UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

NEILHA MARCIA PINHEIRO

DESIGUALDADES TIPO ALEXANDROV-FENCHEL PARA HIPERSUPERFÍCIES DA ESFERA E DO ESPAÇO HIPERBÓLICO

FORTALEZA
2018

NEILHA MARCIA PINHEIRO

DESIGUALDADES TIPO ALEXANDROV-FENCHEL PARA HIPERSUPERFÍCIES DA ESFERA E DO ESPAÇO HIPERBÓLICO

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Dr. Frederico Vale Girão

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P721d Pinheiro, Neilha Marcia.
Desigualdades tipo Alexandrov-Fenchel para hipersuperfícies da esfera e do espaço hiperbólico / Neilha Marcia Pinheiro. – 2018.
42 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática , Fortaleza, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Frederico Vale Girão.

1. Fluxo pelo inverso da curvatura média. 2. Fluxo pela função suporte. 3. Desigualdades de Alexandrov-Fenchel. I. Título.

CDD 510

NEILHA MARCIA PINHEIRO

DESIGUALDADES TIPO ALEXANDROV-FENCHEL PARA HIPERSUPERFÍCIES DA ESFERA E DO ESPAÇO HIPERBÓLICO

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria.

Aprovoda em: 23 / 02 / 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Frederico Vale Girão (Orientador)
Departamento de Matemática - Pós-graduação em Matemática (UFC)

Prof. Dr. Levi Lopes de Lima
Departamento de Matemática - Pós-graduação em Matemática (UFC)

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros
Departamento de Matemática - Pós-graduação em Matemática (UFC)

Prof. Dr. Sebastião Carneiro de Almeida
Departamento de Economia Aplicada - CAEN (UFC)

Prof. Dr. Juscelino Pereira Silva - Departamento de Matemática (UFCA)

Este trabalho é dedicado ao meu esposo Hudson Lima.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por essa conquista.

Aos meus pais Henrique Pinheiro e Ilânia Pinheiro pelo amor e compreensão dados ao longo dessa trajetória. Aos meus irmãos Lara, Lidiane, Kayo, Rafaela e Vera por estarem sempre me apoiando. Aos meus sobrinhos João Ricardo, Nícolas e Pedro Henrique pelos vários momentos maravilhosos que me propocionaram.

Ao meu querido esposo Hudson Lima pelo amor e toda paciência que teve comigo.

Ao meu orientador Frederico Vale Girão por todo apoio, paciência e orientação para a realização deste trabalho.

Aos professores Antônio Gervásio Colares e José Robério Rogério pela orientação, incentivo e paciência que tiveram comigo.

Aos professores Levi Lopes de Lima, Abdênago Alves de Barros, Sebastião Carneiro de Almeida, Juscelino Pereira Silva, Antonio Caminha Muniz Neto e Jonatan Floriano da Silva por terem aceitado participar da banca.

A todos os meus amigos da Pós-Graduação em Matemática da UFC, em especial aos meus amigos do Seminário de Geometria: Alexandre, Amilcar, Diego, Grangeiro, Victor e Weslley, pelo apoio e amizade. Também, agradeço aos meus amigos Fabrício Figueredo pelos exelentes conselhos e Diego Rodrigues pela parceria na pesquisa.

Às minhas amigas Kiara e Horleina pela amizade.

Agradeço aos professores da Pós-graduação: Alexandre César Gurgel Fernandes, Florentiu Daniel Cibotaru, José Fábio Bezerra Montenegro, Gleydson Chaves Ricarte, Gregório Pacelli Feitosa Bessa, Jorge Herbert Soares de Lira, Levi Lopes de Lima, Luciano Mari, Luquésio Petrola de Melo Jorge, José Afonso de Oliveira e Marcos Ferreira de Melo pela dedicação. Em particular, aos professores Florentiu Daniel Cibotaru e José Fábio Bezerra Montenegro por toda atenção que me dedicaram.

Aos funcionários Andrea, Elizeuda, Erivan, Jessyca, Francileide, Rocilda, Ícaro e Tavares pela competência e agilidade.

À Capes pelo apoio financeiro.

RESUMO

Esta tese contém duas partes. Na primeira, encontramos uma quantidade monótona ao longo do fluxo dado pelo inverso da curvatura média e usamos tal quantidade para provar uma desigualdade tipo Alexandrov-Fenchel para hipersuperfícies estritamente convexas da esfera. Na segunda parte, consideramos uma desigualdade conjecturada por Ge, Wang e Wu em 2015 para hipersuperfícies do espaço hiperbólico. Utilizando um fluxo geométrico, o qual chamamos de fluxo pela função suporte, e uma quantidade monótona ao longo desse fluxo, provamos a validade de uma desigualdade semelhante à que foi conjecturada. Além disso, quando a dimensão do ambiente é três, mostramos que a desigualdade conjecturada é falsa.

Palavras-chave: Fluxo pelo inverso da curvatura média. Fluxo pela função suporte. Desigualdades de Alexandrov-Fenchel.

ABSTRACT

This thesis is divided in two parts. In the first, we find a monotone quantity along the inverse mean curvature flow and use it to prove an Alexandrov–Fenchel-type inequality for strictly convex hypersurfaces in the sphere. In the second part, we consider an inequality conjectured by Ge, Wang and Wu in 2015 for hypersurfaces in the hyperbolic space. Using a geometric flow, which we call the support function flow, and a monotone quantity along of this flow, we prove an inequality similar to the one that was conjectured. Moreover, when the dimension of the ambient manifold is three, we show that the inequality that was conjectured is false.

Keywords: Inverse mean curvature flow. Support function flow. Alexandrov-Fenchel inequalities.

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	9
2	**PRELIMINARES**	14
2.1	**Fluxos extrínsecos**	14
2.2	**Uma identidade para produtos torcidos**	15
2.3	**Variações**	17
3	**DESIGUALDADES PARA HIPERSUPERFÍCIES DO $\mathbb{R}^n$ E $\mathbb{H}^n$**	20
3.1	**Desigualdade para hipersuperfícies do $\mathbb{R}^n$**	20
3.2	**Desigualdades para hipersuperfícies do $\mathbb{H}^n$**	21
4	**DESIGUALDADE PARA HIPERSUPERFÍCIES DE $\mathbb{S}^n_+$**	25
4.1	**Conjectura e teorema principal**	25
4.2	**Quantidade monótona ao longo do IMCF**	26
4.3	**Prova do Teorema 4.1**	29
5	**DESIGUALDADE PARA HIPERSUPERFÍCIES DE $\mathbb{H}^n$**	32
5.1	**Existência e Propriedades do Fluxo SFF**	32
5.2	**Desigualdade**	35
6	**CONCLUSÃO**	39
	REFERÊNCIAS	40

1 INTRODUÇÃO

Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ com $n \geq 3$ uma hipersuperfície convexa. As desigualdades de Alexandrov-Fenchel, provadas por Alexandrov em (1937, 1938), dizem que

$$\left(\frac{V_{n-k}(\Omega)}{V_{n-k}(B)}\right)^{\frac{1}{n-k}} \leq \left(\frac{V_{n-k-1}(\Omega)}{V_{n-k-1}(B)}\right)^{\frac{1}{n-k-1}}, \tag{1.1}$$

onde B é uma bola em $\mathbb{R}^n$, Ω é o domínio em $\mathbb{R}^n$ cujo o bordo é Σ e

$$V_{n-k}(\Omega) = C_{n-1,k} \int_{\Sigma} \sigma_{k-1}(\lambda) d\Sigma$$

com $C_{n-1,k} = \frac{\sigma_k(I)}{\sigma_{k-1}(I)}$, $I = (1, \cdots, 1)$, e $\sigma_k(\lambda)$ é conhecida como a k-ésima curvatura média de Σ do vetor curvatura principal $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ de Σ, $1 \leq k \leq n-1$. Ademais, a igualdade em (1.1) ocorre se, e somente se, Σ é uma esfera redonda.

Definição 1.1. *Seja M uma variedade riemanniana e $\Sigma^{n-1} \subset M^n$ uma hipersuperfície de M. Dizemos que Σ é k-convexa se $\lambda(x) \in \bar{\Gamma}_k$ para todo $x \in \Sigma$, onde Γ_k é o cone de Garding*

$$\Gamma_k = \{\kappa \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \quad \sigma_m(\kappa) > 0, \quad \forall m \leq k\}.$$

Caso $\lambda(x) \in \Gamma_k$ para todo $x \in \Sigma$ diremos ainda que Σ é estritamente k-convexa. Também, dizemos que um domínio $\Omega \subset M^n$ é (estritamente) k-convexo se $\Sigma = \partial\Omega$ é (estritamente) k-convexa.

Observação 1.1. *Dizemos que uma hipersuperfície é convexa se ela é n-convexa e que é média convexa se a mesma é 1-convexa.*

Definição 1.2. *Uma hipersuperfície $\Sigma^{n-1} \subset M^n$ é estrelada se ela pode ser escrita como um gráfico sobre uma esfera geodésica.*

Escolhendo $O \in M^n$ para ser a origem fixada, temos a seguinte definição.

Definição 1.3. *Uma hipersuperfície $\Sigma^{n-1} \subset M^n$ é estrelada com relação a origem se ela pode ser escrita como um gráfico sobre uma esfera geodésica centrada na origem $O \in M^n$.*

A menos que mencionemos ao contrário, a hipersuperfície $\Sigma^{n-1} \subset M^n$ será sempre mergulhada, fechada (compacta sem bordo), orientável e conexa.

Guan e Li (2009) generalizaram a desigualdade (1.1) para $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ estrelada e k-convexa (veja o Teorema 3.2).

Considere o n-espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ para ser o espaço ambiente no lugar de $\mathbb{R}^n$. Fixemos, de uma vez por todas, uma origem $O \in \mathbb{H}^n$. Usamos o modelo de $\mathbb{H}^n$ dado por $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{n-1}$ munido com a métrica

$$dr^2 + senh^2(r)h,$$

onde h é a métrica da esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1}$ e r é a distância geodésica para a origem.

Em 2016, de Lima e Girão usaram o fluxo pelo inverso da curvatura média (IMCF) e um resultado provado por Brendle, Hung e Wang em 2016 (veja o Teorema 3.3) para mostrar a seguinte desigualdade tipo Alexandrov-Fenchel: Se $\Sigma \subset \mathbb{H}^n$ com $n \geq 3$ é estrelada e estritamente média convexa, então

$$\int_\Sigma \rho H d\Sigma \geq (n-1)\omega_{n-1}\left[\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} + \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right], \tag{1.2}$$

onde $\rho : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ é a função dada por

$$\rho(r) := cosh(r), \tag{1.3}$$

$H = \sigma_1(\lambda)$ é a curvatura média de Σ, ω_{n-1} é a área de $\mathbb{S}^{n-1}$ e $|\Sigma|$ é a área de Σ. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, Σ é uma esfera geodésica centrada na origem. Esta desigualdade foi conjecturada por Dahl, Gicquaud e Sakovich em 2013, quando eles estavam investigando a desigualdade de Penrose para gráficos hiperbólicos.

Agora, considere a n-esfera unitária $\mathbb{S}^n$, com $n \geq 3$, para ser o espaço ambiente. Fixemos, de uma vez por todas, uma origem $O \in \mathbb{S}^n$. Consideramos o modelo de $\mathbb{S}^n$ dado por $(0, \pi) \times \mathbb{S}^{n-1}$ munido com a métrica

$$dr^2 + sen^2(r)h,$$

onde h é a métrica da esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1}$ e r é a distância geodésica para a origem. Neste caso, a função $\rho : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ é dada por

$$\rho(r) = cos(r). \tag{1.4}$$

Se Σ é difeomorfa à $\mathbb{S}^{n-1}$ e está contida em um hemisfério aberto (por exemplo, se Σ é estritamente convexa (veja DO CARMO e WARNER (1970))), então Σ divide $\mathbb{S}^n$ em duas regiões: uma região que contém um hemisfério propriamente, a qual chamamos de região exterior, e uma região que está propriamente contida em um hemisfério, a qual chamamos de região interior.

Makowski e Scheuer provaram em 2016 (veja também GERHARDT (2015)) que se Σ é estritamente convexa, então o IMCF converge, em um tempo finito, para um equador E_Σ. Este equador determina dois hemisférios, com um deles contendo Σ;

denotaremos por $x(\Sigma)$ o centro do hemisfério, determinado por E_Σ, que contém Σ (olhando o hemisfério como uma bola geodésica). Iremos nos referir ao ponto $x(\Sigma)$ como o ponto associado a Σ via o IMCF. Note que, se Σ é uma esfera geodésica, então $x(\Sigma)$ é seu centro.

Dado $x \in \mathbb{S}^n$, consideramos a função $\rho_x : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\rho_x(q) = cos(r_x(q)),$$

onde $r_x(q)$ denota a distância geodésica de q a x. Assim, se x coincide com a origem, recuperamos a função ρ definida em (1.4).

Definimos a quantidade $\mathcal{K}$ por

$$\mathcal{K}(\Sigma) = \omega_{n-1}\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}.$$

Seja $x \in \mathbb{S}^n$. Se Σ é difeomorfa à $\mathbb{S}^{n-1}$ e está contida em um hemisfério aberto, definimos a quantidade $\mathcal{L}_x$ por

$$\mathcal{L}_x(\Sigma) = n\int_\Omega \rho_x d\Omega,$$

onde Ω é a região interna limitada por Σ. Se x coincide com a origem, escrevemos somente $\mathcal{L}(\Sigma)$ para denotar $\mathcal{L}_x(\Sigma)$, isto é,

$$\mathcal{L}(\Sigma) = n\int_\Omega \rho d\Omega.$$

A primeira parte desta tese consiste, principalmente, em encontrar uma quantidade monótona ao longo do IMCF para provar o seguinte resultado.

Teorema 1.1. (Girão, Pinheiro 2017) *Seja $\Sigma \subset \mathbb{S}^n$ uma hipersuperfície mergulhada, fechada, orientável e conexa. Se Σ é estritamente convexa, então*

$$\int_\Sigma \rho_x H d\Sigma \geq (n-1)\omega_{n-1}\left(\frac{\mathcal{L}_x(\Sigma)}{\mathcal{K}(\Sigma)}\right)\left[\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} - \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right],$$

onde $x = x(\Sigma)$ é o ponto associado à Σ via o IMCF. Ademais, a igualdade ocorre se, e somente se, Σ é uma esfera geodésica centrada em x.

Definição 1.4. *Uma hipersuperfície $\Sigma \subset \mathbb{H}^n$ é horoesférica convexa se para todo ponto $x \in \Sigma$, Σ está contida em alguma horoesfera que passa por x.*

Esta definição é equivalente à definição que diz que as curvaturas principais de Σ são maiores ou iguais a 1.

Consideremos uma hipersurperfície horoesférica convexa $\Sigma \subset \mathbb{H}^n$. Em 2015, Ge, Wang e Wu estenderam a desigualdade (1.2) para

$$\int_\Sigma \rho\sigma_k d\Sigma \geq C_{n-1}^k \omega_{n-1} \left[\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2n}{(k+1)(n-1)}} + \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2(n-k-1)}{(k+1)(n-1)}} \right]^{\frac{k+1}{2}}, \tag{1.5}$$

onde k é ímpar (a desigualdade (1.2) sendo o caso $k = 1$, veja o Teorema 3.6). Na verdade, eles provaram o passo indutivo de k para $k + 2$, obtendo o caso ímpar da desigualdade (1.5). O caso onde k é par seguiria da seguinte conjectura.

Conjectura 1.1. (Ge, Wang, Wu 2015) *Seja $\Sigma \subset \mathbb{H}^n$ uma hipersuperfície horoesférica convexa. Então*

$$\int_\Sigma \rho d\Sigma \geq \omega_{n-1} \left[\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2n}{n-1}} + \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{1.6}$$

Se a igualdade ocorre, então Σ é uma esfera geodésica centrada na origem.

A seguir apresentamos os resultados principais da segunda parte da tese.

Considere o modelo de Poincaré para o espaço hiperbólico: a variedade diferenciável $\mathbb{B}^n$ (a bola aberta de norma euclidiana 1) munida da métrica $\hat{g} = \phi^2\delta$, onde $\phi = (1 - |x|^2)^{-1}$ e δ é a métrica do espaço euclidiano. Neste modelo, a função ρ é dada por

$$\rho = \frac{1 + |x|^2}{1 - |x|^2}.$$

Teorema 1.2. (Girão, Pinheiro, Rodrigues) *Seja $\Sigma \subset \mathbb{B}^n$ tal que, como hipersuperfície do $\mathbb{R}^n$, Σ é estrelada e estritamente média convexa. Então como hipersuperfície de $\mathbb{H}^n$, Σ satisfaz*

$$\int_\Sigma \rho d\Sigma > \omega_{n-1} \left[\left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2n}{n-1}} + \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Definimos a quantidade $\mathcal{P}(\Sigma)$ por

$$\mathcal{P}(\Sigma) := \left(\omega_{n-1} \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n}{n-1}} \right)^{-2} [\mathcal{O}^2 - |\Sigma|^2],$$

onde, $|\Sigma|$ é a área de $\Sigma \subset \mathbb{B}(0)$, ω_{n-1} é a área da esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ e

$$\mathcal{O}(\Sigma) = \int_\Sigma \rho d\Sigma.$$

Definimos, para uma hipersuperfície $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, a quantidade $Q(\Sigma)$ por

$$Q(\Sigma) := \frac{\int_\Sigma |x|^2 d(\Sigma)_\delta}{\omega_{n-1} \left(\frac{|\Sigma|_\delta}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n+1}{n-1}}},$$

Na prova do teorema acima, utilizamos o fluxo pela função suporte (SFF), a quantidade monótona, $\mathcal{P}$, ao longo desse fluxo, o limite

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{P}(\Sigma_t) = Q(\Sigma_0)$$

e que se $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ é uma hipersuperfície estrelada e estritamente média convexa, então

$$Q(\Sigma) > \Big(\frac{n-1}{n}\Big)^2.$$

A última desigualdade foi provada por Girão e Rodrigues. Também, mostramos que se $\Sigma \subset \mathbb{H}^n$ tem curvatura média maior ou igual a $n-1$, então, Σ vista como hipersuperfície do $\mathbb{R}^n$ é estritamente média convexa. Assim, usando o teorema anterior, vale o seguinte resultado.

Corolário 1.1. *Se $\Sigma \subset \mathbb{H}^n$ é estrelada e tem curvatura média $\hat{H} \geq (n-1)$, então*

$$\int_\Sigma \rho d\Sigma > \omega_{n-1}\left[\Big(\frac{n-1}{n}\Big)^2\Big(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\Big)^{\frac{2n}{n-1}} + \Big(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\Big)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Em particular, a desigualdade vale para Σ horoesférica convexa.

Teorema 1.3. (Girão, Pinheiro, Rodrigues) *A conjectura de Ge, Wang e Wu é falsa quando $n = 3$.*

Neste teorema, tomamos Γ para ser a hipersuperfície obtida pela rotação da curva

$$\begin{cases} x = (cos(3s)+9)sen(s) - 3sen(3s)cos(s) \\ y = (cos(3s)+9)cos(s) + 3sen(3s)sen(s), \end{cases} \tag{1.7}$$

em torno do eixo y com $0 \leq s \leq 2\pi$ e usamos a desigualdade

$$Q(\Gamma) < 1,$$

provada por Girão e Rodrigues para obter uma hipersuperfície $\Gamma_0 \subset \mathbb{B}^3(0)$ de modo que a desigualdade acima continue valendo para Γ_0. Fazemos Γ_0 evoluir ao longo do fluxo SFF. Usando que

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{P}(\Gamma_t) = Q(\Gamma_0) < 1,$$

obtemos que

$$\mathcal{P}(\Gamma_t) < 1$$

para todo t suficientemente grande. Finalmente, usamos a convexidade de Γ_0 como hipersuperfície do $\mathbb{R}^n$ para mostrar que Γ_t é horoesférica convexa para t suficientemente grande, obtendo assim um contra-exemplo para a Conjectura de Ge, Wang e Wu.

2 PRELIMINARES

2.1 Fluxos extrínsecos

Consideramos uma família a 1-parâmetro $X(t,\cdot) : \Sigma \longrightarrow M$, $t \in [0,\epsilon)$, de hipersuperfícies isometricamente mergulhadas, satisfazendo $X(0,\cdot) = \Sigma$ e evoluindo de acordo com

$$\frac{\partial X}{\partial t} = F\xi, \tag{2.1}$$

onde ξ é o vetor normal unitário ao longo de $\Sigma_t = X(t,\cdot)$ e F é uma função velocidade. Algumas vezes, denotamos Σ_t apenas por Σ.

A seguir apresentaremos alguns casos particulares do fluxo dado na equação (2.1) que serão utilizados ao longo desta tese.

1. A função $F = -\frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}$. Temos o fluxo dado pelo quociente das funções simétricas elementares das curvaturas principais

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -\frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}\xi, \tag{2.2}$$

onde σ_k e σ_{k-1} são a k-ésima e a $(k-1)$-ésima curvaturas médias de Σ_t.

2. A função $F = -\frac{1}{H}$. Temos o fluxo dado pelo inverso da curvatura média (IMCF)

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -\frac{\xi}{H}, \tag{2.3}$$

onde H é a curvatura média de Σ_t.

3. Seja a variedade $M = \mathbb{H}^n$ e a função $F = \rho$. Temos o fluxo dado pela função $\rho : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \rho\xi, \tag{2.4}$$

onde $\rho(r) = cosh(r)$.

4. Seja a variedade $M = \mathbb{H}^n$ e a função $F = -\theta$, temos o fluxo dado pela função suporte (SFF)

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -\theta\xi, \tag{2.5}$$

onde θ é a função suporte definida em (2.13).

2.2 Uma identidade para produtos torcidos

Seja (N^{n-1}, h) uma variedade riemanniana fechada, orientável e conexa. Consideramos a variedade produto $M = N \times [0, \bar{r})$ munida com a métrica riemanniana

$$\bar{g} = dr^2 + \eta^2(r)h, \tag{2.6}$$

onde $\eta : [0, \bar{r}) \to \mathbb{R}$ é uma função suave e positiva em $(0, \bar{r})$. Definimos a função $\rho : M \to \mathbb{R}$ por

$$\rho = \eta'(r), \tag{2.7}$$

onde, a "linha" significa a derivada com respeito a r.

Assumimos nesta subseção que $(M, \overline{g})$ tem curvatura escalar

$$R_{\overline{g}} = \varepsilon n(n-1), \tag{2.8}$$

com $\varepsilon = -1, 0$ ou 1. Também, assumimos que ρ satisfaz a identidade

$$(\Delta_M \rho)\, \overline{g} - D^2\rho + \rho \mathrm{Ric}_M = 0, \tag{2.9}$$

onde D^2 representa a hessiana. Tomando o traço, temos

$$\Delta_M \rho = -\varepsilon n \rho. \tag{2.10}$$

Observação 2.1. *A estrutura de produto torcido (2.6) e as identidades (2.8) e (2.9) são satisfeitas, por exemplo, pelas seguintes variedades: anti-deSitter-Schwarzchild se $\varepsilon = -1$, espaço euclidiano se $\varepsilon = 0$ e de Sitter-Schwarzchild se $\varepsilon = 1$.*

Consideramos uma hipersurperfície fechada, mergulhada, orientável $\Sigma \subset M$. Como observado por Brendle em 2013, $M \setminus \Sigma$ tem exatamente duas componentes conexas. Uma destas componentes está contida em $N \times [0, r - \delta)$, para algum $\delta > 0$. Esta componente é a região interna e denotamos ela por Ω, enquanto a outra componente é chamada de região externa. Denotamos por ξ o vetor unitário normal ao longo de Σ que aponta para região interna. As conexões de Levi-Civita de M e Σ são denotadas por D e ∇, respectivamente. Denotamos por g e b, respectivamente, a métrica e a segunda forma fundamental de Σ. Assim, se X e Y são campos vetoriais tangentes em Σ, então

$$b(X, Y) = \overline{g}(aX, Y),$$

onde

$$aX = -D_X \xi$$

é o operador forma. Denotamos por $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ o vetor curvatura principal de Σ e por

$$H = \sigma_1(\lambda) = \mathrm{tr}_g b$$

sua curvatura média. Também, consideramos a curvatura escalar extrínsica de Σ dada por

$$K = \sigma_2(\lambda) = \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2}\left(H^2 - |a|^2\right). \tag{2.11}$$

Pela desigualdade de Newton-MacLaurin,

$$\frac{\sigma_{k+1}\sigma_{k-1}}{\sigma_{k+1}(I)\sigma_{k-1}(I)} \leq \frac{\sigma_k^2}{\sigma_k^2(I)}, \tag{2.12}$$

com $I = (1, \cdots, 1)$. Ademais, a igualdade ocorre em um ponto dado se, e somente se, Σ é umbílica neste ponto.

Seja X o campo posição do espaço euclidiano. A função suporte θ é definida por

$$\theta = \begin{cases} \bar{g}(X(t), \xi), & \text{se } M = \mathbb{R}^n, \\ \bar{g}(D\rho, \xi), & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.13}$$

Proposição 2.1. *Vale o seguinte:*

$$\Delta_\Sigma \rho = \begin{cases} 0, & \textit{se } M = \mathbb{R}^n, \\ -\rho \mathrm{Ric}_M(\xi, \xi) + H\theta, & \textit{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.14}$$

Demonstração. No primeiro caso, temos ρ constante igual a 1. Então, $\Delta_\Sigma \rho = 0$. No outro caso, se X é tangente à Σ, por um lado temos

$$D_X \nabla \rho = \nabla_X \nabla \rho + g(aX, \nabla \rho)\xi. \tag{2.15}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} D_X \nabla \rho =& D_X\left(D\rho - g(D\rho, \xi)\xi\right) \\ =& D_X D\rho - Xg(D\rho, \xi)\xi - g(D\rho, \xi) D_X \xi. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Assim, tomando Y tangente a Σ e usando as igualdades em (2.15) e em (2.16), encontramos

$$g(\nabla_X \nabla \rho, Y) = \overline{g}(D_X D\rho, Y) + \overline{g}(D\rho, \xi) g(aX, Y).$$

Da iguadade acima, obtemos

$$\Delta_\Sigma \rho = \Delta_M \rho - D^2\rho(\xi, \xi) + \overline{g}(D\rho, \xi) H. \tag{2.17}$$

A identidade em (2.14) segue das equações em (2.17) e (2.9). □

2.3 Variações

Como comentamos na primeira subseção, estamos considerando uma família a 1-parâmetro $X(t,\cdot) : \Sigma \longrightarrow M$, $t \in [0,\epsilon)$, de hipersuperfícies isometricamente mergulhadas, satisfazendo $X(0,\cdot) = \Sigma$ e evoluindo de acordo com o fluxo (2.1).

Definição 2.1. *O Tensor de Newton $T_k : \mathcal{X}(\Sigma) \to \mathcal{X}(\Sigma)$ do operador forma a, é definido por*

$$T_0 = I \quad e \quad T_k = \sigma_k I - aT_{k-1} \quad com \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

onde I é a identidade em $\mathcal{X}(\Sigma)$.

Proposição 2.2. *Considerando o fluxo (2.1), temos:*

O vetor normal unitário ξ evolui de acordo com

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\nabla F. \tag{2.18}$$

O elemento de área $d\Sigma$ evolui de acordo com

$$\frac{\partial}{\partial t} d\Sigma = -FHd\Sigma; \tag{2.19}$$

em particular, a área $|\Sigma|$ evolui de acordo com

$$\frac{d}{dt}|\Sigma| = -\int_\Sigma FHd\Sigma. \tag{2.20}$$

A k-ésima curvatura média evolui de acordo com

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma_k(\lambda) = tr\Big(T_{k-1}(\lambda) \circ \frac{\partial \lambda}{\partial t}\Big). \tag{2.21}$$

As fórmulas (2.18) - (2.21) são bem conhecidas (veja ZHU (2002)). Assumindo que a variedade ambiente tem curvatura seccional constante ε, a fórmula (2.21), torna-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma_k(\lambda) = div(T_{k-1}\nabla F) + F(\sigma_1(\lambda)\sigma_k(\lambda) - (k+1)\sigma_{k+1}(\lambda) + (n-k)\varepsilon\sigma_{k-1}(\lambda)), \tag{2.22}$$

onde T_{k-1} é o tensor de Newton do operador forma a de ordem $k-1$. Em particular, a curvatura média evolui com

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \Delta_\Sigma F + \left(|a|^2 + \mathrm{Ric}_M(\xi,\xi)\right) F. \tag{2.23}$$

Por um cálculo direto, usando as equações (2.19) e (2.22) e o Teorema da divergência, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Sigma \sigma_k(\lambda)d\Sigma = -(k+1)\int_\Sigma F\sigma_{k+1}(\lambda)d\Sigma + (n-k)\varepsilon\int_\Sigma F\sigma_{k-1}(\lambda)d\Sigma. \tag{2.24}$$

Definimos $\mathcal{J}(\Sigma)$, $\mathcal{I}(\Sigma)$ e $\mathcal{O}(\Sigma)$, respectivamente, por

$$\mathcal{J}(\Sigma) = \varepsilon\int_\Sigma \theta d\Sigma,$$

$$\mathcal{I}(\Sigma) = \int_\Sigma \rho H d\Sigma$$

e

$$\mathcal{O}(\Sigma) = \int_\Sigma \rho d\Sigma.$$

Note que, pela identidade (2.10), temos

$$\mathcal{J}(\Sigma) = n\int_\Omega \rho\, d\Omega + C, \tag{2.25}$$

onde, C é uma constante.

As quantidades definidas acima e as variações apresentadas na próxima proposição contemplam, com exceção do espaço euclidiano, a estrutura de produto torcido (2.6).

Proposição 2.3. *Considerando o fluxo dado em (2.1), temos:*

A função ρ evolui de acordo com

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \theta F. \tag{2.26}$$

A quantidade $\mathcal{J}(\Sigma)$ evolui de acordo com

$$\frac{d\mathcal{J}(\Sigma)}{dt} = -n\varepsilon\int_\Sigma F\rho d\Sigma. \tag{2.27}$$

A quantidade $\mathcal{I}(\Sigma)$ evolui de acordo com

$$\frac{d\mathcal{I}(\Sigma)}{dt} = 2\int_\Sigma \theta HFd\Sigma - 2\int_\Sigma \rho KFd\Sigma. \tag{2.28}$$

A quantidade $\mathcal{O}(\Sigma)$ evolui de acordo com

$$\frac{d\mathcal{O}(\Sigma)}{dt} = \int_\Sigma \theta Fd\Sigma - \int_\Sigma \rho HFd\Sigma. \tag{2.29}$$

Demonstração. Pelo fluxo em (2.1) e a definição da função suporte em (2.13), temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \overline{g}\Big(D\rho, \frac{\partial X}{\partial t}\Big)\\ &= \overline{g}(D\rho, F\xi)\\ &= F\theta,\end{aligned}$$

o que prova a equação (2.26). A equação (2.27) segue das equações, (2.1) e (2.25), e da fórmula da co-área. Usando as equações (2.19), (2.23) e (2.26), temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{I}(\Sigma)}{\partial t} &= \int_\Sigma \frac{\partial \rho}{\partial t} H d\Sigma + \int_\Sigma \rho \frac{\partial H}{\partial t} d\Sigma + \int_\Sigma \rho H \frac{\partial}{\partial t} d\Sigma\\ &= \int_\Sigma \theta F H d\Sigma + \int_\Sigma \rho \left(\Delta_\Sigma F + \big(|a|^2 + \mathrm{Ric}_M(\xi,\xi)\big) F\right) d\Sigma - \int_\Sigma \rho F H^2 d\Sigma\\ &= \int_\Sigma \theta F H d\Sigma + \int_\Sigma F \Delta_\Sigma \rho d\Sigma + \int_\Sigma \rho \left(|a|^2 + \mathrm{Ric}(\xi,\xi)\right) F d\Sigma - \int_\Sigma \rho F H^2 d\Sigma,\end{aligned}$$

e o resultado segue, depois de alguns cancelamentos, das equações (2.11) e (2.14). Pelas equações (2.19) e (2.26),

$$\frac{\partial \mathcal{O}(\Sigma)}{\partial t} = \int_\Sigma \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Sigma + \int_\Sigma \rho \frac{\partial}{\partial t} d\Sigma = \int_\Sigma \theta F d\Sigma - \int_\Sigma \rho H F d\Sigma.$$

□

Proposição 2.4. (Ros 1987 e Brendle 2013) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n_+$ um domínio compacto com bordo suave Σ. Se Σ é estritamente média convexa, então*

$$(n-1)\int_\Sigma \frac{\rho}{H} d\Sigma \geq n \int_\Omega \rho d\Omega. \tag{2.30}$$

Ademais, a igualdade ocorre se, e somente se, Σ é totalmente umbílica.

3 DESIGUALDADES PARA HIPERSUPERFÍCIES DO $\mathbb{R}^n$ E $\mathbb{H}^n$

3.1 Desigualdade para hipersuperfícies do $\mathbb{R}^n$

Apresentaremos uma breve ideia da prova, dada por Guan e Li em 2009, da desigualdade de Alexandrov-Fenchel (veja a desigualdade (1.1)) para domínios estrelados e k-convexos, usando o seguinte resultado.

Teorema 3.1. (Gerhardt 1990 e Urbas 1990) *Se Ω_0 é um domínio estrelado e estritamente k-convexo, então existe solução Σ_t para o fluxo dado em (2.2) para todo tempo $t > 0$ e Σ_t converge para uma esfera depois de um reescalonamento apropriado.*

Definimos

$$\mathcal{I}_k(\Omega) = \frac{V_{n-k}^{\frac{1}{n-k}}(\Omega)}{V_{n-k-1}^{\frac{1}{n-k-1}}(\Omega)}.$$

Uma desigualdade entre duas quantidades geométricas pode ser estabelecida através da construção de um fluxo normalizado, onde uma das quantidades é invariante ao longo do fluxo e outra é monótona. Então, iremos normalizar o fluxo dado em (2.2), usando uma constante $R(t)$, com isso

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \left(-\frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}(\lambda) + R(t)\right)\xi. \tag{3.1}$$

Se Ω_t é domínio cujo o bordo é dado pela função posição $X(t)$, então usando a equação (2.24) de modo que $V_{n-k-1}(\Omega)$ seja constante ao longo do fluxo normalizado (3.1) e a identidade de Minkowski dada por

$$V_{n-k}(\Omega) = -\int_\Sigma \theta\sigma_k(\lambda)d\Sigma,$$

onde $\theta = \langle X, \xi\rangle$ é a função suporte, X é a função posição de Σ e ξ é o vetor unitário normal ao longo de Σ, conseguimos encontrar $R(t) = -\theta r(t)$, onde

$$r(t) = \frac{\int_\Sigma \frac{\sigma_{k+1}\sigma_{k-1}}{\sigma_k}d\Sigma}{C_{n-1,k+1}\int_\Sigma \sigma_k d\Sigma} \tag{3.2}$$

é uma constante de normalização que torna $V_{n-k-1}(\Omega_t)$ invariante e $V_{n-k}(\Omega_t)$ não decrescente ao longo do fluxo

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \left(-\frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}(\lambda) - r(t)\theta\right)\xi. \tag{3.3}$$

Teorema 3.2. (Guan, Li 2009) *Suponha que Ω é um domínio suave k-convexo estrelado em $\mathbb{R}^n$, então*

$$\Big(\frac{V_{n-m}(\Omega)}{V_{n-m}(B)}\Big)^{\frac{1}{n-m}} \leq \Big(\frac{V_{n-m-1}(\Omega)}{V_{n-m-1}(B)}\Big)^{\frac{1}{n-m-1}},$$

para $0 \leq m \leq k$. A igualdade ocorre se, e somente se, Ω é uma bola.

Demonstração. Provar este teorema é equivalente a mostrar que

$$\mathcal{I}_k(\Omega) \leq \mathcal{I}_k(B), \tag{3.4}$$

com a igualdade ocorrendo se, e só se, Ω é uma bola.
*C*aso 1. (Ω é estritamente k-convexa.) Tome $X(\cdot,t)$ solução do fluxo (2.2), cuja a existêcia é garantida pelo Teorema 3.1. Considere $\tilde{X}(\cdot,t) = e^{-\int_0^t r(s)ds} X(\cdot,t)$, onde $r(t)$ foi definido na equação (3.2) e $\tilde{X}(\cdot,t)$ é o bordo de $\tilde{\Omega}_t$. Note que $\mathcal{I}_k(\tilde{\Omega}_t)$ é crescente, pois $V_{n-1-k}(\tilde{\Omega}_t)$ é invariante e $V_{n-k}(\tilde{\Omega}_t)$ é não-decrescente ao longo do fluxo (3.3). Logo, $\mathcal{I}_k(\tilde{\Omega}_t) \leq \mathcal{I}_k(B)$ já que $X(\cdot,t)$ converge para uma esfera depois de um reescalamento apropriado. Usando novamente que $\mathcal{I}_k(\tilde{\Omega}_t)$ é crescente, temos que vale a desigualdade (3.4). Se vale a igualdade em (3.4), temos $\frac{dV_{n-k}(\tilde{\Omega}_t)}{dt} \equiv 0$ e daí vale a igualdade na desigualdade de Newton-MacLaurin (2.12). Com isso, Σ_t é uma esfera redonda para todo $t \geq 0$. Em particular, $\Sigma_0 = \Sigma$ é uma esfera.
*C*aso 2. (Ω é k-convexa estrelada.) Aproximamos o domínio k-convexo estrelado Ω por domínios estritamente k-convexos. Então vale a desigualdade (3.4). Seja, $\Sigma_+ = \{x \in \Sigma; \sigma_k(\lambda(x)) > 0\}$, Σ_+ é aberto, pois $\sigma_k(\lambda(x))$ é contínua e é não-vazia já que Σ é uma hipersuperfície compacta mergulhada em $\mathbb{R}^n$ com a condição de k-convexidade. Ademais Σ_+ é fechada já que é possível encontrar uma constante positiva $\bar{c}$ tal que

$$\sigma_k(\lambda(x)) \geq \bar{c} > 0,$$

para todo $x \in \Sigma_+$. Para mais detalhes veja Guan e Li (2009). Logo, $\Sigma = \Sigma_+$, o que implica que Ω é estritamente k-convexa, então se vale a igualdade na desigualdade (3.4), temos que Ω é a bola pelo caso 1.

□

3.2 Desigualdades para hipersuperfícies do $\mathbb{H}^n$

Aqui, apresentaremos os resultados para hipersuperfícies do n-espaço hiperbólico com $n \geq 3$, provados por Brendle, Hung e Wang em 2016, de Lima e Girão em 2016 e Ge, Wang e Wu em 2015. Antes de provar estes resultados, definimos as seguintes quantidades:

$$\mathcal{F}(\Sigma) := \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{-\frac{n}{n-1}} (\mathcal{J}(\Sigma) - \mathcal{K}(\Sigma)), \tag{3.5}$$

$$\mathcal{N}(\Sigma) := \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{-\frac{n-2}{n-1}} (\mathcal{I}(\Sigma) - (n-1)\mathcal{K}(\Sigma)) \tag{3.6}$$

e

$$\mathcal{M}(\Sigma) := \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{-\frac{n-2}{n-1}} (\mathcal{I}(\Sigma) - (n-1)\mathcal{J}(\Sigma)), \tag{3.7}$$

onde $\mathcal{J}(\Sigma) = -\int_\Sigma \theta d\Sigma$, $\mathcal{K}(\Sigma) = \omega_{n-1}\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}$ e $\mathcal{I}(\Sigma) = \int_\Sigma \rho H d\Sigma$.

Teorema 3.3. (Brendle, Hung, Wang 2016) *Seja Σ hipersurperfície compacta e média convexa no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ a qual é estrelada. Então*

$$\mathcal{M}(\Sigma) \geq (n-1)\omega_{n-1}. \tag{3.8}$$

Ademais, a igualdade ocorre se, e somente se, Σ é uma esfera geodésica centrada na origem.

Usamos que $\rho : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ dado por $\rho(r) = cosh(r)$ satisfaz a seguinte equação

$$(\Delta_{\mathbb{H}^n}\rho)\bar{g} - D^2\rho + \rho Ric_{\mathbb{H}^n} = 0,$$

onde $\bar{g} = dr^2 + senh^2(r)h$ e a desigualdade (2.30) para provar que a quantidade $\mathcal{M}$ em (3.7) é monótona não-crescente. Fazendo-se o estudo do limite de $\mathcal{M}(\Sigma_t)$ quando $t \to \infty$, foi mostrado por Brendle, Hung e Wang em 2016 que

$$\liminf_{t\to\infty} \mathcal{M}(\Sigma_t) \geq (n-1)\omega_{n-1}.$$

Logo, se $\mathcal{M}(\Sigma_t)$ é monótona não-crescente, temos

$$\mathcal{M}(\Sigma_0) \geq (n-1)\omega_{n-1}.$$

Se a igualdade vale na desigualdade acima, então ocorre a igualdade na desigualdade de Newton-MacLaurin em (2.12). Daí, Σ_0 é totalmente umbílica, e portanto, Σ_0 é esfera geodésica. Se Σ_0 não estiver centrada na origem, usamos o fato de $\rho(r) = cosh(r)$ ser crescente e o Teorema da Divergêcia para mostrar que $\mathcal{M}(\Sigma_0) > (n-1)\omega_{n-1}$. Por um cálculo direto, se Σ_0 é esfera geodésica centrada na origem vale a iguadade em (3.8).

Proposição 3.1. (de Lima, Girão 2016) *Se Σ_t é solução do fluxo (2.3) com Σ_0 estrelada e estritamente média convexa, então*

$$\liminf_{t\to\infty} \mathcal{N}(\Sigma_t) \geq (n-1)\omega_{n-1}. \tag{3.9}$$

Teorema 3.4. (de Lima, Girão 2016) *Se $\Sigma \subset \mathbb{H}^n$ é uma hipersuperfície estrelada e* *estritamente média convexa, então*

$$\int_{\Sigma} \rho H d\Sigma \geq (n-1)\omega_{n-1} \left[\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} + \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n}{n-1}} \right], \tag{3.10}$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, Σ é uma esfera geodésica centrada na origem.

Demonstração. Analisamos três casos:
*C*aso 1. $\mathcal{J}(\Sigma) \geq \mathcal{K}(\Sigma)$ $(\Sigma = \Sigma_0)$.

Se $\mathcal{J}(\Sigma) \geq \mathcal{K}(\Sigma)$, então $\mathcal{N}(\Sigma) \geq \mathcal{M}(\Sigma)$. Assim, pelo Teorema 3.3, temos que $\mathcal{N}(\Sigma) \geq (n-1)\omega_{n-1}$.

Devido ao caso anterior, podemos sempre assumir $\mathcal{J}(\Sigma) < \mathcal{K}(\Sigma)$.
*C*aso 2. $\mathcal{J}(\Sigma_t) > \mathcal{K}(\Sigma_t)$ para algum t.

Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe t_0 tal que $\mathcal{J}(\Sigma_{t_0}) = \mathcal{K}(\Sigma_{t_0})$. Em (2016), de Lima e Girão provaram que se a hipersuperfície inicial Σ é estrelada e estritamente média convexa, então a quantidade $\mathcal{F}$ em (3.5) é monótona não-decrescente ao longo de qualquer solução do fluxo (2.3). Com isso, $\mathcal{J}(\Sigma_t) \leq \mathcal{K}(\Sigma_t)$ para $t \leq t_0$. Neste mesmo trabalho, eles mostraram que em qualquer intervalo com a propriedade de $\mathcal{J}(\Sigma_t) \leq \mathcal{K}(\Sigma_t)$, tem-se que $\mathcal{N}(\Sigma)$ em (3.6) é monótona não-crescente. Logo,

$$\mathcal{N}(\Sigma_0) \geq \mathcal{N}(\Sigma_{t_0}) = \mathcal{M}(\Sigma_{t_0}) \geq (n-1)\omega_{n-1}.$$

*C*aso 3. $\mathcal{J}(\Sigma_t) < \mathcal{K}(\Sigma_t)$ para todo tempo t.

Se $\mathcal{J}(\Sigma_t) < \mathcal{K}(\Sigma_t)$ para todo tempo t, então $\mathcal{N}(\Sigma_t)$ é monótona não-crescente. Ademais, se Σ é estrelada e estritamente média convexa, então vale a desigualdade dada em (3.9). Logo,

$$\mathcal{N}(\Sigma_0) > \mathcal{N}(\Sigma_t) \geq \liminf_{t\to\infty} \mathcal{N}(\Sigma_t) \geq (n-1)\omega_{n-1}.$$

Nos casos 1 e 2, temos que se vale a igualdade na desigualdade (3.10), então Σ é esfera geodésica centrada na origem pelo teorema anterior. Já no caso 3, como $\mathcal{J}(\Sigma_t) < \mathcal{K}(\Sigma_t)$ sempre teremos $\mathcal{N}(\Sigma_0) > (n-1)\omega_{n-1}$. Segue de um cálculo direto que se Σ é esfera geodésica centrada na origem, então vale a igualdade na desigualdade (3.10).

□

Teorema 3.5. (Ge, Wang, Wu (2013, 2014)) *Se $\Sigma \subset \mathbb{H}^n$ é horoesférica convexa com $1 \leq k \leq n-1$, então*

$$\int_{\Sigma} \sigma_k d\Sigma \geq C^k_{n-1}\omega_{n-1} \left[\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2}{k}} + \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2}{k}\frac{(n-k-1)}{n-1}} \right]^{\frac{k}{2}}. \tag{3.11}$$

Ademais, a igualdade ocorre se, e somente se, Σ é esfera geodésica.

Teorema 3.6. (Ge, Wang, Wu 2015) *Se $\Sigma \subset \mathbb{H}^n$ é horoesférica convexa com $1 \leq k \leq n-1$ e k ímpar, então*

$$\int_\Sigma \rho\sigma_k d\Sigma \geq C_{n-1}^k \omega_{n-1} \left[\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2n}{(k+1)(n-1)}} + \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2(n-k-1)}{(k+1)(n-1)}} \right]^{\frac{k+1}{2}}. \tag{3.12}$$

Ademais, a igualdade ocorre se, e somente se, Σ é esfera geodésica centrada na origem.

Demonstração. Usando o argumento de indução, temos que quando $k = 1$ a desigualdade (3.12) é exatamente a desigualdade (3.10) provada no Teorema 3.4. Suponha que a desigualdade (3.12) vale para k, isto é,

$$\int_\Sigma \rho\sigma_k d\Sigma \geq C_{n-1}^k \omega_{n-1} \left[\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2n}{(k+1)(n-1)}} + \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2(n-k-1)}{(k+1)(n-1)}} \right]^{\frac{k+1}{2}}.$$

Utilizamos o fato de Σ ser horoesférica convexa para mostrar que a quantidade

$$E(\Sigma_t) := \int_\Sigma \Big(\rho \frac{\sigma_{k+2}}{C_{n-1}^{k+2}} - \rho \frac{\sigma_k}{C_{n-1}^k} - \frac{1}{\rho} \frac{\sigma_{k+2}}{C_{n-1}^{k+2}} \Big) d\Sigma$$

é maior ou igual a zero ao longo do fluxo (2.4). Em particular, quando t é igual a zero, temos

$$\int_\Sigma \frac{\sigma_{k+2}}{C_{n-1}^{k+2}} \rho d\Sigma \geq \int_\Sigma \Big(\rho \frac{\sigma_k}{C_{n-1}^k} + \frac{1}{\rho} \frac{\sigma_{k+2}}{C_{n-1}^{k+2}} d\Sigma \Big).$$

Agora, usamos o teorema anterior, a hipótese de indução e a desigualdade acima para obter a seguinte desigualdade:

$$\int_\Sigma \rho\sigma_{k+2} d\Sigma \geq C_{n-1}^{k+2} \omega_{n-1} \left[\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2n}{(k+3)(n-1)}} + \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2(n-2k-3)}{(k+3)(n-1)}} \right]^{\frac{k+3}{2}}.$$

Logo, vale a desigualdade (3.12). Para mais detalhes veja Ge, Wang e Wu 2015. Usamos um argumento análogo ao que foi usado no Teorema 3.4 para mostrar que se vale a igualdade na desigualdade (3.10), então Σ é esfera geodésica centrada na origem. $\square$

Observação 3.1. *Na demonstração acima, o passo de indução vale, independentemente de k ser par ou ímpar. Assim, para mostrar que a desigualdade (3.12), vale para k par, bastaria mostrar o caso $k = 0$ (veja a Conjectura 1.1). No entanto, mostraremos na segunda parte desta tese que quando a dimensão do ambiente é três a desigualdade conjecturada é falsa.*

4 DESIGUALDADE PARA HIPERSUPERFÍCIES DE $\mathbb{S}^n_+$

4.1 Conjectura e teorema principal

Consideramos a n-esfera unitária $\mathbb{S}^n$ com $n \geq 3$ para ser o espaço ambiente com o modelo, a métrica e a função ρ descritos na introdução. Se Σ é uma esfera geodésica centrada na origem, por um cálculo direto, temos

$$\int_\Sigma \rho H d\Sigma = (n-1)\omega_{n-1}\left[\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} - \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right].$$

Sabendo que vale a igualdade acima e a desigualdade (3.10) para hipersuperfícies estritamente médias convexas de $\mathbb{H}^n$, é tentador conjecturar que se $\Sigma \subset \mathbb{S}^n$ satisfaz alguma hipótese apropriada de convexidade, então

$$\int_\Sigma \rho H d\Sigma \geq (n-1)\omega_{n-1}\left[\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} - \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right].$$

Veremos na Proposição 4.3 que se Σ é esfera geodésica, então a desigualdade acima ocorre somente quando Σ está centrada na origem. Apesar disto, temos a seguinte conjectura:

Conjectura 4.1. *Seja $\Sigma \subset \mathbb{S}^n$ uma hipersuperfície mergulhada, fechada, orientável e conexa. Se Σ é estritamente convexa, então*

$$\sup_{x \in \mathbb{S}^n}\int_\Sigma \rho_x H d\Sigma \geq (n-1)\omega_{n-1}\left[\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} - \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right].$$

Ademais, a igualdade ocorre se, e somente se, Σ é uma esfera geodésica.

Não conseguimos provar a conjectura acima, mas conseguimos provar o seguinte resultado relacionado:

Teorema 4.1. (Girão, Pinheiro 2017) *Seja $\Sigma \subset \mathbb{S}^n$ uma hipersuperfície mergulhada, fechada, orientável e conexa. Se Σ é estritamente convexa, então*

$$\int_\Sigma \rho_x H d\Sigma \geq (n-1)\omega_{n-1}\left(\frac{\mathcal{L}_x(\Sigma)}{\mathcal{K}(\Sigma)}\right)\left[\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} - \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right], \tag{4.1}$$

onde $x = x(\Sigma)$ é o ponto associado à Σ via o IMCF. Ademais, a igualdade ocorre se, e somente se, Σ é uma esfera geodésica centrada em x.

Se $x \in \mathbb{S}^n$, denotamos o hemifério aberto centrado em x (olhando o hemisfério como uma bola geodésica) por $\mathbb{S}^n_+(x)$. Se x é a origem escrevemos somente $\mathbb{S}^n_+$. Na Proposição 4.2, provamos que

$$\mathcal{L}_x(\Sigma) \leq \mathcal{K}(\Sigma),$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, Σ é esfera geodésica centrada em x e contida em $\mathbb{S}^n_+(x)$. Assim, apenas no caso em que Σ é uma esfera geodésica a Conjectura 4.1 segue do Teorema 4.1.

Uma hipersuperfície estritamente convexa $\Sigma \subset \mathbb{S}^n$ é dita *balanceada* se $x(\Sigma)$, o ponto associado à Σ via o IMCF, coincide com a origem. Para mostrar o Teorema 4.1, podemos assumir que Σ é balanceada, pois caso Σ não seja, existe uma isometria Ψ tal que $\Psi(\Sigma)$ é balanceada. Neste caso, a desigualdade (4.1) tem a seguinte forma:

$$\int_\Sigma \rho H d\Sigma \geq (n-1)\omega_{n-1}\left(\frac{\mathcal{L}(\Sigma)}{\mathcal{K}(\Sigma)}\right)\left[\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} - \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right]. \tag{4.2}$$

4.2 Quantidade monótona ao longo do IMCF

Aqui, mostramos a quantidade monótona que encontramos, usando o fluxo *IMCF* apresentado em (2.3). Também, provamos as Proposições 4.2 e 4.3 mencionadas na subseção anterior.

Definimos $\mathcal{A}(\Sigma) := \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}$. Pela equação (2.20) com $F = -\frac{1}{H}$, temos

$$\frac{d\mathcal{A}(\Sigma)}{dt} = \mathcal{A}(\Sigma). \tag{4.3}$$

Proposição 4.1. (Girão, Pinheiro 2017) *Suponha*

$$\mathcal{A}(\Sigma) \leq 1 \tag{4.4}$$

e

$$(n-1)\int_\Sigma \frac{\rho}{H} d\Sigma \geq \mathcal{J}(\Sigma) + \alpha, \tag{4.5}$$

para alguma constante α. Então, ao longo do fluxo (2.3), a quantidade $\mathcal{Q}(\Sigma)$ definida por

$$\mathcal{Q}(\Sigma) = \mathcal{A}^{-\frac{n-2}{n-1}}(\Sigma)\left[\mathcal{I}(\Sigma) - (n-1)\left(\mathcal{J}(\Sigma)+\beta\right)\left(\mathcal{A}^{-\frac{2}{n-1}}(\Sigma) - 1\right) + \gamma\mathcal{A}^{\frac{-2}{n-1}}(\Sigma)\right] \tag{4.6}$$

satisfaz

$$\frac{d\mathcal{Q}(\Sigma)}{dt} \leq 0, \tag{4.7}$$

onde

$$\beta = \left(\frac{n-1}{n-2}\right)\alpha \quad e \quad \gamma = \frac{2(n-1)^2}{n(n-2)}\alpha. \tag{4.8}$$

Demonstração. Pela Desigualdade de Newton-MacLaurin em (2.12) e a equação em (2.28), temos

$$\frac{d\mathcal{I}(\Sigma)}{dt} \leq \frac{n-2}{n-1}\mathcal{I}(\Sigma) - 2\mathcal{J}(\Sigma). \tag{4.9}$$

Também, pela equação (2.27) e a desigualdade (4.5), temos

$$\frac{d\mathcal{J}(\Sigma)}{dt} \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)\mathcal{J}(\Sigma) + \alpha. \tag{4.10}$$

Usando as equações (4.3) e (4.8), e as desigualdades (4.4), (4.9) e (4.10), encontramos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\mathcal{A}^{\frac{n-2}{n-1}}(\Sigma)\mathcal{Q}(\Sigma)\right) &= \frac{d\mathcal{I}(\Sigma)}{dt} - (n-1)\frac{d\mathcal{J}(\Sigma)}{dt}\left(\mathcal{A}^{-\frac{2}{n-1}}(\Sigma) - 1\right) + 2\left(\mathcal{J}(\Sigma) + \beta - \frac{\gamma}{n-1}\right)\mathcal{A}^{-\frac{2}{n-1}}(\Sigma) \\
&\leq \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\mathcal{I}(\Sigma) - 2\mathcal{J}(\Sigma) - (n-1)\left(\frac{n}{n-1}\mathcal{J}(\Sigma) + \alpha\right)\left(\mathcal{A}^{-\frac{2}{n-1}}(\Sigma) - 1\right) \\
&\quad + 2\left(\mathcal{J}(\Sigma) + \beta - \frac{\gamma}{n-1}\right)\mathcal{A}^{-\frac{2}{n-1}}(\Sigma) \\
&= \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\left(\mathcal{A}^{\frac{n-2}{n-1}}\mathcal{Q}(\Sigma)\right),
\end{aligned}$$

o que prova a desigualdade (4.7). □

Proposição 4.2. (Girão, Pinheiro 2017) *Sejam $x \in \mathbb{S}^n$ e $\Sigma \subset \mathbb{S}^n$ uma hipersuperfície mergulhada, fechada, orientável e conexa. Então,*

$$\mathcal{L}_x(\Sigma) \leq \mathcal{K}(\Sigma),$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, Σ é uma esfera geodésica centrada em x e contida em $\mathbb{S}^n_+(x)$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir que x é a origem. Então, precisamos mostrar que

$$\mathcal{L}(\Sigma) \leq \mathcal{K}(\Sigma),$$

com a iguadade ocorrendo se, e somente se, Σ é uma esfera geodésica centrada na origem e contida em $\mathbb{S}^n_+$.

Seja $\hat{\Sigma}$ uma esfera geodésica centrada na origem, com $\hat{\Sigma}$ contida em $\mathbb{S}^n_+$ e tal que

$$\mathcal{K}(\Sigma) = \mathcal{K}(\hat{\Sigma}).$$

Um cálculo direto mostra que

$$\mathcal{L}(\hat{\Sigma}) = \mathcal{K}(\hat{\Sigma}). \tag{4.11}$$

Denotamos por Ω e $\hat{\Omega}$, respectivamente, a região interior de Σ e de $\hat{\Sigma}$. Pela desigualdade isoperimétrica, temos

$$\int_{\hat{\Omega}\setminus\Omega} 1 dV \geq \int_{\Omega\setminus\hat{\Omega}} 1 dV, \tag{4.12}$$

com a iguadade ocorrendo se, e somente se, Σ é esfera geodésica.

Segue da desigualdade (4.12) e do fato que ρ é decrescente com respeito a r que

$$\int_{\hat{\Omega}\setminus\Omega} \rho\, dV \geq \int_{\Omega\setminus\hat{\Omega}} \rho\, dV, \tag{4.13}$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $\Sigma = \hat{\Sigma}$.

Usando as desigualdades (4.11) e (4.13), obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\Sigma) &= n\int_{\Omega\setminus\hat{\Omega}} \rho\, dV + n\int_{\Omega\cap\hat{\Omega}} \rho\, dV\\ &\leq n\int_{\hat{\Omega}\setminus\Omega} \rho\, dV + n\int_{\Omega\cap\hat{\Omega}} \rho\, dV\\ &= \mathcal{L}(\hat{\Sigma})\\ &= \mathcal{K}(\Sigma),\end{aligned}$$

com a iguadade ocorrendo se, e somente se, $\Sigma = \hat{\Sigma}$, isto é, se, e somente se, Σ é esfera geodésica centrada na origem e contida em $\mathbb{S}^n_+$. □

Proposição 4.3. (Girão, Pinheiro 2017) *Se Σ é uma esfera geodésica não centrada na origem, então*

$$\int_\Sigma \rho H d\Sigma < (n-1)\omega_{n-1}\left[\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} - \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right].$$

Demonstração. Denotamos por $\hat{\Sigma}$ a esfera geodésica centrada na origem, com $\hat{\Sigma}$ contida em $\mathbb{S}^n_+$ e tal que

$$|\hat{\Sigma}| = |\Sigma|. \tag{4.14}$$

Um cálculo direto nos dá

$$\mathcal{I}(\hat{\Sigma}) = (n-1)\omega_{n-1}\left[\left(\frac{|\hat{\Sigma}|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} - \left(\frac{|\hat{\Sigma}|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right].$$

Assim, pela iguadade (4.14), é suficiente mostrar que

$$\mathcal{I}(\Sigma) < \mathcal{I}(\hat{\Sigma}).$$

Note que o campo vetorial $D\rho$ é conforme e que

$$\nabla\rho = (D\rho)^\top.$$

Assim, segue da fórmula (8.4) provada por Alias, de Lira e Malacarne em (2006) que

$$\operatorname{div}(T_1\nabla\rho) = -(n-2)\rho H + 2\theta K, \tag{4.15}$$

onde $T_1 = HI - a$ é o tensor de Newton do operador forma a. Integrando a igualdade (4.15) e usando que K é constante, temos

$$(n-2)\mathcal{I}(\Sigma) = 2K\mathcal{L}(\Sigma), \tag{4.16}$$

onde usamos que

$$\mathcal{J}(\Sigma) = \mathcal{L}(\Sigma).$$

De forma similar,

$$(n-2)\mathcal{I}(\hat{\Sigma}) = 2\hat{K}\mathcal{L}(\hat{\Sigma}), \tag{4.17}$$

onde $\hat{K}$ é a curvatura escalar extrínseca de $\hat{\Sigma}$. Portanto, como $K = \hat{K}$, o resultado segue da Proposição 4.2 junto com as igualdades (4.16) e (4.17).

□

4.3 Prova do Teorema 4.1

Sem perda de generalidade, podemos assumir que a hipersuperfície estritamente convexa $\Sigma \subset \mathbb{S}^n$ é balanceada.

Em (2016), Makowski e Scheuer provaram que o fluxo IMCF é suave em um intervalo $[0, T^*)$, com Σ_t convergindo para um equador, quando $t \to T^*$, e com

$$\lim_{t\to T^*} \int_\Sigma H d\Sigma = 0. \tag{4.18}$$

Como Σ é balanceada, a restrição de ρ à Σ_t satisfaz

$$0 < \rho < 1,$$

para cada $t \in [0, T^*)$. Assim, como Σ_t permanece estritamente convexa ao longo do fluxo IMCF (veja MAKOWSKI E SCHEUER (2016)), temos

$$0 < \rho H < H,$$

para cada $t \in [0, T^*)$. Logo, pela igualdade (4.18) e o Teorema do Confronto,

$$\lim_{t\to T^*} \int_\Sigma \rho H d\Sigma = 0. \tag{4.19}$$

Usando que Σ_t converge para o equador, obtemos

$$\lim_{t\to T^*} \mathcal{A}(\Sigma_t) = 1. \tag{4.20}$$

Então, como $\mathcal{A}(\Sigma)$ é crescente ao longo do fluxo IMCF, encontramos

$$\mathcal{A}(\Sigma) \leq 1. \tag{4.21}$$

Além disso, pela Proposição 2.4

$$(n-1)\int_\Sigma \frac{\rho}{H} d\Sigma \geq \mathcal{J}(\Sigma).$$

Assim, utilizamos a Proposição 4.1 e concluimos que a quantidade

$$\mathcal{Q}(\Sigma) = \mathcal{A}^{-\frac{n-2}{n-1}}(\Sigma)\left[\mathcal{I}(\Sigma) - (n-1)\mathcal{J}(\Sigma)\left(\mathcal{A}^{-\frac{2}{n-1}}(\Sigma) - 1\right)\right] \tag{4.22}$$

satisfaz

$$\frac{d\mathcal{Q}(\Sigma)}{dt} \leq 0$$

ao longo do IMCF. Logo,

$$\mathcal{Q}(\Sigma_t) - \mathcal{Q}(\Sigma_0) \leq 0, \tag{4.23}$$

para todo $t \in [0, T^*)$.

Pelas igualdades em (4.19) e em (4.20), temos

$$\lim_{t\to T^*} \mathcal{Q}(\Sigma_t) = 0.$$

Usando a igualdade acima e a desigualdade (4.23), obtemos

$$\mathcal{Q}(\Sigma_0) \geq 0,$$

a qual é equivalente à desigualdade (4.2).

Resta mostrar a afirmação de rigidez. Se Σ é uma esfera geodésica centrada na origem, então um cálculo direto mostra que a igualdade ocorre na desigualdade (4.2). Se a igualdade ocorre na desigualdade (4.2), então

$$\frac{d\mathcal{Q}(\Sigma)}{dt} = 0,$$

para cada $t \in [0, T^*)$. Assim, a igualdade também ocorre na desigualdade (4.9), para cada $t \in [0, T^*)$. Mas, se a iguadade ocorre na desigualdade (4.9), para cada $t \in [0, T^*)$, então ela também ocorre na Desigualdade de Newton-MacLaurin (2.12), para cada $t \in [0, T^*)$. Como consequência, Σ_0 é totalmente umbílica, e portanto, é esfera geodésica. Como Σ_0

é balanceada, ela é uma esfera geodésica centrada na origem.

5 DESIGUALDADE PARA HIPERSUPERFÍCIES DE $\mathbb{H}^n$

5.1 Existência e Propriedades do Fluxo SFF

Seja $\Sigma \subset \mathbb{H}^n$ uma hipersuperfície compacta do espaço hiperbólico. Para mostrar a existência do fluxo dado pela função suporte (SFF) em (2.5), utilizaremos a seguinte proposição (que também pode ser encontada em Mantegazza 2011).

Proposição 5.1. *Seja $\bar{X} : \Sigma \times [0, \epsilon) \to \mathbb{H}^n$ uma família de imersões. Então existe uma única família $\varphi \colon \Sigma \times [0, \epsilon) \to \Sigma$ de reparametrizações tal que $X(x, t) := \bar{X}(\varphi(x, t), t)$ satisfaz*

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(x,t) = \langle \frac{\partial \bar{X}}{\partial t}(\varphi(x,t),t), \xi(\varphi(x,t),t)\rangle \xi(\varphi(x,t),t) \\ X_0 = \bar{X}_0, \end{cases} \tag{5.1}$$

onde $\xi(\varphi(x, t), t)$ é o vetor normal a Σ_t.

Demonstração. Seja $\varphi : \Sigma \times [0, \epsilon) \to \Sigma$ uma família a 1-parâmetro de reparametrizações de Σ. Então $X(x, t) := \bar{X}(\varphi(x, t), t)$ satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t}(x,t) &= \frac{\partial \bar{X}}{\partial t}(\varphi(x,t),t) + d\bar{X}_t(\varphi(x,t))\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t)\Big) \\ &= \Big\langle \frac{\partial \bar{X}}{\partial t}(\varphi(x,t),t), \xi(\varphi(x,t),t)\Big\rangle \xi(\varphi(x,t),t) + Z(\varphi(x,t),t) \\ &\quad + d\bar{X}_t(\varphi(x,t))\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t)\Big), \end{aligned}$$

onde

$$Z(\varphi(x,t),t) = \frac{\partial \bar{X}}{\partial t}(\varphi(x,t),t) - \Big\langle \frac{\partial \bar{X}}{\partial t}(\varphi(x,t),t), \xi(\varphi(x,t),t)\Big\rangle \xi(\varphi(x,t),t) \in d\bar{X}_t(T_{\varphi(x,t)}).$$

Assim, a identidade em (5.1) ocorre se, e somente se,

$$\begin{cases} d\bar{X}_t(\varphi(x,t))\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t)\Big) = -Z(\varphi(x,t),t) \\ \varphi_0 = id_\Sigma, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t) = -d\bar{X}_t^{-1}(\varphi(x,t))(Z(\varphi(x,t),t)) \\ \varphi_0 = id_\Sigma. \end{cases}$$

Observe que $d\bar{X}_t^{-1}(\varphi(x,t))(Z(\varphi(x,t),t))$ está bem definida posto que $d\bar{X}_t$ é injetiva e $Z(\varphi(x,t),t) \in d\bar{X}_t(T_{\varphi(x,t)})$. Além disso, não é difícil ver que $Z(\varphi(x,t),t)$ é diferenciável.

Portanto, pelo Teorema de Existência e Unicidade de EDO's existe uma única φ que faz X satisfazer a identidade (5.1). $\square$

A partir de agora, a menos que mencionado o contrário, iremos considerar o $\mathbb{H}^n$ com o modelo da bola de Poincaré dado por $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < 1\}$ munido com a métrica

$$\hat{g} = \frac{4}{(1-|x|^2)^2}\delta,$$

onde $\hat{g}$ é a métrica do espaço hiperbólico restrito a bola e δ é a métrica do espaço euclidiano. O motivo pelo qual estamos usando este modelo é simplesmente pelo fato que ele torna as demonstrações de alguns resultados bem mais simples.

Neste modelo, a função $\rho : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}$ (veja a equação (1.3)) é dada por

$$\rho(x) = \frac{1+|x|^2}{1-|x|^2}.$$

Denotando por D a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{B}^n$, temos que o gradiente de ρ é dado por

$$D\rho = \mathcal{E},$$

onde $\mathcal{E}$ é o campo de Euler em $\mathbb{B}^n$, ou seja, associa à $x \in \mathbb{B}^n$ o vetor $x \in T_x\mathbb{B}^n$.

Seja $\Psi : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{B}^n$ dada por

$$\Psi(x,t) := e^{-t}x.$$

Seja $X_0 : \Sigma \to \mathbb{H}^n$ uma imersão. Considere o fluxo $\bar{X} : \Sigma \times [0,\infty) \to \mathbb{H}^n$ dado por

$$\bar{X}(x,t) = \Psi(X_0(x),t). \tag{5.2}$$

Esse fluxo satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{X}}{\partial t}(x,t) = -\bar{X}(x,t) \\ \bar{X}(.,0) = X_0. \end{cases}$$

Aplicando a Proposição 5.1 ao fluxo, $\bar{X} \colon \Sigma \times [0,\infty) \to \mathbb{H}^n$, mostra-se que existe uma única família $\varphi : \Sigma \times [0,\infty) \to \Sigma$ de reparametrizações tal que $X : \Sigma \times [0,\infty) \to \mathbb{H}^n$ dada por $X(x,t) = \bar{X}(\varphi(x,t),t)$ satisfaz

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(x,t) = -\theta(x,t)\xi(x,t) \\ X(.,0) = X_0, \end{cases}$$

onde θ é a função suporte.

Corolário 5.1. *O fluxo pela função suporte (SFF) existe para todo tempo e converge uniformemente para a origem quando $t \to \infty$.*

Demonstração. Sendo $X(x,t) := \bar{X}(\varphi(x,t),t)$ com $\bar{X}$ definida na equação (5.2), temos que o fluxo pela função suporte existe para todo tempo e converge uniformemente para a origem, já que $\bar{X}$ existe para todo tempo e converge uniformemente para a origem. $\square$

A seguir, usaremos o fluxo SFF para mostrar que a quantidade definida por

$$\mathcal{P}(\Sigma) := \Big(\omega_{n-1}\Big(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\Big)^{\frac{n}{n-1}}\Big)^{-2}[\mathcal{O}^2(\Sigma) - |\Sigma|^2], \tag{5.3}$$

é monótona não crescente. Aqui, $|\Sigma|$ é a área de Σ, ω_{n-1} é a área da esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ e

$$\mathcal{O}(\Sigma) = \int_\Sigma \rho d\Sigma.$$

Proposição 5.2. (Girão, Pinheiro) *Ao longo do fluxo SFF, a quantidade dada em (5.3) satisfaz*

$$\frac{d\mathcal{P}(\Sigma)}{dt} \leq 0. \tag{5.4}$$

Demonstração. Usando $F = -\theta$ e a identidade (2.14) nas equações (2.20) e (2.29), obtemos

$$\frac{d\mathcal{O}(\Sigma)}{dt} = -\int_\Sigma \theta^2 d\Sigma + \int_\Sigma \rho H\theta d\Sigma = -\int_\Sigma \theta^2 d\Sigma - \int_\Sigma |\nabla\rho|^2 d\Sigma - (n-1)\int_\Sigma \rho^2 d\Sigma$$

e

$$\frac{d|\Sigma|}{dt} = \int_\Sigma \theta H d\Sigma = -(n-1)\mathcal{O}(\Sigma). \tag{5.5}$$

Utilizando que $|D\rho|^2 = \theta^2 + |\nabla\rho|^2$, $\rho^2 - |D\rho|^2 = 1$ e a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\frac{d\mathcal{O}(\Sigma)}{dt} \leq |\Sigma| - n\frac{\mathcal{O}^2(\Sigma)}{|\Sigma|}. \tag{5.6}$$

Então, pela igualdade em (5.5) e a desigualdade em (5.6),

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{P}(\Sigma)}{dt} &= \Big(\omega_{n-1}\Big(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\Big)^{\frac{n}{n-1}}\Big)^{-2}\Big[(2\mathcal{O}(\Sigma)\mathcal{O}'(\Sigma) - 2|\Sigma||\Sigma|') - \frac{2n}{n-1}\frac{|\Sigma|'}{|\Sigma|}(\mathcal{O}^2(\Sigma) - |\Sigma|^2)\Big] \\
&\leq \Big(\omega_{n-1}\Big(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\Big)^{\frac{n}{n-1}}\Big)^{-2}\Big[2\mathcal{O}(\Sigma)\Big(|\Sigma| - n\frac{\mathcal{O}^2(\Sigma)}{|\Sigma|}\Big) + 2(n-1)\mathcal{O}(\Sigma)|\Sigma| + 2n\frac{\mathcal{O}^3(\Sigma)}{|\Sigma|} - 2n\mathcal{O}(\Sigma)
\\
&= 0
\end{aligned}$$

$\square$

5.2 Desigualdade

Seja a quantidade $\mathcal{P}(\Sigma)$, defenida como na subseção anterior, e para uma hipersuperfície $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, definimos $Q(\Sigma)$ por

$$Q(\Sigma) := \frac{\int_\Sigma |x|^2 d(\Sigma)_\delta}{\omega_{n-1}\left(\frac{|\Sigma|_\delta}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n+1}{n-1}}},$$

Proposição 5.3.

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{P}(\Sigma_t) = Q(\Sigma_0).$$

Demonstração. Primeiro, note que pelo Corolário 5.1 as quantidades, $\mathcal{O}(\Sigma)-|\Sigma|$ e $\omega_{n-1}\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{2n}{n-1}}$, convergem para 0 quando t tende ao infinito. Usando, também, as equações (2.19), (2.20) e (2.29), obtemos por L'Hospital que

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{P}(\Sigma) = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_\Sigma (\rho^2-1)d\Sigma}{\omega_{n-1}\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n+1}{n-1}}}.$$

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Tome $\delta > 0$ tal que $|x| < \delta$ implique

$$\left|\left(\frac{1}{1-|x|^2}\right)^{n+1} - 1\right| < \varepsilon$$

e

$$\left|\left(\frac{1}{1-|x|^2}\right)^{n-1} - 1\right| < \varepsilon.$$

Usando que $\rho = \frac{1+|x|^2}{1-|x|^2}$ e que $d\Sigma = \left(\frac{2}{1-|x|^2}\right)^{n-1}(d\Sigma)_\delta$ temos, para $\Sigma \subset \{x \in \mathbb{B}^n; |x| < \delta\}$,

$$\left|\frac{\int_\Sigma (\rho^2-1)d\Sigma}{2^{n+1}\int_\Sigma |x|^2(d\Sigma)_\delta} - 1\right| \leq \frac{\int_\Sigma |x|^2\left|\left(\frac{1}{1-|x|^2}\right)^{n+1} - 1\right|(d\Sigma)_\delta}{\int_\Sigma |x|^2(d\Sigma)_\delta} < \varepsilon,$$

e

$$\left|\frac{\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)}{2^{n-1}\left(\frac{|\Sigma|_\delta}{\omega_{n-1}}\right)} - 1\right| \leq \frac{\int_\Sigma \left|\left(\frac{1}{1-|x|^2}\right)^{n-1} - 1\right|(d\Sigma)_\delta}{|\Sigma|_\delta} < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_\Sigma (\rho^2-1)d\Sigma}{2^{n+1}\int_\Sigma |x|^2(d\Sigma)_\delta} = 1$$

e

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)}{2^{n-1}\left(\frac{|\Sigma|_\delta}{\omega_{n-1}}\right)} = 1.$$

Encontramos então

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{\mathcal{P}(\Sigma_t)}{Q(\Sigma_0)} &= \lim_{t\to\infty} \frac{\mathcal{P}(\Sigma_t)}{Q(\Sigma_t)} \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[\left(\frac{\int_{\Sigma_t} (\rho^2 - 1) d\Sigma_t}{\omega_{n-1}\left(\frac{|\Sigma_t|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n+1}{n-1}}} \right) \cdot \left(\frac{\int_{\Sigma_t} |x|^2 (d\Sigma_t)_\delta}{\omega_{n-1}\left(\frac{|\Sigma_t|_\delta}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n+1}{n-1}}} \right)^{-1} \right] \\
&= \left(\lim_{t\to\infty} \frac{\int_{\Sigma_t} (\rho^2 - 1) d\Sigma_t}{2^{n+1} \int_{\Sigma_t} |x|^2 (d\Sigma_t)_\delta} \right) \left(\lim_{t\to\infty} \frac{\left(\frac{|\Sigma_t|}{\omega_{n-1}}\right)}{2^{n-1}\left(\frac{|\Sigma_t|_\delta}{\omega_{n-1}}\right)} \right)^{-\frac{n+1}{n-1}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{P}(\Sigma_t) = Q(\Sigma_0).$$

□

Teorema 5.1. (Girão, Rodrigues) *Se $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ é uma hipersuperfície estrelada e estritamente média convexa, então*

$$Q(\Sigma) > \left(\frac{n-1}{n}\right)^2. \tag{5.7}$$

Teorema 5.2. (Girão, Pinheiro, Rodrigues) *Seja $\Sigma \subset \mathbb{B}^n$ tal que, como hipersuperfície do $\mathbb{R}^n$, Σ é estrelada e estritamente média convexa. Então como hipersuperfície de $\mathbb{H}^n$, Σ satisfaz*

$$\int_\Sigma \rho d\Sigma > \omega_{n-1} \left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{2n}{n-1}} + \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. A Proposição 5.3 e a desigualdade (5.7) nos dão

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{P}(\Sigma_t) > \left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

Usando a desigualdade acima e o fato da quantidade $\mathcal{P}$ ser monótona não crescente, obtemos

$$\mathcal{P}(\Sigma_0) > \left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

Logo,

$$\int_\Sigma \rho d\Sigma > \omega_{n-1} \left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{2n}{n-1}} + \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

$\square$

Corolário 5.2. *Se $\Sigma \subset \mathbb{H}^n$ é estrelada e tem curvatura média $\hat{H} \geq (n-1)$, então*

$$\int_\Sigma \rho d\Sigma > \omega_{n-1}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{2n}{n-1}} + \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. Sendo $\hat{g} = \phi^2\delta$, onde $\phi = \frac{2}{1-|x|^2}$, temos que as curvaturas médias H de $\Sigma \subset (\mathbb{B}, \delta)$ e $\hat{H}$ de $\Sigma \subset (\mathbb{B}, \hat{g})$ se relacionam da seguinte forma

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \phi^{-1}(H - (n-1)\phi^{-1}\xi(\phi)) \\ &= \phi^{-1}H - (n-1)\phi^{-2}\xi(\phi). \end{aligned}$$

Isolando H, temos

$$H = \phi\hat{H} + (n-1)\phi^{-1}\xi(\phi)$$

Como $\xi(\phi) = \phi^2\delta(\xi, X)$, temos que

$$H = \phi\hat{H} + (n-1)\phi\delta(\xi, X).$$

Se $\hat{H} \geq (n-1)$, então

$$\begin{aligned} H &= \phi(\hat{H} + (n-1)\delta(\xi, X)) \\ &\geq \phi(n-1)(1 + \delta(\xi, X)) \\ &> 0 \end{aligned}$$

pois, pela desigualdade de Cauchy,

$$|\delta(\xi, X)| \leq |\xi| \cdot |X| = |X| < 1.$$

Logo, o resultado segue do teorema anterior. $\square$

Teorema 5.3. (Girão, Rodrigues) *Existe uma hipersuperfície estritamente convexa $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ tal que $Q(\Gamma) < 1$.*

Teorema 5.4. (Girão, Pinheiro, Rodrigues) *A Conjectura de Ge, Wang e Wu é falsa quando $n = 3$.*

Demonstração. Seja $\Gamma_0 \subset \mathbb{B}^3$ tal que Γ_0, como hipersuperfície do espaço euclidiano, é estritamente convexa e satisfaz $Q(\Gamma_0) < 1$. A existência de tal hipersuperfície é garantida pelo teorema anterior. Como

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{P}(\Gamma_t) = Q(\Gamma_0) < 1,$$

existe $t_0 > 0$ tal que

$$\mathcal{P}(\Gamma_t) < 1,$$

para todo $t \geq t_0$. Afirmamos que, para todo t suficientemente grande, a hipersuperfície Γ_t é horoesférica convexa. Agora, mostraremos está última afimação. Sejam $\hat{b}$ a segunda forma fundamental de $\Gamma \subset (\mathbb{B}^3, \hat{g})$ e b a segunda forma fundamental de $\Gamma \subset (\mathbb{B}^3, \delta)$. Sabemos que as segundas formas fundamentais satifazem a seguinte relação

$$\hat{b} = \phi(b - \phi^{-1}\xi(\phi)\delta).$$

Como $\xi(\phi) = \phi^2\delta(\xi, X)$, temos

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \phi(b - \phi\delta(\xi, X)\delta) \\ &= \phi b - \phi^2\delta(\xi, X)\delta. \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula acima no campo V, temos

$$\hat{b}(V,V) = \phi b(V,V) - \phi^2\delta(\xi, X)\delta(V,V).$$

Como Γ é estrelada e ξ aponta para dentro, encontramos

$$\hat{b}(V,V) \geq \phi b(V,V).$$

Temos então

$$\begin{aligned} \frac{\hat{b}(V,V)}{\hat{g}(V,V)} &= \phi\frac{b(V,V)}{\hat{g}(V,V)} \\ &= \phi^{-1}\frac{b(V,V)}{\delta(V,V)}. \end{aligned}$$

Usando a fórmula acima para comparar as segundas formas fundamentais de Γ_0 e Γ_t, obtemos

$$\frac{\hat{b}(V,V)}{\hat{g}(V,V)} \geq \phi_t^{-1}e^t\frac{b_0(V,V)}{\delta(V,V)},$$

onde $\phi_t = \frac{2}{1-|e^{-t}x|^2}$. Tomando t suficientemente grande encontramos que todos os autovalores de Γ_t são maiores ou iguais a 1. $\square$

6 CONCLUSÃO

Nesta tese, provamos desigualdades tipo Alexandrov-Fenchel para hipersuperfícies da esfera e do espaço hiperbólico.

Se $\Sigma \subset \mathbb{S}^n$ é uma hipersuperfície estritamente convexa, então

$$\int_\Sigma \rho_x H d\Sigma \geq (n-1)\omega_{n-1}\left(\frac{\mathcal{L}_x(\Sigma)}{\mathcal{K}(\Sigma)}\right)\left[\Big(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\Big)^{\frac{n-2}{n-1}} - \Big(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\Big)^{\frac{n}{n-1}}\right],$$

onde $x = x(\Sigma)$ é o ponto associado à Σ via o IMCF,

$$\mathcal{K}(\Sigma) = \omega_{n-1}\Big(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\Big)^{\frac{n}{n-1}}$$

e

$$\mathcal{L}_x(\Sigma) = n\int_\Omega \rho_x d\Omega.$$

Ademais, a igualdade ocorre se, e somente se, Σ é uma esfera geodésica centrada em x.

Seja $\Sigma \subset \mathbb{B}^n$ tal que, como hipersuperfície do $\mathbb{R}^n$, Σ é estrelada e estritamente média convexa. Então como hipersuperfície de $\mathbb{H}^n$, Σ satisfaz

$$\int_\Sigma \rho d\Sigma > \omega_{n-1}\left[\Big(\frac{n-1}{n}\Big)^2\Big(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\Big)^{\frac{2n}{n-1}} + \Big(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\Big)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Como corolário, se $\Sigma \subset \mathbb{H}^n$ é estrelada e tem curvatura média $\hat{H} \geq (n-1)$, então Σ satisfaz a desigualdade acima. Em particular, a desigualdade vale para Σ horoesférica convexa e, dessa forma, obtemos uma desigualdade semelhante à que foi conjecturada por Ge, Wang e Wu. Além disso, mostramos que existe um contra-exemplo para a desigualdade (1.6), conjecturada por Ge, Wang e Wu quando a dimensão do ambiente é três.

REFERÊNCIAS

ALEXANDROV, A. D. Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern. II. Neue Ungleichungen zwischen den gemischten Volumina und ihre Anwendungen. **Rec. Math. (Moscou) [Mat. Sbornik] N.S** , v. 2, p. 1205–1238, 1937.

ALEXANDROV, A. D.. Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern III. Die Erweiterung zweier Lehrsätze Minkowskis über die konvexen Polyeder auf die beliebigen konvexen Körper. **Rec. Math. (Moscou) [Mat. Sbornik] N.S** , v. 3, p. 27–46, 1938.

ALÍAS, L. J.; DE LIRA, J. H. S.; MALACARNE, J. M. Constant higher-order mean curvature hypersurfaces in Riemannian spaces. **J. Inst. Math. Jussieu** , v. 5, n. 4, p. 527–562, 2006.

BRENDLE, S. Constant mean curvature surfaces in warped product manifolds. **Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci** , v. 117, p. 247–269, 2013.

BRENDLE, S.; HUNG, P.-K.; WANG, M.-T. A Minkowski inequality for hypersurfaces in the anti-de Sitter-Schwarzschild manifold. **Comm. Pure Appl. Math** , v. 69, n. 1, p. 124–144, 2016.

DAHL, M.; GICQUAUD, R.; SAKOVICH, A. Penrose type inequalities for asymptotically hyperbolic graphs. **Ann. Henri Poincaré** , v. 14, n. 5, p. 1135–1168, 2013.

DE LIMA, LEVI L.; GIRÃO, FREDERICO. An Alexandrov-Fenchel-type inequality in hyperbolic space with an application to a Penrose inequality. **Ann. Henri Poincaré** , v. 17, n. 4, p. 979–1002, 2016.

DO CARMO, M.P.; WARNER, F. W. Rigidity and convexity of hypersurfaces in spheres. **J. Differential Geometry** , v. 4, p. 133–144, 1970.

GE, Y.; WANG, G.; WU, J. Hyperbolic Alexandrov-Fenchel quermassintegral inequalities I. **arXiv:1303.1714** , p. –, 2013.

GE, Y.; WANG, G.; WU, J. Hyperbolic Alexandrov-Fenchel quermassintegral inequalities II. **J. Differ. Geom.** , v. 98, n. 2, p. 237–260, 2014.

GE, Y.; WANG, G.; WU, J. The GBC mass for asymptotically hyperbolic manifolds. **Math. Z.** , v. 281, n. 1-2, p. 257–297, 2015.

GERHARDT, C. Flow of nonconvex hypersufaces into spheres. **J. Differ. Geom.** , v. 32, p. 299–314, 1990.

GERHARDT, C. Curvature flows in the sphere. **J. Differ. Geom.** , v. 100, n. 2, p. 301–347, 2015.

GIRÃO, F.; PINHEIRO, N. An Alexandrov-Fenchel-type inequality for hipersufaces in the sphere. **Annals of Global Analysis and Geometry** , p. 413–424, 2017.

GUAN, P.; LI, J. The quermassintegral inequalities for k-convex starshaped domains. **Adv. Math** , v. 221, n. 5, p. 1725–1732, 2009.

MAKOWSKI, M.; SCHEUER, J. Rigidity results, inverse curvature flows and Alexandrov-Fenchel type inequalities in the sphere. **Asian J. Math** , v. 20, n. 2, p. 869–892, 2016.

MANTEGAZZA, C. **Lectures Notes on Mean Curvature Flow** . Birkhäuser Basel, 2011.

ROS, A. Compact hypersurfeces with constant higher order mean curvatures. **Revista Mathemática Iberoamericana** , v. 3, p. 447–453, 1987.

URBAS, J. On the expansion of atarshaped hypersufaces by symmetric functions of their principal curvatures. **Math. Z.** , v. 205, p. 355–372, 1990.

ZHU, X.-P. Lectures on mean curvature flows. **AMS/IP Studies in Advanced Mathematics** , v. 32, p. –, 2002.