, se os termos de interação não estivessem presentes na ação, as integrações (4.23) não iriam convergir, pois teriam-se integrações de uma função exponencial

crecente em toda a dimensão extra, o que acarretaria em uma divergência. Logo, dependendo da forma funcional dos termos de interação, a localização pode ser bem sucedida.

4.3.2 Dimensionalidade par

Agora a atenção será voltada para a dimensionalidade par. Neste caso, as equações (4.16) e (4.17) para $m = 0$ tornam-se

$$\xi'_{0\pm}(y) \mp e^{B(y)} [F(\phi, \pi) + \partial_y H(\phi, \pi)] \xi_{0\pm}(y) = 0, \quad (4.24)$$

com soluções

$$\xi_{0\pm}(y) = \bar{\xi}_{\pm} \exp \left\{ \pm \int_y dy' e^{B(y')} [F(\phi(y'), \pi(y')) + \partial_{y'} H(\phi(y'), \pi(y'))] \right\}, \quad (4.25)$$

onde $\bar{\xi}_{\pm}$ são constantes complexas arbitrárias. Semelhantemente ao que foi feito na subseção anterior, substitui-se (4.11) em (4.1). Como resultado, tem-se que a ação efetiva de dimensão $D - 1$ para o modo zero é

$$S_{1/2} = \int d^{D-1}x \bar{\psi}_0 \gamma^\mu \partial_\mu \psi_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-A(y)+B(y)} [|\xi_{0+}(y)|^2 + |\xi_{0-}(y)|^2]. \quad (4.26)$$

Semelhantemente ao que foi feito no caso anterior, também analisa-se a convergência da integral

$$I_{par} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-A(y)+B(y)} [|\xi_{0+}(y)|^2 + |\xi_{0-}(y)|^2]. \quad (4.27)$$

Portanto, substituindo as equações (4.25) na integral I_{even} , mostra-se que

$$I_{par} = I_{impar+} + I_{impar-}, \quad (4.28)$$

onde $I_{impar\mp}$ são dados pela equação (4.23). De acordo com a equação (4.28), o espinor de Dirac $\psi_0(x)$ só é localizado se I_{impar+} e I_{impar-} convergirem simultaneamente. No entanto, na maioria dos casos, essa condição não é obedecida, comprometendo o mecanismo de localização. Este aparente problema pode ser resolvido, somente para o modo zero, escolhendo apropriadamente as funções complexas $\xi_{0+}(y)$ e $\xi_{0-}(y)$ de tal maneira que elas continuem satisfazendo as equações diferenciais (4.16) e (4.17). Nesta tese a escolha feita foi $\xi_{0+}(y) \neq 0$ e $\xi_{0-}(y) = 0$ se a integral I_{impar-} for divergente, e portanto a equação (4.28) torna-se $I_{par} = I_{impar+}$, ou $\xi_{0+}(y) = 0$ e $\xi_{0-}(y) \neq 0$ se a integral I_{impar+} for divergente, e com esta escolha a equação (4.28) toma a forma $I_{par} = I_{impar-}$.

4.4 Casos Especiais

4.4.1 Brana Fina

Primeiro será analisado a localização do modo zero para o caso de uma p -brana tipo delta de Dirac, que foi introduzido na seção 2.2. Substituindo $A(y) = -k_p|y|$, $F(\phi, \pi) = H(\phi, \pi) = 0$ e $B(y) = 0$ nas equações (4.20) e (4.25), encontra-se que $f_0(y) = \text{constante}$ e $\xi_0(y)$ como sendo um espinor constante também. Para este caso, a integral de localização toma a forma

$$I_{\text{impar}+} = I_{\text{impar}-} = I \equiv |C|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{k_p|y|} \rightarrow \infty. \quad (4.29)$$

Portanto, pode-se observar que férmions de Dirac não são localizados tanto em dimensões ímpares como em dimensões pares. O trabalho de (BAJC; GABADADZE, 2000) analisou o caso particular em que $D = 5$. Logo o resultado encontrado foi uma generalização do caso pentadimensional. No contexto de p -branas tipo delta de Dirac a localização só é bem sucedida para o caso de membranas de tensão negativa ($k_p < 0$). No entanto os casos de membrana com tensão negativa devem ser analisados com maior cuidado, em virtude de não satisfazerem as condições padrões de energia positiva e a presença de singularidades (BURGESS et al., 2002). Assim para localizar férmions de spin 1/2 no contexto de MRS-II usa-se o mecanismo proposto por (KEHAGIAS; TAMVAKIS, 2001), que consiste na introdução de um termo de interação dos férmions com campos escalares.

4.4.2 Brana espessa sem acoplamento com dilaton

Quando considera-se o modelo Randall-Sundrum suave, sem a presença do dilaton, a função $A(y)$ do fator de dobra é dada por (2.47) e pode ser escrita ainda por

$$e^{A(y)} = \frac{\exp\left[\frac{\beta_p}{2} \tanh^2(by)\right]}{[\cosh(by)]^{2\beta_p}}. \quad (4.30)$$

O tipo de interação escolhida aqui será a de Yukawa, dada por $F(\phi, \pi) = F(\phi) = \eta_1 \phi$, onde η_1 é uma constante de acoplamento e $\phi(y)$ o campo escalar que fornece solução de Kink. Desta forma as integrais de localização (4.23) tornam-se

$$I_{\text{impar}\pm} = |C_{\pm}|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dy [\cosh(by)]^{2(\beta_p \pm a\eta_1/b)} \exp\left[\frac{\beta_p}{2} \tanh^2(by)\right]. \quad (4.31)$$

A avaliação deste tipo de integração deve ser feita assintoticamente. Para $y \rightarrow \pm\infty$, o integrando possui um comportamento proporcional a $e^{2b|y|(\beta_p \pm a\eta_1/b)}$ e a integral (4.31) irá convergir se

$$|\eta_1| > \frac{b\beta_p}{a}. \quad (4.32)$$

Portanto quando a dimensionalidade do bulk for ímpar, os espinores de Weyl de quiralidade esquerda $\psi_{0-}(x)$ serão localizados se a condição $\eta_1 > 0$ é satisfeita. Entretanto, se $\eta_1 < 0$ somente espinores de Weyl de quiralidade direita $\psi_{0+}(x)$ são localizados, isto se a mesma condição sobre η_1 for verdadeira. Logo, pode-se concluir que quando a dimensionalidade do espaço-tempo é ímpar, espinores de Weyl com quiralidades diferentes não podem ser localizados simultaneamente.

Quando a dimensionalidade do espaço-tempo é par, como já mencionado várias vezes, não existe espinores de Weyl na p -brana, assim os sinais \pm estão relacionados às funções complexas $\xi_{0\pm}(y)$. Portanto, de acordo com a seção 4.3 fermions de Dirac são localizáveis, para $\eta_1 > 0$ se $\xi_{0+}(y) = 0$ e $\xi_{0-}(y) \neq 0$ ou para $\eta_1 < 0$ se $\xi_{0+}(y) \neq 0$ e $\xi_{0-}(y) = 0$.

4.4.3 Brana espessa com acoplamento com dilaton

Nesta seção será analisado a localização do modo zero de férmions quando o dilaton é inserido. Neste contexto, considera-se $H(\phi, \pi) = 0$, $F(\phi, \pi) = \eta_2 \phi e^{-\lambda \pi}$, onde η_2 é uma constante de acoplamento da interação tipo Yukawa e λ é uma constante de acoplamento referente ao dilaton $\pi(y)$. Neste caso considera-se a função $A(y)$ também dada por (2.47) mas $B(y) \neq 0$ agora é dada por (2.67). Assim a integral de localização (4.23) para a dimensionalidade par fica

$$I_{\text{impar}\pm} = |C_{\pm}|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp \left[(r-1)A(y) \pm 2a\eta_2 \int_y dy' e^{(r+2\lambda\sqrt{rpM^p})A(y')} \tanh(by') \right]. \quad (4.33)$$

Aqui define-se $\alpha_p \equiv r + 2\lambda\sqrt{rpM^p}$, e portanto existirão dois casos a serem analisados: (i) $\alpha_p = 0$ e (ii) $\alpha_p \neq 0$.

4.4.3.1 Caso 1: $\alpha_p = 0$

Neste caso a integral de localização (4.33) pode ser escrita como

$$I_{\text{impar}\pm} = |C_{\pm}|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{\left[\frac{\beta_p(r-1)}{2} \tanh^2(by) \right]} [\cosh(by)]^2 [\beta_p(1-r) \pm a\eta_2/b]. \quad (4.34)$$

Novamente a avaliação destas integrais será feita assintoticamente. Quando $y \rightarrow \pm\infty$, tem-se que

$$I_{\text{impar}\pm} \propto \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp \left(\pm \frac{2a\eta_2}{b} |y| \right), & \text{for } r = 1; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp \{ 2 [\beta_p b(1-r) \pm a\eta_2] |y| \}, & \text{for } r \neq 1. \end{cases} \quad (4.35)$$

Para $r = 1$ e considerando dimensionalidade ímpar, tem-se um resultado semelhante ao caso de brana espessa, i.e., somente férmions de quiralidade esquerda (direita) são localizados, isto se $\eta_2 > 0$ ($\eta_2 < 0$). Quando a dimensionalidade do espaço-tempo é par, férmions de Dirac são

localizados somente se for escolhido $\xi_{0+}(y) = 0$ e $\xi_{0-}(y) \neq 0$ para $\eta_2 > 0$ ou $\xi_{0+}(y) \neq 0$ e $\xi_{0-}(y) = 0$ para $\eta_2 < 0$. Entretanto, para $r \neq 1$, a análise é mais delicada, porque a densidade de energia (2.74) deve ser finita. Neste caso, a localização irá ser bem sucedida se $\beta_p b(1-r) \pm a\eta_2 < 0$.

Para $0 < r < 1$, esta condição pode ser escrita como $|\eta_2| > \beta_p b(1-r)/a$ e portanto conclui-se que, quando a dimensionalidade é ímpar e quando $\eta_2 > 0$, fermions de Weyl de quiralidade esquerda são localizados. Mas por outro lado, se $\eta_2 < 0$, então somente férmions de Weyl de quiralidade direita são localizados. Para dimensões pares, o espinor de Dirac $\psi_0(x)$ será localizado se for escolhido $\xi_{0+}(y) = 0$ e $\xi_{0-}(y) \neq 0$ para $\eta_2 > 0$ ou $\xi_{0+}(y) \neq 0$ e $\xi_{0-}(y) = 0$ para $\eta_2 < 0$.

Para $r = (p+1)/2 > 1$, a condição de localização pode ser escrita como $|\eta_2| < \beta_p b(D-3)/2a$, onde D é a dimensionalidade do bulk. Portanto, tanto para $\eta_2 > 0$ como para $\eta_2 < 0$, o espinor de Dirac $\psi_0(x)$ é localizado em dimensões pares e ímpares. Além disso, neste caso, o mecanismo de localização é melhorado com o aumento da dimensionalidade, ou seja, quanto maior a dimensionalidade mais confinado o espinor de Dirac será sobre a p -brana.

4.4.3.2 Caso 2: $\alpha_p \neq 0$

Neste caso, pode-se definir a integral

$$I(y) \equiv \int_y dy' e^{\alpha_p A(y')} \tanh(by'), \quad (4.36)$$

e portanto para $y \rightarrow \pm\infty$ tem-se que

$$I(y) \propto -\frac{1}{2\alpha_p} e^{-\alpha_p |y|}, \quad (4.37)$$

e então a integral de localização (4.33) torna-se

$$I_{\text{impar}\pm} \propto \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp\left(\mp \frac{a\eta_2}{\alpha_p} e^{-\alpha_p |y|}\right), & \text{for } r = 1; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp\left[-(r-1)\beta_p b|y| \mp \frac{a\eta_2}{\alpha_p} e^{-\alpha_p |y|}\right], & \text{for } r \neq 1. \end{cases} \quad (4.38)$$

Diferentemente do caso anterior, para cada valor de r deve-se analisar o sinal de α_p . Assim, para $r = 1$ tem-se duas situações: $\alpha_p < 0$ and $\alpha_p > 0$. Quando $\alpha_p < 0$, de acordo com (4.38), para dimensões ímpares férmions de quiralidade direita $\psi_{0+}(x)$ são localizados somente se $\eta_2 > 0$. Por outro lado, férmions de quiralidade esquerda são localizados somente se $\eta_2 < 0$. Assim pode-se concluir que espinores com diferentes quiralidades não são localizados simultaneamente. Quando a dimensionalidade do bulk é par o espinor de Dirac $\psi_0(x)$ será localizado mediante a escolha $\xi_{0+}(y) \neq 0$ e $\xi_{0-}(y) = 0$ para $\eta_2 > 0$ ou $\xi_{0+}(y) = 0$ e $\xi_{0-}(y) \neq 0$ para

$\eta_2 < 0$. Quando $\alpha_p > 0$, a primeira integral (4.38) é sempre divergente, e portanto neste caso, não é possível localizar espinores tanto em dimensões pares como em dimensões ímpares.

Para $0 < r < 1$, também será feita a análise levando em conta os casos $\alpha_p < 0$ e $\alpha_p > 0$. Quando $\alpha_p < 0$, tem-se que a integral de localização $I_{\text{impar}\pm}$ torna-se assintoticamente idêntica ao caso anterior ($r = 1$), gerando os mesmos resultados. Quando $\alpha_p > 0$, a integral $I_{\text{impar}\pm}$ fica

$$I_{\text{impar}\pm} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{(1-r)\beta_p b|y|} \rightarrow \infty. \quad (4.39)$$

Desta maneira, observa-se que não é possível localizar campos espinoriais tanto em dimensões pares quanto ímpares.

Por fim, quando $r = (p + 1)/2 > 1$ e $\alpha_p < 0$, nota-se que os mesmos resultados do caso $r = 1$ e $\alpha_p < 0$ são gerados. Isto se deve ao fato de que quando $y \rightarrow \infty$ o termo $\mp \frac{a\eta_2}{\alpha_p} e^{-\alpha_p|y|}$ é dominante sobre o outro termo $-(r-1)\beta_p b|y|$ do integrando da segunda equação (4.38). Entretanto para $\alpha_p > 0$ a segunda equação torna-se

$$I_{\text{impar}\pm} \propto \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-\frac{(D-3)}{2}\beta_p b|y|} < \infty, \quad (4.40)$$

e pode-se concluir que o espinor de Dirac $\psi_0(x)$ é localizado tanto na dimensionalidade par quanto ímpar, independentemente do sinal do parâmetro η_2 . Este é um resultado que chamou muita atenção, porque uma escolha adequada deste parâmetro r , que é exclusivamente relacionado ao bulk, eliminou qualquer escolha do sinal da constante de acoplamento η_2 . Isso não foi encontrado na literatura científica da atualidade, porque a maioria dos pesquisadores da área quase sempre adota a escolha $r = 1/4$. E, como mostrado anteriormente, este valor de r não é uma boa escolha para localizar férmions.

4.4.4 Acoplamento derivativo com o dilaton

Agora será analisado a localização do modo zero para $F(\phi, \pi) = 0$ and $H(\phi, \pi) = h\pi(y)$, onde h é uma constante de acoplamento real. Este assunto é abordado por (LIU et al., 2014) mas somente para $D = 5$ e $r = 1$. Aqui, faz-se uma análise mais completa. Para o caso em questão, a integral de localização (4.23) torna-se

$$I_{\text{impar}\pm} = |C_{\pm}|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp \left[(r-1)A(y) \mp 4h \sqrt{\frac{pM^p}{r}} e^{rA(y)} \right]. \quad (4.41)$$

Para verificar a convergência ou a divergência desta integral, deve-se analisá-la assintoticamente. Quando $y \rightarrow \infty$, tem-se

$$I_{\text{impar}\pm} \propto \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp\left(\mp 4h\sqrt{pM^p} e^{-2b\beta_p|y|}\right), & \text{for } r = 1; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp\left[-2b\beta_p(r-1)|y| \mp 4h\sqrt{\frac{pM^p}{r}} e^{-2b\beta_p r|y|}\right], & \text{for } r \neq 1. \end{cases} \quad (4.42)$$

Para $r = 1$ a integral $I_{\text{impar}\pm}$ diverge, pois $e^{-2b\beta_p|y|} \rightarrow 0$ quando $y \rightarrow \pm\infty$, e portanto $\mp 4h\sqrt{pM^p} e^{-2b\beta_p|y|}$ tende para um valor constante. Dessa forma conclui-se que o campo espinorial de spin 1/2 não são localizados tanto para a dimensionalidade par quanto ímpar.

Para $0 < r < 1$, a integral $I_{\text{impar}\pm}$ torna-se

$$I_{\text{impar}\pm} \propto \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{2b\beta_p(1-r)|y|} \rightarrow \infty. \quad (4.43)$$

E portanto, mais uma vez, tanto para as dimensionalidades ímpares quanto para as pares, nem férmions de Weyl nem de Dirac são localizados.

Para $r = (p+1)/2 > 1$, tem-se que

$$I_{\text{impar}\pm} \propto \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-2b\beta_p \frac{(D-3)}{2}|y|} < \infty, \quad (4.44)$$

mostrando, diferentemente dos casos anteriores, que o campo espinorial de Dirac é localizado sobre a p -brana, tanto para o caso em que a dimensionalidade é par, como para o caso ímpar. Este resultado mostra mais uma vez a influência do parâmetro r no mecanismo de localização.

4.5 Ressonâncias

Agora a atenção será voltada para os modos massivos, em especial para a possibilidade de existência de modos ressonantes sobre a p -brana. A análise será baseada no método numérico apresentado na seção 2.7 e é estritamente dependente do tipo de potencial exibido pela equação tipo Schrödinger. Nesta seção será considerado o modelo de membranas geradas por campos escalares tal como encontrado em (KEHAGIAS; TAMVAKIS, 2001), no entanto sempre observando se a dimensionalidade do bulk influencia o aparecimento de picos de ressonâncias.

4.5.1 Acoplamento Yukawa-Dilatônico

Nesta subseção a análise é baseada nos potenciais (4.10) para o caso em que $F(\phi, \pi) = \eta_2 \phi e^{-\lambda\pi}$ and $H(\phi, \pi) = 0$, para as dimensionalidades do bulk fixadas em $D = 5, 10$, levando em conta os seguintes valores para o parâmetro de deformação $s = 1$ (não-deformado), $s = 3$ e $s = 5$, atribuindo os seguintes valores para a constante de acoplamento do dilaton $\lambda = 0, 4$ e

$$\lambda = 1/\sqrt{pM^p}.$$

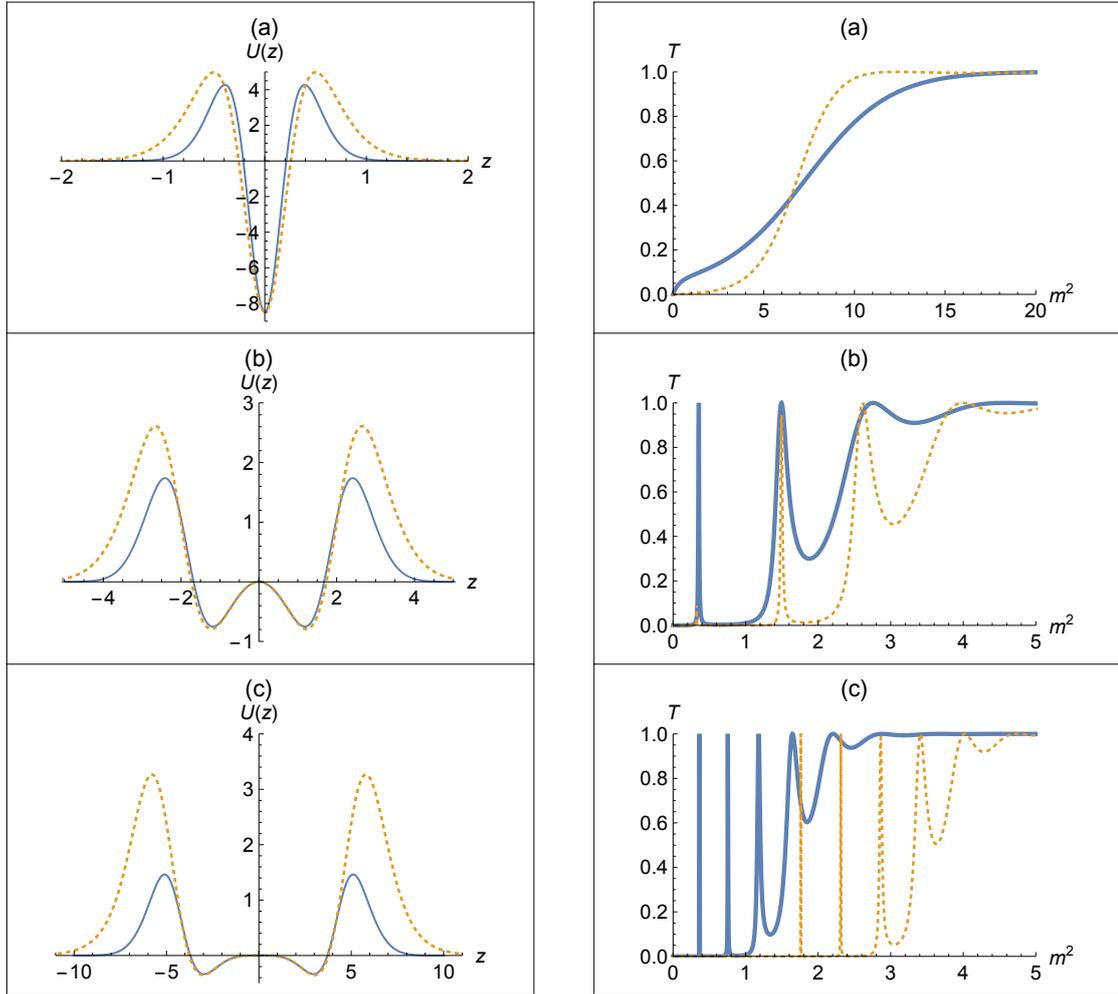


Figura 12: Potenciais $U(z)$ e coeficiente de transmissão $T(m^2)$ para férmions de Weyl de quiralidade esquerda ($D = 5$) e férmions de Dirac ($D = 10$) escolhendo $\xi_{n-}(x)$ e $\eta_2 = 1$ com $\lambda = 0,4$. A linha contínua representa o potencial para $D = 5$ enquanto que o pontilhado representa o potencial para $D = 10$, e $s = 1$ (a, d), $s = 3$ (b, e) and $s = 5$ (c, f).

Tabela 1: Picos de ressonância para férmions de quiralidade esquerda ($D = 5$) e para férmions de Dirac ($D = 10$, escolhendo $\xi_{n-}(x)$) para $\lambda = 0,4$.

Defeitos Topológicos	Picos de Ressonância (m^2)					
	$D = 5$			$D = 10$		
$s = 1$	-	-	-	-	-	-
$s = 3$	0,35	-	-	1,5	-	-
$s = 5$	0,36	0,75	1,1	1,75	2,3	2,85
Dimensionalidade	$D = 5$			$D = 10$		

Para o caso em que $\lambda = 0,4$, analisa-se fermions de Weyl de quiralidade esquerda e direita ($D = 5$) e o espinor de Dirac ($D = 10$). Mostra-se os respectivos potenciais e coeficientes de transmissão na Figs. 12 e 13. Particularmente, em dimensões pares, se o coeficiente de

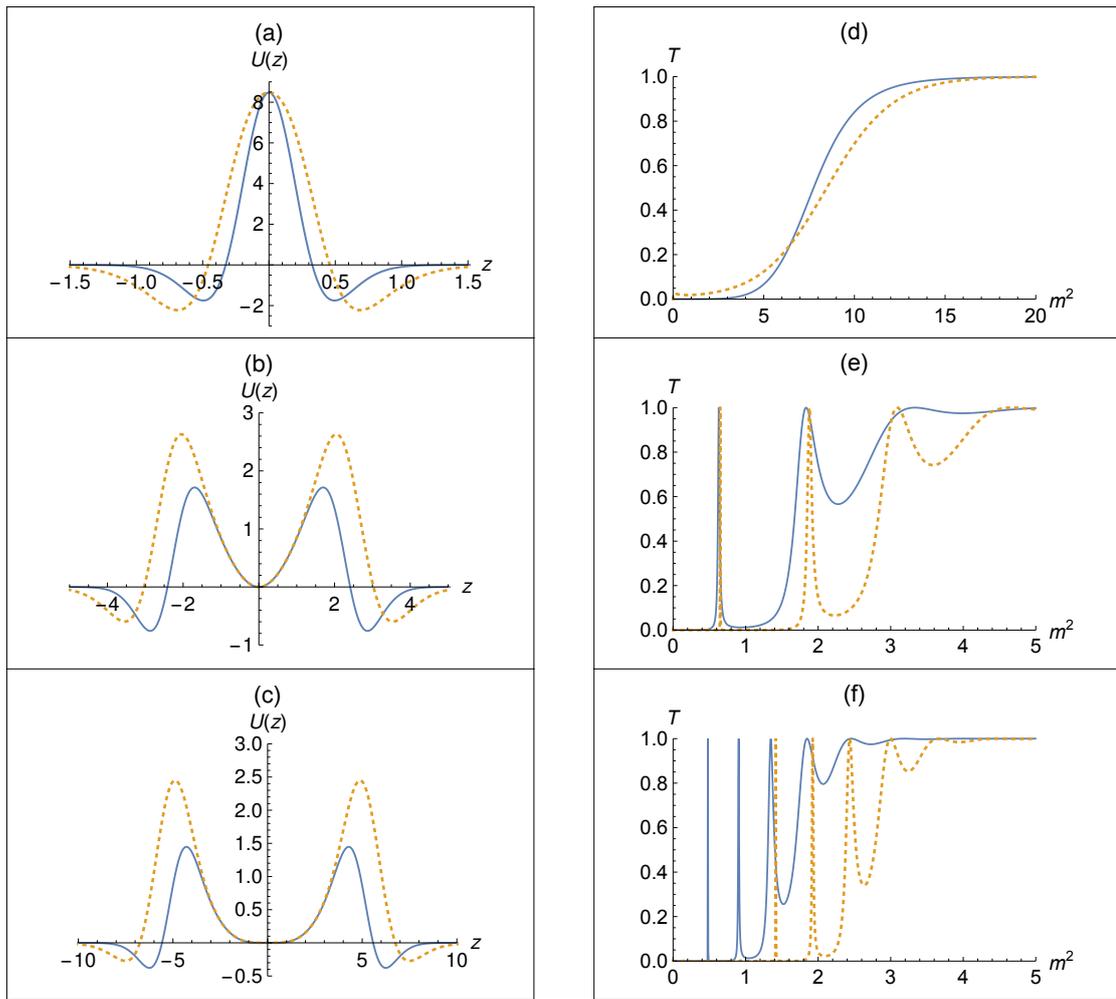


Figura 13: Potenciais $U(z)$ e coeficiente de transmissão $T(m^2)$ para férmions de Weyl de quiralidade direita ($D = 5$) e férmions de Dirac ($D = 10$) escolhendo $\xi_{n-}(x)$ e $\eta_2 = 1$ com $\lambda = 0, 4$. A linha contínua representa o potencial para $D = 5$ enquanto que o pontilhado representa o potencial para $D = 10$, e $s = 1$ (a, d), $s = 3$ (b, e) and $s = 5$ (c, f).

Tabela 2: Picos de ressonância para férmions de quiralidade direita ($D = 5$) e para férmions de Dirac ($D = 10$, escolhendo $\xi_{n+}(x)$) para $\lambda = 0, 4$.

Defeitos Topológicos	Picos de Ressonância (m^2)			
	$D = 5$	$D = 10$	$D = 5$	$D = 10$
$s = 1$	-	-	-	-
$s = 3$	0,63	-	0,65	1,8
$s = 5$	0,48	0,9	1,4	1,9
Dimensionalidade	$D = 5$		$D = 10$	

transmissão relacionado a $\xi_{n+}(x)$ ou $\xi_{n-}(x)$ mostra um pico de ressonância para $m^2 \leq U_{max}$, então esta última condição é suficiente para a existência de modos ressonantes sobre a p -brana. No caso de dimensões ímpares, como existem espinores de Weyl com diferentes quiralidades, a análise dos modos ressonantes deve ser feita de maneira separada, isto é, deve-se plotar os

gráficos dos potenciais e coeficientes de transmissão relativas a cada quiralidade.

O potencial para férmions de quiralidade esquerda para $s = 1$ é similar a uma barreira de potencial dupla, assim é possível que exista modos ressonantes (LANDIM et al., 2011; LANDIM et al., 2012; ALENCAR et al., 2013). Por outro lado, para férmions de quiralidade direita, quando $s = 1$ isto não é verdade, porque o potencial tem a forma de uma barreira simples. No entanto pode-se observar que mesmo o potencial mostrado na Fig. 12 (a) sendo da forma de uma barreira de potencial dupla, não apresenta modos ressonantes. Também pode-se observar nestes casos que os defeitos topológicos deformados são responsáveis diretos pelo aparecimento de picos de ressonâncias. Observa-se, que para o caso em que $\lambda = 0,4$ (Fig. 12), que o número de picos de ressonância aumenta com o aumento do parâmetro de deformação s , o que já era esperado. No entanto, um aspecto novo é o deslocamento destes picos com o aumento da dimensionalidade, como mostra a Fig. 12 e a tabela 1, para os casos $s = 1, 5$.

Os potenciais e coeficientes de transmissão para férmions de quiralidade direita ($D = 5$) e férmions de Dirac ($D = 10$) usando a função $\xi_{n_+}(y)$ são mostrados na Fig. 13. Neste caso, observa-se que o potencial para o caso $s = 1$ possui a forma de barreira única, e portanto não apresenta modos ressonantes. No entanto para os casos em que $s = 3, 5$, isto é, na presença de defeitos topológicos deformados, apareceram picos de ressonância como mostrado na tabela 2. Então mais uma vez os resultados obtidos reforçam a afirmação de que as ressonâncias são fortemente dependentes do parâmetro de deformação s .

De acordo com os resultados obtidos até aqui, observou-se que defeitos topológicos deformados são os principais responsáveis pelo aparecimento de picos de ressonância, mostrando que o aumento na dimensionalidade do espaço-tempo não influenciam em nada neste aspecto. No entanto, após estas observações, analisa-se o caso em que $\lambda = 1/(2\sqrt{p})$ (Fig. 14 (d)), e observou-se a formação de um pico de ressonância para $D = 10$ sem a presença de defeitos topológicos deformados. Este fato faz cair por terra o argumento de que somente defeitos topológicos deformados contribuem para o aparecimento de picos de ressonância. O autor desta tese descobriu que modos ressonantes podem aparecer quando aumenta-se a dimensionalidade do espaço-tempo. A tabela 3 mostra um pico de ressonância formado em $m^2 \simeq 10,5$, quando $D = 10$, enquanto que para $D = 5$ não existem modos ressonantes.

4.5.2 *Acoplamento derivativo com o dilaton*

Nesta subseção considera-se um caso que ainda não foi estudado na literatura, que é o estudo dos modos ressonantes para um acoplamento do tipo $F(\phi, \pi) = 0$ e $H(\phi, \pi) = h\pi$. O que foi feito na literatura encontra-se no trabalho (LIU et al., 2014) somente para $D = 5$ e sem defeitos topológicos deformados. Então o autor desta tese propôs uma generalização para modelos de co-dimensão um, à luz do Método da Matriz de Transferência.

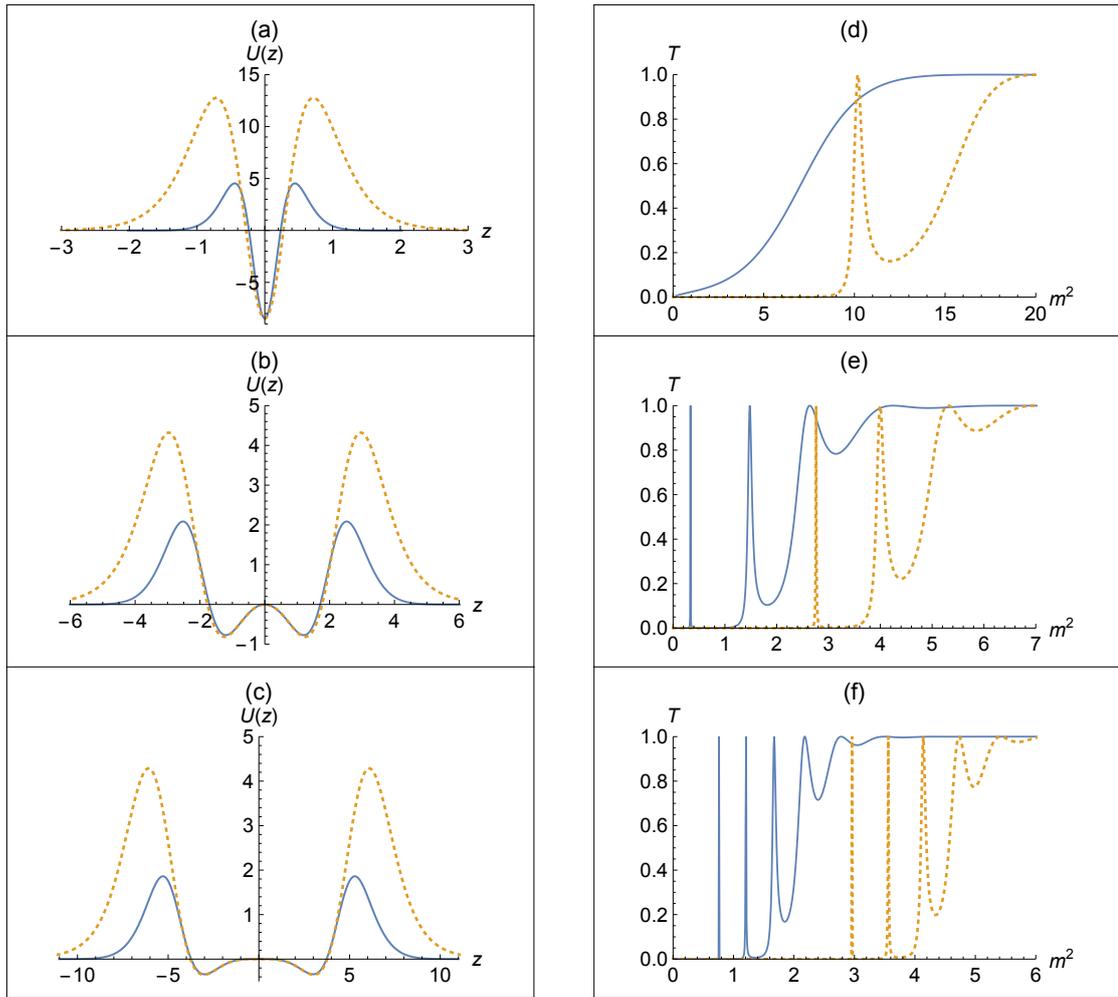


Figura 14: Potenciais $U(z)$ e coeficiente de transmissão $T(m^2)$ para férmions de Weyl de quiralidade esquerda ($D = 5$) e férmions de Dirac ($D = 10$) escolhendo $\xi_{n-}(x)$ e $\eta_2 = 1$ com $\lambda = 1/(2\sqrt{p})$. A linha contínua representa o potencial para $D = 5$ enquanto que o pontilhado representa o potencial para $D = 10$, e $s = 1$ (a, d), $s = 3$ (b, e) and $s = 5$ (c, f).

Tabela 3: Picos de ressonância para férmions de quiralidade esquerda ($D = 5$) e para férmions de Dirac ($D = 10$, escolhendo $\xi_{n-}(x)$) para $\lambda = 1/(2\sqrt{p})$.

Defeitos Topológicos	Picos de Ressonâncias (m^2)					
	$D = 5$			$D = 10$		
$s = 1$	-	-	-	10,5	-	-
$s = 3$	0,4	1,5	-	2,8	4,0	-
$s = 5$	0,8	1,2	1,7	3,0	3,6	4,2
Dimensionalidade	$D = 5$			$D = 10$		

Mostra-se na Fig. 15 (a) os gráficos dos potenciais para fermions de quiralidade esquerda ($D = 5$) e de férmions de Dirac ($D = 10$) tomando a função $\xi_{n-}(x)$ para o caso do acoplamento derivativo com o dilaton. Na Fig. 15 (d) mostra-se o coeficiente de transmissão para $D = 5, 10$ e $s = 1$. Neste caso, embora o potencial possua a forma de uma barreira de

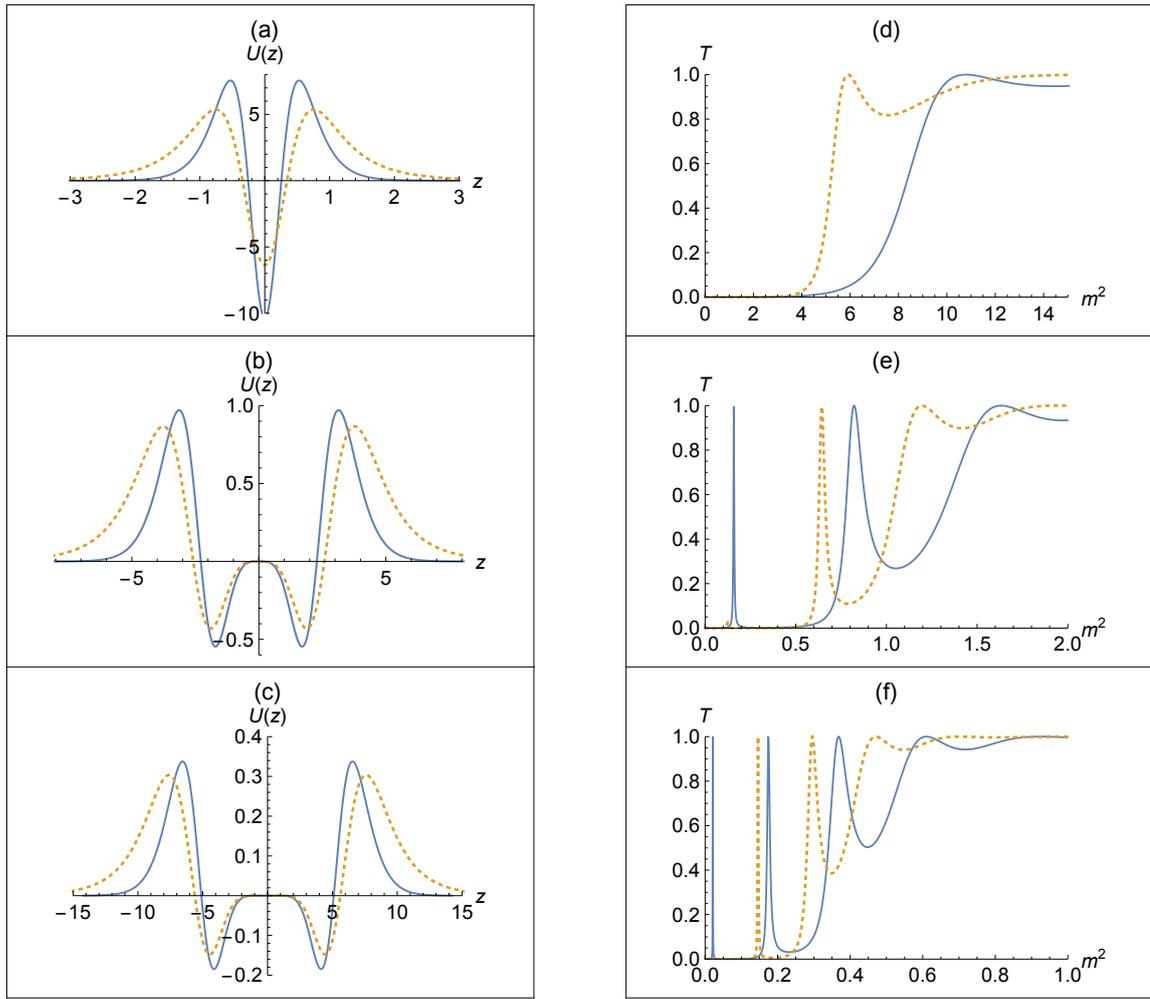


Figura 15: Potenciais $U(z)$ e coeficientes de transmissão $T(m^2)$ para férmions massivos de quiralidade esquerda para $D = 5$ (linha contínua) e para férmions de Dirac para $D = 10$ (pontilhado) escolhendo a função $\xi_{n-}(x)$ com $h = 1$ e $s = 1$ (a, d), $s = 3$ (b, e) and $s = 5$ (c, f) considerando um acoplamento derivativo com o dilatón.

Tabela 4: Picos de Ressonância relacionados com a Fig. 15

Defeitos Topológicos	Picos de Ressoâncias (m^2)			
$s = 1$	-	-	-	-
$s = 3$	0,16	-	0,65	-
$s = 5$	0,02	0,17	0,15	-
Dimensionalidade	$D = 5$		$D = 10$	

potencial dupla, não foi observado a presença de modos ressonantes. Nas Figs. 15 (b), (c) e 15 (e), (f) também mostra-se os potenciais e coeficientes de transmissão para os casos em que existem defeitos topológicos deformados para $s = 3, 5$. Nestes, ouve a formação de picos de ressonância, como mostra a tabela 4.

Para o caso de férmions de quiralidade direita ($D = 5$) e férmions de Dirac tomando

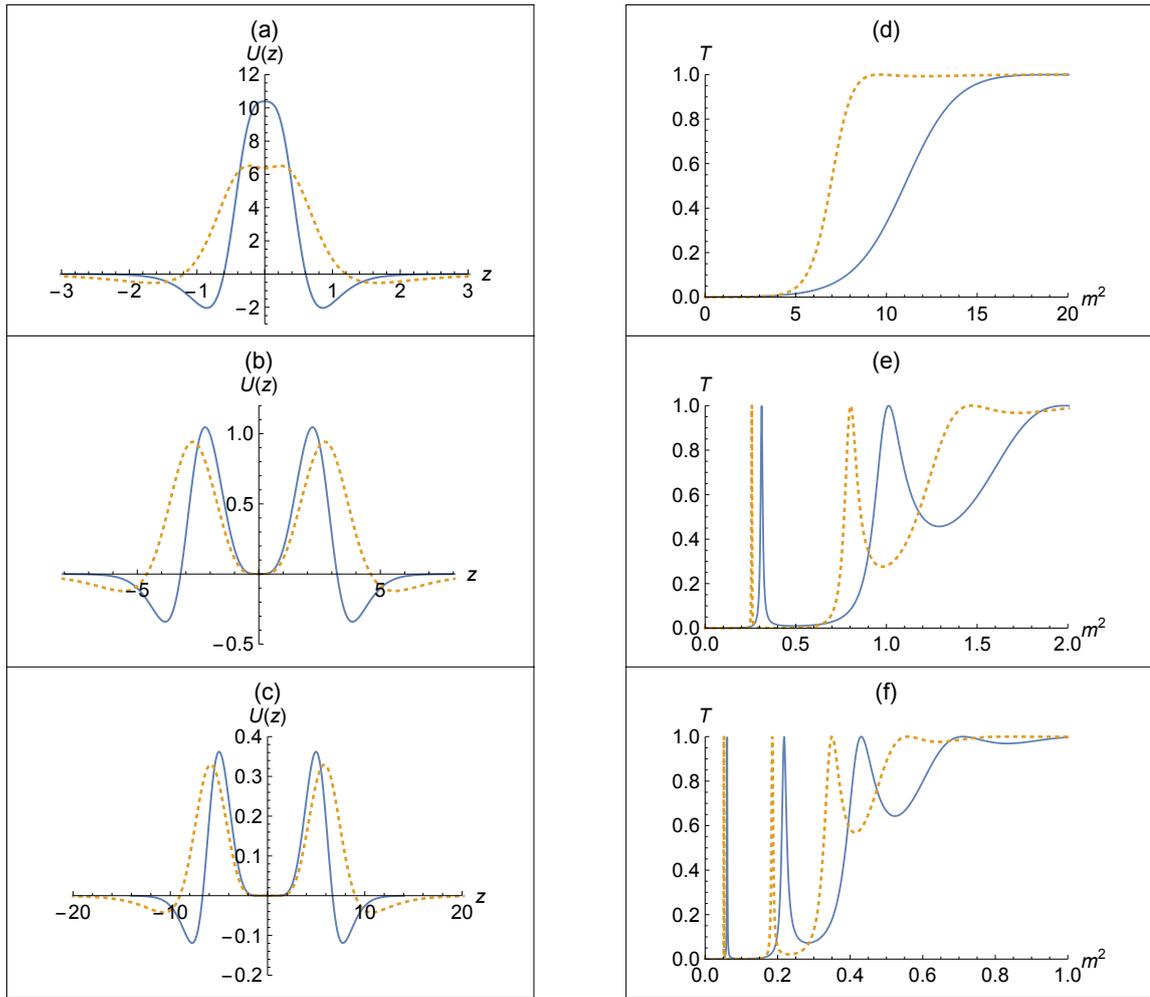


Figura 16: Potenciais $U(z)$ e coeficientes de transmissão $T(m^2)$ para férmions massivos de quiralidade direita para $D = 5$ (linha contínua) e para férmions de Dirac para $D = 10$ (pontilhado) escolhendo a função $\xi_{n+}(x)$ com $h = 1$ e $s = 1$ (a, d), $s = 3$ (b, e) and $s = 5$ (c, f) considerando um acoplamento derivativo com o dilaton.

Defeitos Topológicos	Picos de Ressonâncias (m^2)			
$s = 1$	-	-	-	-
$s = 3$	0,33	-	0,25	-
$s = 5$	0,07	0,23	0,05	0,19
Dimensionalidade	$D = 5$		$D = 10$	

Tabela 5: Picos de Ressonância relacionados com a Fig. 16

agora a função $\xi_{n+}(x)$, tem-se a Fig. 16, onde novamente são mostrados os potenciais e coeficientes de transmissão. Mais uma vez observa-se que os defeitos topológicos deformados ficaram responsáveis pelo aparecimento de picos de ressonância.

De maneira geral, para o caso de um acoplamento derivativo com o dilaton, considerando $D = 5, 10$, observou-se que o aumento da dimensionalidade do espaço-tempo não exerceu qualquer influência para o aparecimento de picos de ressonância. Uma hipótese baseada na Fig.

16 (d), é que para dimensões superiores a 10, pode existir algum pico de ressonância, para fermions de quiralidade esquerda ou para espinores de Dirac tomando a função $\xi_{n-}(x)$. Outro resultado que foi observado nesta subseção foi o deslocamento descendente dos picos de ressonância, como mostrado nas tabelas 4 e 5.

5 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

Nesta tese de doutorado foram analisados a localização do modo zero e as ressonâncias de férmions de spin 1/2 no contexto de modelos tipo Randall-Sundrum de co-dimensão um. Como mencionado no texto desta tese, o modelo de co-dimensão um é um modelo de branas com bulk D -dimensional com uma única dimensão extra. O assunto de localização de férmions e a análise dos modos ressonantes é extensivamente abordado na literatura atual, mas somente para o caso em que $D = 5, 6$. O autor desta tese em conjunto com o orientador e co-orientador generalizaram para mais dimensões e procuram explorar a influência do número de dimensões no mecanismo proposto. Os resultados da localização do modo zero encontram-se sumarizados nas tabelas (6) e (7).

Tabela 6: Resumo dos resultados da localização do modo zero para férmions de spin 1/2 em dimensões ímpares. Os espinores $\psi_0(x)$ e $\psi_{0\pm}(x)$ representam espinores de Dirac e Weyl sobre a brana, respectivamente.

Modelo	Parâmetros		Resultados
Brana Fina	$k_p > 0$	-	$\psi_{0\pm}(x)$ não-localizados
	$k_p < 0$	-	$\psi_{0\pm}(x)$ localizados
Brana espessa sem o dilaton	$\eta_1 > 0$	-	$\psi_{0-}(x)$ localizado
	$\eta_1 < 0$	-	$\psi_{0+}(x)$ localizado
Brana espessa com o dilaton ($\alpha_p = 0$)	$\eta_2 > 0$	$0 < r < 1$	$\psi_{0-}(x)$ localizado
		$r = 1$	
		$r = (p+1)/2$	$\psi_{0\pm}(x)$ localizados
	$\eta_2 < 0$	$0 < r < 1$	$\psi_{0+}(x)$ localizado
		$r = 1$	
		$r = (p+1)/2$	$\psi_0(x)$ localizado
Brana espessa com o dilaton ($\alpha_p \neq 0$)	$\eta_2 > 0$	$0 < r < 1$	$\psi_{0+}(x)$ localizado se $\alpha_p < 0$
		$r = 1$	
		$r = (p+1)/2$	$\psi_{0\pm}(x)$ localizados
	$\eta_2 < 0$	$0 < r < 1$	$\psi_{0-}(x)$ localizado se $\alpha_p < 0$
		$r = 1$	
		$r = (p+1)/2$	$\psi_{0-}(x)$ localizado se $\alpha_p < 0$ $\psi_0(x)$ localizado se $\alpha_p > 0$
Derivada do dilaton	$h \neq 0$	$0 < r < 1$	$\psi_{0\pm}(x)$ não-localizados
		$r = 1$	$\psi_{0\pm}(x)$ não-localizados
		$r = (p+1)/2$	$\psi_{0\pm}(x)$ localizados

Foi encontrado no caso de membranas tipo delta de Dirac, tanto para dimensões ímpares quanto pares, que o modo zero de férmions não são localizados, exceto para o caso em que a tensão na brana é negativa ($k_p < 0$). Para o caso de branas espessas sem dilaton, observou-

Tabela 7: Resumo dos resultados da localização do modo zero para férmions de spin 1/2 em dimensões pares. Os espinores $\psi_0(x)$ e $\psi_{0\pm}(x)$ representam espinores de Dirac e Weyl sobre a brana, respectivamente.

Modelo	Parâmetros		Resultados
Brana fina	$k_p > 0$	-	$\psi_0(x)$ não-localizado
	$k_p < 0$	-	$\psi_0(x)$ localizado
Brana espessa sem o dilaton	$\eta_1 > 0$	-	$\psi_0(x)$ localizado se $\xi_{0+}(y) = 0$
	$\eta_1 < 0$	-	$\psi_0(x)$ localizado se $\xi_{0-}(y) = 0$
Brana espessa com o dilaton ($\alpha_p = 0$)	$\eta_2 > 0$	$0 < r < 1$	$\psi_0(x)$ localizado se $\xi_{0+}(y) = 0$
		$r = 1$	
		$r = (p+1)/2$	$\psi_0(x)$ localizado
	$\eta_2 < 0$	$0 < r < 1$	$\psi_0(x)$ localizado se $\xi_{0-}(y) = 0$
		$r = 1$	
		$r = (p+1)/2$	$\psi_0(x)$ localizado
Brana espessa com o dilaton ($\alpha_p \neq 0$)	$\eta_2 > 0$	$0 < r < 1$	$\psi_0(x)$ localizado para $\alpha_p < 0$ and $\xi_{0-}(y) = 0$
		$r = 1$	
		$r = (p+1)/2$	$\psi_0(x)$ localizado
	$\eta_2 < 0$	$0 < r < 1$	$\psi_0(x)$ localizado para $\alpha_p < 0$ e $\xi_{0+}(y) = 0$
		$r = 1$	
		$r = (p+1)/2$	$\psi_0(x)$ localizado para $\alpha_p < 0$ e $\xi_{0+}(y) = 0$ $\psi_0(x)$ localizado para $\alpha_p > 0$
Derivada do dilaton	$h \neq 0$	$0 < r < 1$	$\psi_0(x)$ não-localizado
		$r = 1$	$\psi_0(x)$ não-localizado
		$r = (p+1)/2$	$\psi_0(x)$ localizado

se que para uma interação dos férmions com o campo escalar do tipo Yukawa $F(\phi) = \eta_1 \phi$, somente férmions de quirais são localizados em dimensões ímpares se a condição $|\eta_1| > \beta_p b/a$ fosse satisfeita. Neste contexto férmions de quiralidade esquerda são localizados se $\eta_1 > 0$ ou férmions de quiralidade direita se $\eta_1 < 0$. Entretanto para a dimensionalidade par descobriu-se que o espinor de Dirac é localizado se $\xi_{0+}(y) = 0$ e $\xi_{0-}(y) \neq 0$ para $\eta_1 > 0$ ou $\xi_{0+}(y) \neq 0$ e $\xi_{0-}(y) = 0$ para $\eta_1 < 0$. Quando o dilaton é inserido, por meio do acoplamento $F(\phi, \pi) = \eta_2 \phi e^{-\lambda \pi}$, a localização do modo zero foi dividida em dois casos: $\alpha_p = 0$ e $\alpha_p \neq 0$, onde observou-se que o mecanismo dependia de dois parâmetros livres η_2 e r , como mostrado na tabelas 6 e 7). Quando $\alpha_p = 0$ analisou-se a influencia do sinal de η_2 , junto com os valores possíveis de r . Para $\eta_2 > 0$ ($\eta_2 < 0$) e $0 < r < 1$ ou $\eta_2 > 0$ ($\eta_2 < 0$) e $r = 1$ tem-se que férmions de quiralidade esquerda $\psi_{0-}(x)$ (direita $\psi_{0+}(x)$) são localizados para dimensões ímpares e o espinor de Dirac $\psi_0(x)$ era localizado se $\xi_{0-}(y) \neq 0$ ($\xi_{0+}(y) \neq 0$) e $\xi_{0+}(y) = 0$ ($\xi_{0-}(y) = 0$). Quando $\alpha_p \neq 0$, férmions de quiralidade direita $\psi_{0+}(x)$ (esquerda $\psi_{0-}(x)$) são localizados nos casos $\eta_2 > 0$ ($\eta_2 < 0$) $0 < r < 1$ and $r = 1$ if $\alpha_p < 0$. Para $r = (p+1)/2$ o espinor de Dirac é localizado independentemente de α_p , tanto para dimensões ímpares quanto para dimensões

pares, independente do sinal de η_2 . Por fim, para o caso de um acoplamento derivativo com o dilaton $H(\phi, \pi) = h\pi$, o parâmetro h não influencia no mecanismo localização e férmions de Dirac são localizados somente se $r = (p + 1)/2 > 1$.

Para o estudo das ressonâncias nos modelos Randall-Sundrum não-deformados e deformados, foi usado o método da Matriz de Transferência. Em todos os modelos considerados nesta tese transformou-se as equações diferenciais nas dimensões extras em equações tipo Schrödinger, dando atenção aos potenciais gerados. De maneira geral, os resultados obtidos reforçam a afirmação de que o aparecimento de picos de ressonância estão intimamente ligados aos defeitos topológicos deformados. A grande explicação para isso é porque estes defeitos topológicos deformados aumentam a distância entre as barreiras de potencial, como mostrado na Fig. 12, por exemplo. No entanto, descobriu-se que os defeitos topológicos não são os únicos responsáveis pelo aparecimento de picos de ressonância. Quando $\lambda = 1/2\sqrt{pM^p}$, especificamente para $D = 10$ ($p = 8$), um pico de ressonância é formado (Fig. 12), mostrando que o aumento da dimensão do bulk influencia sim no aparecimento de picos de ressonância. Isso acontece por que sabe-se que o aparecimento de picos de ressonância são dependentes também das constantes de acoplamento η_2 e h . Quando aumenta-se a dimensionalidade, de acordo com a Fig. 12, o valor máximo do potencial é aumentado, que pode ser interpretado como um aumento no valor da constante de acoplamento η_2 . Outro aspecto interessante que foi observado foi o deslocamento (ascendente Figs. 12 (c), 13 (f) e 14 (e), (f) ou descendente no caso do acoplamento derivativo com o dilaton) dos picos de ressonância com o aumento da dimensionalidade. Fenomenologicamente estes fatos podem ser interpretados como uma mudança na escala de energia.

Finalmente, pôde-se concluir que a dimensionalidade do espaço-tempo influencia tanto a localização do modo zero como o aparecimento e deslocamentos de picos de ressonâncias. Os principais resultados desta tese pode ser resumidos como:

1. Para dimensões pares, o modo zero do campo espinorial de Dirac pode ser localizado, proibindo a existência de modos massivos
2. Para dimensões ímpares, na ausência do dilaton, somente uma das quiralidades pode ser localizadas. Mas na presença do dilaton espinores de Dirac podem ser localizados.
3. A localização do modo zero depende fortemente das constantes de acoplamento e do parâmetro r .
4. Os picos de ressonância dos modos massivos podem sofrer deslocamentos quando aumenta-se a dimensionalidade.

Embora o assunto de localização e o estudo sobre a existência de modos massivos ressonantes já seja amplamente explorado na literatura, o autor e os orientadores propuseram uma generalização que incorporou novos resultados. Assim o assunto exposto nesta tese não foi esgotado, mas apenas iniciado. Como perspectivas pretende-se aplicar o mecanismo discutido nesta tese para espinores Elko, generalizando assim os trabalhos (LIU et al., 2012), (JARDIM et al., 2015) e (ZHOU et al., 2017). Além disso também pretende-se fazer o mesmo com o campo espinorial de Rarita-Schwinger, pouco explorado na literatura. E pelo menos até o presente momento, também deseja-se analisar a localização e ressonâncias de todos estes campos espinoriais na geometria de Weyl (uma generalização da geometria de Riemann, proposto por H. Weyl e retomado recentemente por (ROMERO; FONSECA-NETO; PUCHEU, 2012)), generalizando os trabalhos (LIU et al., 2008b) e (LIU et al., 2008a).

APÊNDICE A – PRODUTO DE KRONECKER

Neste apêndice apresenta-se a definição e principais propriedades do produto direto de matrizes, também conhecido como produto de Kronecker. Usou-se como base a referência (ARFKEN G. B., 2013).

Sejam A e B duas matrizes do tipo $m \times n$ e $p \times q$. O produto de Kronecker, denotado por $A \otimes B$, resulta numa matriz C do tipo $mp \times nq$ definida por

$$C = A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Por outro lado, os elementos de C pode ser dados por

$$C_{ab} = A_{ij}B_{kl}, \quad (\text{A.2})$$

onde $a = p(i-1) + k$ e $b = q(j-1) + l$. Baseado nesta definição, pode-se demonstrar que este tipo de produto satisfaz as seguintes equações relacionadas à bilinearidade e associatividade:

$$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C, \quad (\text{A.3})$$

$$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C, \quad (\text{A.4})$$

$$(kA) \otimes B = A \otimes (kB) = k(A \otimes B), \quad (\text{A.5})$$

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C), \quad (\text{A.6})$$

onde A , B e C são matrizes e k é um escalar. Assim como o produto ordinário de matrizes, o produto de Kronecker não é comutativo. No entanto pode-se relacionar o produto de Kronecker com o produto ordinário de matrizes por meio da equação

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD). \quad (\text{A.7})$$

Outro aspecto importante do produto direto é com relação à inversão de matrizes. Sejam A e B duas matrizes invertíveis, cujas inversas sejam A^{-1} e B^{-1} , então

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}. \quad (\text{A.8})$$

A transposição ou a conjugação hermitiana (dagger) também são distributivas,

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T \quad \text{e} \quad (A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger. \quad (\text{A.9})$$

E por fim, como última propriedade elementar deste tipo de produto é com relação ao determinante:

$$\det(A \otimes B) = (\det A)^m \otimes (\det B)^n. \quad (\text{A.10})$$

Existem ainda inúmeras definições, operações e propriedades relacionadas ao produto de Kronecker. No entanto estas estão fora do escopo deste trabalho.

APÊNDICE B – PROPRIEDADES ELEMENTARES DAS MATRIZES DE PAULI

As matrizes de Pauli foram primeiramente introduzidas por W. Pauli (1900-1958) na teoria não-relativística do spin no estudo de átomos com um elétron após a formulação matricial de W. Heisenberg (1901-1976) (PAULI, 1926). Neste apêndice são definidas tais matrizes bem como suas principais propriedades algébricas. As matrizes de Pauli são definidas como

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

A primeira propriedade que irá ser apresentada acerca destas matrizes, será com relação à sua hermiticidade. É fácil observar que elas são hermitianas, isto é,

$$(\sigma^1)^\dagger = \sigma^1, \quad (\sigma^2)^\dagger = \sigma^2, \quad (\sigma^3)^\dagger = \sigma^3, \quad (\text{B.2})$$

e portanto seus autovalores são reais (COHEN-TANNOUJDI C., 1977). Sendo mais específico, resolvendo a equação secular de autovalor $\det(\sigma^k - \lambda \mathbf{1}_2)$ para λ , encontra-se que cada matriz de Pauli possui autovalores ± 1 .

A partir da definição das matrizes de Pauli, mostra-se que o determinante e o traço de cada matriz são

$$\det \sigma^a = -1. \quad (\text{B.3})$$

$$\text{tr} \sigma^a = 0. \quad (\text{B.4})$$

As matrizes de Pauli satisfazem uma estrutura algébrica, chamada de *álgebra de Clifford*, dada por (SAKURAI, 2007)

$$\{\sigma^a, \sigma^b\} = 2\delta^{ab}, \quad (\text{B.5})$$

onde δ^{ab} é o delta de Kronecker, que assume valor nulo se $a \neq b$ e é unitário se $a = b$. Elas também satisfazem a relação de comutação

$$[\sigma^a, \sigma^b] = 2i\epsilon^{abc}\sigma_c, \quad (\text{B.6})$$

onde ε^{abc} é o símbolo de permutação de Levi-Civita tridimensional, definido por meio de

$$\varepsilon^{abc} = \begin{cases} 1, & \text{para permutação par de } abc \\ -1, & \text{para permutação ímpar de } abc \\ 0, & \text{para índices repetidos.} \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Com o auxílio da álgebra de Clifford e a relação de comutação, prova-se que, para dois vetores tridimensionais quaisquer \mathbf{a} e \mathbf{b} , vale

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{1}_2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (\text{B.8})$$

Se todas as componentes de um vetor \mathbf{a} são reais então $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})^2 = \mathbf{1}_2\|\mathbf{a}\|^2$.

REFERÊNCIAS

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover Publications, 1964. ISBN 0-486-61272-4.
- ALENCAR, G. et al. Generalized nonminimal couplings in Randall-Sundrum scenarios. *Phys. Rev.*, D93, n. 12, p. 124064, 2016.
- ALENCAR, G. et al. A Transfer Matrix Method for Resonances in Randall-Sundrum Models III: An analytical comparison. *JHEP*, v. 1301, p. 050, 2013.
- ALENCAR, G. et al. Nonminimal couplings in Randall-Sundrum scenarios. *Phys. Rev.*, D92, n. 6, p. 066006, 2015.
- ALMEIDA, C. A. S. et al. Fermion localization and resonances on two-field thick branes. *Phys. Rev.*, D79, p. 125022, 2009.
- ARFKEN G. B., W. H. J. H. F. E. *Mathematical Methods for Physics*. [S.l.]: Elsevier, 2013. ISBN 978-0-12-384654-9.
- BAJC, B.; GABADADZE, G. Localization of matter and cosmological constant on a brane in anti-de Sitter space. *Phys. Lett.*, B474, p. 282–291, 2000.
- BARBOSA-CENDEJAS, N.; MALAGÓN-MOREJÓN, D.; MORA-LUNA, R. R. Universal spin-1/2 fermion field localization on a 5D braneworld. *Gen. Rel. Grav.*, v. 47, n. 7, p. 77, 2015.
- BAZEIA, D.; LOSANO, L.; MALBOUISSON, J. M. C. Deformed defects. *Phys. Rev.*, D66, p. 101701, 2002.
- BIRRELL, N. D.; DAVIES, P. C. W. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1984. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 0521278589, 9780521278584, 9780521278584. Disponível em: <http://www.cambridge.org/mw/academic/subjects/physics/theoretical-physics-and-mathematical-physics/quantum-fields-curved-space?format=PB>.
- BURGESS, C. P. et al. Cosmological space-times from negative tension brane backgrounds. *JHEP*, v. 10, p. 028, 2002.
- COHEN-TANNOUJDI C., D. C. L. F. *Quantum mechanics, vol 1*. [S.l.]: John Wiley, 1977. ISBN 1047116433.
- CSAKI, C. et al. Universal aspects of gravity localized on thick branes. *Nucl. Phys.*, B581, p. 309–338, 2000.
- FU, C.-E.; LIU, Y.-X.; GUO, H. Bulk matter fields on two-field thick branes. *Phys. Rev.*, D84, p. 044036, 2011.
- JACKIW, R.; REBBI, C. Solitons with Fermion Number 1/2. *Phys. Rev.*, D13, p. 3398–3409, 1976.
- JARDIM, I. C. et al. Comment on “Localization of 5D Elko Spinors on Minkowski Branes”. *Phys. Rev.*, D91, n. 4, p. 048501, 2015.

- JARDIM, I. C. et al. Does Geometric Coupling Generates Resonances? *Europhys. Lett.*, v. 115, n. 5, p. 51001, 2016.
- KALUZA, T. On the Problem of Unity in Physics. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, v. 1921, p. 966–972, 1921.
- KEHAGIAS, A.; TAMVAKIS, K. Localized gravitons, gauge bosons and chiral fermions in smooth spaces generated by a bounce. *Phys. Lett.*, B504, p. 38–46, 2001.
- KIM, Y.-b. et al. Brane world of warp geometry: An Introductory review. *J. Korean Astron. Soc.*, v. 37, p. 1–14, 2004.
- LAHIRI, A.; PAL, P. B. *A First Book of Quantum Field Theory*. [s.n.], 2005. Disponível em: <http://www-spires.fnal.gov/spires/find/books/www?cl=QC174.45::2005>.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITS, E. M. *The Classical Theory of Fields*. Oxford: Pergamon Press, 1975. Volume 2. (Course of Theoretical Physics, Volume 2). ISBN 9780080181769.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITS, E. M. *Quantum Mechanics*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1991. v.3. (Course of Theoretical Physics, v.3). ISBN 9780750635394.
- LANDIM, R. et al. A Transfer Matrix Method for Resonances in Randall-Sundrum Models II: The Deformed Case. *JHEP*, v. 1202, p. 073, 2012.
- LANDIM, R. R. et al. A Transfer Matrix Method for Resonances in Randall-Sundrum Models. *JHEP*, v. 08, p. 071, 2011.
- LANDIM, R. R. et al. On resonances of q-forms in thick p-branes. *EPL*, v. 97, n. 2, p. 20003, 2012.
- LI, H.-T. et al. Fermion Resonances on a Thick Brane with a Piecewise Warp Factor. *Phys. Rev.*, D83, p. 045006, 2011.
- LIU, Y.-X. et al. New localization mechanism of fermions on braneworlds. *Phys. Rev.*, D89, n. 8, p. 086001, 2014.
- LIU, Y.-X. et al. Fermion Localization and Resonances on A de Sitter Thick Brane. *Phys. Rev.*, D80, p. 065019, 2009.
- LIU, Y.-X. et al. Localization and Mass Spectrum of Matters on Weyl Thick Branes. *JHEP*, v. 08, p. 041, 2008.
- LIU, Y.-X. et al. Localization of Matters on Pure Geometrical Thick Branes. *JHEP*, v. 02, p. 067, 2008.
- LIU, Y.-X. et al. Localization of 5D Elko Spinors on Minkowski Branes. *Phys. Rev.*, D86, p. 064012, 2012.
- MANNHEIM, P. D. *Brane-localized gravity*. [s.n.], 2005. Disponível em: <http://www.worldscibooks.com/physics/5975.html>.
- MENDES, W. M.; ALENCAR, G.; LANDIM, R. R. Spinors Fields in Co-dimension One Braneworlds. *JHEP*, v. 02, p. 018, 2018.

- NAKAHARA, M. *Geometry, topology and physics*. [S.l.: s.n.], 2003.
- PARK, J.-H. Lecture note on clifford algebra. In: . [S.l.: s.n.], 2005.
- PAULI, W. Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik. *Z. Phys.*, v. 36, n. 5, p. 336–363, 1926.
- POLCHINSKI, J. *String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string*. [S.l.]: Adison-Wesley, 1994. ISBN 9780511252273, 9780521672276, 9780521633031.
- POLCHINSKI, J. *String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007. ISBN 9780511252280, 9780521633048, 9780521672283.
- RAMOND, P. FIELD THEORY. A MODERN PRIMER. *Front. Phys.*, v. 51, p. 1–397, 1981. [Front. Phys.74,1(1989)].
- RANDALL, L.; SUNDRUM, R. A Large mass hierarchy from a small extra dimension. *Phys. Rev. Lett.*, v. 83, p. 3370–3373, 1999.
- RANDALL, L.; SUNDRUM, R. An Alternative to compactification. *Phys.Rev.Lett.*, v. 83, p. 4690–4693, 1999.
- ROMERO, C.; FONSECA-NETO, J. B.; PUCHEU, M. L. General Relativity and Weyl Geometry. *Class. Quant. Grav.*, v. 29, p. 155015, 2012.
- RUBAKOV, V. A.; SHAPOSHNIKOV, M. E. Do We Live Inside a Domain Wall? *Phys. Lett.*, v. 125B, p. 136–138, 1983.
- RYDER, L. H. *QUANTUM FIELD THEORY*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996. ISBN 9780521478144, 9781139632393, 9780521237642.
- SAKURAI, J. J. *Modern quantum mechanics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007. ISBN 0201539292.
- SALVIO, A. *Aspects of physics with two extra dimensions*. Tese (Doutorado) — SISSA, Trieste, 2007. Disponível em: <https://inspirehep.net/record/741631/files/0701020v1.pdf>.
- SALVIO, A. *Brane worlds: theories with one or two extra dimensions*. Montreal: Minkowski Institute Press, 2013. ISBN 9781927763124, 9781927763117. Disponível em: <http://www.minkowskiinstitute.org/mip/books/salvio.html>.
- TUNG, W. K. *GROUP THEORY IN PHYSICS*. [S.l.: s.n.], 1985.
- WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology*. New York: John Wiley and Sons, 1972. ISBN 0471925675, 9780471925675. Disponível em: <http://www-spines.fnal.gov/spines/find/books/www?cl=QC6.W431>.
- WEINBERG, S. *The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005. ISBN 9780521670531, 9780511252044.
- ZHAO, Z.-H.; LIU, Y.-X.; LI, H.-T. Fermion localization on asymmetric two-field thick branes. *Class. Quant. Grav.*, v. 27, p. 185001, 2010.
- ZHOU, X.-N. et al. Localization of five-dimensional Elko spinors with non-minimal coupling on thick branes. 2017.

ZWIEBACH, B. *A first course in string theory*. Cambridge University Press, 2006. ISBN 0521831431, 9780521831437, 9780511207570. Disponível em: <http://www.cambridge.org/uk/catalogue/catalogue.asp?isbn=0521831431>).