



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA

EMANUEL PINHEIRO FONTELLES

ESTUDO DE REDES COMPLEXAS E MECÂNICA ESTATÍSTICA NÃO-EXTENSIVA

FORTALEZA

2018

EMANUEL PINHEIRO FONTELLES

ESTUDO DE REDES COMPLEXAS E MECÂNICA ESTATÍSTICA NÃO-EXTENSIVA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Física. Área de Concentração: Matéria Condensada

Orientador: Prof. Dr. José Soares de Andrade Júnior

Co-Orientador: Prof. Dr. André Auto Moreira

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F762e Fontelles, Emanuel Pinheiro.

Estudo de redes complexas e Mecânica Estatística não-extensiva / Emanuel Pinheiro Fontelles. – 2018.
77 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2018.

Orientação: Prof. Dr. José Soares de Andrade Júnior.

Coorientação: Prof. Dr. André Auto Moreira.

1. Redes Complexas. 2. Mecânica Estatística não-extensiva. 3. Redes livre de escala. 4. Distribuição q-Exponencial. 5. Redes q-Exponenciais. I. Título.

CDD 530

EMANUEL PINHEIRO FONTELLES

ESTUDO DE REDES COMPLEXAS E MECÂNICA ESTATÍSTICA NÃO-EXTENSIVA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em: 19/02/2018

BANCA EXAMINADORA

Dr. José Soares de Andrade Júnior (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dr. André Auto Moreira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dr. Erneson Alves de Oliveira
Universidade de Fortaleza (UNIFOR)

“Eu sou apenas um rapaz latino-americano

Apoiado por mais de 50 mil manos

Efeito colateral que o seu sistema fez”

Racionais MC's - Capítulo 4, Versículo 3

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e a minha família, em especial ao meus pais *Manoel Joaquim Fontelles Filho* e *Lucyvânia Pinheiro Fontelles*, pelo esforço e dedicação, pelo empenho dedicado a minha pessoa ao longo da minha vida. Aqui expresso minha gratidão à eles, pelos caminhos trilhados comigo ao longo da minha vida. Agradeço a paciência, as histórias de vida, ao carinho, a atenção, por estarem comigo nos momentos mais difíceis e mesmo assim não desistir da minha luta.

Ao professor José Soares de Andrade Júnior, pela orientação e dedicação despendida ao longo da realização deste trabalho. A obstinação com que se dedica à ciência e à pesquisa é, certamente, um grande estímulo para mim.

Ao professor André Auto Moreira, pela sua co-orientação, pela sua paciência e dedicação despendidas ao longo desse trabalho. Como professor ensinou me muito, contribuindo para minha formação acadêmica, e por isso eternamente grato.

Aos professores que contribuíram na minha caminhada na pós graduação, em especial aos professores Humberto de Andrade Carmona, Saulo-Davi Soares e Reis, Carlos William de Araujo Paschoal que sempre se dispuseram do seu tempo para responder algum questionamento ou me auxiliar em algum problema.

Aos meus grandes amigos e colegas Aurélio Wildson Teixeira de Noronha, César Menezes Vieira, Felipe Gioachino Operti, Fernando José Almeida, Francisco Israel Alves Nascimento João Paulo da Costa Nogueira, Jonathan Marcio Amâncio Sales, Marciel Carvalho Gomes, Rilder de Sousa Pires, Samuel Moraes da Silva e Wagner Rodrigues de Sena, que sempre disponibilizaram tempo para discussões, seja lá de quais assuntos fossem, que sempre estiveram comigo durante a realização desse trabalho como também em momentos fora da instituição, sempre dando força e encorajamento nos momentos mais cansativos. Agradeço também ao César I. N. Sampaio Filho que sempre se dispôs em discutir e auxiliar nos resultados ao longo desse trabalho.

Agradeço aos meus amigos que sempre estiveram comigo ao longo desses anos como acadêmico em Física, com quem sempre pude contar, Sofia Magalhães, Pedro Henrique, Lucas Miranda e entre tantos outros que cultivaram uma longa amizade ao longo desses anos.

Agradeço as pessoas que passaram por mim ao longo da minha vida, algumas deixaram impressas pegadas indestrutíveis em minha alma, outras ainda caminham comigo, compartilhando meu mundo com elas, aqui deixo o meu muito obrigado a minha companheira Clara Araújo Diniz. Obrigado por cada gesto de amizade, por cada palavra dita na hora certa e

por toda ajuda que recebi ao longo desses anos.

Aos funcionários do Departamento de Física em especial a Maria Creusa da Silva, aos secretárias da Pós-Graduação, Rejane Ramos Coelho e Ana Cleide Ferreira Sampaio. Aos demais funcionários, em especial a Ana Lúcia e Eliete, que sempre se disponibilizava em ajudar.

À CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro ao longo do período do Programa de Pós Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará.

REDUCTIONISM is the most natural thing in the world to grasp. It's simply the belief that "a whole can be understood completely if you understand its parts, and the nature of their 'sum.'" No one in her left brain could reject reductionism.

(— Douglas Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid*)

RESUMO

Quando sistemas constituídos de inúmeros componentes que interagem entre si e dessa interação emerge um comportamento coletivo, fenômenos devido ao conjunto, que não seriam encontrados se considerássemos cada componente individualmente, chamamos esses sistemas de complexos. Redes sociais, onde pessoas cooperam entre si, comunicando-se usando celulares que por sua vez também interagem com outros celulares através de antenas de transmissão. O cérebro formado de neurônio, moléculas formada de átomos, a rede de páginas de *internet*, *WWW*, onde páginas se comunicam por *hiperlinks*, o clima de uma região, formada pelas massas de ar, são alguns exemplos de sistemas complexos. Em resumo Sistemas Complexos é o estudo de como partes de um sistema, interagentes entre si, levam a comportamentos coletivos. Sendo assim, nos propusemos a estudar algumas redes complexas, em especial uma, dada pela distribuição q-Exponencial, a qual emerge naturalmente durante o processo de maximização da entropia de Tsallis. Baseado nos estudo de redes já conhecidas como Redes Aleatórias, Redes de Mundo Pequeno e Redes Livre de Escala, procuramos caracterizar essa rede partindo de medidas definidas em cima dessas redes, como o mínimo caminho médio, coeficiente de agregação. Além disso observamos como o mínimo caminho se comporta quando aumentamos o tamanho do sistema. Muitas dessas medidas já forma realizadas em Redes Livre de Escala, no entanto, nosso sistema está diretamente conectado à Mecânica Estatística não-extensiva, proposta por Tsallis. Assim queremos observar como redes geradas pela distribuição q-Exponencial se comportam perante essa conexão.

Palavras-chave: Redes Complexas. Mecânica Estatística não-extensiva. Redes livre de escala. Distribuição q-Exponencial. Redes q-Exponenciais

ABSTRACT

When systems composed of numerous components that interact with each other and from that interaction emerge a collective behavior, phenomena due to the set, which would not be found if we considered each component individually, we call these complex systems. Social networks, where people cooperate with each other, communicating using cell phones which also interact with other cell phones through transmission antennas. The brain formed of neurons, molecules formed of atoms, the network of *internet* pages, *WWW*, where pages communicate by *hyperlinks*, the climate of a region, formed by air masses, are some examples of complex systems. In short, Complex Systems is the study of how parts of a system, interacting with each other, lead to collective behaviors. Therefore, we proposed to study some complex networks, especially one, given by the q-Exponential distribution, which emerges naturally during the process of maximization of Tsallis entropy. Based on the study of networks already known such as Random Networks, Small World Networks and Scale Free Networks, we try to characterize this network based on measures defined above these networks, such as the average shortest path, the clustering coefficient. In addition we observe how the shortest path behaves when we increase the size of the system. Many of these measures have already been calculated in Scale Free Networks, however, our system is directly connected to the Non-extensive Statistical Mechanics proposed by Tsallis. Thus we want to observe how the networks generated by the q-Exponential distribution behave towards this connection.

Keywords: Complex Networks. Non-extensive Statistical Mechanics. Scale-free networks. q-Exponential distribution.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – As sete pontes de Königsberg	17
Figura 2 – As sete pontes de Königsberg representada em grafo.	18
Figura 3 – Rede trófica	19
Figura 4 – Rede de páginas da internet	20
Figura 5 – Rede não orientada	21
Figura 6 – Distribuição de conectividade de uma rede	23
Figura 7 – Menor caminho entre os vértices i_1 e i_3	24
Figura 8 – Exemplo de coeficiente de agregação e mínimo caminho médio	26
Figura 9 – Representação do experimento de Milgram sobre os estados de Nebraska, Kansas e Massachusetts	28
Figura 10 – Exemplo de rede social e o conceito dos seis graus de separação.	29
Figura 11 – Reorganização aleatórias das ligações, saímos de uma rede regular e alcançamos uma rede quase aleatória.	30
Figura 12 – Mínimo caminho e coeficiente de agregação variando a probabilidade de reorganização das ligações.	31
Figura 13 – A topologia do domínio <i>nd.edu</i> , correspondente a uma sub-rede da Universidade de Notre Dame.	33
Figura 14 – Distribuição de conectividade do domínio <i>nd.edu</i> , correspondente a uma sub-rede da Universidade de Notre Dame.	34
Figura 15 – Comparação entre a distribuição de Poisson e Lei de Potência para o domínio <i>nd.edu</i> , correspondente a uma sub-rede da Universidade de Notre Dame.	35
Figura 16 – Modelo de Configurações	40
Figura 17 – Distribuição de probabilidade da q-Exponencial juntamente com a distribuição de conectividade do maior agregado.	52
Figura 18 – Exemplo de uma rede gerada pela distribuição q-exponencial	53
Figura 19 – Comportamento do mínimo caminho médio $\langle \ell \rangle$ em função do parâmetro q	54
Figura 20 – Análise do comportamento do maior agregado com relação ao mínimo caminho médio, variando o parâmetro q	55
Figura 21 – Comportamento do coeficiente de agregação, C , em função do parâmetro q	56
Figura 22 – Comportamento do coeficiente de agregação, C , escalonado com o tamanho do sistema, N , em função do parâmetro q	57

Figura 23 – Mínimo caminho médio, $\langle \ell \rangle$, como função do tamanho do sistema.	58
Figura 24 – Mínimo caminho médio, $\langle \ell \rangle$, como função do tamanho do sistema em escala semi-logarítmica.	59
Figura 25 – Ajuste do mínimo caminho médio, $\langle \ell \rangle$, como função do tamanho do sistema.	60
Figura 26 – Comportamento do mínimo caminho médio $\langle \ell \rangle$ em função do parâmetro q para diferentes conectividades média.	61
Figura 27 – Comportamento do coeficiente de agregação, C , em função do parâmetro q para diferentes conectividades média.	62
Figura 28 – Comportamento do mínimo caminho médio $\langle \ell \rangle$, em função do parâmetro q para o maior agregado.	64
Figura 29 – Comportamento do coeficiente de agregação, C , em função do parâmetro q para diferentes tamanhos do maior agregado.	65
Figura 30 – Análise da robustez para redes de q -Exponenciais em função do parâmetro q para o tamanho do maior agregado $N \sim 10000$	68
Figura 31 – Análise da robustez para redes de q -Exponenciais em função do parâmetro γ para o tamanho do maior agregado $N \sim 5000$	69
Figura 32 – Comportamento do mínimo caminho médio $\langle \ell \rangle$ em função do parâmetro q tomando $k_{min} = 30$	70
Figura 33 – Comportamento do coeficiente de agregação, C , em função do parâmetro q tomando $k_{min} = 30$	71
Figura 34 – Análise da robustez para redes de q -Exponenciais e redes livres de escala, em função do parâmetro γ	72

LISTA DE SÍMBOLOS

k	Grau
N	Número de vértices
m	Número de ligações
$G(V, e)$	Grafo aleatório dados V vértices e e ligações
$e(i, j)$	Ligação entre os vértices i e j
$\langle k \rangle$	Grau médio
P	Caminho
ℓ_{ij}	Distância entre os vértices i e j
ℓ_{max}	Diâmetro
$\langle \ell \rangle$	Mínimo caminho médio
C_{ij}	Coefficiente de agregação entre os vértices i e j
C	Coefficiente de agregação médio

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	REDES COMPLEXAS	17
2.1	Estudo de redes complexas	18
2.2	Definições	20
2.2.1	<i>Grau</i>	21
2.2.2	<i>Grau Médio</i>	22
2.2.3	<i>Distribuição de Conectividade</i>	22
2.2.4	<i>Componente</i>	23
2.2.5	<i>Caminho</i>	23
2.2.6	<i>Mínimo Caminho Médio</i>	25
2.2.7	<i>Agregação e coeficiente de agregação</i>	25
2.3	Modelo de Redes Aleatórias de Erdős-Rényi	26
2.4	Mundo Pequeno ou <i>Small World</i>	27
2.5	Modelo de Watts-Strogatz	29
2.6	Modelo de Barabási-Albert	32
2.6.1	<i>Características das redes livre de escala</i>	35
2.6.2	<i>Redes livre de escala e Mecânica Estatística não-extensiva</i>	37
2.7	Redes aleatórias com distribuições arbitrárias de conectividade	39
2.7.1	<i>Modelo de Configurações</i>	39
2.7.2	<i>Propriedades estruturais</i>	41
2.7.3	<i>Número esperado de ligações múltiplas</i>	41
2.7.4	<i>Número esperado de auto-ligações</i>	43
2.7.5	<i>Valor esperado da conectividade dos primeiros vizinhos</i>	44
2.7.6	<i>Valor esperado do coeficiente de agregação</i>	46
3	ESTUDO DE REDES USANDO Q -ESTATÍSTICA	47
3.1	Distribuição q -Exponencial	47
3.2	Redes q -Exponenciais	48
3.2.1	<i>Gerando números aleatórios com a distribuição q-Exponencial</i>	49
4	RESULTADOS	51
4.1	Grau médio $\langle k \rangle = 5$	51

4.2	Grau médio $\langle k \rangle = 3$ e $\langle k \rangle = 7$	61
4.3	Tamanho do maior agregado constante	63
4.4	Robustez	65
4.4.1	<i>Robustez com $\langle k \rangle$ variável</i>	69
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	73
	REFERÊNCIAS	75

1 INTRODUÇÃO

Sistemas Complexos é o estudo de como partes de um sistema, interagentes entre si, levam a comportamentos coletivos do sistema, comportamentos esses que não seriam visto se analisássemos cada componente individualmente. Vivemos em uma sociedade, onde as pessoas cooperam entre si, indivíduos, que se deslocam diariamente e desejamos saber, por exemplo, como essas pessoas se movimentam afim de entender o funcionamento da sociedade. Portanto, cadeias alimentares entre espécies de animais, páginas de internet que se comunicam por *hiperlinks*, redes sociais, interações entre proteínas são exemplos de Sistemas Complexos.

Redes complexas podem ser representadas por uma entidade matemática chamada *grafo*, denominado por $G(V, E)$, onde V é um conjunto não vazio de objetos denominados vértices de E é um subconjunto de pares não ordenados de V , chamados de arestas (BIGGS *et al.*, 1999). Grafos podem ser definidos considerando a natureza de suas ligações. Um grafo é dito orientado ou direcionado se suas ligações tem sentido determinado, sempre há uma origem e um destino para cada ligação. Há também grafos não orientados, cujas as ligações não tem orientação, e podemos transitar em ambos os sentidos da rede. Dessa forma, podemos representar diversas redes reais, como a interação entre proteínas, genes e metabolismo. Podemos representar também redes sociais, de amizade, de casamento entre famílias, dentre outras (NEWMAN, 2010).

No Cap. 1, introduziremos o conceito de Redes Complexas, definindo algumas propriedades como grau, grau médio, distância, caminho, mínimo caminho médio. Introduziremos também o conceito de Redes Aleatórias, definida por Paul Erdős e Alfred Rényi, e observamos o comportamento de algumas dessas propriedades sobre essa rede. Observamos também as Redes de Mundo Pequeno, e como elas transitam de Redes Regulares para Redes Aleatórias tomando o mecanismo proposto por Duncan J. Watts e Steven H. Strogatz (WATTS; STROGATZ, 1998). Por último, caracterizamos as Redes Livre de Escala, que são redes cuja distribuição de conectividade segue uma lei de potência, proposta por Albert-Laszlo Barabasi e Réka Albert (BARABÁSI; ALBERT, 1999) para descrever inicialmente o comportamento da rede de páginas de *internet*, analisando o comportamento da distribuição de conectividade dessas redes.

No Cap. 2, apresentaremos uma generalização da estatística de Boltzmann-Gibbs, proposta por Constantino Tsallis (TSALLIS, 1988), de forma que a distribuição que maximiza a entropia é dada pela distribuição q-Exponencial. Assim, tomando essa distribuição, procuraremos gerar redes cuja distribuição de conectividade fosse dada pela distribuição q-Exponencial através do modelo de configurações. Demonstraremos também algumas características do modelo que

nos ajudariam a caracterizar a rede gerada.

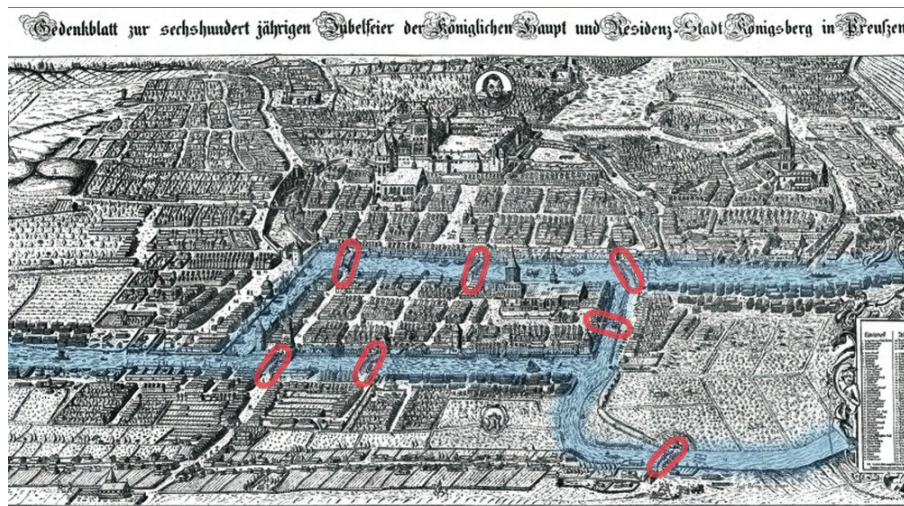
No último capítulo, procuraremos estudar o comportamento do mínimo caminho médio, $\langle \ell \rangle$ e também o coeficiente de agregação, C . Analisaremos a distribuição de conectividade dessas redes, como também o comportamento do mínimo caminho em função do parâmetro q , proposto pela generalização da entropia de Tsallis.

Buscaremos estudar redes geradas pela distribuição q -Exponencial e a partir dela calcularemos medidas que nos permitam caracterizar sobre qual regime podemos classificá-lá. Uma das tentativas é observar como o mínimo caminho médio, ℓ , se comporta quando aumentamos o tamanho da rede, e assim compararmos com Redes Aleatórias ou Redes Livre de Escala (COHEN; HAVLIN, 2003; BOLLOBÁS; RIORDAN, 2004).

2 REDES COMPLEXAS

O estudo de redes teve início na matemática discreta com a teoria de grafos. Em 1735, em Königsberg, a capital da Prússia Oriental era uma das maiores cidades no comércio na época. Na cidade havia uma ilha central, um polo comercial, conhecido como Kneiphof, que dividia o rio Pregel que corria por toda a cidade. Devido ao comércio intenso e ao alto trânsito de pessoas, foram construídas sete pontes em torno dessa ilha. Na época surgiu o questionamento: “Será que existe alguma maneira de cruzarmos as sete pontes sem nunca cruzar a mesma?” Ninguém havia encontrado uma solução, apenas Leonard Euler provou com rigor que não poderia haver tal caminho.

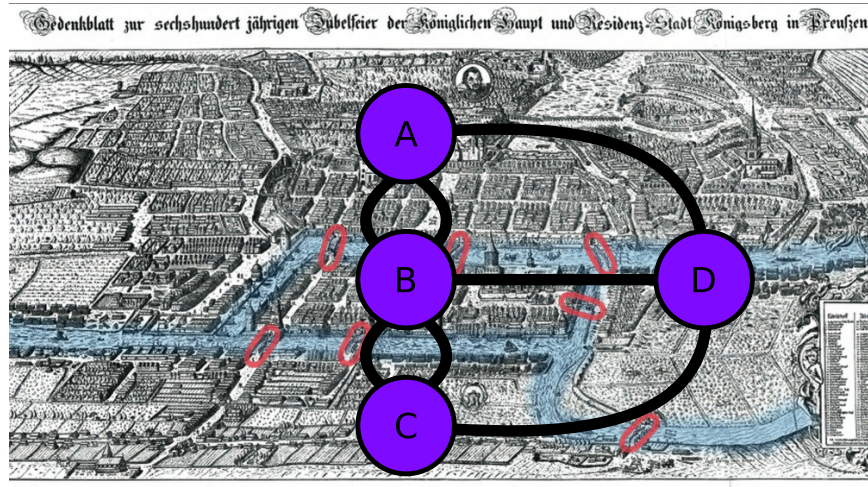
Figura 1 – As sete pontes de Königsberg



Fonte – (WALKE, 2015). A figura é uma reprodução do mapa de Königsberg na Prússia Oriental. Em destaque podemos observar as sete pontes que ligavam a ilha de Kneiphof. Em 1944, na Segunda Guerra Mundial Königsberg foi bombardeada e conquistada pela União Soviética em 1945. Em 1946, Königsberg recebeu o nome de Kaliningrad e em 1970, Kneiphof tornou-se um parque sendo renomeado por Kant Island.

Para demonstrar, ele separou as áreas do entorno do rio em regiões A, B, C e D e conectou as áreas onde houvessem pontes por ligações. A Fig. (2), mostra a representação da divisão de terras e as pontes que ligavam as quatro áreas. Essa representação pode ser entendida como um grafo onde temos 4 vértices e 7 arestas. Euler resolveu o problema propondo que entre as áreas A e C, fosse construída mais uma ponte, de forma que aumentasse o número de arestas de 3 para 4. Assim haveria apenas o vértice D com um número ímpar de arestas. Dessa forma, seria possível atravessar todas as pontes sem nunca cruzá-la mais de uma vez.

Figura 2 – As sete pontes de Königsberg representada em grafo.



Fonte – Adaptado de (WALKE, 2015). A figura é uma reprodução do mapa de Königsberg na Prússia Oriental. Em destaque podemos observar as sete pontes que ligavam a ilha de Kneiphof.

Essa foi a primeira vez onde houve uma prova matemática usando grafos. Esse formalismo é usado para representar e descrever redes complexas.

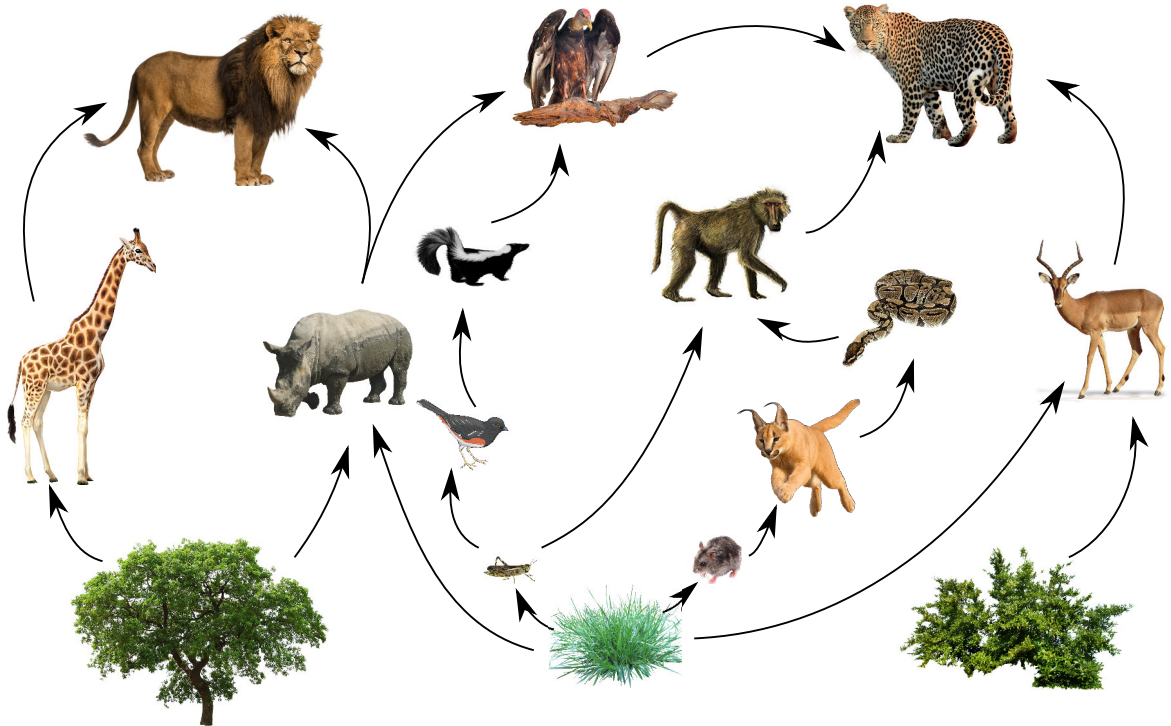
2.1 Estudo de redes complexas

Sistemas Complexos transitam entre diversas áreas do conhecimento, como Ciências Sociais, Biologia, Engenharia, Física, Química, como também em Ecologia, resolvendo questões importantes de tais áreas. O estudo de sistemas complexos trata-se em entender efeitos indiretos do sistema, onde muitas das vezes apresentam características não lineares, como a Rede Trófica, que é a interligação entre várias cadeias alimentares, Fig. (3). Em Ciências Sociais, o estudo de redes vem crescendo desde 1930 (MORENO, 1934), procurando compreender as relações entre indivíduos para descrever a sociedade. Por exemplo, em uma rede social, podemos perguntar quais são os indivíduos mais conectados ou quais tem maior influência sobre os demais indivíduos? O que acontece se removermos o indivíduo mais conectado na rede?

Em uma cadeia alimentar temos uma sequência linear de organismos que são organizados por relações de alimentação, nessa relações um organismo se alimenta de outro, assim energia e nutrientes seguem para o próximo organismo. Assim, se comermos um hambúrguer estamos fazendo parte de uma cadeia, *alface* → *vaca* → *ser humano*. Mas se colocarmos alface no nosso hambúrguer, estamos fazendo parte de outra cadeia alimentar, *alface* → *ser humano*, dessa forma a linearidade se perde. Assim, nós podemos fazer parte de uma cadeia alimentar

como também de outra, não existindo um caminho linear entre essas cadeias.

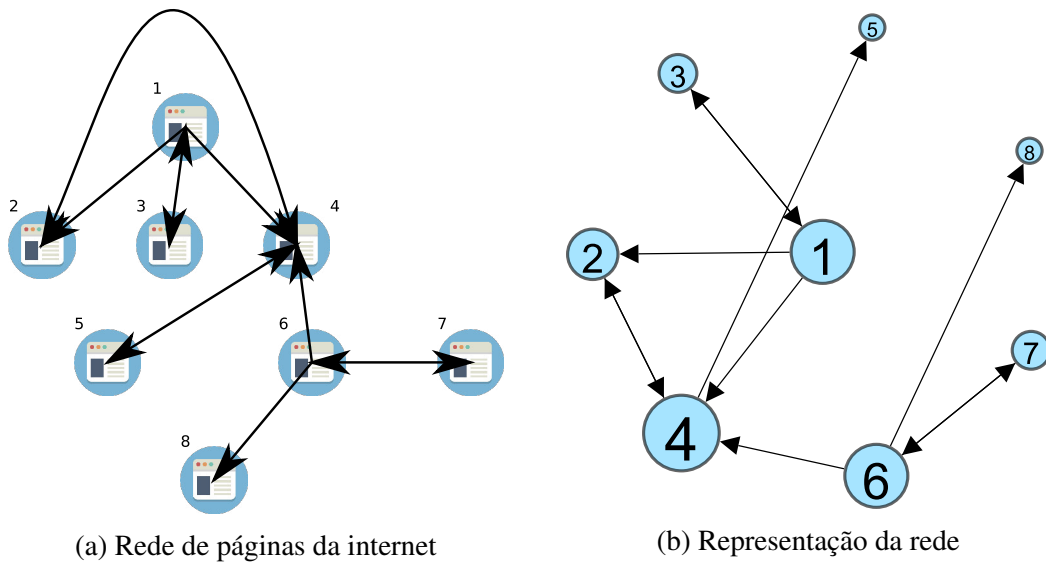
Figura 3 – Rede trófica



Fonte – O próprio autor. Exemplo de rede trófica. Esse é um exemplo um pouco mais apurado do que cadeia alimentar, pois nele não há uma linearidade entre a cadeia alimentar, por exemplo, se comermos um hambúrguer estamos fazendo parte de uma cadeia, *alface* → *vaca* → *ser humano*. Mas se colocarmos alface no nosso hambúrguer, estamos fazendo parte de outra cadeia alimentar, *alface* → *ser humano*. A rede trófica é um exemplo de rede real que pode ser representada por uma rede complexa.

Se tomarmos a rede de páginas da *internet* como sendo um espaço de páginas que contém informações, onde documentos e conteúdos são referenciados por um localizador (URL, *Uniform Resource Locators*) e conectados por *hiperlinks*, podendo ser acessados via um provedor. Existe uma dinâmica de informações que nos levam a perguntar como essas redes funcionam, como se comunicam ou quais características podemos esperar desses sistemas. Podemos nos perguntar o que aconteceria se removêssemos a página que conecta as demais páginas na rede. Uma representação simples dessa rede pode ser encontrada na Fig. (4a), representando a estrutura da rede real, onde um conjunto de páginas está conectada por *hiperlinks*. Na Fig. (4b), temos uma representação da rede como grafo.

Figura 4 – Rede de páginas da internet



Fonte – O próprio autor. A Rede de páginas da internet. Aqui exemplificamos uma rede real, onde páginas de internet estão conectadas entre si e uma possível representação dessa rede como rede complexa, onde as páginas são os vértices dessa rede e a conexão entre eles é dado pela arestas. O tamanho dos vértices é proporcional ao número de ligações que eles possuem. Esse é um dos inúmeros exemplos que podemos citar de representação de redes reais.

2.2 Definições

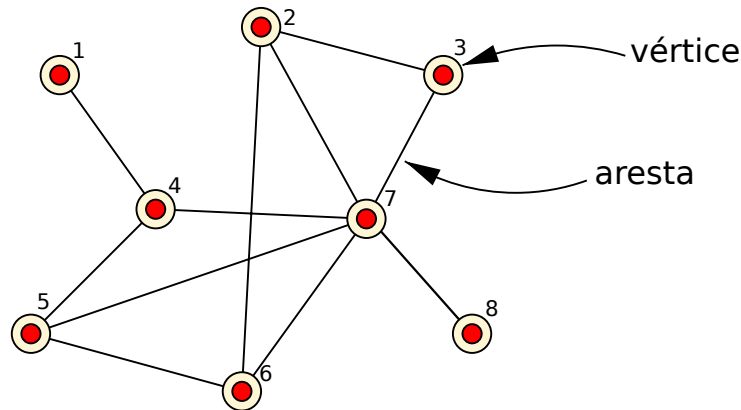
A representação matemática de redes complexas é dada por um *grafo*. Podemos definir grafo como um par de conjuntos $G(V, E)$, onde dado um conjunto V , finito, com N elementos, chamados vértices e sendo E uma relação entre os vértices do conjunto V , representando as arestas entre dois vértices. A Fig. (5) representa um grafo com 8 vértices e 11 arestas.

Na terminologia de redes, redes complexas são grafos com número muito grande de entes, onde chamamos os *vértices* de *nós* e as *arestas* de *ligações* (NEWMAN, 2010).

Definamos agora algumas propriedades e terminologias sobre redes que nos auxiliam a compreender os entes que formam redes:

- *Grafo*, é um ente matemático denominado por $G(V, E)$, onde V é um conjunto não vazio de objetos denominados vértices e E é um subconjunto de pares não ordenados de V , chamados arestas (CORMEN *et al.*, 2009). Podemos ainda definir grafos considerando a natureza de suas ligações. Um grafo é dito orientado se suas arestas tem sentido determinado, sempre há uma origem e um destino para cada aresta. Há também grafos não orientados, cujas as arestas não tem orientação, e a informação pode transitar em ambos os sentidos da rede. Por último, temos os grafos mistos, onde temos vértices V , arestas não direcionadas E , e arestas direcionadas A .

Figura 5 – Rede não orientada



Fonte – O próprio autor. Um exemplo de rede com oito vértices e onze ligações. Aqui os vértices são conectados por ligações não orientadas, de forma que podemos transitar entre um caminho formado por essas ligações em qualquer uma das direções.

- *Número de nós, N* , é a quantidade de componentes do sistema, chamado muitas das vezes por N , o tamanho da rede. Podemos nos referir aos nós pelo índice $i = 1, 2, \dots, N$.
- *Número de ligações, L* , representa a quantidade de ligações existentes entre os vértices da rede. Usaremos a notação $e(i, j)$ para denotar a ligação existente entre os vértices i e j .

2.2.1 Grau

Definimos o grau de um nó como o número de ligações conectadas ele. O grau não necessariamente é o número de nós adjacentes a ele, pois pode haver mais de uma ligação entre dois nós já ligados. Em um grafo orientado temos o grau de entrada e o grau de saída para cada vértice, que são o número de ligações que entram e saem, respectivamente sobre cada nó. Por exemplo, para uma rede não direcionada, Fig. (5), denotamos por k_i o grau do i -ésimo nó na rede, assim temos $k_1 = 1, k_2 = 3, k_3 = 2, k_4 = 3, k_5 = 3, k_6 = 3, k_7 = 6$ e $k_8 = 1$, logo em uma rede não direcionada o número de ligações é dado somando os graus de todos os nós

$$L_U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_i. \quad (2.1)$$

A soma é sobre os k_i logo a ligação entre i e j é contada duas vezes, sendo necessária a divisão por um fator $1/2$.

2.2.2 Grau Médio

Podemos definir também o grau médio, que para uma rede não direcionada pode ser escrito como

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i = \frac{2L}{N}, \quad (2.2)$$

onde usamos a Eq. (2.1). Como não distinguimos grau de entrada ou saída numa rede não direcionada, a Eq. (2.2), representa a conectividade média da rede. Para uma rede direcionada, onde temos o grau de entrada e de saída, k^{in} e k^{out} , o grau sobre cada vértice é dado por

$$k_i = k_i^{in} + k_i^{out}. \quad (2.3)$$

Tomemos também a quantidade de ligações sobre uma rede direcionada

$$L_D = \sum_{i=1}^N k_i^{in} = \sum_{i=1}^N k_i^{out}. \quad (2.4)$$

O termo $1/2$ da Eq. (2.1) não aparece aqui, pois contamos sobre cada vértice o grau de entrada e saída. Por último, os graus médios de uma rede direcionada são

$$\begin{aligned} \langle k^{in} \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i^{in} = \frac{L}{N}, \\ \langle k^{out} \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i^{out} = \frac{L}{N}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

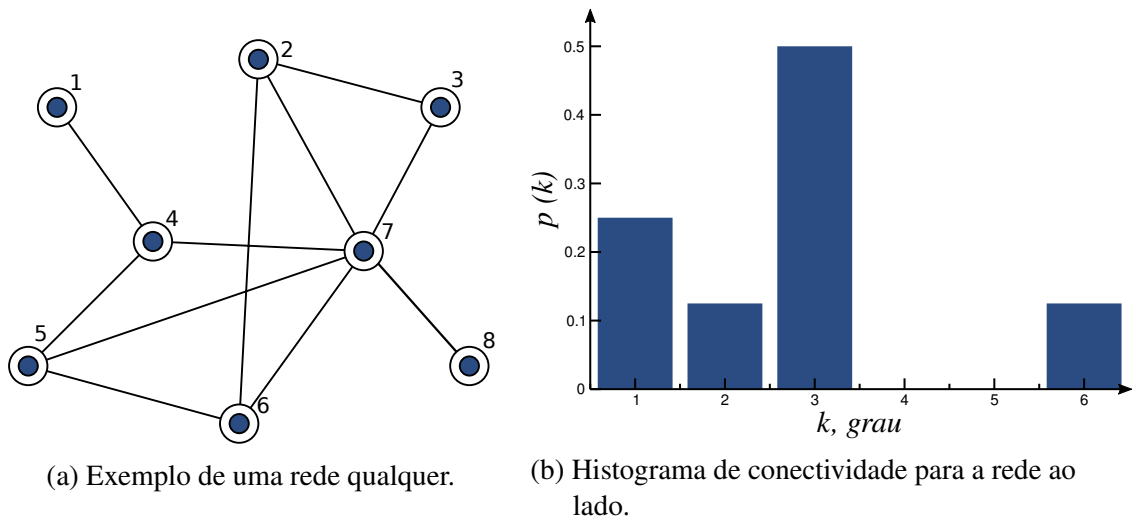
2.2.3 Distribuição de Conectividade

Uma das propriedades mais importantes sobre uma rede é a distribuição de conectividades, pois nos fornece a probabilidade de selecionarmos um nó aleatoriamente com grau k . Dada a distribuição do conectividade, podemos normalizá-la e termos a probabilidade p_k de selecionarmos o vértice de grau k .

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1. \quad (2.6)$$

Assim, para uma rede com 8 vértices apresentada na Fig. (6a), a distribuição de conectividade é o histograma dado pela Fig. (6b), que deve ser normalizada tomando $p_k = \frac{N_k}{N}$. Aqui, N_k é o número de nós com conectividade k .

Figura 6 – Distribuição de conectividade de uma rede



Fonte – O próprio autor. A Fig. (6a) mostra uma rede qualquer com $N = 8$ vértices. Na Fig. (6b), temos a distribuição de probabilidade para a conectividade. A probabilidade está normalizada. Por exemplo, a probabilidade de obtermos um vértice com grau $k = 3$ é $p(k) = 0.5$.

A distribuição de conectividade é uma das características principais de uma rede, visto que podemos tomar os momentos da distribuição, Eq. (2.7), e caracterizar a distribuição.

$$\langle k^m \rangle = \sum_{k=1}^N k^m p_k, \quad (2.7)$$

onde m representa os momentos sobre a distribuição. Mais a frente falaremos de Redes Aleatórias, Redes Livres de Escala onde a distribuição de conectividades que caracteriza essas redes possui um papel crucial para a compreensão dos processos que ocorrem nas mesmas.

2.2.4 Componente

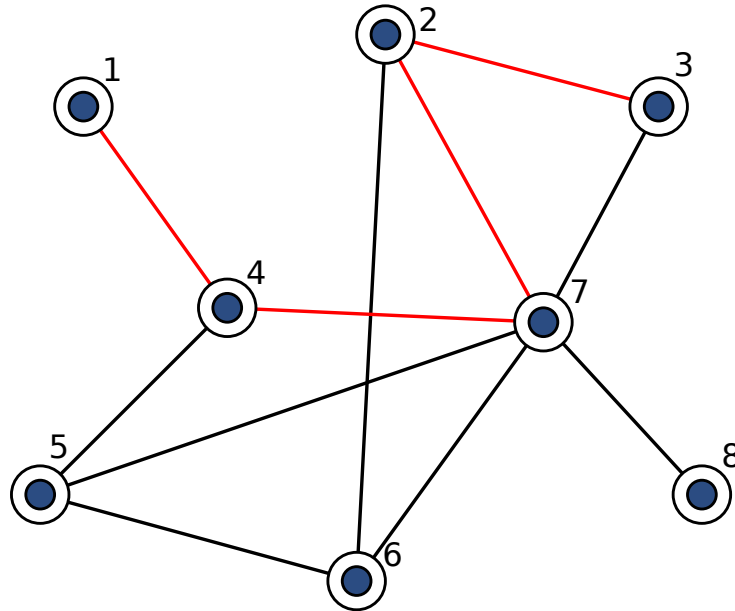
Podemos definir também o componente ao qual o vértice pertence, ou seja, o vértice pertence a um componente quando dado um conjunto de vértices podemos alcançar todos os demais vértices tomando caminhos que passem sobre as ligações da rede. Em uma rede se todos os nós estiverem conectados há apenas um componente, e nós referimos a esse como maior agregado. No entanto, pode haver mais de um componente em uma rede, mas na maiorias das vezes estamos interessados no maior agregado.

2.2.5 Caminho

Um caminho entre os vértices i_1 e i_n é um conjunto ordenado P de m ligações, dado por $P = \overbrace{\{(i_0, i_1), (i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{n-1}, i_n)\}}^m$. Para exemplificarmos, tomemos a Fig. (7), onde

está destacado o caminho entre os vértices i_1 e i_3 , dado pelas ligações $\{(i_1, i_4), (i_4, i_7), (i_7, i_2), (i_2, i_3)\}$, portanto o número de ligações para tal caminho é $m = 4$.

Figura 7 – Menor caminho entre os vértices i_1 e i_3



Fonte – O próprio autor. Um exemplo de rede qualquer com $N = 8$ vértices. Aqui observamos o menor caminho entre os vértices i_1 e i_3 . O menor caminho é aquele onde há o menor número de ligações entre os vértices i e j .

Definimos o menor caminho como o caminho onde há o menor número de ligações entre os vértices i e j . Na Fig. (7), o menor caminho está exemplificado pelo caminho $P_{1 \rightarrow 3} = \{(i_1, i_4), (i_4, i_7), (i_7, i_2), (i_2, i_3)\}$.

Matematicamente, denomina-se distância $\ell(i, j)$ de um grafo como sendo o comprimento do menor caminho entre os vértices i e j . Essa distância também é conhecida como distância geodésica (PEMMARAJU; SKIENA, 2003; ??), porque é o comprimento do grafo geodésico entre os dois vértices.

A distância entre dois vértices i e j é ℓ , se e somente se, existe um caminho de comprimento ℓ de i a j e nenhum caminho de i a j tem comprimento menor que ℓ . Se o vértice i não está no mesmo componente que o vértice j , então a distância entre esses dois vértices é definida como infinita.

2.2.6 *Mínimo Caminho Médio*

Definamos também o mínimo caminho médio, $\langle \ell \rangle$, que é uma medida global sobre a rede, definida como a média de todos os mínimos caminhos, ℓ_{ij} , sobre todos pares de vértices

$$\langle \ell \rangle = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i \geq j}^N \ell_{ij}, \quad (2.8)$$

onde ℓ_{ij} é mínimo caminho do vértice i ao vértice j . Nesse caso, nós incluímos a distância de cada vértice para ele mesmo, que é nulo, no cálculo da média. A Eq. (2.8) é medida apenas para pares de vértices que pertencem ao mesmo componente, para isso costumemente tomaremos sobre o maior componente da rede (??).

Para a rede exemplificada na Fig. (6a), tomemos a menor distância do vértice 1 para todos os outros vértices, depois do vértice 2 para todos os demais vértices, continuando assim até o vértice 8 sobre todos os demais vértices, após somamos essas distâncias e dividimos pelo número de caminhos.

$$\langle \ell \rangle = \frac{(\ell_{12} + \ell_{13} + \ell_{14} + \dots + \ell_{18}) + (\ell_{23} + \ell_{24} + \dots + \ell_{28}) \dots + \ell_{78}}{N_{\text{caminhos}}} = 1.75. \quad (2.9)$$

No caso desse exemplo, o valor $\langle \ell \rangle = 1.75$ nos diz que, em média, é possível acessar qualquer vértice partindo de um vértice qualquer, tomando aproximadamente 2 ligações de distância.

2.2.7 *Agregação e coeficiente de agregação*

A probabilidade de que dois vértices i e j estejam conectados entre si como também conectados a um outro vértice k é dada pela *agregação*. Para um vértice k com grau k_k a agregação é definida como (WATTS; STROGATZ, 1998)

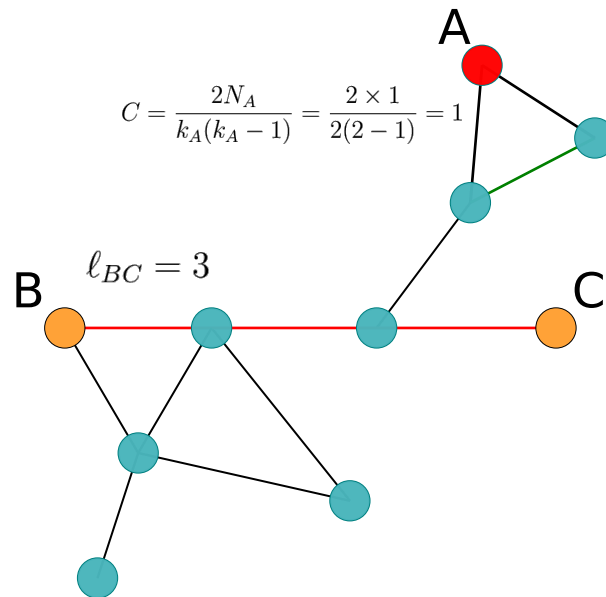
$$c_k = \frac{2N_k}{k_k(k_k - 1)}, \quad (2.10)$$

onde N_k representa o número de ligações existente entre os k_k vizinho do vértice k , e o termo $k_k(k_k)/2$ representa todas as possíveis ligações entre que podem existir conectando os vizinhos de k . Assim, a agregação é uma medida local sobre a densidade das ligações, vértices com maior agregação são os vértices mais conectados da rede.

Uma medida da agregação sobre toda a rede é dada tomando a média da agregação sobre todos os vértices k

$$C = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=N} c_k, \quad (2.11)$$

Figura 8 – Exemplo de coeficiente de agregação e mínimo caminho médio



Fonte – O próprio autor. Coeficiente de agregação local e mínimo caminho entre os vértices A e C.

onde C é definido como sendo o *coeficiente de agregação*. Nesse caso, C , representa a probabilidade de que dois vértices vizinhos estejam ligados a um outro vértice escolhido de forma aleatória.

2.3 Modelo de Redes Aleatórias de Erdős-Rényi

O estudo de redes é uma ciência que busca construir modelos que reproduzam as propriedades de redes reais (BARABÁSI, 2016). Muitas das redes reais que encontramos não são regulares, como uma rede cristalográfica, onde os vértices seriam os átomos dispostos de forma regular. O que encontramos muitas das vezes são Redes Livre de Escala, onde alguns vértices possuem maior conectividade que os demais, por exemplo.

Redes aleatórias, podem ser o modelo mais útil e simples para exemplificar comportamento de redes reais. Os pioneiros no estudo dessas redes foram Anatol Rapoport (RAPOPORT, 1948), Ray Solomonoff (SOLOMONOFF; RAPOPORT, 1951), Paul Erdős e Alfréd Rényi (ERDÖS; RÉNYI, 1959; ERDÖS; RÉNYI, 1960; ERDÖS; RÉNYI, 1964), que descreveram esse modelo no qual uma rede não direcionada, tinha suas ligações dispostas de forma aleatória entre N vértices, criando uma rede no qual cada uma das $\frac{1}{2}N(N - 1)$ possíveis ligações são independentemente alocadas com alguma probabilidade p . A principal característica do modelo

é sua distribuição de conectividade, é regida de acordo com a Distribuição Binomial,

$$p(k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}. \quad (2.12)$$

A Eq. (2.12), tende a uma distribuição de Poisson quando o número de vértice torna-se muito grande, $N \rightarrow \infty$, isto é,

$$p(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}. \quad (2.13)$$

Podemos tomar o mínimo caminho médio $\langle \ell \rangle$ sobre redes aleatórias, essa propriedade nos fornece uma forma de caracterizar difusão. Observemos que partindo de um vértice inicial teremos $\langle k \rangle$ vértices a uma distância $\ell = 1$, a um distância $\ell = 2$ teremos $\langle k \rangle^2$ vértices, de forma que a uma distância $\ell = l$ teremos $\langle k \rangle^l$ vértices. Assim, tomemos o número esperado de vértices a uma distância ℓ de um vértice inicial,

$$N(\ell) \approx 1 + \langle k \rangle + \langle k \rangle^2 + \langle k \rangle^3 \dots \langle k \rangle^\ell = \frac{\langle k \rangle^{\ell+1}}{\langle k \rangle - 1}. \quad (2.14)$$

Sabendo que $N(\ell)$ não deve exceder o tamanho da rede, devemos aproximar $N(\ell_{max}) \approx N$ pelo tamanho da rede. Assim se consideramos a conectividade média tendendo à um valor infinito, $\langle k \rangle \gg 1$, podemos negligenciar o denominador da Eq. (2.14) e aproximar por

$$\langle k \rangle^{\ell_{max}} \approx N \Rightarrow \ell_{max} \approx \frac{\ln(N)}{\ln(\langle k \rangle)}. \quad (2.15)$$

Como $\langle \ell \rangle$ é a média sobre ℓ , podemos aproximar por

$$\langle \ell \rangle \approx \frac{\ln(N)}{\ln(\langle k \rangle)}. \quad (2.16)$$

Concluimos que o mínimo caminho médio $\langle \ell \rangle$ cresce com o logaritmo do tamanho da rede N . Em redes reais, as ligações não são aleatórias, o tamanho da rede não necessariamente cresce com o $\ln(N)$, alguns nós terão maior número de ligações e novos nós que forem adicionados a rede tem probabilidade maior de se conectar a eles, esse fenômeno é conhecido como contato preferencial, do inglês *preferential attachment*, usado para explicar o surgimento de Redes Livre de Escala (BARABÁSI; ALBERT, 1999).

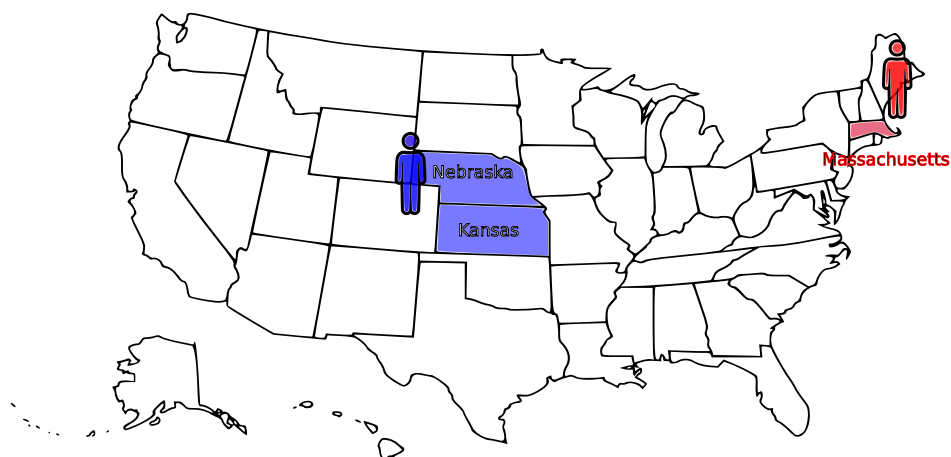
2.4 Mundo Pequeno ou *Small World*

No estudo de redes reais, o psicólogo Stanley Milgram (MILGRAM, 1967), em 1967, se propôs a estudar Redes Sociais. Uma rede social é um conjunto de pessoas ou grupos de

peças com alguma ligação entre si, alguma interação (SCOTT, 2012). Alguns exemplos que podemos citar são a cadeia de amizade entre pessoas (MORENO, 1934), relações de negócios entre empresas, casamento entre famílias, dentre outros.

Analisando Redes Sociais, Milgram, desenvolveu seu experimento chamado de Mundo Pequeno, do inglês *small-world*. Os experimentos analisaram a distribuição dos comprimentos do caminhos em uma rede, pedindo aos participantes que passassem uma carta adiante enviando para seus conhecidos mais próximos até que chegasse ao destino proposto por Milgram. Muitas das cartas foram perdidas, no entanto, um quarto delas chegaram ao destino. O destino era um amigo de Milgram, que era corretor de ações na cidade de Massachusetts, nos Estados Unidos. Os participantes eram escolhidos de forma aleatória e tinha como missão enviar o pacote para algum conhecido mais próximo com maior probabilidade de conhecer o destinatário. A pessoa que recebesse o pacote e conhecesse o destinatário deveria enviá-lo diretamente. Assim o nome de cada pessoa ao qual o pacote esteve em posse era anotada no pacote até que o pacote chegasse ao seu destinatário.

Figura 9 – Representação do experimento de Milgram sobre os estados de Nebraska, Kansas e Massachusetts

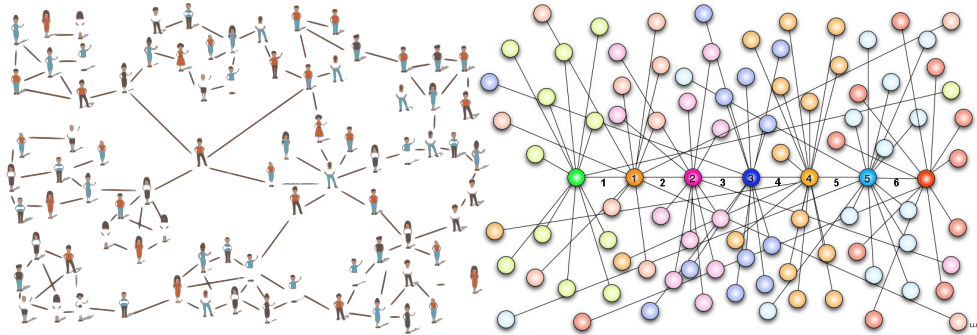


Fonte – O próprio autor. Mapa dos Estados Unidos da América, em destaque as cidades os estados de Nebraska, Kansas e Massachusetts. Milgram enviou 160 pacotes para pessoas escolhidas aleatoriamente da lista telefônica das cidades norte-americanas de Omaha em Nebraska e Wichita em Kansas, todos os pacotes tinham como destino final um amigo de Milgram que era corretor de ações em Massachusetts.

Como resultado, Milgram obteve que em média o número de indivíduos requeridos para levar o pacote ao seu destino era $\langle \ell \rangle = 5,5$, indicando que o pacote deveria passar aproximadamente por seis pessoas e chegar ao destinatário, ou seja, o mínimo caminho médio, $\langle \ell \rangle \approx 6$. Na Fig. (10), temos uma representação de uma rede social, Milgram concluiu que em redes reais

a distância entre os indivíduos é pequena.

Figura 10 – Exemplo de rede social e o conceito dos seis graus de separação.



Fonte – Adaptado de (WALKER, 2014). Representação de uma rede social juntamente com o resultado obtido por Milgram. Observamos que em redes reais a distância entre os indivíduos é pequena.

Mais tarde originou-se o termo *seis graus de separação*, não denominado diretamente por Milgram, mas popularizado, pelo conceito que em média são necessárias apenas seis ligações para se chegar à alguém no mundo, no caso da rede social o mundo é pequeno.

2.5 Modelo de Watts-Strogatz

No estudo de redes reais, muitas redes não apresentam características de Redes Aleatórias. Podemos facilmente mostrar que o coeficiente de agregação de Redes Aleatórias é dado pela probabilidade de dois vértices escolhidos aleatoriamente estarem conectados, portanto o coeficiente de agregação de uma rede aleatória

$$C_{aleatoria} = p \approx \frac{\langle k \rangle}{N}, \quad (2.17)$$

pois para Redes Aleatórias $\langle k \rangle \simeq pN$. Dessa forma o coeficiente de agregação depende do tamanho da rede, o que difere de muitas redes reais, onde é visto que o coeficiente de agregação é independente da rede.

A Tab. (1) mostra exemplos de redes reais que apresentam características de mundo pequeno, pois apresentam mínimo caminho médio $\langle \ell \rangle$ pequeno aproximadamente com logaritmo do tamanho da rede. O que se observa é que redes reais possuem um alto coeficiente de agregação comparada a Redes Aleatórias, logo não podemos descrever redes reais por essas redes.

Na tentativa de criar um modelo onde uma rede apresentasse mínimo caminho médio $\langle \ell \rangle$ pequeno, para evidenciar o experimento de Milgram, como também produzir um coeficiente

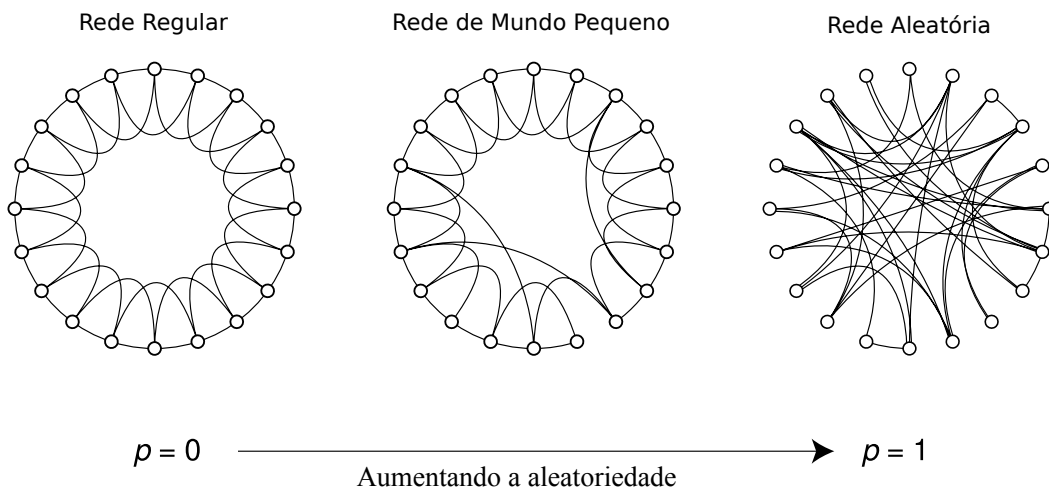
Tabela 1 – Exemplos empíricos de Redes de Pequeno Mundo

	$\langle \ell \rangle$	$\langle \ell_{aleatoria} \rangle$	C	$C_{aleatoria}$
<i>Atores de filmes</i>	3.65	2.99	0.79	0,00027
<i>Rede de distribuição de energia elétrica</i>	18.7	12.4	0.080	0.005
<i>Caenorhabditis elegans</i>	2.65	2.25	0.28	0.05

Fonte – Adaptado de (WATTS; STROGATZ, 1998). Mínimo caminho médio característico $\langle \ell \rangle$ e coeficiente de agregação C para três redes reais, comparando com redes aleatórias como o mesmo número de vértices N e o número médio de ligações por vértices $\langle k \rangle$. A rede de *Atores de filmes* com $N = 225.226$ vértices e $\langle k \rangle = 61$. A *Rede de distribuição de energia elétrica* $N = 4941$ vértices e $\langle k \rangle = 2.67$. E a rede neural de uma *Caenorhabditis elegans* com $N = 282$ vértices e $\langle k \rangle = 14$. Todas as três redes mencionadas mostram o fenômeno de mundo pequeno, onde o $\langle \ell \rangle \gtrsim \langle \ell_{aleatoria} \rangle$, no entanto, o coeficiente de agregação é muito maior que os das redes aleatórias, $C \gg C_{aleatoria}$.

de agregação alto que pudesse representar redes reais, Duncan J. Watts e Steven H. Strogatz (WATTS; STROGATZ, 1998), propuseram um modelo de rede que explicasse o que aconteceria se incluíssemos aleatoriedade sobre uma rede regular. Uma rede regular é aquela onde cada vértice contém grau igual a todos os demais vértices. O modelo consistia em partir de uma rede regular e a partir dela reordenar as ligações que já haviam sido conectadas de forma aleatória com outros vértices variando um parâmetro p que controlava a realocação. Esse foi o primeiro modelo de redes de mundo pequeno.

Figura 11 – Reorganização aleatórias das ligações, saímos de uma rede regular e alcançamos uma rede quase aleatória.

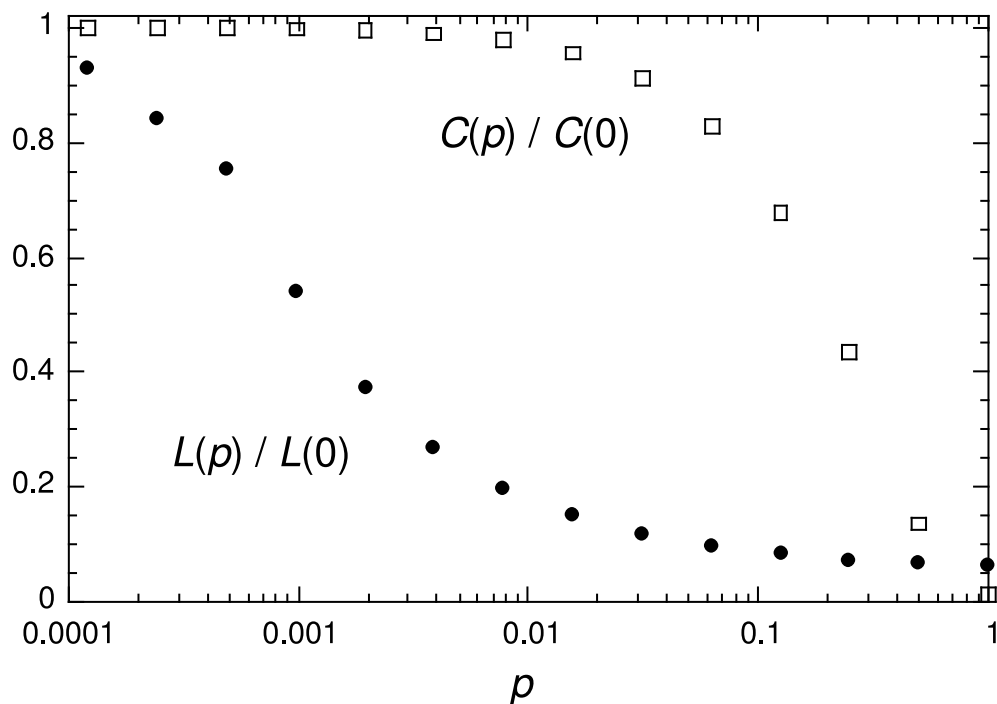


Fonte – Baseado em (WATTS; STROGATZ, 1998). Na figura é mostrado o mecanismo usado por Watts e Strogatz para gerar redes aleatórias partindo de redes regulares. Não há alteração número de vértices apenas no grau de cada vértice quando aumentamos o parâmetro q . Na figura, o tamanho da rede é $N = 20$ e inicialmente todos os vértices estão conectados aos seus vizinho mais próximos, e aos vizinhos do vizinhos mais próximos, $k = 4$. Quando aumentamos a probabilidade p as ligações são rearranjadas de forma que não são permitidas ligações repetidas. Continuamos aumentando a probabilidade de rearranjar as ligações e observamos uma transição de uma rede regular, transitando por redes de pequeno mundo, até alcançarmos o limite onde as ligações são aleatórias, características de rede aleatórias.

Nesse modelo, tomamos inicialmente uma rede regular com N vértices e m ligações, Fig. (11), a rede regular tem probabilidade $p = 0$, ou seja suas ligações não foram realocadas. Em seguida aumentamos essa probabilidade, nesse caso é a probabilidade de realocarmos uma ligação a outro vértice aleatoriamente. Ao continuarmos aumentando o probabilidade de realocação, a rede se comporta como uma rede de Mundo Pequeno, pois o mínimo caminho médio $\langle \ell \rangle$ apresenta valores pequenos e alto coeficiente de agregação. Quando alcançamos a probabilidade máxima a rede se torna completamente aleatória, rede de Erdős-Rényi, apresenta baixo mínimo caminho médio $\langle \ell \rangle$ como também baixo coeficiente de agregação, que são características dessas redes.

Os resultados obtidos por Watts e Strogatz, Fig. (12), demonstraram que existe uma região entre esses dois extremos de configurações de rede, no qual o modelo teria alta transitividade, ou seja o coeficiente de agregação alto, e baixo mínimo caminho médio.

Figura 12 – Mínimo caminho e coeficiente de agregação variando a probabilidade de reorganização das ligações.



Fonte – (WATTS; STROGATZ, 1998). Aqui está demonstrado o resultado obtido por Watts-Strogatz, nele variando a probabilidade de reorganização das ligações, transitamos entre uma rede regular, uma rede de mundo pequeno, e quando $p = 1$, obtemos uma rede semelhante a uma rede aleatória. Numa rede regular, o coeficiente de agregação é alto, no entanto o mínimo caminho médio é alto, então ao variarmos a probabilidade p existe uma rede que apresenta coeficiente de agregação alto e baixo mínimo caminho médio, sendo essa uma das características das redes de mundo pequeno. Por último quando a probabilidade é máxima obtemos uma rede semelhante a uma rede aleatória.

Por fim, Watts e Strogatz concluem que quando algumas ligações aleatórias são estabelecidas, nesse caso variando a probabilidade de reorganização das ligações, transitamos entre uma rede regular, uma rede de mundo pequeno, e quando $p = 1$, obtemos uma rede semelhante a uma rede aleatória. Uma das características de redes regulares que é o seu coeficiente de agregação é alto e o mínimo caminho médio é alto. Logo ao variarmos a probabilidade p existe uma rede que apresenta coeficiente de agregação alto e baixo mínimo caminho médio, sendo essa uma das características das redes de mundo pequeno. Por último quando a probabilidade é máxima, o sistema apresenta características de redes aleatórias descrita por Erdős e Rényi, onde o coeficiente de agregação e mínimo caminho médio é baixo.

2.6 Modelo de Barabási-Albert

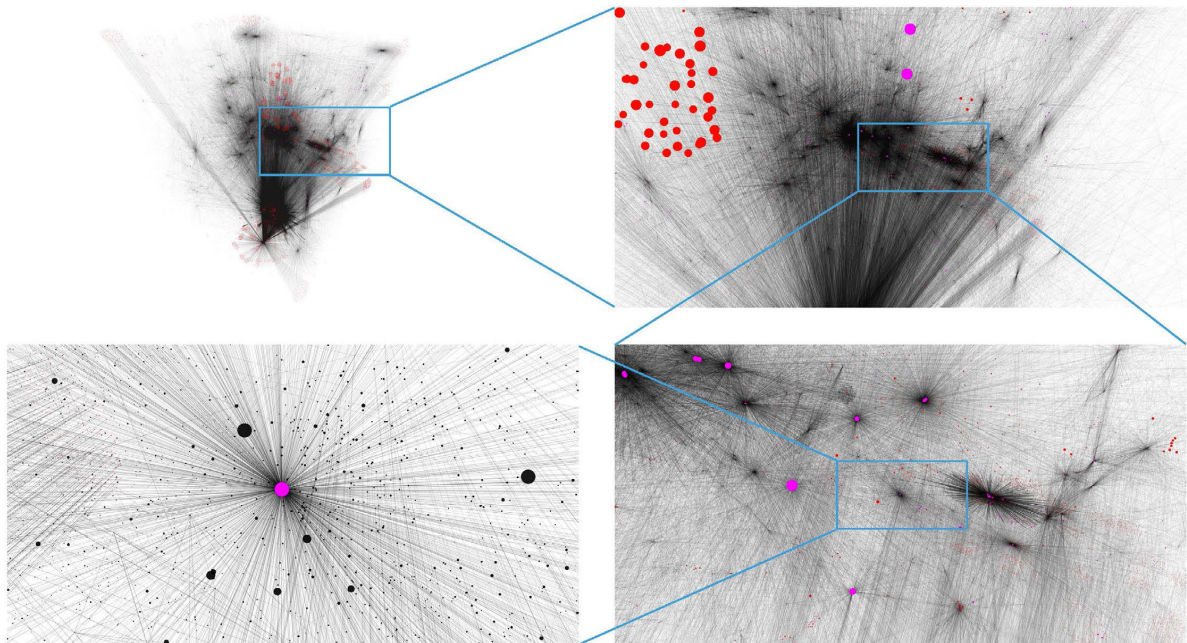
Watts e Strogatz criaram um modelo capaz de gerar redes de mundo pequeno, na tentativa de explicar redes reais, como por exemplo, as redes sociais. No entanto, quando olhamos para a distribuição de conectividade muitas redes reais apresentam características que não são representadas por redes aleatórias, onde a distribuição de conectividade é dada por uma Distribuição de Binomial, existindo uma dependência com o tamanho da rede. Redes reais, na maioria dos casos, possuem distribuição de conectividade dada por uma lei de potência, da forma, $P(k) \sim k^{-\gamma}$, sendo chamadas de Redes Livre de Escala, pois a distribuição de conectividade não depende do tamanho da rede.

No estudo de redes reais, nesse caso a rede de páginas de internet, Albert-László Barabási e Réka Albert mapearam o domínio *nd.edu*, que corresponderia a uma sub-rede da Universidade de Notre Dame, consistindo de trezentos mil documentos, $N = 300.000$ e um milhão e meio de ligações, $m = 1.500.000$, Fig. (13). Inicialmente, propôs-se estudar como essa rede se comportaria se fosse um rede aleatória.

Então, ao analisar-se a distribuição de conectividade do domínio *nd.edu*, correspondente a uma sub-rede da Universidade de Notre Dame, esperava-se que a distribuição de conectividade fosse uma Distribuição de Poisson, pois a esperaria que a rede tivesse características de redes aleatória, no entanto, o que se observou foi uma distribuição de conectividade que se comportava como uma lei de potência, sugerindo que a distribuição fosse dada por

$$\begin{aligned} p(k_{in}) &\sim k_{in}^{-\gamma_{in}}. \\ p(k_{out}) &\sim k_{out}^{-\gamma_{out}}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Figura 13 – A topologia do domínio *nd.edu*, correspondente a uma sub-rede da Universidade de Notre Dame.



Fonte – (BARABÁSI, 2016). Capturas de imagens para o mapeamento da WWW, mapeada por Hawoong Jeong. Aqui podemos observar as características dessa topologia, na primeira figura, observamos toda a rede com 325.729 nós. À direita, temos uma aproximação que mostra nós cuja a conectividade está acima de 50 ligações, os nós em vermelho, e com conectividade acima de 500 ligações os em roxo. Na última figura observamos pequenos aglomerados de nós altamente conectados, que são conhecidos como *hubs*.

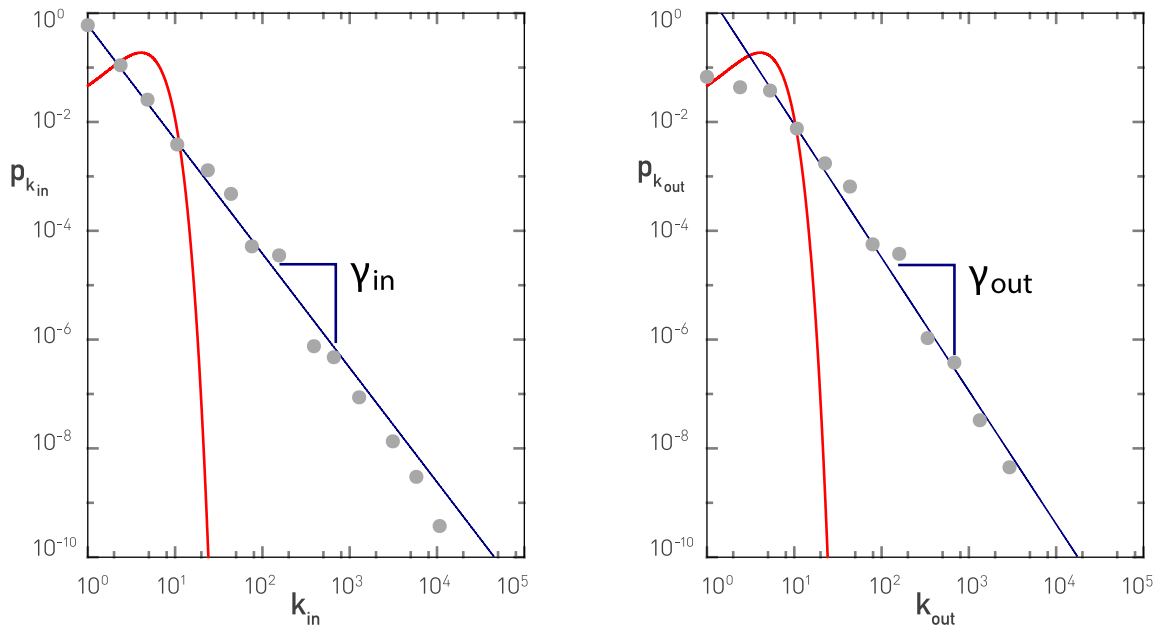
A Eq. (2.18), é conhecida como distribuição em lei de potência, de forma que se tomarmos o logaritmo, obtemos

$$\log p(k) \sim -\gamma \log k, \quad (2.19)$$

onde γ representa a inclinação da reta numa escala logarítmica.

A distribuição de conectividades mostrada na Fig. (14), denota toda uma classe de redes chamadas de Redes Livres de Escala, pois a distribuição de conectividade é independente do tamanho da rede, em outras palavras independente da escala. A principal diferença entre redes aleatórias e redes livres de escalas se dá quando olhamos a cauda da distribuição, pois é lá que temos os nós com maiores conectividades.

Figura 14 – Distribuição de conectividade do domínio *nd.edu*, correspondente a uma sub-rede da Universidade de Notre Dame.

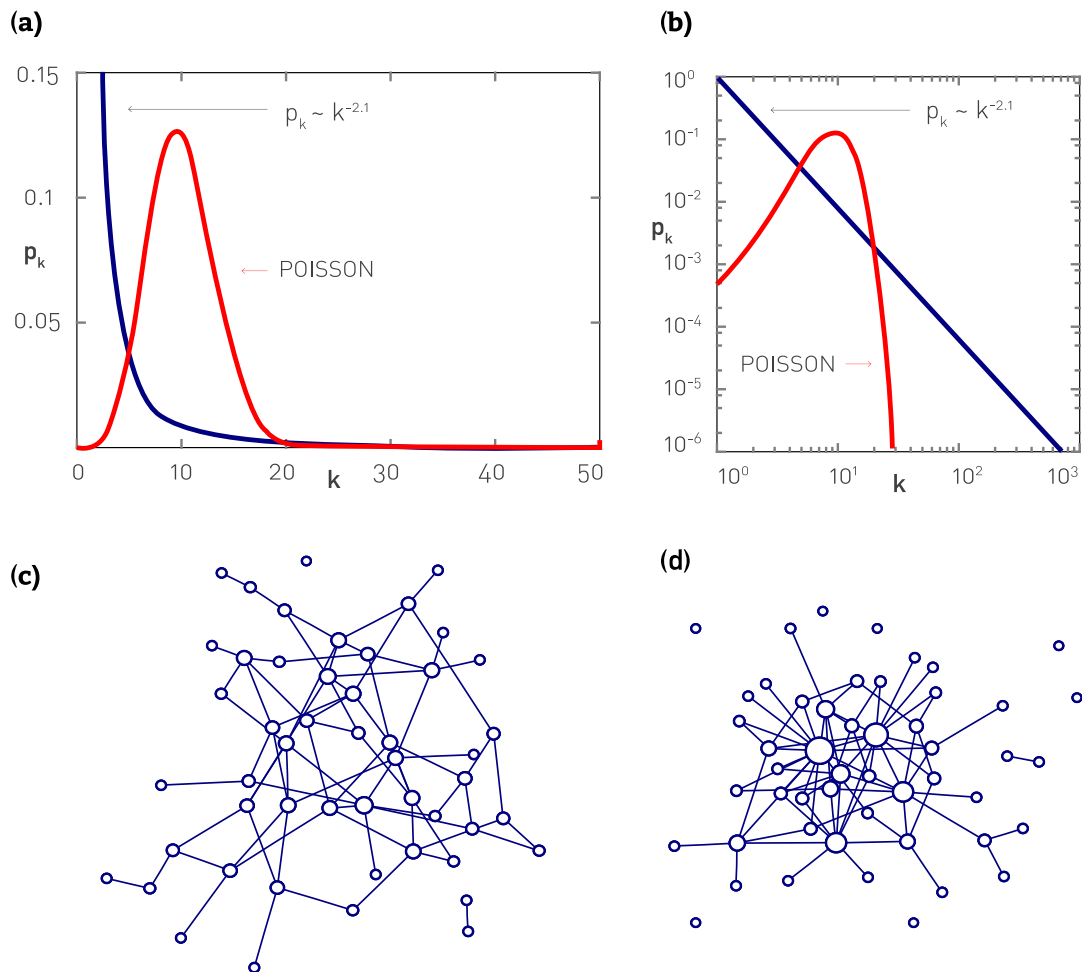


Fonte – (BARABÁSI, 2016). A distribuição de conectividades da WWW. As figuras mostram a distribuição de conectividades para entrada, $p(k_{in})$, e de saída $p(k_{out})$. As figuras estão em escala logarítmica na qual segue uma lei de potência com inclinação de entrada γ_{in} e de saída γ_{out} . A reta que ajusta os dados experimentais tem inclinação e entrada $\gamma_{in} = 2.1$ e de saída $\gamma_{out} = 2.45$. A linha vermelha corresponde a uma curva dada pela distribuição de Poisson que tenta ajustar os dados da WWW com grau médio de entrada, $\langle k_{in} \rangle = \langle k_{out} \rangle = 4.60$.

Na Fig. (15a) comparamos a distribuição de Poisson e Lei de Potência, aqui observamos que quando o grau, k , é baixo, a distribuição de Poisson contém poucos vértices com grau baixo, enquanto a distribuição de Lei de Potência possui muito mais vértices. Quando analisamos próximo a média da distribuição de Poisson, observamos muitos nós com grau parecido, $\langle k \rangle = 10$, enquanto para a distribuição de Lei de Potência temos poucos vértices com grau alto. Quando analisamos valores maiores de k , a cauda da distribuição, Fig. (15b), onde a probabilidade de encontramos vértices com grau alto é bem maior na distribuição de Lei de Potência.

Assim, em 1999, Albert-László Barabási e Réka Albert (BARABÁSI; ALBERT, 1999), demonstraram que algumas redes reais não seguem uma distribuição de Poisson, ou seja, as redes reais não são redes aleatórias. Deste modo, Albert e Barabási intuíram que deve existir um mecanismo onde o vértice que possui maior grau tem mais chance de se conectar aos demais vértices, esses vértices foram denominados *hubs*. A esse comportamento de vértices que possuem mais ligações se conectarem com maior probabilidade, se deu o nome de contato preferencial, do inglês *preferential attachment*, como tentativa de explicar que vértices com maior grau tem uma probabilidade maior de se conectar do que os demais.

Figura 15 – Comparação entre a distribuição de Poisson e Lei de Potência para o domínio *nd.edu*, correspondente a uma sub-rede da Universidade de Notre Dame.



Fonte – (BARABÁSI, 2016). (a) Comparação entre a distribuição de Poisson e Lei de Potência para $\gamma = 2.1$, ambas as distribuições tem conectividade média $\langle k \rangle = 11$. (b) Para evidenciarmos as características entre as duas distribuições, observamos as duas distribuições na escala logarítmica. Aqui fica evidenciado o aparecimento de vértices com conectividade alta, denominados *hubs*. (c) Exemplificação de uma rede aleatória com $N = 50$, e conectividade média $\langle k \rangle = 3$. (d) Uma rede livre de escala, onde exibe-se a coexistência de nós com baixa conectividade e nós com altas conectividade, *hubs*, esses nós estão evidenciados pelo seu tamanho maior em relação ao demais nós.

2.6.1 Características das redes livre de escala

Ao analisarmos o comportamento de redes livre de escala, nos perguntamos sobre o aparecimento dos *hubs* e como eles afetam as características da rede. Se analisarmos a distância, nesse caso o mínimo caminho médio, redes livres de escala tem distâncias menores que redes aleatórias (BARABÁSI; ALBERT, 1999).

A dependência do mínimo caminho médio, $\langle \ell \rangle$ em um rede de tamanho N e expoente de conectividade γ são dados agora pela dependência do tamanho do sistema como também pelo expoente γ (COHEN; HAVLIN, 2003; BOLLOBÁS; RIORDAN, 2004)

$$\langle \ell \rangle \sim \begin{cases} \text{independente de escala,} & \gamma = 2; \\ \ln \ln N, & 2 < \gamma < 3; \\ \frac{\ln N}{\ln \ln N}, & \gamma = 3; \\ \ln N, & \gamma > 3. \end{cases} \quad (2.20)$$

Onde γ é o expoente da distribuição de conectividades das redes livres de escala, dada por

$$p(k) = Ck^{-\gamma}. \quad (2.21)$$

Podemos tomar a condição de normalização e determinar C , como

$$\int_{k_{min}}^{\infty} p(k)dk = 1 \implies C = \frac{1}{\int_{k_{min}}^{\infty} k^{-\gamma}dk} = (\gamma - 1)k_{min}^{\gamma-1} \quad (2.22)$$

Portanto, a distribuição de redes livres de escala normalizada é dada por

$$p(k) = (\gamma - 1)k_{min}^{\gamma-1}k^{-\gamma}. \quad (2.23)$$

Para calcularmos k_{max} , lembremos que deve existir pelo menos um vértice com grau k_{max} em uma rede de N vértices. Ou seja, a probabilidade de obtermos um vértices com grau que excede k_{max} é (DOROGOVTSEV; MENDES, 2002)

$$\int_{k_{max}}^{\infty} p(k)dk = \frac{1}{N}. \quad (2.24)$$

Para redes livre de escala, podemos calcular como se comporta o número máximo de ligações em função do tamanho do sistema,

$$\begin{aligned} \int_{k_{max}}^{\infty} p(k)dk &= (\gamma - 1)k_{min}^{\gamma-1} \int_{k_{max}}^{\infty} k^{-\gamma}dk = \frac{1}{N} \\ &= (\gamma - 1)k_{min}^{\gamma-1} \frac{k^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} \Big|_{k_{max}}^{\infty} = (\gamma - 1)k_{min}^{\gamma-1} \frac{-k_{max}^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} = \frac{1}{N} \implies \\ &\implies k_{min}^{\gamma-1}N = k_{max}^{\gamma-1}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

logo,

$$k_{max} = k_{min}N^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (2.26)$$

Onde k_{max} é conhecido como limite natural da rede (BOGUÑÁ *et al.*, 2004).

Da Eq. (2.20), quando $\gamma = 2$, o primeiro regime diz que o maior *hub*, possui $k_{max} \sim N$, da Eq. (2.26). Assim todos os nós estão conectados a um *hub* central, com isso o mínimo caminho médio torna-se independente do tamanho do sistema, pois quanto mais o sistema cresce, o mínimo caminho continua constante pois o *hub* agrega os novos vértices a ele.

Quando $2 < \gamma < 3$, entramos em um regime denominado *mundo ultra pequeno*, pois os *hubs* estão fortemente conectados de forma que o mínimo caminho médio cresce na forma $\langle \ell \rangle \sim \ln \ln N$. Esse comportamento foi descrito por Reuven Cohen e Shlomo Havlin (COHEN; HAVLIN, 2003), onde é descrito que redes livres de escala se comportam como redes mundo ultra pequeno quando $2 < \gamma < 3$.

Existe um ponto crítico quando $\gamma = 3$, é aqui que as redes livres de escala começam a se comportar como redes de pequeno mundo por um fator de correção $\ln \ln N$ (COHEN; HAVLIN, 2003; COHEN; HAVLIN, 2010). Quando $\gamma > 3$, redes livre de escala se comportam como redes aleatórias com mínimo caminho médio dado por $\langle l \rangle \sim \ln N$ que é uma característica de redes aleatórias.

Podemos calcular o n -ésimo momento da distribuição de conectividade definida como

$$\begin{aligned} \langle k^n \rangle &= \sum_{k_{min}}^{k_{max}} k^n p_k \approx \int_{k_{min}}^{k_{max}} k^n p(k) dk = C \frac{k_{max}^{n-\gamma+1} - k_{min}^{n-\gamma+1}}{n-\gamma+1} = (\gamma-1) k_{min}^{\gamma-1} \frac{k_{max}^{n-\gamma+1} - k_{min}^{n-\gamma+1}}{n-\gamma+1} \\ &= (\gamma-1) k_{min}^{\gamma-1} \frac{(k_{min} N^{\frac{1}{\gamma-1}})^{n-\gamma+1} - k_{min}^{n-\gamma+1}}{n-\gamma+1} = \frac{(\gamma-1)}{n-\gamma+1} \left[(k_{min}^{\gamma} N^{\frac{1}{\gamma-1}})^{n-\gamma+1} - k_{min}^n \right]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Assim, podemos observar como os momentos da distribuições escalam com o tamanho do sistema e juntamente com o expoente γ . Mais a frente iremos apresentar um método onde é possível construirmos redes baseado na distribuição de conectividade.

2.6.2 Redes livre de escala e Mecânica Estatística não-extensiva

Constantino Tsallis (TSALLIS, 2008) estudou a conexão entre redes livre de escala e Mecânica Estatística não-extensiva. Redes livre de escala são redes cuja distribuição de conectividade segue uma lei de potência, que em sua forma mais geral pode ser escrita como

$$p(k) \propto \frac{1}{(k_0 + k)^\gamma}. \quad (2.28)$$

com $\gamma > 0$ e $k_0 > 0$, onde k é a conectividade de cada vértice. Com uma pequena mudança de variáveis,

$$\gamma = \frac{1}{q-1}, \quad k_0 = \frac{\kappa}{q-1}, \quad (2.29)$$

rescrevemos a Eq. (2.28) da forma

$$p(k) \propto e_q^{-k/\kappa}. \quad (2.30)$$

onde e_q é a *função q-exponencial*, definida como sendo

$$e_q^x = [1 + (1-q)x]^{1/(1-q)}, \quad (2.31)$$

se $1 + (1-q)x > 0$, senão a função é nula. No limite onde N , o tamanho do sistema, é muito grande, a forma polinomial coincide com a q-Exponencial, $p(k) \propto \exp_q(-k/\kappa)$ ($q > 1$ e $\kappa > 0$). Nesse limite, γ pode ser aproximado por $\gamma = 1/(q-1)$ e $k_0 = \kappa/(q-1)$.

Baseado na Eq. (2.30), Tsallis (TSALLIS, 2008) propôs que a forma mais geral da distribuição de conectividade de uma rede livre de escala é uma distribuição proposta dentro *q-generalização* da Mecânica Estatística de Boltzmann-Gibbs.

Uma primeira ilustração que podemos tomar é o Modelo de Barabasi-Albert para redes livres de escala. Nesse modelo existe o crescimento da rede como também o efeito de contato preferencial, que são características de redes reais. Para criarmos a rede tomamos inicialmente m_0 nós, e os ligamos aleatoriamente, de forma que haja no mínimo uma ligação para cada nó. Então a cada passo de tempo adicionamos um novo nó, com m ligações, $m \leq m_0$, onde essas ligações irão conectar o novo nó ao nós já existentes.

A probabilidade, $\prod(k_i)$, de um novo nó se conectar a um nó i que já existe na rede com grau k_i é dado por

$$\prod(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}. \quad (2.32)$$

Esse é o mecanismo de contato preferencial, pois um nó com maior conectividade implica que existe uma maior probabilidade de um novo nó se ligar a ele. Assim depois de t passos de tempo, temos uma rede de tamanho $N = t + m_0$ nós, com $M = m_0 + mt$ ligações totais. Esse modelo proposto por Barabasi e Albert, (BARABÁSI; ALBERT, 1999), é bem sucedido na tarefa de produzir redes onde *hubs* estão presentes, e estes por sua vez são uma assinatura das redes livre de escala.

Para exemplificar, Tsallis, propõe um modelo onde em cada passo de tempo, m novas ligações são adicionadas com probabilidade p , ou m ligações já existentes são reorganizadas com probabilidade r , ou um novo nó, com m ligações, é adicionado a rede com probabilidade $1 - p - r$. Assim todas as ligações são feitas com probabilidade

$$\prod(k_i) = \frac{(k_i + 1)}{\sum_j (k_j + 1)}, \quad (2.33)$$

onde k_i é o número de ligações do nó i . O estado estacionário da distribuição das k ligações em cada nó pode ser escrita como

$$p(k) \propto e_q^{-k/\kappa}, \quad (2.34)$$

com q dado por

$$q = \frac{2m(2-r) + 1 - p - r}{m(3-2r) + 1 - p - r} \geq 1, \quad (2.35)$$

e $\kappa = k_0(q - 1)$, e k_0 dado por

$$k_0 = 1 + (p - r) \left[1 + \frac{2m(1-r)}{1-p-r} \right] > 1. \quad (2.36)$$

A Eq. (2.34) fornece bons ajustes para os modelos de rede proposto por Tsallis (SOARES *et al.*, 2005; THURNER, 2005; TSALLIS, 2008) para diferentes valores de q . Nesses modelos ele tenta criar redes livre de escala mostrando que não somente o modelo de Barabasi-Albert gera esse tipo de rede.

Nos propusemos a estudar o que acontece se gerarmos uma rede a partir da distribuição q -Exponencial diretamente. Será que a distribuição por si só gera *hubs*? Quais as características que essa rede apresenta? No próximo capítulo, estudaremos essas redes tomando algumas propriedades de redes que discutimos até então.

2.7 Redes aleatórias com distribuições arbitrárias de conectividade

2.7.1 Modelo de Configurações

Redes reais, na maior parte dos casos, possuem distribuição de conectividade diferente da Distribuição de Poisson que representa redes aleatórias. Na tentativa de gerarmos redes com distribuições de conectividade arbitrárias, $p(k)$, estudaremos o Modelo de Configurações.

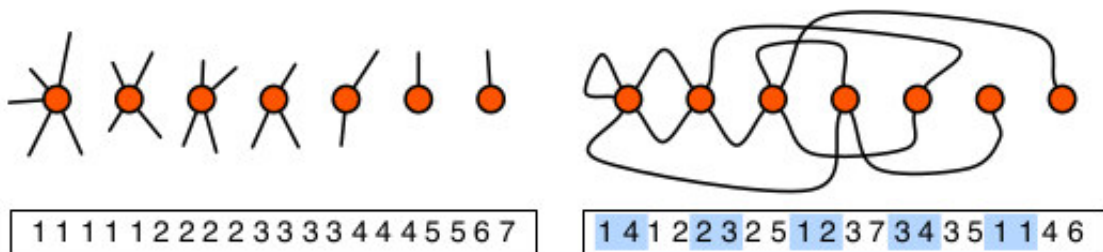
O Modelo de Configurações nos permite construir uma rede qualquer sabendo de antemão sua distribuição de conectividade. A lista de conectividade \vec{k} , pode ser qualquer

sequência, onde os k_i , grau do vértice i , sejam inteiros e $\sum k_i = L/2$ é um número inteiro, onde L é o número de ligações realizadas. Se a distribuição de conectividades for uma distribuição de Poisson, então o modelo de configurações se reduzirá a Redes Aleatórias de Erdős-Rényi. O modelo consiste dos seguintes passos

- Escolhemos um número de ligações para cada vértice, nesse caso chamaremos de *meia-ligações*, pois só há ligação completa quando conectamos ao outro vértice. O número de meia-ligações pode ser tomado de uma rede real ou de uma distribuição arbitrária predefinida anteriormente, desde que haja um número par de ligações no total, senão haverá algum par de vértices não conectados.
- Dado um vértice i com k_i ligações, preenchemos uma lista com o vértice i , k_i ligações, da forma $v = \overbrace{\{i, i, \dots, i, \dots\}}^{k_i \text{ vezes}}$. Fazemos o procedimento para todos os vértices da rede.
- Tomando a lista $v = \underbrace{\{1, 1, 1, \dots\}}_{3 \text{ vezes}}, \underbrace{\{i, i, \dots, i, \dots\}}_{k_i \text{ vezes}}, \dots, \underbrace{\{N, N, \dots, N\}}_{k_N \text{ vezes}}$. Reorganizamos a lista de forma aleatória e pegamos dois pares da lista, e entre esses dois vértices estabelecemos uma ligação.
- O procedimento é repetido sobre toda a lista tomando um par de vértices, estabelecendo uma ligação entre eles, e tomamos o próximo par imediatamente a frente. Ao final teremos construído uma nova rede partindo de uma distribuição arbitrária de conectividade.

Assim, dada uma sequência de conectividades, podemos construir redes aleatórias, ligando as conectividades k_i para cada vértice, o resultado desse processo é um nova rede que pode possuir múltiplas ligações e auto-ligações.

Figura 16 – Modelo de Configurações



Fonte – Adaptado de (CLAUSET, 2013). Aqui é mostrado os dois momentos, um onde criamos a lista v , carregada com as meias ligações. Cada vértice, i possui suas k_i meias-ligações, que irão ser rearranjadas de forma aleatória. O segundo momento mostra a tomada dos vértices par a par, que serão ligados.

A Fig. (16) mostra a construção de uma rede qualquer com distribuição de conectividade arbitrária, usando o modelo de configurações. Há dois momentos, o primeiro onde as

ligações ainda não foram criadas e cada vértice tem k_i meia-ligações, e no segundo momento essas k_i meia-ligações são permutadas e tomadas par a par, onde cada par formado, significa uma ligação realizada. Nesse caso, as permutações aleatórias geradas na rede podem produzir auto-ligações e ligações múltiplas.

2.7.2 Propriedades estruturais

As propriedades matemáticas do Modelo de Configurações, dependem precisamente da distribuição de conectividade que é fornecida quando geramos a rede, mas podemos prever analiticamente algumas propriedades de antemão.

Primeiramente, a probabilidade de termos uma ligação entre dois vértices de grau k_i e k_j é

$$p_{ij} = \frac{k_i k_j}{2m - 1} \simeq \frac{k_i k_j}{2m}. \quad (2.37)$$

Podemos ainda calcular a probabilidade deles estarem conectados com os vértices de maior número de ligações, tomando a Eq. (2.26), podemos escrever

$$p_{ij}^{max} \simeq \frac{k_{max}^i k_{max}^j}{2m} = \frac{\left(k_{min}^i N^{\frac{1}{\gamma-1}}\right) \left(k_{min}^j N^{\frac{1}{\gamma-1}}\right)}{2m} = \frac{k_{min}^i k_{min}^j}{2m} N^{\frac{2}{\gamma-1}} = \frac{k_{min}^2}{2m} N^{\frac{2}{\gamma-1}}. \quad (2.38)$$

Portanto, para redes livre de escala temos uma relação direta com o tamanho da rede N e com o expoente γ . Consequentemente, observamos que quando $\gamma < 3$ a probabilidade de termos um vértice com o máximo número de ligações se ligando com outro com o máximo número de ligações cresce com o tamanho do sistema, isso implica diretamente que em redes livre de escala os *hubs* se conectam a outros *hubs* mais facilmente. Quando $\gamma > 3$ a probabilidade de termos um vértice com o máximo número de ligações se ligando com outro com o máximo número de ligações decresce com o tamanho do sistema. Nesse regime, $\gamma > 3$, temos redes semelhantes a redes aleatórias, onde não há o aparecimento de *hubs* e uma homogeneidade no grau dos vértices.

2.7.3 Número esperado de ligações múltiplas

Ao construirmos redes pelo modelo de configurações não impedimos que existam ligações múltiplas e auto-ligações, pois a forma que a rede é construída permite um vértice se conectar com ele mesmo ou repetir uma ligação. Podemos modificar o modelo de forma a não aceitarmos que essas ligações sejam feitas, no entanto, corremos o risco de alterarmos a distribuição de conectividade grotescamente.

Para entendermos como o número esperado de ligações múltiplas altera a distribuição de conectividade tomemos a probabilidade do vértice i está ligado ao vértice j se conectarem novamente. Podemos retornar ao tópico anterior e construímos todo o procedimento novamente, mas nesse caso devemos levar em conta que já existe uma ligação entre os vértice i e j . Assim, a probabilidade de uma segunda ligação existir é

$$p_{ij(2)} = \frac{(k_i - 1)(k_j - 1)}{2m}, \quad (2.39)$$

nesse caso, já usamos uma meia ligação para o vértice i e outra para o vértice j , formando a ligação existente. Assim, a probabilidade de acontecer ligações múltiplas, ou seja a probabilidade de acontecer a primeira ligação e a probabilidade de acontecer a segunda é

$$\pi_{ij} = p_{ij(1)} \times p_{ij(2)} = \frac{k_i k_j (k_i - 1)(k_j - 1)}{2m \cdot 2m}. \quad (2.40)$$

Assim, se somarmos sobre todos os pares já formados, sobre todos os vértices, teremos o número esperado de ligações múltiplas sobre toda a rede

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{i \neq j}^N \pi_{ij} \\ &= \sum_{i \neq j}^N \left[\frac{k_i k_j}{2m} \right] \left[\frac{(k_i - 1)(k_j - 1)}{2m} \right] = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{1}{(2m)}}_{N\langle k \rangle} \underbrace{\frac{1}{(2m)}}_{N\langle k \rangle} \left[\sum_{i=1}^N k_i (k_i - 1) \sum_{j=1}^N k_j (k_j - 1) \right] \\ &= \frac{1}{2\langle k \rangle^2 N^2} \left(\sum_{i=1}^N k_i^2 - k_i \right) \left(\sum_{j=1}^N k_j^2 - k_j \right) \\ &= \frac{1}{2\langle k \rangle^2} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N k_j^2 - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N k_j \right) \\ &= \frac{[\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle]^2}{2\langle k \rangle^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle}{\langle k \rangle} \right]^2. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Usamos algumas identidades para demonstramos à equação acima, a primeira usamos a aproximação para a conectividade média $\langle k \rangle = \frac{2m}{N}$, ou seja, a conectividade média é aproximadamente duas vezes o número de ligações, m , dividido pelo número de vértices da rede. Usamos também a definição do n -ésimo momento da conectividade, $\langle k^n \rangle = \frac{1}{N} \sum_i k_i^n$.

A Eq. (2.41) é o número esperado de ligações múltiplas sobre toda a rede. Na maior parte das vezes, esse número não depende do tamanho da rede, N , desde que o primeiro momento e do segundo momento da conectividade do valor esperado seja definidos na distribuição de conectividade. Neste caso, podemos desprezar o efeito de ligações múltiplas quando o tamanho

da rede é muito grande. No caso de redes livre de escala, no entanto, o segundo momento pode divergir. Sendo assim o número esperado de ligações múltiplas dependerá do número de nós da rede. Lembrando que para o caso de redes livre de escala os momentos são controlados pelo *cut-off* natural, tomemos a Eq. (2.27), onde temos a relação entre os momentos da distribuição com o tamanho do sistema e o expoente γ .

$$\begin{aligned}\langle k^n \rangle &= \frac{(\gamma-1)}{n-\gamma+1} \left[(k_{min}^\gamma N^{\frac{1}{\gamma-1}})^{n-\gamma+1} - k_{min}^n \right], \\ \langle k \rangle &= \frac{(\gamma-1)}{-\gamma+2} \left[(k_{min}^2 N^{\frac{-\gamma+2}{\gamma-1}} - k_{min} \right], \\ \langle k^2 \rangle &= \frac{(\gamma-1)}{-\gamma+3} \left[(k_{min}^3 N^{\frac{-\gamma+3}{\gamma-1}} - k_{min}^2 \right].\end{aligned}$$

Podemos reescrever o número esperado das ligações múltiplas

$$\xi = \frac{1}{2} \left[\frac{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2}{\langle k \rangle} \right] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\gamma-2}{\gamma-3} \left[\frac{k_{min}^3 N^{\frac{-\gamma+3}{\gamma-1}} - k_{min}^2}{k_{min}^2 N^{\frac{-\gamma+2}{\gamma-1}} - k_{min}} \right] - 1 \right\}^2. \quad (2.42)$$

Vemos que quando $2 \leq \gamma < 3$, o número de ligações múltiplas sobre a nossa rede varia com o seu tamanho. Quando $\gamma > 3$, o número de ligações múltiplas tende a não depender do tamanho do sistema pois o expoente $\frac{-\gamma+3}{\gamma-1}$ é negativo e quanto maior o tamanho do sistema poderemos desprezar o efeito de ligações múltiplas.

2.7.4 Número esperado de auto-ligações

Podemos novamente fazer a mesma construção que usamos anteriormente, e calcularmos o valor esperado de auto-ligações sobre toda a rede. De acordo com a Eq. (2.37), temos a probabilidade do vértice i está ligado ao vértice j , no entanto no caso de auto-ligações, devemos tomar os números de pares de possíveis conexões, que nesse caso é $\binom{k_i}{2}$ no lugar de $k_i k_j$. Assim a probabilidade de ocorrer auto-ligações é

$$p_{ii} = \binom{k_i}{2} \frac{1}{2m} = \frac{k_i!}{2!(k_i-2)!} \frac{1}{2m} = \frac{k_i(k_i-1)(k_i-2)!}{(k_i-2)!} \frac{1}{4m} = \frac{k_i(k_i-1)}{4m}. \quad (2.43)$$

E podemos como anteriormente calcularmos o valor dos esperado para as auto-ligações

$$\begin{aligned}
\eta &= \sum_{i \neq j}^N p_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^N \left[\frac{k_i(k_i - 1)}{4m} \right] = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{1}{(2m)}}_{N\langle k \rangle} \left[\sum_{i=1}^N k_i(k_i - 1) \right] \\
&= \frac{1}{2\langle k \rangle N} \left(\sum_{i=1}^N k_i^2 - k_i \right) = \frac{1}{2\langle k \rangle} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle}{\langle k \rangle}.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Como anteriormente, encontramos uma expressão para o valor esperado de auto-ligações sobre toda a rede, Eq. (2.44), que não depende do tamanho da rede, N , isso implica diretamente que o valor só depende do primeiro momento e do segundo momento da conectividade, tornando o valor esperado constante, sendo assim podemos desprezar o efeito de auto-ligações quando o tamanho da rede é muito grande. Podemos escrever para redes livre de escala como anteriormente e chegamos a expressão

$$\eta = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\gamma - 2}{\gamma - 3} \frac{\left[k_{min}^3 N^{\frac{-\gamma+3}{\gamma-1}} - k_{min}^2 \right]}{\left[k_{min}^2 N^{\frac{-\gamma+2}{\gamma-1}} - k_{min} \right]} - 1 \right\}, \tag{2.45}$$

onde novamente vale a mesma análise sobre o expoente γ do número esperado de ligações múltiplas, pois as expressões são idênticas diferenciando por um fator ao quadrado.

2.7.5 Valor esperado da conectividade dos primeiros vizinhos

Na tentativa de escrever uma expressão para o coeficiente de agregação e analisar o quão conectada uma rede pode ser, devemos nos preocupar quantos vizinhos os vértices i e j , que possuem conectividade k_i e k_j , têm em comum.

Para isso, tomemos um vértice qualquer x , que é um vizinho em comum entre i e j , ou seja existem uma ligação i e j , estamos interessados em calcular a probabilidade de x ser vizinho dos vértices i e j . Como realizado anteriormente, devemos levar em conta as ligações já existentes entre os vértices i e j , e as ligações disponíveis para ligarmos os vértices i e x e os vértices j e x . Assim, a probabilidade do vértice x está ligado aos vértices i e j simultaneamente é o produto da probabilidade do vértice x está ligado ao i , que é dado pela Eq. (2.37), e pela probabilidade do vértice x está ligado ao vértice j , dado que uma ligação entre os vértices i e j

existe, que também é dada pela Eq. (2.37), mas diminuindo a meia-ligação sobre o vértice x .

$$\begin{aligned} v_{ij} &= \sum_x \left(\frac{k_i k_x}{2m} \right) \left(\frac{k_j (k_x - 1)}{\underbrace{2m}_{\langle k \rangle N}} \right) = \left(\frac{k_i k_j}{2m} \right) \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_x \left(\frac{k_x (k_x - 1)}{N} \right) \\ &= p_{ij} \frac{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle}{\langle k \rangle}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Ou seja, a probabilidade dos vértices i e j terem um vizinho em comum, x , é proporcional a probabilidade de p_{ij} , a probabilidade de i e j estarem conectados, pois o primeiro e o segundo momento são constantes, logo não divergir.

Definamos uma quantidade chamada de *distribuição de conectividade de excesso*, para isso, seja p_k a distribuição de conectividade da nossa rede, ou seja, a probabilidade de escolhermos aleatoriamente um vértice de conectividade k . Se ao invés de um vértice, nós escolhermos uma ligação e a partir dela seguirmos para um vértice em uma das suas extremidades, então o número de outras ligações que surgirão desse vértice seguem uma distribuição diferente, chamada *distribuição de conectividade de excesso* (NEWMAN *et al.*, 2001),

$$q_k = \frac{(k+1)p_{k+1}}{\langle k \rangle}. \quad (2.47)$$

Para exemplificarmos a Eq. (2.47), tomemos a probabilidade p_k de termos vértices de conectividade k . Qual a probabilidade de partindo de uma ligação qualquer chegarmos a um vértice de conectividade k ? Para termos chegado ao vértice de conectividade k , nos ligamos a um dos Np_k vértices de conectividade k , assim sabendo da Eq. (2.37), que a probabilidade de ligarmos aleatoriamente a outro vértice de conectividade k é $k/2m$, na outra extremidade da ligação, temos que a probabilidade de, seguindo uma ligação arbitrária, encontrarmos um vértice de conectividade k é

$$p_{\rightarrow k} = \frac{k}{2m} Np_k = \frac{k}{N\langle k \rangle} Np_k = \frac{kp_k}{\langle k \rangle}. \quad (2.48)$$

Pelo fato de estarmos seguindo uma ligação que já existe para chegarmos ao nosso destino, essa conectividade deve ser no mínimo unitária, dessa forma, devemos trocar $k \rightarrow k+1$, produzindo a Eq. (2.47).

A Equação (2.47) nos permite determinar a conectividade média esperada para os vizinhos de um nó arbitrário $\langle k_{nn} \rangle$. Isso é obtido tomando o primeiro momento de $p_{\rightarrow k}$

$$\langle k_{nn} \rangle = \sum_k k p_{\rightarrow k} = \sum_k k \left(\frac{kp_k}{\langle k \rangle} \right) = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k k^2 p_k = \frac{1}{\langle k \rangle} \langle k^2 \rangle = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle}. \quad (2.49)$$

Em percolação de redes aleatórias com distribuições arbitrárias de grau é esperado existir um agregado infinito no limite termodinâmico, quando os vizinhos encontrados tem pelo menos mais de uma ligação para dar segmento ao agregado. Isso é, esse agregado existirá se $\langle k_{nn} \rangle > 2$. Esse é o chamado critério de Molloy-Reed (MOLLOY; REED, 1995).

2.7.6 Valor esperado do coeficiente de agregação

Ao definirmos a distribuição de conectividade de excesso, estamos hábeis para calcularmos o valor esperado do coeficiente de agregação para redes de distribuições arbitrárias. Para isso, tomemos um vértice qualquer v , de conectividade $k_v \geq 2$, iremos tomar um par de vértices i e j e calcularmos a probabilidade deles estarem ligados. A probabilidade dos vértices i e j estarem conectados é dado pela Eq. (2.37), e o coeficiente de agregação é dado multiplicando a probabilidade dos vértices i e j estarem conectados, multiplicados pela probabilidade de que i tem conectividade de excesso k_i e que o vértice j tenha conectividade de excesso k_j , somando sobre todas as escolhas de k_i e k_j , logo

$$\begin{aligned}
 C &= \sum_{k_i=0}^{\infty} \sum_{k_j=0}^{\infty} q_{k_i} q_{k_j} \frac{k_i k_j}{2m} = \frac{1}{2m} \sum_{k_i=0}^{\infty} q_{k_i} k_i \sum_{k_j=0}^{\infty} q_{k_j} k_j = \frac{1}{2m} \left[\sum_{k=0}^{\infty} q_k k \right]^2 \\
 &= \frac{1}{2m \langle k \rangle^2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} k(k+1) p_{k+1} \right]^2 = \frac{1}{2m \langle k \rangle^2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) p_k \right]^2 \\
 &= \frac{1}{\underbrace{2m}_{N \langle k \rangle} \langle k \rangle^2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k - \sum_{k=0}^{\infty} k p_k \right]^2 = \frac{1}{N} \frac{[\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle]^2}{\langle k \rangle^3}.
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Observemos que o coeficiente de agregação depende do tamanho da rede, N , ou seja, esperamos que o coeficiente de agregação diminua com o tamanho da rede, no caso onde o primeiro e o segundo momento da conectividade sejam finitos. Analisando para o redes livre de escala podemos substituir os primeiro e segundo momento com relação ao expoente γ

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{1}{N} \frac{[\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle]^2}{\langle k \rangle^3} \\
 &= \frac{1}{N} \frac{\left\{ \frac{(\gamma-1)}{-\gamma+3} \left[k_{min}^3 N^{\frac{-\gamma+3}{\gamma-1}} - k_{min}^2 \right] - \frac{(\gamma-1)}{-\gamma+2} \left[k_{min}^2 N^{\frac{-\gamma+2}{\gamma-1}} - k_{min} \right] \right\}^2}{\left\{ \frac{(\gamma-1)}{-\gamma+2} \left[k_{min}^2 N^{\frac{-\gamma+2}{\gamma-1}} - k_{min} \right] \right\}^3}.
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Assim, observamos que o termo $1/N$ tende a depender explicitamente de γ os limites onde $\gamma \rightarrow 2$ e $\gamma \rightarrow 3$ são os que levam o coeficiente de agregação a indeterminações dependendo nesses limites do denominador e do numerador como função de γ .

3 ESTUDO DE REDES USANDO Q -ESTATÍSTICA

Em 1988, o físico Constantino Tsallis propôs uma generalização da estatística de Boltzmann-Gibbs (TSALLIS, 1988). A entropia de Boltzmann-Gibbs é dada por

$$S_q = k \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i, \quad (3.1)$$

onde W é o número total de microestados acessíveis. Com o objetivo de estudar como os fractais escalonavam, Tsallis postulou uma forma geral para a entropia de Boltzmann-Gibbs dada por,

$$S_q \equiv k \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^W p_i^q\right)}{q-1}, \quad (3.2)$$

onde $q \in \mathcal{R}$ e p_i são as probabilidades associadas com as configurações microscópicas W . A estatística de Boltzmann-Gibbs é recuperada quando $q \rightarrow 1$.

Para obter o estado estacionário associado com o *ensemble canônico*, Tsallis maximizou a entropia S_q com as restrições

$$\sum_{i=1}^W p_i = 1 \quad e \quad \frac{\sum_{i=1}^W p_i^q E_i}{\sum_{i=1}^W p_i} = U_q, \quad (3.3)$$

onde $\{E_i\}$ são os autovalores do Hamiltoniano com as condições de contorno escolhidas e U_q é um número fixo correspondente a energia interna. Tsallis mostrou que a distribuição que maximiza a entropia é dada por

$$p(k) = \frac{e_q^{-k/\kappa}}{\sum_{k'=1}^{\infty} e_q^{-k'/\kappa}}, \quad \text{onde} \quad e_q(x) = [1 + (1-q)x]^{1/(1-q)} \quad (3.4)$$

onde e_q é a função q -Exponencial que iremos discutir mais a frente.

3.1 Distribuição q -Exponencial

A distribuição q -Exponencial é dada pela função densidade de probabilidade

$$P_q(x) = p_0 \left[1 - (1-q) \frac{x}{x_0}\right]^{1/(1-q)}. \quad (3.5)$$

para $1 - (1-q)x/x_0 > 0$. Se $p_0 = (2-q)/x_0$ a Eq. (3.5) é normalizada.

A conexão entre a distribuição q -Exponencial e a distribuição Exponencial vêm no limite quando $q \rightarrow 1$, nesse ponto a função q -exponencial, definida como $e_q^{-x} \equiv [1 - (1 -$

$q)x]^{1/(1-q)}$ recupera a forma da função exponencial, ($e_1^{-x} \equiv e^{-x}$). Se $q < 1$, a Eq. (3.5) possui um valor finito para todo valor real finito de x , desde que, pela definição de $p_{qe}(x) = 0$ para $1 - (1 - q)\frac{x}{a} < 0$. No entanto, se $q > 1$ a Eq. (3.5) exibe um comportamento assintótico em lei de potência

$$P_q(x) \sim x^{1/(1-q)}. \quad (3.6)$$

A função q -exponencial dada pela Eq. (3.5) tem sido empregada em um número crescente de trabalhos empíricos e teóricos em uma grande variedade de temas (PICOLI *et al.*, 2009). Podemos citar exemplos para Redes Livres de Escala (TSALLIS, 2008), para sistemas dinâmicos (MOLIN *et al.*, 2009), para estruturas algébricas (QUEIRÓS, 2009) e outros tópicos em Física Estatística (MAGOULAS; ANASTASIADIS, 2006; HANEL; THURNER, 2006).

3.2 Redes q -Exponenciais

Redes sociais, Internet, redes artificiais, redes naturais exibem no comportamento assintótico uma lei de potência para a distribuição de conectividade (NEWMAN, 2003; TSALLIS, 2008). Essas redes são frequentemente chamadas de Redes Livre de Escala, pois apresentam a distribuição de conectividade na forma

$$p(k) \propto \frac{1}{(k_0 + k)^\gamma}, \quad (3.7)$$

com $\gamma > 0$ e $k_0 > 0$, onde k é a conectividade de cada vértice.

Se fizermos uma mudança em nossas variáveis,

$$\gamma = \frac{1}{q-1}, \quad k_0 = \frac{\kappa}{q-1}, \quad (3.8)$$

e rescrevemos a Eq. (3.7) da forma

$$p(k) \propto e_q^{-k/\kappa}, \quad (3.9)$$

onde e_q é a *função q -exponencial*, definida anteriormente como sendo

$$e_q^x = [1 + (1 - q)x]^{1/(1-q)}, \quad (3.10)$$

se $1 + (1 - q)x > 0$, senão a função é nula. No limite onde N , o tamanho do sistema, é muito grande, a forma polinomial coincide com a q -Exponencial, $p(k) \propto \exp_q(-k/\kappa)$ ($q > 1$ e $\kappa > 0$). Nesse limite, γ pode ser aproximado por $\gamma = 1/(q - 1)$ e $k_0 = \kappa/(q - 1)$.

A Eq. (3.9) nos permite gerar uma distribuição de conectividade de uma rede livre de escala. Assim, teremos uma probabilidade $p(k_i)$ de termos o vértice, i , com conectividade k_i , dada pela Distribuição q -Exponencial.

3.2.1 Gerando números aleatórios com a distribuição q -Exponencial

A distribuição q -exponencial tem a função de densidade de probabilidade dada por

$$\text{pdf}(x) = (2 - q)\lambda e_q^{-\lambda x}. \quad (3.11)$$

Para gerarmos essa distribuição podemos tomar desvios aleatórios que podem ser gerados usando a amostragem de transformada inversa (PRESS *et al.*, 2007). Dada uma variável U uniformemente distribuída no intervalo $(0,1)$, $U \sim (0,1)$, então a transformada inversa é dada por

$$X = \frac{-q' \ln_{q'}(U)}{\lambda} \sim qe_q^{-\lambda x}, \quad (3.12)$$

onde $qe_q^{-\lambda x}$ é a distribuição gerada, dados q e λ , onde $q' = \frac{1}{2-q}$ e o q -logaritmo (TSALLIS, 1988) é definido como

$$\ln_q(x) = \begin{cases} \ln(x), & \text{se } x \geq 0 \text{ e } q = 1; \\ \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}, & \text{se } x \geq 0 \text{ e } q \neq 1; \\ \text{Não definido,} & \text{se } x \leq 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Aqui podemos caracterizar algumas propriedades importantes sobre a nossa distribuição:

(i) Domínio

$$\begin{aligned} & x \in [0; +\infty], \text{ para } q \geq 1 \\ x \in \left[0; \frac{1}{\lambda(1-q)} \right], & \text{ para } q < 1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

(ii) Função Densidade de Probabilidade

$$\text{pdf}(x) = (2 - q)\lambda e_q^{-\lambda x} \quad (3.15)$$

(iii) Média

$$\langle x \rangle = \frac{1}{\lambda(3-2q)} \quad q < \frac{3}{2} \quad (3.16)$$

(iv) Variância

$$\sigma^2 = \frac{q-2}{\lambda^2(2q-3)^2(3q-4)} \quad q < \frac{4}{3} \quad (3.17)$$

Com nossa distribuição bem caracterizada, podemos tomar o Modelo de Configurações, descrito na Seção (2.7.1), usando a distribuição q-exponencial como distribuição de conectividade. A motivação em estudar o comportamento de redes geradas pela Distribuição q-Exponencial vem de uma proposição de Constantino Tsallis (TSALLIS, 2008), onde partindo da generalização da Mecânica Estatística de Boltzmann-Gibbs, que provém uma distribuição de conectividade na forma q-exponencial, que emerge (assintoticamente) redes livres de escala. Nos propusemos a estudar como o mínimo caminho médio e o coeficiente de agrupamento se comportam nessas redes geradas pela distribuição q-exponencial, observando como o parâmetro q atua sobre essas redes.

4 RESULTADOS

Procuramos estudar o comportamento do mínimo caminho médio $\langle \ell \rangle$, e também o coeficiente de agregação, C . Nos experimentos realizados, tomamos o Modelo de Configurações discutido na Sec. (2.7.1) para construirmos as redes q-Exponenciais. Como discutido anteriormente, o modelo facilita os nós que possuem maior quantidade de ligações a se conectarem com maior probabilidade, como também o surgimento de ligações múltiplas e auto ligações, no entanto, em nossos resultados retiramos as auto-ligações como também as múltiplas ligações, pois já havendo uma ligação entre os devidos nós, o mínimo caminho médio e o coeficiente de agregação não é alterado.

Inicialmente calculamos o comportamento das redes q-Exponencias quando fixamos a conectividade média, e depois tomamos diferentes conectividades médias. Estudamos também o comportamento dessas redes quando comparamos o mínimo caminho médio $\langle \ell \rangle$, coeficiente de agregação e robustez, com redes livre de escala e rede aleatórias.

4.1 Grau médio $\langle k \rangle = 5$

Partindo da distribuição q-exponencial, dada pela Eq. (3.15), podemos gerar distribuições fixando o parâmetro q que controla a distribuição, fixamos também o parâmetro λ , que de acordo com a Eq. (3.16), controla a média da distribuição, controlando assim a conectividade média da rede gerada.

Primeiramente, analisaremos a distribuição de probabilidade $p(k)$, dada pela Eq. (3.15), nela observamos o comportamento exponencial característico da distribuição. Observe-mos também que para construirmos a rede, tomamos a conectividade média constante, $\langle k \rangle = 5$. Isso nos permite uma melhor construção da rede de forma que muitos vértices se conectem ao maior agregado. A conectividade média da distribuição q-Exponencial é dada pela Eq. (3.16)

$$\langle k \rangle = \frac{1}{\lambda(3-2q)} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\langle k \rangle(3-2q)}. \quad (4.1)$$

Assim se fixamos a conectividade média $\langle k \rangle = 5$, teremos:

$$\lambda = \frac{1}{\langle k \rangle(3-2q)} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{5(3-2q)}.$$

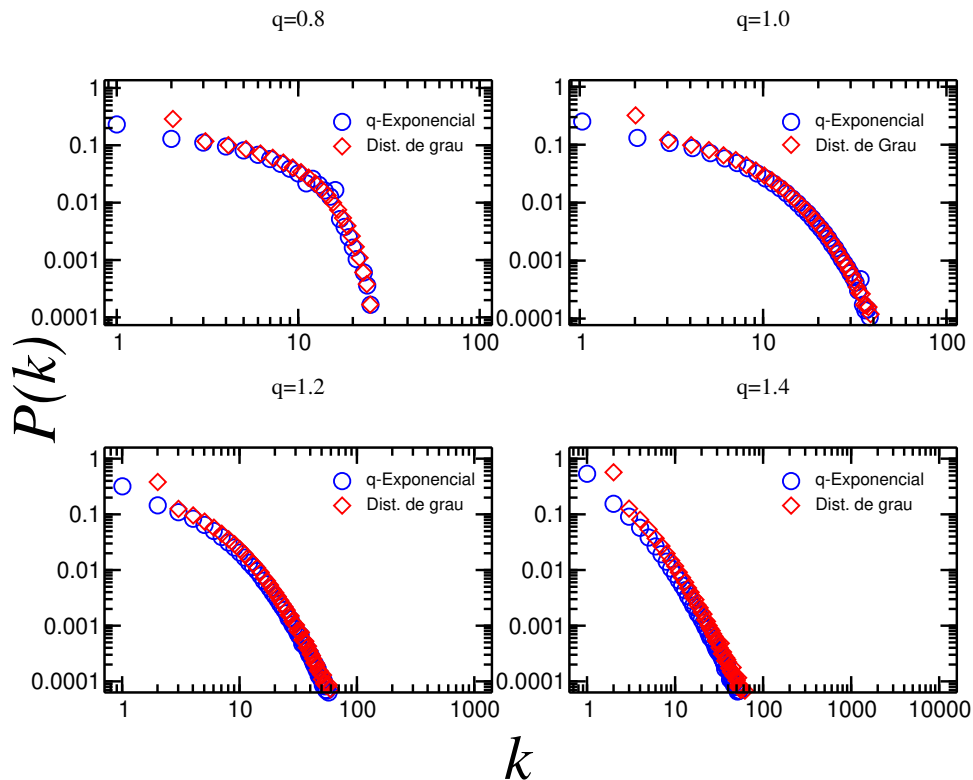
O que estamos interessados é na característica dessa distribuição ter o comportamento de uma lei de potência quando $q > 1$, de acordo com a Eq. (3.6).

$$Pq(x) \sim x^{1/(1-q)}.$$

Esse comportamento em lei de potência, com expoente γ dado por $\gamma = \frac{1}{q-1}$, deve exibir um comportamento de redes livre de escala. Assim ao medirmos o mínimo caminho médio $\langle \ell \rangle$, esperamos observar as escalas apresentadas na Eq. (2.20). Também mediremos o comportamento do coeficiente de agregação para essas rede e compararemos com o valor teórico esperado para o Modelo de Configurações dado pela Eq. (2.50).

Na Fig. (17), analisamos a distribuição q-Exponencial, juntamente com a distribuição de grau sobre o maior agregado, pois é nele que todas as medidas do nosso sistema serão tomadas.

Figura 17 – Distribuição de probabilidade da q-Exponencial juntamente com a distribuição de conectividade do maior agregado.

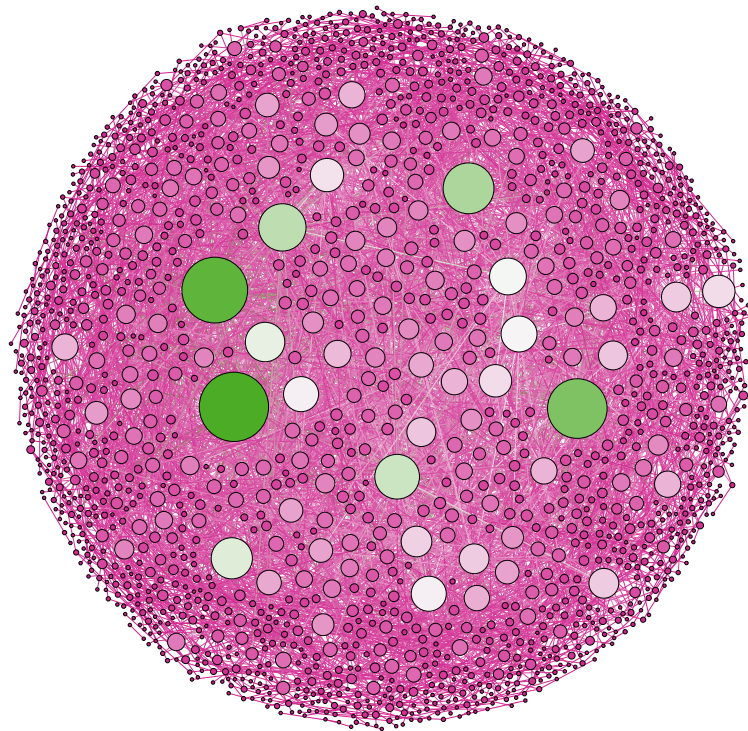


Fonte – Próprio autor. Tomando a distribuição q-Exponencial com uma amostra 8192 pontos, o que nos fornece o tamanho inicial da rede $N = 8192$, no entanto, muito dos nós são nulos, e de baixo grau não pertencendo ao maior agregado, assim os pontos em vermelho, que representam o maior agregado não é exatamente a mesma distribuição, mas apresenta comportamento semelhante sendo aceitável. Cada histograma possui 100 realizações distintas para cada q , mostrando o comportamento médio da distribuição. O tamanho do maior agregado é afetado quando variamos o parâmetro q , lembremos que quando $q = \frac{3}{2}$, o primeiro momento da distribuição diverge, e por mais que fixemos a conectividade média, esse valor tende a divergir. Lembremos também que quando $q = \frac{4}{3}$, o segundo momento da distribuição diverge, isso implica diretamente que a variância diverge e nossos dados não são mais confiáveis.

Na Fig. (17) observamos a distribuição de conectividade gerada pela distribuição q-Exponencial e a distribuição de conectividade do maior agregado. A distribuição de conectividade

do maior agregado se comporta bem, mesmo quando removemos as ligações múltiplas e auto ligações. Salientamos que o maior agregado não possui nenhum vértice de grau nulo. Vale a pena notarmos que a distribuição está normalizada, e apresenta valores discretos, pois representa a conectividade da rede. Na Fig. (18), temos um exemplo de rede gerada com $q = 1.20$ e conectividade média $\langle k \rangle = 5$. A rede inicialmente possui $N = 2048$ nós, no entanto, o maior agregado, possui $N_{giant} = 1777$ nós.

Figura 18 – Exemplo de uma rede gerada pela distribuição q-exponencial



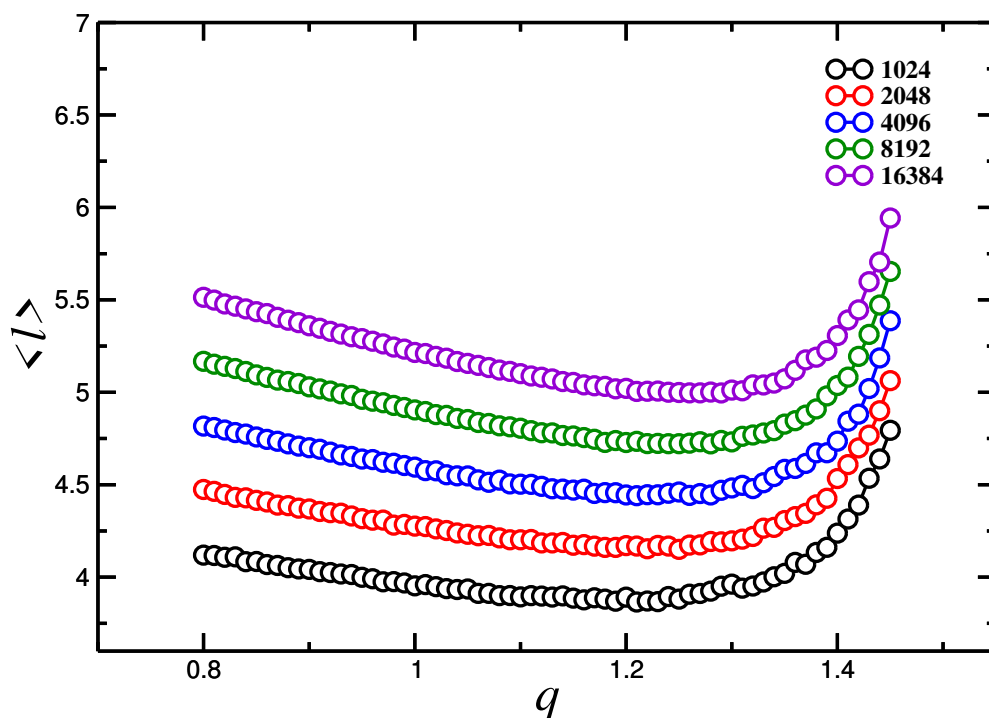
Fonte – Próprio autor. Representação de uma rede gerada a partir da distribuição q-Exponencial para $q = 1.20$ e conectividade média $\langle k \rangle = 5$. A distribuição inicialmente possui 2048 nós, isto é $N = 2048$, no entanto, pela característica da distribuição, muitos possuem grau nulo, não podendo se conectar a rede. Assim, a rede gerada possui 1777 nós, e o maior agregado possui $N_{giant} = 1764$ nós. Destacamos em ênfase os nós que possuem maior grau (*hubs*), tais nós permitem o acesso com facilidade de qualquer nó da rede.

Observemos agora o comportamento do mínimo caminho médio $\langle \ell \rangle$ quando variamos o parâmetro q sobre a rede. Queremos observar se dada a conectividade média fixa, $\langle k \rangle = 5$, existe algum comportamento onde q influencie o comportamento da rede. O parâmetro q está diretamente ligado a classe de universalidade a qual a rede pertence, pois $\gamma = \frac{1}{q-1}$. Assim, quando $q = 1.25$, temos $\gamma = 4$; quando $q = 1.33$, temos $\gamma = 3$; e quando $q = 1.50$, temos o caso $\gamma = 2$. Esse pontos foram destacados pois são os valores onde o terceiro, o segundo e o primeiro momento divergem respectivamente. Relembrando a Sec. (2.6.1), sabemos que no intervalo

$2 < \gamma < 3$ ($4/3 < q < 3/2$) o regime esperado é de redes mundo ultra pequeno, e quando $\gamma \geq 3$ ($q < 4/3$) o comportamento esperado é de redes de mundo pequeno, apresentando características de redes aleatórias.

O mínimo caminho médio, $\langle \ell \rangle$, em função de q , está representado na Fig. (19). Nessa figura, tomamos diferentes tamanho de rede, observando $N = 1024, 2048, 4096, 8192, 16384$, e variamos o parâmetro q , observando como o mínimo caminho médio se comporta sobre o maior agregado. Na Fig. (19), observamos a existência de um possível mínimo, de forma que quando aumentamos o tamanho da rede, N , o mínimo tende-se a aproximar-se de $q \approx 1.33$ ($\gamma \approx 3.00$). Essa característica nós leva a desconfiar que quando $q = 1.33$ ($\gamma = 3.00$), valor esse que o segundo momento da nossa distribuição diverge, existe uma transição entre redes. O regime $q \leq 1.33$ ($\gamma \geq 3.00$) implica em redes de pequeno mundo, no entanto, quando $1.33 < q < 1.50$ ($2 < \gamma < 3$), as redes apresentam regime de redes ultra pequeno mundo (COHEN; HAVLIN, 2003).

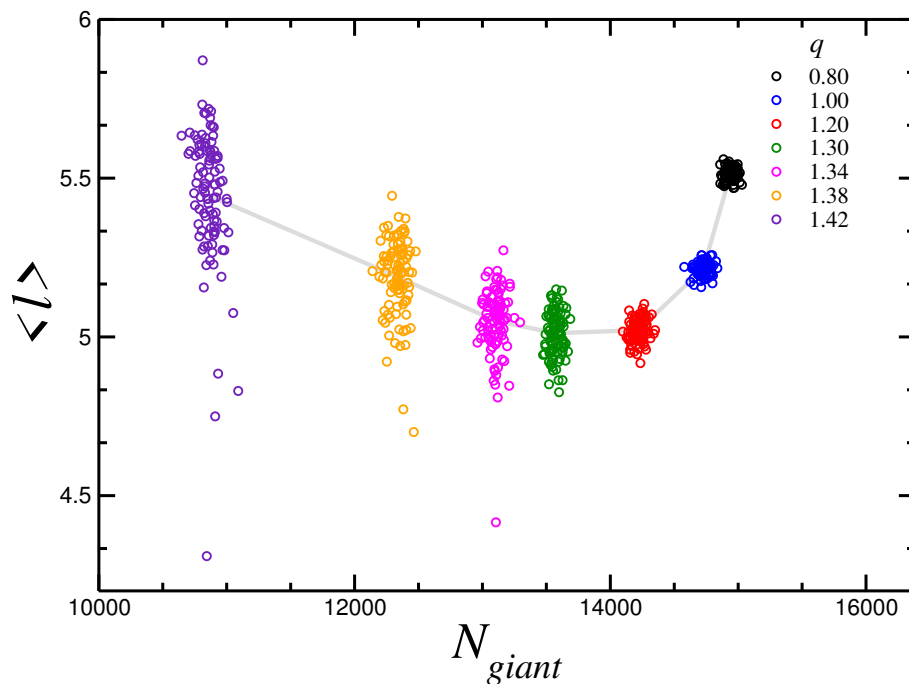
Figura 19 – Comportamento do mínimo caminho médio $\langle \ell \rangle$ em função do parâmetro q .



Fonte – Próprio autor. Mínimo caminho médio, $\langle \ell \rangle$, em função do q , aqui tomamos diferentes tamanho de rede, $N = 1024, 2048, 4096, 8192, 16384$, e variando o parâmetro q , observamos como o mínimo caminho médio se comporta sobre o maior agregado. Observamos a existência de possível um mínimo de forma que quando aumentamos o tamanho da rede, N , o mínimo tende-se a aproximar-se de 1.33. Essa característica nós leva a desconfiar que quando $q = 1.33$, existe uma transição entre redes, o regime antes de $q = 1.33$ é $\gamma \leq 3$, ou seja, redes de pequeno mundo, no entanto, quando γ está nos limites $2 < \gamma < 3$, tornando-se uma ultra pequeno mundo. Para todos os tamanhos de rede realizamos 100 amostras independentes

O primeiro momento, $\langle k \rangle$, da distribuição q-Exponencial diverge quando $q \rightarrow 3/2$ e o segundo momento, $\langle k^2 \rangle$, diverge quando $q \rightarrow 4/3$, partindo disso observemos como o comportamento do mínimo caminho médio é alterado sobre o maior agregado, N_{giant} . Na Fig. (20), observamos o maior agregado em função do parâmetro q . O comportamento do mínimo caminho médio varia como observado anteriormente na Fig. (19), no entanto quando $q < 1.33$, valor esse onde a variância não divergiu ainda, a distribuição dos maiores agregados se comporta bem em torno de um ponto médio bem definido. Quando $q > 4/3$, a variância começa a divergir, espalhando a média, ou seja agora os maiores agregados variam bastante o seu mínimo caminho médio.

Figura 20 – Análise do comportamento do maior agregado com relação ao mínimo caminho médio, variando o parâmetro q .

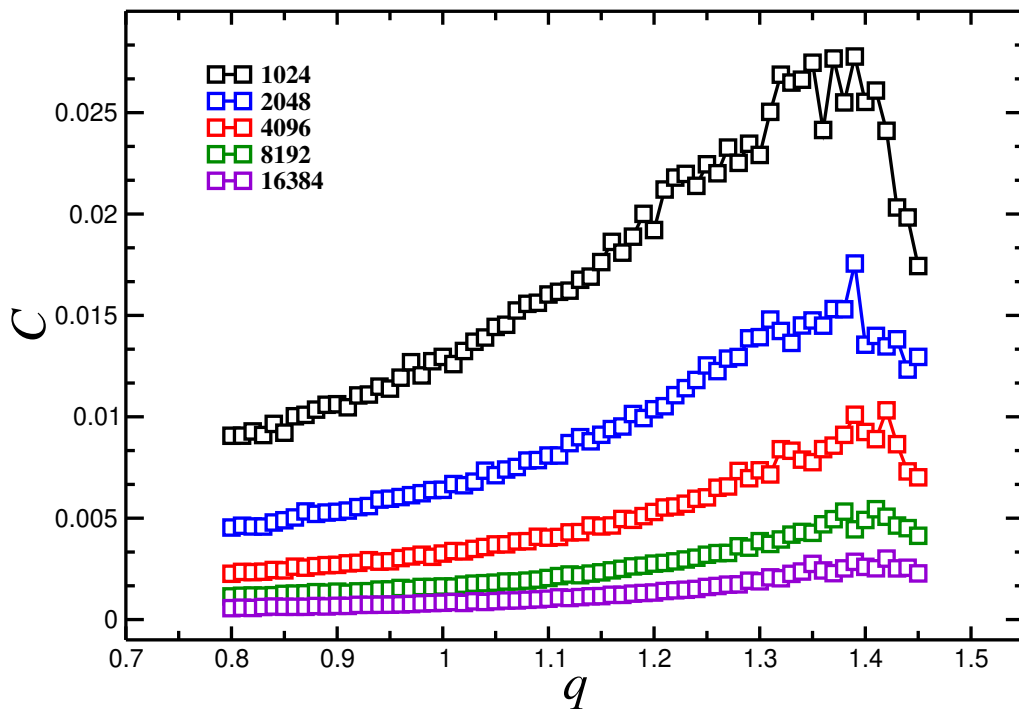


Fonte – Próprio autor. Comportamento do maior agregado observando o mínimo caminho médio, $\langle \ell \rangle$, variando o parâmetro q . Tomando o tamanho de rede inicial, $N = 16384$, o maior agregado, que não possui todos os vértices, diminui de tamanho quando variamos o q . Quando q está antes de $q = 4/3 \simeq 1.33$, a variância não divergiu ainda, a distribuição dos maiores agregados se comporta bem em torno de um ponto médio bem definido. No entanto, quando $q > 4/3$, a variância começa a divergir, e o mínimo caminho médio fica mais espalhado, com maior flutuação em torno do ponto médio. Para todos os tamanhos de rede realizamos 100 amostras independentes.

Com relação ao coeficiente de agregação, C , analisamos seu comportamento ao variarmos o parâmetro q . O coeficiente de agregação foi medido por Duncan J. Watts e Steven Strogatz (WATTS; STROGATZ, 1998), e mede o quão conectados os vizinhos de um vértice

estão em uma rede. Medimos o coeficiente de agregação sobre o maior agregado, para diferente tamanhos de rede, variando o parâmetro q . Quanto mais aumentamos o tamanho da rede, mais visível se torna o comportamento dessa medida. Na Fig. (21), observamos que quando $q \approx 1.35$ obtemos o primeiro ponto de inflexão do coeficiente de agregação, esse valor está bem visível quando $N = 16384$. O coeficiente de agregação alcança valores bem baixos, sabemos que os limites estão entre 0 e 1, no entanto, obtemos valores da ordem de $C = 0.030$.

Figura 21 – Comportamento do coeficiente de agregação, C , em função do parâmetro q .



Fonte – Próprio autor. Análise do coeficiente de agregação em função do parâmetro q sob o maior agregado. Observamos que o coeficiente de agregação se comporta de forma crescente, mas a partir de certo valor de q observamos uma divergência, provavelmente associada ao tamanho do sistema, isso é observado quando aumentamos o tamanho do sistema. Também é interessante observar que $q > 4/3$ a variância diverge, e se lembrarmos da Fig. (20), observamos que o maior agregado causa essa flutuação.

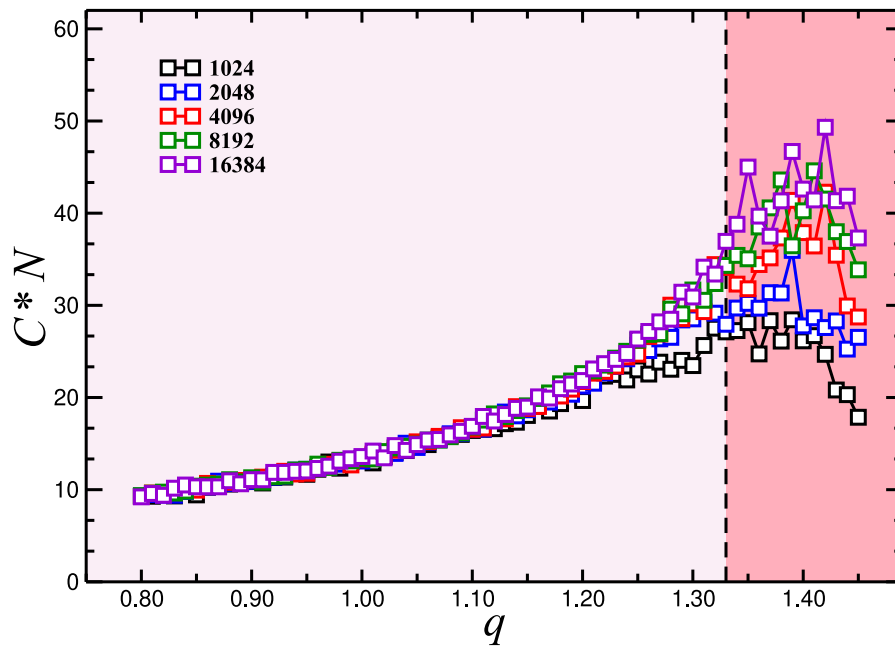
Uma forma de vermos melhor a Fig. (21), é tomarmos os valores do coeficiente de agregação e multiplicarmos pelo tamanho do sistema. Lembrando da Eq. (2.50), na Sec. (2.7.1), observamos que o coeficiente de agregação vai a zero com o tamanho do sistema, quando o primeiro e segundo momento são finitos, ou seja,

$$C = \frac{1}{N} \frac{[\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle]^2}{\langle k \rangle^3}. \quad (4.2)$$

Assim, na Fig. (22), multiplicamos o coeficiente de agregação pelo tamanho do sistema, assim o comportamento do maior agregado em função da variação do parâmetro q fica

evidenciado. Na Fig. (22), observamos que o coeficiente de agregação exibe flutuações em cima de $q > 1.33$, quando aumentamos o tamanho do sistema. No caso de $N = 16384$, a inflexão do coeficiente de agregação ocorre em $q \approx 1.33$, após esse ponto o valor flutua e tende a zero quando $q \rightarrow 3/2$, quando a média diverge.

Figura 22 – Comportamento do coeficiente de agregação, C , escalonado com o tamanho do sistema, N , em função do parâmetro q .



Fonte – Próprio autor. Comportamento do coeficiente de agregação em função de q , nesse caso o coeficiente de agregação foi multiplicado pelo tamanho da rede para cada caso. Dividimos em três regiões distintas, pois o nosso escalonamento funciona bem quando $q < 1.25$ e diverge quando $q > 1.33$, onde teríamos o regime de redes de ultra pequeno mundo.

De acordo com a Fig. (22), o escalonamento que tentamos funciona bem quando $q < 1.25$ ($\gamma > 4$), tal fato nos leva a separar a Fig. (22) em dois regimes. O primeiro quando $q < 1.25$, aqui o regime seria semelhante a redes aleatórias e se encaixando perfeitamente com o escalonamento proposto. No segundo, quando $1.33 \leq q \leq 1.50$, o que implica em redes de ultra pequeno mundo, o coeficiente de agregação C , depende de γ mais fortemente, lembrando a Eq. (2.51) relaciona o coeficiente de agregação com γ

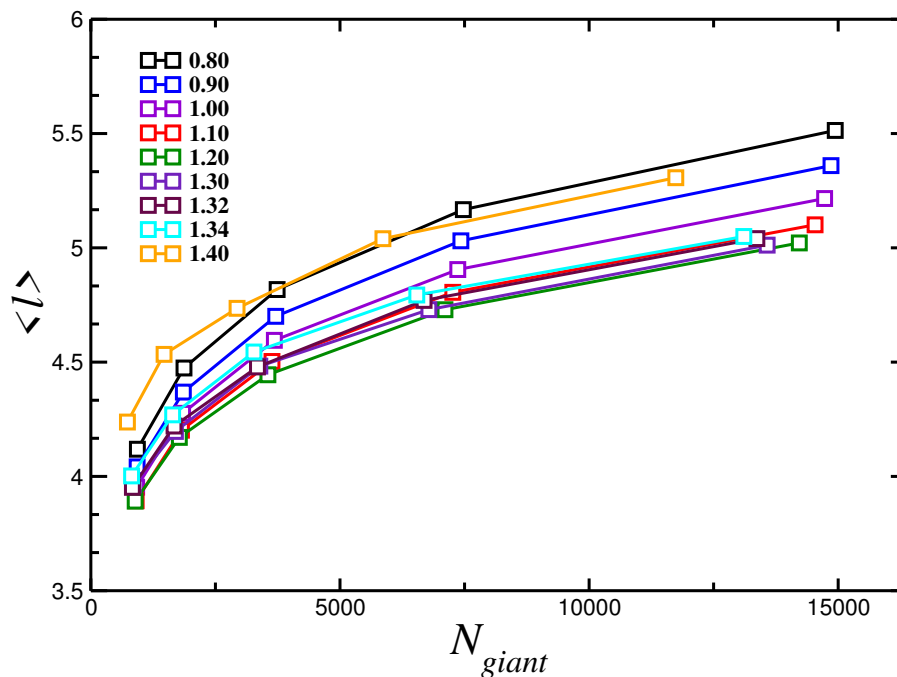
$$C = \frac{1}{N} \frac{\left\{ \frac{(\gamma-1)}{-\gamma+3} \left[k_{min}^3 N^{\frac{-\gamma+3}{\gamma-1}} - k_{min}^2 \right] - \frac{(\gamma-1)}{-\gamma+2} \left[k_{min}^2 N^{\frac{-\gamma+2}{\gamma-1}} - k_{min} \right] \right\}^2}{\left\{ \frac{(\gamma-1)}{-\gamma+2} \left[k_{min}^2 N^{\frac{-\gamma+2}{\gamma-1}} - k_{min} \right] \right\}^3},$$

nos limites onde $2 < \gamma < 3$, o coeficiente de agregação depende tanto de γ como do tamanho

da rede, N . Portanto, nesse segundo regime, o nosso escalonamento não funciona bem, pois o tamanho do maior agregado diminui quando aumentamos q , Fig. (20). Observamos que o tamanho do maior agregado influencia diretamente o coeficiente de agregação, C , como também o expoente γ , e essa influência se torna mais forte quando $q > 1.33$.

Por último analisamos como o mínimo caminho médio, $\langle \ell \rangle$, varia quando aumentamos o tamanho do sistema, Fig. (23). De acordo com a Eq. (2.20), o mínimo caminho médio varia dependendo de como γ ($\gamma = \frac{1}{q-1}$) se comporta. Observemos que quando $q = 1.33$ ($\gamma = 3$), ou seja, esperamos redes de pequeno mundo, no entanto, quando $1.33 < q < 1.50$ ($2 < \gamma < 3$), e esperaríamos comportamento de redes ultra pequeno mundo. Lembremos também que o tamanho do maior agregado diminuí quando aumentamos o parâmetro q , de acordo com a Fig. (20).

Figura 23 – Mínimo caminho médio, $\langle \ell \rangle$, como função do tamanho do sistema.

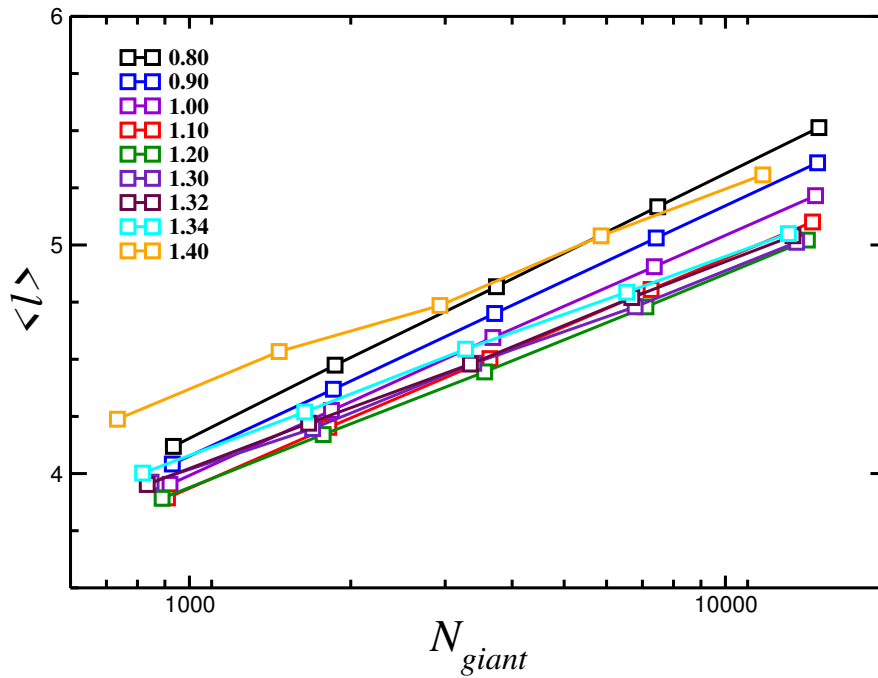


Fonte – Próprio autor. Observamos o comportamento do mínimo caminho médio como função do tamanho do sistema, observamos um crescimento que pode ser representado por uma lei de potência. Na figura estão representados tamanhos de redes $N = 1024, 2048, 4096, 8192, 16384$. No entanto, quando o $q \rightarrow 4/3$, limite esse onde a variância diverge, temos que o maior agregado diminui quando $q > 4/3$.

Para melhor exemplificarmos o comportamento do mínimo caminho médio com o tamanho do sistema, tomemos a Fig. (23) em escala semi-logarítmica. Na Fig. (24), observamos um comportamento em lei de potência do mínimo caminho médio, tal comportamento concorda com o discutido até aqui, pois geramos uma distribuição que se comporta de forma muito

parecida com a exponencial, e esperamos um comportamento em lei de potência para o mínimo caminho médio (BARABÁSI, 2016). Lembremos que $4/3 < q < 3/2$ ($2 < \gamma < 3$), esperamos o comportamento de redes ultra pequeno mundo.

Figura 24 – Mínimo caminho médio, $\langle \ell \rangle$, como função do tamanho do sistema em escala semi-logarítmica.



Fonte – Próprio autor. Observamos o comportamento do mínimo caminho médio como função do tamanho do sistema em escala semi-logarítmica. Na figura estão representados tamanhos de redes $N = 1024, 2048, 4096, 8192, 16384$. No entanto, quando o $q \rightarrow 4/3$, limite esse onde a variância diverge, temos que o maior agregado diminui quando $q > 4/3$. As curvas apresentam inclinações distintas, de forma que deve haver uma transição entre os regimes dessas redes.

Como tentativa de observar uma transição entre os regimes de redes q-Exponenciais, tentamos funções de ajuste que pudessem representar nossos dados. Para isso, tomemos as funções na forma

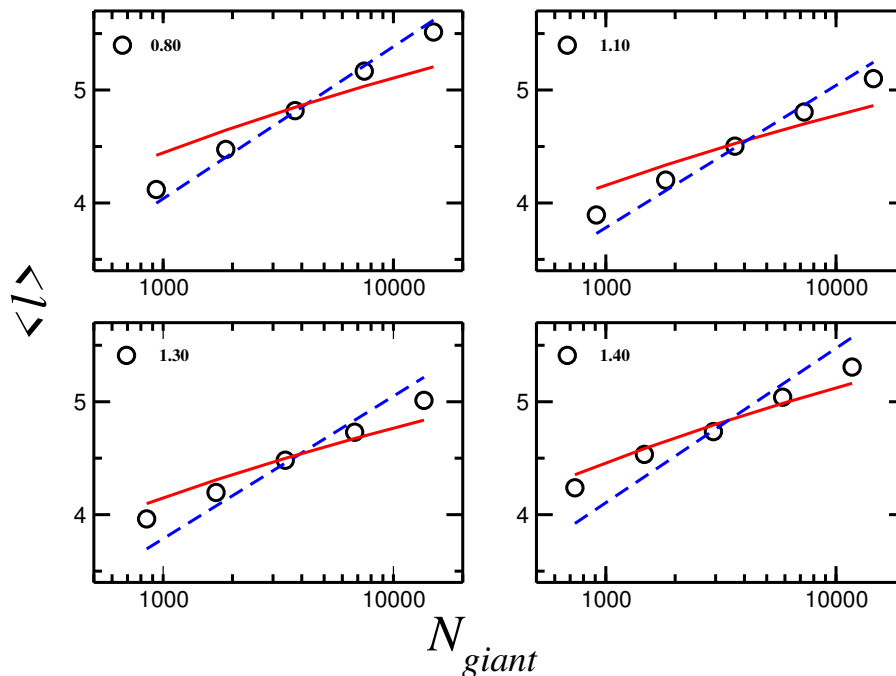
$$\langle \ell \rangle = A \ln(N); \quad (4.3)$$

$$\langle \ell \rangle = B \ln \ln(N). \quad (4.4)$$

A Eq. (4.3) representa o escalonamento para o mínimo caminho médio, $\langle \ell \rangle$, de redes aleatórias, como discutido anteriormente na Sec. (2.6.1). Para a Eq. (4.4), o mínimo caminho médio, $\langle \ell \rangle$, é uma característica de redes de ultra mundo pequeno que ocorre nos regimes $4/3 < q < 3/2$ ($2 < \gamma < 3$).

Na Fig. (25) propusemos dois ajustes o primeiro dado pela Eq. (4.3) e o segundo dado por Eq. (4.4), os dois ajustes mostram como se comportam os nossos dados. Na Fig. (25), a curva tracejada exibe a Eq. (4.3), o comportamento do logaritmo do tamanho do sistema, para a curva cheia, observamos o comportamento logaritmo do logaritmo do tamanho do sistema, dado pela Eq. (4.4). Quando $q = 0.80$, a curva tracejada que representa o escalonamento de $\ln N$ pode ser um ajuste aceitável, enquanto a curva cheia que representa o escalonamento de $\ln \ln N$ não se consegue representar os dados. A medida que vamos variando o parâmetro q o ajuste para o $\ln N$ tende a se distanciar dos dados, enquanto o ajuste $\ln \ln N$ se aproxima dos dados.

Figura 25 – Ajuste do mínimo caminho médio, $\langle \ell \rangle$, como função do tamanho do sistema.



Fonte – Próprio autor. Observamos o comportamento do mínimo caminho médio como função do tamanho do sistema em escala semi-logarítmica. Na figura estão representados tamanhos de redes $N = 1024, 2048, 4096, 8192, 16384$, aqui observamos o aumento do parâmetro q e como se comporta os ajustes dados pelas Eq. (4.3) e Eq. (4.4). A curva tracejada representa um ajuste dado por $\langle \ell \rangle \sim \ln(N)$ enquanto a curva cheia representa um ajuste dado por $\langle \ell \rangle \sim \ln \ln(N)$. Observamos que quando aumentamos o parâmetro q o ajuste para o $\ln N$ tende a se distanciar dos dados, enquanto o ajuste $\ln \ln N$ se aproxima dos dados.

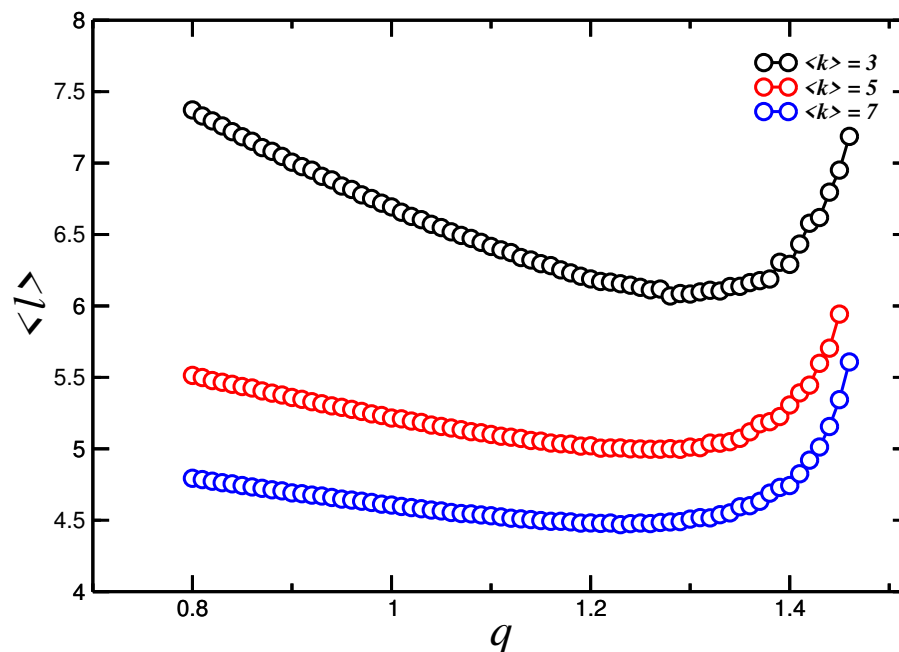
A Fig. (25) nos dá indícios que pode haver uma mudança nos regimes aos quais as redes q -Exponenciais pertencem, ou seja, podemos estar tratando de redes onde o mínimo caminho médio se comporta com o $\langle \ell \rangle \sim \ln N$ que caracteriza redes de pequeno mundo e quando variamos o parâmetro q observamos que pode haver um comportamento do tipo $\langle \ell \rangle \sim \ln \ln N$, que caracteriza uma rede de ultra pequeno mundo.

4.2 Grau médio $\langle k \rangle = 3$ e $\langle k \rangle = 7$

Os resultados obtidos anteriormente tomam o grau médio da conectividade $\langle k \rangle = 5$. O que acontece se tomarmos uma conectividade média diferente? Para isso devemos observar o mínimo caminho médio novamente $\langle \ell \rangle$ em função do parâmetro q , como também o coeficiente de agregação, C , e compararmos com os resultados obtidos anteriormente para o grau médio $\langle k \rangle = 5$. A conectividade média da distribuição q-Exponencial é dada pela Eq. (3.16) em função de λ , assim se escolhermos a conectividade média $\langle k \rangle$ fixa, podemos gerar as distribuições para diferentes λ .

Na Fig. (26), temos o mínimo caminho médio para diferentes graus médio sobre a rede, fixando o tamanho de rede inicial, $N = 16384$ vértices. Observamos que o mínimo ainda é encontrando nas proximidades de $q = 1.33$, ponto esse onde o segundo momento da distribuição de conectividade diverge, portanto a variância diverge.

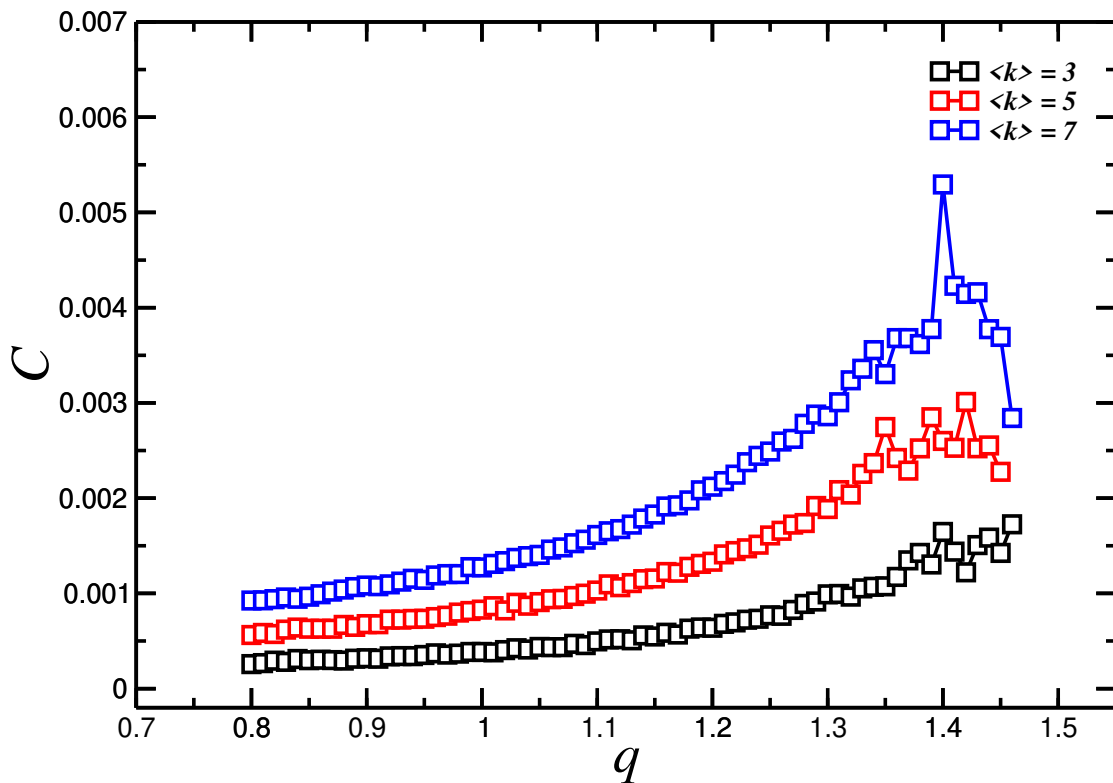
Figura 26 – Comportamento do mínimo caminho médio $\langle \ell \rangle$ em função do parâmetro q para diferentes conectividades média.



Fonte – Próprio autor. Comportamento do mínimo caminho médio $\langle \ell \rangle$ em função do parâmetro q para diferentes conectividades média. Fixando o tamanho de rede inicial, $N = 16384$ vértices, observamos que o mínimo ainda é encontrando nas proximidades de $q = 1.33$, ponto esse onde o segundo momento da distribuição de conectividade diverge. Aparente o comportamento analisado anteriormente continua válido, de forma que a conectividade média não altera o surgimento do mínimo para $\langle \ell \rangle$. Salientamos que esse comportamento já era esperado. Afinal, quanto mais aumentamos a conectividade média mais conectado nosso maior agregado estará, implicando na diminuição do mínimo caminho médio.

Por último, analisemos também o coeficiente de agregação, C , quando variamos o parâmetro q e a conectividade média sobre a rede. Na Fig. (27), observamos o comportamento do coeficiente de agregação, C , para diferentes valores de conectividades média. Aqui fixamos o tamanho de rede inicial, $N = 16384$ nós, de modo que o coeficiente de agregação ainda apresenta uma flutuação quando a variância diverge. Observamos também que se aumentarmos a conectividade média, o coeficiente de agregação aumenta, fato esse que concorda com a Fig. (26), pois o mínimo caminho médio diminui quando aumentamos a conectividade média, ou seja, a rede torna-se mais conectada.

Figura 27 – Comportamento do coeficiente de agregação, C , em função do parâmetro q para diferentes conectividades média.



Fonte – Próprio autor. Comportamento do coeficiente de agregação C em função do parâmetro q para diferentes conectividades média. Fixando o tamanho de rede inicial, $N = 16384$ nós, calculamos o coeficiente de agregação sobre o maior agregado. Observamos que o coeficiente de agregação se comporta de forma crescente, mas a partir de certo valor de q observamos uma divergência, provavelmente associada ao tamanho do sistema, isso é observado quando aumentamos o tamanho do sistema. Também é interessante observar que $q > 4/3$ a variância diverge, e se lembrarmos da Fig. (20), observamos que o maior agregado causa essa flutuação.

O estudo dos comportamentos do mínimo caminho médio, $\langle \ell \rangle$, e do coeficiente de agregação, C , nos fornece indícios que deve haver uma transição no comportamento das redes q-Exponenciais.

No nosso caso, consideramos o comportamento assintótico da distribuição, Eq. (3.6), implicando em altos valores para a conectividade máxima. Assim o que observamos nessas duas seções foi o estudo de redes geradas pela distribuição q-Exponencial no limite não-assintótico, mesmo assim conseguimos caracterizar o mínimo caminho médio e ter indícios que ocorre uma mudança na comportamento dessas redes, transitando de redes semelhantes a redes aleatórias, caracterizadas quando $q < 1.25$, para ultra pequeno mundo, o que ocorre quando $4/3 < q < 3/2$ ($2 < \gamma < 3$).

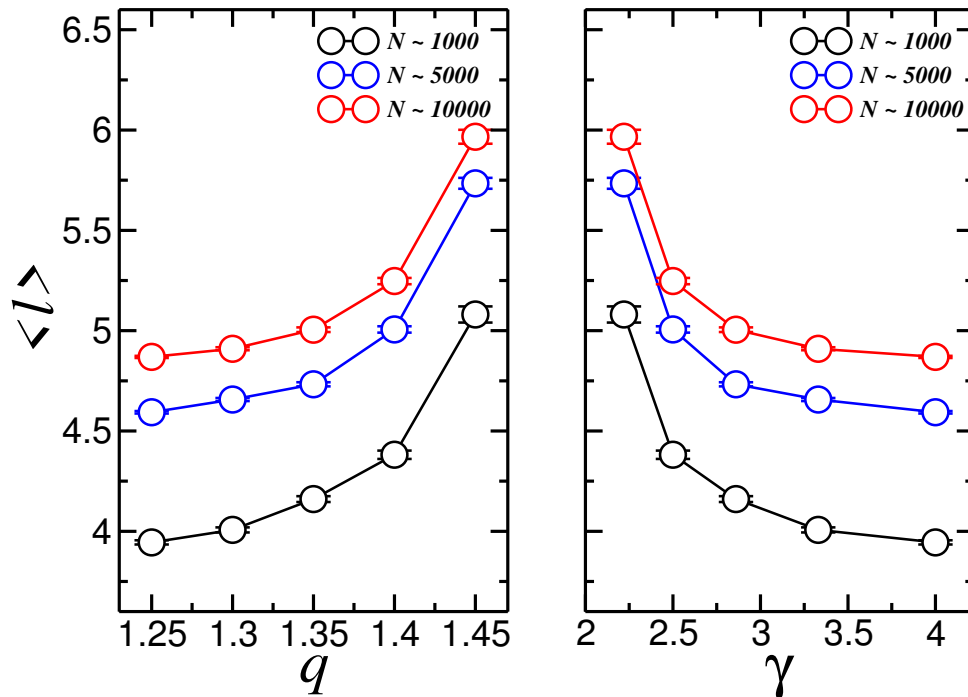
4.3 Tamanho do maior agregado constante

De acordo com a Fig. (20), o tamanho do maior agregado muda de acordo com o parâmetro q . Dessa forma, o maior agregado varia seu tamanho, variando também o mínimo caminho médio $\langle \ell \rangle$ como também o coeficiente de agregação. Uma forma de construirmos o componente gigante de tal forma que o mesmo possua todos os nós da rede é introduzir uma quantidade maior de nós de forma que o maior agregado fosse em média o tamanho desejado.

Nessa tentativa, buscamos observar se o mínimo caminho médio e coeficiente de agregação apresentam o mesmo comportamento das Figs. (19, 21) e se o mínimo apresentado na Fig. (19) é um efeito da diminuição do maior agregado. Com isso em mente podemos tomar novamente o mínimo caminho médio para diferentes tamanho do maior agregado, como também o coeficiente de agregação.

Na Fig. (28), reproduzimos os resultados para o mínimo caminho médio para diferente tamanhos de redes, comparando q e γ . Observamos que o mínimo da Fig. (19) não aparece na Fig. (28) o que confirma nossa premissa sobre como o tamanho do maior agregado afeta o mínimo caminho médio. O mínimo caminho médio cresce com o tamanho do sistema, e o mínimo observado anteriormente não aparece.

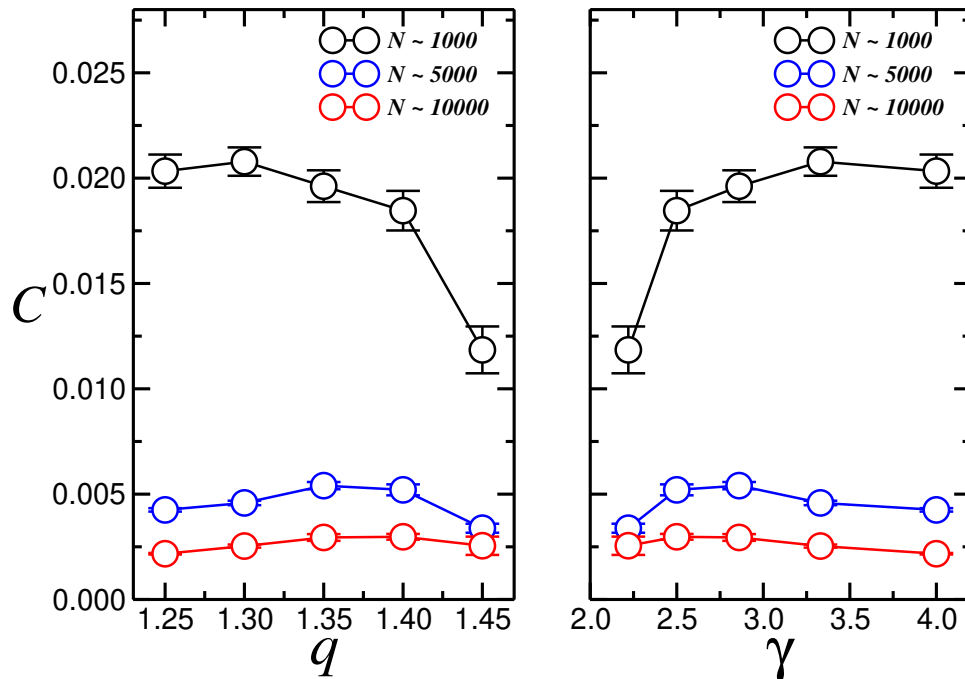
Figura 28 – Comportamento do mínimo caminho médio $\langle \ell \rangle$, em função do parâmetro q para o maior agregado.



Fonte – Próprio autor. Comportamento do mínimo caminho médio $\langle \ell \rangle$ em função do parâmetro q para diferentes tamanhos do maior agregado. Para cada valor de q tomamos o mínimo caminho médio sobre a rede para diferentes tamanhos de rede, $N \sim 1000$, 5000 e 10000. Para cada q , entramos com um número de nós superior ao esperado para o maior agregado. O comportamento do mínimo caminho médio é crescente com o aumento do parâmetro q para os tamanhos de rede acima. Foram realizadas 100 realizações sobre o maior agregado.

Podemos observar também como o coeficiente de agregação, C , é afetado quando o tamanho do maior agregado permanece constante. Na Fig. (29), observamos um comportamento parecido com a Fig. (21), mas sem o pico exibido anteriormente. Aqui o comportamento do coeficiente de agregação é mais comportado e o tamanho da rede influencia levemente o seu comportamento, de forma que quando o tamanho da rede cresce o mesmo tende a ser constante. Se observamos com relação a γ , quando $2 < \gamma < 3$, regime ultra pequeno mundo, há um aumento do coeficiente de agregação e o mesmo tende a se estabilizar em um valor constante quando $\gamma > 3$, o que representaria o regime de redes de pequeno mundo.

Figura 29 – Comportamento do coeficiente de agregação, C , em função do parâmetro q para diferentes tamanhos do maior agregado.



Fonte – Próprio autor. Comportamento do coeficiente de agregamento, C , em função do parâmetro q para diferentes tamanhos do maior agregado. Para cada valor de q tomamos o coeficiente de agregamento sobre a rede para diferentes tamanhos de rede, $N \sim 1000$, 5000 e 10000 . Para cada q entramos com um número de nós superior ao esperado para o maior agregado, assim obtemos o maior agregado. O coeficiente de agregamento tende a diminuir com o tamanho do sistema. O que nos indicaria uma característica do sistema, o nosso grafo torna-se mais ramificado com o aumento do tamanho do sistema. Foram realizadas 100 realizações sobre o maior agregado.

4.4 Robustez

Para finalizar nossa análise, sabemos que o ataques à redes reais são comumente encontrados no mundo moderno. Atingindo um determinado *hub* de uma rede de tráfego aéreo, por exemplo, podemos paralisar todo o sistema de tráfego aéreo globalmente. Em comunicações na internet, se atingirmos determinados servidores, podemos cessar toda a comunicação. O mesmo ocorre se determinada usina de força elétrica deixa de fornecer eletricidade, atingindo toda a região que depende dessa usina.

Uma medida que determina quão resistente à ataques uma rede pode ser é a robustez, ela nos diz que partindo de um determinado tipo de ataque podemos saber o quão resistente essa rede é. De acordo com Schneider *et al.* (SCHNEIDER *et al.*, 2011), uma forma de medirmos a robustez é considerar o tamanho do maior agregado durante ataques maliciosos. Considerando o tamanho do maior componente, escolhemos algum nó e o removermos do maior componente,

após isso recalculamos o tamanho do componente afetado e repetimos o processo até que a rede esteja totalmente desconectada. De forma geral, ataques maliciosos consistem de uma certa fração Q de ataques, para cada fração Q medimos o tamanho do maior agregado, $s(Q)$, e somamos o tamanho do maior agregado sobre todos os ataques. Nossa medida de robustez R , é definida como

$$R = \frac{1}{N} \sum_{Q=1}^N s(Q). \quad (4.5)$$

onde N é o número de nós do maior agregado e $s(Q)$ é a fração de nós removidos do maior agregado depois de removermos $Q = pN$ nós. O fator de normalização garante que redes de tamanho diferentes podem ser igualmente comparadas.

Para compreendermos como a robustez se comporta diante das diferentes redes geradas pela distribuição q-Exponencial, façamos novamente o paralelo com as redes livres de escala onde

$$\gamma = \frac{1}{q-1}, \quad (4.6)$$

isso ocorre quando o número de ligações máxima torna-se muito grande, $k_{max} \rightarrow \infty$. Assim, podemos analisar como se comporta a robustez das redes q-Exponenciais comparando com redes livre de escala.

Uma maneira de atacarmos a rede e medirmos sua robustez é retirarmos o maior *hub*, ou seja, o nó com maior número de ligações e o retiramos do maior componente, dessa forma atacamos a rede por grau. Ao retirarmos o maior nó, os nós que só tinham ligação com esse maior nó são retirados da rede e após isso, calculamos o tamanho do maior agregado novamente. Repetimos o processo até que o maior agregado torne-se unitário.

Outra maneira de atacarmos redes é tomarmos aleatoriamente algum nó e o retiramos da rede. Ao retirarmos o nó medimos o tamanho da rede restante e continuamos o processo de ataque até que a rede esteja totalmente desconexa.

Relembremos que quando γ pertence ao domínio $\gamma \leq 2$ não há a existência de redes, pois o primeiro e segundo momento divergem, de forma que o número de ligações máximo, k_{max} , cresce mais rápido que o tamanho da rede. Quando $2 < \gamma < 3$, as redes são de mundo ultra pequeno (COHEN; HAVLIN, 2003). Por último, quando $\gamma > 3$, temos o comportamento semelhantes de redes aleatórias. Relembremos também que o mínimo caminho médio em função

do tamanho da rede que pode ser descrito pelo expoente das redes livre de escala, γ ,

$$\langle \ell \rangle \sim \begin{cases} \text{livre de escala,} & \gamma = 2; \\ \ln \ln N, & 2 < \gamma < 3; \\ \frac{\ln N}{\ln \ln N}, & \gamma = 3; \\ \ln N, & \gamma > 3. \end{cases}$$

Quando tratamos de redes, devemos nós atentar ao comportamento delas em relação a sua estrutura. Redes onde cada nó tem aproximadamente o mesmo número de ligações, apresentam um caráter homogêneo, ou seja, quando a distribuição de conectividade é dada por uma Distribuição de Poisson elas apresentam estrutura homogênea quando observamos o número de ligações sobre cada nó, o que é corroborado pelo não aparecimento de *hubs*.

Quando tratamos de redes livres de escala, há o aparecimento de *hubs*, o que torna a rede heterogênea em relação ao grau de cada nó, há nós com mais ligações que os demais. Ao atacarmos redes aleatórias com ataques aleatórios, é esperado que elas sejam bastante robustas, visto que demoraríamos da ordem do número de nós para desconectar toda a rede. No entanto, se observamos redes livres de escala, os nós com mais ligações são os que conectam quase toda a rede, *os hubs*, de forma que ataques aleatórios demorariam para destruir a rede, mas ataques direcionados aos *hubs* fariam com que a rede rapidamente se destruísse (SCHNEIDER *et al.*, 2011; COHEN *et al.*, 2001; BOLLOBÁS; RIORDAN, 2003; BARABÁSI; ALBERT, 1999; ALBERT *et al.*, 2000).

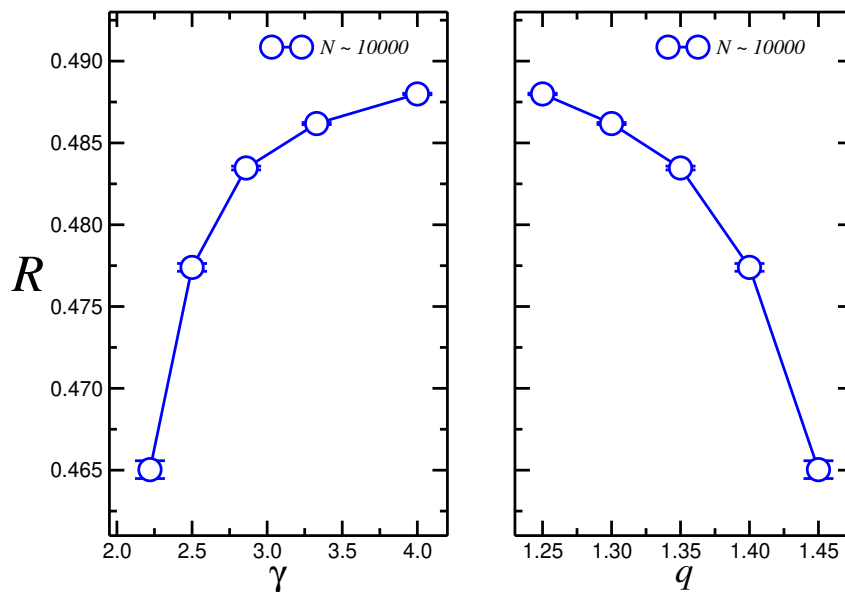
Com isso em mente, observamos que as redes q-Exponenciais são basicamente redes livre de escala no regime que $4/3 < q < 3/2$ ($2 < \gamma \leq 3$), logo queremos observar o quão frágeis são as Redes q-Exponenciais com ataque direcionado ao nó.

Agora podemos analisar o comportamento da robustez ao variarmos γ . O que acontece de fato, é que estamos transitando sobre regimes de redes livre de escala até o regime de redes aleatórias. A Fig. (30), mostra o comportamento da robustez para diferentes valores de q , paralelamente, podemos observar o valor de γ que é o expoente que caracteriza as redes livres de escala.

Ao tomarmos o ataque direcionado ao *hub*, queremos observar o quão robusta a redes q-Exponenciais são. A Fig. (30) apresenta que redes pertencentes ao regime aleatório são mais robustas do que redes livre de escala quando estamos atacando a rede retirando seus *hubs*. Paralelamente, observamos que q , o parâmetro que controla as redes q-Exponenciais, atua

sobre a estrutura das redes, pois a robustez é maior em redes aleatórias atacando maliciosamente por grau, como era de se esperar (BOLLOBÁS; RIORDAN, 2003), mas menor em redes livre de escala, pois são mais suscetíveis a ataques maliciosos por grau, sendo facilmente destruídas (COHEN *et al.*, 2001).

Figura 30 – Análise da robustez para redes de q-Exponenciais em função do parâmetro q para o tamanho do maior agregado $N \sim 10000$



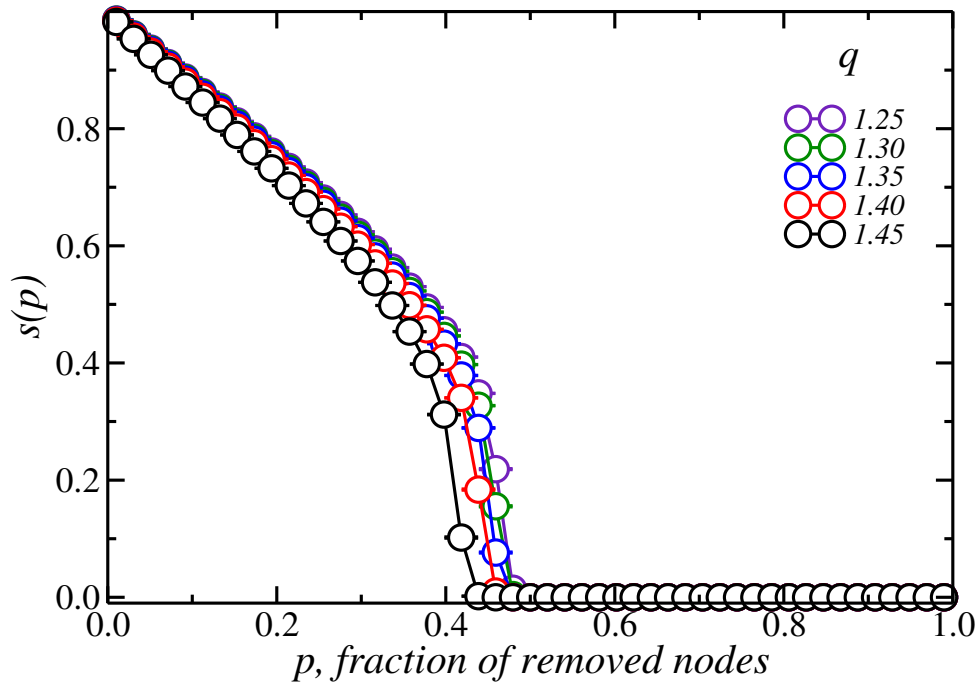
Fonte – Próprio autor. Análise da robustez para redes de Tsallis em função do parâmetro q para o tamanho do maior agregado $N \sim 10000$. A robustez diminuí com o aumento do parâmetro q e semelhantemente aumenta para γ , lembrando que $\gamma = \frac{1}{q-1}$, esse comportamento mostra que a medida que q aumenta a rede torna-se mais ramificada e quando atacamos a rede, removendo seu nós mais conectados, a rede tende a perder robustez com o aumento do parâmetro q . Nessa rede tomamos a conectividade média fixa, $\langle k \rangle = 5$, como forma de continuação dos resultados anteriores.

Outra forma de observamos a robustez da rede é tomarmos o tamanho do maior agregado em função da fração de nós removidos. Esse comportamento é observado na Fig. (31), onde tomando diferentes redes q-Exponenciais, geradas pelo parâmetro q que está diretamente ligado a qual classe de universalidade a rede pertence, pois $\gamma = \frac{1}{q-1}$, observamos que aumentando o q as redes tornam-se menos robustas.

Se observássemos em função de γ , quando $\gamma > 3$, que apresenta um carácter semelhante a redes aleatórias, elas são mais resistentes a ataque malicioso por grau, pois a homogeneidade na estrutura da rede em relação ao grau às tornam mais robusta. Esse carácter é exibido quando $q < 1.33$ na Fig. (31). Quando $2 < \gamma < 3$, regime de redes mundo ultra pequeno, essas redes são mais frágeis, pois ao retirarmos os nós que possuem mais ligações a rede é

facilmente destruída.

Figura 31 – Análise da robustez para redes de q -Exponenciais em função do parâmetro γ para o tamanho do maior agregado $N \sim 5000$



Fonte – Próprio autor. Análise da robustez para redes de Tsallis em função do parâmetro γ para o tamanho do maior agregado $N \sim 5000$. A robustez diminui de acordo com o parâmetro q . Quando aumentamos q estamos saindo de um regime de redes aleatórias e indo para um regime de redes ultra mundo pequena, nesse caso a rede torna-se mais frágil a ataques por remoção de *hubs*. Nessa rede tomamos a conectividade média fixa, $\langle k \rangle = 5$, tomando 100 realizações sobre cada valor de q , e tomando uma média sobre o intervalo de frações removidas.

4.4.1 Robustez com $\langle k \rangle$ variável

De forma a removermos o problema da distribuição nunca formar o maior agregado do tamanho do número de nós introduzidos, como também comparamos nossas medidas as redes livre de escala, tomamos k_{min} e o k_{max} de forma que a conectividade média fosse dada pela Eq. (2.27)

$$k_{max} = k_{min} N^{\frac{1}{\gamma-1}} = k_{min} N^{\frac{q-1}{q}}.$$

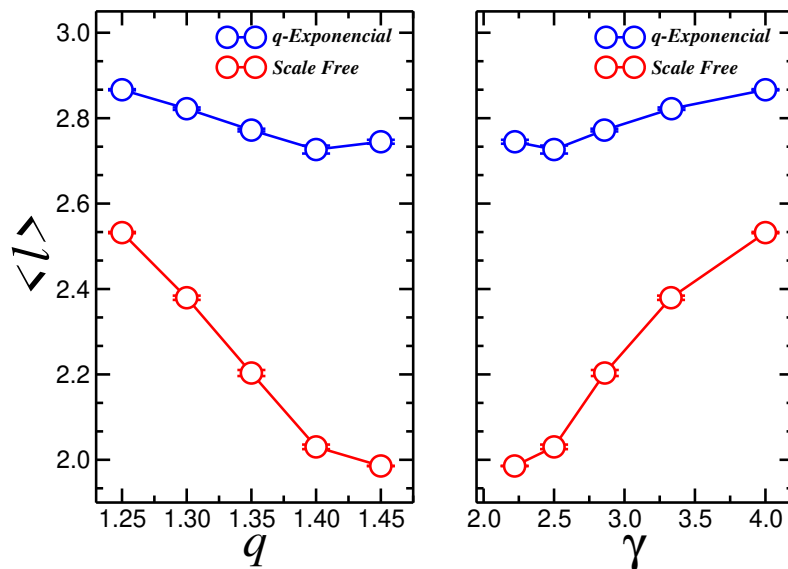
Ao usarmos o número máximo de ligações podemos reescrever a conectividade média como:

$$\begin{aligned} \langle k \rangle &= \left(\frac{\gamma-1}{-\gamma+2} \right) k_{min}^{\gamma-1} \left[\left(k_{min} N^{\frac{1}{\gamma-1}} \right)^{-\gamma+2} - k_{min}^{-\gamma+2} \right] \\ &= \left(\frac{q}{2q-2} \right) k_{min}^{\frac{q}{q-1}} \left[\left(k_{min} N^{\frac{q-1}{q}} \right)^{\frac{2q-2}{q-1}} - k_{min}^{\frac{2q-2}{q-1}} \right]. \end{aligned}$$

Neste caso tentamos aproximar a rede q-Exponencial por redes livre escala pois calculamos a conectividade média como se estivéssemos em uma rede livre de escala. Com essa tentativa garantimos que o maior agregado possua todos os nós da rede. Assim podemos calcular o mínimo caminho médio, o coeficiente de agregação como também a robustez, comparando com redes livre de escala.

A Fig. (32) apresenta o comportamento do mínimo caminho médio para rede q-Exponenciais e para redes livre de escala. Observamos que tanto as redes q-Exponenciais como as redes livre de escala apresentam comportamento semelhantes. Em ambos os casos, quando aumentamos o parâmetro q , o mínimo caminho diminui. Quando observamos as redes livre de escala, o mínimo caminho apresenta um mínimo quando $2 < \gamma < 3$, que é o caso de redes ultra mundo pequeno, onde o mínimo caminho médio decresce com $\ln(\ln(N))$ (COHEN; HAVLIN, 2003). As redes q-Exponencias podem ser comparadas a redes livre de escala, ambas as redes apresentam comportamento parecidos quando vamos para o regime de redes aleatórias, ou seja, quando $\gamma > 3$.

Figura 32 – Comportamento do mínimo caminho médio $\langle \ell \rangle$ em função do parâmetro q tomando $k_{min} = 30$

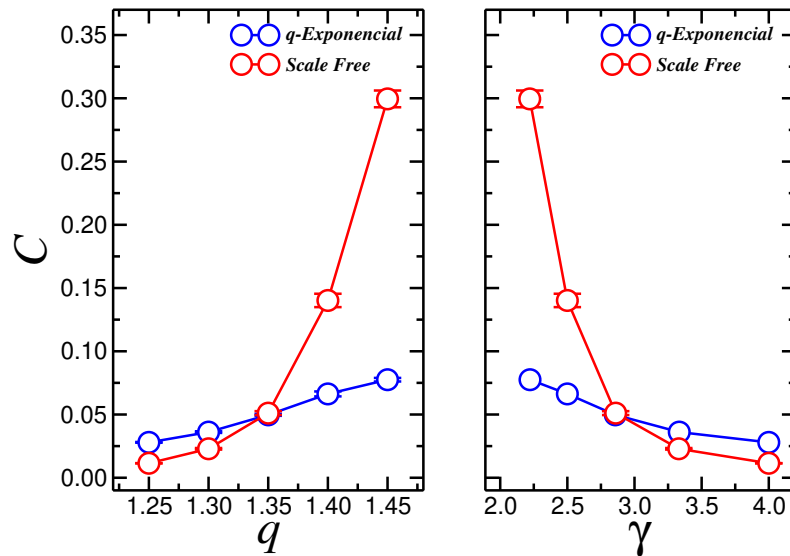


Fonte – Próprio autor. Comportamento do mínimo caminho médio $\langle \ell \rangle$ em função do parâmetro q tomando $k_{min} = 30$ sobre o maior agregado $N_{giant} = 10000$ nós. Aqui analisamos o mínimo caminho médio para redes q-Exponenciais e livres de escala. Observa-se que quando $\gamma > 3$ as redes se aproximam de do regime de redes aleatórias mostrando que ambas as redes possuem comportamentos semelhantes.

Podemos analisar o comportamento do coeficiente de agregação como anteriormente, tomando as redes q-Exponenciais e livre de escala variando o parâmetro q . Na Fig. (33), apresentamos o coeficiente de agregação em função de q , comparando com as redes livre de escala, observamos que quando $\gamma > 3$, onde esperamos redes semelhantes a redes aleatórias, o coeficiente de agregação é semelhante nas redes q-Exponenciais.

Figura 33 – Comportamento do coeficiente de agregação, C , em função do parâmetro q tomando

$$k_{min} = 30$$



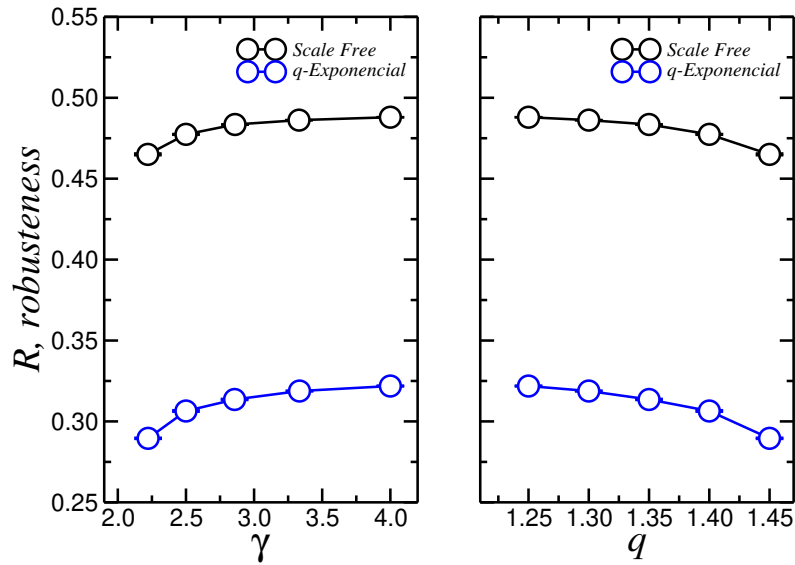
Fonte – Próprio autor. Comportamento do coeficiente de agregação, C , em função do parâmetro q tomando $k_{min} = 30$ sobre o maior agregado $N_{giant} = 10000$ nós. Analisamos o coeficiente de agregação para redes q-Exponenciais e livres de escala. Quando $3 < \gamma < 2$, as redes apresentam características distintas, o coeficiente de agregação é bem maior em redes livre de escala.

Comparando o mínimo caminho médio e o coeficiente de agregação para redes q-Exponenciais e redes livre de escala, percebemos que as redes são equivalentes quando $\gamma > 3$, representando regime de redes aleatórias. Não devemos esquecer o fato que as redes q-Exponencias podem ser representadas por redes livres de escala quando $k_{max} \gg 1$.

Podemos também analisar o comportamento da robustez. A Fig. (34) mostra a semelhança entre redes livre de escala comparadas a redes q-Exponenciais, ambas apresentam o mesmo comportamento diferindo apenas de quão robusta a rede é. Nesse caso, concluímos que as redes q-Exponenciais possuem menor robustez se as compararmos a redes livre de escala.

Por fim, observamos que as redes q-Exponenciais podem se comportar como redes aleatórias e como redes livre de escala para um valor de q apropriado. Nesse caso, mostramos

Figura 34 – Análise da robustez para redes de q-Exponenciais e redes livres de escala, em função do parâmetro γ .



Fonte – Próprio autor. Análise da robustez para redes de q-Exponenciais e redes livre de escala, em função do parâmetro γ . Tomando o $k_{min} = 30$ para diferentes valores de γ , observamos a robustez para os dois tipos de rede, em ambas temos o crescimento da robustez em relação a γ . No entanto, redes livre de escala são mais resistentes que as redes q-Exponenciais quando as estamos removemos seus hubs. Ambas as redes possuem o mesmo $\langle k \rangle$, dado pela Eq. (4.7).

três diferentes abordagens para entender como relacionarmos as redes q-Exponenciais com redes livres de escala. Nessas abordagens tentamos caracterizar as redes geradas quando variamos o parâmetro q , conseqüentemente γ . Analisamos como o mínimo caminho médio, o coeficiente de agregação e robustez se comportam quando geramos redes que transitam sobre diferentes regimes, passando por redes de pequeno mundo e ultra pequeno mundo.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Nos propusemos a estudar redes complexas desde a origem da definição de grafos, definindo algumas das propriedades que fundamentais: como grau, grau médio, distribuição de conectividade, mínimo caminho médio, coeficiente de agregação e robustez. Essas propriedades nos permitiram estudar como redes se comportam em determinados regimes, dito isto, estudamos redes aleatórias, redes de mundo pequeno e por fim redes livres de escala, onde observamos algumas de suas principais características.

Redes livre de escala são redes cuja a distribuição de conectividade é dada por uma lei de potência

$$p(k) = Ck^{-\gamma},$$

com expoente γ bem definido. Redes livre de escala nos permitem observar regimes de mundo pequeno, ultra mundo pequeno e regimes semelhantes a redes aleatórias. Sendo assim, buscamos caracterizar essas redes observando o comportamento do mínimo caminho médio $\langle \ell \rangle$, coeficiente de agregação e a robustez dessas redes. As redes q-Exponenciais se comportam como redes livres de escala, quando a conectividade máxima da rede é muito grande. Assim, se observarmos o mínimo caminho médio $\langle \ell \rangle$ como função do tamanho da rede, podemos estimar a qual regime as redes q-Exponenciais pertencem.

$$\langle \ell \rangle \sim \begin{cases} \text{livre de escala,} & \gamma = 2; \\ \ln \ln N, & 2 < \gamma < 3; \\ \frac{\ln N}{\ln \ln N}, & \gamma = 3; \\ \ln N, & \gamma > 3. \end{cases}$$

Estudamos as redes q-Exponenciais, cuja a distribuição de conectividade era dada por uma q-Exponencial, caracterizada pela Mecânica Estatística não-extensiva proposta por Constantino Tsallis, (TSALLIS, 1988). A característica dessa distribuição é que ela maximiza a entropia generalizada, proposta por Tsallis (TSALLIS, 2008). E na sua forma assintótica pode ser aproximada por uma distribuição em lei de potência, que nós forneceria uma aproximação para redes livre de escala.

Tomando o modelo de configurações, Sec. (2.7.1), geramos as redes q-Exponenciais a partir da distribuição q-Exponencial, nosso objetivo era descobrir como o parâmetro q , associado a entropia de Tsallis influenciava o comportamento dessa rede. Para isso, calculamos o mínimo

caminho médio, como também o coeficiente de agregação sobre a rede e observamos se havia algum ajuste que pudesse representar os nossos dados. Usando redes livre de escala, onde conhecemos o comportamento do mínimo caminho médio, tentamos comparar as redes q -Exponenciais com elas.

Observamos que há um comportamento transitório entre as redes, pois q está diretamente relacionado a γ , o expoente das distribuições de conectividade das redes livre de escala. Indicando que há uma transição de um regime de redes de pequeno mundo para redes de ultra pequeno mundo. Mesmo quando alteramos a conectividade média das redes existe um valor de q cujo o mínimo caminho mínimo é apresenta um valor mínimo.

Posteriormente buscamos observar o comportamento do mínimo caminho médio, do coeficiente de agregação tomando o tamanho do maior agregado constante. Dessa forma, o mínimo apresentado anteriormente desaparecia mostrando. ser um efeito da diminuição do maior agregado. Paralelo a isso, tentamos comparar as redes q -Exponenciais com as redes livre de escala e mostramos que as redes q -Exponencias tendem a redes aleatórias quando $\gamma > 3$ e a sua robustez se equipara a redes livre de escala nesse regime.

Futuramente queremos nos dedicar a observar como a distribuição q -Exponencial pode está relacionada a um mínimo do caminho médio, observando sobre o ponto de vista da Mecânica Estatística não-extensiva, pois de acordo com Tsallis é essa distribuição que maximiza a entropia generalizada. Esperamos também calcularmos diferentes medidas e constatarmos que existe uma mudança de regime entre as redes cujo o parâmetro q é responsável criando um modelo que seja compatível com os resultados obtidos nesse trabalho.

REFERÊNCIAS

- ALBERT, R.; JEONG, H.; BARABÁSI, A.-L. Error and attack tolerance of complex networks. **Nature**, Macmillian Magazines Ltd., v. 406, p. 378, jul. 2000. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/35019019>>.
- BARABÁSI, A.-L. **Network Science**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2016. ISBN 1107076269.
- BARABÁSI, A.-L.; ALBERT, R. Emergence of scaling in random networks. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 286, n. 5439, p. 509–512, 1999. ISSN 0036-8075. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1126/science.286.5439.509>>.
- BIGGS, N. L.; LLOYD, E. K.; WILSON, R. J. **Graph Theory 1736-1936**. New York, NY, USA: Clarendon Press, 1999. ISBN 0198539169.
- BOGUÑÁ, M.; PASTOR-SATORRAS, R.; VESPIGNANI, A. Cut-offs and finite size effects in scale-free networks. **The European Physical Journal B**, v. 38, n. 2, p. 205–209, Mar 2004. ISSN 1434-6036. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjb/e2004-00038-8>>.
- BOLLOBÁS, B.; RIORDAN, O. The diameter of a scale-free random graph. **Combinatorica**, v. 24, n. 1, p. 5–34, Jan 2004. ISSN 1439-6912. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00493-004-0002-2>>.
- BOLLOBÁS, B.; RIORDAN, O. Robustness and vulnerability of scale-free random graphs. **Internet Mathematics**, Taylor & Francis, v. 1, n. 1, p. 1–35, 2003. ISSN 1542-7951. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/15427951.2004.10129080>>.
- CLAUSET, A. **Lectures in Network Analysis and Modeling**. 2013. Santa Fe Institute. Disponível em: <http://tuvalu.santafe.edu/~aaronc/courses/5352/fall2013/csci5352_2013_L11.pdf>.
- COHEN, R.; EREZ, K.; AVRAHAM, D. ben; HAVLIN, S. Breakdown of the internet under intentional attack. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 86, p. 3682–3685, Apr 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.3682>>.
- COHEN, R.; HAVLIN, S. Scale-free networks are ultrasmall. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 90, n. 5, feb 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physrevlett.90.058701>>.
- COHEN, R.; HAVLIN, S. **Complex networks: structure, robustness and function**. Cambridge University Press, 2010. ISSN 1139489275. ISBN 978-0521841566. Disponível em: <http://www.ebook.de/de/product/10555087/shlomo_havlin_reuven_cohen_complex_networks.html>.
- CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; STEIN, C. **Introduction to Algorithms**. [S.l.]: The MIT Press, 2009. ISBN 0262033844.
- DOROGOVTSEV, S. N.; MENDES, J. F. F. Evolution of networks. **Advances in Physics**, Taylor & Francis, v. 51, n. 4, p. 1079–1187, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00018730110112519>>.
- ERDŐS, P.; RÉNYI, A. On random graphs i. **Publ. Math. Debrecen**, v. 6, p. 290–297, 1959.

ERDÖS, P.; RÉNYI, A. On the evolution of random graphs. In: **Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences**. [S.l.: s.n.], 1960. v. 5, p. 17–61.

ERDÖS, P.; RÉNYI, A. On the strength of connectedness of a random graph. **Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica**, v. 12, n. 1, p. 261–267, Mar 1964. ISSN 1588-2632. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02066689>>.

HANEL, R.; THURNER, S. On the derivation of power-law distributions within classical statistical mechanics far from the thermodynamic limit. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 365, n. 1, p. 162–166, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.physa.2006.01.011>>.

MAGOULAS, G. D.; ANASTASIADIS, A. Approaches to adaptive stochastic search based on the nonextensive q-distribution. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 16, n. 07, p. 2081–2091, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0218127406015921>>.

MILGRAM, S. The small world problem. **Psychology Today**, v. 1, p. 61–67, 1967.

MOLIN, J. D.; SILVA, M. A. A. d.; SILVA, I. da; CALIRI, A. Nonextensive statistical mechanics applied to protein folding problem: kinetics aspects. **Brazilian Journal of Physics**, SciELO Brasil, v. 39, n. 2A, p. 435–438, 2009. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/S0103-97332009000400016>>.

MOLLOY, M.; REED, B. A critical point for random graphs with a given degree sequence. **Random Structures & Algorithms**, Wiley Subscription Services, Inc., A Wiley Company, New York, NY, USA, v. 6, n. 2-3, p. 161–179, mar. 1995. ISSN 1098-2418. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/rsa.3240060204>>.

MORENO, J. L. **Who Shall Survive: A New Approach to the Problem of Human Interrelations**. [S.l.]: Isha Books, 1934. v. 6. 388-393 p. ISBN 9332853770.

NEWMAN, M. **Networks: An Introduction**. New York, NY, USA: Oxford University Press, 2010. ISBN 0199206651.

NEWMAN, M. E. J. The structure and function of complex networks. **SIAM Review**, Society for Industrial & Applied Mathematics (SIAM), v. 45, n. 2, p. 167–256, jan 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/S003614450342480>>.

NEWMAN, M. E. J.; STROGATZ, S. H.; WATTS, D. J. Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 64, n. 2, p. 026118, jul. 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physreve.64.026118>>.

PEMMARAJU, S.; SKIENA, S. **Computational Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica ®**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003. ISBN 978-0521806862.

PICOLI, S.; MENDES, R.; MALACARNE, L.; SANTOS, R. q-distributions in complex systems: a brief review. **Brazilian Journal of Physics**, FapUNIFESP (SciELO), v. 39, n. 2A, p. 468–474, 2009. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/S0103-97332009000400023>>.

PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P. **Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing**. 3. ed. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2007. ISBN 0521880688, 9780521880688.

QUEIRÓS, S. M. D. Generalised cascades. **Brazilian Journal of Physics**, SciELO Brasil, v. 39, n. 2A, p. 448–452, aug 2009. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/S0103-97332009000400019>>.

RAPOPORT, A. Cycle distributions in random nets. **The bulletin of mathematical biophysics**, v. 10, n. 3, p. 145–157, Sep 1948. ISSN 1522-9602. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF02477489>>.

SCHNEIDER, C. M.; MOREIRA, A. A.; ANDRADE, J. S.; HAVLIN, S.; HERRMANN, H. J. Mitigation of malicious attacks on networks. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 108, n. 10, p. 3838–3841, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1073/pnas.1009440108>>.

SCOTT, J. **Social Network Analysis**. 2. ed. [S.l.]: SAGE Publications Ltd, 2012. ISBN 0761963383.

SOARES, D. J. B.; TSALLIS, C.; MARIZ, A. M.; SILVA, L. R. da. Preferential attachment growth model and nonextensive statistical mechanics. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 70, n. 1, p. 70, apr 2005. ISSN 0295-5075. Disponível em: <<http://doi.org/10.1209/epl/i2004-10467-y>>.

SOLOMONOFF, R.; RAPOPORT, A. Connectivity of random nets. **The bulletin of mathematical biophysics**, v. 13, n. 2, p. 107–117, Jun 1951. ISSN 1522-9602. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF02478357>>.

THURNER, S. Nonextensive statistical mechanics and complex scale-free networks. **Europhysics News**, v. 36, n. 6, p. 218–220, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/epn:2005612>>.

TSALLIS, C. Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics. **Journal of Statistical Physics**, Springer Nature, v. 52, n. 1-2, p. 479–487, jul 1988. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01016429>>.

TSALLIS, C. Connection between scale-free networks and nonextensive statistical mechanics. **The European Physical Journal Special Topics**, v. 161, n. 1, p. 175–180, 2008. ISSN 1951-6401. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1140/epjst/e2008-00759-x>>.

WALKE, K. **Puzzles | “The Seven Bridges of Königsberg” Gets a Facelift**. 2015. Inverse Culture. Disponível em: <<https://www.inverse.com/article/7657-puzzles-the-seven-bridges-of-knigsberg-gets-a-facelift>>.

WALKER, D. **The six degrees of separation model**. 2014. Wikipedia. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Small-world_experiment#/media/File:Six_degrees_of_separation.svg>.

WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. Collective dynamics of /‘small-world/’ networks. **Nature**, v. 393, n. 6684, p. 440–442, jun. 1998. ISSN 0028-0836. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/30918>>.