



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO, ATUÁRIA E
CONTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE ADMININSTRACÃO
CURSO DE CIÊNCIAS ATUARIAIS

MAYSA PEREIRA DE SOUZA SANTOS

MODELOS PARA CONTINGÊNCIA DE VIDA:
UMA ABORDAGEM A PARTIR DOS EXAMES DA
SOCIEDADE DE ATUÁRIOS DOS ESTADOS UNIDOS

FORTALEZA
2014

MAYSA PEREIRA DE SOUZA SANTOS

**MODELOS PARA CONTINGÊNCIA DE VIDA:
UMA ABORDAGEM A PARTIR DOS EXAMES DA
SOCIEDADE DE ATUÁRIOS DOS ESTADOS UNIDOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Ciências Atuariais da Universidade Federal do Ceará, para obtenção do grau de bacharela em Ciências Atuariais.

Orientadora: Prof^ª. Ma. Ana Cristina Pordeus Ramos.

**FORTALEZA
2014**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca da Faculdade de Economia, Administração, Atuária, Contabilidade e Secretariado Executivo

S236m Santos, Maysa Pereira de Souza.

Modelos para contingência de vida: uma abordagem a partir dos exames da Sociedade de Atuários dos Estados Unidos/ Maysa Pereira de Souza Santos. – 2014.

66 f. : il. color.; enc.

Monografia (Graduação) – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Economia, Administração, Atuária, Contabilidade e Secretariado Executivo, Curso de Ciências Atuariais, Fortaleza, 2014.

Orientação: Profa. Ma. Ana Cristina Pordeus Ramos.

1. Administração de riscos. 2. Seguros. 3. Ciência atuarial. I. Título.

CDD 368.01



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO, ATUÁRIA
E CONTABILIDADE
COORDENAÇÃO DO CURSO DE CIÊNCIAS ATUARIAIS

COORDENAÇÃO DO CURSO DE CIÊNCIAS ATUARIAIS

PARECER FINAL SOBRE A MONOGRAFIA DE GRADUAÇÃO

ALUNO(A): MAYSA PEREIRA DE SOUZA SANTOS

MATRÍCULA: 320309

TÍTULO: Modelos para contingência de vida: uma abordagem a partir dos exames da sociedade de atuários dos Estados Unidos

DATA DE APROVAÇÃO: 10/06/2014

SEMESTRE: 2014.1

AVALIAÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

Banca Examinadora:

Nota:

Prof. Orientador:

Ana Cristina Pordeus Ramos, Ms.

Prof.:

Alane Siqueira Rocha, Dr.

Prof.:

Luciana Moura Reinaldo

Média Final:

Aprovado

Reprovado

À minha mãe, Dilma.

AGRADECIMENTOS

À Deus, pelo dom da vida e pelas oportunidades.

À minha mãe e minha irmã, pela fé e apoio a mim transmitidos.

À professora Ana Cristina Pordeus Ramos, pela excelente orientação.

À professora Alana Katielli Azevedo de Macedo, pela primordial atenção.

Aos meus professores, por valiosos conhecimentos repassados.

Aos meus colegas do curso de Bacharelado em Ciências Atuariais, pelas críticas e sugestões recebidas durante todo o curso.

Aos colegas de profissão, pelo incentivo recebido ao longo do curso.

A todos que de alguma forma me ajudaram a chegar até aqui.

“O fardo é proporcional às forças, como a recompensa será proporcional à resignação e à coragem” (Allan Kardec)

RESUMO

Os modelos para contingência de vida (MLC) são elaborados para estimar o risco associado aos eventos aleatórios nos diversos ramos da ciência atuarial ligados à vida, tais como seguros de vida e previdência. Nesse contexto, esta monografia teve por objetivo explorar estes modelos a partir de sua abordagem nos exames atuariais da Sociedade de Atuários dos Estados Unidos (SOA) em uma pesquisa do tipo exploratória e bibliográfica. Para tanto, foi feito um levantamento de informações acerca desta sociedade, seus exames atuariais e dos aspectos relevantes para a carreira profissional de um atuário nos EUA; a apresentação de um resumo indicativo da teoria relacionada ao Exame MLC da SOA e a demonstração prática da forma de avaliação deste exame por meio da seleção e resolução de questões do referido exame. Concluiu-se que o acompanhamento dos referidos exames pode ser um meio de aprimorar o conhecimento atuarial e a capacidade profissional dos atuários e que as referidas questões poderiam ser melhor exploradas pelos cursos de atuária e pelo mercado de trabalho correlato no Brasil.

Palavras-chaves: Modelos para contingência de vida. Exames atuariais. Sociedade de Atuários. Exame MLC.

ABSTRACT

The models for life contingency(MLC) are designed to estimate the risk associated with the random events on the various branches of the actuarial science related to life, such as life insurance and pension. In this context, this monograph aimed to explore these models from their approach in the actuarial exams of the Society of Actuaries of the United States (SOA) in a research of the exploratory and bibliographic type. For this purpose, was made a survey information about this society, their actuarial examinations and relevant aspects for the career of an actuary in the U.S.; the submission of an indicative summary of the related theory to MLC Exam of the SOA and practical demonstration on how to evaluationthis exam by selecting and resolving issues of this exams. It was concluded that the monitoring of these exams can be a means to enhance the actuarial knowledge and professional capacity of the actuaries and that those issues could be better exploited by actuarial courses and correlate labor market in Brazil.

Keywords:Models for life contingencies. Actuarial exams. Society of Actuaries. MLC Exam.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exames e Cursos requeridos para obtenção de cada um dos tipos de filiação à SOA.....	18
---	----

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Distribuição dos Filiados da SOA por Tipo de Empregador	19
--	----

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Descrição dos Exames e Cursos Iniciais da SOA	16
Quadro 2 – Áreas de Especialização para a filiação do tipo FSA.....	17
Quadro 3– Ranking das Melhores Profissões nos EUA de 2010 à 2014	19
Quadro 4 -Resumo de Fórmulas do Tópico Modelos para Vidas Simples e Múltiplas	21
Quadro 5 - Resumo de Fórmulas do Tópico Valor Presente de Variáveis Aleatórias	24
Quadro 6 – Resumo de Fórmulas do Tópico Cálculo do Prêmio	26
Quadro 7 – Resumo de Fórmulas do Tópico Reservas	28
Quadro 8 – Resumo de Fórmulas do Tópico Planos de Previdência e Benefícios de Aposentadoria	30
Quadro 9– Conteúdo Específico da Área de Finanças Corporativas e ERM (CFE).....	63
Quadro 10– Conteúdo Específico da Área de Finanças Quantitativas e Investimentos (QFI)	63
Quadro 11– Conteúdo Específico da Área de Vida Individual e Anuidades (ILA).....	64
Quadro 12– Conteúdo Específico da Área de Benefícios de Aposentadoria (RB).....	64
Quadro 13– Conteúdo Específico da Área de Grupo e Saúde (GH).....	65
Quadro 14 – Conteúdo Específico da Área de Seguros Gerais (GI).....	65
Quadro 15- Conteúdo Final Comum para Todas as Áreas de FSA.	66

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	A SOCIEDADE De ATUARIOS DOS ESTADOS UNIDOS (SOA) E SEUS EXAMES ATUARIAIS	13
2.1	Regulamentação da Profissão de Atuário nos Estados Unidos	13
2.2	Sociedade de Atuários dos Estados Unidos (SOA).....	14
2.3	Filiados da SOA	14
2.4	Exames Atuariais.....	15
2.4.1	<i>Exames Preliminares.....</i>	<i>15</i>
2.4.2	<i>Exames de Especialidades.....</i>	<i>16</i>
2.5	Mercado de Trabalho.....	18
3	TEORIA DO EXAME MLC DA SOA: UM RESUMO INDICATIVO.....	20
3.1	Modelos para Contingência de Vida	20
3.1.1	<i>Modelos para Vidas Simples e Múltiplas</i>	<i>20</i>
3.1.2	<i>Valor Presente de Variáveis Aleatórias</i>	<i>23</i>
3.1.3	<i>Cálculo do Prêmio.....</i>	<i>24</i>
3.1.4	<i>Reservas.....</i>	<i>26</i>
3.1.5	<i>Planos de Previdência e Benefícios de Aposentadoria</i>	<i>28</i>
4	PRÁTICA DO EXAME MLC DA SOA: QUESTÕES SELECIONADAS	31
4.1	Critério de Seleção das Questões	31
4.2	Questões Seleccionadas	32
4.2.1	<i>Modelos para Vidas Simples e Múltiplas</i>	<i>32</i>
4.2.2	<i>Valor Presente de Variáveis Aleatórias</i>	<i>36</i>
4.2.3	<i>Cálculo do Prêmio.....</i>	<i>39</i>
4.2.4	<i>Reservas.....</i>	<i>42</i>
4.2.5	<i>Planos de Previdência e Benefícios de Aposentadoria</i>	<i>46</i>
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	51
	REFERÊNCIAS	53
	ANEXO A – TÁBUA DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL DO EXAME MLC DA SOA ...	56
	ANEXO B – TÁBUA DE VIDA ILUSTRATIVA DO EXAME MLC DA SOA.....	57
	ANEXO C – TÁBUA DE VIDA ILUSTRATIVA DO EXAME MLC DA SOA.....	58
	ANEXO D – TÁBUA DE VIDA ILUSTRATIVA DO EXAME MLC DA SOA.....	59

ANEXO E – TÁBUA DE VIDA ILUSTRATIVA DO EXAME MLC DA SOA.....	60
ANEXO F – TABELA DE SERVIÇO ILUSTRATIVA DO EXAME MLC DA SOA....	61
APÊNDICE A - CONTEÚDO DE ESPECIALIDADE DA SOA REQUERIDOS PARA A FILIAÇÃO DO TIPO FSA.....	63

1 INTRODUÇÃO

As recentes pesquisas do site americano CareerCast.com, especializado em empregos, apontam a carreira de atuário como uma das melhores profissões nos Estados Unidos, tendo alcançado o primeiro lugar em 2010 e 2013. Em 2014, a referida profissão ocupou o quarto lugar no *ranking* com um salário médio anual de US\$ 93.680 e projeção de crescimento de 26% até 2022.

Nos Estados Unidos, maior economia do mundo¹, a carreira do atuário é auto-regulamentada e empresas contratantes, como as companhias de seguro e as empresas de consultoria, costumam exigir a aprovação deste profissional em exames atuariais oferecidos, por exemplo, pela Sociedade de Atuários dos Estados Unidos (SOA), além da experiência na área de interesse.

Trata-se da sociedade com a maior organização profissional de atuários do mundo, congregando 24.000 filiados nos Estados Unidos, Canadá e em outros países, sendo membro pleno da Associação Internacional de Atuária (IAA)² desde 1949. Sua missão é promover o conhecimento atuarial e aumentar a capacidade dos atuários fornecerem consultoria especializada e soluções relevantes para os problemas financeiros, empresariais e sociais envolvendo eventos futuros incertos (SOA, 2012) e para isso realiza eventos, publica livros, elabora e aplica os tais exames, entre outros.

Os exames atuariais da SOA são categorizados por assunto em função da área de atuação almejada, cuja aprovação possibilita ao candidato a obtenção de um ou mais dos três prestigiados tipos de filiação à SOA, a saber: *Associate of Society of Actuaries* (ASA), *Chartered Enterprise Risk Actuary* (CERA) e *Fellow of the Society of Actuaries* (FSA), conforme requisitos exigidos para cada um destes.

Supõe-se, assim, que a preparação para os tais exames possa ser uma das formas de o atuário preparar-se melhor para atender as demandas relacionadas às instituições e aos produtos que lidam com risco futuro.

¹UOL. **Ranking do Banco Mundial.** Disponível em: <<http://economia.uol.com.br/noticias/redacao/2014/04/30/ranking-do-banco-mundial-traz-brasil-como-a-7-maior-economia-do-mundo.htm>>. Acesso em: 05/06/2014.

²Associação mundial de associações atuariais profissionais, que tem como interesse incentivar o desenvolvimento de uma profissão global, reconhecida como tecnicamente competente e profissionalmente confiável. <http://www.actuaries.org/>

Um destes exames, intitulado Modelos para Contingência de Vida ou MLC³, objeto de estudo dessa pesquisa, contempla, em seu conteúdo, os modelos elaborados para estimar o risco associado aos eventos aleatórios nos diversos ramos da atuária ligados à vida, tais como seguros de vida e previdência (SOA, 2014).

A literatura disponível acerca do exame citado é predominantemente inglesa. Destaca-se o livro *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks* (2009), indicado pela SOA para a preparação do candidato para o seu exame de MLC. Dentre os autores mais indicados, citam-se Bowers (1986), Ferreira(2010), Klugman (1949), Parmenter (1988), Rodrigues (2008), Vilanova (1969).

Desse modo, essa pesquisa tem como objetivo geral explorar os modelos de contingência para vida (MLC) através dos exames atuariais correlatos da SOA de 2003 a 2013.

São objetivos específicos:

- Discorrer acerca da Sociedade dos Atuários dos Estados Unidos (SOA) e de alguns aspectos relevantes para a carreira profissional de atuário nos EUA, com ênfase nos exames aplicados pela SOA;
- Apresentar um resumo indicativo da teoria relacionada ao Exame MLC;
- Demonstrar, de forma sucinta e através de questões, a forma de avaliação do conhecimento do candidato acerca do conteúdo cobrado no Exame MLC da SOA.

Para tanto, a presente pesquisa pode ser classificada, quanto aos objetivos e procedimento, como exploratória e bibliográfica e divide-se em seis capítulos, contando com esta introdução e as considerações finais.

O Capítulo 2 discorre a cerca da Sociedade de Atuários dos Estados Unidos (SOA) e alguns aspectos relevantes para a carreira profissional do atuário nesse país, com ênfase nos exames aplicados por essa sociedade.

O Capítulo 3 apresenta um resumo indicativo da teoria relacionada ao Exame MLC da SOA, a partir das respectivas metas de aprendizagem propostas por essa sociedade, em cada um dos conteúdos contemplados nesse exame.

O Capítulo 4 demonstra, de forma sucinta e através de questões, a forma de avaliação do conhecimento do candidato a cerca dos conteúdos cobrados no Exame MLC da SOA.

³ Sigla inglesa correspondente a *Models for Life Contingencies*.

2 A SOCIEDADE DE ATUARIOS DOS ESTADOS UNIDOS (SOA) E SEUS EXAMES ATUARIAIS

Este capítulo tem por objetivo discorrer a cerca da Sociedade de Atuários dos Estados Unidos (SOA) e alguns aspectos relevantes para a carreira profissional do atuário nesse país, com ênfase nos exames aplicados por essa sociedade.

A profissão atuarial é mais internacional do que muitas outras profissões. A maioria das profissões têm conferências multinacionais e sociedades educacionais para facilitar a troca das idéias, mas seus serviços são fornecidos geralmente somente em seu ambiente local, e conseqüentemente alguns padrões da prática são aplicados somente à jurisdição local. Os médicos, por exemplo, tratam geralmente somente pacientes em sua área local. Mas algumas profissões, notavelmente atuários e contabilistas, podem ser envolvidas em prestar seus serviços à corporações multinacionais que operam em muitos países. A Associação Atuarial Internacional (IAA) serve como um fórum de discussão e deliberação para as questões profissionais da comunidade atuarial mundial. (IBA, 2013, p.15).

2.1 Regulamentação da Profissão de Atuário nos Estados Unidos

Os Estados Unidos possuem duas grandes organizações profissionais para a classe atuarial: a *Society of Actuaries* (SOA) e a *Casualty Actuarial Society* (CAS). A segunda é especializada nos ramos de propriedade e seguros contra acidentes, a primeira engloba os demais ramos da ciência atuarial. Ambas as organizações possuem um conjunto hierárquico de exames, do básico ao avançado, para o exercício da profissão em cada um dos seus domínios de competência.

Nos EUA, a carreira de atuária é auto - regulamentada e, em razão disso, os atos de seus profissionais são julgados pela Academia Americana de Atuários (AAA). Para evitar problemas, esses profissionais, cujas atividades são realmente complexas, devem considerar o Código de Conduta profissional, um livreto da AAA que reúne 14 princípios éticos, além dos 48 pronunciamentos atuariais (*Actuarial Standards of Practice - ASOP*) emitidos pela *Actuarial Standard Board* (SEAT, 2013)⁴.

Segundo Seat (2013), existem duas ASOPs que são sempre relevantes, a ASOP 23 e a ASOP 41, que tratam, respectivamente, da qualidade dos dados e das comunicações atuariais, onde explica que o atuário deve usar os dados disponíveis que, em seu julgamento profissional, permitem a análise desejada, e devendo também preencher um relatório anual que possa ser visto por qualquer outro atuário que assim desejar.

⁴<http://www.actuarialstandardsboard.org/asops.asp>

2.2 Sociedade de Atuários dos Estados Unidos (SOA)

Fundada em 1949 a partir da fusão da Sociedade Atuarial da América e do Instituto Americano de Atuária, a Sociedade de Atuários dos Estados Unidos (SOA) é a maior organização profissional de atuários do mundo, congregando 24.000 filiados nos Estados Unidos, Canadá e em outros países, sendo também membro pleno da Associação Internacional de Atuária (IAA)⁵ (SOA, 2014).

A referida sociedade tem como missão promover o conhecimento atuarial e aumentar a capacidade dos atuários no fornecimento de consultoria especializada e na solução para problemas financeiros, empresariais e sociais envolvendo eventos futuros incertos (SOA, 2012), a partir da realização de eventos como simpósios e seminários, publicação de livros, elaboração e aplicação de exames atuariais, entre outros.

2.3 Filiados da SOA

Existem três tipos de filiação à SOA, duas com nível de associado e a outra com nível de membro da sociedade, a saber, respectivamente: Associado da Sociedade de Atuários (ASA), Analista de Risco de Empresa Contratada (CERA) e Membro da Sociedade de Atuários (FSA). De acordo com a SOA (2013), apenas quatro associados FSA e um associado ASA são brasileiros.

Para conseguir o título de ASA, o candidato precisa demonstrar conhecimento: nos conceitos e técnicas fundamentais para a modelagem e gerenciamento de riscos; nos métodos básicos de aplicação desses conceitos; e nas técnicas para problemas envolvendo eventos futuros incertos, especialmente aqueles com implicações financeiras (SOA, 2014).

No caso do título de CERA, o candidato deve evidenciar conhecimento na identificação, mensuração e gestão do risco nas empresas que lidam com risco (SOA, 2014).

Por fim, para chegar ao título de FSA, o candidato deve manifestar conhecimento dos ambientes de negócios em que as decisões financeiras relativas a benefícios de aposentadoria, seguro de vida, seguro saúde, investimentos, entre outros, são feitos incluindo a aplicação de técnicas e conceitos avançados para modelagem e gestão de risco (SOA, 2014).

⁵Associação mundial de associações atuariais profissionais, que tem como interesse incentivar o desenvolvimento de uma profissão global, reconhecida como tecnicamente competente e profissionalmente confiável. <http://www.actuaries.org/>

2.4 Exames Atuariais

De acordo com a SOA (2012), em 1896, um sistema de exames atuariais foi adotado nos EUA pela Sociedade Atuarial e pelo Instituto Americano de Atuários. Inicialmente, esses exames eram realizados como testes de qualificação profissional e, aproximadamente, na segunda década do século vinte, o seu valor educativo passou a ser apreciado pela sociedade em geral.

Atualmente, cada um dos tipos de filiação à SOA requer a aprovação em uma sequência de exames, os quais podem ser divididos em preliminares e de especialidade.

2.4.1 Exames Preliminares

“Os exames preliminares são a base comum para se tornar um atuário. Não importa que área da prática atuarial uma pessoa decida entrar, a futura educação atuarial dependerá do domínio dos exames preliminares.” (BE AN ACTUARY, 2014, tradução nossa)⁶.

Estes exames são solicitados em quase todos os tipos de associação da SOA, são eles: P, FM, MLC, MFE e C, descritos no Quadro 1:

⁶The preliminary exams are the common foundation for becoming an actuary. No matter which actuarial practice area a person decides to enter, future actuarial education will depend on mastery of the preliminary exams.

Quadro 1 – Descrição dos Exames e Cursos Iniciais da SOA

Nome	Sigla	Conteúdo
Probabilidade	P	Probabilidade geral, distribuições de probabilidade univariada e distribuições de probabilidade multivariada.
Matemática Financeira	FM	Teoria dos juros e economia financeira.
Modelos para Economia Financeira	MFE	Modelos de taxa de juros, avaliação racional de títulos de derivativos, simulação e técnicas de gestão de risco.
Validação por Experiência Educacional	VEE	Economia(E), finanças corporativas(CF) e métodos de estatística aplicada(AS).
Modelos de Contingência para Vida	MLC	Modelos para vidas simples e múltiplas, valor presente de variáveis aleatórias, cálculo de prêmio, reservas, planos de previdência e benefícios de aposentadoria.
Construção e Avaliação de Modelos Atuariais	C	Modelos de severidade e frequência, modelos agregados, medidas de risco, construção de modelos empíricos, estimação de probabilidade de decrementos de grandes amostras, construção e seleção de modelos paramétricos, credibilidade e simulação.
Fundamentos da Prática Atuarial	FAP	Papel do profissional de Atuária, forças externas do núcleo, risco nos problemas atuariais, soluções atuariais, design e precificação de uma solução atuarial, modelo de seleção e design de solução, seleção dos pressupostos iniciais e monitoramento de resultados.
Curso de Profissionalismo de Associado	APC	Profissionalismo, ética e responsabilidade legal.

Fonte: Elaborado pela autora, a partir de dados da SOA (2014).

Nota: Não há imposição de ordem para a realização dos exames acima, sendo que o crédito referente ao Exame VEE só é adicionado ao registro do candidato se o mesmo já tiver obtido o crédito em dois outros exames atuariais da SOA.

2.4.2 Exames de Especialidades

Os exames de especialidades, por sua vez, estão separados por área de aperfeiçoamento, juntamente com os seminários e módulos correspondentes a cada área, podendo o atuário se tornar um FSA caso venha a cumprir todos os requisitos de uma delas.

As áreas de especialidade estão dispostas no Apêndice A juntamente com o conteúdo de cada exame, módulo e curso exemplificado no Quadro 2 e essas áreas são: Finanças Corporativas e ERM, Finanças Quantitativas e Investimento, Vida Individual e Anuidades, Benefícios de Aposentadoria, Seguros Gerais e Grupo e Saúde.

Quadro 2 – Áreas de Especialização para a filiação do tipo FSA

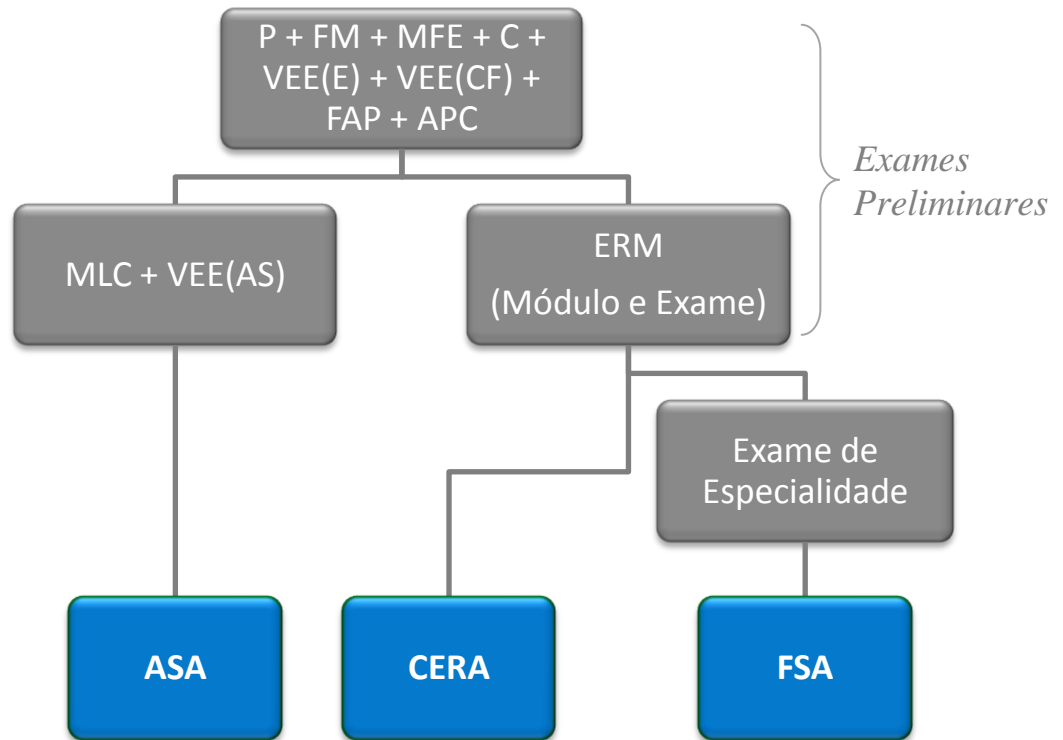
Áreas de Especialização	Exames e Módulos Requeridos							Módulo de Tomada de Decisão e Comunicação (DMC)	Curso de Admissão da Sociedade (FAC)
Finanças Corporativas e ERM (CFE)	Módulo de Relatórios Financeiros**	Módulo de Gestão de Riscos de Empresa (ERM)	Exame ERM	Exame de Fundações de CFE	Exame de Tomada de Decisão Estratégica	Módulo de Tópicos Avançados em CFE			
Finanças Quantitativas e Investimento (QFI)	Módulo de Modelagem Financeira	Módulo de ERM*	Exame de ERM ou de Gestão de Risco de Investimento	Módulo de Relatórios Financeiros***	Exame de Núcleo QFI	Exame avançado de QFI			
Vida Individual e Anuidades (ILA)	Módulo de Economia Financeira***	Módulo de ERM*	Exame de ERM ou de Gestão de Risco de Vida	Módulo de Regulação e Tributação	Exame de Precificação de Vida	Exame de Avaliação e Finanças de Vida			
Benefícios de Aposentadoria (RB)	Módulo de Economia Financeira**	Módulo de ERM*	Exame de ERM ou de Gestão de Riscos e Investimentos de Planos de Aposentadoria	Módulo de Seguro Social	Exame de Regulamentação e Financiamento (Apenas Canadá)	Exame de Atuários Matriculados (Apenas EUA)	Exame de Contabilidade e Projeto		
Seguros Gerais (GI)	Módulo de Economia Financeira**	Módulo ERM*	Exame de ERM ou de Tópicos Avançados em Seguros Gerais	Exame de Introdução aos Seguros Gerais	Exame de Introdução à taxação e Reserva	Exame de Ambientes Regulatórios e Financeiros	Módulo de Aplicações de Técnicas Estatísticas		
Grupo e Saúde (GH)	Módulo de Economia Financeira	Módulo de Fundações de Saúde ou Módulo ERM*	Exame de ERM ou de especialidade em Saúde e Grupo	Exame de Núcleo de Saúde e Grupo	Exame Avançado de Saúde e Grupo	Módulo de Precificação, Reserva e Previsão			

Fonte: Elaborado pela autora, a partir de dados da SOA (2014).

Notas: (*) O módulo ERM pode ser feito a qualquer momento, mas deve ser realizado antes do exame de ERM. (**) Pode ser feito antes ou ao mesmo tempo do item anterior. (***) Pode ser feito a qualquer tempo.

Na Figura 1 está exemplificada a hierarquia dos requisitos solicitados para a obtenção dos três níveis de associados da SOA .

Figura 1 – Exames e Cursos requeridos para obtenção de cada um dos tipos de filiação à SOA



Fonte: Elaborada pela autora, a partir de dados da SOA (2014).

2.5 Mercado de Trabalho

Nos EUA, os empregadores que contratam atuários, como as companhias de seguro e as empresas de consultoria, costumam exigir do candidato a aprovação em pelo menos dois dos exames atuariais, considerando essas aprovações “demonstração de aptidão, interesse e compromisso destes profissionais”. A maioria dessas empresas ainda tem estabelecido programas que pagam as taxas dos exames para seus empregados e proporcionam algum tempo de estudo para esses exames durante o horário de trabalho, ligando a aprovação do funcionário a uma promoção na empresa (BE AN ACTUARY, 2014).

A distribuição dos citados empregadores nos EUA é apresentada na Tabela 1, a partir da qual observa-se também que 81% dos filiados da SOA atuam nas companhias de seguros e nas empresas de consultoria.

Tabela 1 – Distribuição dos Filiados da SOA por Tipo de Empregador

Área de Atuação do Empregador	Membros da SOA
Companhia de Seguro	48%
Empresas de Consultoria	33%
Aposentados	7%
Diversos/Desconhecido	2%
Departamentos de Seguro do Estado e outros Escritórios do Governo	2%
Casas de Investimento e Bancos	2%
Universidades e Faculdades	1%
Desenvolvedores de Software/Vendedores	< 1%
Organizações que servem a Indústria de seguros	< 1%
Corretoras de Seguros	< 1%

Fonte: Elaborada pela autora, a partir de dados do *site* Be An Actuary (2013).

Alternativamente à aprovação em dois dos exames atuariais, o mercado pode requerer ao atuário recém-formado com ótima experiência de estágio apenas um desses exames, tendo em vista que o mercado de trabalho valoriza, também, a experiência profissional, desestimulando os candidatos que são aprovados em vários exames e não têm qualquer experiência na área.

Nessa condição, a profissão de atuária tem se mostrado relevante nos Estados Unidos, quando permanece, pelo menos nos últimos cinco anos, nos primeiros lugares do “*ranking* das melhores profissões dos EUA” de acordo com o site especializado em empregos CareerCast.com:

Quadro 3– Ranking das Melhores Profissões nos EUA de 2010 à 2014

Ranking	2010	2011	2012	2013	2014
1º	Atuário	Engenheiro de Software	Engenheiro de Software	Atuário	Matemático
2º	Engenheiro de Software	Matemático	Atuário	Engenheiro Biomédico	Professor Universitário
3º	Analistas de Sistemas	Atuário	Gerente de Recursos Humanos	Engenheiro de Software	Estatístico
4º	Biólogo	Estatístico	Higienista Dental	Fonoaudiólogo	Atuário
5º	Historiador	Analistas de Sistemas	Planejador Financeiro	Planejador Financeiro	Fonoaudiólogo
6º	Matemático	Metereologista	Fonoaudiólogo	Higienista Dental	Higienista Dental
7º	Assistente Paralegal	Biólogo	Terapeuta Ocupacional	Terapeuta Ocupacional	Engenheiro de Software
8º	Estatístico	Historiador	Gerente de Publicidade Online	Optometrista	Analistas de Sistemas
9º	Contador	Fonoaudiólogo	Analistas de Sistemas	Fisioterapeuta	Terapeuta Ocupacional
10º	Higienista Dental	Higienista Dental	Matemático	Analistas de Sistemas	Patologista de Fala

Fonte: Elaborada pela autora, a partir de dados do *site* CareerCast (2014)⁷

⁷O ranking das melhores profissões nos EUA leva em consideração cinco critérios: ambiente de trabalho, nível de estresse e perspectivas de contratação, demandas físicas e renda.

3 TEORIA DO EXAME MLC DA SOA: UM RESUMO INDICATIVO

Este capítulo tem por objetivo apresentar um resumo indicativo da teoria relacionada ao Exame MLC da SOA, a partir das metas de aprendizagem propostos por esta sociedade em cada um dos conteúdos contemplados no referido exame, a saber: Modelos para Vidas Simples e Múltiplas; Valor Presente de Variáveis Aleatórias; Cálculo do Prêmio; Reservas e Planos de Previdência e Benefícios de Aposentadoria. Ressalta-se que algumas destas metas são comuns entre dois ou mais conteúdos e aqui serão abordados apenas uma vez.

3.1 Modelos para Contingência de Vida

Parmenter (1988) defende que contingências de vida são importantes áreas da matemática que combinam teoria da probabilidade elementar com a teoria dos juros, tais como os modelos de sobrevivência, de múltiplos decrementos, de probabilidades, de precificações e de gestão de risco.

Para Hickman (1986), o termo “contingências de vida” tem um significado especial dentro da Matemática Atuarial, sendo o estudo de modelos de seguro de vida e operações de anuidades, como desenvolvido na Europa e sistematizada por King (1887), construídos com base em duas hipóteses: (i) o tempo até a morte como uma variável aleatória do tipo contínua e (ii) o crescimento do capital.

Sobre a teoria correlata, a SOA indica o livro *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks* (2009) que aborda os modelos atuariais e suas teorias com aplicações práticas, base de grande parte do presente capítulo.

3.1.1 Modelos para Vidas Simples e Múltiplas

Um percentual de 10 a 20% das questões do Exame MLC é referente aos modelos para vidas simples e múltiplas. Para este tópico do exame, as metas de aprendizagem requeridas do candidato pela SOA (2014) são:

- explicar e interpretar os efeitos de transição entre estados, os modelos de sobrevivência e suas interações;
- calcular e interpretar funções de probabilidade padrão, incluindo probabilidades de sobrevivência e morte, força de mortalidade e expectativa completa e abreviada devida;
- explicar as variáveis aleatórias associadas com os modelos que lidam com vidas múltiplas e/ou múltiplos estados;

- calcular e interpretar as probabilidades marginais e condicionais e os momentos;
- construir e interpretar modelos de sobrevivência para coortes consistindo de populações não-homogêneas, por exemplo, fumantes e não-fumantes ou grupos seletos e finais a partir dos fatores mencionados nos dois tópicos acima;
- descrever o comportamento de tempo contínuo e em tempo discreto dos modelos de cadeia de Markov, identificar possíveis transições entre estados, e calcular e interpretar a probabilidade de estar em um determinado estado e fazer a transição entre os estados;
- aplicar, para cálculos envolvendo os modelos para vidas simples e múltiplas, métodos de aproximação, tais como a distribuição uniforme de mortes, força constante, Woolhouse, e Euler.

De forma resumida, a força de mortalidade citada é também chamada de função de mortalidade ou taxa instantânea de mortalidade, representada por μ_x , significa a probabilidade de um indivíduo falecer entre as idades x e $x + t$, tendo esse atingido com vida a idade x e sendo t um tempo qualquer maior que x .

Em relação aos modelos de sobrevivência, Bowers *et al.* (1986) afirma que, para qualquer x positivo, $s(x)$ é a probabilidade de um recém nascido chegar a idade x , onde $s(x)$ denomina-se função de sobrevivência. Em outras palavras, essa função pode representar também a probabilidade de um indivíduo de idade x sobreviver pelo menos até a idade $x + t$ dada pela notação $s_x(t)$. A distribuição de X pode ser definida tanto pela função de distribuição $F(x)$ quanto pela função de sobrevivência $s(x)$, como descritas no Quadro 4 e no Quadro 5.

De acordo com Dickson, Hardy e Warters (2009), $s_x(t)$ pode ser escrita através da probabilidade de um indivíduo recém nascido sobreviver pelo menos até a idade $x + t$ dado que esse indivíduo sobrevive até a idade x , então esse resultado pode ser derivado da relação de probabilidade padrão.

Ainda com base nos autores, os modelos de sobrevivência utilizam o tempo de vida futuro de um indivíduo como uma variável aleatória, englobando o tempo de vida futuro abreviado e a força de mortalidade, onde o tempo de vida futuro abreviado pode ser definido como uma variável aleatória discreta associada com o tempo de vida futuro sendo o número de anos futuros completos de um indivíduo de idade x até sua morte (BOWERS *et al.*, 1986).

Outros assuntos importantes para essa seção são as vidas múltiplas e os processos de Markov. Parmenter (1988) defende que, as vidas múltiplas apresentam problemas como funções de vida conjunta e situações de último sobrevivente onde, no primeiro caso, podem existir anuidades de vida dependentes da sobrevivência de um grupo de indivíduos e, no segundo caso, seguros podem não ser pagos até que o último indivíduo do grupo morra.

Os processos de Markov, por sua vez, utilizam a propriedade de que as probabilidades de eventos futuros dependem do presente, mas não do passado e, podem ser conhecidos, também, como modelos de estado múltiplo quando estão em estado discreto em tempo contínuo.

Outros livros que abordam especificamente o conteúdo tratado nesse tópico, são: *Actuarial Mathematics* (1986), *Theory of Interest and Life Contingencies with Pension Applications: A Problem-Solving Approach* (1997) e *Survival Models and Data Analysis* (1999).

Quadro 4 -Resumo de Fórmulas do Tópico Modelos para Vidas Simples e Múltiplas

Descrição	Fórmula
Probabilidade de ocorrer o evento A e ocorrer o evento B	$Pr[A e B] = Pr[A B]Pr[B]$ (1)
Probabilidade de ocorrer o evento A dado que já ocorreu o evento B	$Pr[A B] = \frac{Pr[A e B]}{Pr[B]}$ (2)
Probabilidade de que um indivíduo de idade x sobreviva, pelo menos, até a idade $x + t$	${}_tP_x = Pr[T_x > t] = S_x(t)$ (3)
Probabilidade condicional de um modelo de múltiplo estado, para qualquer estados i e j e quaisquer momentos t e $t + s$, onde $s \geq 0$	$Pr[Y(t + s) = j Y(t) = i]$ (4)
Função de sobrevivência: probabilidade de que um indivíduo recém-nascido sobreviva até a idade $x + t$ dado que o recém-nascido sobrevive até a idade x	$S_x(t) = \frac{S_0(x+t)}{S_0(x)}$ (5)
Força de mortalidade na idade x	$\mu_x = \lim_{dx \rightarrow 0^+} \frac{1}{dx} Pr[T_0 \leq x + dx T_0 > x]$ (6)
Força de mortalidade na idade $x + t$	$\mu_{x+t} = \frac{f_x(t)}{S_x(t)}$ (7)
Expectativa completa de vida de um indivíduo na idade x	$e_x^0 = \int_0^\infty {}_tP_x dx$. (8)
Expectativa abreviada de vida de um indivíduo na idade x	$e_x^{\sim} \approx e_x^0 - 1/2$ (9)
Variância do tempo de vida futuro	$V[T_x] = E[T_x^2] - (e_x^0)^2$ (10)

Fonte: Elaborado pela autora. Dickson, Hardy e Waters(2009).

Nota: $Pr[A|B]$ = probabilidade de ocorrer o evento A, dado que já ocorreu o evento B.

$S_0(x)$ = probabilidade de um recém-nascido chegar com vida a idade x .

$S_0(x + t)$ = probabilidade de que um indivíduo recém-nascido sobreviva até a idade $x+t$.

$f_x(t)$ = função densidade de probabilidade da variável T_x .

$E[T_x]$ = tempo de vida futuro esperado de x .

3.1.2 Valor Presente de Variáveis Aleatórias

Um percentual de 10 a 20% das questões do Exame MLC é referente ao valor presente de variáveis aleatórias. Para este tópico do exame, as metas de aprendizagem requeridas do candidato pela SOA (2014) são:

- calcular e interpretar as probabilidades, as médias, os percentis e os momentos de maiores ordens das variáveis aleatórias;
- calcular e interpretar o efeito de mudanças em hipóteses subjacentes, tais como mortalidade e juros;
- aplicar métodos de aproximação para cálculos envolvendo as variáveis aleatórias, tais como distribuição uniforme das mortes, força de mortalidade constante, Woolhouse e Euler.

Uma variável aleatória pode ser entendida como uma função que atribui um valor numérico a cada resultado singular de um experimento aleatório, ou seja, o valor presente de uma variável aleatória é o valor atual do resultado de uma experiência aleatória. Para Hickman (1985), o valor presente de um conjunto de pagamentos pode depender do tempo até a morte de duas ou mais vidas, tendo como exemplo uma anuidade de vida que paga até que um sobrevivente de duas vidas morra ou uma apólice de seguro de vida que paga sobre a primeira de duas mortes.

Alguns cálculos que envolvem essas variáveis aleatórias são relacionados com mudanças em premissas subjacentes e com métodos de aproximação, podendo esses últimos serem de: Woolhouse e Euler.

Rodrigues (2008, p. 61) defende que, as premissas atuariais representam um conjunto formal de estimativas para eventos (biométricos, financeiros, econômicos, demográficos, sociais etc.) que o atuário espera que aconteçam, com um bom nível de segurança, em um dado período sob análise, relativamente ao plano em avaliação.

Segundo Dickson, Hardy e Warters (2009), a fórmula de Woolhouse é um método para calcular o valor presente esperado de anuidades pagáveis com mais frequência que anualmente sem se basear em uma suposição de idade fracionada e a fórmula de Euler é um método de integração numérica que expressa $\ddot{a}_x^{(m)}$ em termos de \ddot{a}_x , como apresentado na fórmula (15) do Quadro 5, sendo a fórmula de Woolhouse baseada na fórmula de Euler.

Outros livros que abordam especificamente o conteúdo Valor Presente de Variáveis Aleatórias, são: Gestão de Risco Atuarial (2008), *Actuarial Mathematics* (1986) e Estatística Básica (2009).

Quadro 5 - Resumo de Fórmulas do Tópico Valor Presente de Variáveis Aleatórias

Descrição	Fórmula
Função de sobrevivência de vidas múltiplas.	$Pr[T(xy) > t] = Pr[T(x) > t]Pr[T(y) > t] \quad (11)$
Probabilidade de um indivíduo na idade x morrer antes de atingir a idade x+t.	${}_tq_x = Pr[Tx \leq t] = 1 - S_x(t) = F_x(t) \quad (12)$
Probabilidade de um indivíduo de idade x sobreviver u anos e depois morrer nos t anos subsequentes, entre as idades x+u e x+u+t. (Probabilidade de morte diferida)	${}_{u t}q_x = Pr[u < T_x \leq u + t] = S_x(u) - S_x(u + t) \quad (13)$
Probabilidade de um recém-nascido sobreviver até a idade x.	$S(x) = e^{-\int_0^x \mu(t) dt} \quad (14)$
Valor presente de anuidades pagáveis com maior frequência que a anual sem se basear em uma hipótese de idade fracionada.	$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2} (\delta + \mathbb{E}x) \quad (15)$
Seguro anual de vida inteira.	$A_x = \sum_{k=0}^{w-x-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} \quad (16)$

Fonte: Elaborado pela autora. Dickson, Hardy e Waters (2009).

Nota: \ddot{a}_x = valor presente de uma anuidade antecipada pagável na idade x.

m = frequência dos pagamentos da anuidade.

δ = força de juros por ano.

v^{k+1} = taxa de desconto para um período de k+1.

3.1.3 Cálculo do Prêmio

Um percentual de 20 a 40% das questões do Exame MLC é referente ao cálculo do prêmio. Para este tópico do exame, as metas de aprendizagem requeridas do candidato pela SOA (2014) são:

- Calcular e interpretar probabilidades, médias, percentis e momentos de maior ordem de variáveis aleatórias associadas a esses prêmios, incluindo variável aleatória perda;
- Calcular e interpretar o efeito de mudanças no desenho da apólice e de hipóteses subjacentes tais como alterações na mortalidade, nos benefícios, nas despesas e nos juros, utilizando qualquer um dos modelos do tópico Modelos para Vidas Simples e Múltiplas;

- Realizar os cálculos dos dois itens anteriores para contratos associados com fluxos de caixa contingentes especificados incluindo: seguros não sensíveis a juros, anuidades, seguro de vida universal⁸ e seguros de participação⁹;

- Aplicar aos cálculos envolvendo esses prêmios métodos de aproximação, tais como distribuição uniforme de mortes, força constante, Woolhouse e Euler.

“Seguros de vida reúnem tanto o objetivo de assegurar um valor monetário aos beneficiários, quando do falecimento do titular da apólice, como constituem um instrumento de poupança, a qual recebe juros e pode ser sacada a qualquer tempo pelo titular” (D’OLIVEIRA, 2006). Essas formas de assegurar algum valor monetário incluem um contrato que firma o direito e o dever do segurado e da seguradora sendo definido como apólice e, dentre os deveres do segurado está o de pagar um prêmio o qual será calculado pela seguradora.

Dentre os tipos de prêmio existentes, há o prêmio líquido e o prêmio bruto e, de acordo Dickson, Hardy e Warters (2009), um prêmio líquido, não permite explicitamente o cálculo do prêmio para as despesas da companhia de seguros, se permitir passa a ser chamado de prêmio bruto.

Ainda segundo os autores, de acordo com o princípio da equivalência, o prêmio líquido é ajustado de tal modo que o valor esperado da perda futura é zero no início do contrato e o princípio da equivalência aplicado aos prêmios brutos e aos estados de benefícios afirma que o valor presente esperado da variável aleatória perda futura bruta deve ser também igual a zero.

Outros livros que abordam especificamente o conteúdo desse tópico, são: Matemática Atuarial (1969), Modelos de Precificação e Ruína para Seguros de Curto Prazo (2002) e Fundamentação Atuarial dos Seguros de Vida (2004).

⁸ “Seguro de vida universal combina investimento e seguros de vida. O segurador determina um prêmio e um nível de cobertura de seguro de vida. Alguns dos prêmios são usados para financiar o seguro de vida; o restante é pago em um fundo de investimento” (DICKSON; HARDY; WARTERS, 2009, p. 6, tradução nossa).

⁹ Também faz parte do projeto tradicional de seguro a divisão do negócio em "com fins lucrativos" (também conhecido, especialmente na América do Norte, como "participante", ou negócio 'par'), e 'sem fins lucrativos' (também conhecido como 'não participante "ou" 'não-par') (DICKSON; HARDY; WARTERS, 2009, p. 5, tradução nossa).

Quadro 6– Resumo de Fórmulas do Tópico Cálculo do Prêmio

Descrição	Fórmula
Valor esperado do sinistro agregado da carteira em um ano.	$E[S^{col}] = E[N].E[X]$ (17)
Variância do sinistro agregado da carteira em um ano.	$Var[S^{col}] = V[X].E[N] + E[X]^2.V[N]$ (18)
Princípio da equivalência do prêmio para prêmios líquidos.	<i>Valor presente esperado da despesa de benefício</i> <i>= Valor presente esperado da receita de prêmio líquido</i> (19)
Princípio da equivalência do prêmio para prêmios brutos.	<i>Valor presente esperado de benefícios</i> <i>+ Valor presente esperado de despesas</i> (20) <i>= Valor presente esperado das receitas de prêmio bruto</i>
Cotas de ativos no momento $x+1$	${}_{x+1}A_s =$ $\frac{{}_xAS + [P(1 - q_x^2)](1 + i) - q_x^1 \cdot {}_x CV - q_x^2 \cdot {}_{x+1} CV}{1 - q_x^1 - q_x^2}$ (21)

Fonte: Elaborado pela autora. Dickson, Hardy e Waters (2009). Ferreira (2010).

Nota: N = número de sinistros na carteira em um ano.

X = valor do sinistro da carteira.

${}_{x+1}CV$ = valor de caixa pagável no final do ano $x+1$.

q_x^i = probabilidade de morte, para o decremento i , de um indivíduo na idade x .

3.1.4 Reservas

Um percentual de 20 a 40% das questões do Exame MLC é referente às reservas. Para este tópico do exame, as metas de aprendizagem requeridas do candidato pela SOA (2014) são:

- calcular e interpretar qualquer um dos vários tipos de reservas incluindo reservas de prêmio líquido, reservas de prêmio bruto e reservas de despesas;
- calcular e interpretar qualquer um dos vários métodos de reservas tais como Prazos Preliminares Completos¹⁰ ou reservas modificadas;
- calcular e interpretar probabilidades, médias, percentis e momentos mais altos de variáveis aleatórias associadas a essas reservas, incluindo variáveis aleatórias perda futura;
- calcular e interpretar cotas de ações, lucro esperado, lucro efetivo, taxa interna de retorno e outras medidas de lucro comuns;
- calcular e interpretar valores de conta contrato, valores de resgate de contrato e medidas de lucro sobre os contratos de seguro de vida universal;

¹⁰O método de reserva denominado Prazos Preliminares Completos é uma técnica que não se faz necessário o cálculo da reserva no primeiro ano de contrato, tendo sua diferença calculada ao longo dos anos de contrato.

- comparar e contrastar seguro de participação e seguro não sensível a juros com seguros de vida universal;
- calcular e interpretar o efeito de mudanças no desenho da apólice e nos pressupostos subjacentes tais como mudanças na mortalidade, nos benefícios, nas despesas, nos juros e nos dividendos;
- aplicar aos cálculos envolvendo as reservas métodos de aproximação tais como distribuição uniforme de mortes, força constante, Woolhouse e Euler.

“A reserva é nada mais do que a acumulação das diferenças a maior que se paga nos primeiros anos de vigência do seguro em relação ao prêmio nivelado” (CORDEIRO FILHO, 2009, p. 165).

“A diretriz fundamental de todo o processo de obtenção dos compromissos dos Planos¹¹ é aquela em que se exige o reconhecimento de um valor único e discreto para o compromisso a ser coberto pelo ativo líquido. Isso implica dizer que para cada valor apurado de passivo deverá haver um outro ativo, que lhe corresponda, buscando-se o permanente equilíbrio entre custo global e estoque de capitais, em valores presentes” (RODRIGUES, 2008, p. 181).

Para Rodrigues (2008), existem dois tipos de reservas: reserva matemática de benefícios a conceder, cujo cálculo avalia os compromissos do plano com participantes ainda ativos, e reserva matemática de benefícios concedidos, que apura os compromissos de participantes já em benefício.

Já para Cordeiro Filho (2009), as reservas podem ser classificadas pelos métodos de cálculo das mesmas, a saber: reservas pelo método prospectivo e reservas pelo método retrospectivo. A metodologia geral do método prospectivo tem por característica não considerar o passado, ou seja, a reserva vai ser calculada em função dos valores a arrecadar menos os valores já arrecadados pela seguradora. Em contrapartida, o método retrospectivo se trata da diferença entre as obrigações do segurado menos as obrigações da seguradora. Os dois métodos estão exemplificados através das fórmulas (23) e (24), respectivamente, no Quadro 7.

Outros livros que abordam especificamente o conteúdo tratado nesse tópico, são: *Cálculo Atuarial Aplicado* (2009), *Life Contingencies* (1991) e *Gestão de Risco Atuarial* (2008).

¹¹ Planos de Benefícios.

Quadro 7 – Resumo de Fórmulas do Tópico Reservas

Descrição	Fórmula
Montante necessário que a segura deve ter, no tempo t , para pagar os benefícios futuros e as despesas.	$ \begin{aligned} & {}_tV \\ & + \text{VPE em } t \text{ dos prêmios futuros} \\ & = \text{VPE em } t \text{ dos benefícios futuros} \\ & + \text{despesas} \end{aligned} \quad (22) $
Reserva de vida intera com prêmios anuais vitalícios, pelo método prospectivo.	${}_tV_x = A_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t} \quad (23)$
Reserva de vida intera com prêmios anuais vitalícios, pelo método retrospectivo.	${}_tV_x = P_x \cdot \ddot{a}_{x+t} - A_{x+t} \quad (24)$
Valor da apólice de prêmio bruto para uma apólice em vigor no tempo $t+1$.	${}_{t+1}V = ({}_tV + P_t - e_t)(1 + i_t) \quad (25)$

Fonte: Elaborado pela autora. Dickson, Hardy e Waters (2009). Cordeiro Filho (2009).

Nota: VPE = valor presente esperado.

A_{x+t} = valor presente de um seguro de vida para um indivíduo na idade $x+t$ anos.

\ddot{a}_{x+t} = valor presente de uma anuidade antecipada para um indivíduo de idade $x+t$ anos.

P_t = taxa anual de prêmio, pagável no momento t .

e_t = taxa anual de despesas relacionadas com o prêmio, pagável no momento t .

i_t = taxa de juros no momento t .

3.1.5 Planos de Previdência e Benefícios de Aposentadoria

Um percentual de 5 a 15% das questões do Exame MLC é referente aos planos de previdência e benefícios de aposentadoria. Para este tópico do exame, as metas de aprendizagem requeridas do candidato pela SOA (2014) são:

- Descrever e comparar planos de contribuição definida e benefício definido incluindo salário final e planos de ganhos médios de carreira;
- Identificar e interpretar os estados e decrementos comuns para planos de aposentadoria, e os modelos tabulares e paramétricos, incluindo modelos de cadeia de Markov associados com esses decrementos;
- Aplicar os modelos mencionados no segundo item aos planos mencionados no primeiro item e calcular e interpretar taxas de restituição, benefícios, e seus valores esperados com ajustes tais como o fator de redução atuarial;
- Calcular e interpretar o efeito de mudanças em premissas subjacentes tais como mortalidade, demais decrementos e juros;
- Aplicar aos cálculos envolvendo planos de previdência e benefícios de aposentadoria métodos de aproximação tais como distribuição uniforme de mortes, força constante de mortalidade, Woolhouse e Euler.

Nos Estados Unidos, existem vários planos de aposentadoria, como, por exemplo, os governamentais, os de benefício definido e os de contribuição definida. Oferecendo, cada um, os seus respectivos benefícios de aposentadoria.

Aposentadorias de Benefício Definido (BD) oferecem uma renda de aposentadoria baseada no serviço e no salário com o empregador, utilizando uma fórmula definida para determinar essa aposentadoria.

“O benefício definido é financiado por contribuições pagas pelo empregador e (geralmente) pelo empregado ao longo do tempo de serviço do mesmo. As contribuições são investidas, e as contribuições acumuladas devem ser suficientes, em média, para pagar as aposentadorias quando elas se tornam devidas” (Dickson, Hardy e Waters, 2009, tradução nossa).

Já nas aposentadorias de Contribuição Definida (CD), segundo Dickson, Hardy e Waters (2009), o empregado e o empregador pagam uma contribuição pré-determinada para um fundo, e esse fundo rende juros. Quando o empregado sai do plano ou se aposenta, os proventos estão disponíveis para fornecer uma renda ao longo de sua aposentadoria.

Ainda de acordo com os autores, em um plano de salário final BD, o benefício anual básico pode ser calculado a partir de $nS_{Fin}\alpha$, como descrito na fórmula (28) do Quadro 7, e em um plano BD de ganhos médios de carreira, a fórmula dos benefícios é baseada no salário médio do período em que o beneficiário esteve inscrito no plano, como pode ser visto na fórmula (29) do Quadro 7.

Outros livros que abordam especificamente o conteúdo tratado nesse tópico, são: *Cálculo Atuarial Aplicado* (2009), *Pension Mathematics with Numerical Illustrations* (1993) e *The Theory and Practice of Pension Funding* (1976).

Quadro 8– Resumo de Fórmulas do Tópico Planos de Previdência e Benefícios de Aposentadoria

Descrição	Fórmula
Força Constante de Mortalidade	$p_x = \exp\left\{-\int_0^1 \mu_{x+s} ds\right\} \quad (26)$
Função densidade de probabilidade para Tx em s.	$q_x = {}_sP_x \mu_{x+s} \quad (27)$
Benefício anual básico de um plano de aposentadoria de salário final benefício definido.	$B = n S_{Fin} \alpha \quad (28)$
Benefício anual básico de um plano de benefício definido de ganhos médios de carreira.	$B = \alpha(GTA)_{xr} \quad (29)$
Função de Escala Salarial	$\frac{S_y}{S_x} = \frac{\text{salário recebido no ano de idade } y \text{ até } y+1}{\text{salário recebido no ano de idade } x \text{ até } x+1} \quad (30)$

Fonte: Elaborado pela autora. Dickson, Hardy e Waters (2009).

Nota: n = n° total de anos de serviço.

S_{Fin} = média salarial em um período específico antes da aposentadoria.

α = taxa de acréscimo.

xr = idade do beneficiário.

GTA = ganhos totais de aposentadoria durante o tempo de serviço.

4 PRÁTICA DO EXAME MLC DA SOA: QUESTÕES SELECIONADAS

Este capítulo tem por finalidade demonstrar, de forma sucinta e através de questões selecionadas, a forma de avaliação do conhecimento do candidato a cerca da teoria apresentada no capítulo anterior para cada conteúdo cobrado no Exame MLC da SOA.

4.1 Critério de Seleção das Questões

Na seleção das questões, buscou-se atender ao máximo os resultados de aprendizagem propostos e descritos no capítulo anterior, evitando a repetição das questões similares, tendo em vista a interseção entre os resultados almejados nos tópicos do exame MLC.

Desse modo, foram selecionadas cinco questões para cada conteúdo, correspondente à média de tópicos de resultados de aprendizagem exigidos para cada um, sendo tais questões retiradas do Exame MLC da SOA do período de 2003 a 2013.

Tal período representa mais de 60% da amostra de exames do tipo MLC aplicados pela SOA até o início desse trabalho e também são os mais recentes, tendo em vista que a aplicação dos referidos exames iniciou-se em 2000.

Ressalta-se que não há padrão de aplicação das provas pela SOA, pois dentro desses dez anos selecionados, apenas de 2008 a 2011 não ocorreu a aplicação do exame de MLC, tendo ocorrido até duas vezes ao ano nos demais anos.

Inicialmente os exames que englobam o conteúdo do atual “Exame MLC” tinham como sigla “Curso 3”, de 2000 à 2004, passando a serem chamados de “Exame M” a partir de maio de 2005 até maio de 2007, quando finalmente foram titulados como estão atualmente.

O número de questões contidas em cada exame varia de 25 à 40, de 2000 à 2007 eram 40 questões, de 2007 à 2012 eram 30 questões e a partir de 2013 são 25, contendo cinco itens de múltipla escolha cada questão.

Neste trabalho, os itens de múltipla escolha foram omitidos ficando apenas a resolução das questões, com aplicação de fórmulas e com a utilização de raciocínio lógico baseado na teoria do conteúdo cobrado.

Em cada exame do MLC são fornecidas algumas informações complementares, eventualmente necessárias à solução das questões, como a tábua de distribuição normal, a tábua de vida e a tabela de serviço, que estão dispostas no anexo desta monografia.

4.2 Questões Seleccionadas

Neste item, as questões são apresentadas por tópico do Exame MLC e estão dispostas em ordem de dificuldade. As respostas são disponíveis no site da SOA e aqui foram adaptadas para uma melhor compreensão do conteúdo abordado. Importante ressaltar que nas questões seleccionadas o indivíduo na idade x é referido como (x) .

4.2.1 Modelos para Vidas Simples e Múltiplas

O resumo indicativo da teoria que trata deste assunto foi abordada no item 3.1.2.

4.2.1.1 *Questão 1 (Exame MLC Maio/2007)* O número de moedas que o sortudo Tom encontra em sucessivos quarteirões enquanto caminha para o trabalho segue um modelo de Markov homogêneo:

(i) Os estados 0, 1 e 2 correspondem a 0, 1 ou 2 moedas achadas em um bloco. Ou seja, são encontradas, no máximo, duas moedas por quarteirão.

(ii) A matriz de transição é:

$$Q = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \end{pmatrix}$$

(iii) Tom encontrou uma moeda no primeiro quarteirão hoje.

Calcule a probabilidade de que Tom achará pelo menos 3 moedas a mais nos próximos dois quarteirões hoje.

Resolução:

A probabilidade de Tom encontrar 1 moeda e depois encontrar 2 é de $(0,6)(0,3) = 0,18$. A probabilidade de ele encontrar 2 moedas e depois encontrar 1 é de $(0,3)(0,5) = 0,15$. A probabilidade de ele encontrar 2 moedas e depois encontrar 2 é de $(0,3)(0,4) = 0,12$. Assim, a probabilidade de ele achar pelo menos três moedas é de $0,18 + 0,15 + 0,12 = 0,45$.

4.2.1.2 *Questão 2 (Exame MLC Nov/2006)* A função de sobrevivência é dada por:

$$S(x) = 1 - (0,01x)^2, 0 \leq x \leq 100$$

Calcule $e_{30:50}^0$, a expectativa completa temporária de 50 anos de vida de (30) .

Resolução:

Pela fórmula (8), dada no Quadro 4, tem-se:

$$e_{30:50}^0 = \frac{\int_{30}^{80} S(x)dx}{S(30)} = \frac{\int_{30}^{80} (1 - \frac{x^2}{10.000})dx}{1 - (\frac{30}{100})^2} = \frac{(x - \frac{x^3}{30.000})|_{30}^{80}}{0,91} = 37,18.$$

O limite superior da integral foi determinado pela soma $x + t = 50 + 30 = 80$.

4.2.1.3 *Questão 3 (Exame MLC Nov/2006)* Considere duas pessoas, uma com 40 anos de idade e outra com 50, nesta ordem, cujos tempos de vida são independentes e

(i) A função de sobrevivência para a primeira pessoa é baseada em uma força de mortalidade constante, $\mu = 0,05$.

(ii) A função de sobrevivência para a segunda pessoa segue a Lei de DeMoivre com $\omega = 110$.

Calcule a probabilidade de que a segunda pessoa morra dentro de 10 anos e antes da primeira.

Resolução:

De acordo com as fórmulas (3) e (7) do Quadro 4, respectivamente, é calculado:

$${}_t p_{40} = e^{-0,05t}$$

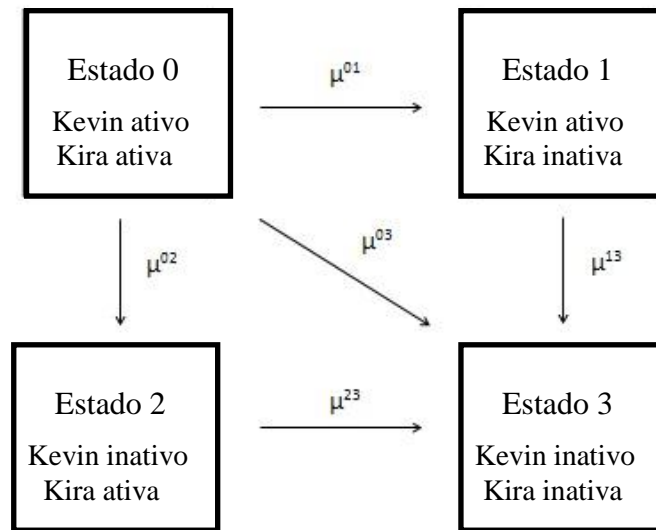
$${}_t p_{50} = (60 - t)/60$$

$$\mu_{50+t} = 1/(60 - t)$$

Para o cálculo da probabilidade contínua, tem-se:

$$\int_0^{10} {}_t P_{40:50} \mu_{50+t} dt = \int_0^{10} \frac{e^{-0,05t}}{60} dt = -\frac{1}{60} \frac{e^{-0,05t}}{(0,05)} \Big|_0^{10} = \frac{20}{60} (1 - e^{-0,5}) = 0,13115.$$

4.2.1.4 *Questão 4 (Exame MLC Maio/2013)* O tempo de vida conjunta de Kevin, 65 anos, e Kira, 60 anos, é modelado como:



São dadas as seguintes intensidades de transição constantes:

- (i) $\mu^{01} = 0,004$
- (ii) $\mu^{02} = 0,005$
- (iii) $\mu^{03} = 0,001$
- (iv) $\mu^{13} = 0,010$
- (v) $\mu^{23} = 0,008$

Calcule ${}_{10}P_{65:60}^{02}$, a probabilidade do indivíduo de idade 65 ir para o estado 02 em 10 anos estando na situação de tempo de vida conjunta com o indivíduo de idade 60.

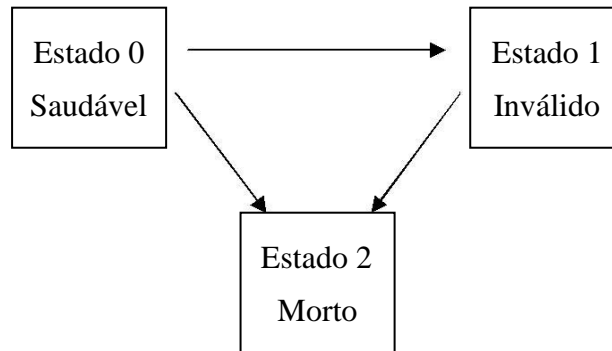
Resolução:

Para um indivíduo chegar estar ao estado 02 em 10 anos, o mesmo pode passar do estado 00 para o estado 02 ou já estar no estado 02 e permanecer no mesmo. Logo,

$$\begin{aligned}
 {}_{10}P_{65:60}^{02} &= \int_0^{10} {}_tP_{65:60}^{00} \mu^{02} {}_{10-t}P_{65+t:60+t}^{22} dt \\
 &= \int_0^{10} e^{-0,01t} (0,005) e^{-0,008(10-t)} dt \\
 &= 0,005 e^{-0,08} \int_0^{10} e^{-0,002t} dt \\
 &= 0,005 e^{-0,08} \frac{1 - e^{-0,02}}{0,002} = 0,0457.
 \end{aligned}$$

4.2.1.5 *Questão 5 (Exame MLC Nov/2013)* Para um modelo de estado múltiplo, são dadas as seguintes forças de transição:

- (i) $\mu^{01} = 0,02$
- (ii) $\mu^{02} = 0,03$
- (iii) $\mu^{12} = 0,05$



Calcule a probabilidade condicional de que uma pessoa que está “saudável” em 01/01/2004 permanecerá neste estado até 01/01/2014.

Resolução:

Considere V o status referente a “Estar Vivo”, o que é equivalente também a não estar morto e estar saudável ou inválido e S igual a Saudável. A probabilidade condicional, dada pela fórmula (2) do Quadro 4, é:

$$P(S|V) = \frac{P(S \text{ e } V)}{P(V)} = \frac{P(S)}{P(S) + P(\text{Inválido})},$$

$$\text{onde } P(S) = {}_{10}P^{00} = e^{-\int_0^{10} (\mu^{01} + \mu^{02}) ds} = e^{-\int_0^{10} (0,05) ds} = e^{-0,5} =$$

$$0,607 \text{ e } P(\text{Inválido}) = {}_{10}P^{01} = \int_0^{10} e^{-\int_0^u (\mu^{01} + \mu^{02}) ds} \mu^{01} e^{-\int_u^{10} \mu^{12} ds} du$$

$$= \int_0^{10} e^{-0,05u} (0,02) e^{0,05u - 0,5} du$$

$$= \int_0^{10} (0,02) e^{-0,5} du$$

$$= (0,02) e^{-0,5}$$

$$= 0,121$$

Então

$$P(S|V) = \frac{0,607}{0,607 + 0,121} = 0,83.$$

4.2.2 Valor Presente de Variáveis Aleatórias

O resumo indicativo da teoria que trata deste assunto foi abordada no item 3.1.3.

4.2.2.1 *Questão 1 (Exame MLC Nov/2013)* Em um modelo de Markov homogêneo com três estados: Saudável (S), Doente (D), e Morto (M), você tem:

- (i) As probabilidades de transições mensais são:

$$\begin{array}{c} \text{S} \\ \text{D} \\ \text{M} \end{array} \begin{pmatrix} \text{S} & \text{D} & \text{M} \\ 0,75 & 0,20 & 0,05 \\ 0,30 & 0,50 & 0,20 \\ 0,00 & 0,00 & 1,00 \end{pmatrix}$$

- (ii) Inicialmente existem 10 vidas saudáveis com estados futuros independentes.

Calcule a probabilidade de exatamente 4 vidas morrerem durante os primeiros dois meses.

Resolução:

Inicialmente calcula-se a probabilidade de uma vida passar do estado Saudável para o estado Morto em 2 meses:

$$\text{Prob}(S \rightarrow M \text{ em 2 meses}) = (0,75 \quad 0,2 \quad 0,05) \begin{pmatrix} 0,05 \\ 0,20 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,1275$$

Logo, fazendo combinação da quantidade de vidas saudáveis com a quantidade de mortes, tem-se:

$M \sim \text{Binomial com } n = 10, p = 0,1275$

$$P(M=4) = \binom{10}{4} (0,1275)^4 (1 - 0,1275)^6 = 0,0245.$$

4.2.2.2 *Questão 2 (Exame MLC Maio/2007)* Para uma anuidade de vida, temporária por 3 anos de valor igual a 100u.m. calculada para uma pessoa de 75 anos de idade, considere::

- (i) $\int_0^x \mu(t) dt = 0,01x^{1,2}$, $x > 0$
(ii) $i = 0,11$ a. a.

Assim, calcule o valor presente atuarial dessa anuidade.

Resolução:

Utilizando a fórmula (14) do Quadro 5, tem-se que $S(x) = e^{-\int_0^x \mu(t) dt} \rightarrow S(75) = e^{-0,01(75)^{1,2}} = 0,16888 \rightarrow S(76) = e^{-0,01(76)^{1,2}} = 0,16413 \rightarrow$

$$S(77) = e^{-0,01(77)^{1,2}} = 0,15951.$$

Logo, o VPA pode ser calculado pela fórmula do valor presente na matemática financeira, onde os valores são trazidos ao momento atual sendo descontados pela taxa de juros:

$$100\ddot{a}_{75:3} = 100\left(1 + \frac{0,16413}{0,16888} \times \frac{1}{1,11} + \frac{0,15951}{0,16888} \times \frac{1}{1,11^2}\right) = 264,21.$$

4.2.2.3 *Questão 3 (Exame MLC Nov/2005)* Para um seguro de vida inteira especial na idade x considere:

- (i) Z é a variável aleatória valor presente para esse seguro.
- (ii) Benefícios de morte são pagos no momento da morte.
- (iii) $\bar{q}_x(t) = 0,02, t \geq 0$
- (iv) $\delta = 0,08$
- (v) $b_t = e^{0,03t}, t \geq 0$

Calcule a $\text{Var}(Z)$.

Resolução:

Pela fórmula (10) do Quadro 4:

$$\text{Var}[Z] = E[Z^2] - E[Z]^2$$

$$E[Z] = \int_0^{\infty} (v^t b_t) {}_tP_x \bar{q}_x(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-0,08t} e^{0,03t} e^{-0,02t} (0,02) dt \\ = \int_0^{\infty} (0,02) e^{-0,07t} dt = \frac{0,02}{0,07} = \frac{2}{7}$$

$$E[Z^2] = \int_0^{\infty} (v_t b_t)^2 {}_tP_x \bar{q}_x(t) dt = \int_0^{\infty} (e^{-0,05t})^2 e^{-0,02t} (0,02) dt \\ = \int_0^{\infty} (0,02) e^{-0,12t} \bar{q}_x(t) dt = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Var}[Z] = \frac{1}{6} - \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{1}{6} - \frac{4}{49} = 0,08503$$

4.2.2.4 *Questão 4 (Exame MLC Abril/2012)* Para um seguro de vida inteira em (80):

- (i) Prêmios nivelados de 900 u.m. são pagos no início de cada ano.

(ii) Despesas de comissão são 50% do prêmio no primeiro ano e 10% do prêmio nos anos subsequentes, pagáveis no início do ano.

(iii) Despesas de manutenção são 3 por mês, pagáveis no começo de cada mês.

(iv) $\delta = 0,0488$

(v) $\ddot{a}_{80} = 6,000$

(vi) $\ddot{v}_{80} = 0,033$

Utilizando os 3 primeiros termos da fórmula de Woolhouse, calcule o valor esperado da variável aleatória valor presente das despesas aos 80 anos.

Resolução:

Pela fórmula (15) do Quadro 5, tem-se:

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{80}^{(12)} &\approx \ddot{a}_{80} - (12 - 1)/24 - (12^2 - 1)/(12 \times 12^2) \cdot (\ddot{v}_{80} + \delta) \\ &= 6,000 - 0,458333 - 0,082755 \cdot (0,033 + 0,0488) \\ &= 5,5349.\end{aligned}$$

No primeiro ano de comissão, despesas são iguais a $0,5 \cdot 900 = 450$ u.m. As despesas subsequentes correspondem a $0,1 \cdot 900 = 90$ u.m.

Assim, o Valor presente esperado de despesa de comissão = $(450 - 90) + 90 \cdot \ddot{a}_{80} = 360 + 90 \cdot 6 = 900$ e o valor presente esperado de despesa de comissão = $3 \times 12 \cdot \ddot{a}_{80}^{(12)} \approx 3 \times 12 \cdot 5,5349 = 199$.

Desse modo, o valor presente esperado de todas as despesas é igual a 1.099 u.m.

4.2.2.5 *Questão 5 (Exame MLC Maio/2013)* Uma companhia de seguro vende apólices de seguros dotais de dois anos, discretos, totalmente especiais para Fumantes (F) e Não Fumantes (NF) de idade x . São dados:

(i) O benefício de morte é 100.000 u.m. O benefício de vencimento é 30.000 u.m.

(ii) O prêmio anual nivelado para apólices de não fumantes é determinado pelo princípio da equivalência.

(iii) O prêmio anual para as apólices de fumantes é duas vezes o prêmio anual dos não fumantes.

(iv) $\mu_{x+t}^{NF} = 0,1, t > 0$.

(v) $q_{x+k}^F = 1,5q_{x+k}^{NF}$ para $k = 0,1$

(vi) $i = 0,08$ a. a.

Calcule o valor presente esperado da perda da variável aleatória em questão em uma apólice de fumante.

Resolução:

A probabilidade de morte de um indivíduo não fumante na idade x é dada por $q_x^{NF} = q_{x+1}^{NF} = 1 - e^{-0,1} = 0,095$.

O prêmio anual para as apólices de não fumantes é P^{NF} , onde

$$P^{NF} (1 + vP_x^{NF}) = 100.000vP_x^{NF} + 100.000v^2P_x^{NF} q_{x+1}^{NF} + 30.000v^2P_x^{NF} P_{x+1}^{NF}$$

$$P^{NF} = \frac{100.000(0,926)(0,095) + 100.000(0,857)(0,905)(0,095) + 300.000(0,857)(0,905)^2}{1 + (0,926)(0,905)} \rightarrow$$

$$\rightarrow P^{NF} = 20.251$$

Aplicando a mesma fórmula do prêmio anual para fumantes, tem-se

$$P^F = 40.502$$

$$q_x^F = q_{x+1}^F = 1,5(1 - e^{-0,1}) = 0,143$$

$$\begin{aligned} \text{VPE}(L^F) &= 100.000vq_x^F + 100.000 v^2P_x^F q_{x+1}^F + 30.000 v^2P_x^F P_{x+1}^F - P^F - P^F vP_x^F \\ &= 100.000(0,926)(0,143) + 100.000(0,857)(0,857)(0,143) \\ &\quad + 30.000(0,857)(0,857)^2 - 40.502 - 40.502(0,926)(0,857) \\ &= -30.017. \end{aligned}$$

Onde VPE é o valor presente esperado e L é a perda (*loss* na sigla inglesa).

4.2.3 Cálculo do Prêmio

O resumo indicativo da teoria que trata deste assunto foi abordada no item 3.1.4.

4.2.3.1 *Questão 1 (Exame MLC Nov/2006)* Perdas agregadas são modeladas como se segue:

- (i) O número de perdas tem uma distribuição de Poisson com $\lambda = 3$.
- (ii) O valor de cada perda tem distribuição Burr (Burr Tipo XII, Singh – Maddala) com $\alpha = 3$, $\theta = 2$, e $y = 1$.

O número de perdas e o valor das perdas são mutuamente independentes.

Calcule a variância da perda agregada.

Resolução:

Seja S as perdas agregadas e X as severidades, que representa o valor das perdas. Uma vez que a distribuição de frequência é uma Poisson Composta, a $\text{Var}(S) = \lambda E(X^2)$.

Pela distribuição de Burr, $E(X^2) = \frac{2^2 r(3) r(1)}{r(3)} = 4$ e assim, $Var(S) = 3 \times 4 = 12$.

4.2.3.2 *Questão 2 (Exame MLC Nov/2013)* Para uma anuidade especial de vida inteira diferida de 10 anos devida de 50.000 u.m. em (62), são dados:

- (i) Prêmios anuais nivelados são pagos por 10 anos.
- (ii) Um benefício de morte, pagável no final do ano de morte, é fornecido apenas durante o período de deferimento e é a soma dos prêmios de benefícios pagos sem juros.
- (iii) $\ddot{a}_{62} = 12,2758$
- (iv) $\ddot{a}_{62:10|} = 7,4574$
- (v) $A_{62:10|}^1 = 0,0910$
- (vi) $\sum_{k=1}^{10} A_{62:k|}^1 = 0,4891$

Calcule o prêmio para essa anuidade especial.

Resolução:

De acordo com o princípio da equivalência, explicado no tópico 3.1.3, e considerando $LA = \textit{life annuity}$ (anuidade de vida), $P\ddot{a}_{62:10|} = 50.000(\ddot{a}_{62} - \ddot{a}_{62:10|}) + P((LA)_{62:10|}^1)$, onde $(LA)_{62:10|}^1 = 11A_{62:10|}^1 - \sum_{k=1}^{10} A_{62:k|}^1 = 11(0,091) - 0,4891 = 0,5119$.

$$\text{Então, } P = \frac{50.000(\ddot{a}_{62} - \ddot{a}_{62:10|})}{\ddot{a}_{62:10|} - (LA)_{62:10|}^1} = \frac{50.000(12,2758 - 7,4574)}{7,4574 - 0,5119} = 34.687.$$

4.2.3.3 *Questão 3 (Exame MLC Nov/2006)* Michael, 45 anos, é um dublê de salto de moto profissional que planeja se aposentar em três anos. Ele adquire uma apólice de seguro temporária por três anos. A apólice paga 500.000 para morte de um acidente de acrobacia e nada para morte de outras causas. O benefício é pago no final do ano de morte.

São dados:

- (i) $i = 0,08$ a.a.

X	$l_x^{(t)}$	$d_x^{(-s)}$	$d_x^{(s)}$
45	2500	10	4
46	2486	15	5
47	2466	20	6

Onde $d_x^{(s)}$ representa mortes de acidentes de acrobacia e $d_x^{(-s)}$ representa mortes de outras causas.

- (ii) Prêmios anuais nivelados são pagáveis no começo de cada ano.
- (iii) Prêmios são determinados utilizando o princípio da equivalência.

Calcule o prêmio anual.

Resolução:

Sendo P o prêmio anual, $P.\ddot{a}_{x:3|}$ é igual ao valor presente atuarial de morte por acrobacia (VPA). Assim, descontando os valores pela taxa de juros, tem-se que

$$P\left[\frac{2.500 + \frac{2.486}{1,08} + \frac{2.466}{(1,08)^2}}{2.500}\right] = 500.000\left[\frac{\frac{4}{1,08} + \frac{5}{(1,08)^2} + \frac{6}{(1,08)^3}}{2.500}\right] \rightarrow P(2,77) = 2.550,68 \rightarrow P = 921$$

4.2.3.4 *Questão 4 (Exame MLC Maio/2013)* Para uma seguro de vida inteira totalmente discreto, considere:

- (i) As despesas do primeiro ano são 10% do prêmio bruto e 5u.m. por apólice.
- (ii) Despesas de renovação são 3% do prêmio bruto e 2u.m. por apólice.
- (iii) Despesas são incorridas no começo de cada ano da apólice.
- (iv) Não há mortes ou revogações nos dois primeiros anos da apólice.
- (v) $i = 0,05$ a. a.
- (vi) A quota de ativo no tempo 0 é 0. A cota de ativo no final do segundo ano de apólice é 64,11 u. m.

Calcule o prêmio bruto.

Resolução:

Tendo como referência a fórmula (21) do Quadro 6 e fazendo $G =$ prêmio bruto,

$$\begin{aligned} AS_1 &= (0 + G - 0,10G - 5)(1,05) = (0,9G - 5)(1,05) \rightarrow AS_2 = (AS_1 + \\ &G - 0,03G - 2)(1,05) \rightarrow (0,9G - 5)(1,05)^2 + (0,97G - 2)(1,05) \rightarrow [0,9(1,05)^2 + \\ &0,97(1,05)]G - [5(1,05)^2 + 2(1,05)] \rightarrow 64,11, \text{ de onde obtem-se } G = 35,67. \end{aligned}$$

Pode ser notado que ambos AS_1 e AS_2 têm $(1 - q^{(d)} - q^{(w)})$ como um período anual denominador, mas como não houve mortes ou retiradas, este período é 1 em ambos os casos e, por isso, pode ser ignorado.

4.2.3.5 *Questão 5 (Exame MLC Maio/2007)* Você é um atuário de precificação revendo valores em caixa em seguros de vidas inteiras totalmente discretos de 10.000 u. m. em (40). Um modelo de cota de ativo desejado foi escolhido e você deve determinar o valor de caixa que vai produzir essas cotas de ativos.

Considere:

- (i) O prêmio de contrato ou bruto é 90u.m.
- (ii) Despesas de renovação, a pagar no início do ano, são 5% do prêmio.
- (iii) $q_{55}^{(\text{morte})} = 0,004$
- (iv) $q_{55}^{(\text{retirada})} = 0,050$
- (v) $i = 0,08$ a. a.
- (vi) ${}_{15}AS = 1.150$ e ${}_{16}AS = 1.320$ são as cotas de ações no final dos anos 15 e

16.

Calcule ${}_{16}CV$, o valor de caixa pagável sobre a retirada no final do ano 16.

Resolução:

Utilizando a fórmula (21) do Quadro 6, ${}_{16}AS = \frac{1150 + [90(1-0,05)](1,08) - 0,004(10.000) - 0,05{}_{16}CV}{1-0,004-0,05} \rightarrow$

$$\rightarrow 1.320 = \frac{1.334,34 - 40 - 0,05{}_{16}CV}{0,946} \rightarrow$$

$$\rightarrow 0,05{}_{16}CV = 1.294,34 - (0,946)(1.320) \rightarrow$$

$$\rightarrow {}_{16}CV = 912,40.$$

4.2.4 Reservas

O resumo indicativo da teoria que trata deste assunto foi abordada no item 3.1.5.

4.2.4.1 *Questão 1 (Exame MLC Nov/2006)* Para um seguro de vida inteiramente discreto de valor igual a 1000 u.m. para um indivíduo de idade 50, considere:

- (i) $1000P_{50} = 25$
- (ii) $1000A_{61} = 440$
- (iii) $1000q_{60} = 20$
- (iv) $i = 0,06$ a. a.

Calcule $1000{}_{10}V_{50}$, reserva em 60 de um indivíduo que tem 50 anos hoje.

Resolução:

Pela fórmula da reserva, disposta no Quadro 7, tem-se que

$$A_{60} = v \times (P_{60} \times A_{61} + q_{60}) = (1/1,06) \times (0,98 \times 0,440 + 0,02) = 0,42566 \rightarrow \ddot{a}_{60} = (1 - A_{60})/d = (1 - 0,42566)/(0,06/1,06) = 10,147.$$

$$\text{Assim, } 1000 {}_{10}V_{50} = 1000A_{60} - 1000P_{50} \times \ddot{a}_{60} = 425,66 - 10,147 \times 25 = 172 \text{ u.m.}$$

4.2.4.2 *Questão 2 (Exame MLC Maio/2013)* Você está testando um lucro de seguro de vida totalmente discreto de 10.000 u.m. em (70). São dados:

- (i) As reservas são de benefícios com base na Tabela Vida ilustrativa a 6% de juros.
- (ii) O prêmio bruto é de 800 u.m.
- (iii) As únicas despesas são comissões, as quais são uma percentagem dos prêmios brutos.
- (iv) Não há benefícios de retirada.

Apólice Ano K	q_{70+k-1}^{morte}	$q_{70+k-1}^{retirada}$	Taxa de Comissão	Taxa de Juros
1	0,02	0,20	0,80	0,07
2	0,03	0,04	0,10	0,07

Calcule o lucro esperado no segundo ano de apólice para uma apólice em vigor no começo do ano 2.

Resolução:

O Prêmio de Benefício para Reservas é dado por $10(514,95)/8,5693 = 600,92$. Assim,

$${}_1V_{70} = 10(530,26) - 8,2988(600,92) = 315,69 \text{ e}$$

$${}_2V_{71} = 10(545,60) - 8,0278(600,92) = 631,93, \text{ enquanto o lucro esperado é igual a } [315,69 + 800(1 - 0,10)] 1,07 - 10.000(0,03) - 631,93(1 - 0,03 - 0,04) = 220 \text{ u.m.}$$

4.2.4.3 *Questão 3 (Exame MLC Nov/2006)* Para um seguro temporário de quatro anos totalmente discreto em (40), que está sujeito a um modelo de duplo decremento:

- (i) O benefício tem valor de 2.000 u.m. para o decremento 1 e 1.000 u.m. para o decremento 2.
- (ii) A seguir está um resumo de uma tabela de duplo decremento para os três anos anteriores desse seguro:

X	$l_x^{(t)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$
41	800	8	16
42	-	8	16
43	-	8	16

- (iii) $v = 0,95$
- (iv) O prêmio, baseado no princípio da equivalência, é de 34u.m.

Calcule ${}_2V$, a reserva de benefício no final do segundo ano.

Resolução:

Pela fórmula $l_{x+1}^{(t)} = l_x^{(t)} - d_x^{(1)} - d_x^{(2)}$, l_{42}^t e l_{43}^t são, respectivamente, 776 e 752.

Fazendo VPA = valor presente atuarial e sendo v = fator de desconto,

$$\text{VPA dos Benefícios} = \frac{2.000(8v + 8v^2) + 1.000(16v + 16v^2)}{776} = 76,40$$

$$\text{VPA dos prêmios} = 34\left(\frac{776+752v}{776}\right) = 34 \times 1,92 = 65,28$$

$${}_2V = 76,40 - 65,28 = 11,12\text{u.m.}$$

4.2.4.4 *Questão 4 (Exame MLC Nov/2006)* Para um seguro de vida inteira totalmente discreto de 25.000 u.m. em (25), lhe são dados:

- (i) $P_{25} = 0,01128$
- (ii) $P_{25:\overline{15}|}^1 = 0,05107$
- (iii) $P_{25:\overline{15}|} = 0,05332$

Calcule $25.000_{15}V_{25}$.

Resolução:

Utilizando a fórmula (24) do Quadro 7 e sabendo que ${}_tE_x$ representa um dote na idade $x + t$ para um indivíduo de idade atual x ,

$${}_{15}V_{25} = P_{25} \cdot \ddot{a}_{25:15|} - (A_{25:15|}^1) / ({}_{15}E_{25}),$$

onde

$$\blacksquare P_{25:15|}^1 = P_{25:15|} - P_{25:15|}^1 = 0,05332 - 0,05107 = 0,00225 = (A_{25:15|}^1) / (\ddot{a}_{25:15|});$$

$$\blacksquare 0,05107 = P_{25:15|}^1 = ({}_{15}E_{25}) / (\ddot{a}_{25:15|}) = 1 / (\ddot{a}_{25:15|});$$

$$\blacksquare (A_{25:15|}^1) / ({}_{15}E_{25}) = ((A_{25:15|}^1) / (\ddot{a}_{25:15|})) / (({}_{15}E_{25}) / (\ddot{a}_{25:15|})) = 0,00225 / 0,05107 = 0,04406; e$$

$$\blacksquare P_{25} \ddot{a}_{25:15|} = 0,01128 / 0,05107 = 0,22087.$$

$$\text{Assim, } 25.000 {}_{15}V_{25} = 25.000 (0,22087 - 0,04406) = 25.000(0,17681) = 4420.$$

4.2.4.5 *Questão 5 (Exame MLC Nov/2013)* Para um seguro de vida inteira totalmente discreto de 100.000 u. m. em(45), lhe são dados:

- (i) Mortalidade segue a Tábua de Vida Ilustrativa.
- (ii) $i = 0,06$ a. a.
- (iii) As despesas com comissão são de 60% do prêmio bruto do primeiro ano e 2% dos prêmios brutos de renovação.
- (iv) As despesas administrativas são 500 u.m. no primeiro ano e 50 u.m. em cada ano de renovação.
- (v) Todas as despesas são pagas no início do ano.
- (vi) O prêmio bruto, calculado utilizando o princípio da equivalência, é 1.605,72 u.m..

Calcule ${}_5V^e$, a reserva de despesas no final do ano 5 para este seguro.

Resolução:

Utilizando “b” sobrescrito para prêmios brutos e reservas de prêmios brutos, “l” (representando “líquido”) para os prêmios de benefícios e reservas de benefícios e “e” para prêmios e reservas de despesas, tem-se:

- $P^b = 1.605,72$ e $P^e = \frac{0,58 P^b + 450 + (0,02 P^b + 50)\ddot{a}_{45}}{\ddot{a}_{45}} =$
 $\frac{0,58(1.605,72) + 450 + [0,02(1.605,72) + 50] 14,1121}{14,1121} = 180,00;$
- $P^l = \frac{100.000 A_{45}}{\ddot{a}_{45}} = 1.425,73;$
- $P^e = P^b - P^l = 180;$
- ${}_5V^e = (0,02 P^b + 50)\ddot{a}_{50} - P^e \ddot{a}_{50} =$
 $0,02(1.605,72) + 50](13,2668) - 180(13,2668) = - 1.298,63.$

4.2.5 Planos de Previdência e Benefícios de Aposentadoria

O resumo indicativo da teoria que trata deste assunto foi abordada no item 3.1.6.

4.2.5.1 *Questão 1 (Exame MLC Maio/200)* A probabilidade de que (30) vai sobreviver cinco anos é “a”. A probabilidade de que (30) vai morrer antes de (35) é “b”. O tempo de vida futuro de (30) e (35) são independentes e seguem a mesma tábua de mortalidade.

Determine a probabilidade de que (30) morrerá depois de (35) e dentro de cinco anos após a morte de (35).

Resolução:

Dado que ${}_5P_{30} = a$, ${}_q^1_{30:35} = b$ (probabilidade de (30) falecer primeiro que (35)), a probabilidade de a pessoa com idade 30 morrer dentro de 5 anos depois da pessoa com idade 35 é determinada por

$$\begin{aligned}
 &= \int_{t=0}^{w-35} ({}_tP_{35} \mu_{35}^{(t)}) [{}_tP_{30} - {}_5P_{30} \cdot {}_tP_{35}] dt \\
 &= \int {}_tP_{30} \cdot {}_tP_{35} \cdot \mu_{35}(t) dt - {}_5P_{30} \int {}_tP_{35} \cdot {}_tP_{35} \cdot \mu_{35}(t) dt \\
 &= {}_\infty q_{30:35}^1 - a {}_\infty q_{35:35}^1 \\
 &= (1 - {}_\infty q_{30:35}^1) - a(1/2) \text{ (probabilidade de morrer primeiro sendo da mesma idade)} \\
 &= (1 - b) - (1/2)a.
 \end{aligned}$$

4.2.5.2 *Questão 2 (Exame MLC Nov/2005)* Para um grupo de vidas na idade x , considere:

(i) Cada membro do grupo tem uma força constante de mortalidade que é desenhada a partir de uma distribuição uniforme em $[0,01; 0,02]$.

(ii) $\delta = 0.01$

Para um membro selecionado aleatoriamente desse grupo, calcule o valor presente atuarial da anuidade de tempo de vida contínuo de 1 por ano.

Resolução:

O valor esperado condicional da anuidade, dado μ , é $\frac{1}{0.01+\mu}$.

O valor esperado incondicional é $\bar{a}_x = 100 \int_{0.01}^{0.02} \frac{1}{0.01+\mu} d\mu = 100 \ln\left(\frac{0.01+0.02}{0.01+0.01}\right) = 40.5$.

Note que 100 é a densidade constante de μ no interior de $[0,01; 0,02]$.

4.2.5.3 *Questão 3 (Exame MLC Maio/2005)* (50) é um funcionário da empresa XYZ.

Emprego futuro com a XYZ segue um modelo de duplo decremento:

(i) Decremento 1 é a aposentadoria.

(ii) $\mu_{50}^{(1)}(t) = \begin{cases} 0,00 & 0 \leq t < 5 \\ 0,02 & 5 \leq t \end{cases}$

(iii) Decremento 2 é deixar o emprego com a XYZ para todas as outras causas.

(iv) $\mu_{50}^{(2)}(t) = \begin{cases} 0,05 & 0 \leq t < 5 \\ 0,03 & 5 \leq t \end{cases}$

(v) Se (50) deixar o emprego com a XYZ, ele nunca irá retornar a XYZ.

Calcule a probabilidade de um individuo de idade 50 vir a se aposentar da XYZ antes de 60.

Resolução:

A probabilidade de (50) sobreviver até (55) é dada por ${}_5P_{50}^r = e^{-(0,05)(5)} = e^{-0,25} = 0,7788$ e

Assim, a probabilidade de (55) falecer pelo primeiro decremento em 5 anos é dada por ${}_5q_{55}^1 = \int_0^5 \mu_{55}^{(1)}(t) \cdot e^{-(0,03+0,02)t} dt = -(0,02/0,05)e^{-0,05t} \Big|_0^5$
 $= 0,4(1 - e^{-0,25})$
 $= 0,0885$.

Assim, a probabilidade de se aposentar antes de 60 é dada por ${}_5P_{50}^r \cdot {}_5q_{55}^1$
 $= 0,7788 \cdot 0,0885 = 0,0689$.

4.2.5.4 *Questão 4 (Exame MLC Nov/2013)* Um novo funcionário é contratado na idade exata de 45 anos, com um salário inicial de 50.000 u.m. Os aumentos salariais ocorrem no final de cada ano. Considere os seguintes dois planos de previdência:

- (i) Um plano de benefício definido, que paga na aposentadoria uma anuidade anual devida de 1,5% do salário médio final de 3 anos de serviço;
- (ii) Um plano de contribuição definida, que contribui x% do salário do empregado no começo de cada ano, antes da aposentadoria, e ganha 5% por ano.

São dados:

- (iii) $\ddot{a}_{65} = 10,0$
- (iv) Os aumentos salariais são de 5% por ano.
- (v) O funcionário se aposenta na idade exata de 65 anos.
- (vi) O valor presente atuarial do benefício definido da unidade devida na idade 65 é igual ao saldo da conta de contribuição definida na idade 65.

Calcule X.

Resolução:

No plano de benefício definido, o benefício é determinado por $0,015 \times \text{ganho médio final} \times \text{anos de serviço} = 0,015 \cdot (50.000 \cdot (1,05^{18} + 1,05^{19} + 1,05^{17}) / 3) \cdot 20 = 36.128$ por ano.

O valor presente atuarial deste benefício avaliado na idade 65 é dado por $VPA_{65} = 36.128 \ddot{a}_{65} = 36.128(10,0) = 361.280$ u.m.

No plano de contribuição definida, o saldo acumulado na idade 65 corresponde a

$$X\% \cdot 50.000 \cdot 1,05^{20} + X\% \cdot (50.000 \cdot 1,05) \cdot 1,05^{19} + \dots + X\% \cdot (50.000 \cdot 1,05^{19}) \cdot 1,05 = X\% \cdot 50.000 \cdot 1,05^{20} \cdot 20 = X\% (2.653.298).$$

Portanto,

$$361.280 = X\% (2.653.298)$$

$$X\% = 0,136$$

$$X = 13,6$$

4.2.5.5 *Questão 5 (Exame MLC Abril/2012)* Jenny se junta a Empresa XYZ hoje como um atuário na idade de 60 anos. O salário anual inicial dela é de 225.000 u.m. e aumentará em 4% a cada ano em seu aniversário. Assuma que a aposentadoria ocorre em um aniversário imediatamente após o aumento salarial.

A XYZ oferece um plano para os seus funcionários com os seguintes benefícios:

(i) Uma soma única do benefício de aposentadoria igual a 20% do salário final no momento da aposentadoria para cada ano de serviço. A aposentadoria é compulsória aos 65 anos; no entanto, a aposentadoria antecipada é permitida nas idades de 63 e 64 anos, mas com o benefício de aposentadoria reduzido em 40% e 20%, respectivamente. O benefício de aposentadoria é pago na data da aposentadoria.

(ii) Um benefício de morte, a ser pago no final do ano de morte, igual a soma única de 100% da taxa de salário anual no momento da morte, e sendo essa é prevista enquanto o funcionário está empregado.

É dado $\delta = 5\%$ e a seguinte tabela de decrementos múltiplos ($r =$ retirada; $a =$ aposentadoria; e $m =$ morte):

Ano X	l_x^t	d_x^r	d_x^a	d_x^m
60	100	21	0	1
61	78	13	0	1
62	64	7	0	1
63	56	0	6	1
64	49	0	5	1
65	43	0	43	0

Calcule o valor presente esperado dos benefícios totais de Jenny.

Resolução:

Idade na Aposentadoria	Salário	Desconto de Juros	Prob.	20% x Anos de Serviço	Redução	Total VPA
63	253.094	$e^{-0,05(3)}$	0,06	0,6	0,40	4.705
64	263.218	$e^{-0,05(4)}$	0,05	0,8	0,20	6.896
65	273.747	$e^{-0,05(5)}$	0,43	1,0	0,0	91.674
					Soma	103.275

VPA = Salário x Desconto de Juros x Prob. x (20% x Anos de Serviço) x (1-Redução)

Idade na Morte	Salário	Desconto de Juros	Prob.	Total VPA
60	225.000	$e^{-0,05}$	0,01	2.140
61	234.000	$e^{-0,05(2)}$	0,01	2.117
62	243.360	$e^{-0,05(3)}$	0,01	2.095
63	253.094	$e^{-0,05(4)}$	0,01	2.072
64	263.218	$e^{-0,05(5)}$	0,01	2.050
			Soma	10.474

Assim, o total do valor presente atuarial Total VPA de ambos os benefícios é de $103.275 + 10.474 = 113.749$ u.m.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho foram obtidos, através do segundo capítulo, esclarecimentos acerca da SOA e os exames atuariais aplicados por essa sociedade, além de abordar assuntos relacionados a profissão de atuário e seu mercado de trabalho, nos EUA. Para isso foram apresentados os exames atuarias, que são divididos em exames preliminares e exames de especialidade, dispendo em quadros seus respectivos conteúdos, para uma melhor compreensão da distribuição dos assuntos, foi ainda demonstrado, através de dados internacionais, a importância de uma boa preparação para o exercício da profissão de atuário.

No terceiro capítulo foram apresentados os resultados de aprendizagem propostos pela SOA para cada um dos conteúdos contemplados no seu Exame MLC, seguidos de um resumo indicativo da teoria relacionada a esses exames, sugestões de livros, nos quais se incluem os indicados pelo Instituto Brasileiro de Atuária (IBA), e um quadro resumo de fórmulas referente ao respectivo tópico.

Demonstrou-se, no quarto capítulo, através de questões selecionadas, a forma que a SOA avalia o conhecimento do candidato no atendimento dos resultados de aprendizagem propostos por esta para cada um dos conteúdos cobrados no Exame MLC. Sendo essas questões selecionadas após uma análise dos exames ocorridos de 2003 à 2013, pelos seguintes critérios: melhor abordagem didática dos resultados de aprendizagem e diferentes níveis de dificuldade.

A respeito da SOA, pôde-se observar que a mesma é essencial a profissão de atuária nos EUA, Canadá e outros países, pois promove o conhecimento atuarial e busca aumentar a capacidade profissional dos atuários realizando eventos, publicando livros, elaborando e aplicando exames, entre outros.

Espera-se que este trabalho seja apenas um passo inicial para a exploração dos materiais didáticos internacionais que contribuem para um conhecimento ligado à Atuária, sendo utilizados nas Universidades, pelos professores, e no mercado de trabalho, pelos profissionais dessa área.

Como sugestão para outros estudos, indica-se uma análise dos demais exames da SOA ou uma comparação dos exames dessa com os de outras sociedades de atuários, como uma

membro do IAA, por exemplo, tendo como objetivo estimular o atuário a aumentar sua capacidade profissional no âmbito internacional.

REFERÊNCIAS

- ACTUARIAL STANDARDS BOARD. Disponível em: <<http://www.actuarialstandardsboard.org/index.asp>>. Acesso em: 02 jun 2014.
- ACTUARY. Disponível em: <<http://www.actuary.com/>>. Acesso em: 22 maio 2014.
- AZEVEDO, G. H. W., **Seguros, Matemática Atuarial e Financeira**. Noções Aplicadas ao Seguro. 1. ed. Rio de Janeiro: Funenseg, 2005.
- BE AN ACTUARY. Disponível em: <<http://www.beanactuary.org/>>. Acesso em: 20 maio 2014.
- BELTRÃO, K.; *et al.* **Tábuas Biométricas**. De Mortalidade e Sobrevivência. 1. ed. Rio de Janeiro: Funenseg, 2012.
- BOWERS, N. L.; GERBER, H. U.; HICKMAN, J. C.; JONES, D. A.; NESBITT, C. J., **Actuarial Mathematics**. 1. ed. Estados Unidos de América: The Society of Actuaries, 1986.
- CARRER CAST. **Best Jobs Of 2014**. Disponível em: <<http://www.careercast.com/slide/best-jobs-2014-4-actuary>>. Acesso em: 03/06/2014.
- CORDEIRO FILHO, A., **Cálculo Atuarial Aplicado**. 1. ed. São Paulo: Atlas, 2009.
- DICKSON, D. C. M.; WATERS, H. R.; HARDY, M. R., **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. 1. ed. New York: Cambridge University Press, 2009.
- D'OLIVEIRA, N. V. L. C., **Mercado de Seguros**. Solvência, Riscos e Eficácia Regulatória. 1. ed. Rio de Janeiro: Funenseg, 2006.
- ELANDT-JOHNSON, R. C.; JOHNSON, N. L., **Survival Models and Data Analysis**. 1. ed. Estados Unidos: Wiley, 1999.
- FERREIRA, P. P., **Modelos de Precificação e Ruína para Seguros de Curto Prazo**. 1. ed. Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.

FREES, E.W. Stochastic Life Contingencies with Solvency Considerations. **Transactions of Society of Actuaries.**, Estados Unidos, v. 42, p. 91-148, 1990. Disponível em: <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.332.4191&rep=rep1&type=pdf>>. Acesso em: 5 abril 2014.

GERBER, H., **Life Insurance Mathematics**. 3. ed. Alemanha: Springer, 1997.

GÜNTHER, H. Pesquisa qualitativa versus pesquisa quantitativa: esta é a questão?. **Psicologia: Teoria e Pesquisa.**, Brasília, v. 22, n. 2, p. 201-210, 2006. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/ptp/v22n2/a10v22n2>>. Acesso em: 5 maio 2014.

GUIMARÃES, S. R., **Fundamentação Atuarial dos Seguros de Vida: Um Estudo Comparativo entre os Seguros de Vida Individual e em Grupo**. 1. ed. Rio de Janeiro: Funenseg, 2004.

HICKMAN, J. C. Introduction to Actuarial Mathematics. **Proceedings of Symposis in Applied Mathematics.**, Estados Unidos, vol. 35, p. 1-4, 1986. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=NLRUOwoxvnEC&pg=PA15&lpg=PA15&dq=actuarial+mathematics.+bowers+n.+1.+gerber&source=bl&ots=yHH36VXBCH&sig=6TPQPdKOgiRb6FUJ4tsTFMHE8c&hl=ptBR&sa=X&ei=O9x0U9XdD6238gHpq4HwBA&ved=0CGMQ6AEwBg#v=onepage&q&f=false>>. Acesso em: 13 maio 2014.

HICKMAN, J. C. Updating Life Contingencies. **Proceedings of Symposis in Applied Mathematics.**, Estados Unidos, vol. 35, p. 5-15, 1986. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=NLRUOwoxvnEC&pg=PA15&lpg=PA15&dq=actuarial+mathematics.+bowers+n.+1.+gerber&source=bl&ots=yHH36VXBCH&sig=6TPQPdKOgiRb6FUJ4tsTFMHE8c&hl=ptBR&sa=X&ei=O9x0U9XdD6238gHpq4HwBA&ved=0CGMQ6AEwBg#v=onepage&q&f=false>>. Acesso em: 10 maio 2014.

Instituto Brasileiro de Atuária. **Apostila de Profissionalismo**. Disponível em: <<http://www.atuarios.org.br/IBA/AcessoRestrito/Arquivos/Arq634460786979187137.pdf>>. Acesso em: 25/05/2014.

INSTITUTO BRASILEIRO DE ATUÁRIA. Disponível em: <<http://www.atuarios.org.br/iba/>>. Acesso em: 20 abril 2014.

JORDAN, C. W., **Life Contingencies**. Estados Unidos: The Society of Actuaries, 1991.

KLUGMAN, S. A.; PANJER, H. H.; WILLMOT, G. E., **Loss Models: From Data to Decisions**. 3. ed. New Jersey: Wiley, 1949.

MANO, C. C. A.; FERREIRA, P. P., **Aspectos Atuariais e Contábeis das Provisões Técnicas**. 1. ed. Rio de Janeiro: Funenseg, 2009.

MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. O., **Estatística Básica**. 5. ed. Saraiva, 2009.

PARMENTER, M. M., **Theory of Interest and Life Contingencies, with Pension Applications: A Problem – Solving Approach**. 1. ed. Estados Unidos: ACTEX Publications, 1988.

RODRIGUES, J. A., **Gestão de Risco Actuarial**. 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2008.

SEAT, C. Princípios e Boas Práticas. *In*: Encontro Nacional de Atuários. 3. 2013, São Paulo. **Palestra Actuarial Standards & Best Practices in Modeling Work**. São Paulo: CNseg, 2013.

SOCIETY OF ACTUARIES. Disponível em: <<http://www.soa.org/>> Acesso em: 15 abril 2014.

THE INFINITE ACTUARY. Disponível em: <<http://www.theinfiniteactuary.com/>>. Acesso em: 28 mar 2014.

TROWBRIDGE, C. L.; FARR, C. E., **The Theory and Practice of Pension Funding**. Homewood, 1976.

Maiores Economias do Mundo. **Uol Economia**, São Paulo, 30 abril 2014. Disponível em: <<http://economia.uol.com.br/noticias/redacao/2014/04/30/ranking-do-banco-mundial-traz-brasil-como-a-7-maior-economia-do-mundo.htm>>. Acesso em: 05 jun. 2014.

VILANOVA, W., **Matemática Actuarial**. 1. ed. São Paulo: Livraria Pioneira Editôra, 1969.

WIKIPEDIA. Disponível em: <<http://www.wikipedia.org/>>. Acesso em: 10 maio 2014.

WINKLVOSS, H. E., **Pension Mathematics with Numerical Illustrations**. 2. ed. Estados Unidos: PensionsResearchCouncil, 1993.

ANEXO A – TÁBUA DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL DO EXAME MLC DA SOA

Tábua da Distribuição Normal

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Fonte: Soa (2014).

ANEXO B – TÁBUA DE VIDA ILUSTRATIVO EXAME MLC DA SOA

Tábua de Vida Ilustrativa: Funções Básicas e Prêmios de Benefícios Individuais em $i=0,06$

x	l_x	$1000q_x$	\ddot{a}_x	$1000A_x$	$1000({}^2A_x)$	$1000{}_5E_x$	$1000{}_{10}E_x$	$1000{}_{20}E_x$	x
0	10,000,000	20.42	16.8010	49.00	25.92	728.54	541.95	299.89	0
5	9,749,503	0.98	17.0379	35.59	8.45	743.89	553.48	305.90	5
10	9,705,588	0.85	16.9119	42.72	9.37	744.04	553.34	305.24	10
15	9,663,731	0.91	16.7384	52.55	11.33	743.71	552.69	303.96	15
20	9,617,802	1.03	16.5133	65.28	14.30	743.16	551.64	301.93	20
21	9,607,896	1.06	16.4611	68.24	15.06	743.01	551.36	301.40	21
22	9,597,695	1.10	16.4061	71.35	15.87	742.86	551.06	300.82	22
23	9,587,169	1.13	16.3484	74.62	16.76	742.68	550.73	300.19	23
24	9,576,288	1.18	16.2878	78.05	17.71	742.49	550.36	299.49	24
25	9,565,017	1.22	16.2242	81.65	18.75	742.29	549.97	298.73	25
26	9,553,319	1.27	16.1574	85.43	19.87	742.06	549.53	297.90	26
27	9,541,153	1.33	16.0873	89.40	21.07	741.81	549.05	297.00	27
28	9,528,475	1.39	16.0139	93.56	22.38	741.54	548.53	296.01	28
29	9,515,235	1.46	15.9368	97.92	23.79	741.24	547.96	294.92	29
30	9,501,381	1.53	15.8561	102.48	25.31	740.91	547.33	293.74	30
31	9,486,854	1.61	15.7716	107.27	26.95	740.55	546.65	292.45	31
32	9,471,591	1.70	15.6831	112.28	28.72	740.16	545.90	291.04	32
33	9,455,522	1.79	15.5906	117.51	30.63	739.72	545.07	289.50	33
34	9,438,571	1.90	15.4938	122.99	32.68	739.25	544.17	287.82	34
35	9,420,657	2.01	15.3926	128.72	34.88	738.73	543.18	286.00	35
36	9,401,688	2.14	15.2870	134.70	37.26	738.16	542.11	284.00	36
37	9,381,566	2.28	15.1767	140.94	39.81	737.54	540.92	281.84	37
38	9,360,184	2.43	15.0616	147.46	42.55	736.86	539.63	279.48	38
39	9,337,427	2.60	14.9416	154.25	45.48	736.11	538.22	276.92	39
40	9,313,166	2.78	14.8166	161.32	48.63	735.29	536.67	274.14	40
41	9,287,264	2.98	14.6864	168.69	52.01	734.40	534.99	271.12	41
42	9,259,571	3.20	14.5510	176.36	55.62	733.42	533.14	267.85	42
43	9,229,925	3.44	14.4102	184.33	59.48	732.34	531.12	264.31	43
44	9,198,149	3.71	14.2639	192.61	63.61	731.17	528.92	260.48	44
45	9,164,051	4.00	14.1121	201.20	68.02	729.88	526.52	256.34	45
46	9,127,426	4.31	13.9546	210.12	72.72	728.47	523.89	251.88	46
47	9,088,049	4.66	13.7914	219.36	77.73	726.93	521.03	247.08	47
48	9,045,679	5.04	13.6224	228.92	83.06	725.24	517.91	241.93	48
49	9,000,057	5.46	13.4475	238.82	88.73	723.39	514.51	236.39	49
50	8,950,901	5.92	13.2668	249.05	94.76	721.37	510.81	230.47	50
51	8,897,913	6.42	13.0803	259.61	101.15	719.17	506.78	224.15	51
52	8,840,770	6.97	12.8879	270.50	107.92	716.76	502.40	217.42	52
53	8,779,128	7.58	12.6896	281.72	115.09	714.12	497.64	210.27	53
54	8,712,621	8.24	12.4856	293.27	122.67	711.24	492.47	202.70	54
55	8,640,861	8.96	12.2758	305.14	130.67	708.10	486.86	194.72	55
56	8,563,435	9.75	12.0604	317.33	139.11	704.67	480.79	186.32	56
57	8,479,908	10.62	11.8395	329.84	147.99	700.93	474.22	177.53	57
58	8,389,826	11.58	11.6133	342.65	157.33	696.85	467.12	168.37	58
59	8,292,713	12.62	11.3818	355.75	167.13	692.41	459.46	158.87	59
60	8,188,074	13.76	11.1454	369.13	177.41	687.56	451.20	149.06	60
61	8,075,403	15.01	10.9041	382.79	188.17	682.29	442.31	139.00	61
62	7,954,179	16.38	10.6584	396.70	199.41	676.56	432.77	128.75	62
63	7,823,879	17.88	10.4084	410.85	211.13	670.33	422.54	118.38	63
64	7,683,979	19.52	10.1544	425.22	223.34	663.56	411.61	107.97	64
65	7,533,964	21.32	9.8969	439.80	236.03	656.23	399.94	97.60	65

Fonte: Soa (2014).

ANEXO C – TÁBUA DE VIDA ILUSTRATIVO EXAME MLC DA SOA

Tábua de Vida Ilustrativa: Funções Básicas e Prêmios de Benefícios Individuais em $i=0,06$

x	l_x	$1000q_x$	\ddot{a}_x	$1000A_x$	$1000({}^2A_x)$	$1000{}_5E_x$	$1000{}_{10}E_x$	$1000{}_{20}E_x$	x
66	7,373,338	23.29	9.6362	454.56	249.20	648.27	387.53	87.37	66
67	7,201,635	25.44	9.3726	469.47	262.83	639.66	374.36	77.38	67
68	7,018,432	27.79	9.1066	484.53	276.92	630.35	360.44	67.74	68
69	6,823,367	30.37	8.8387	499.70	291.46	620.30	345.77	58.54	69
70	6,616,155	33.18	8.5693	514.95	306.42	609.46	330.37	49.88	70
71	6,396,609	36.26	8.2988	530.26	321.78	597.79	314.27	41.86	71
72	6,164,663	39.62	8.0278	545.60	337.54	585.25	297.51	34.53	72
73	5,920,394	43.30	7.7568	560.93	353.64	571.81	280.17	27.96	73
74	5,664,051	47.31	7.4864	576.24	370.08	557.43	262.31	22.19	74
75	5,396,081	51.69	7.2170	591.49	386.81	542.07	244.03	17.22	75
76	5,117,152	56.47	6.9493	606.65	403.80	525.71	225.46	13.04	76
77	4,828,182	61.68	6.6836	621.68	421.02	508.35	206.71	9.61	77
78	4,530,360	67.37	6.4207	636.56	438.42	489.97	187.94	6.88	78
79	4,225,163	73.56	6.1610	651.26	455.95	470.57	169.31	4.77	79
80	3,914,365	80.30	5.9050	665.75	473.59	450.19	151.00	3.19	80
81	3,600,038	87.64	5.6533	680.00	491.27	428.86	133.19	2.05	81
82	3,284,542	95.61	5.4063	693.98	508.96	406.62	116.06	1.27	82
83	2,970,496	104.28	5.1645	707.67	526.60	383.57	99.81	0.75	83
84	2,660,734	113.69	4.9282	721.04	544.15	359.79	84.59	0.42	84
85	2,358,246	123.89	4.6980	734.07	561.57	335.40	70.56	0.22	85
86	2,066,090	134.94	4.4742	746.74	578.80	310.56	57.83	0.11	86
87	1,787,299	146.89	4.2571	759.03	595.79	285.44	46.50	0.05	87
88	1,524,758	159.81	4.0470	770.92	612.51	260.21	36.61	0.02	88
89	1,281,083	173.75	3.8442	782.41	628.92	235.11	28.17	0.01	89
90	1,058,491	188.77	3.6488	793.46	644.96	210.36	21.13	0.00	90
91	858,676	204.93	3.4611	804.09	660.61	186.21	15.41	0.00	91
92	682,707	222.27	3.2812	814.27	675.83	162.90	10.91	0.00	92
93	530,959	240.86	3.1091	824.01	690.59	140.69	7.47	0.00	93
94	403,072	260.73	2.9450	833.30	704.86	119.79	4.93	0.00	94
95	297,981	281.91	2.7888	842.14	718.61	100.43	3.13	0.00	95
96	213,977	304.45	2.6406	850.53	731.83	82.78	1.90	0.00	96
97	148,832	328.34	2.5002	858.48	744.50	66.97	1.10	0.00	97
98	99,965	353.60	2.3676	865.99	756.60	53.09	0.60	0.00	98
99	64,617	380.20	2.2426	873.06	768.13	41.14	0.31	0.00	99
100	40,049	408.12	2.1252	879.70	779.08	31.12	0.15	0.00	100
101	23,705	437.28	2.0152	885.93	789.44	22.91	0.07	0.00	101
102	13,339	467.61	1.9123	891.76	799.21	16.37	0.03	0.00	102
103	7,101	498.99	1.8164	897.19	808.41	11.33	0.01	0.00	103
104	3,558	531.28	1.7273	902.23	817.02	7.56	0.00	0.00	104
105	1,668	564.29	1.6447	906.90	825.06	4.86	0.00	0.00	105
106	727	597.83	1.5685	911.22	832.53	2.99	0.00	0.00	106
107	292	631.64	1.4984	915.19	839.46	1.76	0.00	0.00	107
108	108	665.45	1.4341	918.82	845.84	0.98	0.00	0.00	108
109	36	698.97	1.3755	922.14	851.69	0.52	0.00	0.00	109
110	11	731.87	1.3223	925.15	857.04	0.26	0.00	0.00	110

Fonte: Soa (2014)

ANEXO D – TÁBUA DE VIDA ILUSTRATIVA DO EXAME MLC DA SOA

Tábua de Vida Ilustrativa: Funções Básicas e Prêmios de Benefícios Individuais em $i=0,06$ (Vidas são Independentes)

x	\ddot{a}_{xx}	$1000A_{xx}$	$1000(^2A_{xx})$	$\ddot{a}_{x:x+10}$	$1000A_{x:x+10}$	$1000(^2A_{x:x+10})$	x
0	16.1345	86.73	50.89	16.2844	78.24	34.71	0
5	16.6432	57.93	16.51	16.4093	71.17	19.17	5
10	16.4660	67.96	18.13	16.1541	85.62	22.70	10
15	16.2187	81.96	21.67	15.8187	104.60	28.49	15
20	15.9005	99.97	27.00	15.3934	128.67	37.00	20
21	15.8272	104.12	28.33	15.2962	134.18	39.11	21
22	15.7502	108.48	29.77	15.1945	139.94	41.39	22
23	15.6696	113.04	31.33	15.0883	145.95	43.83	23
24	15.5851	117.82	33.01	14.9774	152.22	46.46	24
25	15.4967	122.83	34.82	14.8617	158.77	49.28	25
26	15.4041	128.07	36.77	14.7411	165.60	52.31	26
27	15.3073	133.55	38.87	14.6154	172.71	55.56	27
28	15.2062	139.27	41.12	14.4845	180.12	59.03	28
29	15.1005	145.26	43.55	14.3484	187.83	62.75	29
30	14.9901	151.50	46.16	14.2068	195.84	66.72	30
31	14.8750	158.02	48.96	14.0598	204.16	70.97	31
32	14.7549	164.82	51.96	13.9071	212.80	75.50	32
33	14.6298	171.90	55.18	13.7488	221.76	80.34	33
34	14.4995	179.27	58.63	13.5848	231.05	85.48	34
35	14.3640	186.94	62.32	13.4150	240.66	90.96	35
36	14.2230	194.92	66.26	13.2393	250.60	96.78	36
37	14.0766	203.21	70.48	13.0579	260.88	102.96	37
38	13.9246	211.81	74.98	12.8705	271.48	109.52	38
39	13.7670	220.74	79.77	12.6774	282.41	116.46	39
40	13.6036	229.99	84.89	12.4784	293.68	123.80	40
41	13.4344	239.56	90.32	12.2737	305.26	131.56	41
42	13.2594	249.47	96.11	12.0633	317.17	139.75	42
43	13.0786	259.70	102.25	11.8474	329.39	148.38	43
44	12.8919	270.27	108.76	11.6260	341.92	157.46	44
45	12.6994	281.16	115.66	11.3994	354.75	166.99	45
46	12.5011	292.39	122.95	11.1677	367.87	177.00	46
47	12.2971	303.94	130.67	10.9310	381.26	187.48	47
48	12.0873	315.81	138.80	10.6898	394.92	198.44	48
49	11.8720	328.00	147.38	10.4441	408.82	209.88	49
50	11.6513	340.49	156.41	10.1944	422.96	221.81	50
51	11.4252	353.29	165.89	9.9409	437.31	234.22	51
52	11.1941	366.37	175.85	9.6840	451.85	247.10	52
53	10.9580	379.74	186.28	9.4240	466.57	260.46	53
54	10.7172	393.37	197.18	9.1614	481.43	274.27	54
55	10.4720	407.24	208.57	8.8966	496.42	288.54	55
56	10.2227	421.35	220.44	8.6301	511.50	303.24	56
57	9.9696	435.68	232.79	8.3623	526.66	318.35	57
58	9.7131	450.20	245.62	8.0938	541.86	333.85	58
59	9.4535	464.90	258.93	7.8249	557.08	349.73	59
60	9.1911	479.75	272.69	7.5563	572.28	365.94	60
61	8.9266	494.72	286.91	7.2885	587.44	382.46	61
62	8.6602	509.80	301.56	7.0221	602.53	399.26	62
63	8.3926	524.95	316.62	6.7574	617.50	416.30	63
64	8.1241	540.15	332.09	6.4952	632.34	433.53	64
65	7.8552	555.36	347.92	6.2360	647.02	450.93	65

Fonte: Soa (2014).

ANEXO E – TÁBUA DE VIDA ILUSTRATIVO EXAME MLC DA SOA

Tábua de Vida Ilustrativa: Funções Básicas e Prêmios de Benefícios Individuais em $i=0,06$ (Vidas são Independentes)

x	\ddot{a}_{xx}	$1000A_{xx}$	$1000({}^2A_{xx})$	$\ddot{a}_{x:x+10}$	$1000A_{x:x+10}$	$1000({}^2A_{x:x+10})$	x
66	7.5866	570.57	364.09	5.9802	661.50	468.44	66
67	7.3187	585.74	380.58	5.7283	675.76	486.02	67
68	7.0520	600.83	397.35	5.4809	689.76	503.62	68
69	6.7872	615.82	414.36	5.2385	703.48	521.21	69
70	6.5247	630.68	431.58	5.0014	716.90	538.72	70
71	6.2650	645.37	448.96	4.7701	730.00	556.11	71
72	6.0088	659.88	466.46	4.5450	742.74	573.34	72
73	5.7565	674.16	484.03	4.3263	755.11	590.36	73
74	5.5086	688.19	501.64	4.1146	767.10	607.12	74
75	5.2655	701.95	519.23	3.9099	778.69	623.59	75
76	5.0278	715.41	536.75	3.7125	789.86	639.71	76
77	4.7959	728.54	554.16	3.5227	800.60	655.46	77
78	4.5700	741.32	571.41	3.3406	810.91	670.79	78
79	4.3507	753.74	588.45	3.1663	820.78	685.67	79
80	4.1381	765.77	605.25	2.9998	830.20	700.08	80
81	3.9326	777.40	621.75	2.8412	839.18	713.99	81
82	3.7344	788.62	637.91	2.6905	847.71	727.37	82
83	3.5438	799.41	653.70	2.5476	855.80	740.21	83
84	3.3607	809.77	669.08	2.4125	863.44	752.49	84
85	3.1855	819.69	684.02	2.2851	870.66	764.20	85
86	3.0181	829.16	698.48	2.1652	877.44	775.34	86
87	2.8587	838.19	712.45	2.0527	883.81	785.89	87
88	2.7071	846.77	725.89	1.9475	889.77	795.86	88
89	2.5633	854.91	738.79	1.8493	895.33	805.25	89
90	2.4274	862.60	751.14	1.7579	900.50	814.05	90
91	2.2991	869.86	762.91	1.6731	905.30	822.29	91
92	2.1784	876.70	774.11	1.5947	909.73	829.96	92
93	2.0651	883.11	784.73	1.5225	913.82	837.07	93
94	1.9590	889.11	794.77	1.4563	917.57	843.64	94
95	1.8600	894.72	804.22	1.3957	921.00	849.67	95
96	1.7678	899.93	813.09	1.3407	924.11	855.20	96
97	1.6823	904.77	821.39	1.2908	926.93	860.21	97
98	1.6032	909.25	829.12	1.2460	929.47	864.75	98
99	1.5304	913.38	836.29	1.2060	931.73	868.81	99
100	1.4634	917.16	842.92	1.1706	933.74	872.43	100
101	1.4023	920.63	849.02	1.1395	935.50	875.61	101
102	1.3466	923.78	854.60	1.1124	937.03	878.39	102
103	1.2962	926.63	859.67	1.0892	938.35	880.78	103
104	1.2509	929.20	864.26	1.0695	939.46	882.81	104
105	1.2103	931.49	868.38	1.0531	940.39	884.50	105
106	1.1744	933.53	872.04	1.0397	941.15	885.89	106
107	1.1428	935.32	875.27	1.0289	941.76	887.00	107
108	1.1153	936.87	878.10	1.0205	942.24	887.87	108
109	1.0916	938.21	880.53	1.0141	942.60	888.54	109
110	1.0715	939.35	882.60	1.0093	942.87	889.03	110

Fonte: Soa (2014).

ANEXO F – TABELA DE SERVIÇO ILUSTRATIVA DO EXAME MLC DA SOA

Tabela de Serviço Ilustrativa

x	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(d)}$	$d_x^{(w)}$	$d_x^{(i)}$
30	100,000	100	19,990	0
31	79,910	80	14,376	0
32	65,454	72	9,858	0
33	55,524	61	5,702	0
34	49,761	60	3,971	0
35	45,730	64	2,693	46
36	42,927	64	1,927	43
37	40,893	65	1,431	45
38	39,352	71	1,181	47
39	38,053	72	989	49
40	36,943	78	813	52
41	36,000	83	720	54
42	35,143	91	633	56
43	34,363	96	550	58
44	33,659	104	505	61
45	32,989	112	462	66
46	32,349	123	421	71
47	31,734	133	413	79
48	31,109	143	373	87
49	30,506	156	336	95
50	29,919	168	299	102
51	29,350	182	293	112
52	28,763	198	259	121
53	28,185	209	251	132
54	27,593	226	218	143
55	27,006	240	213	157
56	26,396	259	182	169
57	25,786	276	178	183
58	25,149	297	148	199
59	24,505	316	120	213
60	23,856	313	0	0
61	19,991	298	0	0
62	18,106	284	0	0
63	15,130	271	0	0
64	13,509	257	0	0
65	11,246	204	0	0
66	6,594	147	0	0
67	5,145	119	0	0
68	3,504	83	0	0
69	2,040	49	0	0
70	987	17	0	0

Fonte: Soa (2014).

ANEXO G – TABELA DE FUNÇÕES DE INTERESSE DO EXAME MLC DA SOA

Funções de Interesse em $i = 0,06$

$j^{(m)}$	$d^{(m)}$	$1/l^{(m)}$	$d/d^{(m)}$	$\alpha(m)$	$\beta(m)$
0.06000	0.05660	1.00000	1.00000	1.00000	0.00000
0.05913	0.05743	1.01478	0.98564	1.00021	0.25739
0.05870	0.05785	1.02223	0.97852	1.00027	0.38424
0.05841	0.05813	1.02721	0.97378	1.00028	0.46812
0.05827	0.05827	1.02971	0.97142	1.00028	0.50985

Fonte: Soa (2014).

Onde: $\alpha(m) = \frac{id}{i^m d^m} e$ $\beta(m) = \frac{i - i^{(m)}}{i^m d^m}$

Notas:

- (1) A menos que especificado, a força de interesse é constante em cada questão.
- (2) A menos que especificado, tempos de vida futuros são independentes em cada questão.
- (3) A menos que especificado, todas as vidas na questão seguem a mesma tábua de mortalidade.

APÊNDICE A - CONTEÚDO DE ESPECIALIDADE DA SOA REQUERIDOS PARA A FILIAÇÃO DO TIPO FSA

Quadro 9– Conteúdo Específico da Área de Finanças Corporativas e ERM (CFE)

Tópico	Conteúdo
Módulo de Gestão de Riscos de Empreendimento (ERM)	Introdução à gestão de riscos corporativos; desenvolvimento de estratégia para o ERM; requisitos regulamentares; definição, identificação e avaliação dos riscos operacionais; problemas de dados; medição de risco e capital econômico.
Exame ERM	Categorias de risco; modelagem e agregação de riscos; medidas de risco; técnicas e ferramentas de gestão de risco e capital econômico.
Exame de Fundamentos da CFE	Finanças corporativas – financiamento; gestão de capital – tomada de decisão; modelagem estocástica; técnicas avançadas de avaliação de riscos e gestão de riscos financeiros.
Módulo de Relatórios Financeiros	Valor justo; passivos de princípios contábeis, custo diferido de aquisição e resseguros; obrigações estatutárias específicas subjacentes e parecer atuarial; método de ativo/passivos canadenses; normas internacionais de relatórios financeiros; relatórios de ativos; tributação e capital regulatório baseado em risco.
Exame de Tomada de Decisão Estratégica	Contabilidade e medidas de valor/ contabilidade gerencial; crédito e risco de liquidez; gestão de capital e processo de ERM; processo de tomada de decisão; estudos de caso e gestão de risco estratégico.
Módulo de Tópicos Avançados em CFE	Teoria do valor extremo; pensamentos e questões estratégicas; avaliação de cenários; demonstrações financeiras; monitoramento ambiental e planos estratégicos.

Fonte: Elaborado pela autora. Dados da SOA (2014).

Quadro 10– Conteúdo Específico da Área de Finanças Quantitativas e Investimentos (QFI)

Tópico	Conteúdo
Módulo de Modelagem Financeira	Produtos financeiros; derivativos e seu uso na gestão de riscos; métodos de mitigação de risco; simulação de Monte Carlo; modelagem e seus riscos e produto de seguro.
Exame de Núcleo QFI	Matemática, estatística e cálculo estocástico; teoria da precificação de opção; derivativos e hedging; renda fixa, equities; política de investimento e alocação de ativos.
Exame de QFI avançado	Precificação avançada de opção; risco de crédito; risco de liquidez; técnicas quantitativas; finanças comportamentais; ativos alternativos e gestão de responsabilidade.
Módulo de ERM	Introdução à gestão de riscos corporativos; desenvolvimento de estratégia para o ERM; requisitos regulamentares; definição, identificação e avaliação dos riscos operacionais; problemas de dados; medição de risco e capital econômico.
Exame de ERM ou de Gestão de Risco de Investimento	Categorias de risco; modelagem e agregação de riscos; medidas de risco; técnicas e ferramentas de gestão de risco; capital econômico; regulamentação de investimentos e gestão de risco de investimento.
Módulo de Relatórios Financeiros	Valor justo; passivos de princípios contábeis, custo diferido de aquisição e resseguros; obrigações estatutárias específicas subjacentes e parecer atuarial; método de ativo/passivos

	canadenses; normas internacionais de relatórios financeiros; relatórios de ativos; tributação e capital regulatório baseado em risco.
--	---

Fonte: Elaborado pela autora. Dados da SOA (2014).

Quadro 11– Conteúdo Específico da Área de Vida Individual e Anuidades (ILA)

Tópico	Conteúdo
Módulo de Regulação e Tributação	Propósito de regulação e tributação; seguros e anuidades; solvência e insolvência; fundos de garantia; regulamentos e leis relativas ao mercado; políticas da legislação fiscal; lucro e custo antes e depois da tributação e resseguro.
Exame de Precificação de Vida	Viabilidade e design de novos produtos, benefícios e recursos; precificação e riscos dos produtos; medidas de lucro; modelagem; necessidades atuariais e monitoramento do produto.
Exame de Avaliação e Finanças de Vida	Relatórios financeiros; princípios da avaliação; padrões emergentes; gestão financeira e de capital; resseguro e considerações profissionais.
Módulo de ERM	Introdução à gestão de riscos corporativos; desenvolvimento de estratégia para o ERM; requisitos regulamentares; definição, identificação e avaliação dos riscos operacionais; problemas de dados; medição de risco e capital econômico.
Exame de ERM ou de Gestão de Risco de Vida	Categorias de risco; modelagem e agregação de riscos; medidas de risco; técnicas e ferramentas de gestão de risco; capital econômico; gestão de risco de compreensão; medição e estimativa de risco e gestão de ativos e passivos.
Módulo de Economia Financeira	Economia financeira aplicada à atuária.

Fonte: Elaborado pela autora. Dados da SOA (2014).

Quadro 12– Conteúdo Específico da Área de Benefícios de Aposentadoria (RB)

Tópico	Conteúdo
Módulo de Seguro Social	Programas e fundamentos do seguro social; seguro social e o setor privado e questões que revestem os programas de seguro social.
Módulo de Economia Financeira	Economia financeira aplicada à atuária.
Exame de Regulamentação e Financiamento (Apenas para o Canadá)	Análise da qualidade e adequação dos dados; análise de fatores influentes na seleção de pressupostos atuariais; aplicação de métodos para avaliação de benefícios de aposentadoria; políticas e restrições regulatórias para os planos de aposentadoria registrados e conduta profissional.
Exame de Atuários Matriculados (EA)	Juros compostos; contingências de vida; análise demográfica; premissas atuariais; métodos de custeio atuarial; cálculo de contribuições mínimas exigidas e máximas dedutíveis e leis relacionadas à previdência.
Exame de Contabilidade e Projeto	Planos de aposentadoria e planos de saúde do aposentado; ambiente regulatório no design do plano; riscos nos planos de aposentadoria e nos planos de saúde do aposentado; design de planos de aposentadoria; fatores que influenciam as premissas atuariais; parecer financeiro e contábil e conduta ética profissional.
Módulo de ERM	Introdução à gestão de riscos corporativos; desenvolvimento de estratégia para o ERM; requisitos regulamentares; definição,

	identificação e avaliação dos riscos operacionais; problemas de dados; medição de risco e capital econômico.
Exame de ERM ou de Gestão de Riscos e Investimentos de Planos de Aposentadoria	Categorias de risco; modelagem e agregação de riscos; medidas de risco; técnicas e ferramentas de gestão de risco; capital econômico; investimentos de planos de aposentadoria em fundos de ativos; metas financeiras e gestão de risco nos planos de aposentadoria.

Fonte: Elaborado pela autora. Dados da SOA (2014).

Quadro 13– Conteúdo Específico da Área de Grupo e Saúde (GH)

Tópico	Conteúdo
Módulo de Economia Financeira	Economia financeira aplicada à atuária.
Módulo de Fundações de Saúde ou Módulo ERM	Utilização de dados da área da saúde em técnicas atuariais; avaliação resultados obtidos a partir de várias técnicas; introdução à gestão de riscos corporativos; desenvolvimento de estratégia para o ERM; requisitos regulamentares; definição, identificação e avaliação dos riscos operacionais; problemas de dados; medição de risco e capital econômico.
Exame de Núcleo de Saúde e Grupo	Precificação de planos individuais e de grupo; precificação de planos de invalidez de curto e longo prazo; estratégias de benefícios dos programas do governo; demonstrações financeiras das seguradoras de acordo com os princípios estatutários dos EUA e avaliação dos benefícios de vida e do grupo de aposentados.
Exame Avançado de Saúde e Grupo	Avaliação dos métodos de reembolso; cálculo de técnicas de transporte de reservas; elaboração de parecer atuarial; aplicação dos princípios de precificação, design de benefícios e financiamento a diversas situações dos planos de saúde.
Módulo de Previsão, Reserva e Precificação	Tendência; reserva; provisão financeira; avaliação de passivo de aposentados; precificação de grupos grandes e pequenos e aplicação da teoria da modelagem.
Exame de ERM ou de especialidade em Saúde e Grupo	Categorias de risco; modelagem e agregação de riscos; medidas de risco; técnicas e ferramentas de gestão de risco; capital econômico; avaliação do risco associado ao seguro de saúde e ao plano de patrocínio; avaliação atuarial e precificação de contratos de saúde individuais de longa duração.

Fonte: Elaborado pela autora. Dados da SOA (2014).

Quadro 14 – Conteúdo Específico da Área de Seguros Gerais (GI)

Tópico	Conteúdo
Exame de Introdução aos Seguros Gerais	Visão geral das operações de seguros; regulamentação de seguros; seguro de marketing e distribuição; seguro contra risco; controle de risco e auditoria de prêmio; resseguro; propriedades de cobertura; responsabilidade e função de crédito; apólice pessoal; cobertura de proprietário; seguro de imóveis comerciais; seguro de responsabilidade civil e coberturas especiais.
Exame de Introdução à taxação e Reserva	Estimação de créditos finais; tendência; taxação; monitoramento, documentação e comunicação; modelagem de catástrofe.
Exame de Ambientes Regulatórios e Financeiros	Relatórios financeiros; medidas de saúde financeira; obrigações do atuário; regulamentações e leis.
Módulo de Economia Financeira	Economia financeira aplicada à atuária.

Módulo ERM	Introdução à gestão de riscos corporativos; desenvolvimento de estratégia para o ERM; requisitos regulamentares; definição, identificação e avaliação dos riscos operacionais; problemas de dados; medição de risco e capital econômico.
Exame de ERM ou de Tópicos Avançados em Seguros Gerais	Categorias de risco; modelagem e agregação de riscos; medidas de risco; técnicas e ferramentas de gestão de risco; capital econômico; reserva estocástica básica; margens de risco para créditos não pagos; credibilidade com parâmetros de risco incertos; precificação de resseguro e margens de lucro seguras contra riscos.
Módulo de Aplicações de Técnicas Estatísticas	Análise de dados no programa R; mínimos quadrados ordinários; modelos lineares generalizados; modelos lineares generalizados mistos; variabilidade nas estimativas de reservas; métodos Bayesian e de Bootstrap; métodos de agrupamento na criação de variáveis preditas.

Fonte: Elaborado pela autora. Dados da SOA (2014).

Quadro 15- Conteúdo Final Comum para Todas as Áreas de FSA.

Tópico	Conteúdo
Módulo de Comunicação e Tomada de Decisão	Habilidades de comunicação escrita e oral e habilidades de tomada de decisão para solução de problemas de negócios.
Curso de Admissão da Associação	Ética profissional; estratégias para resolução de negligência com perspectivas variadas e treinamento em comunicações orais.

Fonte: Elaborado pela autora. Dados da SOA (2014).