



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**LUCAS DE PAULA MIRANDA**

**EFEITOS DA CORRELAÇÃO DE LONGO ALCANCE NA LOCALIZAÇÃO  
DINÂMICA DO ROTOR IMPULSIONADO SOB EFEITO DE RUÍDO**

**FORTALEZA**

**2018**

LUCAS DE PAULA MIRANDA

EFEITOS DA CORRELAÇÃO DE LONGO ALCANCE NA LOCALIZAÇÃO DINÂMICA  
DO ROTOR IMPULSIONADO SOB EFEITO DE RUÍDO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho.

FORTALEZA  
2018

LUCAS DE PAULA MIRANDA

EFEITOS DA CORRELAÇÃO DE LONGO ALCANCE NA LOCALIZAÇÃO DINÂMICA  
DO ROTOR IMPULSIONADO SOB EFEITO DE RUÍDO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 20/02/2018.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Jeanlex Soares de Sousa  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga  
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia  
Afro-Brasileira (Unilab)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- D32e de Paula Miranda, Lucas.  
Efeitos da correlação de longo alcance na localização dinâmica do rotor impulsionado sob efeito de ruído /  
Lucas de Paula Miranda. – 2018.  
49 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação  
em Física, Fortaleza, 2018.  
Orientação: Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho.
1. Rotor impulsionado. 2. Sistemas dinâmicos. 3. Caos. 4. Localização Dinâmica. I. Título.
- CDD 530
-

Aos Meus Pais  
e  
amigos.

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais, João Artur da Rocha Miranda e Maria Irlanda de Paula Miranda, pelo carinho e cuidados que me deram.

Ao meu orientador, e professor, Raimundo Nogueira pela orientação, conselhos e paciência que teve comigo durante o meu período no mestrado e na graduação.

Aos professores Andrey Chaves, André Auto, José Soares, Murilo Pereira, João Milton, Humberto de Andrade Carmona, Eduardo Bedê, Renan Landim, Othon Lopes e Apiano Morais pelos conhecimentos que me passaram.

Aos meus amigos Daniel Brito, Emanuel Fonteles, Saulo Reis, João Paulo Nogueira, Raul Victor, Julia Gondim, Mardônio França, Lucas Moreira, Bárbara Sales, Misael Moura, Junior, e muitos outros que me acompanharam durante toda minha pós-graduação.

## RESUMO

O rotor impulsionado por um potencial- $\delta$  é um sistema dinâmico que apresenta comportamento caótico dependendo da intensidade da perturbação (impulso) aplicado. Cassati e Chirikov estudaram as propriedades dinâmicas do rotor clássico e mostraram que a o comportamento caótico do sistema leva a uma *difusão dinâmica caótica* do momento. Niels Bohr formulou que o comportamento dinâmico de uma sistema quântico reproduz o comportamento dinâmico de seu correspondente clássico. O que significa que se um sistema clássico apresenta comportamento caótico o seu correspondente quântico também irá apresentar. Cassati mostrou que a presença do caos clássico no rotor leva a uma *supressão difusa* da equação de onda no espaço dos momentos, no correspondente quântico. Esta supressão da difusão é também conhecida como *localização dinâmica*, que é o análoga a *localização de Anderson* para sistemas periódicos no tempo. Utilizando operador de Floquet, estudamos numericamente o rotor impulsionado sobre os efeitos de uma variação aleatória da intensidade do impulso (*ruído*). Considerando que, na natureza, nada é realmente aleatório, estudamos os efeitos de sequências aleatórias correlacionadas na localização dinâmica do rotor impulsionado sobre efeito de ruído.

**Palavras-chave:** Rotor impulsionado. Sistemas dinâmicos. Caos. Localização Dinâmica.

## ABSTRACT

The  $\delta$ -kicked rotor is a dynamic system that can present chaotic behavior depending on the intensity of the perturbation (kicked) applied on it. Cassati and Chirikov study the dynamical properties of the classical kicked rotor model and shown that the chaotic behavior of the classic model leads to a *chaotic dynamical diffusion* of the momentum. It was formulated by Niels Bohr that the dynamics of a quantum system reproduce the dynamics of the equivalent classical system in the classical limit. Which means that if a classical system has a chaotic behavior the quantum correspondent is also chaotic. Cassati showed that the presence of classic chaos kicked rotor leads to a *diffusion suppression* of the wave function in the momentum space, on the quantum correspondent system. This diffusion suppression is known as *dynamical localization*, which is the analogous phenomenon of the *Anderson localization* for time periodic systems. Using the Floquet operator, we numerically studied kicked rotor under a random variation of the kick intensity (*noise*). Considering that, in nature, nothing is truly random, we study the effects of long-range correlated random sequence affects the dynamical localization on the noised kicked rotor.

**Keywords:** Kicked rotor. Dynamical Systems. Chaos. Dynamical Localization.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Espaço de fases para oscilador harmônico simples. . . . .	13
Figura 2 – Espaço de fases para $\epsilon = 0.0, 0.1, 0.2$ . À medida que a perturbação no sistema aumenta as orbitas começam serem deformadas. . . . .	14
Figura 3 – Espaço de fases para $\epsilon = 0.3, 0.4, 0.5$ . Com o aumento da perturbação as orbitas na superfície de energia começam a serem destruídas até que todos os pontos da superfície de energia seja igualmente acessado. . . . .	15
Figura 4 – Podemos ver que a trajetórias da partícula, em um bilhar elíptico, podem caracterizadas pelas órbitas no espaço de fases. A dinâmica do sistema é caracterizada ou por uma libração (a esquerda), ou por uma rotação (a direita). . . . .	15
Figura 5 – (a) A onda não se encontra localizada em um ponto específico, mas distribuída ao longo de uma região. Dessa forma podemos inferir o comprimento de onda da partícula e com o isso seu momento dado a fórmula de de Broglie ( $p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}$ , $\lambda$ sendo o comprimento de onda da partícula). (b) A função de onda se encontra "determinada" em uma região, porém, perdemos a informação sobre o comprimento de onda. Figura retirada do livro "Mecânica Quântica", <i>Griffiths</i> , David. . . . .	16
Figura 6 – Distribuição para a variável $s$ , onde $s$ é o espaçamento entre os autovalores de um sistema. A distribuição de Wigner em linha sólida e de Poisson em linha tracejada. . . . .	17
Figura 7 – Sistema descrito por um poço de potencial harmônico duplo. Figura extraída do artigo "Chaos-assisted tunneling" de Steven Tomsovic. . . . .	18
Figura 8 – Secção de Poincaré para o oscilador quártico. Figura extraída do artigo "Chaos-assisted tunneling" de Steven Tomsovic. . . . .	19
Figura 9 – Representação de um sistema com simetria de rede. Figura retirada do livro <i>Modern quantum mechanics</i> de J. J. Sakurai. . . . .	20
Figura 10 – As impurezas são representadas no sistema por meios de alterações na profundidade do potencial. Imagem retirada do artigo <i>Anderson localization of ultra cold atoms</i> , A.A, M Inguscio, Physics Today, agosto de 2009. . . . .	21
Figura 11 – Forma do impulso, dependente de $\theta$ , aplicado no rotor. . . . .	23
Figura 12 – Mapa do espaço de fases para o rotor impulsionado com $k = 0.1$ . . . . .	28
Figura 13 – Mapa do espaço de fases para o rotor impulsionado com $k = 0.8$ . . . . .	29
Figura 14 – Mapa do espaço de fases para o rotor impulsionado com $k = 4.0$ . . . . .	29

Figura 15 –Difusão clássica para rotor impulsionado com intensidades diferentes ( $k = 0.1, 0.8, 4.0$ e $8.0$ ). Média entre 50 amostragens. . . . .	30
Figura 16 –Sequências de valores aleatórios geradas para $\alpha = 0.0, 2.0, 2.5$ . . . . .	31
Figura 17 –Mapa do espaço de fases para o rotor impulsionado com $k = 3.0$ . . . . .	32
Figura 18 –Mapa do espaço de fases para o rotor impulsionado com $k = 5.0$ . . . . .	32
Figura 19 –Mapas de fase gerados com ruído dado pela equação (2.22) para $\alpha = 0.0$ . Os valores de $K$ ( $0.1, 0.8, 4.0, 8.0$ ) variam, em ordem crescente, de baixo para cima, enquanto os valores para o <i>nível de ruído</i> ( $0.0, 0.1, 0.5, 1.0$ ) variam, em ordem crescente, da esquerda para a direita. . . . .	33
Figura 20 –Mapas de fase gerados com ruído dado pela equação (2.22) para $\alpha = 2.0$ . Os valores de $K$ ( $0.1, 0.8, 4.0, 8.0$ ) variam, em ordem crescente, de baixo para cima, enquanto os valores para o <i>nível de ruído</i> ( $0.0, 0.1, 0.5, 1.0$ ) variam, em ordem crescente, da esquerda para a direita. . . . .	33
Figura 21 –Mapas de fase gerados com ruído dado pela equação (2.22) para $\alpha = 2.5$ . Os valores de $K$ ( $0.1, 0.8, 4.0, 8.0$ ) variam, em ordem crescente, de baixo para cima, enquanto os valores para o <i>nível de ruído</i> ( $0.0, 0.1, 0.5, 1.0$ ) variam, em ordem crescente, da esquerda para a direita. . . . .	34
Figura 22 –Difusão do momento ( $\langle p^2 \rangle$ ) com relação ao número de interações ( $k = 8.0$ ), para os casos clássico e quântico. Notamos que para o sistema quântico há um supressão da difusão caótica, levando a uma localização dinâmica. . . . .	38
Figura 23 –Evolução temporal da distribuição de densidade dos momentos para o rotor quântico. . . . .	40
Figura 24 –Distribuição do momento para os sistemas quântico para $k = 0.1, 0.8, 4.0$ . . . . .	41
Figura 25 –Distribuição da função de onda no espaço dos momentos para $k = 0.1$ . . . . .	41
Figura 26 –Distribuição da função de onda no espaço dos momentos para $k = 0.8$ . . . . .	42
Figura 27 –Distribuição da função de onda no espaço dos momentos para $k = 4.0$ . . . . .	42
Figura 28 –A figura mostra a evolução da densidade de probabilidade da função de onda no espaço dos momentos para $k = 4.0$ . Em sequência da esquerda para direita e de cima para baixo temos o rotor sem ruído e com ruído para $\alpha = 0.0, 2.0$ e $2.5$ . . . . .	43
Figura 29 –Mapas de calor para $\alpha = 0.0$ relacionando o nível de ruído do sistema com a intensidade do impulso aplicado na partícula. A intensidade do mapa é referente ao fator de localização dinâmica $1/l_c$ . . . . .	43
Figura 30 –Mapas de calor para $\alpha = 1.0$ relacionando o nível de ruído do sistema com a intensidade do impulso aplicado na partícula. A intensidade do mapa é referente ao fator de localização dinâmica $1/l_c$ . . . . .	44

Figura 31 –Mapas de calor para $\alpha = 2.0$ relacionando o nível de ruído do sistema com a intensidade do impulso aplicado na partícula. A intensidade do mapa é referente ao fator de localização dinâmica $1/l_c$ . . . . .	44
Figura 32 –Mapas de calor para $\alpha = 2.5$ relacionando o nível de ruído do sistema com a intensidade do impulso aplicado na partícula. A intensidade do mapa é referente ao fator de localização dinâmica $1/l_c$ . . . . .	45

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	12
<b>1.1</b>	<b>Caos clássico</b>	12
<b>1.1.1</b>	<b>Caos e o Teorema KAM</b>	13
<b>1.2</b>	<b>Caos quântico</b>	16
<b>1.3</b>	<b>Análise semiclássica</b>	17
<b>1.4</b>	<b>Localização</b>	20
<b>1.4.1</b>	<b>Simetria de rede e coerência quântica</b>	20
<b>1.4.2</b>	<b>Localização de Anderson</b>	21
<b>1.4.3</b>	<b>Localização dinâmica</b>	22
<b>1.5</b>	<b>O Rotor impulsionado</b>	23
<b>1.6</b>	<b>Objetivos do trabalho</b>	25
<b>2</b>	<b>DINÂMICA CLÁSSICA</b>	26
<b>2.1</b>	<b>Mapa de Chirikov</b>	26
<b>2.2</b>	<b>Difusão caótica</b>	28
<b>2.3</b>	<b>Ruído</b>	30
<b>3</b>	<b>ROTOR QUÂNTICO</b>	35
<b>3.0.1</b>	<b>Teorema de Floquet</b>	35
<b>3.0.2</b>	<b>Localização Dinâmica</b>	37
<b>4</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS</b>	40
<b>4.1</b>	<b>Presença de ruído no rotor quântico</b>	41
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	46
	<b>REFERÊNCIAS</b>	48

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Caos clássico

Boa parte dos problemas tratados nos livros de mecânica clássica são de uma classe de sistemas chamadas de *integráveis* [1]. Um sistema é dito integrável quando é possível integrar as equações de movimentos e encontrar uma solução analítica que descreva seu comportamento.

Um exemplo simples (e um dos mais abordados nos livros de física básica) é o oscilador harmônico simples. O lagrangiano que descreve o sistema é dado pela equação,

$$L = m\frac{\dot{x}^2}{2} - k\frac{x^2}{2} \quad (1.1)$$

e a equação diferencial, cuja solução nos dá o comportamento da partícula, é dada por,

$$m\frac{d^2}{dt^2}x + kx = 0. \quad (1.2)$$

Como já foi comentado, o sistema descrito pela equação diferencial (1.2) é da classe de sistemas ditos integráveis e possui uma solução analítica conhecida. Em vez de resolvermos a equação (1.2) iremos analisar os possíveis estados de energia que o sistema possui, através da análise das *trajetórias de energia* do sistema. Assim, consideramos a energia total do oscilador harmônico dada por,

$$m\frac{\dot{x}^2}{2} + k\frac{x^2}{2} = E. \quad (1.3)$$

A figura (1) nos mostra um gráfico gerado a partir da equação (1.3). Podemos interpretar *geometricamente* [2] a equação (1.3) como conjunto variáveis  $(x, \dot{x})$  relacionadas por uma constante  $E$ , sendo a constante  $E$  a energia do sistema. O gráfico mostrado na figura (1) é o *espaço de fases* do sistema e nos mostra a relação entre o grau de liberdade do sistema (variável  $x$ ) e o seu *momento conjugado* [1] (neste caso  $\dot{x}$ ) para diversos valores de  $E$ . As trajetórias presentes no espaço de fases são as *superfícies de energia* do sistema que definem os possíveis valores de  $(x, \dot{x})$  para uma determinada energia. Com isso, podemos, em um único gráfico, estudar o comportamento do oscilador analisando as diversas trajetórias de energias a partir das condições iniciais do sistema. Esta análise geométrica é de grande utilidade no estudo de sistema dinâmicos mais complexos, pois este método nos permite uma análise mais qualitativa do sistema, analisando-o com relação a sua integrabilidade.

Para sistemas integráveis (regulares) apenas um conjunto de estados no espaço de

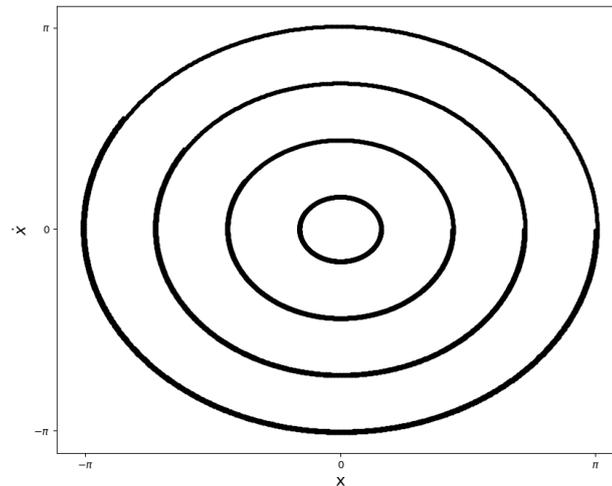


Figura 1: Espaço de fases para oscilador harmônico simples.

fases é acessível para uma certa energia. Assim, os possíveis valores de  $(x, \dot{x})$ , gerados a partir de uma condição inicial, se encontram restritos a uma superfície de energia. Com o aumento da perturbação as órbitas de energia começam a serem destruídas e uma região maior do espaço de fases é acessado. Podemos então relacionar a entropia do sistema com o quão caótico o sistema é. A entropia de um sistema é calculada a partir do conjunto de *microestados* acessíveis ( $\Gamma$ ) [3], dado a equação,

$$S = k_B \ln \Omega. \quad (1.4)$$

Sendo  $k_B$  a constante de Boltzman.

Assim quanto maior for a região acessada pelo sistema no espaço de fases maior será a entropia do sistema.

### 1.1.1 Caos e o Teorema KAM

Quando nos deparamos com problemas mais complexos geralmente utilizamos o *método das perturbações* [4,5] analisar o sistema. Este método consiste utilizar um sistema cuja a solução já nos é conhecida e, a partir da aplicação de uma perturbação, encontrar soluções aproximadas para o problema que queremos estudar.

$$H = H_0 + \epsilon H_p. \quad (1.5)$$

A equação (1.5) nos mostra um contexto geral de como a perturbação é aplicada. Considerando um sistema, cuja solução analítica nos é conhecida, dado pelo hamiltoniano  $H_0$ , aplicamos então uma perturbação dada pelo hamiltoniano  $H_p$ , cuja a intensidade da perturbação

é controlada pelo fator  $\epsilon$ .

O Teorema KAM (Kolmogoroff, Arnold e Moser) [5, 6] analisa os efeitos do aumento da perturbação no espaço de fases do sistema. Como foi comentado anteriormente o espaço de fases para sistema integráveis é composto por trajetórias (órbitas) de energia. O Teorema KAM estabelece que para pequenas perturbações as trajetórias de energia no espaço de fases sofrem deformações e, à medida que a perturbação aumenta, estas órbitas começam a serem destruídas uma à uma até que não restem mais nenhuma trajetória regular. A presença de órbitas irregulares (destruídas) caracteriza o caos no sistema. Sistemas cujos espaços de fases apresentam tanto órbitas regulares quanto trajetórias irregulares são denominados sistemas *mistos* [7].

Um problema muito estudado na literatura, e que nos mostra os efeitos do aumento da perturbação em um sistema, é o bilhar [7]. O bilhar consiste de uma partícula confinada por uma barreira. A partícula se move em linha reta dentro da região e interage com a barreira por meio de colisões elásticas. Estas colisões caracterizam completamente a dinâmica do bilhar e nos permitem construir o espaço de fases relacionando o comprimento de arco até o ponto de colisão e a projeção do ângulo de colisão com a reta tangente ao ponto de colisão.

$$r(\theta) = r_0 + \epsilon \cos(\theta), \quad (1.6)$$

A equação (1.6) nos mostra a equação do bilhar deformado na forma de um ovoide.  $r_0$  representa o raio do bilhar circular (sistema integrável) e a perturbação  $\cos(\theta)$  altera o valor do raio deformando-o na forma de um ovoide, sendo ( $\epsilon$ ) o parâmetro que controla a intensidade da deformação. As figuras (2) e (3) nos mostram os efeitos do aumento da deformação no bilhar.

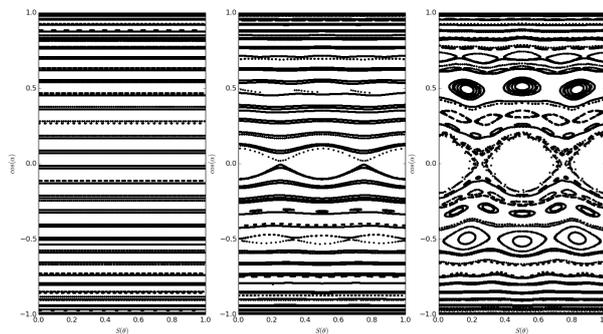


Figura 2: Espaço de fases para  $\epsilon = 0.0, 0.1, 0.2$ . À medida que a perturbação no sistema aumenta as orbitas começam serem deformadas.

Iremos utilizar o sistema para introduzirmos mais um outro conceito utilizado para analisar sistemas clássicos através do espaço de fases. Quando analisamos as trajetórias de energia nas figuras (2) e (3), vemos que há trajetórias fechadas e trajetórias abertas (ambas periódicas). Essas orbitas fechadas e abertas, encontradas no espaço de fases são chamadas,

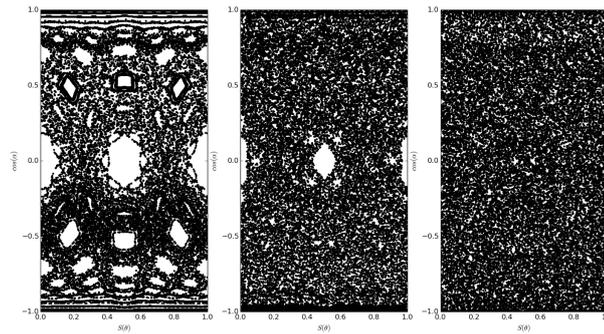


Figura 3: Espaço de fases para  $\epsilon = 0.3, 0.4, 0.5$ . Com o aumento da perturbação as órbitas na superfície de energia começam a serem destruídas até que todos os pontos da superfície de energia seja igualmente acessado.

respectivamente, de libração e rotação [8]. A figura (4) nos mostra o espaço de fases do bilhar elíptico e a trajetória do bilhar em si para dois tipos de dinâmica. As órbitas de rotação caracterizam uma dinâmica semelhante ao bilhar regular, onde qualquer ponto da fronteira pode ser “acessado”. Enquanto que, para órbitas de libração, há certas regiões da fronteira onde partícula não irá incidir [7].

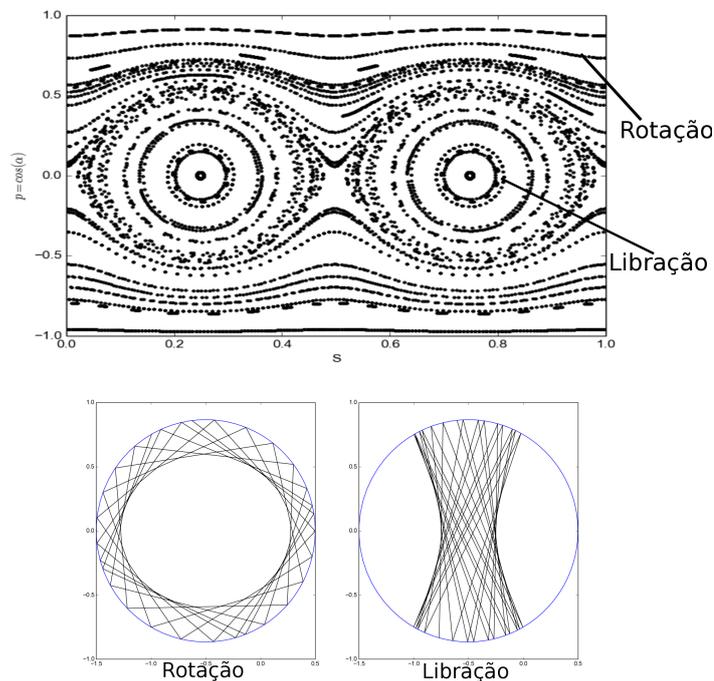


Figura 4: Podemos ver que a trajetórias da partícula, em um bilhar elíptico, podem caracterizadas pelas órbitas no espaço de fases. A dinâmica do sistema é caracterizada ou por uma libração (a esquerda), ou por uma rotação (a direita).

O fato de podermos analisar o tipo de dinâmica que a partícula possui é de grande utilidade para estudarmos a classe de problemas a qual o rotor impulsionado pertence.

## 1.2 Caos quântico

O caos em sistemas quânticos não é evidenciado da mesma forma que em sistemas clássicos. Em sistemas clássicos o comportamento caótico é devido a sensibilidade em exponencial às condições iniciais [2]. Os conceitos de posição e momento na mecânica quântica divergem dos da mecânica clássica devido as propriedades ondulatórias da partícula.

Um dos fenômenos mais característicos da mecânica quântica é o fato de não podermos determinar com precisão a posição e o momento da partícula simultaneamente. Este é o *princípio da incerteza de Heisenberg* [4] que nos dá uma incerteza mínima ao determinarmos a posição e o momento da partícula. Este princípio é descrito pela equação (1.7).

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (1.7)$$

A figura (5) nos mostra uma analogia do princípio da incerteza utilizando um onda gerada por corda.

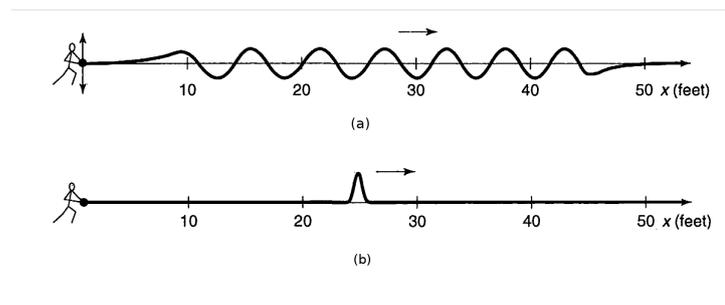


Figura 5: (a) A onda não se encontra localizada em um ponto específico, mas distribuída ao longo de uma região. Dessa forma podemos inferir o comprimento de onda da partícula e com o isso seu momento dado a fórmula de de Broglie ( $p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}$ ,  $\lambda$  sendo o comprimento de onda da partícula). (b) A função de onda se encontra "determinada" em uma região, porém, perdemos a informação sobre o comprimento de onda. Figura retirada do livro "Mecânica Quântica", *Griffiths*, David.

Com isso, o caos a nível quântico não é compreendido da mesma forma que o caos a nível clássico. Uma evidência de comportamento caótico em sistemas quânticos é a forte correlação entre as autoenergias do sistema. Tal comportamento foi estudado por Wigner e Dyson no seu trabalho sobre matrizes aleatórias [9].

Analisar a correlação entre as auto energias de um sistema significa analisar a degenerescência de um sistema quântico. A presença de estados degenerados pode ser evidenciada através da distribuição dos espaçamentos de energia [9], que é uma contagem dos espaçamentos de energias entre os auto estados vizinhos (probabilidade  $p(s)$  de encontrarmos um estado de energia entre os valores  $E$  e  $E + s$ ).

A estatística envolvendo o espaçamento entre as auto energias de um sistema nos permite estudar a correlação entre os estados de energias. Esse fenômeno é denominada *cruza-*

*mento evitado de níveis* e foi observado pela primeira vez por químicos ao estudarem moléculas simples [10]. Esse fenômeno também é observado em sistema como o átomo de hidrogênio sob a influência de um campo magnético [11].

A distribuição do espaçamento de energias para estados de energia não correlacionados é dada por uma distribuição de *Poisson*,

$$p(s)^{(P)} = \exp(-s). \quad (1.8)$$

Para sistemas cujos estados de energia são correlacionados (sem degenerescência), temos a distribuição de Wigner e Dyson,

$$p(s)^{(W)} = \frac{\pi}{2}s \exp\left(-\frac{\pi}{2}s^2\right). \quad (1.9)$$

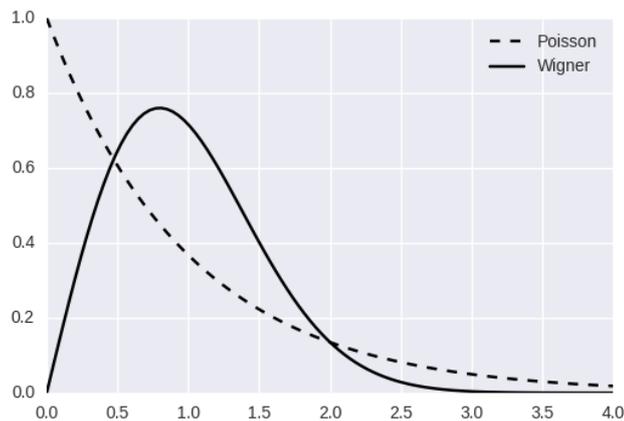


Figura 6: Distribuição para a variável  $s$ , onde  $s$  é o espaçamento entre os autovalores de um sistema. A distribuição de Wigner em linha sólida e de Poisson em linha tracejada.

### 1.3 Análise semiclássica

Os estudos envolvendo caos em sistemas dinâmicos a nível quântico começaram ainda no contexto da “velha mecânica quântica”, onde se considerava que um sistema quântico deveria possuir o mesmo comportamento dinâmico de seu correspondente clássico no limite semiclássico. Tal princípio foi descrito por *Neils Bohr* e é conhecido como *princípio da correspondência clássico-quântico* [5]. A análise semiclássica possui um papel fundamental no estudo de um dos fenômenos mais característicos da mecânica quântica: o *tunelamento quântico* [4]. O tunelamento quântico é descrito como um fenômeno cuja a dinâmica do sistema viola a previsão do comportamento clássico. Considerando um sistema descrito por um poço de potencial

harmônico duplo [12] dado pela equação (1.10).

$$V(q) = \alpha(q^2 - q_0^2)^2. \quad (1.10)$$

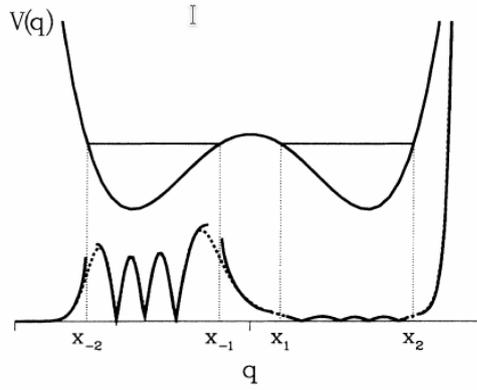


Figura 7: Sistema descrito por um poço de potencial harmônico duplo. Figura extraída do artigo "Chaos-assisted tunneling" de Steven Tomsovic.

A figura (7) nos mostra o formato do poço duplo. O tunelamento ocorre quando a probabilidade de se encontrar o elétron, o qual se encontra totalmente localizada na região  $(x_{-1}, x_{-2})$  no tempo inicial ( $t = 0$ ), na região  $(x_1, x_2)$  é diferente de zero. Esta taxa de tunelamento é dada pela relação [4],

$$T \approx e^{\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2mV(x) - E} dx}. \quad (1.11)$$

Foi mostrado por Tomsovic e Ullmo [12], em seus estudos sobre o *oscilado quártico*, que a presença de caos clássico no sistema pode provocar um aumento na taxa de tunelamento (dado pela equação (1.11)), ou até mesmo suprir o tunelamento por completo. Este processo é chamado *tunelamento assistido por caos* [12]. Ullmo também mostrou a relação que o tunelamento assistido ocorre devido um *mecanismo de três estados* [12]. A figura (8) mostra o espaço de fases do oscilador quártico, caracterizada pelas ilhas de estabilidade simétricas, sendo a equação (1.12) o potencial do oscilador quártico.

$$V(q) = a(\lambda) \left( \frac{q_1^4}{b} + bq_2^4 + 2\lambda q_1^2 q_2^2 \right). \quad (1.12)$$

O tunelamento convencional ocorre devido ao *acoplamento* entre os *dubletos de tunelamento* [10, 12, 16]. Em um sistema de dois níveis, como o mostrado na figura (7), as autoenergias entre as funções de onda *simétrica e antissimétrica* estão correlacionadas. Quando "introduzimos" caos no sistema há a presença de uma terceiro estado o qual é responsável pelo mecanismo de tunelamento assistido por caos. Temos um sistema de três estados definido pelo

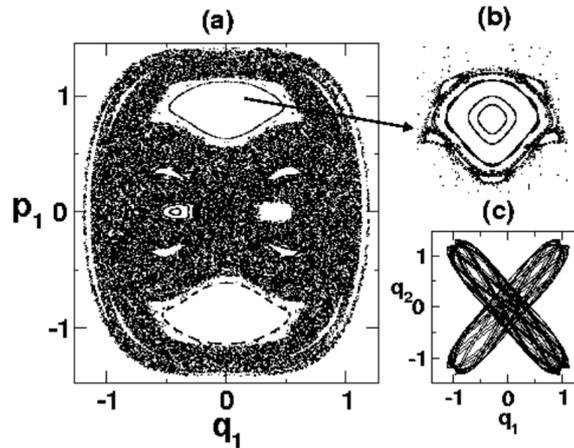


Figura 8: Secção de Poincaré para o oscilador quártico. Figura extraída do artigo "Chaos-assisted tunneling" de Steven Tomsovic.

hamiltoniano,

$$H \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \\ \phi_+^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^r & 0 & 0 \\ 0 & E^r & v \\ 0 & v & E^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \\ \phi_+^c \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

onde o estado  $\phi_+^c$  é o estado caótico responsável pelo tunelamento assistido por caos.

A análise semiclássica se mostra de grande utilidade quando não há uma barreira de potencial definida no sistema (como no caso do poço duplo). Ao definirmos o processo de tunelamento como uma violação de um comportamento clássico, podemos interpretar a mudança da dinâmica do sistema como um *tunelamento dinâmico*, onde *confinamento* é devido apenas a dinâmica da partícula em si. O bilhar elíptico, mostrado anteriormente, é um exemplo de sistema o qual a partícula se encontra confinada a descrever um tipo específico de dinâmica, dependendo da sua condição inicial.

A mudança de estados que caracteriza o tunelamento por barreira é o *transporte* da partícula de um lado para o outro da barreira de potencial. O tunelamento dinâmico ocorre devido a mudança de estados caracterizado pela dinâmica que o sistema possui. Assim, quando um sistema se encontra em uma órbita de energia (caracterizada por uma dinâmica específica) e passa para uma outra órbita de energia (caracterizada por outra dinâmica), temos o que chamamos tunelamento *dinâmico* [12, 13]. Este fenômeno é de grande importância nos estudos relacionados aos modos vibracionais de moléculas e na optoeletrônica [13].

O rotor impulsionado (1.17) é um sistema dinâmico cujo o *confinamento* é devido a dinâmica da partícula <sup>1</sup>. A correlação entre as "quasienergias" do sistema [14] provém da perturbação periódica provocado pelo impulso.

<sup>1</sup>Na seção (2) iremos mostrar que a dinâmica da partícula é relacionada pelo sentido que o rotor gira.

## 1.4 Localização

Antes de começarmos nossos estudos sobre localização dinâmica iremos fazer um breve comentário sobre modelos com simetria de rede e sobre a *localização de Anderson*, o que nos dará um contexto para o problema de localização.

### 1.4.1 Simetria de rede e coerência quântica

Na física do estado sólido o método aproximativo *tight-binding* é utilizado para se calcular estados de energia de um elétron movendo-se em uma rede [15]. A figura (9) mostra um sistema que possui simetria de rede. A aproximação *tight-binding* se utiliza da simetria de rede para calcular a função de onda em *sítio* da rede  $i$  considerando que apenas os sítios mais próximos ( $i \pm 1$ ) influenciam a função de onda no sítio  $i$ . A figura (9) mostra um sistema com simetria de rede apresentada por poços de potencial de tamanho  $a$ .

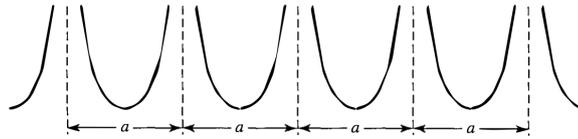


Figura 9: Representação de um sistema com simetria de rede. Figura retirada do livro *Modern quantum mechanics* de J. J. Sakurai.

Em sistemas que possuem simetria de rede a função de onda, no espaço das posições, do elétron é descrita pelo *teorema de Bloch* [15] que estabelece a relação entre a função  $\psi(x)$  com  $\psi(x - a)$  é dada por,

$$\psi(x - a) = e^{-i\theta} \psi(x). \quad (1.14)$$

Sendo  $e^{-i\theta}$  um fator de fases.

A equação (1.14) nos diz que a função de onda em uma região  $x - a$  difere apenas por uma fator de fases da função de onda em  $x$ . Esta preservação de características da função de onda é chamada de *coerência quântica* [16]. A coerência é um fenômeno característico da mecânica quântica e está ligado a estudos, por exemplo, relacionados à localização, tunelamento, emaranhamento quântico e informação quântica [4, 16, 17]. A perda de coerência em um sistema é chamada de *de-coerência* [18]. Propriedades como *delocalização*, e perda de informação de um sistema, estar de-coerência entre estados da função de onda [18, 19, 20].

### 1.4.2 Localização de Anderson

Em 1958, P. W. Anderson introduziu um modelo simples para analisar os estados de uma elétron movendo-se em uma rede com potencial aleatório [21]. O hamiltoniano originalmente utilizado para descrever a probabilidade de se encontrar o elétron em *sítio*  $j$  é descrito por (1.15)

$$i\dot{a}_j = E_j a_j + \sum_{k \neq j} V_{jk} a_k. \quad (1.15)$$

Sendo  $V_{jk}$  uma matriz de interação entre os sítios e  $E_j$  são valores aleatórios de energias *on-site* [22] que descrevem a impureza no material.

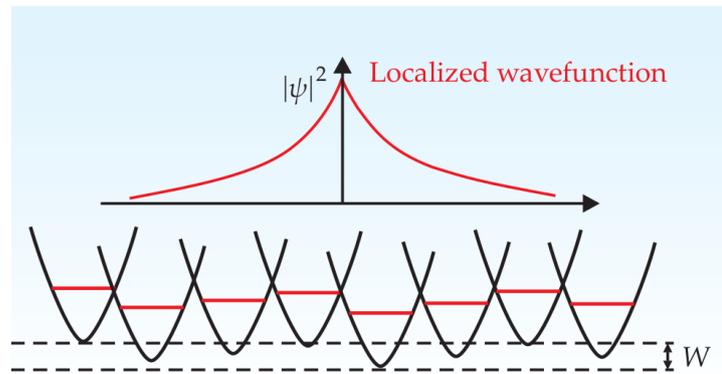


Figura 10: As impurezas são representadas no sistema por meios de alterações na profundidade do potencial. Imagem retirada do artigo *Anderson localization of ultra cold atoms*, A.A, M Inguscio, Physics Today, agosto de 2009.

A figura (10) mostra as impurezas representadas como perturbações estáticas no sistema. A perturbação provocada pela presença de impurezas gera uma de-coerência nos estados da função de onda. Esta de-coerência é responsável por alterar certas propriedades de um sistema, sendo a localização (ou ausência de difusão) a propriedade que queremos estudar neste trabalho. A difusão de uma material estar relacionado com livre caminho médio do sistema [23], o qual é calculado pela média do caminho percorrido pela partícula entre as colisões com as impurezas. Classicamente a partícula interage com as impureza por meio de colisões elásticas (considerando um sistema idealizado por *esferas rígidas* [24]). Quando passamos para um sistema quântico partícula é descrita por uma *onda na matéria* [25]. Quando a função de onda interage com as impurezas (dadas por uma potencial) ocorre uma reflexão e uma transmissão da função de onda [4].

Ao estudarmos a evolução temporal de um pacote de onda em um material heterogêneo (com impurezas) a forma final da função de onda irá depender das condições iniciais do sistema. Assim, em vez de analisar o comportamento da função de onda em si (analisar a

forma da função de onda  $\psi(x)$  depois de um certo período de tempo), a localização da função de onda é analisada através da distribuição de densidade  $|\psi(x)|^2$  depois de atingir um estado estacionário, a qual nos dará informações sobre o quanto o elétron se espalha em um material pela análise do formato da distribuição dos possíveis estados acessados pela função de onda [26]. O que esta densidade de probabilidade mede é o comportamento médio da dinâmica do sistema, ou seja, a probabilidade do pacote de onda não se espalhar pelo material e, em vez disso, ficar confinado em certas regiões, o pacote de onda estar localizado.

Esta *localização*, devido ao nível de desordem do sistema, é chamada de *localização de Anderson* [21, 26]. Em estudos relacionados a transição de sistemas condutores e isolantes em sistemas, desordenados a *localização* possui um papel de importância devido relação entre sistemas com função de onda localizada e isolantes, e a ausência de localização (difusão) relacionada a condutividade [26].

### 1.4.3 Localização dinâmica

Como foi mencionado anteriormente a presença de uma perturbação pode causar uma de-coerência entre os estados e gerar uma localização do pacote de onda no sistema. A localização dinâmica estar relacionada com a probabilidade de encontrarmos a partícula com um certo valor de momento.

O momento do elétron estar relacionado com seu comprimento de onda, dado pela equação (1.16), e a partir disso podemos analisar as frequências do elétron no sistema. Dizer que um elétron encontra-se localizado no espaço dos momentos estar relacionado aos possíveis estados de momentos (logo frequências) que o elétron pode assumir no material. Este conceito é de grande utilidade, e interesse, na optoeletrônica.

$$p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}. \quad (1.16)$$

Nos trabalhos desenvolvido por Cassati [27], [28], e revisados por Izrailev [29], foram estudados sistemas unidimensionais com simetria temporal [14]. O modelo analisado por Cassati foi o rotor impulsionado, por um potencial depende da posição, em momentos periódicos [14, 26, 27].

Na seção 3 utilizaremos conceitos estatísticos para mostrar a previsão clássica para a localização dinâmica.

## 1.5 O Rotor impulsionado

O rotor impulsionado é um sistema dinâmico, dado pelo Hamiltoniano (1.17) [1,27],

$$H = \frac{p^2}{2I} + k \cos(\theta) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT), \quad (1.17)$$

cuja a dinâmica é analisada pelo mapa *estroboscópico*<sup>2</sup> (1.18),

A figura (11) nos mostra

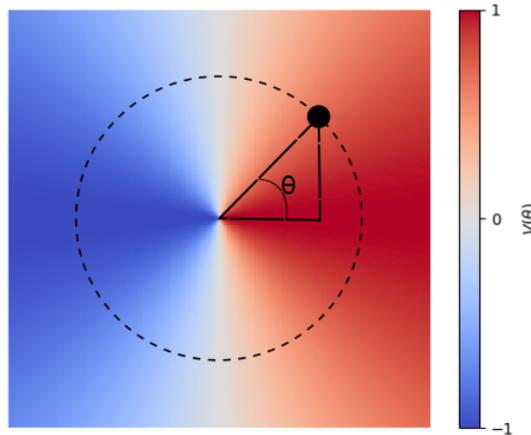


Figura 11: Forma do impulso, dependente de  $\theta$ , aplicado no rotor.

$$p_{n+1} = p_n + K \sin(\theta_n). \quad (1.18)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + p_{n+1}, \quad (1.19)$$

$\theta$  é a variável angular do rotor,  $p$  sendo o seu momento angular e  $K = k/T$  a intensidade do impulso dado a cada período.

Este mapa é conhecido como *mapa de Chirikov* [14,28] e apresenta comportamento regular (integrável) para pequenos valores de  $K$  e, à medida, que aumentamos a intensidade do impulso o rotor passa a ter comportamento *caótico* [14, 27, 28, 29]. Cassati mostrou em seu trabalho que, para o sistema a nível clássico, o comportamento caótico leva a uma *difusão do momento*, mostrando também a relação entre o coeficiente de difusão e o valor  $K$  (o quão caótico o sistema é).

Utilizando o princípio da equivalência entre sistemas clássicos e quânticos [5, 9], que nos fala que se um sistema clássico possui comportamento caótico o seu equivalente quântico

<sup>2</sup>A demonstração desse mapa será apresentada na seção (2).

também possui comportamento caótico, Cassati mostrou que o caos presente no sistema clássico provoca uma *supressão* da difusão caótica no espaço dos momentos do sistema quântico. Esta supressão é chamada de *localização dinâmica* [14, 26, 27, 29].

A dependência temporal na forma de uma função delta é de fácil análise teórica (como iremos ver na seção (3)). Assim, o rotor quântico se torna um ótimo sistema para entendermos os efeitos da perturbação periódicas do tempo em sistemas dinâmicos. Um exemplo de problema com o qual o rotor impulsionado pode ser relacionado é no estudo da interação de elétrons com campos (elétricos ou magnéticos) variando no tempo [16, 17], cujo hamiltoniano para um campo monocromático é dado por,

$$H = \frac{(\vec{p})^2}{2m_e} + e\phi(\vec{x}) - \frac{e}{m_e c} \left( 2A_0 \hat{e} \cos \left( \frac{\omega}{c} \hat{n} \cdot \hat{x} - \omega t \right) \right) \cdot \vec{p}. \quad (1.20)$$

## 1.6 Objetivos do trabalho

Iremos analisar o rotor impulsionado na presença de uma variação no parâmetro  $K$ , interpretado como um *ruído* na intensidade do impulso aplicado no rotor [26, 30]. Este ruído é gerado aplicando-se uma variação aleatória em  $K$ . Como na natureza nada é realmente aleatório, iremos aplicar uma correlação na sequência dos valores aleatórios utilizados para se aplicar o ruído [22].

Na seção (1) iremos discutir os conceitos físicos utilizados no trabalho. Discutiremos sobre a correspondência entre sistemas clássicos e quânticos voltada à sistemas que apresentam comportamento caótico, e a influência do caos clássico em fenômenos de natureza quântica. Daremos o contexto para o fenômeno de localização na mecânica quântica e sua relação com a coerência quântica. Por fim, discutiremos sobre rotor impulsionado e o contexto físico o qual este pode ser aplicado.

Discutiremos na seção (2) a teoria por trás do rotor clássico, onde analisaremos os efeitos que o comportamento caótico do rotor produz no fenômeno de difusão. Iremos aplicar efeitos de ruído na intensidade do impulso aplicado no rotor para analisar de que forma esta perturbação altera o fenômeno de difusão clássica no sistema.

Ao passar para o nível quântico (seção (3)), iremos estudar como o comportamento caótico do rotor gera o que chamamos de *localização dinâmica*. Definiremos os operadores de evolução temporal com propriedades de simetria (periodicidade no tempo) que iremos utilizar para propagar a função de onda do rotor e mostraremos, analiticamente, a previsão clássica do efeito de localização do sistema.

Logo após, na seção (4), discutiremos os resultados numéricos das nossas simulações e as análises obtidas para o sistema sobre o efeito do ruído com correlação de longo alcance.

## 2 DINÂMICA CLÁSSICA

Começamos estudando a dinâmica clássica do rotor impulsionado por um potencial  $\delta$  [29]. O hamiltoniano do sistema é dado pela equação (2.1).

$$H = \frac{p^2}{2I} + k \cos(\theta) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT), \quad (2.1)$$

$\theta$  sendo a coordenada pola do rotor,  $p$  o momento angular da partícula,  $I$  o momento de inércia e  $k$  a intensidade do impulso e  $T$  o período o qual é aplicado o impulso.

Antes continuarmos os nossos estudos sobre o rotor, iremos fazer as seguintes mudanças de variáveis,

$$p := \frac{p}{\sqrt{I}}, \quad (2.2)$$

$$t := \frac{t}{T}, \quad (2.3)$$

$$k := kT. \quad (2.4)$$

Aplicando as mudanças (2.2), (2.3) e (2.4) na equação (2.1), temos,

$$H = \frac{p^2}{2} + k \cos(\theta) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n), \quad (2.5)$$

Devido a dependência temporal do sistema a energia não é mais conservada [1]. Porém, o fato da dependência temporal ser periódica nos permite utilizar um *mapa de fases estroboscópico* para analisar o sistema.

### 2.1 Mapa de Chirikov

Iremos derivar o mapa estroboscópico que será utilizado para analisar o sistema, seguindo o processo descrito em [19]. A partir do Hamiltoniano (2.5), temos as equações de Hamilton [1] dados por,

$$\frac{\partial}{\partial t} p = -\frac{\partial}{\partial \theta} H = k \sin(\theta) \sum_n \delta(t - n), \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta = \frac{\partial}{\partial p} H = p. \quad (2.7)$$

Integramos a equação (2.6) em um pequeno intervalo de tempo  $t_n - \epsilon < t < t_{n+1} - \epsilon$ , sendo  $t_n$  o instante de tempo do  $n$ -ésimo impulso aplicado na partícula.

$$\int_{t_n - \epsilon}^{t_{n+1} - \epsilon} dt \frac{\partial}{\partial t} p = \int_{t_n - \epsilon}^{t_{n+1} - \epsilon} dt k \sin(\theta) \sum_n \delta(\tau - n). \quad (2.8)$$

Utilizando o *teorema fundamental do cálculo* [31] no lado esquerdo da equação (2.8) e a propriedade de integração da função da delta [32] no lado direito, temos,

$$p(t_{n+1} - \epsilon) - p(t_n - \epsilon) = k \sin(\theta). \quad (2.9)$$

Fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$  na equação (2.9),

$$p(t_{n+1}) = p(t_n) + k \sin(\theta). \quad (2.10)$$

Para a coordenada  $\theta$ , temos

$$\int_{t_n - \epsilon}^{t_{n+1} - \epsilon} dt \frac{\partial}{\partial t} \theta = \int_{t_n - \epsilon}^{t_{n+1} - \epsilon} dt p. \quad (2.11)$$

$$\theta(t_{n+1} - \epsilon) - \theta(t_n - \epsilon) = p(t_{n+1} - \epsilon) + \epsilon p(t_n - \epsilon) - \epsilon p(t_{n+1} - \epsilon), \quad (2.12)$$

logo,

$$\theta(t_{n+1}) - \theta(t_n) = p_{n+1} \quad (2.13)$$

Reescrevendo as equações (2.13) e (2.10), fazendo  $p$  e  $\theta$ , respectivamente,  $p_n$  e  $\theta_n$ , temos,

$$p_{n+1} = p_n + k \sin(\theta_n), \quad (2.14)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + p_{n+1}. \quad (2.15)$$

As equações (2.14) e (2.15) formam o mapa *Chirikov* [28] que iremos utilizar para analisar o nosso sistema.

Analisando o mapa vemos que a partícula ganha mais momento à medida que a intensidade do impulso,  $k$ , aumenta. Vemos que a variação da coordenada  $\theta$  é linearmente dependente de  $p_{n+1}$ . Assim, quanto maior for um momento ganho pela partícula, maior será a variação de  $\theta$  e maior será variação do sinal da função *seno* na equação (2.14). Todo esse cenário provoca uma falta de correlação entre  $\theta_n$  e  $\theta_{n+1}$  e uma difusão no momento (devido a

“aleatoriedade” do sinal da função seno). Ou seja, a medida que aumentamos o valor de  $k$  o sistema se torna mais caótico. As figuras (12), (13) e (14), mostram o mapa de fases de Chirikov para certos valores de  $k$ , onde podemos ver exatamente esse fenômeno.

Podemos ver na figura (12) que, para pequenos valores  $k$ , há a presença de *orbitas de estabilidade* no mapa [8, 19], e à medida que aumentamos  $k$  essas orbitas começam a se desfazer (como prever o Teorema KAM), como podemos ver nas figuras (13) e (13), e passamos a ter o que chamamos de sistema *misto* (sistemas que apresentam tanto comportamento caótico quanto integrável, dependendo das condições iniciais do sistema). Se aumentarmos mais ainda a intensidade da perturbação ( $k$ ), as orbitas de estabilidade vão se desfazendo uma à uma até termos apenas o *mar de caos* [8].

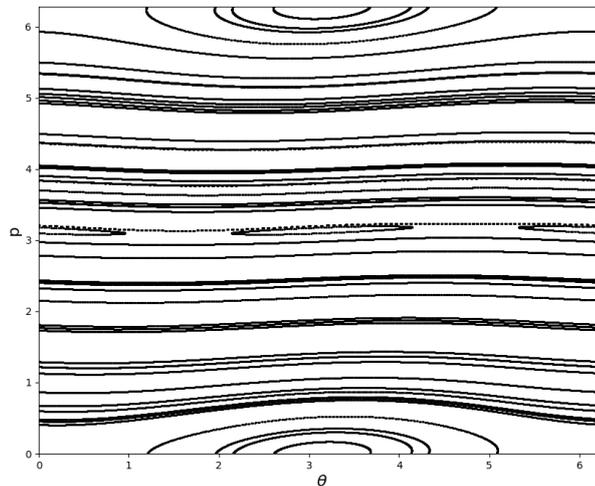


Figura 12: Mapa do espaço de fases para o rotor impulsionado com  $k = 0.1$

## 2.2 Difusão caótica

A medida que aumentamos a intensidade do impulso o sistema fica mais *caótico* e ganha mais momento (energia) a cada impulso. A partir do mapa de Chirikov podemos calcular a difusão do sistema [29]. Temos da equação (2.14),

$$p_{n+1} - p_n = k \sin \theta_n. \quad (2.16)$$

Considerando que os impulsos não são correlacionados, temos,

$$p_n - p_0 = k \sum_n \sin \theta_n. \quad (2.17)$$

A difusão de um sistema é dada pela *dispersão* do quanto um valor final se distanciou do inicial [4]. A dispersão é dada pela média da raiz quadrada da variável, conforme a

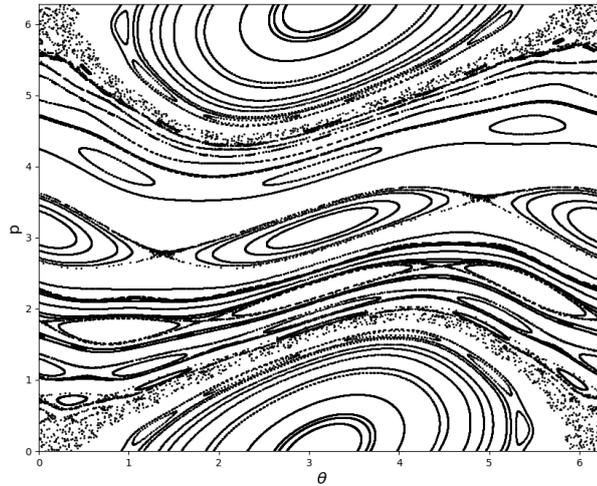


Figura 13: Mapa do espaço de fases para o rotor impulsionado com  $k = 0.8$

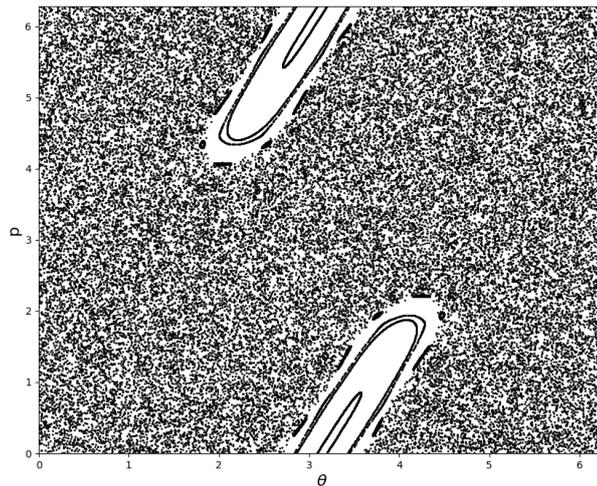


Figura 14: Mapa do espaço de fases para o rotor impulsionado com  $k = 4.0$

equação (2.18),

$$f(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt}. \quad (2.18)$$

Com isso, para  $p_0 = 0$ ,

$$\langle p_n^2 \rangle \approx \langle k^2 \sum_n \sin^2 \theta_n \rangle = \frac{1}{2} k^2 n. \quad (2.19)$$

A figura (15) nos mostra a relação linear entre  $\langle p^2 \rangle$  com relação ao tempo. A medida que  $k$  aumenta o sistema fica mais caótico e o coeficiente de difusão, dado pela equação

(2.20), aumenta.

$$D = \frac{\langle p_n^2 \rangle}{n} = \frac{1}{2}k^2. \quad (2.20)$$

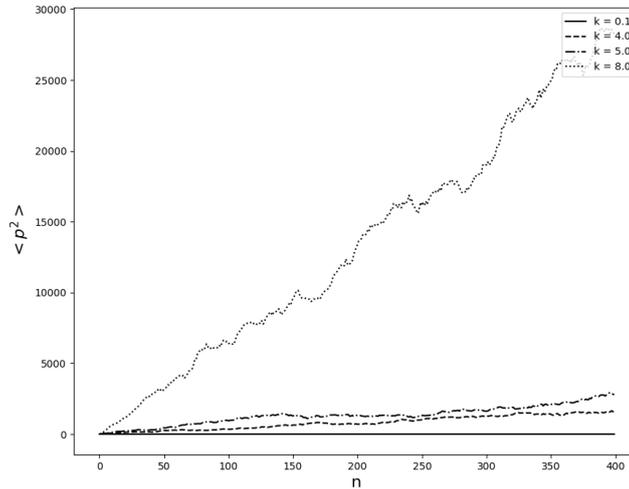


Figura 15: Difusão clássica para rotor impulsionado com intensidades diferentes ( $k = 0.1, 0.8, 4.0$  e  $8.0$ ). Média entre 50 amostragens.

### 2.3 Ruído

Como próximo passo nos nossos estudos iremos aplicar um *ruído* no sistema [13, 26, 30]. O ruído a que nos referimos está relacionado a uma variação aleatória na intensidade do impulso. Definimos então um novo  $k$  na forma de,

$$k := k + A\delta. \quad (2.21)$$

Na equação (2.21)  $\delta$  é um valor aleatório, variando entre  $[-1, 1]$ , e  $A$  é um parâmetro de ajuste que controla a intensidade do ruído, variando entre  $[0, 1]$ .

Para gerar os valores aleatórios iremos utilizar a equação,

$$\epsilon_i = \sum_{k=1}^{N/2} \left[ k^{-\alpha} \left| \frac{2\pi}{N} \right|^{(1-\alpha)} \right]^{\frac{1}{2}} \cos \left( \frac{2\pi ik}{N} + \phi_n \right), \quad (2.22)$$

a qual nos permite gerar uma sequência de valores correlacionados [22].

Na equação (2.22)  $\alpha$  estar relacionado com o fator de correlação da série gerada. Para  $\alpha = 0.0$  temos uma sequência aleatória não correlacionada enquanto para  $\alpha = 2.0$  temos um movimento Browniano.  $\phi$  um é valor aleatório gerado por uma distribuição uniforme. A figura (16) no mostra a sequência de valores gerados pela função (2.22) para  $n = 4096$  para

diferentes valores de  $\alpha$ .

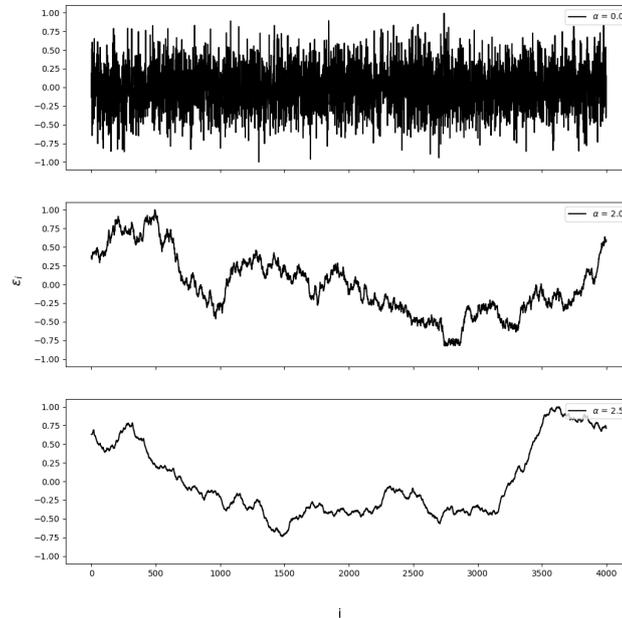


Figura 16: Sequências de valores aleatórios geradas para  $\alpha = 0.0, 2.0, 2.5$ .

As figuras (19), (20) e (21) mostram o sistema sobre o efeito do ruído (2.21) para diferentes valores de  $k$  e diferentes intensidades de ruído. Como estamos analisando duas quantidades (intensidade do impulso e intensidade do ruído) devemos ter em mente os valores que cada uma pode assumir. O ruído assume valores aleatórios entre -1 e 1 e possui sua intensidade regulada por valores entre 0 e 1 (0 sendo o rotor regular sem perturbação por ruído). A intensidade do impulso ( $k$ ), para os nossos estudos, irá assumir os valores definidos 0.1, 0.8, 4 e 8. Assim, pegando como exemplo  $k = 4.0$ , ao aplicarmos o ruído,  $k$  poderá variar entre 3 e 5, sendo  $k = 3$  (figura 17) representando um sistema misto e  $k = 5$  (figura 18) um sistema quase completamente caótico.

Ao aplicarmos o ruído percebemos que a medida que aumentamos a correlação ( $\alpha$ ) entre a variação do impulso ( $\epsilon_i$ ) aplicado no rotor estamos diminuindo a “aleatoriedade” do sinal da função seno e tornando o sistema “menos” caótico. Este efeito é evidenciado pela permanência das ilhas de estabilidade nos espaços de fases mostrados nas últimas colunas das figuras (19), (20) e (21). Assim, a correlação entre a sequência de valores que  $k$  pode assumir é de relevância para determinar os efeitos de difusão do sistema. Este fato será fundamental para quando passarmos a estudar análogo quântico do rotor.

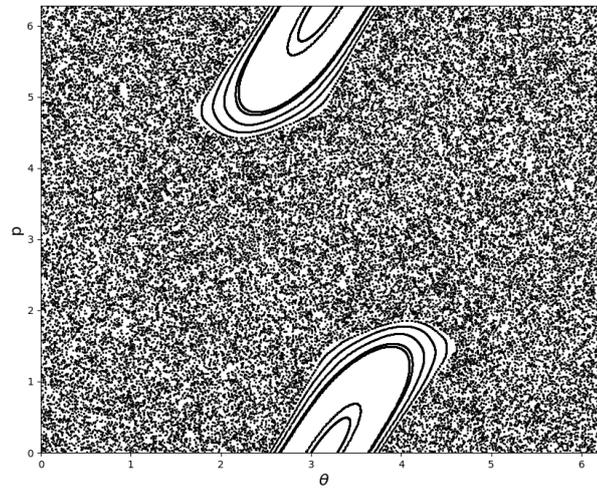


Figura 17: Mapa do espaço de fases para o rotor impulsionado com  $k = 3.0$

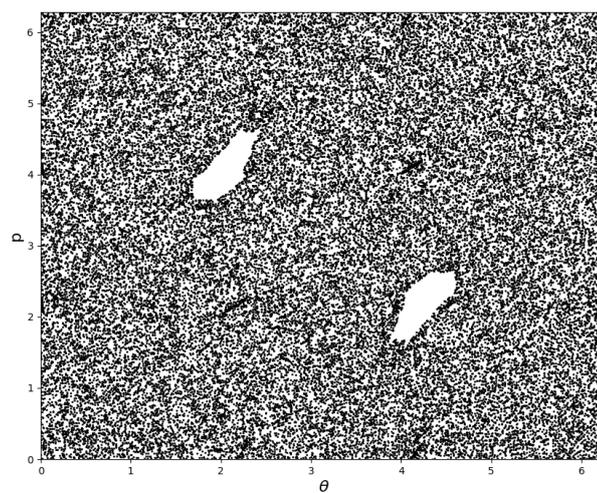


Figura 18: Mapa do espaço de fases para o rotor impulsionado com  $k = 5.0$

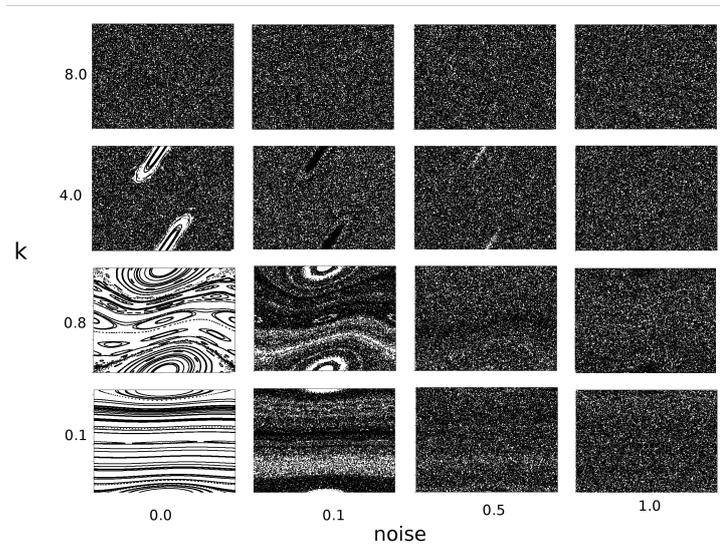


Figura 19: Mapas de fase gerados com ruído dado pela equação (2.22) para  $\alpha = 0.0$ . Os valores de  $K$  (0.1, 0.8, 4.0, 8.0) variam, em ordem crescente, de baixo para cima, enquanto os valores para o nível de ruído (0.0, 0.1, 0.5, 1.0) variam, em ordem crescente, da esquerda para a direita.

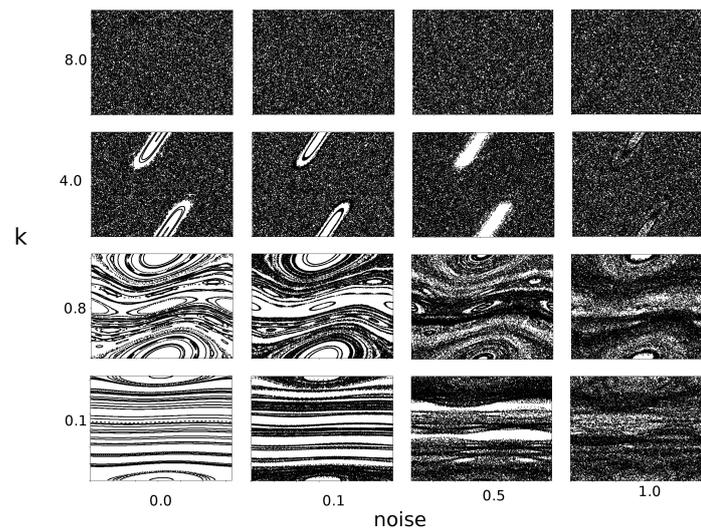


Figura 20: Mapas de fase gerados com ruído dado pela equação (2.22) para  $\alpha = 2.0$ . Os valores de  $K$  (0.1, 0.8, 4.0, 8.0) variam, em ordem crescente, de baixo para cima, enquanto os valores para o nível de ruído (0.0, 0.1, 0.5, 1.0) variam, em ordem crescente, da esquerda para a direita.

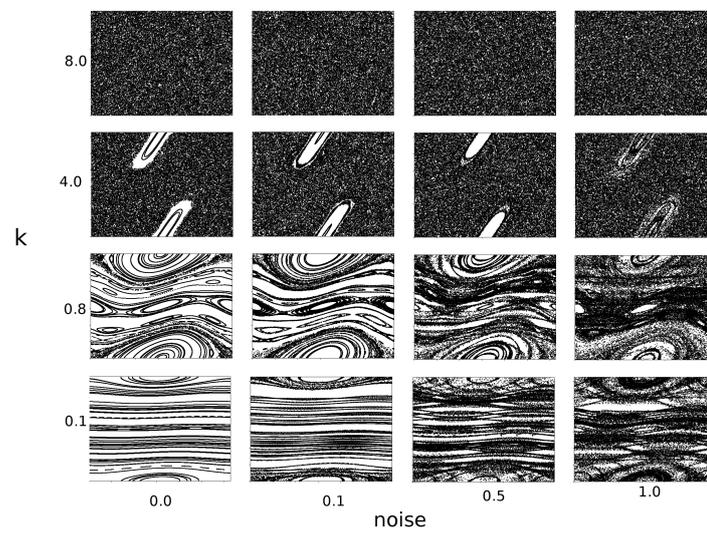


Figura 21: Mapas de fase gerados com ruído dado pela equação (2.22) para  $\alpha = 2.5$ . Os valores de  $K$  (0.1, 0.8, 4.0, 8.0) variam, em ordem crescente, de baixo para cima, enquanto os valores para o *nível de ruído* (0.0, 0.1, 0.5, 1.0) variam, em ordem crescente, da esquerda para a direita.

### 3 ROTOR QUÂNTICO

A nível quântico a equação que descreve o sistema é dado pela equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H\psi \quad (3.1)$$

Utilizando separação de variáveis, solução da equação (3.1) é dada na forma,

$$\psi_n(\theta, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \psi_n(\theta), \quad (3.2)$$

$E_n$  sendo as autoenergias do sistema.

Porém, o sistema em estudo possui um hamiltoniano, dado por (3.3), com dependência explícita com relação ao tempo. Isso implica uma não conservação da energia total.

$$H = -\frac{\hbar^2}{2I} \frac{\partial^2}{\partial^2 \theta} + k \cos(\theta) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n). \quad (3.3)$$

Mas, devido a periodicidade temporal do hamiltoniano,

$$H(t + \tau) = H(t), \quad (3.4)$$

podemos utilizar o teorema de *Floquet* e o operador de *Floquet* [14] para fazer a análise estroboscópica do sistema a nível quântico.

#### 3.0.1 Teorema de Floquet

A evolução temporal da função de onda  $\psi$  é realizada utilizando-se o operador de evolução temporal [16],

$$\psi_n(\theta, t + \tau) = \hat{U}(\tau) \psi_n(\theta, t). \quad (3.5)$$

O operador temporal definido pela equação (3.6)

$$\hat{U}(t, \tau) = e^{-\frac{iH(t-\tau)}{\hbar}}. \quad (3.6)$$

Devido a periodicidade do sistema podemos escrever a relação (3.5) como,

$$\hat{U}(\tau) \psi_n(\theta, t) = \psi_n(\theta, t + \tau) = \lambda_n \psi_n(\theta, t) \quad (3.7)$$

onde  $\lambda_n$  é apenas um fator de fase dado por,

$$\lambda_n = e^{-i\phi_n}. \quad (3.8)$$

Com isso podemos escrever (3.7),

$$\psi_n(\theta, t + \tau) = e^{-i\phi_n}\psi_n(\theta, t). \quad (3.9)$$

$\psi_n(x, t)$  pode ser escrito em termos de uma função periódica no tempo,  $u_n(\theta, t)$

$$\psi_n(\theta, t) = e^{-i\frac{\epsilon_n}{\tau}t}u_n(\theta, t), \quad (3.10)$$

sendo  $\phi_n = \epsilon_n/\tau$  e  $u_n$  sendo dado pela relação,

$$u_n(\theta, t + \tau) = u_n(\theta, t), \quad (3.11)$$

e  $\epsilon_n$  as *quasienergias* do sistema.

A equação (3.9) é o teorema de *Floquet* [14, 29, 30], que é o análogo do *teorema de Bloch* [16] para sistemas que apresentam periodicidade com relação ao tempo.

Queremos então definir o *operador de Floquet* o qual iremos usar para analisar o nosso sistema. Para isso, definimos um hamiltoniano geral dado por,

$$H(t) = H_0 + V \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau) \quad (3.12)$$

Substituindo o impulso em forma de função  $\delta$ , na equação 3.12, por um impulso aplicado durante um intervalo  $\Delta\tau$ . Assim, temos a relação,

$$H(t) = \begin{cases} H_0, & n\tau < t < (n+1)\tau - \Delta\tau \\ H_0 + \frac{V}{\Delta\tau}, & (n+1)\tau - \Delta\tau < t < (n+1)\tau \end{cases}. \quad (3.13)$$

A equação (3.13) nos diz que a partícula possui uma período de propagação livre, dado por  $H_0$ , e logo após recebe um impulso durante um intervalo  $\Delta\tau$ . Temos então o operador de evolução temporal dado por,

$$U(t) = \begin{cases} e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t}, & 0 < t < \tau - \Delta\tau \\ e^{-\frac{i}{\hbar}(H_0 + \frac{V}{\Delta\tau})(t - \tau + \Delta\tau)}U(\tau - \Delta\tau), & (n+1)\tau - \Delta\tau < t < (n+1)\tau \end{cases}. \quad (3.14)$$

O operador de Floquet é definido como,

$$\hat{F} = \hat{U}(\tau). \quad (3.15)$$

Com isso,

$$F = e^{-\frac{i}{\hbar}(H_0 + \frac{V}{\Delta t})(\Delta\tau)} e^{-\frac{i}{\hbar}H_0(\tau - \Delta\tau)}. \quad (3.16)$$

Fazendo  $\Delta\tau \rightarrow 0$  na equação (3.16), temos,

$$\hat{F} = e^{-\frac{i}{\hbar}V_0} e^{-\frac{i}{\hbar}H_0\tau} \quad (3.17)$$

Assim, temos o operador (3.17) dividido em duas partes: a primeira relacionada ao impulso recebido pela partícula, sendo esta diagonal no espaço das posições, e a segunda parte relacionada com a propagação livre da partícula, diagonal no espaço dos momentos. O operador 3.17 é de simples implementação numérica, utilizando o método *split-step* [33], e nos permite fazer a análise estroboscópica do sistema. Escrevendo 3.17 para o nosso sistema (2.5),

$$\hat{F} = e^{-\frac{i}{\hbar}k \cos(\theta)} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2}\tau}. \quad (3.18)$$

### 3.0.2 Localização Dinâmica

Cassati e Chirikov analisaram o rotor impulsionado a nível clássico e a nível quântico [27, 29]. O caos no sistema clássico é relacionado ao fenômeno de difusão dinâmica, cuja relação entre o coeficiente de difusão e o quão “caótico” é o sistema é dado pela equação (2.20). Quando passaram para o análogo quântico foi visto que a presença de caos no sistema provoca na verdade uma *supressão* da difusão. A figura (22) nos mostra a comparação entre a difusão clássica e a difusão quântica (valor esperado de  $p^2$ ). Percebemos que depois de um número de interações o sistema quântico *satura* e difusão cessa. Este fenômeno é relacionado com a *localização dinâmica* [27, 29], que se mostra por uma localização exponencial da função de onda no espaço dos momentos.

Estamos então interessados em analisar a distribuição da função de onda no espaço dos momentos, afim de determinar a *localização* no sistema. Queremos determinar a forma da distribuição  $f_n(\Delta p)$  que nos diz a probabilidade de  $(p_n - p_0)$  assumir o valor de  $\Delta p$  após  $n$  interações. Isso pode ser feito através da relação [14],

$$f_n(\Delta p) = \langle \delta(\Delta p - p_n - p_0) \rangle. \quad (3.19)$$

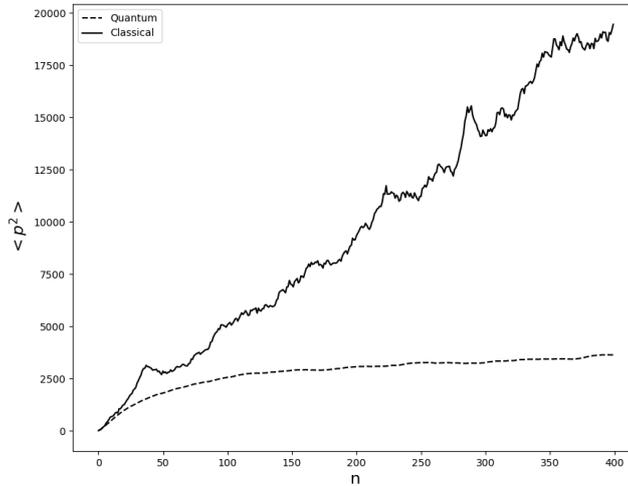


Figura 22: Difusão do momento ( $\langle p^2 \rangle$ ) com relação ao número de interações ( $k = 8.0$ ), para os casos clássico e quântico. Notamos que para o sistema quântico há um supressão da difusão caótica, levando a uma localização dinâmica.

Utilizando a representação da função delta em termos de uma integral de Fourier [32],

$$f_n(\Delta p) = \left\langle \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{it(\Delta p - p_n - p_0)} \right\rangle. \quad (3.20)$$

Como,

$$p_n - p_0 = \sum_{n=0}^{N-1} (p_{n+1} - p_n) = \sum_{n=0}^{N-1} (k \sin(\theta_n)), \quad (3.21)$$

temos,

$$f_n(\Delta p) = \left\langle \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left( e^{-it\Delta p} \prod_{n=0}^{N-1} e^{-itk \sin(\theta_n)} \right) \right\rangle. \quad (3.22)$$

A primeira consideração que fazemos para as nossas análises estar relacionada ao fato que os valores para  $\theta_n$  ficam cada vez menos correlacionados à medida que aumentamos o valor de  $k$ . Assim podemos calcular a média da exponencial envolvendo os  $\sin(\theta_n)$  de forma independente.

$$\langle e^{-ik \sin(\theta)} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-ik \sin(\theta)} = J_0(kt). \quad (3.23)$$

Sendo  $J_0(kt)$  a função de Bessel [32]. Assim, a equação (3.22), fica na forma,

$$f_n(\Delta p) = \left\langle \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-it\Delta p} J_0(kt)^N \right\rangle. \quad (3.24)$$

A próxima aproximação que aplicamos é considerar  $N \rightarrow \infty$ . Para grandes valores

de  $N$ , temos

$$J_0(kt)^N = e^{N \ln J_0(kt)} \approx e^{-\frac{N}{4}(kt)^2}. \quad (3.25)$$

Substituindo (3.25) em (3.24), temos,

$$f_n(\Delta p) = \left\langle \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-it\Delta p} e^{-\frac{N}{4}(kt)^2} \right\rangle. \quad (3.26)$$

Que possui como solução,

$$f_n(\Delta p) = \frac{1}{k\sqrt{\pi N}} e^{-\frac{(\Delta p)^2}{Nk^2}}. \quad (3.27)$$

Fazendo  $\Delta p \rightarrow p$  na equação (3.27), temos

$$f_n(p) = \frac{1}{k\sqrt{\pi N}} e^{-\frac{p^2}{Nk^2}}. \quad (3.28)$$

A equação (3.28) nos diz que para um grande número interações (número de impulsos) e para grandes valores de  $k$  (sistema completamente caótico) a distribuição dos momentos passa a ter a forma de uma distribuição Gaussiana [29].

A figura (22) nos mostra a distribuição para o rotor quântico (resultados numéricos) e a respectiva distribuição prevista pela equação (3.28). Os resultados numéricos mostram que a distribuição não possui a forma de uma Gaussiana (uma parábola com concavidade para baixo, em escala logarítmica), mas, na verdade, a forma de uma exponencial da forma,

$$f_n(p) = \frac{1}{l_c} e^{-\frac{2|p|}{l_c}}, \quad (3.29)$$

onde  $l_c$  é o fator de localização do sistema [14]. Estes foram o resultados obtidos por Cassati e revisados por Izrailev.

## 4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Utilizamos o método numérico *split-step* [33] para propagar um pacote de onda gaussiano [4] e coletar resultados referentes a distribuição dos momentos. Os *scripts* utilizados para gerar as simulações foram escritos na linguagem *python* utilizando bibliotecas numéricas [34]. Cada resultado mostrado foi gerado por 50 condições iniciais para cada simulação.

A figura (23) nos mostra a evolução temporal da densidade de distribuição dos momentos. Para cada interação o operador de Floquet (3.18) é aplicado na função de onda utilizando o método numérico *split-step*. A função de onda no espaço dos momentos, utilizada para calcular a densidade de distribuição  $|\psi(p)^2|$ , é dada a partir da *Transformada de Fourier* da função de onda no espaço das posições [16], dada a equação,

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx e^{-i\frac{px}{\hbar}} \psi(x). \quad (4.1)$$

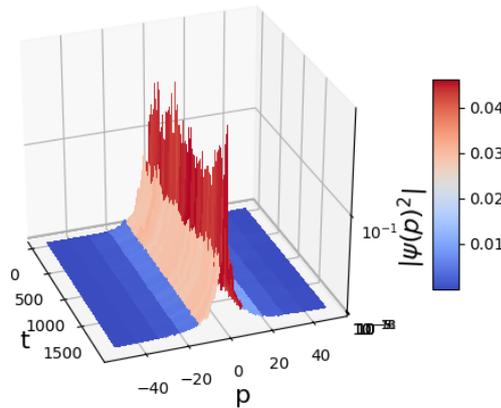


Figura 23: Evolução temporal da distribuição de densidade dos momentos para o rotor quântico.

A figura (24) nos mostra o rotor quântico para vários valores  $k$ . Percebemos que para sistemas mais caóticos (maiores valores de  $k$ ) os efeitos da localização dinâmica se tornam mais evidentes ( $l_c$  aumenta). À medida que aumentamos a perturbação estamos aumentando também a de-coerência entre os estados Floquet do sistema. Como foi mencionado na seção 1 a de-coerência quântica leva a uma localização no sistema. Neste caso a uma localização da função de onda no espaço dos momentos.

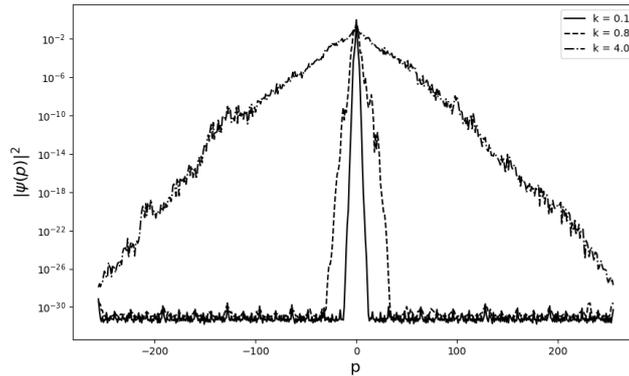


Figura 24: Distribuição do momento para os sistemas quântico para  $k = 0.1, 0.8, 4.0$ .

#### 4.1 Presença de ruído no rotor quântico

As figuras (25), (26) e (27) nos mostram o sistema quântico com o ruído dado pela equação (2.22) para valores diferentes de  $\alpha$ . Vemos que para  $\alpha = 0$  todos os sistemas apresentam uma distribuição semelhante a uma gaussiana. Isso indica que a presença do ruído traz de volta a difusão caótica prevista pela equação (3.28). O equivalente desse sistema é visto na última coluna da figura (19), onde podemos ver que não importa o valor de  $k$  o sistema é completamente caótico.

Como visto nas figuras (20) e (21) ao aumentarmos a correlação da sequência aleatória ( $\alpha$ ) as ilhas de estabilidades permanecem no mapa de fases mesmo para maiores valores  $k$ . Isso pode ser visto nas figuras (20) e (21). A nível quântico percebemos que correlação na sequência do ruído diminui a possibilidade de encontrarmos a difusão caótica. Porém, para valores elevados de  $k$  o efeito do ruído não é o suficiente para alterar as propriedades do sistema. Como podemos ver na figura (27), apenas  $\alpha = 2.5$  o efeito da localização exponencial persiste.

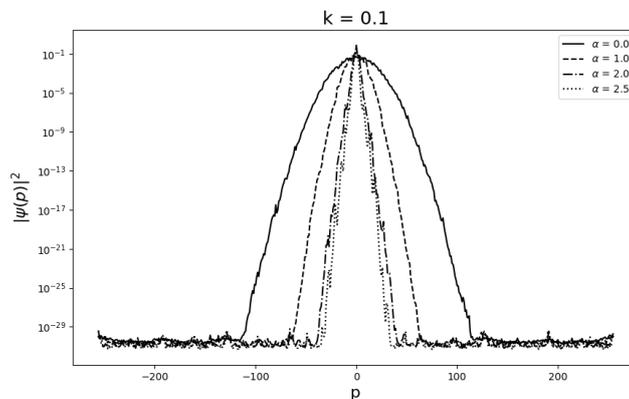


Figura 25: Distribuição da função de onda no espaço dos momentos para  $k = 0.1$ .

As figuras (25), (26) e (27) mostram a densidade  $|\psi(p)|^2$  depois de um longo

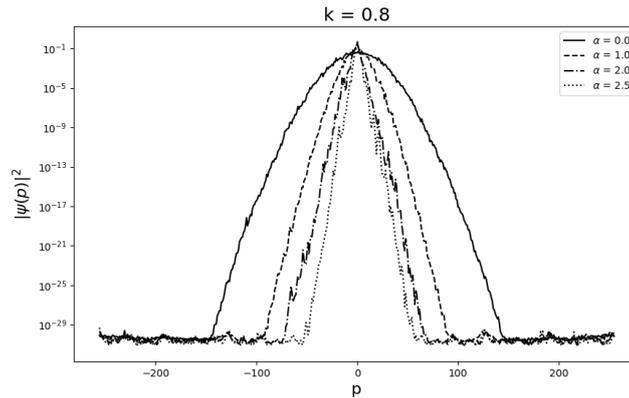


Figura 26: Distribuição da função de onda no espaço dos momentos para  $k = 0.8$ .

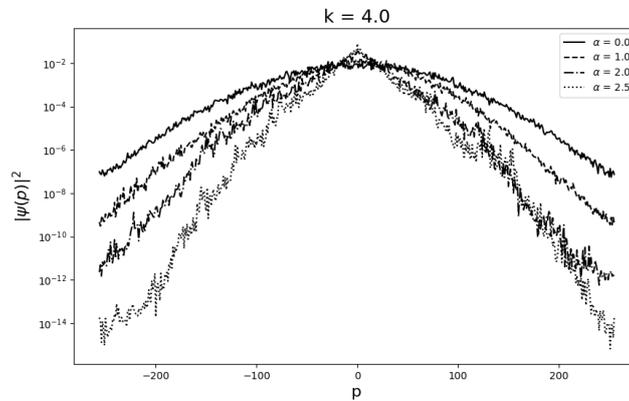


Figura 27: Distribuição da função de onda no espaço dos momentos para  $k = 4.0$ .

período. A evolução de  $|\psi(p)|^2$ , a partir de um pacote de onda gaussiano, é mostrada na figura (28) o rotor sem ruído e o rotor com ruído para  $\alpha = 0.0, 2.0$  e  $2.5$ .

Uma outra maneira de analisarmos a influência do ruído é analisar os efeitos da variável  $A$  presente na equação (2.21). As figuras (29), (30), (31) e (32) nos mostram "mapas de calor" gerados para valores de  $\alpha$  diferentes. No eixo  $x$  refere-se ao parâmetro  $A$  e o eixo  $y$  ao parâmetro  $k$ . A intensidade mostra no "mapa de calor" é dada pela relação,

$$I_c = \frac{1}{l_c}. \quad (4.2)$$

Podemos inferir que os efeitos da localização dinâmica se tornam mais presentes, já para pequenas intensidades de ruído, em sistemas que possuem correlação de longo alcance na sequência de ruídos.

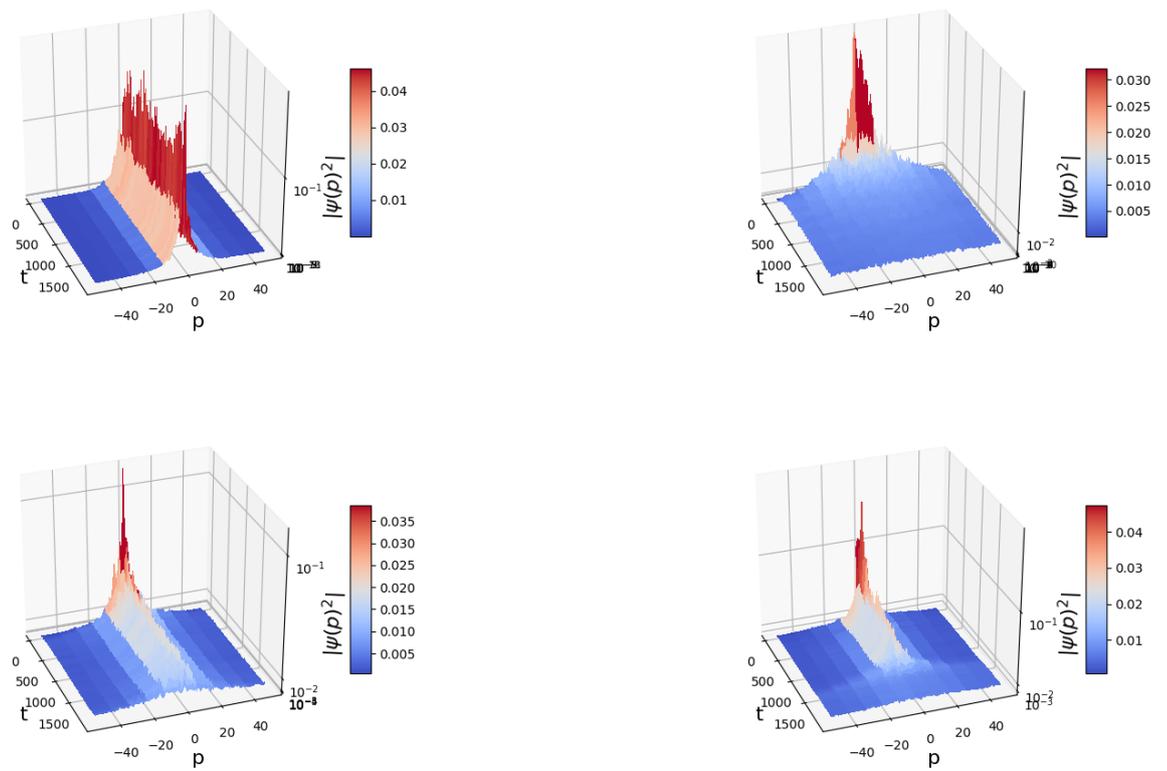


Figura 28: A figura mostra a evolução da densidade de probabilidade da função de onda no espaço dos momentos para  $k = 4.0$ . Em sequência da esquerda para direita e de cima para baixo temos o rotor sem ruído e com ruído para  $alpha = 0.0, 2.0e2.5$ .

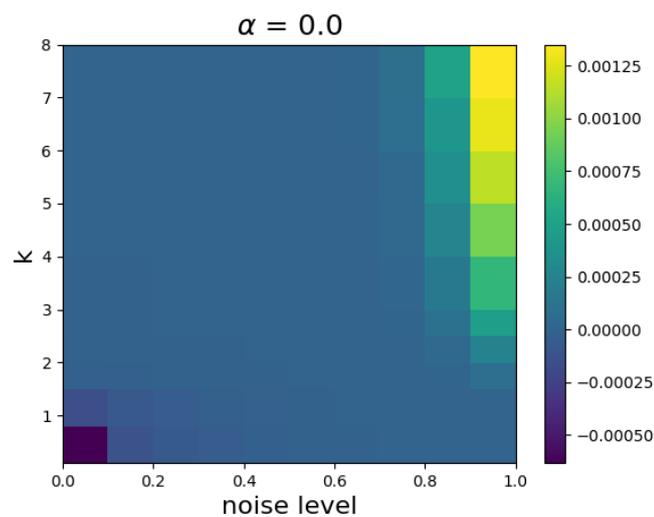


Figura 29: Mapas de calor para  $\alpha = 0.0$  relacionando o nível de ruído do sistema com a intensidade do impulso aplicado na partícula. A intensidade do mapa é referente ao fator de localização dinâmica  $1/l_c$ .

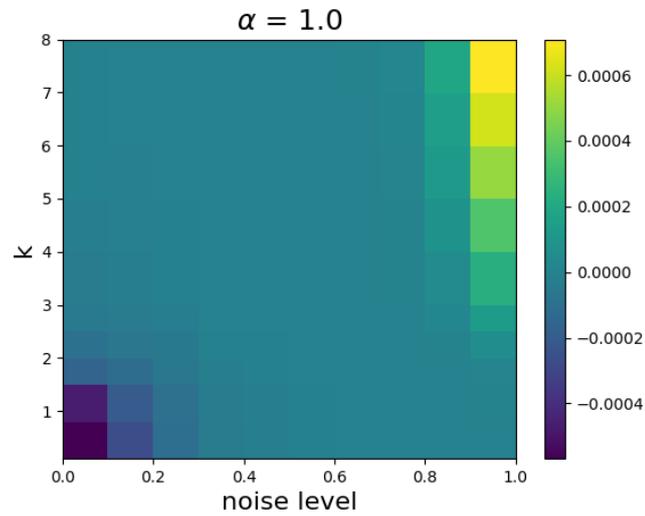


Figura 30: Mapas de calor para  $\alpha = 1.0$  relacionando o nível de ruído do sistema com a intensidade do impulso aplicado na partícula. A intensidade do mapa é referente ao fator de localização dinâmica  $1/l_c$ .

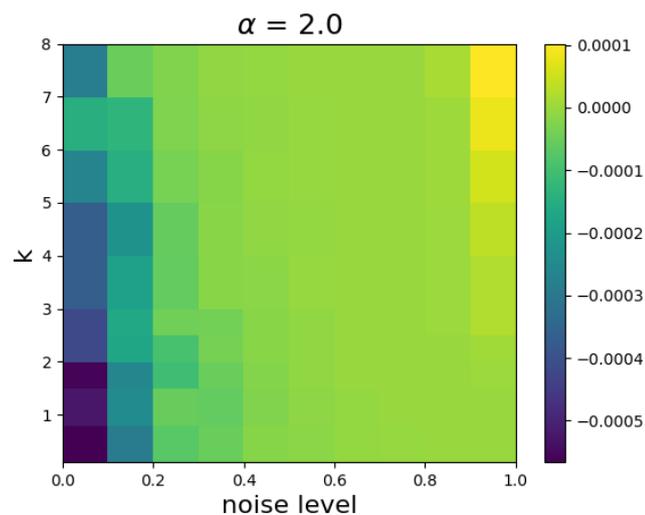


Figura 31: Mapas de calor para  $\alpha = 2.0$  relacionando o nível de ruído do sistema com a intensidade do impulso aplicado na partícula. A intensidade do mapa é referente ao fator de localização dinâmica  $1/l_c$ .

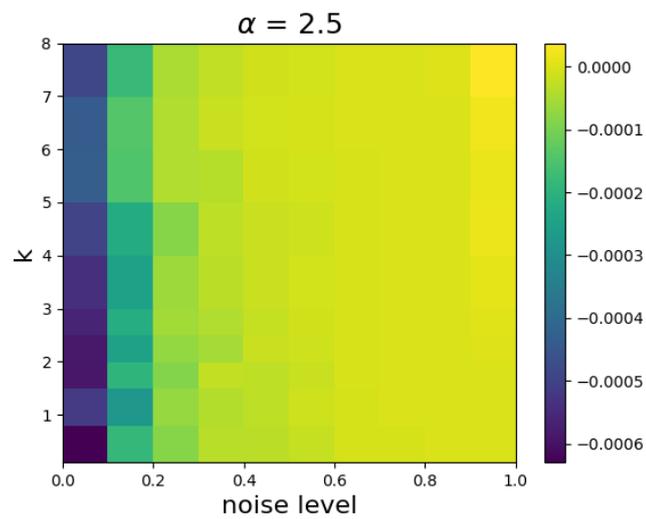


Figura 32: Mapas de calor para  $\alpha = 2.5$  relacionando o nível de ruído do sistema com a intensidade do impulso aplicado na partícula. A intensidade do mapa é referente ao fator de localização dinâmica  $1/l_c$ .

## 5 CONCLUSÃO

O rotor impulsionado por um potencial periódico no tempo se mostra uma boa plataforma para estudos envolvendo dinâmica caótica, pois, mesmo sendo um sistema de simples análise numérica, este se mostra muito versátil para implementarmos e estudarmos fenômenos quânticos como localização em sistemas com perturbações periódicas no tempo, tunelamento dinâmico em condensados Bose-Einstein e em moléculas (caracterizado pela mudança nos modos vibracionais da molécula) [13, 14, 19, 26, 35].

Na seção (2) estudamos os efeitos da variação da intensidade do impulso aplicado no rotor na forma de ruído. Percebemos que a medida que aumentamos a correlação na sequência de valores aleatórios utilizados para gerar o ruído, dado pela equação (2.22), as ilhas de estabilidade do sistema se mantêm, mesmo a perturbação provocada pelo ruído, e o sistema conserva as suas propriedades *mistas* (onde há presença de comportamento caótico e integrável) [8].

Quando passamos para o correspondente quântico, o rotor quântico, o caos é visto devido a supressão da *difusão caótica*, prevista pelo modelo clássico. Cassati e Izrailev mostram a presença de uma localização dinâmica em sistemas periódicos com relação ao tempo (sistemas de Floquet). Este resultado é o análogo à *localização de Anderson* [21] que prevê uma localização exponencial da função de onda em sistema com periodicidade de rede na presença de desordem.

Quando estudamos sistemas físicos complexos, cuja a fenomenologia foge a intuição comum, é preciso se ater aos princípios básicos da física. Na mecânica quântica dois princípios foram de fundamental importância para entender como a localização dinâmica ocorre no rotor quântico. Primeiro estar relacionado a de-coerência de um sistema provocada por uma perturbação externa ao sistema (impulso em  $\delta$ ). O segundo é princípio da *correspondência clássico-quântico*, que se mostrou uma ferramenta de grande utilidade para entender a correlação do caos a nível clássico influencia a dinâmica do rotor quântico.

Uma característica importante do espaço de fases clássico do rotor é presença de orbitas de energia simétricas. Como foi mencionado na seção (1) a presença de simetria leva a uma coerência no estados do sistema [16]. Assim, à medida que as orbitas de energia no espaço de fases vão sendo destruídas o sistema vai perdendo a coerência entre os estados da função de onda. Logo, quanto mais caótico o sistema maior será a de-coerência entre os estados. O que leva a uma localização no sistema.

Ao aplicarmos o ruído na intensidade do impulso do rotor percebemos que, para sequências aleatórias não correlacionadas, o rotor passa a ter o comportamento difuso, simi-

lar ao análogo clássico. Assim, para rotor impulsionado com ruído não correlacionado a de-coerência presente no sistema gera uma difusão no sistema (resultado obtido experimentalmente em [36]). Ao aumentarmos o valor de  $\alpha$  (correlação entre a sequência de valores aleatórios) as orbitas de estabilidade no espaço de fases clássico voltam a aparecer. O que indica que, para sistemas com correlação de longo alcance, a coerência entre os estados do sistema provoca localização dinâmica, ao contrário dos resultados presentes na literatura.

A partir desses resultados podemos aplicar estas análises em sistemas quânticos mais complexos. Podemos analisar como a de-coerência afeta o ruído aplicado na fase do sistema (*phase-noise*) [30]. Analisar como relação de incerteza se comporta na presença de uma perturbação aleatória. Aplicar nossas análises em outros sistemas periódicos no tempo, como o condensado de Bose-Einstein [13] dado pelo hamiltoniano “tipo pêndulo”,

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{\hbar\Omega_{eff}}{4}(1 - 2\epsilon \sin(\omega t + \phi)) \sin^2(kx). \quad (5.1)$$

Estudar sistemas sobre a influência de campos eletromagnético periódicos no tempo e suas influência na dinâmica vibracional de moléculas e na optoeletrônica.

## REFERÊNCIAS

- [1] H. Goldstein, *Classical mechanics*. Addison-Wesley series in physics, Addison-Wesley Pub. Co, 2d ed ed., 1980.
- [2] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*. PERSEUS BOOK, 3 ed.
- [3] S. Salinas, *Introdução à Física Estatística*. Edusp, 2nd ed., 2008.
- [4] D. J. Griffiths, *Mecânica Quântica*. PEARSON, 3 ed.
- [5] M. C. G. (auth.), *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. Interdisciplinary Applied Mathematics 1, Springer-Verlag New York, 1 ed., 1990.
- [6] A. I. N. E. K. Vladimir I. Arnold, Valery Kozlov, *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer, 3rd ed. ed., 2010.
- [7] L. E. D. Oliveira, Diego F. M., “On the dynamical properties of an elliptical-oval billiard with static boundary.,” *Communications In Nonlinear Science and Numerical Simulation.*, vol. 15, pp. 1092–1102, 4 2010.
- [8] L. Nivaldo A., *Mecânica Analítica*. LIVRARIA DA FÍSICA, 2 ed., 2007.
- [9] T. Guhr, “The bakerian lecture, 1987: Quantum chaology,”
- [10] A. Mijolaro, *Estudo da distribuição de espaçamentos de dubletos utilizando o modelo do bilhar anular*. Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista., 2004.
- [11] C. W. J. Beenakker, “Random-matrix theory of quantum transport,” vol. 69, pp. 731–808, 1997.
- [12] S. Tomsovic and D. Ullmo, “Chaos-assisted tunneling,” *Phys. Rev. E*, vol. 50, pp. 145–162, Jul 1994.
- [13] P. S. e. Srihari Keshavamurthy (ed.), *Dynamical Tunneling: Theory and Experiment*. CRC Press, 2011.
- [14] H.-J. Stöckmann, *Quantum Chaos: An Introduction*. Cambridge University Press, 1 ed., 1999.
- [15] N. D. M. Neil W. Ashcroft, *Solid state physics*. Solid State Physics, Holt, Rinehart and Winston, 1976.
- [16] J. J. Sakurai, *Modern quantum mechanics*. Addison-Wesley Pub. Co, rev. ed ed., 1994.
- [17] S. Gasiorowicz, *Quantum Physics*. Wiley, 3rd ed ed., 2003.
- [18] C. K. J. K. I.-O. S. H. D. Z. a. Domenico Giulini, Erich Joos, *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory*. Springer Berlin Heidelberg, 1996.

- [19] D. A. Steck, “Quantum chaos, transport, and decoherence in atom optics,” 1 2001.
- [20] W. Hensinger, H. Haefliger, A. Browaeys, N. R Heckenberg, K. Helmerson, C. McKenzie, G. J Milburn, W. Phillips, S. Rolston, H. Rubinsztein-Dunlop, and B. Upcroft, “Dynamical tunnelling of ultracold atoms,” vol. 412, pp. 52–5, 08 2001.
- [21] P. W. Anderson, “Absence of diffusion in certain random lattices,” *Phys. Rev.*, vol. 109, pp. 1492–1505, Mar 1958.
- [22] F. de Moura and M. Lyra, “Delocalization in the 1d anderson model with long-range correlated disorder,” vol. 81, pp. 3735–3738, 10 1998.
- [23] H. M. Nussenzveig, *Curso de Fisica Basica: Fluidos; Oscilacoes e Ondas; Calor - Vol. 2*. Edgard Blucher, 2001.
- [24] W. Krauth, *Statistical Mechanics: Algorithms and Computations*. Oxford University Press, USA, 2006.
- [25] S. B. Altland A., *Condensed Matter Field Theory*. CUP, 2010.
- [26] J. Chabé, G. Lemarié, B. Grémaud, D. Delande, P. Szriftgiser, and J. C. Garreau, “Experimental observation of the anderson metal-insulator transition with atomic matter waves,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 101, p. 255702, Dec 2008.
- [27] G. Casati, B. V. Chirikov, F. M. Izraelev, and J. Ford, “Stochastic behavior of a quantum pendulum under a periodic perturbation,” pp. 334–352, 1979.
- [28] B. V. Chirikov and D. L. Shepelyansky, “Localization of Dynamical Chaos in Quantum Systems,” *Radiofizika*, vol. 29, p. 1041, 1986.
- [29] F. M. Izrailev, “Simple models of quantum chaos: Spectrum and eigenfunctions,” vol. 196, pp. 299–392, 11 1990.
- [30] D. H. White, S. K. Ruddell, and M. D. Hoogerland, “Phase noise in the delta kicked rotor: from quantum to classical,” *New Journal of Physics*, vol. 16, no. 11, p. 113039, 2014.
- [31] L. Leithold, *The calculus, with analytic geometry*. Harper and Row, 3rd ed., 1976.
- [32] W. H. J. Arfken, George B., *Mathematical Methods for Physicists*. ELSEVIER, 6 ed., 2007.
- [33] P. Suarez, “An introduction to the split step fourier method using matlab,” 09 2015.
- [34] E. Jones, T. Oliphant, P. Peterson, *et al.*, “SciPy: Open source scientific tools for Python,” 2001–. [Online; accessed 2017-03-17].
- [35] S. Keshavamurthy, “Dynamical tunnelling in molecules: quantum routes to energy flow,” *International Reviews in Physical Chemistry*, vol. 26, no. 4, pp. 521–584, 2007.
- [36] V. Milner *et al.*, “Recovery of classically chaotic behavior in a noise-driven quantum system,” *Phys. Rev. E*, vol. 61, p. 7223, 2000.