UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA
DOUTORADO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA

ANTONIO LUIZ DE OLIVEIRA BARRETO

A ANÁLISE DA COMPREENSÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO MEDIADO POR AMBIENTES COMPUTACIONAIS

FORTALEZA - CEARÁ
2009

ANTONIO LUIZ DE OLIVEIRA BARRETO

A ANÁLISE DA COMPREENSÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO MEDIADO POR AMBIENTES COMPUTACIONAIS

Tese apresentada a coordenação do Curso de Doutorado em Educação Brasileira da Universidade Federal do Ceará – UFC, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor.

Orientador: Prof. Dr. José Aires de Castro Filho.

FORTALEZA - CEARÁ
2009

B273a

Barreto, Antonio Luiz de Oliveira.

A análise da compreensão do conceito de função mediado por ambientes computacionais. / Antonio Luiz de Oliveira Barreto. – Fortaleza: UFC, 2009.

363 f.: il. color. enc.; 21 x 29,7 cm.

Orientador: Prof. Dr. José Aires de Castro Filho

Área de concentração: Educação, Currículo e Ensino.

Tese (Doutorado) – Pós-Graduação em Educação Brasileira. Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2009.

1. Função – Aprendizagem. 2. Ambientes computacionais - Ensino. I. Título

CDD 371.39445

ANTONIO LUIZ DE OLIVEIRA BARRETO

A ANÁLISE DA COMPREENSÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO MEDIADO POR AMBIENTES COMPUTACIONAIS

Tese apresentada a coordenação do Curso de Doutorado em Educação Brasileira da Universidade Federal do Ceará – UFC, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor.

Orientador: Prof. Dr. José Aires de Castro Filho.

Aprovada em 26/02/2009, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. José Aires de Castro Filho (Orientador)
Universidade Federal do Ceará

Prof.ª Dr.ª Ana Karina Morais de Lira (Examinador)
Universidade Federal do Ceará

Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira
(Examinador)
Universidade Federal do Ceará

Prof.ª Dr.ª Maria Gilvanise de Oliveira Pontes (Examinador Externo)
Universidade Estadual do Ceará

Prof. Dr. Romero Tavares da Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal da Paraíba

A Deus e a Jesus que sempre estiveram ao meu lado nos momentos mais difíceis desta longa caminhada de pós-graduação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, com muito carinho e ternura, à Nêda Maria, pelo incentivo e apoio incondicionais à minha aprovação no Doutorado e à carreira de Educador.

À Prof.ª Dr.ª Geísa Mattos de Araújo Lima e ao Prof. Dr. Fernando Lincoln, por terem lido inicialmente o projeto, indicando autores e sugerindo modificações.

Um agradecimento muito especial ao meu orientador Prof. Dr. José Aires de Castro Filho, por sua seriedade, paciência, disponibilidade e por toda a sua objetividade.

Agradeço muitíssimo à Prof.ª Dr.ª Ana Karina Morais de Lira por ter contribuído, nas disciplinas e nas duas qualificações, com inúmeras observações e indicações de leituras. Em suas aulas, estudávamos e discutíamos as maravilhosas Teorias do Construtivismo. Sou muito grato também pela sua participação na banca.

Um agradecimento muito carinhoso à Prof.ª Dr.ª. Maria Gilvanise de Oliveira Pontes, por ter sempre incentivado minha entrada no Doutorado, lido o projeto, sugerindo modificações e por ter participado da banca. Valeu!

Ao Prof. Dr. Hermínio Borges Neto, coordenador do programa, pela atenção durante o curso de Doutorado e por ter contribuído na primeira qualificação, com observações e colocações pertinentes para a pesquisa.

Ao Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade, por ter contribuído na segunda qualificação, com sugestões e colaborações enriquecedoras ao direcionamento e conclusão da tese.

Aos professores Dr. Jorge Herbert Soares de Lira e Dr. Romero Tavares da Silva, por aceitarem compor a banca e contribuírem enormemente para a melhoria do trabalho.

A minha namorada Cláudia Lúcia, pelo apoio e carinho dedicados a mim, nesta longa caminhada de Doutorado.

Aos coordenadores, professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Educação da UFC, pelas disponibilidades, orientações e apoios recebidos. Aos colegas de Doutorado, os quais tornaram todos estes momentos da vida acadêmica menos cansativos.

Ao setor jurídico da SEDUC e à Secretaria de Educação, por terem me liberado da sala de aula da Escola Liceu de Messejana. Assim, tive maior disponibilidade e dedicação à minha pesquisa. Ao Diretor Prof. Osmar e a todos da Escola Liceu de Messejana, que me apoiaram durante o meu doutoramento.

À Faculdade Lourenço Filho, pelo apoio constante ao longo desta pesquisa. Ao Prof. Doutor Paulo César, por auxiliar na análise estatística e na exploração do pacote estatístico *Statistical Package for the Social Sciences (SPSS/1998)*.

Ao Prof. Doutor Antônio Clécio Fontenelle Thomas, por incentivar e apoiar a minha carreira acadêmica.

Aos amigos Valdísio Viana e Hélio Moura, por confiarem no meu êxito. Ao colega Emanuel Viana, por ajudar na coleta de dados.

A todos do Grupo de Pesquisa PROATIVA, pela transmissão de energia positiva. Também gostaria de agradecer a Danielle Guedes pela revisão bibliográfica da Tese e das normas da ABNT; e a Shirliane Matos de Souza, pela tradução do resumo em português para a língua inglesa.

De nada adiantam provocações de mudanças no processo de ensino/aprendizagem que não discutam a maneira como o jovem aprende, e como constrói o seu conhecimento. Qualquer proposta de educação deve considerar, em primeiro plano, o aluno, suas necessidades, expectativas, interesses, aspirações e possibilidades (BARRETO).

RESUMO

Alguns conceitos algébricos são extremamente importantes, dentre eles o de Função, por permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas do pensamento matemático. Além disso, a Função exerce um papel preponderante na Matemática do Ensino Médio e em muitas disciplinas de formação básica nos cursos de Graduação. No entanto, diversas pesquisas na área de Educação Matemática apontam que o estudo deste conceito é muito complexo e causa dificuldades aos alunos. Está aí um dos motivos importantes em se estudar mais sobre esse conceito junto aos estudantes. Este estudo propõe uma análise da compreensão do conceito de Função mediada por ambientes computacionais. A metodologia de pesquisa teve enfoque quantitativo e qualitativo e o estudo foi realizado em uma escola pública da rede estadual de Fortaleza com uma turma de 13 alunos do 1º Ano do Ensino Médio. A fundamentação teórica baseou-se em autores como Vygotsky (1998, 2001), o qual trata das idéias de mediação e interação; Ausubel (AUSUBEL, NOVAK e HANESIAN, 1980), Vergnaud (1993), Skemp (1989) e Vinner (1992), os quais discutem o processo de formação de conceitos; Gimenez e Lins (1997), que abordam a produção e negociação de significados. Os resultados obtidos indicam que a utilização de ambientes computacionais mediada pela intervenção do professor foi uma ferramenta poderosa capaz de ampliar a aprendizagem do aluno e de detectar os principais obstáculos à construção do conceito.

Palavras-chave: Educação Matemática. Ambientes Computacionais. Funções.

ABSTRACT

Some algebraic concepts are extremely important. Among them, it is the Function concept, for allowing connections among diverse mathematical concepts and also among different mathematical thoughts. Moreover, Function plays an important role on Mathematics in High School and on other core courses at undergraduate level. Nevertheless, some researches on Mathematics show that the study of this concept is complex and difficult for students. These facts make it relevant to look into this concept with the students. This study proposes an analysis of the understanding of the Function concept by means of computational environments. The study has been done on quantitative and qualitative methodologies and it took place at a State School of Fortaleza with 13 students from the first year of High School. The theory was based on Vygotsky (1998, 2001), who deals with the ideas of mediation and interaction; Ausubel (AUSUBEL, NOVAK e HANESIAN, 1980), Vergnaud (1993), Skemp (1989) e Vinner (1992), who all discuss the process of concept formation; Gimenez and Lins (1997), who approaches the production and negotiation of meanings. The results show that the use of computational environments mediated by the teacher was a powerful tool to increase the learning of students and to detect the main obstacles to concept construction.

Keywords: Mathematics Education. Computational Environment. Functions.

RÉSUMÉ

Certains concepts algébriques sont très importants, parmi eux celui de la fonction qui permet la connexion entre différents concepts mathématiques et différentes formes de la pensée mathématique. En outre, la fonction joue un rôle primordial dans l´enseignement des mathématiques au lycée et dans le premier cycle des cursus universitaires. Cependant, plusieurs recherches dans le domaine de l'éducation mathématique démontrent que l'étude de ce concept est très complexe et que sa compréhension par les élèves en est très difficile. D´où l`importance de l´étudier encore plus. Cette étude propose une analyse de la compréhension du concept de fonction en utilisant l'ordinateur comme médiateur de l'apprentissage. Nous avons utilisé une méthodologie de recherche à la fois quantitative et qualitative. L´étude a été réalisée dans une école publique de la ville de Fortaleza avec un groupe de treize élèves de l'enseignement secondaire. Les fondements théoriques ont eu pour base les auteurs suivants: Vygotsky (1998, 2001), qui présente les idées de la médiation et de l'interaction ; Ausubel (Ausubel, Novak et Hanesian, 1980), Vergnaud (1993), Skemp (1989) et Vinner (1992) qui montrent le processus de formation de concepts ; Gimenez et Lins (1997), qui traitent de la production et de la négociation de sens. Les résultats obtenus démontrent que l'utilisation de l'ordinateur avec l'assistance du professeur est un outil puissant, capable d'élargir l'apprentissage de l'élève et de détecter les principaux obstacles qui empêchent la construction du concept de fonction.

Mots-clés: Éducation Mathématique. Environnement Informatique. Fonction Mathématique.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Minha experiência com o Ensino Médio vem de oito anos como professor de Matemática em alguns colégios públicos e particulares de Fortaleza. Há três anos tenho trabalhado com as 1^{as} e 2^{as} séries do Ensino Médio no Liceu de Messejana. Noto a grande dificuldade dos alunos em relação ao aprendizado de Matemática. Eles têm dúvidas em assuntos considerados fáceis pelos professores como a resolução de equação do 2.º grau, o jogo de sinais e o gráfico cartesiano. A maioria desses alunos vem do Tele-Ensino, onde o orientador de aprendizagem nem sempre é um professor de Matemática.

Observo ainda a grande dificuldade do aluno em entender funções compostas, exponenciais e logarítmicas no Ensino Médio. Corriqueiramente entre os professores de Matemática, ao se discutir esse assunto, o argumento que se coloca é de que o aluno “não tem base”. A “falta de base” é, portanto, apontada como uma das dificuldades maiores, pois o aluno se sente inseguro diante de noções teóricas como potenciação e suas propriedades - assunto de vital importância para funções exponenciais - as quais são comumente transmitidas ao aluno no Ensino Fundamental. De fato, nota-se a insegurança dos alunos ao aplicar essas noções quando exigidas no Ensino Médio.

A disciplina de **Cálculo Diferencial e Integral I** no curso de Bacharelado em Ciências da Computação, no qual ministro aulas há onze anos, é básica para o currículo. Disciplinas como Métodos Numéricos, Programação Linear e Pesquisa Operacional dependem dela. Como professor da disciplina, destino duas semanas para revisão dos principais assuntos do Ensino Médio, os quais considero de vital importância à aprendizagem dos conteúdos ligados ao Cálculo. Nessa revisão e durante parte do curso, observo as dificuldades que os alunos, recém-ingressos na universidade, têm em traçar gráficos de funções, principalmente funções definidas por várias sentenças e funções modulares, noções extremamente importantes para o entendimento de limites laterais. Outro assunto de vital importância para o Cálculo é o estudo do sinal de funções, principalmente funções do 1.º e 2.º graus, que é mal compreendido pelo aluno. Espera-se que o aluno já tenha domínio de tais noções, pois já foram transmitidas inicialmente na 9.º série do Ensino Fundamental, e complementadas nas séries do Ensino Médio. No entanto, isso não acontece.

Por outro lado, as dificuldades dos alunos na aprendizagem de funções têm razões pedagógicas que serão discutidas logo a seguir.

Desde o início da criação dos cursos de Licenciatura, na época do Estado Novo, estes já apresentavam um caráter essencialmente conteudista, no qual os alunos eram simples receptores de informações. Nas aulas, os recursos didáticos usados eram praticamente a lousa, giz, consulta ao caderno e livro adotado.

Atualmente, o licenciando em Matemática, futuro professor do Ensino Fundamental e Médio, tem basicamente essas mesmas aulas, deparando-se em geral com um currículo desatualizado, pouco criativo diante das grandes descobertas científicas e tecnológicas. Assim, o licenciando, passivo na sua formação, só assiste às aulas para prestar contas nos momentos das provas e depois no seu desempenho profissional. O professor será um simples "repassador" do conhecimento, privilegiando o raciocínio mecânico. Embora no mundo inteiro se critique o sistema escolar rígido, que dá um conhecimento "morto" através das disciplinas e a Matemática, mais do que qualquer outra, no Brasil ainda assistimos a este quadro. O currículo da Licenciatura em Matemática é composto de poucas disciplinas da área pedagógica e, quando estas são ministradas, são consideradas desinteressantes pelos professores de Matemática do curso, desmotivando o aluno para elas.

Outro fator negativo que interfere na formação dos licenciandos é a estrutura atual do ensino na universidade brasileira, baseado na matrícula por disciplina/regime de créditos. Através dessa estrutura, onde há a liberdade de escolha das disciplinas, podendo cursá-las em cursos e áreas diferentes, a interação dos alunos é dificultada, ficando difícil estabelecer uma relação mais próxima, formar grupos de estudo. Como afirmam Barbosa e Borges Neto (1995, p.66*)*: "[...] Acarretam a fragmentação do trabalho educativo, gerando a dispersão, a descontinuidade e heterogeneidade que certamente inviabilizam a eficácia do ensino".

Por outro lado, os professores do Ensino Fundamental e Médio, de um modo geral, encontram-se desinteressados, sem qualificação necessária para acompanhar as transformações do mundo de hoje, "nas formas de conceber, armazenar e transmitir o saber provocadas pelo aparecimento das mídias eletrônicas entre elas a informática e a telemática", como lembra Moraes (1997, p.123). Encontram-se desinteressados também devido ao baixo reconhecimento da profissão no mercado de trabalho que oferece salários indignos. No Brasil, não há uma política de valorização do magistério e, consequentemente, o professor desdobra-se para garantir a sobrevivência, restando pouquíssimo tempo para se atualizar.

Cresce a insatisfação de pais e alunos. A escola, com seus conteúdos dissociados do mundo e da vida, prejudica os alunos, os quais saem despreparados para enfrentar o mercado de trabalho. No entanto, parece que toda a sociedade se acomoda diante dessa situação.

O mais grave nesse caso é que a aprendizagem não tem sido o foco principal da escola. Rotinas administrativas, como o planejamento curricular e a questão da indisciplina, por exemplo, consomem em parte a energia de diretores e professores. Em relatório sobre o problema da reprovação nas escolas do Nordeste Brasileiro, o Banco Mundial aponta como uma das causas graves o fato de o professor não estar preocupado que o aluno aprenda, mas sim em cumprir o programa estabelecido pela proposta curricular (MORAES, 1997).

No cotidiano da sala de aula, observo que não é só com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o Ensino Médio ou com Laboratórios de Informática bem equipados que se faz uma mudança pedagógica nas escolas. Se o aluno continua passivo, se a educação é simplesmente transmissão de conhecimento, se os recursos tecnológicos pouco fazem para modificar esse quadro ampliando o campo mental do aluno, ainda não podemos nos acomodar em face dessa situação educacional.

De nada adiantam provocações de mudanças nos processos de ensino e aprendizagem que não discutam a maneira como o jovem aprende e como constrói o seu conhecimento. Qualquer proposta de educação deve considerar, em primeiro plano, o aluno, suas necessidades, expectativas, interesses, aspirações e possibilidades.

A Álgebra é um tema que causa dificuldades aos alunos. Na passagem da

Aritmética para a Álgebra, eles se deparam com um grande obstáculo epistemológico, ou seja, reconhecer que letras podem representar valores e que símbolos matemáticos podem ter diversos significados. Outras dificuldades são a compreensão dos conceitos de variável e função, a manipulação de letras e a noção de sistema (VERGNAUD, 1988).

Função é um tema muito importante na Matemática, por permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas do pensamento matemático. Uma parte importante da Trigonometria, por exemplo, é destinada às funções trigonométricas e seus gráficos. É bom lembrar que as progressões aritméticas e geométricas, assuntos relevantes no Ensino Médio, são funções particulares. Na Geometria Analítica, estudam-se as propriedades das retas e parábolas que são propriedades dos gráficos das funções correspondentes. O estudo de polinômios e equações algébricas fica bem mais atraente pelo enfoque das funções polinomiais.

Além de sua importância para a Matemática, o conceito de função desempenha papel importante em outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia, Economia e Química. Assim, por exemplo, a função polinomial do 1.º grau é muito usada em Economia. De fato, sendo **p** o preço de venda por unidade de um determinado bem e **q** a respectiva quantidade vendida, a receita total ($\mathbf{R_T}$) é dada por $R_T = pq$. Quando **p** é fixo, ou seja, o preço é sempre o mesmo, $\mathbf{R_T}$ é uma função do 1.º grau de **q**. Portanto, cabe ao ensino do conceito de funções permitir ao aluno do Ensino Médio flexibilidade para usá-lo em situações diversas do conhecimento humano, considerando e fortalecendo o critério de contextualização e interdisciplinaridade. Ajustando seus conhecimentos sobre funções, o aluno pode construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.

A evolução histórica do conceito de função sugere que não deve ser fácil para os estudantes apreenderem este conceito. De fato, muitos estudos realizados na área de Educação Matemática apontam que o conceito de função tem se revelado de difícil assimilação por parte dos alunos, tanto no Ensino Médio, quanto no Ensino Superior. As investigações de diversos pesquisadores, (DUBINSKY; HAREL, 1992; SIERPINSKA, 1992; VINNER, 1992; RÊGO, 2000) têm mostrado que as idéias de variável, domínio, contradomínio e imagem, que permeiam a compreensão do conceito, já trazem grande complexidade para a aprendizagem pelos alunos. Está aí um dos fatores relevantes em se estudar mais sobre este conceito junto aos estudantes.

Muitas propostas têm surgido para a superação das dificuldades no ensino e na aprendizagem de Álgebra e funções. Uma dessas propostas envolve a construção de um núcleo de significados negociados entre professores e alunos (GIMENEZ; LINS, 1997). Esses significados devem ser negociados em contextos bastante específicos, envolvendo situações-problema e algumas vezes, o uso de objetos de manipulação, tais como balança ou ambientes computacionais. Embora não sejam eles por si só que produzam significado, eles permitem o surgimento de momentos de negociação entre professores e alunos.

Diversos estudos com ambientes computacionais discutem a manipulação simultânea de múltiplas representações de aspectos ligados à função, tais como tabelas, gráficos e equações (CONFREY, 1992; BORBA, 1999). Tais trabalhos abordam, por exemplo, a manipulação dinâmica de gráficos e como isso modifica a equação de uma função. Outros trabalhos envolvem a relação entre representações algébricas de função e situações reais tais como velocidade, saldo bancário, usando software de simulação, sensores de movimento e outros aparatos tecnológicos (CASTRO-FILHO; CONFREY, 2001). Rêgo (2000) ressalta que o uso do computador no ensino de funções tem várias vantagens, sendo uma delas sua eficiência como ferramenta de manipulação simbólica, no tratado de gráficos e como instrumento facilitador nas tarefas de resolução de problemas. Nesse sentido, o professor poderá se concentrar mais nas idéias e conceitos e menos nos algoritmos. Essa possibilidade de software e aparatos tecnológicos permite que professores e alunos estabeleçam diálogos sobre os conceitos subjacentes à manipulação feita e aos resultados apresentados.

Uma limitação desses trabalhos é que nem sempre essas investigações têm sido conduzidas em situações escolares formais. Com o intuito de investigar como os alunos resolvem questões envolvendo conhecimentos sobre funções, o presente trabalho tem como um dos objetivos observar como o uso de ambientes computacionais pode ajudar na compreensão desses conteúdos.

Como outro objetivo, pretende-se identificar e categorizar as dificuldades e a produção de significados empregados pelos alunos durante a resolução destas questões em situações envolvendo lápis e papel e o uso de um ambiente computacional.

De acordo com Santos et al. (2006), em contextos de ensino e de aprendizagem do conceito de função, freqüentemente, são apresentados aos estudantes a definição de Bourbaki (par ordenado)[1] ou alguma versão da definição dada por Dirichlet (correspondência)[2]. Segundo Fossa & Fossa (2000), para o aluno, esta definição é extremamente abstrata, pois estão subjacentes vários outros conceitos tais como relação, par-ordenado e outros.

Observo os problemas relacionados aos processos de ensino e de aprendizagem do conceito de função decorrentes das dificuldades que os alunos têm em entender a definição Bourbaki-Dirichlet. Como forma alternativa de introduzir o conceito, proponho que o aluno construa uma idéia mais essencial de função: a de variação, ou de grandezas que variam uma dependendo da outra. Utilizar essa idéia tornará o estudo de funções um instrumento matemático fundamental para físicos, químicos, biólogos, economistas, geógrafos dentre outros.

Nas últimas três décadas, muitas pesquisas sobre o conceito de função têm se concentrado tanto nos aspectos epistemológicos como em uma área de estudo denominada de Psicologia da Educação Matemática. Enquadram-se nesses dois grupos, respectivamente, as pesquisas de Anna Sierpinska e os estudos voltados para a concepção dos estudantes sobre o conceito de função, principalmente aqueles realizados ou orientados por Shlomo Vinner.

Obstáculos epistemológicos são dificuldades que estão intimamente ligadas a conceitos complexos com o de função. Estas dificuldades ocorreram na evolução histórica do conceito de função e também podem estar presentes nas dificuldades cognitivas dos alunos quando eles o estão estudando.

---

[1] Uma função "é uma tripla ordenada (X, Y, f), onde X e Y são conjuntos e f é um subconjunto de XxY, tal que, se $(x, y) \in f$ e $(x, y') \in f$, então $y=y'$"(SIERPINSKA, 1992, p.30, tradução nossa).

[2] "Se uma variável y está relacionada a uma variável x de modo que, ao se atribuir qualquer valor numérico a x, existe uma regra de acordo com a qual um único valor de y é determinado, então y é dito ser uma função da variável independente x". (SIERPINSKA, 1992, p.46, tradução nossa).

Sierpinska (1992) objetiva identificar esses obstáculos para que, em contextos de ensino e aprendizagem de função, os professores possam se conscientizar da existência deles. Para tanto, ela se baseia numa pesquisa realizada com estudantes de 17 anos no Ensino Fundamental da Polônia juntamente com uma análise histórica e epistemológica do desenvolvimento do conceito de função. Dessas análises, ela aponta quinze obstáculos epistemológicos que levam o aluno ao não desenvolvimento do conceito geral de função, assim como dezoito atos de compreensão, condições necessárias para a compreensão desse conceito.

É também proposta deste estudo, durante e após a intervenção pedagógica, identificar os obstáculos cognitivos que poderão surgir, assim como averiguar em que medida a intervenção pedagógica do pesquisador-professor mediada pelo computador pode ajudar os alunos a superá-los.

Vinner (1992) sugere que há um conflito inevitável entre a estrutura da Matemática e o processo cognitivo de aquisição do conceito do aprendiz. Para o aluno, apreender um conceito difícil como o de função é uma tarefa cognitiva árdua. Na realidade, quando o aluno está resolvendo uma situação-problema que envolve um determinado conceito, na maioria das vezes e inicialmente, ele não invoca a sua definição conceitual, mas a sua imagem conceitual, ou seja, os exemplos, contra-exemplos, teoremas e fatos associados que caracterizam e limitam este conceito em particular. O autor ainda enfatiza que as imagens conceituais dos estudantes são moldadas pelas suas experiências externas da escola, obtidas no cotidiano, juntamente com as idéias e exemplos aprendidos em sala de aula. Além disso, estas imagens podem estar em desacordo com a definição.

O mestrado em Matemática, realizado na Universidade Federal do Ceará, com subárea em Otimização, trouxe-me a oportunidade de trabalhar com Software Matemáticos. O primeiro deles foi o *Lindo* (Linear Interactive and Discrete Optimizer), um software que pode ser usado para resolver problemas de programação linear, inteira e quadrática. O segundo software, *Matlab*, uma abreviação de Matrix Laboratory, é um programa interativo para cálculos matriciais. Além do amplo uso nas Engenharias, o *Matlab* é uma excelente ferramenta didática para o ensino de Álgebra linear em cursos de graduação. Nos três últimos semestres, venho trabalhando com este software na disciplina Álgebra Linear Computacional, experiência que vem tendo bons resultados no processo de ensino-aprendizagem na medida em que contribui para despertar a atenção e motivação dos alunos.

Em um curso de extensão sobre o uso do software *Cabri-Géomètre* na Universidade Federal do Ceará, em convênio com a Secretaria de Educação do Estado do Ceará, em 1999, trabalhamos os principais assuntos da geometria plana e pude perceber o quanto este software auxilia o desenvolvimento de conceitos geométricos.

Com essas experiências, verifiquei o quanto a Informática pode ser importante para a aprendizagem de conceitos matemáticos. Daí a necessidade de pesquisar nessa área para viabilizar futuramente a construção de um software educativo de fácil manuseio, que leve à construção do conceito de função, hoje de difícil compreensão por parte do aluno.

Um software educativo baseado em uma concepção construtivista "[...] deve permitir que eles (os alunos) manipulem objetos na tela e a partir de suas reflexões sobre essa manipulação elaborem hipóteses sobre o que está acontecendo" (CASTRO-FILHO, 2001a, p.2). O autor afirma também que o software matemático deve estar baseado em teorias que lidem com questões específicas do conhecimento matemático, enfatizando múltiplas representações dos conceitos e suas observações e propiciando processos de mediação por parte do professor.

Vygotsky postula que a interação social é de grande importância para a aprendizagem. Ela ocorre entre duas ou mais pessoas que cooperam conjuntamente na realização de atividade. Ao realizá-la, são igualmente importantes os conhecimentos prévios de cada aluno e as interações que são feitas entre eles.

Nesse sentido, em que medida os conhecimentos prévios podem favorecer a compreensão conceitual de função? Em particular, o conceito de proporcionalidade, visto na 7.º série do Ensino Fundamental, facilita ou dificulta a construção do conceito de funções?

Para Vergnaud (1993) o conhecimento emerge na resolução de problemas. Também é uma pretensão desta pesquisa apresentar os conhecimentos-em-ação empregados pelos alunos na resolução das situações-problema envolvendo o conceito de função propostos no módulo de atividades elaborado por nós. Quais são os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação que emergem na resolução de problemas?

Para tanto, foi elaborado um conjunto de atividades relacionadas ao conceito de função. À medida que os alunos participaram das atividades, foi mais fácil diagnosticar os níveis de mediação, interação, conhecimentos prévios e conhecimentos-em-ação utilizados em sua execução.

O objetivo deste trabalho é analisar a compreensão do conceito de função através de módulos de atividades mediados por ambientes computacionais. Em conseqüência do enfoque escolhido, serão trabalhados no âmbito deste projeto, os subconceitos de: domínio, contra-domínio e imagem.

O que se pretende realizar especificamente é:

- Elaborar módulos de atividades que envolvam ambientes computacionais a serem adotados experimentalmente em turmas da 1ª série do Ensino Médio, destinados ao estudo do conceito de funções e suas aplicações em física, economia dentre outros.
- Testar a validade desses módulos de atividades quanto à eficácia para promover nos alunos:

- Compreensão do conceito de função como dependência de variável;

- Capacidade de inter-relacionar as várias formas de representação do conceito (gráfica, algébrica numérica etc);

- Investigar em que medida os conhecimentos prévios favorecem a compreensão do conceito de funções Matemática.

- Identificar, à luz da teoria de Vergnaud, quais os conhecimentos-em-ação (os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação) que emergem na resolução de problemas envolvendo o conceito de funções.

Esta tese é dividida em cinco capítulos. O Capítulo 2 é dedicado a história do conceito de função e das principais condições necessárias para a compreensão deste conceito, bem como os mais importantes obstáculos epistemológicos que dificultam este entendimento.

No Capítulo 3, são discutidas algumas pesquisas realizadas sobre o tema funções, considerando-as sob os aspectos computacionais e epistemológicos. Também são analisadas pesquisas que evidenciam o papel da interação e dos conhecimentos prévios na aprendizagem do conceito de funções. No capítulo 4, são apresentados os principais pressupostos teóricos que serviram para a análise dos resultados.

No Capítulo 5, são relatados os procedimentos metodológicos de investigação, com a explicação do tipo de pesquisa, a descrição dos sujeitos e dos materiais utilizados. No capítulo 6, utilizando as perspectivas qualitativa e quantitativa, a categorização dos dados é analisada e discutida.

Ainda neste capítulo, a categorização das estratégias e dos conhecimentos-em-ação apresentados pelos alunos durante a resolução das atividades são mostradas, para, ao final, no Capítulo 7, as considerações finais do estudo serem apresentadas, com propostas de futuras pesquisas.

2. FUNÇÃO

Este capítulo traz um levantamento de pesquisas sobre o conceito de funções. Está dividido em duas partes. A primeira parte é dedicada aos estudos que evidenciam a dificuldade dos alunos com o conceito de função. A segunda parte é dedicada à história do conceito de função e das principais condições necessárias para a compreensão deste conceito, bem como os mais importantes obstáculos epistemológicos que dificultam este entendimento.

2.1 Aspectos Gerais

Observa-se que o estudo da Álgebra, iniciado no Ensino Fundamental, é um tema em particular no ensino da Matemática, que causa dificuldades aos alunos. Na passagem da Aritmética para a Álgebra, eles se deparam com um grande obstáculo epistemológico. Muitas vezes têm dificuldade em trabalhar com letras ao invés de números, não conseguindo operar facilmente com símbolos literais, tornando-se difícil para eles multiplicarem, por exemplo, 5 por x, visto que x não é um número conhecido.

Vergnaud (1988) ressalta que diferentes problemas conceituais são levantados pela Álgebra, os quais repercutem nas dificuldades cognitivas dos alunos. Alguns deles são: (1) o significado do sinal de igual; (2) operações simbólicas; (3) os poderosos e difíceis conceitos de variável e função; (4) o significado das soluções negativas; e (5) a manipulação de letras e a noção de sistema.

Ilustrando a primeira das possíveis dificuldades: ao se depararem numa sentença como 5+7=12, os alunos frequentemente entendem o sinal de igual como um operador que transforma 5+7 em 12. Eles, inicialmente, não entendem que o sinal de igual tanto pode indicar o resultado da operação de adição como o fato de que o primeiro termo da sentença (5+7) é idêntico ao segundo em relação à quantidade.

Os principais conceitos de Álgebra são apresentados aos alunos através de manipulação de símbolos (GIMENEZ; LINS, 1997). Nos exercícios, a ênfase é dada ao raciocínio algorítmico, sem a devida preocupação se os alunos compreenderam ou não os conceitos envolvidos nele. Esta concepção do ensino da Álgebra, chamada de "letrista" pelos autores citados, está baseada na idéia de que a atividade algébrica é "cálculo literal", praticando a sequência técnica (algoritmo) / prática (exercícios). Os mesmos autores ressaltam que esta concepção é encontrada nos principais livros didáticos brasileiros.

Alguns conceitos algébricos são extremamente importantes, dentre eles o de função, devido ao seu papel central na Matemática do Ensino Médio e em diversas disciplinas de formação básica nos cursos de graduação em Ciências Exatas, da Saúde e Sociais Aplicadas.

Investigações de diversos pesquisadores, (DUBINSKY; HAREL, 1992; RÊGO 2000; FOSSA; FOSSA, 2000) têm mostrado que as idéias de variável, domínio, contradomínio, imagem, zeros ou raízes de uma função trazem grande complexidade para a aprendizagem dos alunos. Está aí um dos motivos importantes em se estudar mais sobre este conceito junto aos estudantes.

Para compreender melhor o ensino do conceito de funções e suas dificuldades deve-se remontar à influência do grupo Bourbaki no ensino da Matemática no Brasil. Por volta dos anos 1930, foram sistematizados e comunicados, em conferências e congressos internacionais, alguns conceitos matemáticos abstratos com o de: "grupo", "anel", "corpo" e "conjunto", amplamente aceitos pela comunidade Matemática. Estes conceitos e muitos outros foram sintetizados numa série de livros chamados "Elementos de Matemática", de autoria de Nicolas Bourbaki, na realidade, pseudônimo adotado por um grupo de matemáticos franceses.

Esse grupo influenciou a educação matemática mundial por intermédio do que ficou conhecido como "Matemática Moderna". Sua grande proposta era que poderia tornar acessível aos alunos do Ensino Fundamental e Médio conteúdos baseados em estruturas abstratas. Influenciado por esse movimento, muitos países adotaram em seus currículos os conceitos abstratos de: conjuntos, relação, função e grupo. Os alunos estudavam a teoria dos conjuntos ilustrada por coleções de objetos do cotidiano. Mas a teoria dos conjuntos tem poucas aplicações interessantes, os seus exercícios têm poucas possibilidades de variação. No entanto, a geometria e os números, temas mais atrativos aos alunos por se aproximarem mais do mundo externo, foram relegados a segundo plano pela "Matemática Moderna" (GARDING, 2000).

A linguagem presente nos principais livros textos de Matemática do Ensino Médio sofre influências do "Movimento Matemática Moderna", fundamentada na "Teoria dos Conjuntos". Muitos autores destes livros, ainda hoje, apresentam variações da definição de Dirichlet-Bourbaki sobre funções (RÊGO, 2000; SANTOS, 2006).

Para o aluno, esta definição é extremamente abstrata, pois estão subjacentes vários outros conceitos tais como relação, par-ordenado etc. Além disso, como afirmam Fossa & Fossa (2000, p.155):

> [...] o aluno raramente desenvolve uma concepção desta noção que chega a aproximar sua plena generalidade. De fato, a definição do conceito de função parece ter um papel bastante reduzido na determinação de como este conceito é entendido pelo aluno. Muito mais importante é a sua experiência com dois conceitos associados ao de função, a saber, equações e gráficos, pois quando o aluno encontra funções no seu livro texto ou na sala de aula, geralmente se pede que ele manipule de alguma forma uma equação que representa a função ou esboce o seu gráfico. Assim, o aluno é exposto a uma classe restrita de funções e, forçosamente, ele abstrai o seu conceito de função apenas desta classe.

Estes pesquisadores realizaram estudo baseado em questionários aplicados aos alunos de Cálculo I, recém-ingressos na Universidade do Rio Grande do Norte, com o objetivo de identificar qual a idéia predominante de função que o aluno possui ao ingressar na Universidade. A escolha foi aleatória entre os matriculados na disciplina. Em uma das questões, 59% dos entrevistados disseram que a expressão $x^2+y^2 =1$ era função. Parece que, para eles, qualquer equação seria uma função, tornando-se um obstáculo cognitivo para um entendimento mais profundo do conceito de funções.

Rêgo (2000) analisou e comparou este mesmo questionário, agora aplicado aos alunos de Engenharia da Universidade Federal da Paraíba, em 1997. Em relação a uma questão sobre gráfico - a circunferência de centro na origem dos eixos - 39 % dos alunos identificaram o gráfico como sendo de uma função. Os alunos confundiram o gráfico com o conceito “funções circulares”, fazendo a interpretação de forma literal, ou seja, as funções poderiam ter como gráficos, círculos ou até mesmo semicírculos.

Tais estudos confirmaram que são poucos os alunos que tiveram internalizado a definição Bourbaki-Dirichlet e é grande a dificuldade que eles têm de relacioná-la com a representação gráfica e algébrica. Isso tem sido constatado no cotidiano da sala de aula tanto no Ensino Médio como no Ensino Superior.

Meira (1997) afirma que essa definição se caracteriza por ser uma concepção "estática de funções". Uma forma alternativa de definir funções seria um ato que transforma cada elemento de A em um elemento de B, pesquisada por Freundental (1983). Ele ressalta as vantagens dessa definição, uma vez que transformações aplicadas na variável independente geram mudanças na variável dependente, sendo mais apropriada ao estudo de eventos físico-causais tal como o comportamento elástico de molas.

Entretanto, o autor observa que a primeira definição é tão importante quanto à segunda, pois poderá auxiliar na investigação de propriedades de conjuntos. Dessa forma, na perspectiva da funcionalidade pedagógica e de pesquisa, a escolha de uma ou outra forma de definição dependerá da sua adequação e utilidade.

Um assunto largamente usado na Matemática e nas outras áreas do conhecimento humano como a Economia é o subconceito de monoticidade de funções. Ferreira (1998) aponta que os alunos associam o subconceito de monoticidade através da reta, ou seja, para eles a reta da função $f_1(x) = x$ é uma noção de função crescente; e a reta da função $f_2(x) = -x+2$, uma função decrescente. Mas o aluno tem dificuldade de generalizar esta percepção ao analisar os intervalos de crescimento ou decrescimento do gráfico da função $f_3(x) = \frac{1}{x}$.

A pesquisadora sinaliza que os alunos têm outra forma de interpretar gráfico: a forma pontual. Eles vêem o gráfico para localizar pontos especiais, ou seja, a preocupação maior deles é observar a interseção do gráfico com os eixos cartesianos e vértice (aqui para funções quadráticas). Comparando diferentes funções do 1.º grau com mesmo coeficiente independente, estudantes podem ser levados a conectar o coeficiente linear com a interseção com o eixo f(x).

O conceito de continuidade de funções é alvo de inúmeras pesquisas. Alves (2001) analisou o desenvolvimento deste conceito com um grupo de 70 alunos, estudantes da disciplina Cálculo Diferencial e Integral do curso diurno de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Ceará. Para tanto, o pesquisador fez a análise dos processos de aquisição e operacionalização dos conceitos de função e limite, visto que estão diretamente ligados ao campo conceitual de continuidade de função. Ao longo da pesquisa, o conceito de função, na maioria das vezes, mostrou-se incompleto pelos estudantes. O autor conclui:

> Percebemos ao longo da pesquisa uma frágil noção do conceito de função, ressaltando-se que os estudantes não sabiam a definição formal (quando questionados acerca dos conceitos necessários na resolução de tarefas consideradas fáceis) do referido conceito por completo. Kaput adverte para o fato de que funções de duas variáveis reais como f(x,y) necessitam ser vistas como um processo de tomada de pontos no plano (x,y) em pontos na reta real. Os estudantes que não compreendem a concepção de processo de função sentirão dificuldades, quando forem colocadas em contato com este e outros objetos matemáticos (por exemplo limite e integral) como no caso das disciplinas de Cálculo III e vetorial obrigatórias nos cursos de engenharia na Universidade Federal do Ceará (ALVES, 2001, p.139).

Como sabemos o símbolo "=" têm diversos significados a depender do contexto no qual aparece e da maneira como ele é utilizado. Assim, por exemplo, no contexto aritmético, o significado do "=" pode significar um cálculo a ser realizado tal como "4+2 =". Já no contexto algébrico, o sinal de "=" pode significar uma relação de igualdade ou de equivalência. Um exemplo seria a equação x+7 = 20. Neste caso, a principal finalidade do símbolo "=" é indicar que o número que está no lado direito do "=" é equivalente à expressão do lado esquerdo.

Ainda no contexto algébrico e em particular, no ensino de funções, o sinal de "=" pode indicar uma dependência causal entre as variáveis. Como exemplo, podemos trabalhar com a função afim y=2x+5, onde a variável "y" é a dependente e "x" a independente.

Nesse sentido, Cavalcanti e Câmara dos Santos (2008) teve como objetivo discutir as concepções dos alunos do 3º ano do Ensino médio sobre o significado do símbolo "=", particularmente, no contexto das funções. Os autores tinham em mente, observar de maneira articulada, o uso do símbolo "=" e a idéia de dependência entre variáveis.

Participaram da pesquisa duzentos e cinco alunos do 3º ano do Ensino Médio de escolas públicas da região metropolitana do Recife. O experimento consistiu na aplicação de dois instrumentos de investigação. O que diferenciava um instrumento do outro correspondia à presença de um símbolo de operação (no caso, o símbolo + de adição) antes ou depois do símbolo de igualdade. Por exemplo, se no instrumento 1 a expressão correspondente a igualdade fosse 2x+8=y, no instrumento 2, seria y= 2x+8.

Na análise dos resultados finais, os alunos demonstraram diferentes concepções sobre o significado do sinal "=", mas nenhuma foi compatível com os atributos deste símbolo no contexto de funções. Assim, por exemplo, 8,7% dos alunos pesquisados atribuíram significados ao sinal "=" da função afim y = 2x+8 como sendo operacional, ou seja, indicava um cálculo a ser realizado. Contudo, nenhum aluno indicou o sinal de "=" como sendo uma dependência causal entre as variáveis (relação entre a variável dependente e independente).

A próxima seção é dedicada à história do conceito de função e das principais condições necessárias para a compreensão deste conceito, bem como os mais importantes obstáculos epistemológicos que dificultam este entendimento.

2.2 Atos de Compreensão e Obstáculos Epistemológicos ao conceito de funções

Sierpinska (1992) afirma que os alunos têm dificuldades de compreender o conceito de função e de fazer a ligação entre os seus diversos tipos de representação: fórmulas, gráficos, diagramas, relações. Além disso, a autora ressalta que eles têm encontrado empecilhos em manipular símbolos relacionados a funções, tais como: $f(x)$, $sen\ (x + t)$ etc. Por outro lado, o termo $f(x)$, usado no conceito de função, não auxilia muito ao aluno, pois expressa, ao mesmo tempo, o nome e o valor da função f.

> Em situações espontâneas, os estudantes usam diferentes simbolismos e diferentes linguagens. Ao dizer que o valor de uma função para x=2 é 3 eles escreveriam: "*x(2) =3*". Isto deveria ser lido: "*Ponha 2 em lugar de x na fórmula de função. Você obtém três*". O conceito de valor de função está intimamente relacionado à atividade de calcular o valor, se a fórmula é dada. Para expressar "f(x)" eles diriam: "*Você coloca 2 na fórmula da função a ser calculada e obterá um número*" (SIERPINSKA, 1992, p. 27-28).

A autora questiona o que seria compreender um conceito matemático. Seria ler a sua definição? Muitas pessoas ligadas à Educação responderiam afirmativamente, ou seja, para entender um determinado conceito matemático, essencialmente bastaria compreender a sua definição. Todavia, de acordo com a pesquisadora, para compreender um determinado objeto matemático definido, devemos ver seus exemplos e contra-exemplos, saber exatamente o que este objeto representa ou não representa, relacionando-o com outros conceitos e o enquadrando dentro de uma determinada teoria conhecida. Além disso, não podemos esquecer as suas diversas aplicações. Estas condições básicas de compreensão de um objeto matemático são chamadas por ela de atos de compreensão.

Para ela, tudo o que sabemos pode ser separado em três níveis de conhecimentos. O primeiro deles consiste em conhecimentos explícitos, baseados em nossas crenças, convicções e maneiras particulares de ver o mundo, que pode ser comunicado ao outro com declarações que não pedem justificativas, além da tradição e do bom senso.

O segundo está relacionado a esquemas de pensamento, principalmente inconscientes. São modos de resolvermos um problema, de interpretarmos situações. São aprendidos no decurso de nossa socialização e educação.

O terceiro, por seu turno, refere-se aos conhecimentos técnicos, cujo valor é afirmado através de critérios mais consistentes e qualificados como científicos. O seu conhecimento é explícito, mas é construído através de formas de raciocínio mais rigoroso e justificação racional. A própria autora esclarece a inter-relação e a interdependência entre esses três níveis de conhecimento:

> Esses três níveis não são independentes. Muito do que nós fazemos no nível técnico, problemas ou conceitos os quais focalizamos, caminhos nos quais escolhemos para resolver um determinado problema podem ser explicados pelos conteúdos do

> primeiro e segundo níveis de nosso conhecimento. Nossas atitudes diante do conhecimento matemático, nossas convicções de como uma prova de teoremas deve ser, nossos esquemas inconscientes de pensamento fazem guiar as nossas escolhas dos tópicos de pesquisa ou aprendizagem, e métodos de como abordar uma resolução de um problema. Por outro lado, em algumas vezes, nossas realizações no nível técnico mudam as nossas convicções, trazem à nossa consciência alguns novos esquemas de pensar, modificando os esquemas velhos (SIERPINSKA, 1992, 27-28, tradução nossa).

Dessa forma, se existe uma interdependência entre esses três níveis de conhecimento, então uma convicção cega, um esquema de pensamento inconsciente pode funcionar como obstáculos ao nosso pensamento a nível técnico.

Sierpinska ressalta que esses obstáculos são superados quando “nos distanciamos de nossa convicção ou esquema de pensamento, observamos as conseqüências deles e passamos a considerar outros pontos de vista” (SIERPINSKA, 1992, p. 28). A seu ver, os obstáculos epistemológicos não são resultados de maneiras particulares de ensinar um determinado conceito e nem são idiossincráticos, ou seja, não é algo que aconteça com uma ou duas pessoas que tenham dificuldade de aprender. Eles são comuns em algum patrimônio cultural, manifestando-se no passado e no presente. Dessa forma, parecem ser mais obstáculos objetivos a um novo modo de conhecimento.

Para Sierpinska, a primeira condição para que haja a compreensão de função é tomarmos consciência do nosso mundo ao redor, identificando as suas mudanças como um problema prático a resolver[3]. Outro ato de compreensão para o conceito de funções seria observar mudança nos fenômenos que nos cercam e perceber as relações e regularidades nestas mudanças[4]. A autora ainda ressalta que se ignorarmos esta condição como necessária para a compreensão desse conceito é porque pensamos que a Matemática não pode estar relacionada a problemas práticos. Esta atitude é um obstáculo que deve ser superado. Assim, temos o primeiro obstáculo epistemológico:

- Matemática não está relacionada com problemas práticos. Esta concepção é compartilhada por Platão, em seu livro “*A República*”, no qual negava o direito

---

[3] Primeiro ato de compreensão.
[4] Segundo ato de compreensão.

dos cidadães livres de ocuparem as suas mentes com problemas práticos matemáticos[5].

Na Grécia antiga, os grandes sábios já se envolviam com problemas ligados à Astronomia e geodésicos. Para tanto, eles preenchiam tabelas de relações numéricas, utilizando técnicas de cálculo. Mas isto não era visto como pertencente à Matemática. Era concebido mais como uma arte, um conhecimento prático, de ofício, que era passado de pai para filho.

Com o decorrer do tempo, alguns historiadores de Astronomia e Matemática mostram que, na construção de certas tabelas, eram utilizados métodos numéricos e de interpolação, fato esse observado no livro de Ptolomeu, "*Almagest*", onde são encontradas sofisticadas tabelas cujo preenchimento foi baseado em interpolação de funções de duas variáveis.

Todavia, estes métodos não eram explícitos e nem vistos como pertencentes à Matemática. O próprio Ptolomeu acreditava que toda produção matemática construída até então consistia no livro "*Elementos de Euclides*" mais alguns novos teoremas ligados à Trigonometria, à Geometria plana e esférica. Assim, temos o segundo obstáculo epistemológico:

- Técnicas de cálculo utilizadas em tabelas de relações numéricas não são merecedoras de ser um objeto de estudo em Matemática[6].

É muito comum que estudantes, observando mudanças, tenham dificuldade de identificar o que está mudando ou quais são os objetos variáveis que participam do processo. Eles não analisam a situação, mas sim o todo. Assim, para a pesquisadora, um ato de compreensão para o conceito de funções seria a identificação dos objetos variáveis envolvidos nos fenômenos estudados[7]. Deriva daí um novo obstáculo epistemológico.

---

[5] Primeiro obstáculo epistemológico.
[6] Segundo obstáculo epistemológico.
[7] Terceiro ato de compreensão.

- Refere-se às mudanças como fenômenos, centralizando seu foco de atenção no modo como os objetos mudam, sem que haja uma identificação acerca de quais objetos mudam[8].

Antes de estudar o conceito de funções, o aluno teve oportunidades de trabalhar com quantidades conhecidas e desconhecidas. Assim, por exemplo, na sétima série, ele se depara com equações de uma incógnita e sistemas de duas equações com duas incógnitas. Por outro lado, ao resolver um determinado problema de Álgebra, o estudante poderá diferenciar a quantidade conhecida da desconhecida e representar esta última pela letra "x" e, em seguida, armar a equação e resolvê-la.

Segundo Sierpinska (1992), este processo pode ser caracterizado como um modelo de pensamento matemático: quantidades conhecidas e desconhecidas. A pesquisadora ressalta que, no estudo inicial do conceito de funções, este tipo de raciocínio é ainda muito utilizado pelo aluno uma vez que, ao resolver uma determinada situação-problema relativa a este conceito, ele tenta resolver não pensando em termos de variáveis e quantidades constantes, mas sim armando uma nova equação, objetivando determinar o valor da incógnita. Dessa forma, a autora postula que o aluno, ao construir o conceito de função, deverá também utilizar um novo modelo de pensamento, baseado em variáveis e constantes.

Quanto aos aspectos históricos, Sierpinska afirma que, a partir de Euler, iniciou-se uma acirrada discriminação entre quantidades variáveis e quantidades constantes, em análise; e entre as quantidades conhecidas e desconhecidas na Álgebra.

Como conseqüência, a autora aponta outro ato de compreensão que compreende "discriminação entre dois modelos de pensamento matemático: um em termos de quantidades conhecidas e desconhecidas e o outro, em termos de variável e quantidades constantes" [9] (SIERPINSKA, 1992, p. 26). Surge daí um novo obstáculo epistemológico:

[8] Terceiro obstáculo epistemológico.
[9] Quarto ato de compreensão.

- Pensando em termos de equações e de incógnitas calculadas a partir delas[10].

Segundo Sierpinska (1992), as posições assumidas pelas variáveis "x" e "y" não são simétricas em relação à definição de função. Atualmente, para nós professores, esta condição não parece causar dificuldades de compreensão. Contudo, foi preciso um longo período de tempo para que os matemáticos percebessem a importância de distinguir a ordem das variáveis, de notar que, em muitos contextos da Matemática, o comportamento das variáveis não é semelhante.

Assim, por exemplo, no desenvolvimento da geometria analítica, a noção de função fazia parte de seu contexto, mas ao trabalhar com a equação da elipse, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, naquela época, a ordem das variáveis não era importante.

Historiadores atribuem a discriminação entre variáveis dependentes e independentes a René Descartes, mas parece que os papéis atribuídos às coordenadas, em seu livro "*Geometria*", são bastante simétricos. Até mesmo para Newton, continua a pesquisadora, esta discriminação não é clara na medida em que sua noção de tempo era considerada como puramente convencional.

Sabemos que uma fórmula de função, em que aparece x e y, permite calcular uma coordenada quando a outra é dada. O fato é que sempre a segunda coordenada é determinada pela primeira e, nem sempre o contrário é percebido pelos estudantes. Assim, baseada no contexto histórico e em sua experiência no ensino de Matemática, Sierpinska aponta outra condição necessária para aprendizagem do conceito de função que consiste na discriminação entre as variáveis dependentes e independentes[11]. Surge daí um novo obstáculo epistemológico:

- A ordem relativa das variáveis é vista como irrelevante[12].

[10] Quarto obstáculo epistemológico.
[11] Quinto ato de compreensão.
[12] Quinto obstáculo epistemológico.

Na antiga Grécia, o Teorema de Pitágoras era usado para medir comprimento de um terreno e outras aplicações com finalidades práticas. Contudo, a descoberta no séc. V a.C da existência de grandezas incomensuráveis (como a diagonal do quadrado de lado unitário) abalou a Matemática grega, dado o peso que nela tinha a escola pitagórica.

Naquela época, acreditava-se que os números racionais fossem suficientes para resolver qualquer problema numérico que pudesse surgir. Para eles, qualquer medida de uma grandeza, em qualquer unidade, podia ser sempre expressa através de um número racional. Contudo, com o aparecimento do número irracional, a segurança dos gregos em relação às medidas foi abalada. Dessa forma, fazia-se necessária a extensão e uniformização do conceito de números. Entretanto, durante muito tempo que se seguiu, este intento não foi satisfatório.

Após dois séculos, surgem "Os Elementos de Euclides", obra em treze volumes e o mais antigo texto grego a chegar completo a nossos dias. Em três de seus volumes, Euclides dedica um bom espaço à teoria dos números. Neles, Euclides representou os números por segmentos de reta, assim como representava o produto de dois números por um retângulo. Além disso, restringiu as razões para razões de magnitudes homogêneas e as proporções eram vistas como algo diferente de igualdades. As razões, por sua vez, eram vistas pelo notável matemático como um tanto diferente de quociente. Estas atitudes em relação aos números eram verdadeiras barreiras para a descrição do mundo complexo que seria descrito pela Matemática. Desta atitude diante do conceito de número deriva o sexto obstáculo epistemológico[13]:

- Uma concepção heterogênea de número.

Segundo Sierpinska (1992), este obstáculo teve uma vida longa na história. De fato, Nicole Oresme, no século XIV, conseguiu provar certas propriedades de movimento, construindo modelos geométricos. Assim, por exemplo, ele mostrou que, num triângulo, o caminho percorrido por um móvel, em movimento uniformemente acelerado e com velocidade inicial nula, tem movimento proporcional ao quadrado do tempo.

---

[13] Sexto obstáculo epistemológico.

Sierpinska (1992) enfatiza que essa associação geométrica com números transforma os gráficos idealizados por Oresme em representações geométricas bastante qualitativas ou modelos de relações entre magnitudes variáveis. Dessa forma, os números coletados possuíam um valor qualitativo.

Outro grande sábio que baseava suas pesquisas astronômicas em mensurações era Galileu Galilei. Já Descartes, por sua vez, não concebia as coordenadas como números, mas como segmentos de linha que têm alguma função para a curva e não são variáveis que podem assumir reais valores arbitrários.

Neste momento da história da Matemática, nos deparamos com vários impasses. Os irracionais devem ser encarados como números ou como uma anomalia, ou seja, um caso patológico de números? O número deve ser vinculado às interpretações geométricas ou deve ter uma definição mais rigorosa? As razões devem ter um sinal especial para elas? E as proporções? E qual a posição dos números inteiros e racionais diante deste quadro? Descartes tem razão em não considerar as coordenadas como números? Dessa forma, a unificação do conceito de número fazia-se necessária. Surgem então Simon Stevin, Isaac Newton e Leibintz.

Simon Stevin nasceu em Bruges, Flandes (agora Bélgica). Foi Físico, engenheiro e matemático holandês.[14] Autor de vários trabalhos científicos de importância entre eles "*La Disme"* (A Arte dos Décimos), onde apresenta o primeiro tratamento sistemático das novas frações decimais. A sua proposta consistia em usar números decimais com vírgula no lugar das frações, para expressar quantias em dinheiro e medidas. Stevin mostrou que era mais fácil operar com esses números do que com as frações.

Outra de sua obra de grande repercussão no meio científico foi *Arithmetic*. Nela, Stevin define número como "aquilo que expressa qualquer coisa" (SIERPINSKA, 1992, p. 40).

[14] SIMON, Stevin. Wikipédia, a enciclopédia livre. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Simon_Stevin> . Acesso em 03 out. 2007.

Para Isaac Newton, o número aparece em três formas: inteiro, fracionário ou irracional. Um número será inteiro se medir unidades; o número caracteriza-se como fracionário se medir partes inteiras da unidade; e o número irracional, por seu turno, é incomensurável como unidade.

Finalmente, Leibniz postulava a unificação dos sinais. Tanto as razões e as proporções deviam ter o mesmo sinal para ser expressas.

Assim, o trabalho destacado desses matemáticos contribuiu para a unificação do conceito de número. Outros fatores estavam relacionados ao desenvolvimento da notação simbólica e da Álgebra.

De fato, com o emprego de letras para representar números e magnitudes mais abstratos, a distinção entre números discretos e magnitudes variáveis cada vez era menos justificada. Através da simbologia, manipulações medidas incomensuráveis. Por conseguinte, chegamos num novo ato de compreensão para compreendermos o conceito e função[15].

- Generalização e síntese da noção de número.

Alguns matemáticos contemporâneos e pedagogos acreditam que este ato pode resultar em um obstáculo oposto ao da concepção heterogênea de número. Dessa forma, um novo obstáculo epistemológico é identificado[16]:

- Uma concepção filosófica de acordo com a Filosofia Pitagórica onde tudo é número.

Ao trabalharmos com o sistema de eixos cartesianos, como sabemos, chamamos o eixo horizontal de x – o eixo das abscissas – e o eixo vertical de y – eixo das ordenadas. Mas

[15] Sexto ato de compreensão.
[16] Sexto obstáculo epistemológico.

essas denominações são arbitrárias, convencionais. Assim, o conjunto $\{(x, y): y = x^2\}$, tem o mesmo significado de tratarmos com o conjunto $\{(y, x): x = y^2\}$. Todavia, este processo de analogia não pode ser aplicado em contextos da Física, uma vez que na lei de Galileu $s = \frac{1}{2}gt^2$, a variável "s" não dever ser mudada para a variável "t".

No primeiro caso, temos as variáveis "x" e "y" que representam números no sentido abstrato. No outro, lidamos com quantidades físicas, o espaço s é uma quantidade que possui a qualidade de ser medido. Dessa forma, a discriminação entre variáveis que representam grandezas físicas (tempo, velocidade) e variáveis numéricas é uma condição necessária para compreender funções[17].

Mesmo com essa discriminação, não devemos proibir o uso de funções na Física ou deixar de perceber leis da Física como algo completamente diferente de função. Não deve ser esquecido que foi exatamente a união da Física e da Matemática que apoiou os estudos em Matemática, que depois conduziu à percepção e desenvolvimento dos diferentes tipos de relações.

Discriminar número e magnitude física, por exemplo, tem um significado diferente de perceber as relações entre leis físicas e funções matemáticas. Mas ambas, sínteses e discriminações, são necessárias para compreender o conceito de função completamente. Dessa forma, outra condição necessária para que o conceito de função tenha sentido é a percepção de funções como uma ferramenta apropriada para modelar fenômenos envolvendo grandezas da Física, ou de outra natureza, (SIERPINSKA, 1992, p. 42)[18]. Dessa forma, chegamos no oitavo obstáculo epistemológico:

- Leis em Física e funções em Matemática não têm nada em comum, elas pertencem a domínios diferentes do pensamento[19].

Segundo Sierpinska (1992), a proporção foi uma relação privilegiada que ocupou

[17] Sétimo ato de compreensão.
[18] Oitavo ato de compreensão.
[19] Oitavo OE.

a mente dos grandes matemáticos durante um longo período de tempo, começando desde Euclides, em seu livro "*Elementos*", onde foi desenvolvida uma sólida teoria básica sobre proporções, até meados do século XVII, onde grandes matemáticos dominavam a linguagem de proporções, objetivando utilizá-la como instrumento de análise dos grandes fenômenos da natureza. Como exemplo, podemos citar o grande interesse de Oresme pelas proporções, em seu livro *Treatise on configuration of qualities*.

Assim, com respeito à arbitrariedade completa da "lei" de função em sua definição, tal atitude pode ser considerada como um obstáculo[20]:

- Proporção é um tipo privilegiado de relação.

Todavia, a partir daí, o próprio Oresme e outros matemáticos começaram a ver a proporção como um obstáculo ao desenvolvimento científico. É tanto que Oresme começa a estudar as propriedades das funções exponenciais.

Segundo Zuffi (2001), uma das principais fases do desenvolvimento de função foi no período moderno, a partir do século XVII. Galileu Galilei, "pai da ciência moderna", contribuiu para a Física e para a Matemática. Nesta última, ajudou a evoluir a idéia do estudo das funções, quando ele introduziu o tratamento quantitativo nas suas representações gráficas. Ele definia a noção de função segundo uma equação em x e y que introduzia a dependência entre quantidades variáveis, permitindo calcular o valor de uma variável em correspondência com o valor da outra. Entretanto, para a autora supracitada, foi a partir dos trabalhos de Newton e Leibniz que surgiram as primeiras contribuições efetivas para o delineamento desse conceito.

Isaac Newton foi um notável físico e matemático, tendo criado, ao mesmo tempo em que Leibniz, mas independentemente dele, um ramo da Matemática conhecido como cálculo diferencial e infinitesimal. O trabalho de Leibniz leva à noção de função, cujo nome foi criado por ele. Mais na frente, será voltado a falar sobre esses dois grandes sábios e suas contribuições para o desenvolvimento do conceito de função. A seguir, serão vistos as

[20] Nono OE.

definições de funções dadas por diversos matemáticos em diferentes momentos da história da matemática.

Jean Bernoulli, em 1718, construiu a primeira definição explícita de função de uma variável, definindo-a como: "Função de uma quantidade variável é uma quantidade composta de alguma maneira desta variável e de quantidades constantes" (SIERPINSKA, 1992, p. 45, tradução nossa). Leonard Euler também deixou uma definição interessante de função:

> Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica, composta de alguma maneira desta mesma quantidade e de números ou quantidades constantes. Assim, qualquer expressão analítica a qual, além da variável z, contém também quantidades constantes, é uma função de z. Por exemplo: a+3z; az+4zz; az+b/aa-zz; cz, etc, são funções de z (SIERPINSKA, 1992, p. 45, tradução nossa).

Observe que Euler utiliza a mesma definição de Bernoulli, substituindo o conceito de quantidade por expressão analítica, introduzindo assim o conceito algébrico para a definição de função. Todavia, a definição dada por Euler não explicita o que é uma "expressão analítica" (ZUFFI, 2001; RÊGO, 2002; LIMA, 2008).

Outra definição de função interessante é de Lagrange:

> Chama-se função de uma ou mais variáveis toda expressão de cálculo que envolve, de alguma forma, estas variáveis misturadas ou não com outros valores dados (constantes), de modo que as variáveis da função podem receber todos os valores possíveis. Assim como as funções que consideram somente variáveis sem nenhuma ligação com constantes que venham a ser misturadas (SIERPINSKA, 1992, p. 45, tradução nossa).

A definição de função, segundo Cauchy, era: "Chamam-se funções de uma ou mais variáveis aos valores que se apresentam no cálculo como resultados das operações feitas sobre uma ou mais outras constantes ou variáveis". Assim, para Cauchy, função é o resultado das operações que são envolvidas na expressão. Mas não esclarece qual seria a natureza dessas "operações" feitas sobre as variáveis tornando a definição de função imperfeita. Lagrange, em sua definição, menciona a expressão como sendo a função e se preocupa também em definir funções de várias variáveis (SIERPINSKA, 1992; ZUFFI, 2001).

Sobre a diferença entre as definições sobre funções dadas por estes dois últimos matemáticos, Sierpinska observa: "Lagrange fala sobre a lei de função; Cauchy - sobre o valor. Agora, nós concebemos o conceito de função como não sendo só uma lei nem também só como valor; mas a síntese desses dois e os conceitos de domínio e contra-domínio" (SIERPINSKA, 1992, p. 45).

Pelo exposto acima, fez-se um breve recorte sobre a história do conceito de função, desenvolvida na idade moderna. Pelas primeiras definições, nota-se um certo encantamento pela Álgebra, onde a função é dada por expressão algébrica. Pelas outras, observa-se uma concepção de função baseada em relações descritas por fórmulas analíticas. Era a convicção de que a habilidade algébrica acompanhada pelo poder de Álgebra poderia resolver quase automaticamente muitos tipos de problemas.

Assim, chegamos a dois obstáculos relacionados à Álgebra: o primeiro refere-se aos métodos matemáticos, o segundo à concepção de funções:

- Grande convicção na força das operações formais usadas em expressões algébricas[21].
- Somente relações descritas como fórmulas analíticas merecem ser denominadas de funções[22].

A ação mental de compreensão subseqüente expressa a necessidade de discriminação entre uma função e as ferramentas analíticas utilizadas para descrever suas leis[23].

Durante a minha prática no magistério, e em particular nos cursos sobre funções, observo muito a ocorrência dos dois últimos obstáculos epistemológicos. De fato, ao trabalhar um determinado gráfico de uma relação – podendo ser uma função ou não – logo o aluno

---

[21] Décimo OE.
[22] Décimo primeiro OE.
[23] Nono ato de compreensão.

sente necessidade de identificar sua expressão algébrica e realizar operações formais sobre ela. Além disso, alguns alunos podem achar que a ferramenta analítica $x^2+y^2=1$ é uma equação de uma função. É uma forte crença no poder das operações formais usadas em expressões algébricas.

Por outro lado, alguns alunos não acreditam que a relação do tipo $r(x)=\begin{cases} 2 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ não é função uma vez que não aparece uma fórmula analítica, nem a variável y está explicitamente em função da variável x. Com isso são motivos suficientes para eles afirmarem que não é função. A discriminação acima expressa no nono ato de compreensão pode promover uma melhor consciência dos alunos sobre os casos acima citados e de funções expressas por duas ou mais sentenças.

Todavia, o ato de compreensão anterior pode ser que não aconteça antes de o aluno sintetizar o conceito de função. O conceito geral de função permite trabalhar com muitas relações entre conjuntos que não são expressas por fórmulas. Porém, como acentua Sierpinska, esta síntese pode ser de difícil alcance entre os alunos.

A necessidade de estender a noção de função para além daquelas funções expressas por expressões analíticas apareceu na história com a polêmica gerada entre Euler, D'Alembert e Bernoulli, sobre o "problema da corda vibrante". Esta polêmica continuou com o estudo das séries de Fourier. Ao procurar condições mais rigorosas da convergência das séries de Fourier, Dirichlet, em 1837, propôs a seguinte definição geral de função: "Se uma variável y está relacionada a uma variável x de modo que, ao se atribuir qualquer valor numérico a x, existe uma regra de acordo com a qual um único valor de y é determinado, então y é dito ser uma função da variável independente x" (SIERPINSKA, 1992, p.46).

Geralmente, em contextos de ensino/aprendizagem do conceito de funções, o aluno se depara inicialmente com funções contínuas, "bem comportadas", expressas por equações polinomiais. Dessa forma, pelo menos na fase inicial, o aluno lida com uma classe restrita de funções, criando protótipos do conceito de funções.

Mas qual será o comportamento desse aluno ao encontrar funções que não se adaptam aos protótipos de funções conhecidas por ele? Será que ele entrará em conflito cognitivo ao estudar funções que não são expressas por equações algébricas? O que ele pensará ao estudar o espaço vetorial das funções dado na disciplina Álgebra Linear? Ele já formou uma compreensão sobre a definição de função e poderá questionar quais são os objetos matemáticos que esta definição contempla. Assim, é necessário compreender o conceito de funções para níveis mais avançados. O aprendiz deverá possuir um amadurecimento suficiente na cultura matemática para ver a ligação lógica do papel das definições matemáticas com o conceito. Ele não pode se deter exclusivamente com descrições de objetos matemáticos baseados apenas no seu senso comum ou "*insights*".

Se as conseqüências lógicas da definição mostrarem exemplos de objetos que não se adaptam aos protótipos, então não são os protótipos que têm de mudar, mas a definição. O aluno deve possuir uma postura de aceitar a definição com todas as suas conseqüências lógicas, pelos menos para um conjunto significativo dessas conseqüências. Todavia, para alcançar este propósito, o sujeito deve estudar um conjunto de funções diversificadas, que não fiquem somente na análise de funções elementares.

A necessidade para ampliar a noção analítica de função além das expressões não surgiu antes de formular teoremas gerais em grandes classes de relações entre variáveis e organizar os resultados obtidos para funções específicas. O contexto geral no qual a noção de função surgiu, deixa claro porque uma síntese do conceito geral de função é difícil em fases iniciais da experiência matemática. A conceituação de função tem de ir além da fase de processo e o seu conceito tem que se tornar um objeto que a mente possa manipular como um elemento. Assim, temos mais dois atos de compreensão para o conceito de funções:

- Discriminação entre definições matemáticas e descrições de objetos[24].
- Síntese da concepção geral de função como um objeto[25].

Pelo exposto acima e pelos dois últimos atos de compreensão temos mais um

[24] Décimo ato de compreensão.
[25] Décimo primeiro ato de compreensão

obstáculo epistemológico:

- Uma concepção de definição, considerada como uma descrição de um objeto, não é lógica, nem determina o objeto[26].

Definição é uma descrição de um objeto conhecido por sentidos ou pela percepção. A definição não determina o objeto; mas sim, o objeto determina a definição. A definição não é o que liga logicamente.

Sierpinska (1992, p. 25-58, tradução nossa) enfatiza:

> A convicção de que todas as funções são contínuas e diferenciadas é mencionado em quase todos os lugares, freqüentemente, como uma pseudoconcepção ou até mesmo um obstáculo epistemológico. Devido à dificuldade fundamental de sintetizar a concepção geral de função e o obstáculo relacionado à noção de definição em matemática, esta convicção é o que pode ser esperado de estudantes que estão descobrindo funções lineares, quadráticas e trigonométricas. Nós não acreditamos que valha a pena formular estas convicções como obstáculos especiais. Primeiro, porque elas já estão formuladas. E segundo, porque são convicções específicas e protótipos juntos com um tipo de exemplos introdutórios que os estudantes podem classificar. A conclusão pedagógica é que uma introdução precoce da definição geral de função não faz sentido; ou será ignorada ou será entendido mal.

Segundo Braga (2006), a definição de Dirichlet e suas variações atenderam as demandas da Matemática por algum tempo. No entanto, no final do século XIX, para o desenvolvimento efetivo da Matemática, era necessário ampliar a definição de função para além de conjuntos numéricos. Esta carência foi suprida em 1939, pelo grupo Bourbaki, com a formalização do conceito de função na qual "[..] o conceito de função pode ser definido de uma maneira simbólica, formal e quase que sem usar palavras da língua materna" (ZUFFI, 2001, p. 14):

Uma função é uma tripla ordenada (X, Y, f), onde X e Y são conjuntos e f é um subconjunto de XxY tal que se (x, y) pertence a f e (x, y') pertence a f então y=y'. (SIERPISNKA, 1992, p.30). Esta definição é atualmente usada nos meios matemáticos e científicos e foi adotada, nos anos 60 do século XX, pelo movimento da Matemática moderna

[26] Décimo segundo obstáculo epistemológico.

(BRAGA, 2006; ZUFFI, 2001). No entanto, muitos anos antes, precisamente em 1911, Giuseppe Peano propôs reduzir o conceito de função ao conceito de relação unívoca. Surge daí um novo ato de compreensão:

- Discriminação entre o conceito de função e relação[27].

Sabemos que existem muitas representações diferentes de funções e as mais conhecidas são, pelos menos em contextos de ensino/aprendizagem, gráficos, fórmulas analíticas e tabelas. Ter consciência das limitações de cada uma e do fato que cada uma representa um mesmo conceito geral é condição fundamental para entender funções. Não é fácil para o aluno adquirir a habilidade de interpretar um gráfico ou tabela. No entanto, está no caminho da aprendizagem esta capacidade onde os atos de compreensão encontram requisitos favoráveis para acontecer. A primeira representação a ser abordada será a tabular feita a seguir. Segundo Braga (2006), as tabelas existem desde 2000 a.C., quando os babilônios começaram a estabelecer tabelas sexagesimais de quadrados e raízes quadradas, de cubos e raízes cúbicas e outras. Assim, os babilônios já possuíam "um instinto de funcionalidade" utilizando tabelas como "funções tabuladas", e que eram destinadas a um fim prático (ZUFFI, 1998).

Dessa forma, as tabelas são consideradas as mais antigas representações de relações e mapas. Se as tabelas eram identificadas como funções, então é possível que todas as funções sejam identificadas como sucessões. Assim, temos outro obstáculo epistemológico relativo à concepção de função:

- Funções são sucessões[28].

Um ato mental de compreensão subseqüente expressa a necessidade de discriminação entre as noções de funções e sucessão[29].

[27] Décimo segundo ato de compreensão.

[28] Décimo terceiro obstáculo epistemológico.
[29] Décimo terceiro ato de compreensão.

No século XVII, a teoria da diferenciação e da integração era chamada de cálculo infinitesimal, o que significava cálculo com entidades infinitamente pequenas. Ela nasceu dos esforços para calcular áreas de figuras planas limitadas por linhas curvas, para calcular volumes de corpos limitados por superfícies curvas, determinar a equação da reta tangente à curva em um ponto e calcular o comprimento do arco.

Naquela época, "postulou-se a existência de tangentes e pensou-se a curva como composta de segmentos de reta infinitamente pequenos, por vezes considerados como parte de tangentes, por vezes como cordas. Supôs-se que o comprimento de arco era a soma dos comprimentos destas partes infinitamente pequenas" (GARDING , 2000, p. 147).

Fortemente apoiado no método cartesiano, Newton desenvolveu a teoria sobre fluentes. Para ele, a curva no plano cartesiano é descrita por um ponto em movimento e suas componentes x e y fluem no tempo e por isso, recebem o nome de fluentes. O passo seguinte era calcular as velocidades com que esses fluentes fluíam. Estas velocidades eram chamadas por Newton de fluxões. Assim, as fluxões eram taxas de mudança de quantidades, variando continuamente.

Newton desenvolveu também uma grande habilidade em expressar estes "fluentes" em termos de séries infinitas. Tentou definir limites de uma função, falando em "quantidades" e "taxas de quantidades", termos que são bastante imprecisos e distantes da noção de limite que conhecemos hoje.

Wilhelm Leibniz, em um de seus escritos datando de 1694, emprega a palavra função (do latim "functio" - execução), com significado puramente geométrico. Ele a compreendia como qualquer quantidade associada a uma curva, como por exemplo, as coordenadas de uma curva, a inclinação de uma curva e o raio da curvatura. Deve-se também a Leibniz, uma grande contribuição ao Cálculo Infinitesimal, sobre o qual desenvolveu o seu método de infinitesimais.

Assim, historicamente, o estudo das curvas está intimamente ligado à história do conceito de funções. Porém é importante ressaltar que a análise infinitesimal desenvolvida até então tinha como principal objetivo estudar as curvas geométricas. Newton e Leibniz não visavam as funções exatamente; os problemas que deram origem ao cálculo eram geométricos e cinemáticos.

Curvas eram vistas como objetos geométricos, lugares ou caminhos os quais os pontos se moviam. Não eram observadas como gráficos de relações dadas por uma equação. Além disso, para cada curva, o sistema de segmentos auxiliares era separadamente escolhido. Coordenadas não eram números determinados por um sistema de eixos escolhidos previamente. Eles eram segmentos de linha – objetos geométricos. Isso deriva mais um obstáculo epistemológico intrinsecamente ligado à concepção de coordenadas[30]:

- Coordenada de um ponto é um segmento de reta (não números).

Dessa forma, uma das condições necessárias para a compreensão do conceito de funções consiste em fazer uma discriminação entre as coordenadas de um ponto de uma curva e o segmento de reta que tenha alguma função para a curva[31].

Todavia, Sierpinska (1992) enfatiza que os gráficos representativos de relações entre magnitudes variáveis já existiam muito antes do surgimento do Cálculo Diferencial. Como exemplo, ela cita um gráfico oriundo do século XI que ilustrava a posição de planetas. Nele, a latitude era representada no eixo vertical e a longitude, por sua vez, no eixo vertical. A pesquisadora polonesa continua afirmando que as noções de gráficos e de curvas foram desenvolvidas separadamente durante muito tempo.

Para os matemáticos daquela época, as curvas eram modelos geométricos úteis para representar as relações. Estes modelos não precisavam representar as relações muito fielmente, eram concebidos mais para ser ter uma análise qualitativa do que quantitativa. Surge daí um novo obstáculo epistemológico relativo à concepção de gráfico:

---

[30] Décimo quarto obstáculo epistemológico.

[31] Décimo quarto ato de compreensão

- O gráfico de uma função é um modelo geométrico da relação funcional. Não precisa ser fiel, pode conter pontos (x, y) tal que esta função não esteja definida em x[32].

Em contextos de ensino e aprendizagem, funções podem ser faladas de várias maneiras diferentes pelos alunos. Algumas dessas maneiras podem ser dinâmicas, outras podem ser estáticas e algumas delas são operacionais. Assim, por exemplo, trabalhando com a função f(x) = 2x+1, muitos estudantes comentam que a função era como se fosse uma máquina: "substitua o x pelo número desejado, depois multiplique por dois e some com 1, e aí você obtém o produto final". Em outros momentos, trabalhando com a mesma função, o aluno pode escrever em sua resolução da prova x(2)=5. Neste caso, podemos inferir que, ao empregar este sinal, a sua compreensão do sinal de equação lhe instrui a executar as operações no membro direito da equação. Dessa forma, a verbalização deste aluno sobre o seu entendimento sobre funções aproxima-se muito da maneira operacional.

Falando em termos de representações, muitos alunos preferem as tabelas porque acreditam que sejam mais fáceis de ser trabalhadas. Além disso, as funções são aplicadas em diferentes contextos. Assim, por exemplo, na Economia, ao trabalhar com a função receita, o aluno deverá entender que os valores da variável independente x representam as quantidades vendidas de um produto e que o domínio destas funções está contido nos conjuntos dos reais não nulos. Na Física, por sua vez, ao trabalhar com suas leis, o aprendiz poderá lidar com duas ou mais grandezas.

Também, no contexto do estudo das funções, diferentes termos para a mesma coisa são usados. Nós dizemos: o valor de uma função, o termo de uma seqüência, a imagem de um ponto. No primeiro caso, temos o caso clássico da função assumir um valor para um determinado número do seu domínio; no segundo, temos que trabalhar com um domínio discreto, ordenando seus elementos e fazendo uma relação biunívoca com os elementos da seqüência. Assim, chegamos a mais dois atos de compreensão:

---

[32] Décimo quinto obstáculo epistemológico

- Discriminação entre as diferentes maneiras de representar funções e as próprias funções[33].
- Síntese dos diferentes modos de expressar funções, representar funções e falar sobre funções[34].
- (Concepção de Variável) As mudanças de uma variável ocorrem a seu tempo[35].
- Generalização da noção de variável[36].
- Síntese dos papéis de noções de função e causa na história de ciência. Ter consciência do fato que a procura para relações funcionais e causais são expressões humanas para entender e explicar mudanças no mundo[37].
- Discriminação entre as noções de relações funcionais e causais[38].

Uma implicação pedagógica dessa condição é que se a noção de função não aparece aos estudantes como uma das possíveis ferramentas tentando responder às suas perguntas, sobre a variabilidade do mundo, isto pode permanecer sem sentido para eles fora da sala de aula de Matemática.

Sierpinska (1992) propõe que sejam realizadas atividades que estimulem os estudantes a analisar, explicar e encontrar regularidades em fenômenos do cotidiano, que envolvam mudanças e a forma analítica de função deve aparecer como instrumento de modelagem destes fenômenos e a utilização de tabelas e métodos de interpolação que tornem de grande valor a compreensão de funções e a identificação daquilo que muda.

---

[33] Décimo quinto ato de compreensão.
[34] Décimo sétimo ato de compreensão.
[35] Décimo sexto obstáculo epistemológico.
[36] Décimo sétimo ato de compreensão.
[37] Décimo oitavo ato de compreensão.
[38] Décimo nono ato de compreensão.

3. REVISÃO DE LITERATURA

Este capítulo faz uma revisão bibliográfica de pesquisas acerca da aprendizagem do conceito de funções. Está dividido em três partes. A primeira parte trata dos estudos de funções mediados por ambientes computacionais. Na segunda parte, as pesquisas realizadas na área chamada de Psicologia da Educação Matemática são mostradas. A terceira parte trata de pesquisas que evidenciam o papel da interação e dos conhecimentos prévios na aprendizagem do conceito de funções.

3.1 O uso de computadores no ensino de funções

Um *software* indicado para auxiliar a aprendizagem dos principais conceitos teóricos do cálculo é o *Derive* que diferencia e integra simbolicamente, calcula limites e integrais definidas. Gráficos bidimensionais e tridimensionais são traçados com o comando Plot. O *Derive* calcula constantes matemáticas importantes com qualquer grau de precisão.

O reconhecimento do valor da Informática no ensino vem sendo comprovado dia após dia. Pesquisas recentes têm mostrado a relevância do computador como uma ferramenta para a aprendizagem de conceitos de funções, como observa Rego (2000, p.76):

> "As principais vantagens dos recursos tecnológicos, em particular o uso de computadores, para o desenvolvimento do conceito de funções seriam, além do impacto positivo na motivação dos alunos, sua eficiência como ferramenta de manipulação simbólica, no traçado de gráficos e como instrumento facilitador nas tarefas de resolução de problemas. A utilização de computadores no ensino provocaria, a médio e longo prazo, mudanças curriculares e de atitude profundas uma vez que, com o uso da tecnologia, os professores tenderiam a se concentrar mais nas idéias e conceitos e menos nos algoritmos".

Além disso, como mostrou Castro-Filho (2001b), *software* de simulação ou sensores acoplados a computadores têm auxiliado bastante no desenvolvimento do conceito de taxa de variação e função. O autor realizou pesquisa em uma escola de Ensino Médio em Austin, nos Estados Unidos, na qual foram utilizados o *"Diagrama Interativo Conta*

Bancária" e um sensor de movimento. A investigação foi concentrada nos resultados relativos a quatro dos professores da escola. Os resultados também sugeriram como o currículo escolar em geral limita o desenvolvimento conceitual dos alunos e professores, circunscrevendo o ensino de funções somente a uma gama limitada de gráficos e de situações (funções do 1.º grau, quadráticas etc.). Estes assuntos são estudados de maneira isolada, sem relação com a taxa de variação.

Na disciplina de Cálculo, é extremamente importante que o aluno adote uma visão variacional - considerar na função a relação que existe entre a variação de x_1 a x_2 e a variação de $f(x_1)$ a $f(x_2)$ - para analisar subconceitos de derivada e valores extremos. Com esta e outras preocupações o EDC – Educational Development Center - desenvolveu o software *DynaGraph*.

O *Function Probe* é um *software* educacional voltado para o estudo da Álgebra moderna, Trigonometria e conteúdos básicos da disciplina Cálculo Diferencial e Integral. Foi desenvolvido pela Universidade de Cornell, também nos Estados Unidos. Possui um pacote multi-representacional que contém três ferramentas integradas: um gráfico, uma tabela e uma calculadora. Cada ferramenta é independente e exibida através de sua própria interface. Todavia, pode-se enviar uma informação de uma ferramenta para outra. Assim, por exemplo, ao trabalhar com a função $y = 2x$ na ferramenta tabela, à medida que o aprendiz vai atribuindo valores à variável independente x, localizados na primeira coluna, o programa vai calculando os valores correspondentes da variável dependente y. Acionado o comando *Send/Ponts to Graph* imediatamente este pontos obtidos são plotados na ferramenta gráfico.

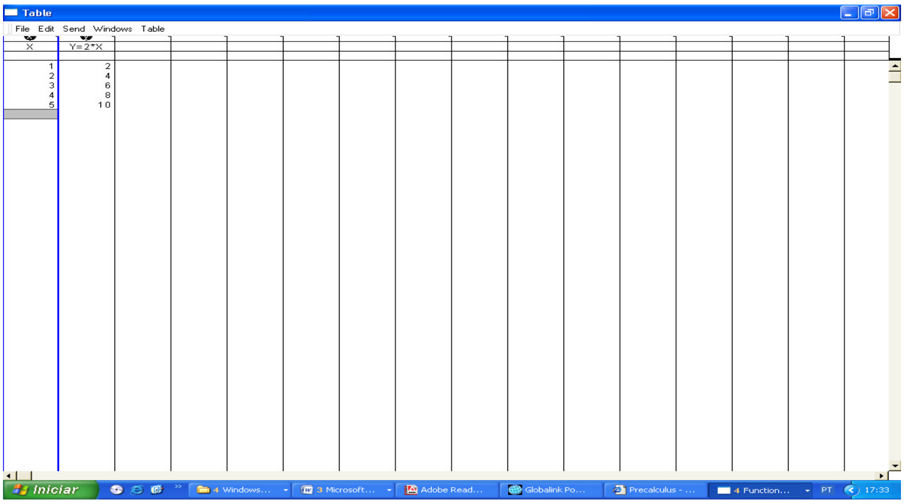


Figura 3.1 – Ferramenta Tabela do Software Educacional *Function Probe*.

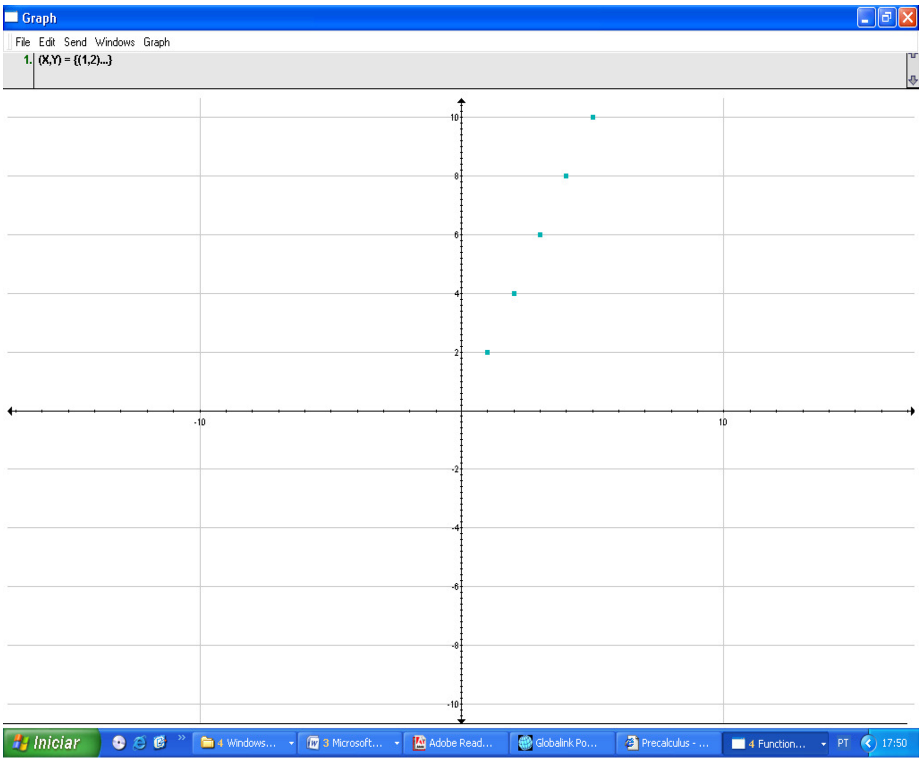


Figura 3.2 - Ferramenta Gráfico do Software Educacional *Function Probe.*

A idéia de fazer o intercâmbio entre as representações é um meio que permite aos alunos trabalharem com as múltiplas representações quando estão resolvendo uma situação-problema. Mediado por ele, podem-se explorar situações didáticas envolvendo funções e modelagens matemáticas. Um dos seus recursos consiste em mudar dinamicamente um gráfico e perceber os seus efeitos na equação da função.

Utilizando duas adaptações do *DynaGraph*: *DynaGraph Paralelo* e *DynaGraph Cartesiano* e *Function Probe*, Ferreira (1998) realizou uma pesquisa com quatro pares de estudantes brasileiros da 2ª série do Ensino Médio. Para investigação de alguns subconceitos de função, foram selecionados: conjunto imagem, periodicidade, variação, vértice e simetria axial. A pesquisadora aponta que os *software* utilizados juntamente com as atividades elaboradas em torno deles encorajaram os alunos a desenvolverem percepções, generalizações e conexões com os subconceitos estudados.

Estes estudos mostram como o software educativo, usado como ferramenta interativa, pode suprir as dificuldades de aprendizagem e permitir ao aluno do Ensino Médio, uma maior participação no seu processo de desenvolvimento conceitual matemático. Todavia, como se sabe, a introdução do computador no ensino por si só, não provoca o questionamento dos modelos tradicionais do ensino e aprendizagem. Em muitos casos, pode até afastar professor e aluno de questões básicas sobre a concepção da natureza da aprendizagem e da formação de conceitos, conforme analisa Carraher (1992).

Atualmente, no Ensino Médio, o estudo de funções é voltado essencialmente para Álgebra, ou seja, para a expressão analítica de uma função. Os alunos pouco estudam as representações gráficas ou tabulares das funções matemáticas. Acreditamos que o motivo maior de enfocar mais aquela representação se deve ainda à ênfase no raciocínio algorítmico, praticando a seqüência técnica (algoritmo)/prática (exercícios) objetivando a aprovação no vestibular. Além disso, como argumentam Borba e Penteado (2001, p. 29) "[...] tal destaque muitas vezes está ligado à própria mídia utilizada. Sabemos que é difícil a geração de diversos gráficos num ambiente em que predomina o uso de lápis e papel e, então, faz sentido que não se dê muita ênfase a esse tipo de representação".

A construção de gráficos de funções em sala de aula, utilizando mídias tradicionais (lousa, lápis, papel quadriculado etc.) pode demandar grande volume de cálculos desnecessários para se construir tabelas de pares ordenados. Para reverter esse quadro, em contextos de ensino e aprendizagem de funções, podemos usar a tecnologia gráfica. Outra vantagem desse instrumental de aprendizagem seria trabalhar com famílias de funções não usuais.

Todavia, ao visualizar os gráficos dessas funções, mostrados na tela do computador, podemos ter erros de interpretação e concepções falsas. De fato, dependendo da escala utilizada nesses ambientes, o gráfico da função seno poderá ser apresentado como uma reta (ABRAHÃO; PALIS, 2004).

Tendo essas considerações em mente, as autoras realizaram uma pesquisa junto a quatro professores regentes na 1.º série do Ensino Médio, cujo objetivo geral era de discutir como esses professores interpretam alguns gráficos não usuais de funções produzidas em computadores e calculadoras gráficas.

A análise das concepções dos professores ao se depararem com gráficos não usuais, obtidos em calculadoras e computadores, mostra dentre outras, suas dificuldades em conciliar seus conhecimentos teóricos com a visualização gráfica.

Assim, por exemplo, um dos professores, ao visualizar uma janela na qual o gráfico da função cúbica tinha aspecto parabólico, entendeu esse gráfico local como sendo o gráfico completo da função cúbica. A exposição desse gráfico, dentro de um intervalo, parecia-lhe de uma função quadrática. Nesse sentido, o curso de seu raciocínio foi aplicar propriedades relativas às funções quadráticas. Mesmo alertado para o fato que a função era polinomial do terceiro grau ele insistiu em calcular o vértice $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ e $x_v = -\frac{b}{2a}$. Segundo Hector (1992 *apud* ABRAHÃO; PALIS, 2004), esse é um problema que os alunos também encontram.

Além disso, outros resultados apontaram a dificuldade dos professores com escala. Após a visualização dos gráficos $f(x) = 3x - 5$ e $g(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{25}{6}$ o encontro das duas retas pareciam não ser perpendiculares. Após uma análise cuidadosa, apenas dois professores perceberam que o não perpendicularismo geométrico era um problema de escala.

Nesse sentido, os resultados apresentados da pesquisa nos mostram que a utilização de diferentes escalas na representação gráfica de algumas funções pode causar desequilíbrios cognitivos no professor, levando-o a rever e reavaliar seus conhecimentos.

Borba (1999) realizou um estudo com alunos da disciplina de Matemática Aplicada do primeiro ano do curso de graduação em Biologia. Esses alunos foram divididos em grupos de três alunos. O enfoque da pesquisa era coordenar a representação gráfica com a algébrica. Cada grupo fazia experimentações, utilizando a calculadora gráfica e o software FUN[39] (BORBA; JANUZZI, 1998). Uma das tarefas consistia em relacionar o deslocamento do gráfico com a mudança nos coeficientes a e b das funções quadráticas da forma $y = ax^2 + bx + c$. Após várias tentativas, os alunos elaboraram várias conjecturas que foram debatidas pelos colegas e o professor.

Uma delas, levantadas pelo grupo, afirmava que o gráfico da função quadrática com $b > 0$ interceptava o eixo y com sua parte crescente. Por outro lado, se $b < 0$ a interseção com o eixo vertical se daria com sua parte decrescente.

O próprio autor observa que a hipótese levantada por este grupo estava correta visto que a análise do sinal da abscissa do vértice $x_v = \frac{-b}{2a}$ nas quatro possíveis combinações ($a>0$ e $b<0$, $a>0$ e $b>0$, $a<0$ e $b<0$, $a>0$ e $b>0$), nos fornece a posição do vértice da parábola em relação ao eixo vertical y. Em particular, se $f(x) = x^2 + 3x + 1$, a concavidade da parábola estará voltada para cima, a abscissa do vértice será negativo e o eixo de simetria da parábola estará voltado à esquerda do eixo vertical y. Por conseguinte, o ponto de encontro da parábola e o eixo vertical pertencerá ao intervalo de crescimento.

Essa pesquisa ilustra a potencialidade de uma aula baseada em experimentação e na coordenação das múltiplas representações de um conteúdo matemático. Geralmente, nas aulas tradicionais de Matemática, o estudo de funções é transmitido pelo professor através da exposição oral da teoria, seguida de exemplos e exercícios. No nosso exemplo, os alunos foram incentivados a investigar, a fazer experimentações antes de conhecerem uma sistematização de funções quadráticas. Os resultados se mostraram satisfatórios na medida em

---

[39] Software para o estudo de funções,criado, por Marcelo de Carvalho Borba e Glauter Jannuzzi, o qual até então, encontrava-se em desenvolvimento.

que puderam descobrir uma importante propriedade desse assunto.

Além disso, Meira (1993, p.64) afirma “[...] o estudo de funções pode gerar atividades com múltiplos sistemas de representação (tabelas, gráficos, diagramas e equações), cujo domínio é uma condição importante para o desenvolvimento do pensamento matemático” (MEIRA, 1993, p.64).

3.2 Pesquisas sobre funções realizadas na área da Psicologia da Educação Matemática

Influenciado pelas idéias piagetianas, principalmente no que tange às formas de abstração (abstração empírica e reflexiva), Dubinsky e Harel (1992) idealizaram um esquema de classificação de compreensão do conceito de função, comportando basicamente três tipos distintos de concepções: concepção ação, concepção processo e concepção objeto.

A primeira concepção, denominada Função como Ação, corresponde a uma manipulação física ou mental sobre objetos. Como ressaltaram os autores supracitados, compreende uma concepção estática, na qual o sujeito tenta pensar um passo por sua vez. Para sua melhor compreensão, vejamos um exemplo adaptado de Rêgo (2000). O aluno, que concebe a função como ação, ao se deparar com uma equação do tipo $y = 2x+3$, deverá pensar sobre algo que, dados valores numéricos para x, obterá os valores correspondentes para y. Em particular, quando $x=4$, o seu procedimento de raciocínio poderá ser: multiplique por dois e some 3 a este resultado. Quanto ao contexto de gráficos, um estudante cuja concepção de função é limitada a ações, só obterá informações pontuais, do tipo, quando $x = 2$ temos que y é 5. Compreende uma concepção estática, no qual o pensamento do sujeito está preso a algoritmos, valores pontuais.

A segunda concepção, denominada Função como Processo, ocorre quando a ação é interiorizada pelo sujeito. Neste caso, ele, ao se iniciar com certos tipos de objetos, poderá fazer alguma coisa com esses objetos, tentando transformá-los. Por conseguinte, novos objetos deverão surgir. Segundo Dubinsky e Harel (1992), quando o aprendiz tem a concepção de função como processo, está habilitado a combiná-la com outros processos ou ainda revertê-lo.

A terceira concepção, denominada Função como Objeto, acontece a partir do instante que a concepção de função como processo está consolidada. Nesta fase, os alunos são capazes de raciocinar formalmente acerca do conceito de funções. Isto ocorre quando o sujeito imagina uma função como objeto e a partir daí começa a realizar operações sobre ele, visando transformá-lo em outro objeto.

Quando o sujeito está construindo o conceito de função, podemos inferir que a predominância de concepções sobre funções segue uma certa ordem: as concepções de ação, como primeiras; logo após, as concepções do tipo Processo; e, quando possível, as concepções de função como Objeto. No entanto, como observa Dubinsky e Harel (1992, p.86):

> Considerando-se um indivíduo cuja compreensão das funções está sendo construída, poder-se-ia considerar que sua concepção de função como ação é um tipo de concepção pré-processo. Isto implica, é claro, considerando um grupo maior, que muitos indivíduos estarão em transição, da ação para o processo e, como em toda transição cognitiva, o progresso nunca ocorre em uma única direção. Isto dificulta a tarefa de determinar com certeza se a concepção de um indivíduo está caracterizada ação ou processo.

Muitas vezes, no contexto da aprendizagem matemática, o aluno resolve uma determinada tarefa, seguindo uma interpretação pessoal e intuitiva. Nesse caso, à medida que não recorre ao formalismo, esquece as definições formais e os teoremas.

Vinner (1995, *apud* ALVES, 2001), adverte que o aluno ao resolver um determinado problema matemático, guiando-se apenas de forma intuitiva pode não ser uma condição suficiente para se obter êxito. Na aprendizagem de um determinado conceito, salienta a necessidade de se trabalhar também com definições formais matemáticas.

Tall (1991), por sua vez, apoiando -se em estudos de vários psicólogos, reconhece os vários modos de pensamento, ressaltando os 'processos intuitivos' de pensamento e os 'processos lógicos' (grifo do autor) necessários em matemática formal.

Nesse sentido, Tall e Vinner (1981) desenvolveram as noções de imagem conceitual (ou imagem do conceito) e definição conceitual (definição de um conceito). O primeiro se caracteriza da seguinte forma:

> A imagem conceitual é alguma associação não verbal de um conceito que evocamos em nossa mente. Pode ser uma representação visual de um conceito no caso deste conceito possuir uma representação visual, pode ser uma coleção de impressões ou experiências. (VINNER, 1992, p. 197).

Assim, em particular, poderíamos questionar qual a imagem mental mais evocada por um aluno do 1º ano do Ensino Médio, ao ouvir o nome de funções matemáticas. Seria uma expressão algébrica ou um gráfico? Ou poderia ser dois diagramas relacionados por setas?

A segunda, *concept definition*, está relacionada com definições formais matemáticas. Por exemplo, o aprendiz poderá mobilizar teoremas e definições para justificar uma determinada propriedade matemática. Enquanto a primeira noção é uma aquisição idiossincrásica do indivíduo, a segunda é de natureza mais seqüencial e ordenada (VINNER, 1992).

Sabemos que muitos obstáculos cognitivos levam o aluno a não desenvolver o conceito geral de função. Ao analisar entrevistas feitas com os sujeitos de sua pesquisa, Alves (2001) identificou alguns deles. Assim, por exemplo, ao ser questionado sobre o conceito de função, um aluno afirmou que uma função deve ser expressa por uma regra, uma fórmula. Outro aluno teve uma concepção semelhante ao anterior, afirmando que função é uma lei definida, podendo ser uma equação qualquer.

Além disso, ao longo da pesquisa, percebeu-se que grande parte dos alunos não apresentou o domínio completo sobre a definição formal de função. Todavia, as concepções intuitivas com respeito a este conceito mostraram-se satisfatórias. De fato, segundo o pesquisador, com respeito ao *concept image* (CI) de função, os teoremas em ação neste caso, mostraram-se bastante razoáveis.

Com respeito aos conceitos ligados ao de função, tais como domínio, imagem, função injetora e sobrejetora, foi feita uma análise das ações algorítmicas realizadas pelos alunos na resolução de questões.

Alves (2001) aponta que essas ações não foram mediadas por "células" *concept definition (CD)* dos respectivos conceitos. Suas justificativas de raciocínio foram através das concepções e conjectura de natureza intuitiva. Assim, aspectos ligados ao *CI* mostraram-se eficazes.

O uso da comunicação e suas implicações para o ensino são objeto de muitas pesquisas na área de Educação Matemática. Zuffi (1999) analisou como os professores do Ensino Médio fazem uso da linguagem matemática para ensinarem o conceito de funções, através de respostas a um questionário, na abordagem deste tema em sala de aula.

Um dos interesses específicos da pesquisadora era investigar quais seriam as imagens conceituais evocadas na utilização da linguagem matemática pelo professor, tanto oral como escrita, para o ensino de funções, no nível médio. Para tanto, utilizou os trabalhos de Vinner (1991, 1992).

Outros aspectos relevantes a considerar, apoiados nos trabalhos de Dubinsky e Harel (1992), seriam averiguar quais as concepções sobre o conceito de função (concepção de ação, processo e objeto) estão presentes na linguagem utilizada por esses sujeitos.

A pesquisa foi conduzida sob um enfoque qualitativo juntamente com sete professores de Matemática. Foram realizadas observações em sala de aula e um questionário com 20 perguntas, relacionadas ao tema funções, que foram livremente respondidas por escrito. Os resultados da pesquisa apontaram que as principais imagens conceituais de funções evocadas pelos professores foram a de expressões analíticas bem comportadas, contínuas.

Quanto aos aspectos de concepção, a de ação foi predominante: "[...] As variações que estes propuseram para os valores das imagens, conforme mudavam os elementos do domínio, não parecem ter sido abordadas como um processo, uma transformação global entre dois conjuntos, mais ponto-a-ponto, com as variáveis assumindo um valor de cada vez, e sempre no conjunto dos números inteiros, mesmo para as funções com domínio real".

Com o objetivo de pesquisar os protótipos criados pelos alunos ingleses ao estudarem o conceito de funções, Tall e Bakar (1992) apresentaram vários gráficos aos entrevistados e perguntaram se os gráficos representavam ou não as funções.

A figura 3.3 representa uma parábola e foi corretamente reconhecida como um gráfico de uma função por 97% por cento dos alunos. Os pesquisadores supracitados argumentam que a grande familiaridade dos alunos com esta figura leva-os a incorporar como protótipo de função.

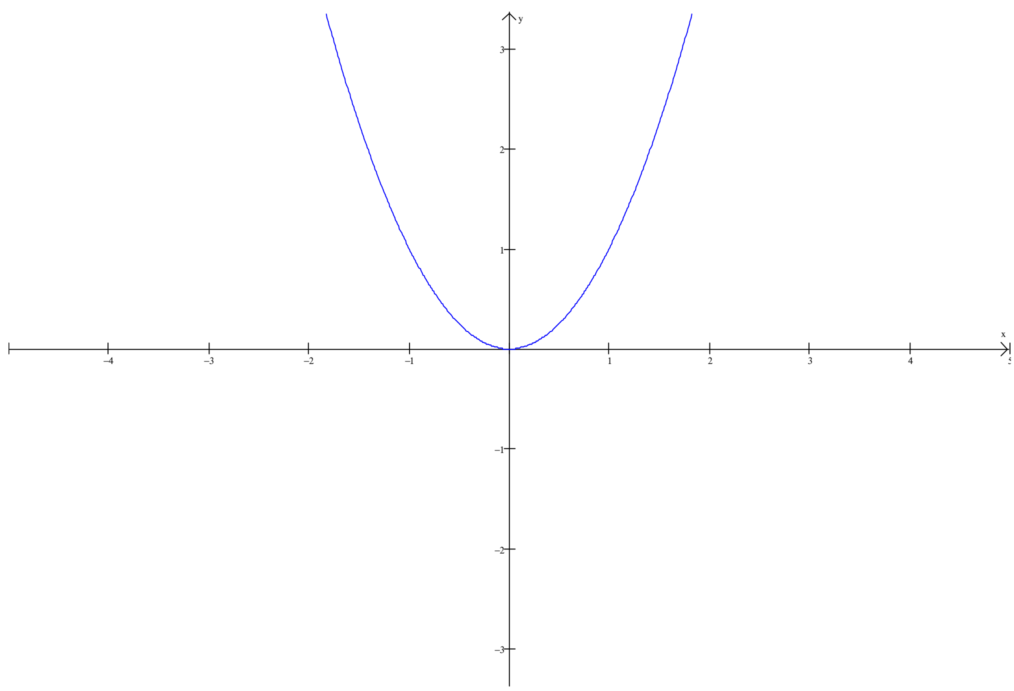


Figura 3.3 - Gráfico do item "a" do questionário da pesquisa inglesa.

Outro protótipo descoberto na pesquisa foi a incorporação dos alunos de que o gráfico de uma função é contínua (no sentido de que o gráfico não tenha nenhuma quebra).

Cerca de 80% dos entrevistados indicaram que a figura é um gráfico de uma função. Para eles, o gráfico de uma função não pode ter "buracos", um raciocínio bastante geométrico.

Também nesta pesquisa, eram apresentadas algumas equações aos alunos ingleses. Outro resultado surpreendente foi o fato de que 49% dos sujeitos responderam não para a função constante y= 4. A explicação provável, enfatizada por Tall e Bakar (1992), é de que esses alunos consideram função apenas quando há dependência entre os valores de x e y. No caso citado, os valores de x mudavam enquanto os valores de y não variavam.

3.3 Papel do conhecimento prévio na aprendizagem do conceito de funções

A utilização de letras é usada em diferentes contextos no ensino de Matemática. No segundo ciclo do Ensino Fundamental, os alunos podem utilizá-las na resolução de problemas. Na quinta série, os estudantes são incentivados a generalizar propriedades de operações aritméticas como a+b=b+a. Na série seguinte, a determinação das incógnitas nas equações e inequações do 1º grau é bem explorada pelos professores de Matemática. Além disso, nas séries posteriores, o uso de letras é extensivamente visto nas expressões algébricas, equações e inequações do segundo grau e funções.

Devido a uma abordagem inadequada do estudo da Álgebra, o aprendiz é levado a pensar que a letra é sempre uma incógnita. Com isso, ele tem o hábito de igualar a zero qualquer expressão algébrica que lhe é apresentada. Nessa ordem de idéias, o aluno sente dificuldades em diferenciar incógnita de variável (SANTOS et al., 2004).

As pesquisadoras supracitadas, baseadas em Sierpinska (1992), enfatizam a necessidade de explorar as diferenças existentes nos diversos usos das letras no ensino da Matemática. Nos casos das equações, tratam-se de incógnitas e valores dados e, nas funções, por sua vez, tratam-se de quantidade variáveis e constantes. Além disso, nas expressões algébricas, as letras são usadas como generalizações (SANTOS et al., 2004).

Segundo Caraça (*apud* TINOCO, 2001, p.5), "[...] a noção de variável é das mais difíceis para os alunos. É um número qualquer de um determinado conjunto, mas não é especificamente nenhum dos números deste conjunto".

Sobre a realidade do ensino na Polônia, Sierpinska (1992, p. 44) nos diz que:

> Fazer Álgebra nesse nível (6.º e 7.ºséries) significa o uso de letras como incógnitas, transformar expressões algébricas com o auxílio de identidades envolvendo o quadrado de somas e diferenças, e diferenças de quadrados, e resolver equações lineares simples. Isto é uma experiência demasiado estreita para o aluno apoderar-se do sentido de uma expressão como y=ax , na qual x e y devem ser vistas como variáveis e não como incógnitas e seu papel tem que ser distinguido daquele do símbolo a que é um parâmetro.

Tomando como fundamentação as teorias de Piaget e Vygotsky, Moretti (2000) objetivou investigar como os conhecimentos prévios e as interações sociais influenciam a aprendizagem do conceito de função. A pesquisa se realizou em dois momentos. No primeiro, a pesquisadora buscou identificar os conhecimentos sobre este conceito que os alunos já trazem para a sala. Para tanto, alunos, cursando a 9.º série do Ensino Médio, eram incentivados a resolver quatro problemas, envolvendo o conceito de função, tendo à sua disposição apenas os seus conhecimentos prévios.

Numa segunda etapa, atividades foram trabalhadas no coletivo da sala de aula numa situação de interação. Novamente, com alunos investigados da 9.º série que ainda não haviam passado por um processo formal do ensino do conceito de função. Através de situações-problema, eles deveriam perceber regularidades que permitiriam a generalização.

Ao final, foi feita uma análise comparativa dos níveis de compreensão do conceito obtidos nas duas situações. Moretti (2000, p.116) concluiu que "[..] a situação de interação caracteriza-se por possibilitar um movimento de compreensão progressiva do conceito de forma significativa, que não ocorre, perceptivelmente, em situação de trabalho individual".

Na primeira fase, caracterizada pela ausência de interações, segundo a autora, os alunos não demonstraram uma crescente compreensão do conceito conforme trabalhavam com ele na resolução dos problemas. Contando apenas com seus conhecimentos prévios, os sujeitos não foram capazes de elaborar expressões analíticas que representassem os problemas estudados.

No segundo momento, através de discussão estabelecida com o colega ou uma pergunta feita pela professora, o aluno utilizou várias estratégias de resolução, saindo de uma situação particular para uma compreensão das relações existentes entre as variáveis. No entanto, a ausência da linguagem analítica era observada em sua estratégia de resolução. O recurso utilizado foi a língua materna. Porém, a de uma observação de um dos sujeitos sobre a necessidade da utilização de uma expressão analítica na resolução dos problemas foi um elemento catalisador para que os outros a incorporassem na discussão do problema e até mesmo na resolução de problemas.

A pesquisadora ressalta o importante papel do professor nessa fase de interação, na medida em que elabora questionamentos capazes de levarem os alunos a superarem seus impasses, sem obterem, de forma imediata, as soluções dos problemas. Nessa ordem de idéias, o professor é um grande guia na zona de desenvolvimento proximal de seu aluno.

3.4 Considerações sobre as linhas de pesquisas citadas

A pesquisa realizada por Tall e Bakar (1992) forneceu vários exemplos de protótipos criados pelos alunos ingleses. Nesse sentido, durante o processo de investigação com os sujeitos, foram identificados os novos protótipos que emergiram durante o processo de investigação.

Ao elaborar o módulo de atividades, baseado em resultados de trabalhos do tipo de Abrahão e Palis (2004), tomou-se o cuidado com os possíveis problemas que poderiam surgir com relação à escala dos ambientes. A idéia era evitar que os sujeitos pudessem ter erros de interpretação e concepções falsas.

Por outro lado, propõe-se que a maioria das atividades se desenvolva inicialmente a partir do computador. Essa mídia permite que os alunos façam experimentação. Os alunos experimentarão fazer gráficos de funções do tipo f(x) = ax+b, por exemplo, utilizando o *software Graphmatica*, antes de conhecerem uma sistematização de função afim. A intenção será que os alunos investiguem como os diferentes coeficientes da função do tipo acima influenciarão o gráfico de funções. Além disso, a utilização desse software permite gerar gráficos vinculados a expressões algébricas.

Assim, existem pontos em comum com a nossa proposta metodológica e os estudos realizados por Borba (1999). Além disso, também foram trabalhadas as múltiplas representações de função (algébrica, gráfica e algébrica).

Na fase das entrevistas, teve-se em mente conhecer o tipo de concepção sobre funções o sujeito estava pensando. Na fase da construção do conceito de função, será que sua concepção se enquadrou apenas na concepção ação ou se estendeu até a concepção objeto? Alem disso, também nos apoiamos na teoria do conceito imagem de Vinner (1992). Qual a primeira imagem evocada pelo aluno ao escutar a palavra função? Assim, nesse sentido as pesquisas de Zuffi (1999) e Alves (2001) deram apoio à nossa reflexão.

Finalmente, as categorias de interação e conhecimentos prévios estão presentes no trabalho de Moretti (2000). Outras pesquisas sobre essas categorias foram acrescentadas durante a realização da investigação.

4. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Os principais pressupostos teóricos que serviram para a análise dos resultados estão neste capítulo que está dividido em seis partes. Na primeira parte, aborda-se a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980). Os seus conceitos e princípios teóricos deram suporte à análise deste estudo. Além disso, o modelo de intervenção desta pesquisa é baseado nos princípios facilitadores da Aprendizagem Significativa de Ausubel.

Na segunda parte, o tema interação entre indivíduos para a aprendizagem de conceitos bem como a mediação pedagógica são introduzidos, tendo por alicerce a Teoria Sócio-Interacionista de Vygotsky (1998, 2001; REGO, 2000; OLIVEIRA, 2000).

Na terceira parte, por sua vez, a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1993) é discutida, uma vez que se pretendeu, nesta pesquisa, identificar os conhecimentos-em-ação - um dos constructos de sua teoria – lançados pelos aprendizes quando estavam resolvendo uma situação-problema mediada pelo computador.

Na quarta parte, são descritas as duas categorias de apreensão de um conceito, desenvolvida por Richard Skemp (1989): A Compreensão Instrumental e a Compreensão Relacional. No contexto desta pesquisa, estes critérios foram utilizados para analisar o desempenho dos alunos, durante e após a intervenção pedagógica.

Na quinta parte, a Teoria sobre Definição Conceitual e Imagem Conceitual, idealizada por Vinner (1991, 1992), é abordada uma vez que se pretendeu, diante e após processo interventivo, identificar a imagens do conceito de função que os alunos apresentaram, entendendo estas como as primeiras impressões invocadas pelo termo, quer sejam exemplos numéricos, tipos de representações (gráficos, tabelas, diagramas dentre outros),

Ao explorar o Objeto de Aprendizagem Desafio Funções, será que o aluno produz significados ao conceito de funções? Visando responder a esta e outras perguntas, necessita-se ter uma noção mais precisa do que seria a expressão “produção de significados”. Para tanto, utilizam-se os aportes teóricos da Teoria dos Campos Semânticos, apresentada na sexta e última parte deste capítulo.

4.1 A aprendizagem significativa de David Ausubel

Na década de 1960, muitas das idéias sobre o ensino e a educação estavam baseadas na escola behaviorista. O estudo da aprendizagem estava fundamentado em teorias que só lidavam com fenômenos observáveis e manipuláveis. Aspectos subjetivos da aprendizagem tais como os processos cognitivos, interesse, curiosidade não eram abordados por essa escola. O ensino e aprendizagem eram examinados como estímulos, respostas e reforços, não como significados.

Nesse contexto, surge David Ausubel, psicólogo do desenvolvimento, idealizador da teoria da aprendizagem significativa. Para ele, o principal no processo de ensino é que a aprendizagem deve ser significativa, ou seja, o material a ser aprendido precisa fazer algum sentido para o aluno. Esse processo acontece quando uma nova informação interage com uma estrutura do conhecimento específica, chamada de “conceito subsunçor” já existente na estrutura cognitiva do aprendiz. O subsunçor pode ser uma idéia, um conceito ou uma proposição. Pode ser considerado como verdadeira âncora.

Nesta seção, apresenta-se e se discute esta teoria, focalizando aspectos que constituíram fundamentos para o desenvolvimento do objeto desta pesquisa: o estudo do conceito de funções mediado por ambientes computacionais.

4.1.1 Aprendizagem significativa

A teoria de Ausubel tem sido estudada por Moreira (1999, p. 11) no contexto do ensino de Física. Segundo o pesquisador, “[...] aprendizagem significativa é um processo por meio do qual uma nova informação se relaciona, de maneira substantiva (não-literal) e não-arbitrária, a um aspecto relevante da estrutura cognitiva do indivíduo”.

Dessa forma, as características básicas da aprendizagem significativa são: substantividade e não-arbitariedade. Mas o que significa cada uma delas?

Substantividade refere-se à idéia de que o mesmo conceito ou a mesma proposição podem ser expressos de diferentes maneiras, por meio de diferentes signos. De fato, para a aprendizagem significativa, o que é incorporado é a substância do novo conceito ou da nova proposição, não podendo depender exclusivamente de determinados signos. Portanto, podemos dizer que a relação entre o material a ser aprendido e a estrutura cognitiva não deve acontecer ao “ao pé da letra”, isto é, a relação não é alterada se outros símbolos, diferentes mas equivalentes, forem usados.

Já a não arbitrariedade, para Ausubel, trata a aprendizagem como uma atividade significativa para o aluno na medida em que o novo conhecimento deve fazer sentido para ele. O que se aprende do novo deve estar relacionado com o conhecimento prévio. Trata-se de entender que o novo conhecimento se assentará sobre o velho. “O conhecimento prévio serve de matriz ideacional e organizacional para incorporação, compreensão e fixação de novos conhecimentos quando estes “se ancoram” em conhecimentos especificamente relevantes (subsunçores) preexistentes na estrutura cognitiva” (MOREIRA, 1999, p.77). Assim, ao aprender um novo conceito, este deve se ancorar a outro conceito já existente. Mas, não se trata de qualquer conceito existente, e sim aquele que é relevante, inclusivo.

Significação e mecanização

David Ausubel diferencia **aprendizagem significativa** da **aprendizagem mecânica** (ou automática). A aprendizagem significativa já foi descrita no texto anterior. A aprendizagem mecânica, por sua vez, é aquela em que as novas informações são apreendidas com pouca ou nenhuma associação a conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva, sem se ligar a conceitos subsunçores específicos. Nesse caso, a nova informação é armazenada de maneira arbitrária e literal, não havendo interação entre ela e aquela já armazenada.

Assim, o fato de o aluno decorar uma fórmula de Matemática ou de Física na véspera de uma prova pode ser referido como uma aprendizagem mecânica na medida em que para a memorização da fórmula o aluno faz uma associação puramente arbitrária e literal. A nova fórmula a ser aprendida não se relaciona com um subsunçor relevante na estrutura cognitiva do aprendiz.

É bom frisar que Ausubel não diferencia a Aprendizagem Significativa da Mecânica como uma dicotomia, e sim como um *continuum.* A aprendizagem mecânica pode ser desejável e até mesmo necessária numa fase inicial de um novo corpo de conhecimento.

Recepção e descoberta

Aprendizagem por descoberta ocorre quando o conteúdo principal a ser aprendido deve ser descoberto pelo aprendiz. Já na **aprendizagem por recepção**, o que deve ser aprendido é apresentado ao aprendiz em sua forma final. É bom frisar que a aprendizagem por descoberta não é, necessariamente significativa. Após a descoberta, a aprendizagem só será significativa se o conteúdo descoberto estabelecer ligações com conceitos subsunçores relevantes já existentes na estrutura cognitiva. Assim, por exemplo, a solução de um quebra-cabeça pelo método de ensaio e erro é uma aprendizagem por descoberta, mas o conteúdo descoberto (a solução) pode ser aprendido mecanicamente, pois é incorporado de maneira arbitrária à estrutura cognitiva.

Por outro lado, a aprendizagem por recepção não é necessariamente mecânica. Numa aula expositiva de Física, o aluno pode receber a lei pronta, ser capaz de compreendê-la e utilizá-la significativamente, desde que tenha, em sua estrutura cognitiva, os subsunçores adequados. Nesse sentido, na concepção ausubeliana, não há por que criticar o método expositivo, pois ele pode ser altamente eficaz quando é bem empregado e direcionado para a aprendizagem significativa. Em uma mesma tarefa de aprendizagem, as aprendizagens por descoberta e por recepção não se constituem em uma dicotomia, podendo ocorrer concomitantemente.

Condições para ocorrência da aprendizagem significativa

Uma condição para a ocorrência da aprendizagem significativa é que o material didático tem que ser potencialmente significativo. Isto quer dizer que ele tem que ser logicamente e psicologicamente significativo, condições subjacentes para que o material seja potencialmente significativo.

Em relação à primeira condição, um material voltado para a sala de aula, tem que ter uma argumentação lógica, coerente, ou seja, "[...] ser suficientemente não-arbitrário e não-aleatório, de modo que possa ser relacionado, de forma substantiva e não-arbitrária, à idéias correspondentemente relevantes, que se situem dentro do domínio da capacidade humana de aprender" (MOREIRA, 1999, p.21). Observe que é uma relação bilateral: de um lado o material didático tem que ter um significado lógico, e do outro, o aprendiz tem que ter uma estrutura cognitiva adequada para aprender de uma maneira significativa o novo conhecimento.

Assim, enquanto a primeira condição se refere ao significado lógico do material, a segunda refere-se ao significado psicológico. Para esclarecer o significado psicológico e seu complexo relacionamento com o ensino, convém deter-se um pouco sobre os significados denotativos e conotativos.

Os significados conotativos são pessoais, idiossincráticos. Objetos e eventos podem significar coisas diferentes. Os denotativos se referem aos significados sociais, os quais são compartilhados por diferentes indivíduos. Além disso, os denotativos diferem dos conotativos na medida em que em um determinado contexto, objetos e eventos têm significados comuns ao indivíduo nesse contexto.

Cada ser humano é único e toda a sua experiência de vida – passada e presente – irá determinar sua forma de ser e conseqüentemente como ele reagirá diante das situações da vida cotidiana, incluindo sua forma de aprendizagem. Sendo assim, cada indivíduo tem uma maneira pessoal de aprender, dando um significado para si próprio do material. Portanto, o significado psicológico é uma experiência inteiramente idiossincrática.

Naturalmente, embora o significado psicológico seja sempre idiossincrático, isso não exclui a existência de significados sociais ou significados denotativos, os quais são compartilhados por diferentes indivíduos. Os significados individuais, que diferentes membros de uma certa cultura adquirem para diferentes conceitos e proposições, são em geral, suficientemente similares para permitir a compreensão e a comunicação interpessoal. Além disso, o aluno tem que ter uma disposição prévia para aprender. O material pode ser potencialmente significativo, mas se o educando não quiser, aprenderá de uma maneira automática, ou seja, seu relacionamento com o novo material irá ser de uma maneira arbitrária e literal. Assim, a nova informação terá pouca ou nenhuma associação a conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva.

Para David Ausubel, o fator mais importante para a aprendizagem de um novo material, na perspectiva de sua teoria, é o conhecimento prévio do aluno, a sua estrutura cognitiva prévia. Segundo Ausubel et al. (1980, *apud* MIRAS, 1998), "[...] O fator mais importante que influi na aprendizagem é aquilo que o aluno já sabe. Isto deve ser averiguado e o ensino deve depender desses dados".

Para o psicólogo norte-americano, a estrutura cognitiva pode ser influenciada por duas maneiras: substantivamente e programaticamente. A ação do professor pode influenciar substantivamente a estrutura cognitiva do aprendiz, na medida em que apresente conceitos e princípios de sua disciplina com o mais amplo poder de explanação, de extensão e generalização. Ao elaborar uma aula ou um material didático, o professor pode empregar métodos de apresentação e ordenação do assunto que aumentem a clareza e estabilidade da estrutura cognitiva do aprendiz. Com o objetivo de ajudar a explicar como o conhecimento é organizado na estrutura cognitiva, Ausubel introduz o princípio da assimilação.

Assimilação

Assimilação é um processo que ocorre quando uma nova informação, potencialmente significativa, é relacionada e assimilada por conceito subsunçor existente na estrutura cognitiva do aprendiz. Conforme mostrada na figura 4.1, a nova informação N interage de uma maneira não literal e não arbitrária com um dos subsunçores existentes S. Como produto dessa relação, temos uma nova unidade S'N' que nada mais é do que o subsunçor modificado.

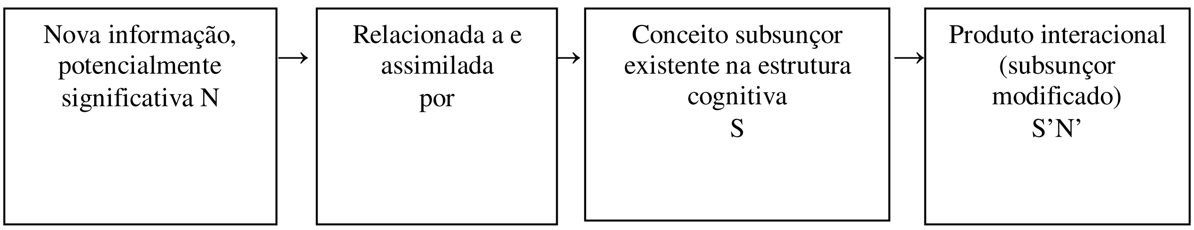


Figura 4.1 - Assimilação de conceitos – Teoria Ausubeliana (adaptado de MOREIRA; MASINE, 1982, p.16).

Imediatamente após a aprendizagem significativa, começa um segundo estágio de assimilação, chamado por Ausubel de assimilação obliteradora.

O produto interacional S'N', durante um certo período de tempo, é dissociável em N' e S'. Aqui temos a fase de retenção. À medida que o processo de assimilação continua, entramos na fase obliteradora; as novas idéias tornam-se progressivamente menos dissociáveis das suas idéias âncoras (subsunçor) até deixarem de estar disponíveis como entidades individuais (vide fig 4.2). N'S' reduz-se simplesmente a S''(subsunçor modificado).

Assimilação obliteradora
As novas idéias tornam-se progressivamente menos dissociáveis das suas idéias âncora (subsunçores) até deixarem de estar disponíveis como entidades individuais.

S’ + N’ $\rightarrow$ S’’ (Assimilação obliteradora)

O subsunçor e o novo conteúdo dissociados — Resíduo (subsunçor modificado)

Figura 4.2 – Assimilação obliteradora (adaptado de MOREIRA, 1999, p.16).

Acerca do assunto, Moreira (1999, p. 20) afirma:.

> As vantagens da assimilação obliteradora para a função cognitiva ocorrem às custas de perda de diferenciação do conjunto de idéias detalhadas e de informações específicas que constituem o corpo de conhecimentos. O principal problema na aquisição do conteúdo de uma disciplina acadêmica é neutralizar o processo inevitável de assimilação obliteradora que caracteriza toda a aprendizagem significativa.

A teoria de assimilação de David Ausubel tem fortes implicações na Educação. Com efeito, na medida em que a nova matéria N se altera para N’, o aluno dificilmente se lembrará dele, precisamente, como foi recebido. Assim, avaliações que giram em torno da memorização, exigindo a repetição exata das informações aprendidas, dificilmente incentivam a aprendizagem significativa.

Tipos de aprendizagem significativa

Em função da natureza da nova informação e de sua relação com as idéias ativadas na mente da pessoa que aprende, Ausubel diferencia vários tipos de aprendizagem significativa.

A aprendizagem subordinada ocorre quando uma nova idéia aprendida se encontra hierarquicamente subordinada a uma idéia preexistente. Podem-se distinguir dois tipos de aprendizagem subordinada: **derivativa e correlativa.**

A aprendizagem subordinada derivativa ocorre quando uma nova informação aprendida é apenas um exemplo de um conceito já existente na estrutura cognitiva do aprendiz; ela ilustra esse conceito sem alterar seus atributos. Assim, por exemplo, o aluno ao estudar inicialmente a função polinomial do 1.º grau (f(x) = ax +b, com $a \in R, b \in R$ e $a \neq 0$, definida para todo x real) deverá saber várias de suas propriedades: gráfico, relação entre os coeficientes etc. A seguir, ao deparar-se com a função identidade (f(x) = x, definida para todo x real) deverá inferir como um caso particular da funções polinomiais do 1º grau. O gráfico dela é uma reta que passa pela origem, e seus coeficientes a e b são, respectivamente, a = 1 e b = 0.

A aprendizagem subordinada correlativa, por sua vez, ocorre quando o material aprendido é uma extensão, modificação ou limitação de um conceito ou proposição previamente aprendidos. Dessa forma, no contexto da mecânica clássica, o aluno ao diferenciar os vários tipos de velocidade, irá deparar-se com o conceito de aceleração, que modifica o de velocidade.

No contexto da Álgebra, especificamente no ensino de funções matemáticas, a função composta $h(x) = g \circ f = g(f(x))$ é uma extensão do conceito de funções. Com efeito, existe uma fórmula matemática para f(x) de A em B; a função g(x), por sua vez, é definida de B para C. A função h(x) será de B em C, tendo sua própria fórmula matemática, uma composição de g com f.

Na aprendizagem superordenada, as idéias ou conceitos estabelecidos na estrutura cognitiva a_1, a_2, a_3 são reconhecidos como exemplos mais específicos da idéia nova A e se vincula a A. Ou seja, nesse tipo de aprendizagem, os subsunçores se interagem originando outros mais abrangentes. Segundo Moreira (1999, p.34):

> A aprendizagem superordenada ocorre no curso do raciocínio indutivo, ou quando o material é organizado indutivamente ou envolve síntese de idéias. [...]Por exemplo, á medida que uma criança adquire os conceitos de cão, gato, leão etc; ela pode, mais tarde, aprender que todos esses são subordinados ao conceito de mamífero. À medida que o conceito de mamífero é adquirido, os conceitos previamente aprendidos assumem a condição de subordinados, e o conceito de mamífero passa a representar uma aprendizagem superordenada.

Concernente ao estudo de funções, o aluno aprende os vários tipos de funções elementares: função constante, identidade e linear. Ele pode, mais tarde, reconhecer que esses tipos de funções são exemplos mais específicos da idéia nova de função polinomial do 1.º grau. Nesse sentido, as idéias de funções elementares interagiram entre si, originando outras mais abrangentes e o conceito de função polinomial do 1.º grau passa a ser uma aprendizagem superordenada.

Ausubel cita ainda, o caso da **aprendizagem combinatória**, que consiste em uma nova idéia A não ser mais inclusiva nem mais específica que as idéias B, C e D. Como exemplos, temos as diversas modalidades de aprendizagem por analogia.

Princípios facilitadores da aprendizagem significativa

Preocupado com a efetivação e facilitação da aprendizagem significativa no contexto escolar, David Ausubel anuncia quatro princípios: *diferenciação progressiva, reconciliação integrativa, organização seqüencial e consolidação*.

O princípio da diferenciação propõe que, na programação de um conteúdo, as idéias mais gerais e inclusivas sejam apresentadas em primeiro lugar, para depois serem diferenciadas, em termos de detalhes e especificidades. Este princípio está baseado em duas hipóteses: a) no sistema cognitivo humano, as idéias mais inclusivas e amplamente explicativas ocupam uma posição no topo da estrutura hierárquica da mente e englobam progressivamente as idéias, proposições, conceitos e fatos menos inclusivos e mais diferenciados; b) é mais fácil para o aluno perceber aspectos diferenciados de um todo mais inclusivo (mais geral) previamente aprendido, do que chegar ao todo a partir das suas partes diferenciadas.

No entanto, segundo Ausubel, apesar desse princípio ser bastante evidente, ele não é muito respeitado. Com efeito, a prática mais comum entre professores, ora preparando um material mais didático, ora desenvolvendo um curso, é separar o curso por tópicos, em unidades distintas, sem levar em consideração os diferentes níveis de abstração e generalidades. Assim, em muitos casos, exige-se do estudante que aprenda detalhes, aspectos particulares de uma nova disciplina antes que tenha adquirido um corpo de conhecimento em nível apropriado de inclusividade, muito antes que tenha em sua estrutura cognitiva aquelas idéias mais amplas que poderão incluir e abranger idéias mais concretas.

Ao expor o princípio da diferenciação, baseado em Ausubel, podemos fazer muitas críticas ao ensino da Matemática e das Ciências, que são baseadas principalmente na repetição mecânica de fórmulas, na aprendizagem de problemas-padrão.

Ao elaborar a programação do conteúdo, o professor deve proporcionar as relações entre idéias, conceitos, proposições já estabelecidas na estrutura cognitiva, ou seja, deve promover as relações entre os subsunçores Assim, quando atingimos esse nível, temos o que Ausubel chama de reconciliação integrativa.

Na reconciliação integrativa, o professor deve procurar tornar claras as semelhanças e diferenças entre idéias, quando estas são encontradas em vários contextos. Além disso, numa aula expositiva, podem-se estabelecer relações entre o conteúdo que acabou de ser exposto com os novos que ainda serão apresentados.

Para se atingir a reconciliação integrativa de forma mais eficaz, baseado em Novak, Moreira (1999, p. 50) observa que:

> Deve-se organizar o ensino "descendo e subindo" nas estruturas conceituais hierárquicas à medida que a nova informação é apresentada. Isto é, começar com conceitos mais gerais, ilustrando logo em seguida como os conceitos subordinados (intermediários) estão com eles relacionados, introduzindo, finalmente, os mais específicos, para, então, se voltar, por meio de exemplos, a novos significados para os conceitos de ordem mais geral na hierarquia.

Para David Ausubel, a aprendizagem de conceitos vai fundamentalmente do geral para o particular. O processo instrutivo deve seguir esse rumo. Contudo, esse caminho não é exclusivamente unidirecional. Com efeito, começar do geral e, progressivamente, chegar ao particular, mas sempre fazendo referência ao geral, para não perder uma visão do todo e para elaborar cada vez mais o geral. São promoções contínuas de diferenciação progressiva e reconciliação integradora.

A organização seqüencial, terceiro princípio facilitador de Ausubel, refere-se a idéia de que, na aprendizagem significativa, o material a ser aprendido precisa fazer algum sentido para o aluno. Isto acontece quando a nova informação "ancora-se" nos conceitos relevantes já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz. As disponibilidades dessas idéias-âncoras podem "[...] ser maximizadas ao tirar-se partido das dependências, seqüências naturais existentes na matéria de ensino, e do fato de que a compreensão de um dado tópico, freqüentemente, pressupõe o entendimento prévio de algum tópico relacionado" (MOREIRA, 1999, p.52).

Quanto à *consolidação*, o quarto e último princípio facilitador da aprendizagem significativa, baseia-se no fato de que o conteúdo deve ser explorado pelo professor ao máximo. Para tanto ele poderá fazer usos de práticas, exercícios e réplicas reflexivas. Antes que novos conteúdos sejam introduzidos, é necessário que o anterior esteja bem consolidado. Assim, o sucesso da aprendizagem seqüencialmente organizada estaria garantido.

3.1.2 Os organizadores prévios

A principal estratégia pedagógica proposta por Ausubel para levar à prática os princípios da diferenciação integrativa e reconciliação integrativa, facilitando assim a aprendizagem significativa, é o uso dos organizadores prévios. O professor ao utilizar esse recurso didático estaria deliberadamente manipulando a estrutura cognitiva do aprendiz.

O organizador é um material introdutório, apresentado ao aluno em um nível mais alto de generalidade e abstração do que o material que deve ser aprendido. Sua principal função é de servir de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que ele deve saber a fim de que o material possa ser aprendido de forma significativa.

O uso dos organizadores prévios se justifica por três razões. Em primeiro lugar, eles se apóiam em idéias já existentes na estrutura do aprendiz que podem vir a ser relacionada com as idéias do conteúdo a ser aprendido. Assim o novo material se torna mais familiar ao aluno. Em segundo lugar, os organizadores, quando elaborados em um nível adequado de inclusividade juntamente com idéias mais gerais de uma disciplina, têm um forte poder explanatório e capacidade integrativa. Por último, o organizador identifica o conteúdo já existente na estrutura cognitiva e indica, explicitamente, sua relevância para o novo material. Ausubel et al (1980) afirmam que: "[...] a principal função do organizador está em preencher o hiato entre aquilo que o aprendiz já conhece e o que precisa conhecer antes de poder aprender significativamente a tarefa que se defronta" (AUSUBEL et al, 1980 *apud* JESUS; SILVA, 2004).

Os Organizadores Prévios podem ser uma frase, um filme, um texto, uma atividade, uma dinâmica etc. E, segundo Massini et al. (1994), podem ser distinguidos como expositivos ou comparativos.

Um organizador expositivo pode ser usado quando o conteúdo a ser aprendido for totalmente novo. Nesse sentido, o organizador consistirá em informações amplas e genéricas sobre o novo conjunto de idéias que será aprendido. Ao expor um conteúdo relativamente familiar ao aluno, o professor poderá usar da estratégia dos organizadores comparativos que servem para aumentar a discriminabilidade entre idéias novas e aquelas já disponíveis.

4.1.3 Aprendizagem significativa: um referencial teórico para o estudo do conceito de funções

Ao estudar o conceito de funções, será preciso que o aluno do 1.º ano do Ensino Médio já possua conhecimentos que, de maneira direta ou indireta, estão relacionados ou podem relacionar-se às funções matemáticas? Existem subsunções suficientes existentes na estrutura cognitiva do aprendiz para lidar de uma maneira significativa com esse conteúdo? Como lidar com os assuntos que podem não estar sendo usados há algum tempo, mas que podem contribuir de alguma maneira com a aprendizagem do conteúdo?

Isso exposto, os organizadores prévios podem ser usados como ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que ele deve saber, a fim de que o novo material possa ser aprendido de uma maneira significativa. Eles podem reativar os significados obliterados. Contudo, baseado em Luiten, Ames e Acherson, Moreira (1999, p. 115) ressalta que os organizadores prévios não suprem a deficiência dos subsunçores. O seu efeito é pequeno na aprendizagem, não tendo muito valor instrucional.

> Provavelmente, o maior potencial didático dos organizadores está na sua função de estabelecer, em um nível mais alto de generalidade, inclusividade e abstração, relações explícitas entre o novo conhecimento e o conhecimento prévio já adequado do aluno para dar significado aos novos materiais de aprendizagem. Isto porque, mesmo tendo os subsunçores adequados, muitas vezes o aprendiz não percebe sua relacionalidade com o novo conhecimento.

Muitos assuntos referentes ao ensino de funções podem não estar sendo usados há algum tempo tais como representação no plano cartesiano, proporcionalidade e manipulações algébricas mais elaboradas. Assim, o uso dos organizadores prévios faria uma relação deles com as novas representações do conceito de funções.

Esta pesquisa, tem como objetivo analisar a construção do conceito de função através de módulos de atividades mediados por ambientes computacionais. Para sua concretização foi dado ênfase ao estudo e compreensão da Aprendizagem Significativa de alunos do 1.º ano do Ensino Médio, atendendo a dois pontos:

- Identificar no aluno o processo de aprendizagem significativa;
- Identificar na relação ambiente computacional-aluno os recursos que propiciam a aprendizagem significativa.

Os módulos de atividades foram elaborados, objetivando facilitar o processo de Aprendizagem Significativa. Para tanto, foram utilizados os Organizadores.

Em sintonia com os princípios facilitadores de aprendizagem significativa, o trabalho no computador será baseado em conjuntos de atividades. Cada um deles estará relacionado a um dos conteúdos programáticos selecionados e baseado em problemas práticos, seqüenciados de maneira apropriada com várias deles situados numa mesma estrutura, justapostas, reforçando uma as outras.

4.1.4 Algumas considerações sobre a aprendizagem significativa de David Ausubel

Para David Ausubel, o fator mais importante de que depende a aprendizagem do aluno é a sua estrutura cognitiva prévia. É preciso levar em conta o que o aluno já sabe sobre o que vai ser ensinado. A aprendizagem deve ser uma atividade significativa, o que se aprende de novo deve-se relacionar com o que se sabia. Dessa forma, os conhecimentos prévios dos alunos determinam a possibilidade de aprender e explicitam a importância do professor levar em consideração tais conhecimentos no momento da elaboração de seu planejamento e de suas propostas de atividades.

O aluno, na perspectiva da aprendizagem significativa, é um ser altamente ativo no seu processo de aprendizagem uma vez que deve possuir uma predisposição psicológica para relacionar a nova informação com aquela já conhecida em sua estrutura cognitiva. Esta informação, já existente na estrutura do aprendiz, com foi visto, é chamado de subsunçor.

Apesar da imagem de âncoras dadas aos subsunçores ser importante num primeiro contato com a teoria ausubeliana, não mostra toda a dinamicidade da relação existente entre o novo conhecimento e o já existente. De fato, no curso da aprendizagem significativa, a nova informação interage de uma maneira não literal e não arbitrária com um subsunçor existente. Este subsunçor se modifica, tornando-se mais instável e mais diferenciado. Assim, o processo é dinâmico, não estático.

Ausubel vê o armazenamento de informações no cérebro humano como sendo altamente organizado, formando uma hierarquia conceitual na qual elementos mais específicos de conhecimento são ligados (e assimilados) a conceitos mais gerais, mais inclusivos. Dessa forma, na perspectiva da aprendizagem significativa, o desenvolvimento de conceitos acontece da melhor forma quando os elementos mais gerais e inclusivos de um conceito são introduzidos em primeiro lugar e, então, este é progressivamente diferenciado, em termos de detalhe e especificidade. Falando de outra maneira, Ausubel postula que a aprendizagem de conceitos ocorre da melhor maneira quando se vai dos conceitos mais gerais e inclusivos para os subordinados específicos. “Em outras palavras, segundo Ausubel, a aprendizagem de conceitos vai fundamentalmente do geral ao específico, seguindo uma via descendente semelhante à definida por Vygotsky (2000) em relação à aprendizagem de conceitos científicos” (POZO, 1998, p. 219).

Contudo, como já foi dito, existe a possibilidade de que possa ocorrer, em alguma circunstância específica, o contrário. Ao trabalhar com as várias representações de funções juntamente com os organizadores prévios, postula-se que o aprendiz teve mais condições de apreender o conceito de funções, relacionando de modo substantivo e não arbitrário o novo material, potencialmente significativo, com os subsunçores adequados da sua estrutura cognitiva.

4.2 Vygotsky e o processo de formação de conceitos

Como Vygotsky fez um estudo consistente sobre a formação de conceitos e nesta pesquisa de tese pretende-se investigar a construção do conceito de funções mediado por ambientes computacionais, a abordagem Vygotskiana será uma fonte básica a nossa pesquisa. Nesse sentido, pretende-se aqui abordar parte das idéias mais relevantes de Vygotsky sobre o Processo de Formação de Conceitos. Para tanto, remete-se a alguns pressupostos de sua teoria tais como: mediação, internalização e zona de desenvolvimento proximal.

Nas primeiras décadas do século XX, existiam duas fortes correntes na Psicologia radicalmente antagônicas. De um lado, inspirada na filosofia empirista, um ramo da Psicologia que procurava explicar os processos elementares sensoriais e reflexos, utilizando análises quantitativas dos fenômenos observáveis e com a subdivisão dos processos complexos em partes menores, mais facilmente analisáveis. De outro lado, inspirada nos princípios da filosofia idealista, uma tendência de enquadrar a Psicologia como ciência mental, com o objetivo de descrever subjetivamente as propriedades dos processos psicológicos superiores, tais como a percepção, a memória ativa e o pensamento abstrato.

Vygotsky entendia que as duas tendências acabaram promovendo uma séria crise na Psicologia. A primeira, deixava de abordar as funções psicológicas mais complexas do ser humano; a segunda, por sua vez, não tinha uma fundamentação necessária para a construção de uma teoria consistente sobre os processos psicológicos tipicamente humanos. Diante desse quadro, Vygotsky e seus colaboradores buscaram a construção de uma "nova psicologia" que possibilitasse uma síntese entre as abordagens predominantes naquele momento. Vale ressaltar que, para o psicólogo soviético, o significado de síntese de dois elementos não é simples soma de duas partes, é o surgimento de algo novo que não estava presente nos elementos iniciais.

Nessa nova construção para a Psicologia, segundo Oliveira (2000), estão três idéias centrais do pensamento vygotskiano: "[...] as funções psicológicas têm um suporte biológico, pois são produtos da atividade cerebral; o funcionamento psicológico fundamenta-se nas relações sociais entre o indivíduo e o mundo exterior, as quais se desenvolvem num processo histórico; a relação homem/mundo é uma relação mediada por sistemas simbólicos".

Para Vygotsky, o cérebro é a base biológica do funcionamento psicológico do ser humano. É entendido como sistema aberto, de alto grau de plasticidade, ou seja, pode ser moldado pela ação dos elementos externos, podendo servir às novas funções, criadas na história humana, sem que sejam necessárias se efetuar transformações físicas do referido órgão.

Sobre a segunda idéia principal, o autor supracitado afirma que o desenvolvimento das funções psicológicas superiores, típicas da espécie humana, não estão presentes desde o nascimento do indivíduo, não são dados *a priori*, esperando o amadurecimento para se manifestarem; nem são meros resultados das "pressões" do meio externo, concepção de desenvolvimento que atribui uma grande importância aos fatores externos como determinantes das características individuais. Assim, rejeitando às concepções inatistas e behavioristas do desenvolvimento humano, compreende que as características tipicamente humanas resultam da interação dialética do homem e seu meio sócio-cultural. Ao mesmo tempo em que o ser humano transforma o seu meio para atender suas necessidades básicas, transforma-se a si mesmo.

O terceiro pressuposto diz respeito ao conceito de mediação, característica presente em toda atividade humana. Para Vygotsky, a relação do homem com o mundo não é direta, mas mediada através de instrumentos técnicos e os sistemas de signos. Assim, por exemplo, o homem ao cortar um pão, utiliza a faca, instrumento que corta mais e melhor do que a mão. Nos sistemas de signos, a linguagem é considerada um signo mediador por excelência, pois ele carrega em si os conceitos generalizados pela cultura humana.

Assim, baseado no materialismo histórico e dialético, Vygotsky considera o desenvolvimento da estrutura mental humana como um processo de apropriação pelo homem da experiência histórica e cultural. O homem transforma e é transformado nas relações produzidas em uma determinada cultura. É por isso que seu pensamento é chamado de sócio-interacionista.

4.2.1 Mediação

Sabemos que a criança ao nascer é dotada apenas de funções psicológicas elementares, como a atenção involuntária e os reflexos. Um exemplo bem típico dessas funções é a sucção do seio materno pelo bebê. Para Vygotsky, com o aprendizado cultural, parte dessas funções “inferiores” transforma-se em funções psicológicas superiores, como planejar ações que poderão ser desenvolvidas no futuro, atenção voluntária, pensamento abstrato, comportamento intencional e ato de imaginar.

Essa evolução acontece através de um processo de desenvolvimento que envolve a interação do organismo individual como o meio físico e social em que vive. No entanto, para Vygotsky, essa relação não é direta, mas, fundamentalmente, uma relação mediada. Assim, um conceito central para a compreensão das concepções vygotskianas sobre o funcionamento psicológico é o conceito de mediação, característica presente em toda atividade humana. Para Oliveira (2000, p. 26), "Mediação, em termos genéticos, é o processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação; a relação, então, deixa de ser direta e passa a ser mediada por esse elemento".

Vygotsky distinguiu dois tipos de elementos mediadores: instrumentos e os sistemas de signos. Como já foi dito, um exemplo de um instrumento é a faca. Alguns signos são: os sistemas de números, os esquemas, diagramas e todo tipo de signos convencionais. Oliveira (2000) salienta que os instrumentos utilizados pelo homem servem para auxiliá-lo nas ações concretas, objetivando o controle da natureza. As mudanças ocorridas são nos objetos externos a ele. Os signos, por sua vez, são orientados para o próprio sujeito, servindo como ferramentas que auxiliam nos processos psicológicos superiores. Ao usá-los, o homem modifica as suas próprias funções psíquicas superiores. Os signos não só mediatizam o pensamento, mas o próprio processo social humano.

Vygotsky observa que as formas elementares de comportamento poderão ser esclarecidas através do esquema S → R. Assim, por exemplo, uma criança que nunca teve contato com uma chama de uma vela, ao se aproximar dela, terá o estímulo da dor (S), e imediatamente, como resposta (R), afastará sua mão dela. Sobre a estrutura de operações com signos há um terceiro elemento, um elo intermediário entre um estímulo e a resposta. Assim, a relação deixa de ser dual e passa a ser trial. A seguir, apresentaremos o esquema feito pelo próprio Vygotsky.

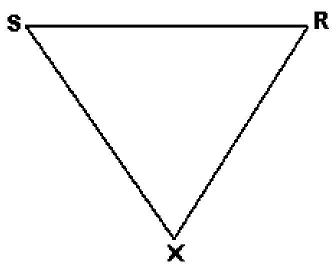


Figura 4.3 – Relação trial das formas elementares de comportamento. Fonte: (VYGOTSKY, 1998).

No mesmo exemplo da vela, a criança que já tenha passado pela experiência desagradável da queimadura, ao sentir os primeiros contatos do calor, imediatamente, afastará sua mão. Nesse caso, a lembrança da dor é o elo intermediário (signo) entre o estímulo e a resposta. Vygotsky frisa que esse signo possui a característica de ação reversa na medida em que age sobre o indivíduo e não sobre o ambiente.

Na perspectiva sócio-cultural de Vygotsky, os instrumentos são artefatos culturais, usados para mediar à realização colaborativa de atividades ou práticas sociais diversas, e cujo significado é historicamente construído por um grupo social. Assim, o computador é um destes artefatos e assume o papel de mediador no processo cognitivo e, ao mesmo tempo, é portador de carga cognitiva própria, uma vez que propicia a conexão entre diversos conhecimentos

4.2.2 Internalização

No item anterior, discutimos a importância do conceito de mediação simbólica para Vygotsky e vimos que os processos mentais superiores são processos mediados por sistemas simbólicos. Neste item, procuramos discutir o papel das várias fases das operações como uso de signos. Segundo Vygotsky:

> Na fase inicial o esforço da criança depende, de forma crucial dos signos externos. Através do desenvolvimento, porém, essas operações sofrem mudanças radicais: a operação da atividade mediada (por exemplo a memorização) como um todo começa a ocorrer um processo puramente interno (1998, p.73).

Ao longo do seu desenvolvimento, o indivíduo deixa de utilizar as marcas externas e passa a utilizar signos internos, isto é, representações mentais que substituem os objetos do mundo real. Por outro lado, são desenvolvidos sistemas simbólicos que organizam os signos em estruturas complexas e articuladas.

Para o psicólogo soviético, o conceito de ‘internalização’ significa a “reconstrução interna de uma operação externa”, tendo como base os signos (VYGOTSKY, 1998, p.74).

O processo de internalização consiste numa série de transformações, quais sejam:

(a) uma operação que inicialmente representa uma atividade externa é reconstituída e começa a ocorrer internamente;
(b) um processo interpessoal é transformado num processo intrapessoal; e
(c) a transformação de um processo interpessoal num processo intrapessoal é o resultado de uma longa série de eventos ocorridos ao longo do desenvolvimento.

Sobre a segunda série de transformações, Vygotsky observa que, no desenvolvimento da criança, todas as funções superiores aparecem duas vezes: primeiro entre os indivíduos (interpsicológica), e depois no interior da criança (intrapsicológica). A criança se apropria do conhecimento na medida em que interioriza a experiência sóciocultural dos adultos e do meio que a rodeia.

A principal função da linguagem humana, segundo Vygotsky, é a de intercâmbio cultural. Isto é, o homem tem necessidade de se comunicar com seus semelhantes, e para isso cria e utiliza os sistemas de linguagem. O bebê, que está começando a aprender a falar, não consegue compreender o significado preciso das palavras utilizadas pelos adultos, mas consegue manifestar seus sentimentos de desconforto, prazer e dor através de gestos, sons e expressões. No entanto, essa forma inicial de comunicação é limitada. As pessoas para se comunicarem de uma maneira eficiente sentem necessidade de utilizarem signos compreensíveis. Através deles, poderão ser traduzidos, de forma bastante precisa, idéias, sentimentos, vontades, pensamentos. Com a utilização da linguagem o homem se torna capaz de lidar com os objetos do mundo exterior, mesmo quando eles estão ausentes. Assim, por exemplo, a frase "o homem caiu" permite a compreensão de evento mesmo sem tê-lo presenciado, pois operamos com esta informação internamente.

Além disso, a linguagem imprime uma grande mudança nos processos do homem, permitindo que ele seja capaz de analisar, abstrair e generalizar as diversas características dos objetos, eventos e situações presentes em sua realidade, designando elementos presentes e fornecendo conceitos e maneiras de organizar o real em categorias conceituais. Por exemplo, a palavra "mesa" designa qualquer mesa, independente de seu tamanho, cor, se é grande ou pequena. Assim, a utilização da linguagem favorece processos de abstração e generalização. É esse fenômeno que gera a função da linguagem: pensamento generalizante.

4.2.3 Zona de desenvolvimento proximal

Vygotsky considera o aprendizado como um aspecto necessário e fundamental no processo de desenvolvimento das funções psicológicas superiores. Ele postula que o desenvolvimento pleno do ser humano depende do aprendizado que realiza num determinado grupo cultural, a partir da interação com outros indivíduos da sua espécie. Assim, os processos de aprendizagem geram os processos de desenvolvimento mental. Por exemplo, sabemos que a criança nasce com o aparelho fonador, condições orgânicas necessárias para a aquisição da fala, porém não suficientes para que ela adquira a linguagem. Se ela nascer numa comunidade de falantes, ela aprenderá a falar. Porém, se ela nascer numa comunidade de surdos-mudos, não desenvolverá a linguagem oral.

Segundo Vygotsky, a evolução intelectual de uma criança é caracterizada por saltos qualitativos de um nível de conhecimento para outro. Com o intuito de elucidar esse processo, ele identifica dois níveis de desenvolvimento: nível de desenvolvimento real ou efetivo e o nível de desenvolvimento potencial. A seguir, será explicado cada um deles.

A criança, quando consegue realizar uma tarefa sozinha, sem ajuda de uma pessoa mais experiente da cultura (pai, irmão mais velho, colega de classe mais adiantado, professor), está no primeiro nível de desenvolvimento. Nele, a criança já tem um conhecimento consolidado. Assim, por exemplo, se domina a operação adição, esse é seu nível de desenvolvimento real.

O nível de desenvolvimento potencial é determinado por aquilo que a criança ainda não domina, mas é capaz de realizar, só que mediante a ajuda de outra pessoa (adultos ou crianças mais experientes). "[...] Nesse caso, a criança realiza tarefas e soluciona problemas através de diálogo, da colaboração, da imitação, da experiência compartilhada e das pistas que lhe são oferecidas" (REGO, 2000, p.73). Por exemplo, a criança já sabe somar e identificar suas principais propriedades, através de um mediador, ela poderá dominar uma multiplicação simples.

A zona de desenvolvimento proximal pode ser definida como a distância entre o desenvolvimento real e o potencial, que está próximo mas ainda não foi atingido. O próprio Vygotsky (1998, p. 113) nos esclarece que:

> A zona de desenvolvimento proximal define aquelas funções que ainda não amadureceram, que estão em processo de maturação, funções que amadurecerão, mas que estão presentes em estado embrionário. Essas funções poderiam ser chamadas de "brotos" ou "flores" do desenvolvimento, ao invés de "frutos" do desenvolvimento. O nível de desenvolvimento real caracteriza o desenvolvimento mental retrospectivamente, enquanto a zona de desenvolvimento proximal caracteriza o desenvolvimento mental prospectivamente.

4.2.4 O processo de formação de conceitos

Um pouco antes de Vygotsky, existiam dois métodos de pesquisas que faziam estudos sobre a formação de conceitos. O primeiro, chamado de método da definição, voltava-se para os conceitos já formados na criança através da definição verbal de seus conteúdos. Segundo o psicólogo soviético, esse método é inadequado na medida em que investe no produto acabado da formação de conceitos, negligenciando a dinâmica e o desenvolvimento do processo em si. Pode ser um teste de desenvolvimento lingüístico, em vez de um processo intelectual propriamente dito. Outra inconveniência desse método é centrar seu foco de pesquisa na palavra, abordando o seu significado através de outra. São desconsideradas a percepção e a elaboração mental do material sensorial que dá origem ao conceito. Para Vygotsky (2000), o material sensorial e a palavra são partes indispensáveis à formação de conceitos. O segundo grupo abrange os métodos utilizados no estudo da abstração. São feitos experimentos nos quais se pede à criança que descubra algum traço comum em uma série de impressões discretas, abstraindo-se de todos os outros traços aos quais está perceptualmente ligado.

Vygotsky (2000, p. 70) critica essas pesquisas, pois tanto um grupo como o outro negligenciam o papel desempenhado pelo símbolo (a palavra) na formação de conceitos.

Todas as funções psíquicas são processos mediados e os signos constituem o meio básico para dominá-las e dirigi-las. O signo mediador é incorporado à sua estrutura como uma parte central de processo como um todo. Na formação de conceitos, esse signo é a palavra que, em princípio, tem o papel de meio na formação de um conceito e, posteriormente, torna-se o seu símbolo.

Baseados nas pesquisas feitas por seus colaboradores, Vygotsky propôs uma trajetória do desenvolvimento conceitual. Ele dividiu essa trajetória em três fases básicas, cada uma por sua vez, dividida em vários estágios.

Na primeira fase de formação de conceitos, a ‘criança de tenra idade agrupa alguns objetos numa agregação desorganizada, ou amontoada. Nesta fase de seu desenvolvimento,

> [...] o significado das palavras denota, para a criança, nada mais do que um *conglomerado vago e sincrético de objetos* isolados que, de uma forma ou de outra, aglutinam-se numa imagem em sua mente. Devida à sua origem sincrética, essa imagem é extremamente instável (VYGOTSKY, 2000, p.74).

A segunda fase é chamada por Vygotsky de “pensamentos por complexos”. Nela a criança já superou parcialmente o seu egocentrismo visto que em sua mente os objetos isolados associam-se não apenas devido às impressões subjetivas, mas também devido às relações que de fato existem entre esses objetos. Vygotsky observa que na linguagem dos adultos ainda se encontram alguns resíduos do pensamento por complexos. Ele exemplifica, de forma simples, através de um nome de uma família chamada Petrov. Nesse caso, quando a criança evoca em sua mente qualquer membro da família Petrov, ela faz através de um pensamento por complexo, as ligações feitas entre seus componentes não são lógicas e abstratas, mas concretas e factuais. Qualquer outra pessoa será dessa família pelo fato de ter o sobrenome Petrov.

Objetivando esclarecer melhor o pensamento por complexo e o diferenciamento do conceito, Vygotsky (2000, p. 77) observa que:

> As ligações factuais subjacentes aos complexos por meio da experiência direta.

> Portanto, um complexo é, antes de tudo, um agrupamento concreto de objetos unidos por ligações factuais. Uma vez que um complexo não é formado no plano de pensamento lógico abstrato, as ligações que o criam, assim como as que ele ajuda a criar, carecem de unidade lógica: podem ser de muitos tipos diferentes. *Qualquer conexão factualmente presente* pode levar à inclusão de um determinado elemento em um complexo. É esta a diferença entre um complexo e um conceito. Enquanto um conceito agrupa os objetos de acordo com um atributo, as ligações que unem os elementos de um complexo ao todo, e entre si, podem ser tão diversas quanto os contatos e as relações que de fato existem entre os elementos.

No desenvolvimento de conceito, é necessário abstrair, ou seja, observar um ou mais elementos de um todo, avaliando características e propriedades em separado. Além disso, nesse percurso de desenvolvimento que levará à formação de conceitos propriamente dito, caracterizado por Vygotsky de terceira fase, é igualmente importante unir a síntese e a análise.

Vygotsky observa que esta fase não aparece necessariamente só depois que o pensamento por complexo completou todo o seu desenvolvimento. Essas novas formações podem ser observadas em etapas da fase pensamento por complexos. É como se houvesse duas raízes independentes. O pensamento por complexo é uma raiz da formação de conceitos que estabelece ligações e relações. "O pensamento por complexos dá início à unificação das impressões desordenadas; ao organizar elementos discretos da experiência em grupos, cria uma base para generalizações posteriores" (VYGOTSKY, 2000, p. 95). A outra raiz, por vez, realiza o processo da análise, de abstração.

Dirigido pelo uso da palavra, o conceito se forma exigindo que o sujeito se concentre ativamente sobre o assunto, dele abstraindo os aspectos essenciais e inibindo os secundários, objetivando fazer generalizações mais consistentes através de uma síntese.

> Quando se examina o processo da formação de conceitos em toda a sua complexidade, este surge como um movimento do pensamento dentro da pirâmide de conceitos, constantemente oscilando entre as duas direções, do particular para o geral e do geral para o particular (VYGOTSKY, 2000, p.101).

Reportando-se à teoria vygotskiana, o processo de desenvolvimento dos conceitos ou significado das palavras é longo e complexo, requer um trabalho que envolva atenção arbitrária, memória lógica, abstração, comparação e a discriminação. O professor ao tentar ensinar um determinado conceito diretamente estará comprometendo o processo de ensino, pois Vygotsky observa, através da experiência prática, que essa conduta traz resultados infrutíferos. Assim, o conceito não pode ser memorizado, pois caso contrário, a criança não assimila o conceito e diante da sua aplicação sente-se impotente para usá-lo.

Muito antes de entrar na escola, a criança lida no seu dia-dia, com inúmeras situações tais como: reconhecer signos, operar, deparar-se com determinados fenômenos dentre outros. Por estar inserida num grupo sócio-cultural determinado, a criança recebe instruções das pessoas mais experientes, aprende a perguntar e também a obter respostas para uma série de questões. Além disso, antes de estudar Matemática na escola, ela já teve experiências com quantidades, comparações, ou seja, já teve algumas noções matemáticas. Esses conhecimentos construídos na experiência pessoal, concreta e cotidiana das crianças, foram chamados por Vygotsky de conceitos espontâneos ou cotidianos.

No entanto, aqueles conceitos que são adquiridos por meio do ensino são chamados de conceitos científicos. São conhecimentos sistematizados, adquiridos nas interações escolarizadas. Para estudar o desenvolvimento dos conceitos científicos na infância, Vygotsky se baseou em vários experimentos feitos pelos seus colaboradores. Um deles foi feito com crianças de segundo e quarto anos que tinham que completar frases com "porque" e "embora". A análise comparativa dos conceitos espontâneos e científicos em uma faixa etária mostrou que, quando o currículo fornece o material necessário, o desenvolvimento dos conceitos científicos supera o desenvolvimento dos espontâneos.

No terreno dos conceitos espontâneos, a criança tinha que completar frase do seu próprio dia-a-dia do tipo "o ciclista caiu da bicicleta porque...". Normalmente, esse tipo de frase é respondido corretamente por ela, de forma espontânea, várias vezes ao dia. Vygotsky explica que a criança provavelmente acha difícil concluir um teste como o acima mencionado por que não tem consciência de seus conceitos. No nosso caso específico, ela ainda não tomou consciência própria do conceito "porque" e, portanto não pode operar com ele à vontade.

No campo dos conceitos científicos, a tarefa requeria o estabelecimento de pendências causais entre os fatos e conceitos do campo das ciências sociais. Uma criança assim concluiu corretamente uma frase que lhe foi apresentada: "A economia planejada é possível na Rússia porque não há propriedade privada – toda a terra, as fábricas e as usinas pertencem aos operários e camponeses". Sabemos que, no terreno dos conceitos espontâneos, a criança sabe a causa de o ciclista ter caído. O que fará ela ao responder à pergunta? A explicação é dada pelo próprio Vygotsky (2000, p. 133):

> [...] Porque o professor, trabalhando com o aluno, explicou, deu informações, questionou, corrigiu o aluno e o fez explicar. Os conceitos da criança se formaram no processo de aprendizado, em colaboração com o adulto. Ao concluir a frase, ela utiliza os frutos dessa colaboração, dessa vez independentemente. A ajuda do adulto, invisivelmente presente, permite à criança resolver tais problemas mais cedo do que os problemas que dizem respeito à vida cotidiana.

No quarto ano, as frases com porque são completadas corretamente tanto nos aspectos científicos e espontâneos. Portanto, da segunda série para a quarta houve um rápido progresso. Sobre essa equivalência entre os conceitos, Vygotsky postula que o domínio dos conceitos científicos eleva o nível dos conceitos espontâneos. "[...] Uma vez que a criança já atingiu a consciência e o controle de um tipo de conceitos, todos os conceitos anteriormente formados são reconstruídos da mesma forma" (VYGOTSKY, 2000, p.134). Além disso, desde o início, os conceitos científicos e espontâneos da criança se desenvolvem em direções contrárias: inicialmente afastados, a sua evolução faz com que terminem por se encontrar.

Em seus conceitos espontâneos a criança chega relativamente tarde a tomar consciência do conceito. Para elucidar essa afirmação, pego o exemplo da palavra irmão. A criança tem o conceito do objeto e a consciência do próprio objeto representado nesse conceito, mas não está consciente do seu próprio pensamento. Esse conceito cotidiano está impregnado de experiência. Se a criança for solicitada para resolver um problema abstrato sobre um irmão de um irmão ela fica confusa, pois responder a essa pergunta implica operar esse conceito em situação não-concreta. A capacidade de defini-lo por meio de palavras, de operar com ele à vontade, aparece muito tempo depois (VYGOTSKY, 2000*)*.

Por outro lado, quando uma criança aprende um conceito científico como "guerra civil", ela sabe defini-lo, aplica-o em diferentes operações lógicas e descobre a sua relação com os outros conceitos. Mas, como frisa bem Vygotsky, "[..] esse conceito é esquemático e carece da riqueza de conteúdo proveniente da experiência pessoal. Vão sendo gradualmente expandidos no decorrer das leituras e dos trabalhos escolares posteriores" (2000, p. 135).

Analisando os dois conceitos, Vygotsky afirma (2001, p. 346):

> [...] o conceito científico da criança revela a sua fraqueza justamente no campo em que o conceito "irmão" se revela forte, isto é, no campo do emprego espontâneo do conceito, da sua aplicação a uma infinidade de operações concretas, da riqueza do seu conteúdo empírico e da sua vinculação com a experiência pessoal. A análise de conceito espontâneo da criança nos convence de que a criança tomou consciência do objeto em proporções bem maiores do que o próprio conceito; a análise do conceito científico nos convence de que, desde o início, a criança toma consciência do conceito bem melhor do que objeto nele representado.

Com o objetivo de esclarecer, Vygotsky concebe o seguinte esquema: o desenvolvimento dos conceitos espontâneos da criança é ascendente, enquanto o desenvolvimento dos seus conceitos científicos é descendente, para o nível mais elementar e concreto.

4.2.5 Mediação Pedagógica

Na seção passada, vimos que a mediação é um conceito crucial na teoria de Vygotsky. Para ele, toda relação do indivíduo com o mundo não é direta, mas feita por meio de instrumentos técnicos e da linguagem. Além disso, as funções psicológicas superiores só se formam e se desenvolvem pelo aprendizado. De acordo com sua teoria, as relações sociais potencializam os processos de desenvolvimento intelectual das pessoas e toda aprendizagem é necessariamente mediada. Assim, na perspectiva vygotskiana, o professor tem uma posição de destaque na sociedade uma vez que deverá intervir no processo de aprendizagem da criança, promovendo avanços no seu desenvolvimento. Além disso, o professor e a escola, em qualquer situação de ensino-aprendizagem, devem considerar os conceitos espontâneos de seus alunos, e, pela mediação, contribuir para que o aluno adquira autonomia na construção dos conceitos científicos.

Para Leite (2006, p. 28), "[...] a mediação pedagógica é a atitude do professor que se coloca como motivador da aprendizagem, manifestando-se disposição para ser ponte entre o aprendiz e sua aprendizagem, até que a produção do conhecimento seja significativa para o aluno".

Objetivando analisar como as trocas dialógicas entre professor e alunos influenciam na aprendizagem de conceitos matemáticos ao utilizar um Objeto de Aprendizagem, a autora acima citada realizou uma pesquisa com vinte e três alunos da sétima série e seu professor de Matemática em uma escola pública de Fortaleza. Nesse sentido, o estudo tinha como foco de atenção, observar como ocorre a mediação do professor durante o uso de um ambiente interativo e analisar se a conversação está voltada para a compreensão do conteúdo matemático ou para instruções de como utilizar o ambiente.

A pesquisa foi analisada no Laboratório de Informática da escola com o uso do Objeto de Aprendizagem (OA) Balança Interativa, que tem como objetivo trabalhar as noções de equação, inequação e incógnita por meio da simulação de uma balança de dois pratos na tela do computador. Ao analisar os resultados, a autora ressalta o papel do professor como mediador das atividades quando os alunos estavam utilizando o Objeto de Aprendizagem. A sua intervenção se dava quando os aprendizes sentiam necessidades de elaborar estratégias mais eficazes. Ele fazia o acompanhamento direto nas atividades, atuando de acordo com as necessidades de cada aluno.

Por outro lado, a colaboração entre os alunos também foi vista pela pesquisadora em sua análise. Em alguns momentos, houve mediação entre os próprios discentes sem a intervenção do pesquisador. No entanto, mediado pelo computador:

> Houveram momentos, durante o diálogo, em que os alunos sentiram a necessidade da presença de um professor no mesmo contexto da fala, ou seja, no momento da utilização, que pudesse contribuir com retornos para reparações, reconstruções e convergência conceitual, que o software, por si, não estava conseguindo emitir” (LEITE, 2006, p. 137).

Os resultados obtidos indicam que a intervenção do professor e a ajuda mútua entre os alunos os levam a uma melhor compreensão dos conceitos algébricos de equação, inequação e incógnita. As trocas dialógicas entre o professor e os alunos durante o uso do OA estavam voltadas para à compreensão destes conceitos matemáticos.

4.2.6 Considerações Finais

Nesta pesquisa, trabalhou-se o quadro teórico em três níveis de abordagem: o conceitual, o pedagógico e o tecnológico. Os três aspectos foram estudados de modo inter-relacional. Propõe-se trabalhar a elaboração conceitual de funções sobre uma base pedagógica (construtivismo) e através do instrumental tecnológico (software).

O trabalho no computador foi baseado em conjuntos de atividades. Cada um deles relacionado a um dos conteúdos programáticos selecionados e foram seguidos de uma série de exercícios específicos. As atividades foram baseadas em problemas práticos, pois se acredita que o uso da tecnologia associado à investigação de situações funcionais do mundo real ajuda o aluno a desenvolver uma maior intuição e compreensão de funções. Acrescenta-se que o computador é um meio prático que podemos utilizar em busca de novas generalizações. Ele não é apenas para ajudar o aluno a se relacionar com a situação apresentada, mas produz importantes efeitos nas relações internas e funcionais das estruturas superiores, isto é, na construção de novas generalizações.

Além disso, baseado em Oliveira; Costa; Moreira (2001), a utilização do *software* educativo, em contextos de ensino-aprendizagem, deve propiciar a necessária articulação dos conceitos espontâneos (conhecimentos prévios) com os conhecimentos que se deseja que o aluno construa (conhecimentos científicos).

4.3 Teoria dos Campos Conceituais

Uma das teorias mais importantes da Educação Matemática contemporânea é a Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida pelo professor e pesquisador Gerard Vergnaud. Há muito, suas idéias têm ajudado os pesquisadores a entender a formação dos conceitos matemáticos por parte dos alunos, a partir da observação de suas estratégias de ação. Em nosso país, muitas pesquisas são fundamentadas por essa teoria, sobretudo aquelas voltadas para o estudo dos Campos Conceituais da Álgebra. Além disso, os Parâmetros Curriculares

Nacionais - PCNs- de Matemática foram influenciados por esta elaboração teórica.

Seguindo uma linha construtivista, Gerard Vergnaud (1993) trabalha a questão da aquisição de conceitos, negando a proposta tradicional de ensino baseado na simples transferência de conhecimentos prontos e acabados. Em função disso, para ele, a compreensão de um conceito, por mais simples que seja, não pode estar baseada em apenas uma única situação, mas em várias, assim como uma única situação pode envolver vários conceitos. Portanto, devemos estudar campos conceituais.

Sobre a teoria dos campos conceituais, o próprio Vergnaud (1993, p. 1) esclarece:

> É uma teoria cognitivista, que busca propiciar uma estrutura coerente e alguns princípios básicos ao estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas, sobretudo as que dependem da ciência e da técnica. Por fornecer uma estrutura à aprendizagem, ela envolve a didática, embora não seja em si uma teoria didática. Sua principal finalidade é propor uma estrutura que permita compreender as filiações e rupturas entre conhecimento, em crianças e adolescentes entendendo-se por "conhecimento", tanto as habilidades quanto às informações expressas. [..] não é específica da Matemática, embora inicialmente tenha sido elaborada para explicar o processo de conceitualização progressiva das estruturas aditivas, das estruturas multiplicativas, das relações multiplicativas, das relações número-espaço e da Álgebra.

A teoria dos campos conceituais é uma teoria pragmática, ou seja, que faz apelo à noção de situação e das ações dos sujeitos nestas situações. Para Vergnaud, o conhecimento matemático emerge na resolução de problemas. Antes de esclarecer o que seria um conceito para ele, faz-se necessário entender melhor o que vem a ser o conceito de esquema.

4.3.1 Conceitos e Esquemas

Em contextos de aprendizagem e ensino, segundo Vergnaud (1998), um conceito não pode ser logo reduzido à sua definição. Para que faça sentido à criança, ele deve estar inserido em um conjunto de situações e problemas.

Para Vergnaud (1998), num dado momento do seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias, o aprendiz, ao resolver um determinado problema, tem a sua disposição um conjunto de competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação. Nesta classe de situações, observam-se comportamentos automatizados, organizados por um só esquema.

Por outro lado, o sujeito ao resolver um determinado problema matemático, pode não dispor de todas as competências necessárias para sua resolução, obrigando-o a um longo tempo de exploração e tentativa. Por conseguinte, ele entrará numa fase de descoberta, tentando sucessivos esquemas a fim de que possa atingir a solução desejada. "Esta aí a idéia piagetiana de que os esquemas estão no centro do processo de adaptação das estruturas cognitivas, i.e., na assimilação e na acomodação. Contudo, Vergnaud dá ao conceito de esquema um alcance muito maior do que Piaget e insiste em que os esquemas devem relacionar-se com as características das situações às quais se aplicam." (MOREIRA, 2002, p. 6). Vergnaud, (1998, p.2) diz:

> Chamemos 'esquemas' a organização invariante do comportamento para uma classe de situação dada. É nos esquemas que se devem pesquisar os conhecimentos em ação do sujeito, os elementos cognitivos que fazem com que ação do sujeito seja operatória.

Os conhecimentos-em-ação, citados pelo pesquisador, são os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação, que serão definidos na próxima seção. Agora, convém serem elencados alguns tipos de esquemas.

Um exemplo de esquema no estágio sensório-motor é o esquema da sucção. Através de sucessivos estágios de assimilação e acomodação ele vai se desenvolvendo. Assim, após uns dois meses, a criança já não mama de modo igual ao que fazia imediatamente depois de nascer. Outro tipo de esquema que se enquadra em competências sensório-motoras complexas é aquele que organiza o movimento de um atleta no instante do salto em altura. No contexto da Matemática, será descrito um exemplo de esquema extraído do campo conceitual da Álgebra. Entre alunos da quarta e quinta séries, iniciantes em Álgebra, encontra-se a construção do esquema da resolução de equações do tipo $ax - b = c$, quando a, b e $c > 0$ e $b < c$. Vergnaud (1998, p. 3) ressalta que muitos desses esquemas são baseados em hábitos construídos e no teorema do princípio da igualdade.

O funcionamento cognitivo dos alunos envolve tanto a tomada consciente de decisão como a automatização. No aludido exemplo, após um período de tempo, o aprendiz poderá resolver uma equação do 1.º grau automaticamente: trocar o sinal quando se troca o membro, isolar x de um lado da igualdade. No entanto, diante de uma situação-problema, o aluno pode tomar decisões conscientes que permitem perceber os valores particulares das variáveis de situação. Na resolução de situações matemáticas, sobre esses dois aspectos Vergnaud (1998, p. 3) esclarece:

> A automatização, evidentemente, é uma das manifestações mais visíveis do caráter invariante da organização da ação. Para uma classe de situações dadas, contudo, uma série de decisões conscientes também pode ser objeto de uma organização invariante. A automatização, aliás, não impede que o sujeito conserve o controle das condições sob as quais tal operação é ou não apropriada. Tomemos, por exemplo, o algoritmo da adição em numeração decimal; sua execução é amplamente automatizada pela maior parte das crianças no fim da escola primária. As crianças, contudo, são capazes de gerar uma série de ações diferentes em função das características da situação: reserva ou não, zero intercalar ou não, decimal ou não. Enfim todos os nossos comportamentos abrangem uma parte de automatismo e outra de decisão consciente.

4.3.2 Os conhecimentos-em-ação

Como vimos anteriormente, os invariantes são componentes cognitivos essenciais dos esquemas. Nas diversas situações com as quais o indivíduo se defronta, são eles que permitem aos esquemas achar as condições de funcionamento. Em particular, diante de uma tarefa matemática, o aluno deverá enquadrá-la num conjunto de circunstâncias e condições conhecidas, podendo evocar implicitamente um pensamento relevante e perceber predicados que a caracterizem. Nesse sentido, terá a sua disposição um sistema de informações que possibilitará a sua execução. Por outro lado, poderá fazer analogias com os conhecimentos adquiridos em contextos extra-escolares. Todos esses conhecimentos disponíveis ao sujeito diante de uma situação são chamados conceitos-em-ação.

Esses conceitos e conhecimentos são implícitos e praticamente insuscetíveis de explicitação por uma criança nas fases iniciais da aprendizagem de competências e conceitos matemáticos. Entretanto, orientam o desenvolvimento da ação.

Vejamos um exemplo de um possível conceito-em-ação situado no campo conceitual da Álgebra. Como sabemos, duas equações são equivalentes quando ambas têm a mesma raiz, como por exemplo 4x + 10 = 50 (equação 1) e 4x = 40 (equação 2). Neste exemplo, pode-se passar da equação 1 à equação 2 por manipulação algébrica, subtraindo-se 10 de ambos os membros da equação 1.

O aprendiz ao tentar entender essa passagem, poderá levar em conta, como auxílio representacional, a metáfora da balança: 'como se fosse uma balança em equilíbrio, se nós fizemos alguma coisa em um dos pratos (somar ou diminuir pesos), nós teremos que fazer o mesmo no outro prato para continuarmos com o equilíbrio'.

Além disso, em outros momentos, a criança, ao deparar-se com situações-problema, faz seu julgamento e escolhe uma operação ou uma seqüência de operações para resolver o problema. Ela percebe relações que, em geral, são usadas em domínio de contextos fáceis e valores numéricos simples. Elas aparecem de modo intuitivo nas ações dos alunos, sendo apresentados na maioria das vezes através da linguagem natural. Na teoria de Vergnaud, essas relações matemáticas são chamadas de Teorema-em-ação (MAGINA *et al*, 2002).

Para sua melhor compreensão, veja um exemplo adaptado de Franchi (1999, p. 177). Uma criança de 4 anos possui duas coleções, uma de 5 carros azuis e outra de 6 carros vermelhos. Quantos carros possui? A criança, não compreendendo a adição, deve (re)contar o todo e afirmar que tem 11 carrinhos. Entretanto, também a criança poderá utilizar outra estratégia e declarar 5+6= 11. O fato da ação da criança não recontar o todo e utilizar a segunda possibilidade é o critério para afirmar que ela utilizou implicitamente o caso particular do Teorema Fundamental da Teoria da Medida:

Cardinal (A U B) = Cardinal (A) + Cardinal (B).

Nessa ordem de idéias, um conceito-em-ação não é um conceito científico, pois nas ciências, conceitos são explícitos e pode-se discutir sua pertinência e sua veracidade, formando, no dizer de Vergnaud, a parte visível do iceberg da conceitualização. Mas esse não é o caso dos invariantes operatórios.

Os teoremas-em-ação, por sua vez, não podem ser considerados propriamente como um teorema matemático, pois seu âmbito de validade é normalmente menor que o âmbito dos teoremas. Algumas vezes, seu domínio de validade é considerado verdadeiro apenas para um conjunto de problemas. Todavia, eles são extremamente importantes para que percebamos quais são as relações matemáticas que os alunos estão pensando, por trás de suas ações.

Muitos conhecimentos apreendidos pelas crianças não são usados oportunamente na resolução de problemas (teoremas que não são teoremas-em-ação), e ao contrário, existem conhecimentos intuitivos da criança que nunca tomam a forma de verdadeiros enunciados (teoremas-em-ação que não se tornam teoremas). Assim, o professor tem uma tarefa importante de perceber essas nuances de pensamentos e favorecer a transformação dos teoremas-em-ação e vice-versa.

4.3.3 Conceitos

Vergnaud (1998, p.8) define conceito como uma trinca de conjuntos: ‘S’, conjunto das situações que dão sentido ao conceito; ‘I’, conjunto das invariantes em que se baseia a operacionalidade dos esquemas; ‘Y’, conjunto dos sistemas de representações, ou linguagens, que permitem representar simbolicamente o conceito.

Situação, em termos da função simbólica, é o referente do conceito, que é a realidade, o objeto. É num conjunto de situações, cuja utilização adequada é que dá sentido ao conceito. Através delas, o aluno poderá perceber as diversas conexões existentes entre os vários conceitos, destacando a dimensão da operacionalidade entre eles.

O segundo elemento da trinca de conjuntos é o conjunto de invariantes. Constituem o significado do conceito. Podem ser reconhecidos e usados pelo aprendiz para analisar e dominar uma classe de situações. São exemplos de invariantes os conhecimentos-em-ação, propriedades, relações e objetos.

O terceiro conjunto componente do conceito é o das representações simbólicas (linguagem natural, gráficos e diagramas, sentenças formais, dentre outros). São os significantes do conceito que servem para representar os invariantes operatórios.

Segundo Lima (2001), a tendência atual do ensino da Álgebra é o exagero excessivo nas manipulações algébricas, fato esse refletido nos livros didáticos, nas salas de aulas e nos diversos contextos de ensino-aprendizagem. É como se a Matemática resumisse ao manuseio eficiente de elaboradas e sofisticadas expressões numéricas e símbolos algébricos. Nesse sentido, no ensino da Matemática, o simbolismo assume posição de destaque. Vergnaud . (1998, p.24) afirma:

> O simbolismo matemático, a rigor, não é nem uma condição necessária nem uma condição suficiente para a conceitualização. Contribui, contudo, de modo útil, para essa conceitualização, sobretudo para a transformação das categorias de pensamentos matemáticos em objetos matemáticos.

4.3.4 Algumas implicações da Teoria de Vergnaud para o ensino da Matemática

A Teoria dos Campos Conceituais é um importante quadro teórico para que os professores possam compreender melhor a aquisição dos conceitos matemáticos apreendidos pelos alunos. São enfatizados vários aspectos importantes dessa teoria. O primeiro deles é sobre a origem da formação de um conceito que vem da resolução de problemas. É uma teoria pragmática no sentido que o professor deve privilegiar a noção de situação e das ações dos alunos nestas situações. O segundo aspecto é que através dela, e em particular os teoremas-em-ação, o professor assumirá o papel de pesquisador, diagnosticando os conhecimentos adquiridos por seus alunos, e outros que poderão ser desenvolvidos através de outras situações-problema ou até mesmo ampliando os já utilizados.

O professor, ao utilizar essa metodologia, poderá levar mais tempo, mas devemos ter consciência que os resultados de uma aprendizagem rica em significados demandam um longo prazo de desenvolvimento, embora aparelhem melhor o aluno para futuras aprendizagens.

4.4 Compreensão instrumental e relacional de Richard Skemp

Seguindo a linha construtivista, Skemp (1989) contribui com a afirmação de que os conceitos primários são abstraídos diretamente da nossa experiência sensorial e/ou motora e os conceitos secundários são elaborados a partir de outros conceitos anteriores, construindo-se assim várias hierarquias de conceitos mais e mais abstratos. Para Fossa (2001, p.67), uma das noções mais importantes da Educação Matemática contemporânea é a de esquema. O autor esclarece: "Um esquema é a maneira em que certos conjuntos de idéias são organizados por várias hierarquias e/ou classificações; é, por assim dizer, uma rede de idéias inter-relacionadas".

O mesmo Skemp (1989) desenvolve duas categorias de apreensão de um conceito: a "Compreensão Instrumental" e a "Compreensão Relacional". A compreensão, em geral, é a assimilação de algum item de conhecimento sob um determinado esquema. A compreensão instrumental envolve a assimilação de algo sob um esquema relativamente pobre, tendo poucas ligações internas entre seus componentes e poucas ligações externas. Dessa forma, em contextos de aprendizagem de função, se o aluno souber aplicar diretamente regras e procedimentos mecânicos pode ter alcançado uma compreensão instrumental desse conceito. Tomemos como exemplo o aprendiz saber calcular algebricamente o zero ou raiz de uma função do primeiro grau.

Já na compreensão relacional, utiliza-se um esquema bastante organizado, tanto em ligações internas, quanto em ligações externas com outros esquemas. No nosso exemplo específico, o aluno alcançou a Compreensão Relacional, se, além de determinar a raiz de uma função do primeiro grau, ele conhece a sua interpretação geométrica e sabe relacioná-la com o estudo do sinal da função.

Sobre os dois tipos de compreensão, Fossa (2001, p. 84-85) esclarece:

> [...], não temos dois tipos radicalmente distintos de compreensão, mas uma série de graus de compreensão em que a instrumental gradativamente se torna relacional. (...) A compreensão instrumental é não somente útil em certas ocasiões (circunstâncias), mas também é uma etapa necessária no desenvolvimento da Compreensão Relacional desde que o particular e o concreto vêm antes do geral e abstrato.

Sem perder de vista a compreensão relacional que o aluno poderá obter ao longo do processo de construção individual e coletivo, procura-se perceber o domínio da linguagem formal em questões que envolvem exemplos, justificativas e definições, fazendo parte também do estágio de sua compreensão relacional.

Se o aluno for capaz de generalizar os vários resultados relativos às funções e ter capacidade de interrelacionar as várias formas de representação do conceito ele poderá ter alcançado um grau elevado de compreensão relacional.

4.5 Definição conceitual e imagem conceitual

Para Vinner (1992), processos de pensamento, em contextos não técnicos, não são concretizados em termos de definições de conceito, mas em termos de imagens de conceito. Segundo Vinner (1992, p.197), a imagem conceitual é:

> [...] alguma associação não verbal de um conceito que evocamos em nossa mente. Pode ser uma representação visual de um conceito no caso este conceito possuir uma representação visual, pode ser uma coleção de impressões ou experiências. Estas representações visuais, estes quadros mentais, estas impressões e experiências associadas com o nome de conceito pode ser traduzidos em formas verbais

Todavia, como o próprio Vinner enfatiza, estas formas verbais não são as primeiras coisas evocadas em nossa memória, quando escutamos ou vimos o nome associado ao conceito. As formas verbais só irão participar do processo de raciocínio numa fase posterior. Assim, por exemplo, um aluno ao escutar a palavra função, poderá visualizar o gráfico de uma função específica do tipo f(x) = sen (x), outro poderá associar a expressão y = f(x). Também é possível um aprendiz associar a palavra função ao sentido usual, aquele que é usado em situações do cotidiano.

Em particular, em nossa pesquisa, poderíamos questionar qual a imagem mental mais evocada por um aluno do 1º ano do Ensino Médio, ao ouvir o nome de funções matemáticas. Seria uma expressão algébrica ou um gráfico? Ou poderiam ser dois diagramas relacionados por setas?

A segunda, definição de um conceito, está relacionada com definições formais matemáticas. Por exemplo, o aprendiz poderá mobilizar teoremas e definições para justificar uma determinada propriedade matemática. Enquanto a primeira noção é uma aquisição idiossincrática do indivíduo, a segunda é de natureza mais sequencial e ordenada.

Vinner postula que adquirir um conceito significa formar um conceito imagem para seu nome. Compreendê-lo consiste ter uma imagem conceitual para ele. Conhecer a definição de um conceito de uma maneira mecânica, não garante a compreensão deste conceito. Muitas abordagens pedagógicas acreditam que um conceito matemático deve ser iniciado pela sua definição. Através da definição, a imagem do conceito entrará num processo de delineamento, formando-se e ajustando-se a definição desse conceito.

Contudo, como enfatiza Vinner (1992), muito freqüentemente, a imagem de um conceito é completamente modelada por alguns exemplos e não se ajusta a definição de um conceito.

> Muitos professores de matemática conhecem a definição de retângulo dados por alguns de seus alunos que consiste num quadrilátero de quatro ângulos retos cujos lados adjacentes não congruentes. Esta “definição” reflete um quadro mental comum que muitas pessoas têm para conceito de retângulo.

Este exemplo de Vinner merece algumas considerações. Ao escutar o nome do conceito de retângulo o aluno poderá evocar esta imagem descrita no parágrafo anterior. Contudo, esta imagem é inapropriada uma vez que o quadrado é um retângulo e possui os lados adjacentes congruentes. Assim, o aluno terá dificuldades de compreender tanto o conceito de quadrado como de retângulo.

Muitos professores de Matemática acreditam que nas tarefas matemáticas, o aluno consultará a definição do conceito de alguma maneira. Eles admitem que esta consulta pode acontecer mais tarde, ou seja, o aprendiz poderá inicialmente lançar mão das imagens do conceito construído por ele, e, posteriormente recorrer à definição do conceito. Contudo, Vinner (1992) adverte que, pelo fato de os alunos possuírem formas de raciocínio espontâneo, muitos estudantes não consultarão a definição durante a realização da tarefa. Os processos de pensamento empregados pelo aprendiz serão guiados pelas imagens do conceito e não pela definição do conceito. A seguir, seguem algumas imagens mentais associadas ao conceito de função pesquisadas por Vinner (1992):

> (1) A correspondência que constitui a função deveria ser sistemática, ser estabelecida por uma regra e a própria regra deveria ter suas próprias regularidades. Uma correspondência arbitrária não pode ser considerada uma função. Uma mudança na variável independente deveria ser sistematicamente refletida na variável dependente;
> (2) Uma função deve ser um termo algébrico, uma fórmula, uma equação. É uma manipulação efetuada na variável independente para obter a variável dependente;
> (3) A função é identificada com um de suas representações gráficas ou simbólicas, ou é uma curva em um sistema de coordenada, ou dois diagramas interligados por setas, ou deve ser representada por y=f (x);
> (4) Uma regra de correspondência só pode ser uma regra algébrica, caso contrário, só deverá ser uma função se houver um consenso entre a comunidade de matemáticos. E além disso, necessita ser anunciado oficialmente;
> (5) O gráfico de uma função deveria ser regular e sistemático. Mudanças súbitas em um gráfico indicam que não representa uma função.

Em seu artigo, Vinner (1992) menciona o fenômeno de compartimentar que consiste na falta de conscientização do aluno sobre dois itens de conhecimentos existentes em sua mente. Estes itens referem-se ao mesmo conceito, mas são entre si incompatíveis. O próprio autor exemplifica:

Por um lado, um estudante define uma função como uma correspondência entre os elementos de dois conjuntos[40], e por outro lado, diante de um certo exemplo, acha que o gráfico dele não pode ser enquadrado como de uma função uma vez que não possui nenhuma regularidade para descrevê-lo. Neste caso, deve ser uma correspondência arbitrária de x para y sem qualquer regularidade.

Sobre o conceito de funções, será que o fenômeno de compartimentar desaparece com o decorrer do tempo, ou até mesmo diminui? Ou será que permanece com as mesmas características que foram originadas?

Nesse sentido, Vinner e seus colaboradores realizaram pesquisas envolvendo dois grupos de estudantes. O primeiro grupo era formado por 271 alunos, recém-ingressos na faculdade, cursando os seus cursos de Cálculo em diferentes departamentos científicos. O segundo grupo, alunos da escola secundária.

Entre os alunos universitários, somente 21% dessa amostra deram a definição de Dirichlet para funções, e entre eles, 56% mostraram imagens do conceito incoerentes com a essa definição. Com os alunos do Ensino Médio, os resultados não tiveram uma diferença estatística significativa: os casos de compartimentar foram 66%. Portanto, o mesmo autor infere que o tempo não dissolve este fenômeno. Itens incoerentes podem existir em sua mente para sempre, a não ser que alguma coisa seja feita para reverter este quadro.

[40] De acordo com o contexto do artigo, esta definição refere-se àquela postulada por Dirichlet.

4.6 A produção de significados

No ensino de Matemática, existem noções bastante enraizadas de que a aprendizagem da Aritmética deve vir antes da Álgebra e esta deve ser introduzida somente na 7.° ou 8.° série, quando os alunos teriam alcançado o nível de desenvolvimento intelectual requerido.

Gimenez e Lins (1997) questionam estas concepções de ensino e propõem que o ensino da Álgebra deve ser iniciado mais cedo e trabalhado conjuntamente com a Aritmética, uma implicando o desenvolvimento da outra. Mas isso sugere mudanças na Educação Matemática escolar.

Estes autores postulam a produção de um senso aritmético para a aprendizagem da Aritmética e a produção de significados para a Álgebra. Os autores explicam através de um exemplo. Nos estudos de equações do primeiro grau e de resolução de problemas de modelagem algébrica[41] é muito comum utilizarmos a balança de dois pratos para auxiliar a aprendizagem dos alunos. Nesse sentido, situações com a balança de dois pratos são adequadas para trabalhar com equações do tipo "$3x + 10 = 100$". Na passagem desta equação para a sua equivalente $3x=90$, o aluno pode produzir significados relacionado-a a metáfora de balança tendo a seguinte justificativa: "é como numa balança de dois pratos equilibrada: tiro 10 quilos de cada lado e continua equilibrada", (MEIRA, 1997; GIMENEZ; LINS, 1997).

Segundo Gimenez e Lins (1997), aqui se tem um processo de conhecimento que está sendo produzido, uma crença-afirmação correspondente a uma nova aprendizagem. O aluno, ao justificar estas passagens algébricas, estabelece um vínculo entre crenças-afirmações e núcleos. No nosso caso, a crença-afirmação são as equações equivalentes $3x + 10 = 100 \rightarrow 3x=90$, e o núcleo é a balança de dois pratos. Sobre a noção de núcleos os próprios autores esclarecem.

[41] Meira (1997) define modelagem algébrica como o processo de criar equações para representar e estudar fenômenos (físicos, sociais, econômicos etc.).

> [...] são um conjunto de objetos já estabelecidos e em relação aos quais significado está sendo produzido. Um núcleo pode ser constituído por um diagrama, por um desenho, por uma balança, por um conjunto de princípios (axiomas, por exemplo), por uma situação "realista" ou ficcional. O que importa é que é em relação aos objetos do núcleo que vai ser produzido significado, seja para que texto for." (GIMENEZ; LINS, 1997, p. 144).

No nosso exemplo, em relação ao núcleo de balança de dois pratos, estão sendo produzidos significados para a equação. Nas palavras dos autores: "[...] significado é o conjunto de coisas que se diz a respeito de um objeto. Não o conjunto do que se poderia dizer, e, sim, o que efetivamente se diz no interior de uma atividade. Produzir significado, e, então, falar a respeito de um objeto" (GIMENEZ; LINS, p. 145-146).

Na atividade da equação, ao falarmos sobre as passagens algébricas com suas justificativas baseadas na balança, estamos falando a respeito de objetos (equações e a balança de dois pratos). Assim, estamos produzindo significados.

4.7 Algumas considerações sobre o referencial teórico

Segundo Carreteiro (1997), Vygotsky contribui para repensarmos o processo de aprendizagem na medida em que não pode ser considerada só como atividade individual, mas sim, mais do que isso, social. Prossegue o autor, afirmando que inúmeras pesquisas mostraram a importância da interação social para a aprendizagem. Nesse sentido, como opção metodológica, pretende-se trabalhar com interação entre alunos.

Nesta pesquisa, também é nosso objeto de investigação entender em que medida os conhecimentos prévios são relevantes para a construção do conceito de funções. Assim, os pressupostos teóricos baseados na perspectiva Histórico-Cultural de Vygotsky e Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel orientaram estudos, discussões e reflexões sobre a compreensão do conceito de funções mediada por ambientes computacionais.

O presente trabalho também identificou os conhecimentos-em-ação (os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação) que emergem na resolução de problemas. Nessa ordem de idéias, foi relevante nos apoiarmos nas pesquisas que tinham como referencial teórico a Teoria dos Campos Conceituais.

5. ASPECTOS METODOLÓGICOS

Este capítulo se destina a mostrar os procedimentos metodológicos utilizados na pesquisa. Para a sua realização, e em consonância com o quadro teórico desenvolvido até aqui, concorda-se que a pesquisa qualitativa é a mais apropriada. Lakatos e Marconi (2004) asseguram que,, nesse tipo de estudo, o pesquisador faz uma análise e interpretação mais profundas sobre a complexidade do comportamento humano, descrevendo com mais acuidade sobre as investigações, hábitos, atitudes e procedimentos.

De acordo com Bogdan e Bicklem (1986), o enfoque qualitativo se preocupa com o processo e não simplesmente com os resultados e o produto. Assim, nesta pesquisa, ao analisar os dados sobre o desempenho dos alunos após a intervenção metodológica, tem-se interesse não só em saber sobre seu resultado, mas de analisar a compreensão dos alunos sobre o conceito de função quando utilizam o computador. Todavia, os dados coletados e analisados sob o ângulo qualitativo devem ser complementados e confrontados com os instrumentos estatísticos. Com isso, o investigador pode aproveitar essa informação para avançar numa interpretação mais ampla da mesma (TRIVIÑOS, 1987).

Nesse sentido, para a análise dos dados também foi utilizado o método quantitativo. Para o tratamento deles, foram empregadas técnicas estatísticas, desde as mais simples, como porcentagem e desvio-padrão, até as mais complexas, como o t de Studant e o Algoritmo de Kolmogorov.

5.1 Os sujeitos da pesquisa

O grupo pesquisado foi constituído por alunos da 1ª série do Ensino Médio. Estes alunos estavam em um momento de transição entre o Ensino Fundamental e Médio e em uma série na qual o programa curricular oficial contempla o estudo de funções. Portanto, esta condição os colocava em situação privilegiada para elaborar um conhecimento, uma vez que ainda não aprenderam o conceito de forma tradicional.

5.2 Local

Esta pesquisa deu-se em uma escola pública de Fortaleza com uma turma de 1º ano do Ensino Médio. Como critério de escolha, optou-se por uma escola que possuísse um bom Laboratório de Informática e tivesse em disponibilidade sete computadores para a pesquisa, uma vez que se pretendia trabalhar com sete duplas[42]. Vale ressaltar que a disponibilidade de tempo e o interesse dos alunos foram importantes para a escolha das duplas. Em nenhum momento do trabalho, o nome da escola ou dos participantes foi divulgado.

5.3 Materiais

Foram utilizados quatro ambientes computacionais que trabalham com o conceito de funções: *Desafio Funções*, *Winplot*, *INSERIR* e o *Graphmatica,* aliados a um módulo de atividades.

5.3.1 Objeto de Aprendizagem Desafio Funções[43]

O Objeto de Aprendizagem *Desafio Funções* (CASTRO FILHO et al., 2004) trabalha com localização de pontos no plano cartesiano e conceitos tais como despesas, receitas e lucros. Também conceitos ligados a funções como crescimento e decrescimento podem ser explorados em contextos de ensino-aprendizagem (Ver figuras 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4). O Objeto de Aprendizagem possui três atividades as quais serão detalhadas a seguir.

Na primeira atividade, o aluno trabalha com a localização no plano cartesiano e o

---

[42] Durante a primeira atividade, um aluno desistiu de fazer parte da pesquisa. Assim, o experimento contou com treze alunos.

[43] O Objeto de Aprendizagem Desafio Empresarial foi criado e desenvolvido pelo Grupo PROATIVA (Grupo de Pesquisa e Produção de Ambientes Interativos e Objetos de Aprendizagem) em 2004 e atualmente passa por diversas modificações, incluindo a mudança de seu nome de Desafio Funções para Desafio Empresarial. Disponível em rived.proinfo.mec.gov.br ou www.proativa.virtual.ufc.br.

conceito de despesa. Se por caso houver erros de localização de pontos, é aberta, no final, uma caixa de diálogo comunicando o erro e incentivando uma nova marcação de pontos (Ver figura 5.1).

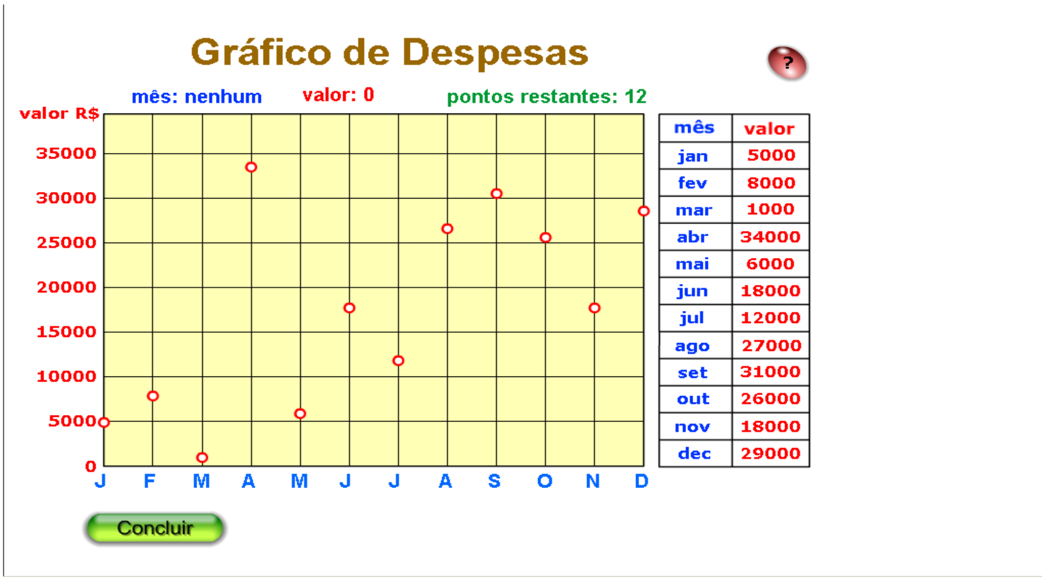


Figura 5.1 - Primeira Atividade.

Na atividade 2, o aluno depara-se com os conceitos de despesa, receita e lucro, assim como crescimento e decrescimento de funções (Ver figura 5.2). Aqui, novamente, caso o aprendiz erre, é aberta no final da atividade uma caixa de diálogo.

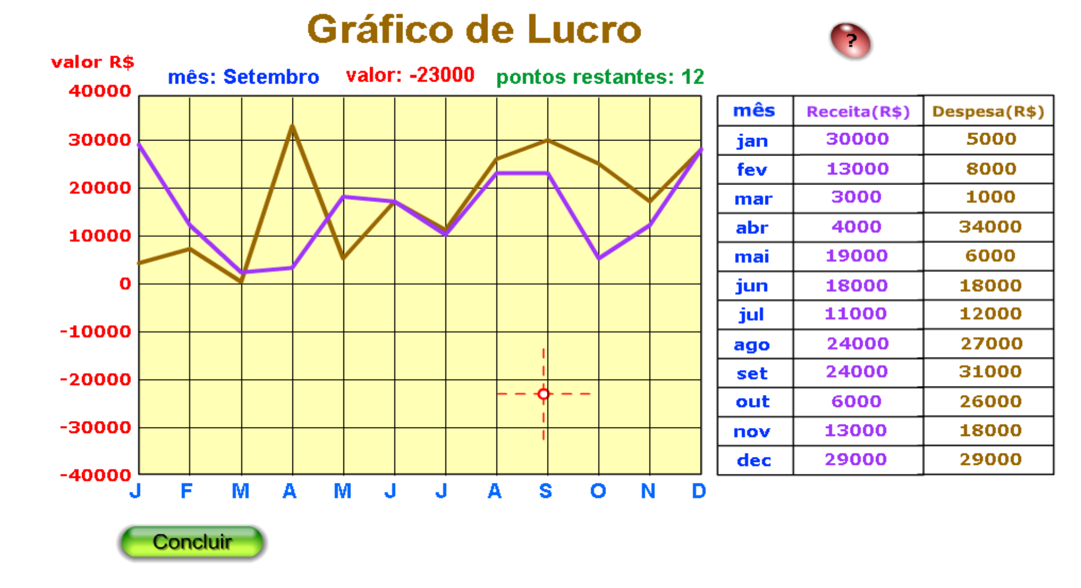


Figura 5.2 - Segunda Atividade.

A última atividade consiste na simulação dos parâmetros a, b e c, a fim de obter um lucro máximo (Ver figura 5.3). É bom salientar que, nesse Objeto de Aprendizagem, o aluno tem a sua disposição uma calculadora para fins de cálculos elementares.

Figura 5.3 - Terceira Atividade: simulação dos parâmetros a, b e c a fim de obter um lucro máximo.

Figura 5.4 - Resultado de uma simulação.

5.3.2 O *Software* Educacional *Winplot*

O *Winplot* é um programa para gerar gráficos de segunda e terceira dimensões a partir de funções ou equações matemáticas. Foi desenvolvido pelo Professor Richard Parris, da Philips Exeter Academy, por volta de 1985. A versão para o Windows 98 surgiu em 2001 e está escrita em linguagem C++.

Esse ambiente computacional apresenta uma quantidade grande de ferramentas para que o aluno trabalhe com funções em espaços bidimensionais (2D), com a possibilidade de encontrar raízes, realizar combinações entre funções, rotações, comprimentos de arco, cálculo de volume e área, animação dentre outros.

Além de ser pequeno e portável, está traduzido em português e é de simples utilização, visto que seus menus são amigáveis, possuindo um sistema de ajuda em toda parte do programa.

Nesta pesquisa, uma das utilizações do *Winplot* foi trabalhar com os alunos a noção de rotação das retas. Para tanto, o aprendiz deveria variar o coeficiente "a" da reta $y = ax$ e perceber os possíveis conhecimentos-em-ação (a relação entre o ângulo de inclinação com o coeficiente angular, interseções com os eixos, raízes ou zeros da função)(Ver figura 5.5).

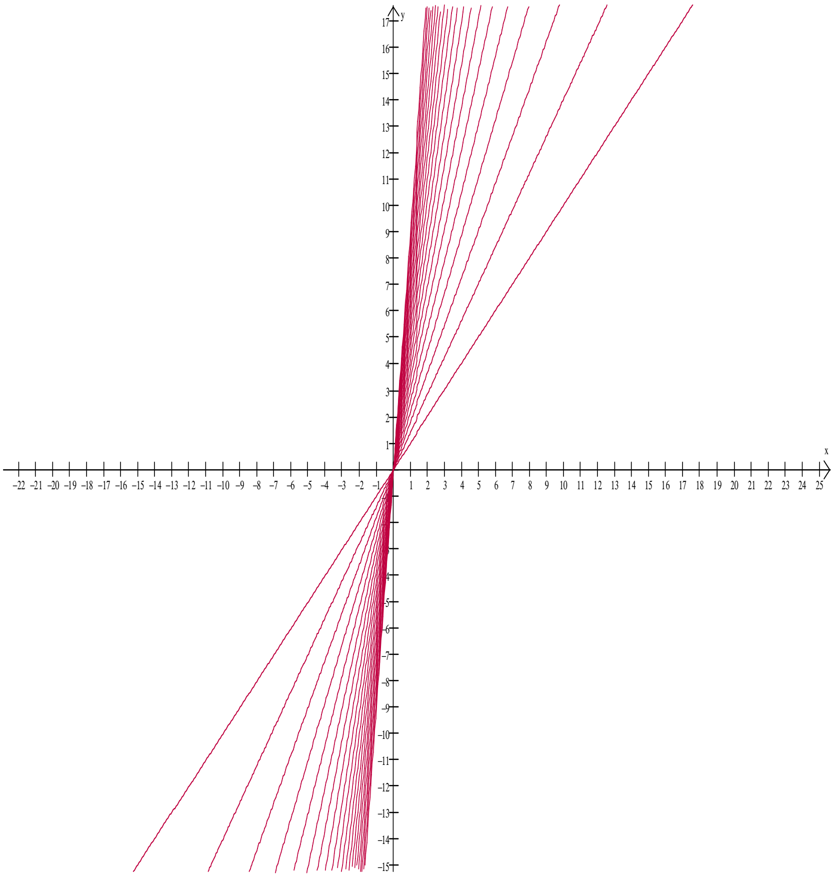


Figura 5.5 - Família de retas y=ax.

5.3.3 O software Graphmatica

O *Graphmatica* é um software para o ensino-aprendizagem de funções, pois apresenta um grande número de recursos que permitem explorar várias possibilidades e definições deste conceito. Também apresenta o conjunto significativo de símbolos matemáticos e, além disso, dispõe de uma interface muito amigável. Pode ser utilizado para visualizar gráficos de equações algébricas, os quais podem ser representados através de vários tipos de escalas, incluindo logarítmicas e polares. Foi construído por Keith Hetzer e Carlos Malaca nos Estados Unidos em 1999.

Para explorar o software, é necessário conhecer antes as suas características e funcionamento de forma a se familiarizar com ele. A seguir, com o objetivo de visualizar um conjunto de gráficos, será apresentada uma sintaxe usada pelo software.

Quando se quer o gráfico da função $f(x) = x^2+2x+1$, deve-se digitar na área editável das funções como y = x^2 +2*x +1.

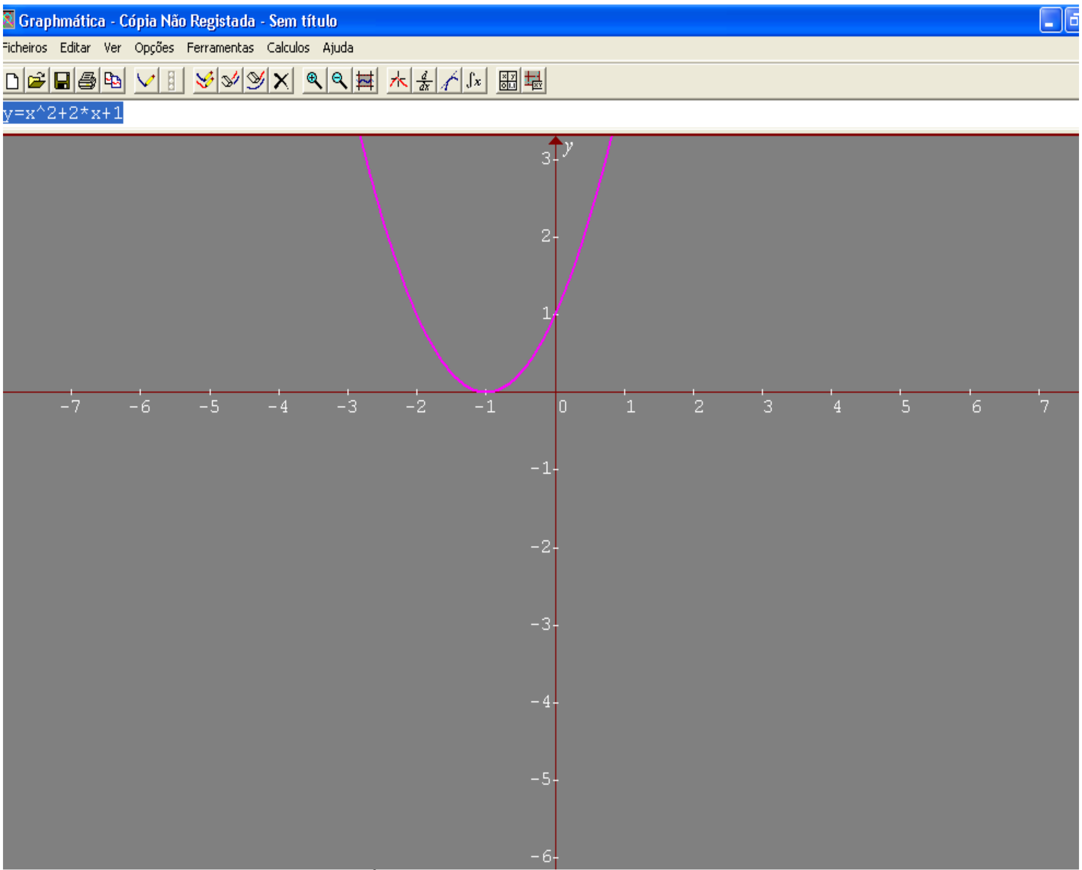


Figura 5.6 - Gráfico da função $f(x) = x^2+2x+1$ plotado pelo software educativo *Graphmatica.*

Quando se quer os gráficos das funções quadráticas $f(x) = x^2+x+1$, $f(x) = x^2 +x+2$ e $f(x) = x^2+x+3$, tem-se que trabalhar com a família de funções $f(x) = x^2+2x+a$ ("a" parâmetro variável). Neste caso, deve-se digitar na área editável da função como y=x^2+2*x+a {a:1, 3, 1}, onde a, entre chaves, indica a variação do coeficiente "a" da função, variando de 1 a 3, de unidade em unidade.

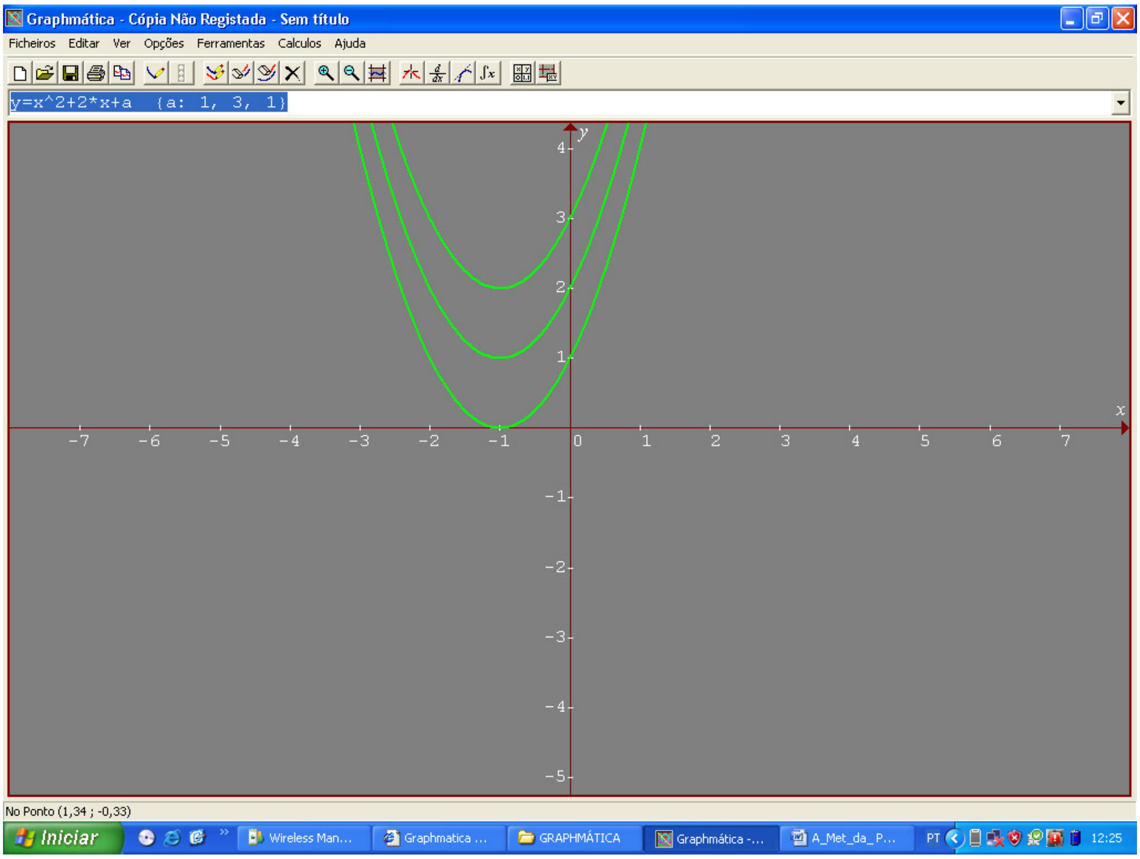


Figura 5.7 - Família de Gráficos da função f(x) = x^2+2x+a com {a:1, 3, 1}.

Além disso, a partir de funções elementares como, por exemplo, f(x) = 2x+5, o software permite a visualização das múltiplas representações de funções (gráficos, tabelas e equações). Ao descrever a equação y=2x+5 na área editável da função, são apresentadas simultaneamente a sua representação gráfica e tabular (Ver na figura 5.8).

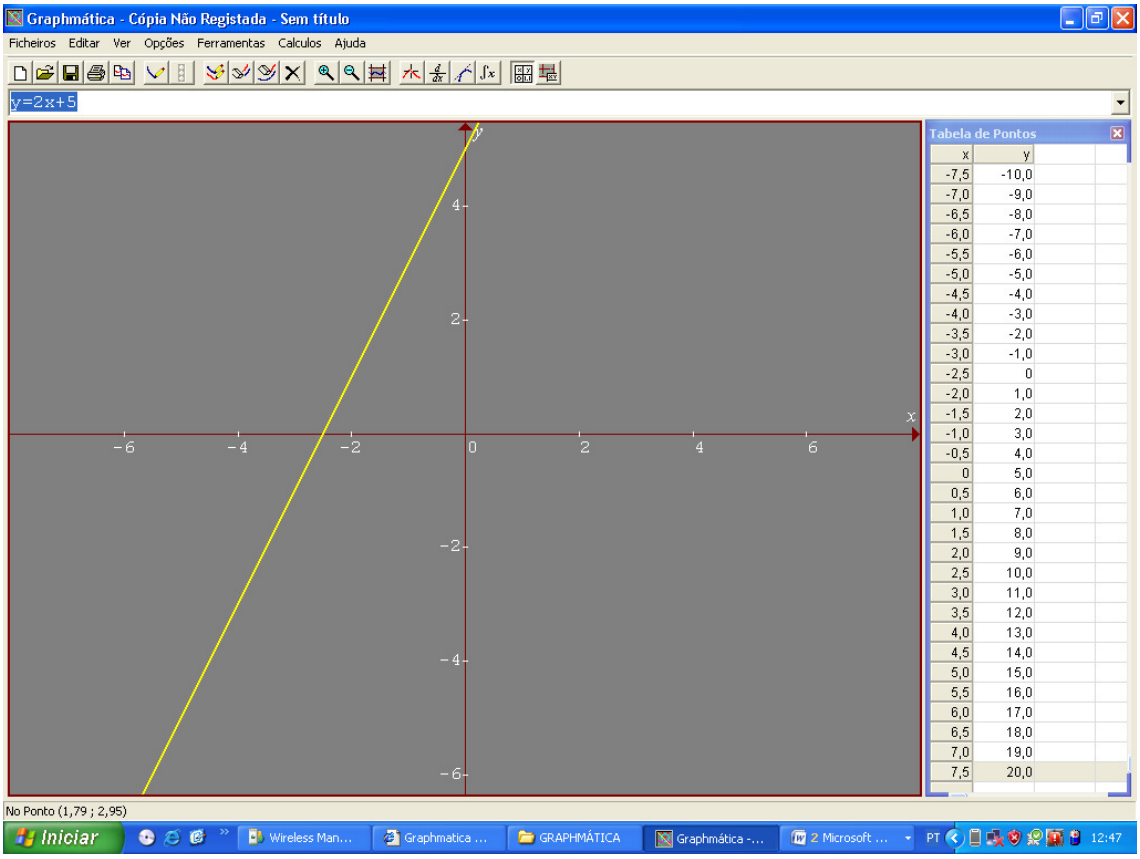


Figura 5.8 - As múltiplas representações da função f(x) = 2x+5.

5.3.4 Teste da reta vertical

Diagramas interativos são um conjunto de aplicativos em Java (Java applets) projetados para permitirem a investigação de conceitos em Matemática e Ciências (CONFREY, CASTRO-FILHO e MALONEY, 1998).

Através de suas ferramentas de transformações visuais, o aprendiz poderá perceber os aspectos dinâmicos dos conteúdos matemáticos. O Diagrama Interativo Teste da Reta Vertical objetiva avaliar se um determinado gráfico de uma relação representa ou não um gráfico de uma função.

Utilizando o menu *relation list,* o aluno pode escolher uma equação e aplicar dinamicamente o teste da reta vertical, verificando que esta equação representa um função.

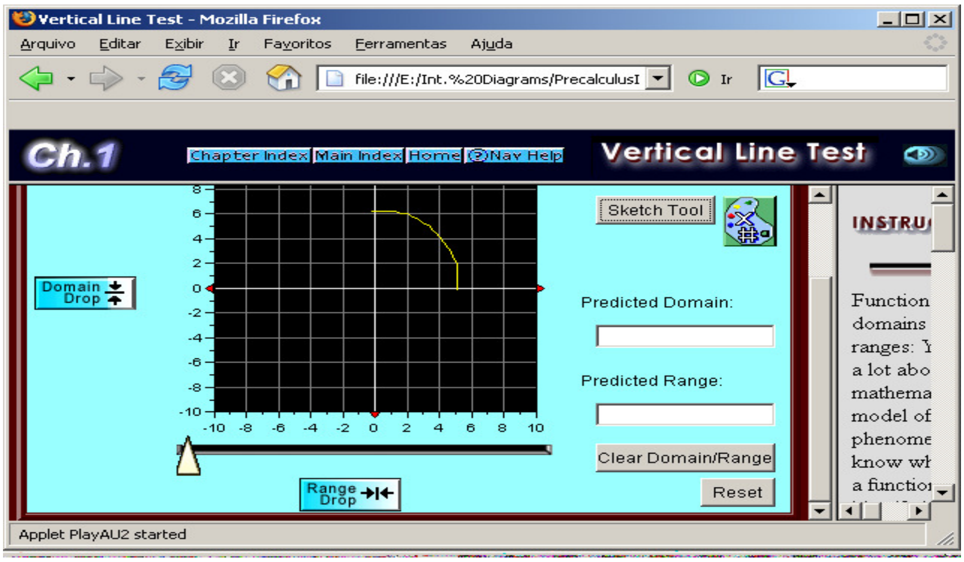


Figura 5.9 - Gráfico desenhado pelo aluno utilizando o comando Skerch Tool.

Por outro lado, se o usuário desejar, poderá desenhar um gráfico e recorrer dinamicamente ao teste da reta vertical. Para tanto, deve-se acionar o comando *Sketch Tool* (vide figura acima).

5.5 A Metodologia da Pesquisa

O trabalho de campo foi realizado seguindo as etapas:

- A ***primeira etapa*** consistiu em um estudo preliminar para a elaboração da proposta metodológica e dos materiais didáticos de apoio, baseado, dentre outros em um estudo piloto (prévio) que foi realizado em uma turma de 1ª Série do Ensino Médio da cidade de Fortaleza.
- A ***segunda etapa*** consistiu na aplicação de uma entrevista e um teste diagnóstico, uma avaliação escrita formal e individual que teve como objetivo central analisar os níveis de conhecimentos prévios de todos os sujeitos da pesquisa.
- A ***terceira etapa*** consistiu em uma Intervenção Metodológica, compreendida pela realização das atividades com todos os sujeitos da pesquisa. Foram formadas sete duplas, cada par em um computador, que realizaram as

atividades mediadas pelos ambientes computacionais e pelo pesquisador. Com o intuito de facilitar o trabalho didático, usou-se um diário de campo. Além disso, em cada sessão, uma dupla foi escolhida para ser gravada.

- **A *quarta etapa*** consistiu em uma segunda avaliação, entrevistas com todos os sujeitos da pesquisa e análise dos dados obtidos nesta e na etapa anterior. Em todas as entrevistas, o examinador procurou seguir o método clínico piagetiano para buscar entender o raciocínio usado pelo sujeito. A pretensão maior nessa etapa foi identificar quais os conhecimentos-em-ação (os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação) que emergiram na resolução de problemas. Todas as entrevistas eram gravadas em fita cassete, e a seguir transcritas para posterior análise.
- **A *quinta etapa:*** Conclusões.

5.5.1 Teste Diagnóstico

O teste diagnóstico foi uma avaliação escrita individual tendo como objetivo central analisar os níveis dos conhecimentos dos alunos envolvidos na pesquisa quantos aos conteúdos necessários à compreensão do conceito de funções. Compreendeu nove questões que serão detalhadas mais na frente. Neste teste, procurou-se fazer um diagnóstico dos principais conhecimentos prévios dos alunos importantes para a compreensão do conceito de funções. Muitos desses conhecimentos podiam estar insatisfatórios ou até mesmo esquecidos na estrutura cognitiva dos alunos.

Na primeira questão, avalia-se a capacidade do aluno para interpretar um gráfico que representa o crescimento populacional em função dos meses do ano. A sua resolução está dividida em dois momentos interconectados. No primeiro momento, o aluno tem que localizar a população correspondente ao ano de 1967. Em seguida, diante desse dado, o aluno tem que compará-lo com o tamanho das outras populações.

A segunda questão é a continuação da anterior e está dividida em dois itens. O primeiro item visa verificar a habilidade do aluno em analisar o crescimento e decrescimento populacional. O segundo item, por sua vez, envolve a capacidade do aluno para analisar intervalos constantes.

A terceira questão envolve a competência do aluno em compreender a localização de pontos no plano cartesiano a partir de pares ordenados de números reais. Na questão 4, procura-se avaliar a capacidade do aluno para resolver uma equações do 1o grau. É uma equação bem simples do tipo ax + b = c.

Na questão 5, por sua vez, procura-se avaliar a capacidade do aluno em analisar mudanças de dados num gráfico de linhas. Nele, o aluno tem que fazer comparações com as ordenadas (inclusive calcular a distância entre duas ordenadas), conectando-as com seus pontos e abscissas correspondentes.

A questão 6 exige do aluno a competência de analisar uma situação-problema, envolvendo grandezas diretamente proporcionais. Na sétima questão, deseja-se verificar se o aluno compreende o significado do número real ser ou não raiz da equação do segundo grau (solução de uma equação).

A oitava questão objetiva verificar a competência do aluno em analisar uma situação-problema, envolvendo grandezas inversamente proporcionais. A nona questão visa verificar a habilidade do aluno em analisar relações entre dois conjuntos que satisfazem a definição de Dirichlet.

5.5.2 Módulo de Atividades

O módulo de atividades está dividido em doze atividades e tem como modelo didático a Teoria da Aprendizagem Significativa.

5.5.2.1 Modelo Didático

Para o desenvolvimento das atividades na sala do Laboratório de Informática, procurou-se selecionar um modelo didático com uma estrutura compatível com a Aprendizagem Significativa de David Ausubel. Para tanto, foram adotados os organizadores prévios e princípios facilitadores da aprendizagem significativa (*diferenciação progressiva, reconciliação integrativa, organização seqüencial e consolidação*).

Como já vimos, os organizadores prévios são verdadeiras pontes cognitivas na medida em que servem de ligação entre o que o aluno já sabe e o que ele precisa saber. Em cada módulo de atividade, os organizadores prévios são apresentados sob o título de **Introdução**.

Para aplicar o princípio da diferenciação progressiva na elaboração de cada módulo, os assuntos mais inclusivos e gerais são iniciados, para, em seguida, serem progressivamente diferenciados em termos de detalhe e especificidade.

Baseado no princípio da reconciliação integrativa, deve-se organizar o material de aprendizagem, discriminando as idéias ou conceitos similares e diferentes. Nesse sentido, devem-se reconciliar as idéias já adquiridas com as novas.

Para a organização seqüencial, os conteúdos do estudo de funções foram organizados a partir das dependências seqüenciais naturalmente existentes entre eles. Este princípio é justificado no contexto do ensino de funções, pelo fato de que, na maioria das vezes, a compreensão de um tópico implica o entendimento de outros a ele relacionados. Assim, por exemplo, o estudo do vértice da função quadrática deve-se relacionar com o estudo de simetria do gráfico da parábola (pelo menos no contexto das funções quadráticas).

Finalmente, para a consolidação, quarto e último princípio facilitador da Aprendizagem Significativa, antes que um novo módulo for explorado, é feito uma revisão dos principais conceitos vistos anteriormente.

5.5.2.2 As Atividades

O trabalho no computador é baseado em conjuntos de atividades. Cada um deles está relacionado a um dos conteúdos programáticos selecionados, e são seguidos de uma série de atividades específicas. Todavia, é bom frisar que cada atividade é baseada em um roteiro de procedimentos ou em exercícios propostos. Nessa ordem de idéias, o módulo de atividades está dividido em doze atividades distintas:

Atividade 1 – Avaliação após o OA

Esta atividade envolve um texto introdutório que ressalta a importância das funções e a relação entre duas grandezas no cotidiano das pessoas; como também duas questões concernentes a interpretação gráfica.

A primeira questão consiste em seis itens e visa verificar a habilidade do aluno em trabalhar com um gráfico que representa as despesas em função dos meses do ano.

Nos dois primeiros itens, o estudante tem que localizar onde estão as despesas e os meses. O terceiro item exige do aluno conhecimentos sobre valor máximo e mínimo dentre de um intervalo. A quarto e quinto itens exigem apenas a localização de pontos no espaço bidimensional (despesas x meses) e comparação entre as despesas. O sexto e último item exige a competência de o aluno em analisar o crescimento e decrescimento de uma empresa em um determinado período de tempo.

A segunda questão envolve a habilidade de o estudante em lidar com três gráficos ao mesmo tempo (gráfico das despesas, receitas e lucros em função dos meses do ano). Compreende quatro itens.

No primeiro item, o aluno deve fazer uma comparação entre as receitas e as despesas, analisando-as. O segundo item exige conhecimentos sobre valor máximo e mínino em um intervalo. O terceiro item, por sua vez, requer do aprendiz a análise de crescimento e decrescimento do lucro em um período de tempo. O quarto item envolve a capacidade do estudante para analisar intervalos constates.

Atividade 2 – Noção Intuitiva de Funções[44]

Nesta atividade, os alunos irão estudar a noção intuitiva de função. São dadas duas situações-problema para que eles percebam a relação entre as duas grandezas e as expressem por uma equação. O primeiro problema é o uso da Matemática na corrida de um táxi com a taxa de bandeira dois. O segundo, por sua vez, trata da modelagem de uma situação, envolvendo o total a pagar em função da quantidade de litros de gasolina colocados no tanque do carro.

Nessas questões, além de introduzir o aluno às equações das modelagens, é também trabalhada em cada situação a sua representação gráfica e tabular. Esta atividade compreende seis questões.

Na primeira questão, procurou-se avaliar a capacidade do aluno em modelar o problema do taxista com a taxa da bandeira dois.

A segunda questão também era um problema de modelagem, no qual o aluno deveria encontrar uma lei que expressasse o total a pagar ao frentista do posto de gasolina em função dos litros colocados no tanque.

A terceira questão ainda tratava da situação real do posto de gasolina. Porém, nesta o aluno tinha que calcular o total a pagar quando fossem colocados 18 litros e quando o tanque ficasse cheio (os dados da questão informavam o tanto que o tanque do carro poderia comportar).

---

[44] A atividade 1 foi descrita e intensamente analisada na seção 5.1.

A quarta questão envolvia três (3) itens, todos ligados ao problema do posto. Auxiliado pelo computador, o primeiro item envolvia o preenchimento de uma tabela que representava a função y = 1,5x (representação algébrica do problema do posto na qual a variável y representa o total a pagar e a variável x o número de litros colocados). Diante de cada valor de x, inclusive valores negativos, o aluno tinha que determinar o seu valor correspondente y.

Usando os dados da tabela no item anterior, os alunos foram levados a interpretar, no item dois, que números negativos não poderiam assumir o valor de x, visto que x representava o número de litros colocados no tanque do carro. O item seguinte exigia do aluno a lembrança de que o tanque do carro comportava 30 litros no máximo, não tendo sentido calcular o total a pagar quando o número de litros fosse 37.

Na questão cinco, ainda baseado na equação y = 1,5x e auxiliado pelo ambiente computacional *Graphmática*, o aluno deveria completar corretamente a tabela. Diante de cada valor de x o aluno tinha que determinar o seu valor correspondente y e vice-versa.

A questão 6 exigia do aluno a observação de que não era possível pagar ao frentista do posto a quantia de R$ 75,00 porque, nesse caso, corresponderia a 50 litros e o máximo permitido no tanque da camioneta é 30 litros.

Atividade 3 - Noções Geométricas

Esta atividade tem com objetivo rever algumas noções geométricas, tais como posição entre as retas (retas concorrentes, paralelas e coincidentes), projeção de um ponto e de um segmento em uma reta. Muitas dessas noções estarão vinculadas a situações físicas do movimento retilíneo uniforme. Assim, por exemplo, dadas duas equações do espaço em função do tempo, solicita-se ao aluno a posição entre estas duas retas.

Na estruturação das questões, buscou-se também familiarizar o aluno com alguns comandos do *Winplot* e o descobrimento de invariantes relativos a segmentos paralelos aos eixos. São sete questões que compõem esta atividade.

A primeira questão visa integrar o conceito de funções com a disciplina Física. Neste sentido, num movimento retilíneo, são dadas duas funções horárias (espaço em função do tempo) e o aluno deverá determinar o ponto de encontro das duas partículas. Também se tem a idéia de introduzir ou revisar o conceito de retas concorrentes e de familiarizar o aluno com as ferramentas do *Winplot*.

As duas questões seguintes têm o mesmo objetivo da questão anterior, só que nelas são explorados os conceitos de retas paralelas e coincidentes.

A quarta questão também faz a interdisciplinaridade com a Física e contém a idéia de introduzir ou revisar o conceito de retas perpendiculares. Nesta questão, também se tem em mente familiarizar o aprendiz com o comando do *Winplot* para determinar o ângulo formado pelas duas retas.

A quinta questão envolve quatro (4) itens, todos ligados a conteúdos da Geometria. O primeiro item visa verificar a capacidade do aluno em perceber as principais propriedades de um segmento paralelo ao eixo horizontal. Para tanto, o aprendiz tem que observar os pontos pertencentes a este segmento e concluir que as abscissas variam e as ordenadas são o mesmo número. O segundo e terceiro itens objetivam familiarizar os alunos com os comandos do *Winplot* para construção de segmentos e projeções de pontos sobre os eixos. O quarto item envolve a competência do aluno em perceber as principais propriedades de um segmento paralelo ao eixo vertical. Para tanto, o aprendiz tem que observar os pontos pertencentes a este segmento e concluir que as abscissas são o mesmo número e as ordenadas variam.

A sexta questão consiste em analisar como variam as coordenadas de um ponto, quando ele caminha sobre uma curva.

Na sétima questão, avalia-se a capacidade do aluno em trabalhar com equivalência de equações. Através do isolamento da variável y de uma equação, o aluno poderia perceber que esta era equivalente a outra. Também o aluno tinha como alternativa plotar as duas equações no ambiente computacional *Winplot* e perceber que as duas equações possuíam a mesma reta.

Atividade 4 – O conjunto domínio e o conjunto imagem

Esta atividade objetiva trabalhar com os dois subconceitos de função: o conjunto domínio e o conjunto imagem. Em vários momentos, solicita-se do aluno a determinação dos valores do domínio e do conjunto imagem (com ou sem a ajuda do computador).

O problema do taxista é retomado. Porém, nesse momento, o aprendiz terá que identificar o conjunto domínio e o conjunto imagem da função que modela esta situação cotidiana. A quarta atividade consiste em seis questões.

A primeira questão envolve três itens e mede a capacidade do aluno em determinar o conjunto imagem de uma função definida em um conjunto discreto e finito. Para cada item é dada a lei algébrica da função.

A segunda questão exige do aluno a habilidade de marcar os pontos obtidos na questão anterior (os itens a e b) no ambiente computacional *Winplot*. Objetiva também familiarizar o aluno a construir pontos no *Winplot*.

A terceira questão trabalha com a função $f(x) = 0.5x -1$ e envolve dois itens. O primeiro item exige do aluno o preenchimento da tabela (eram dados valores de x e o aprendiz tem que determinar os seus valores correspondentes y). O segundo item questiona se a equação intercepta a origem e pede a justificativa da resposta.

A quarta questão envolve a capacidade do aluno em analisar a função $f(x) = 0,5x-1$ em diversos domínios no ambiente computacional *Winplot*. A questão cinco é análoga à primeira questão da terceira atividade, ou seja, é o problema de modelagem do motorista de táxi com cobrança da taxa da bandeira dois.

A questão seis é a continuação da anterior, mas envolve três itens. O primeiro item aborda uma situação semelhante à já trabalhada na terceira atividade, ou seja, diante da equação da modelagem y=2x+1, é perguntado ao aluno se tem sentido calcular o valor de y quando o x for negativo. O segundo item, por sua vez, envolve a capacidade do aluno de discutir se tem sentido o passageiro pagar ao motorista de taxi a quantia de R$ 1,00. O terceiro item visa verificar se o aluno tem competência de determinar o conjunto domínio e imagem desta situação-problema.

Atividade 5 – Funções do 1º Grau

Muitas relações entre duas grandezas são expressas por uma equação do tipo y = ax+b. Essas equações são representações algébricas das funções do primeiro grau.

Esta atividade visa medir a capacidade do aluno em compreender o significado de uma função polinomial do primeiro grau. Dessa forma, ele deverá reconhecer uma função do 1^0 grau, identificando as variáveis x e y; e diferenciando os coeficientes a e b.

Em uma das questões, o aprendiz terá que aplicar o conceito destas funções na resolução de uma situação-problema (o problema do carro em movimento uniforme). Em outra questão, é dada a equação descoberta por Galileu: $d = 4{,}9\ t^2$. A idéia é colocar os alunos diante de modelos que não podem ser expressos por uma função polinomial do primeiro grau. São seis questões que compõem esta atividade.

A primeira questão visa verificar se o aluno tem a capacidade de exemplificar algumas funções do primeiro grau. A segunda questão, por sua vez, avalia se o aprendiz sabe identificar as funções do 1^0.grau.

A terceira questão media a capacidade do aluno em determinar o coeficiente angular “a”da função y = ax + 5. Para tanto, ele deve escolher qualquer ponto mostrado na tabela e substituir a abscissa e a ordenada desse ponto na equação y = ax+5.

A quarta questão é uma situação análoga ao texto introdutório, ou seja, uma função horária do movimento retilíneo uniforme.

A quinta questão, por sua vez, também faz interdisciplinaridade com a Física e, em particular, com o movimento uniformemente variado. O objetivo maior desta questão é trabalhar a função de Galileu. Mediado pelo *Winplot*, trabalha-se com os alunos a função de Galileu $y = 4{,}9x^2$ em diversos domínios[45]

Atividade 6 – Funções do 1º Grau (continuação)

Esta atividade é a continuação da anterior e tem como idéia trabalhar com invariantes relativos aos gráficos da função polinomial do primeiro grau. Assim, por exemplo, o aprendiz poderá perceber que o feixe de retas $y = 1{,}5x+b$, com b variando de -2 a 2, são paralelas porque possuem o mesmo coeficiente angular “a”. Além disso, uma de suas questões explora a compreensão do aluno sobre a variação do sinal da função do primeiro grau. A sexta atividade consiste em dez questões.

A primeira questão consta de três itens e pede que os alunos façam o estudo da variação da função $f(x) = 1{,}5x-6$. Na segunda questão, diante da tabela da função $f(x) = -1{,}5x +6$ e dados alguns valores da variável independente x, o aluno deverá encontrar suas imagens correspondentes.

A terceira questão visa a capacidade do aluno em trabalhar com uma família de retas do tipo $f(x) = 1{,}5x +b$, o parâmetro b variando de -2 a +2 (vide figura 5.10). Para tanto, os alunos têm que perceber invariantes tais como: as retas são paralelas, as equações que possuem o mesmo coeficiente angular “a” são retas paralelas.

[45] Sempre era frisado ao aluno que a variável “y” representava a distância e a variável “x” o tempo.

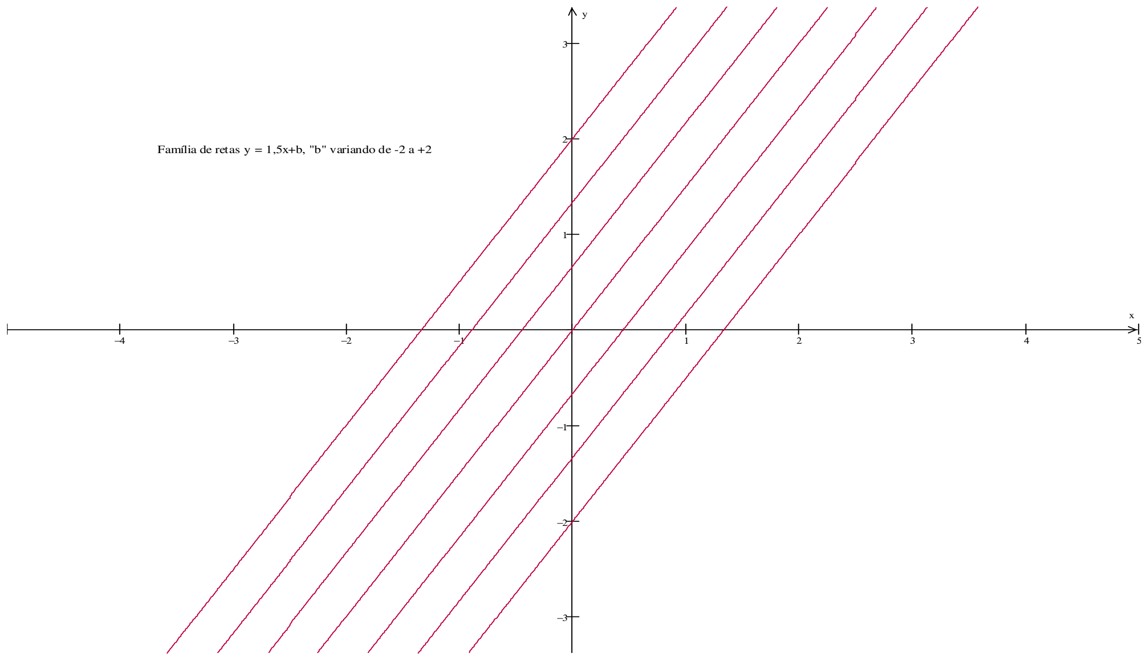


Figura 5.10 - Família de retas y = 1.5x+b, "b" variando de -2 a +2

A quarta e quinta questões visam verificar o comportamento dos alunos diante de uma família de retas f(x) = ax + 4 (vide figura 5.11).

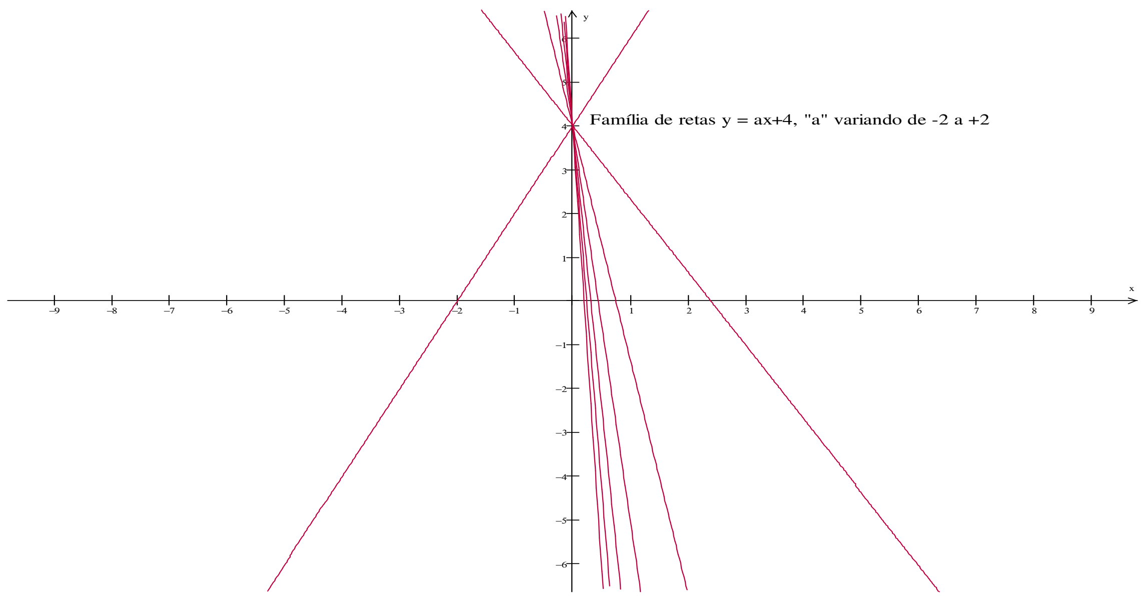


Figura 5. 11- Família de retas y = ax+4, "a" variando de -2 a +2

Na questão seis, ao traçar duas retas pelo *Winplot*, o aluno deve perceber que as retas são concorrentes e se interceptam no mesmo coeficiente linear “b”(vide figura 5.12).

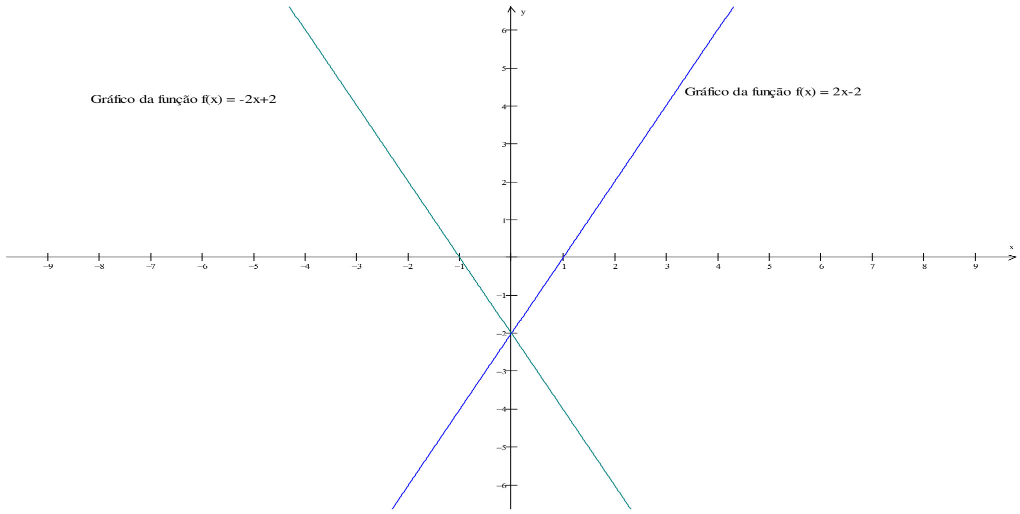


Figura 5.12 - Gráficos das funções f(x) = -2x-2 e f(x) = 2x-2

A questão sete é análoga a questão anterior, ou seja, é dado um par de retas e se pede para serem apontados os invariantes relativos a estas retas. A questão oito exige do aluno a percepção de que as retas paralelas possuem o mesmo coeficiente angular “a”.

A questão nove fornece um gráfico da função do primeiro grau e exige do aluno a percepção de que o seu coeficiente angular é positivo (vide figura 5.13).

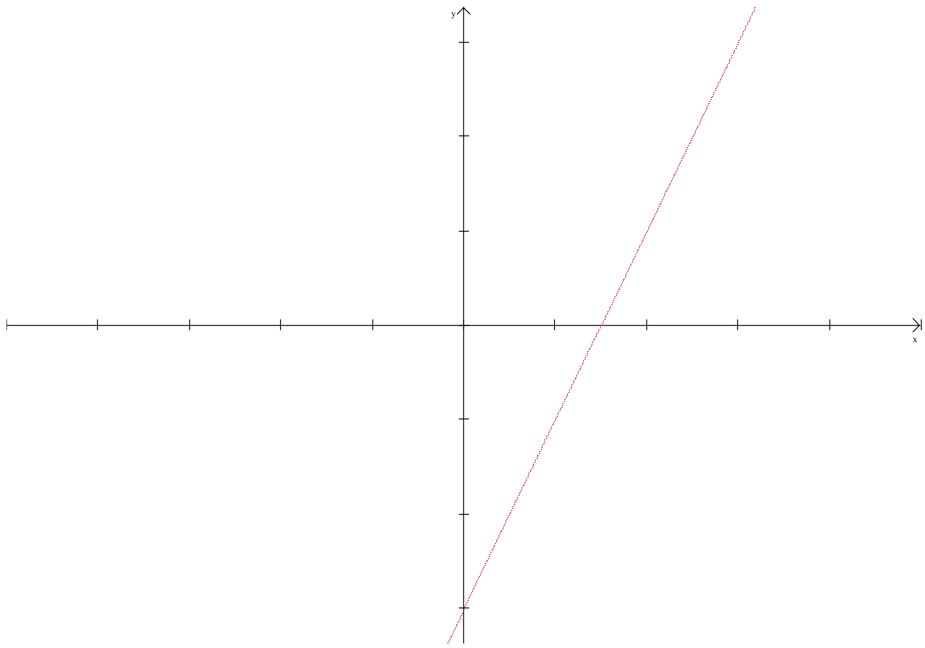


Figura 5. 13- Gráfico da questão 9.

A décima questão é análoga à anterior, só que nela, o aprendiz tem que perceber que o coeficiente angular "a" é negativo.

Atividade 7 – Estudo da variação do sinal da função do 1º grau

Nesta atividade, o aluno deverá calcular o zero ou raiz real e determiná-lo no plano cartesiano, assim como compreender o significado da variação do sinal da função do primeiro grau. São nove questões que compõem esta atividade.

A primeira questão faz uma contextualização do estudo do sinal de uma função do primeiro grau em uma empresa e envolve cinco itens. O primeiro item exige do aluno o traçado no *Winplot* da função L(x) = 2x-6. Logo em seguida, ele deverá preencher uma tabela relativa a esta função. O segundo item mede a capacidade do aluno em determinar em qual intervalo do eixo x a função terá o lucro maior do que R$ 35,00.

O terceiro item, por sua vez, exige do aluno a determinação do número de unidades produzidas para que a empresa não tenha lucro nem prejuízo. O quarto item trabalha com o lucro da empresa, ou seja, os valores de x que tornem a função positiva. E, finalmente, o quinto item envolve a capacidade do aluno em determinar o domínio desta função.

A segunda questão é análoga à questão anterior. Todavia, neste contexto, a função trabalhada é f(x) = 5x-5. Já a terceira questão consta de três itens e visa verificar o comportamento dos alunos diante do estudo do sinal da função f(x) = -2x+4.

A quarta questão envolve cinco itens e trabalha com interseção de retas e o ângulo formado por elas. O primeiro item visa familiarizar o aluno com o comando do *Winplot* para determinar o ponto de interseção entre as duas retas. O segundo item objetiva verificar a percepção do aluno sobre o ponto de interseção entre as duas retas. O terceiro item pede apenas a identificação do coeficiente angular "a" e do coeficiente linear "b". O quarto item, por sua vez, exige do aluno a determinação do ângulo formado entre as duas retas. No quinto item, solicita-se ao aluno a classificação deste ângulo.

A quinta questão mede a competência do aluno em elencar algumas propriedades relativas ao feixe de retas y = ax – 1.

A questão seis é complementar às duas questões anteriores. Baseado nelas, o aluno pode chegar à conclusão que retas cujos ângulos de inclinação são agudos correspondem ao sinal do coeficiente angular “a’ positivo.

A sétima é análoga à quarta questão. Contudo, na sétima questão, a idéia é trabalhar com o coeficiente angular “a” negativo e os ângulos de inclinação do tipo obtuso. A oitava questão, por sua vez, mede a competência do aluno de elencar algumas propriedades relativas ao feixe de retas y = ax +4.5, sendo que o parâmetro “a” tem variação através de números negativos.

A questão nove complementa as duas questões anteriores. Baseado nelas, o aluno pode chegar à conclusão de que retas cujos ângulos de inclinação são obtusos correspondem ao sinal do coeficiente angular “a” negativo.

Atividade 8 – Funções Lineares

Esta atividade leva o aluno a reconhecer uma função linear como um caso particular da função polinomial do primeiro grau. Nas questões propostas, também são explorados a determinação da raiz e o estudo dos sinais das funções lineares. Além disso, o aprendiz poderá perceber invariantes relativos aos gráficos da função linear. Assim, por exemplo, o aprendiz poderá perceber que o feixe de retas y = ax, com a variando de -2 a 2, são concorrentes e se interceptam na origem (0, 0).

Na atividade anterior, os alunos estudaram o estudo da variação do sinal da função polinomial do primeiro grau. Eles farão o mesmo nesta atividade, porém o zero ou raiz da função é x=0. Está composta por nove questões.

A primeira questão visa avaliar se o aluno tem a capacidade de exemplificar algumas funções lineares. A segunda questão objetiva verificar a capacidade do aluno de identificar as funções lineares.

A terceira questão consta de três itens e tem como objetivo avaliar o comportamento dos alunos diante do estudo do sinal da função f(x) = 2x. Na quarta questão, diante de uma função linear de coeficiente angular “a” negativo, exige-se dos alunos conhecimentos sobre operações inversas (multiplicação é a operação inversa da divisão) e discriminação entre as variáveis dependentes e independentes.

A quinta questão está baseada na anterior e visa medir a habilidade do aluno em concluir que toda função y = ax (a <0) possui imagens com sinais contrários aos valores da variável x.

A sexta questão é análoga à quarta, mas aqui o coeficiente angular “a” da função linear f(x) = ax é positivo. A sétima é a continuação da anterior e exige do aluno a conclusão de que a família de função linear f(x) = ax (a>0) possui imagens com sinais iguais aos valores da variável independente “x”.

A oitava questão visa medir a capacidade do aluno em trabalhar com uma família de funções de retas do y=ax com o coeficiente “a” positivo variando de 0.5 até 4 (vide figura 5.14). Para tanto, os alunos têm que perceber invariantes tais como: à medida que coeficiente “a” aumenta mais as retas se aproximam do eixo y, as retas passam pela origem etc.

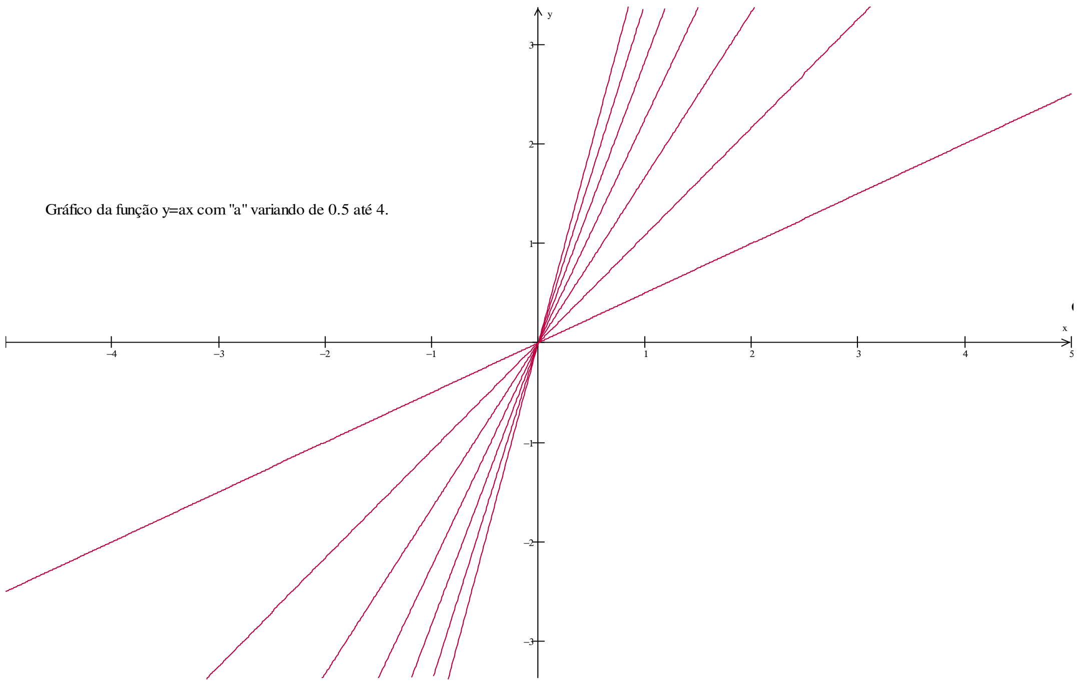


Figura 5.14- Gráfico da função y = ax com "a" variando de 0.5 até 4

A nona questão é semelhante à anterior. A diferença é que, aqui, o feixe de retas y=ax tem como variação do parâmetro "a" valores negativos.

Atividade 9 – Grandezas Diretamente e Inversamente Proporcionais

Permeando o estudo das funções lineares e das funções do tipo $y = \frac{1}{x}$, esta atividade enfatiza a discussão sobre casos de uma ou de outra em que as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais. Dessa forma, busca-se desenvolver a idéia de função linear associada à proporcionalidade entre as grandezas distintas.

Também, em uma das questões aqui propostas, trabalha-se com a função y = 3.5x+2, tendo como idéia colocar os alunos diante de uma relação entre duas grandezas que nem são diretamente proporcionais nem inversamente. São cinco questões que compõem esta atividade.

A primeira questão retorna ao assunto da modelagem e consta de quatro itens. O primeiro item exige do aluno o preenchimento de uma tabela na qual a primeira coluna representa a quantidade de quilos comprados e segunda coluna representa os valores pagos. No segundo item, a partir dos dados preenchidos no item anterior, o aluno deverá marcar esses pontos no ambiente computacional *Winplot*. No terceiro item, o aluno deverá fazer a modelagem encontrando uma expressão que relacione o total a pagar em função do número de quilogramas de arroz comprados. O quarto item está relacionado aos dois itens anteriores. O aluno deverá traçar o gráfico da função anterior e verificar se o mesmo intercepta os pontos marcados.

A segunda questão visa verificar o comportamento dos alunos diante das grandezas diretamente proporcionais. Consta de quatro itens relativos à função f(x) = 2x. O primeiro item solicita ao aluno completar a tabela com alguns valores de x e y dessa função. O segundo item, por sua vez, pede para o aluno analisar a tabela e justificar porque as grandezas são diretamente proporcionais. No terceiro item, solicita-se a determinação da constante de proporcionalidade.

A terceira questão é um problema de modelagem que se refere a um prêmio da loteria, exigindo do aluno a habilidade de perceber inicialmente que quanto maior o número de ganhadores menor a quantia da premiação a ser repartida.

A quarta questão, por sua vez, mede a competência do aluno em analisar situações-problema envolvendo grandezas inversamente proporcionais. Consta de quatro itens relativos à função $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$. O primeiro item solicita ao aluno completar a tabela com alguns valores de x e y dessa função. O segundo item, por sua vez, pede para o aluno justificar porque essas grandezas são inversamente proporcionais. O terceiro item visa verificar se o aluno sabe determinar a constante de proporcionalidade.

A quinta questão exige do aluno a competência de construir e interpretar a tabela associada à função f(x) = 3.5x+2 e perceber que, tratando-se das funções do tipo afim f(x) = ax+b, as grandezas nem são diretamente proporcionais nem o são inversamente.

Atividade 10 - Função Identidade

Esta atividade leva o aluno a reconhecer uma função identidade como um caso particular da função polinomial do primeiro grau uma vez que funções do tipo y = x podem ser escritas da seguinte forma: y = 1x + 0. Como Organizador Prévio, envolve uma situação contextualizada de uma loja que vende qualquer produto por um real. Diante desta situação, o aluno deverá entender que x=0 significa que a loja não vendeu nenhum produto. Esta atividade compreende duas questões.

A primeira questão visa medir a capacidade do aluno em analisar a função identidade f(x) = x quanto ao estudo do sinal. Consta de quatro itens. O primeiro item tem como objetivo verificar se o aluno sabe determinar o zero ou raiz real desta função. Nos dois itens seguintes, utilizando o *Winplot*, é traçado seu gráfico e acionado a sua tabela. Tendo com referência o primeiro item, o quarto item exige do aluno a interpretação prática do zero ou raiz real de função identidade – se o resultado indica que foram vendidas mercadorias ou não. Finalmente, os dois últimos itens exigem do aluno a competência para fazer o estudo do sinal da função f(x) = x.

A segunda questão exige do aluno perceber invariantes relativos ao feixe de retas y = x+b, a saber, retas paralelas, interseção do gráfico com o eixo horizontal, translações em relação à reta y= x, dentre outros.

Atividade 11 – Funções Constantes

Nesta atividade, o aluno deverá reconhecer uma função constante. Ele poderá perceber que uma função constante é um caso particular da função polinomial do primeiro grau uma vez que a funções do tipo y = k podem ser escritas da seguinte forma: y = 0x+k, a = 0 e b = +k.

Além disso, pretende-se trabalhar com o aluno invariantes relativos ao feixe de retas y = k em dois momentos. No primeiro momento, o parâmetro “k” terá variação positiva. E no segundo momento, a variação terá números negativos. Assim, por exemplo, o aprendiz terá oportunidades de observar que estas retas são paralelas ao eixo horizontal “x” e interceptam o eixo vertical y no ponto (0,k). Esta atividade consiste em sete questões.

A primeira questão envolvia a capacidade do aluno traçar o gráfico de um preço constante em função dos meses. Ele tinha que perceber que, nos meses de março até agosto (representados no eixo horizontal x), o preço de um jogo de estofado era constante (representado no eixo vertical pela reta y=983).

A segunda questão exige do aluno a competência de lidar com retas do tipo y=2. Ele deve perceber invariante relativo a esta reta tais como: esta reta é paralela ao eixo horizontal x, intercepta o eixo vertical y no ponto (0, 2) etc. A terceira questão exige do aluno completar a tabela com alguns valores de x e y da função y = 2.

A quarta questão é baseada nas duas anteriores e visa medir a competência do aprendiz de determinar o conjunto imagem e o domínio da função ora em análise. A quinta questão tem como objetivo observar o comportamento dos alunos diante do feixe de retas paralelas $y = k$, $k>0$.

A sexta questão é a continuação da anterior e, a partir dos gráficos construídos, o aprendiz deverá perceber importantes teoremas-em-ação sobre as funções do tipo $y = k$ ($k>0$), por exemplo, as retas são paralelas e ficam abaixo do eixo horizontal x.

A sétima é análoga à quinta questão, só que agora o feixe de retas tem números negativos como variação de k. E, finalmente, a oitava questão é a continuação da sétima e, a partir dos gráficos construídos, o aluno deverá perceber invariantes sobre o feixe de retas $y = k$, $k < 0$.

Atividade 12 – Definição de Função

Nas atividades 3 e 5 os alunos estudaram, respectivamente, a noção intuitiva de função e os dois subconceitos de função (domínio e imagem). Nesta atividade, o conceito e os subconceitos de função são retomados, mas numa perspectiva sistematizada, ou seja, é apresentada a sua definição com exemplos e contra-exemplos.

Também é trabalhado com os alunos o teste da reta vertical. Este teste afirma que, se toda reta vertical intercepta o gráfico de uma equação em, no máximo, um ponto, então a equação define y como função de x.

Outra questão desta atividade aborda as funções bijetoras (função um a um). O aluno, ao aplicar o teste da reta horizontal, pode decidir se o gráfico de uma função representa ou não uma função bijetora. Para tanto, toda reta horizontal deverá interceptar o seu gráfico no máximo uma vez.

Além disso, nesta atividade, o estudo do sinal das funções lineares e das funções polinomiais do primeiro grau é retomado numa perspectiva sistematizada. Maiores detalhes sobre isto serão dados mais adiante. São onze questões que compõem esta atividade.

A primeira questão pede que os alunos, dadas quatro representações por diagramas de relações diferentes entre os conjuntos A e B, determinassem quais as que poderiam representar uma função, ou seja, a questão lida com a definição de Dirichlet-Bourbarki.

A segunda questão visa verificar se o aluno apreendeu a técnica de utilizar o teste da reta vertical para saber se o gráfico de uma relação representa ou não uma função. Nesta questão, é especificamente trabalhado o gráfico da relação $f(x) = \sqrt{x - 1}, x \geq 1$.

A terceira questão é análoga a anterior, mas aqui o gráfico da relação analisada é da equação $x^2 + y^2 = 1$.

A quarta questão visa familiarizar o aluno com o ambiente computacional *Int. Diagramas\ Vertical Line Test*. Utilizando o menu *Relation List*, ele deverá escolher uma equação e decidir se seu gráfico representa uma função, recorrendo ao teste da reta vertical.

A quinta questão é análoga à anterior, porém aqui o aluno, ao acionar o menu *Sketch Tool,* deverá desenhar algumas curvas e decidir se elas representam o gráfico de uma função.

A sexta questão objetiva verificar se o aluno apreendeu a técnica de utilizar o teste da reta horizontal para saber se o gráfico de uma função representa ou não uma função um a um (bijetora). Nesta questão, é especificamente trabalhado o gráfico da relação $f(x) = x^2 + 5x + 4$. Já a sétima questão tem como objetivo averiguar a competência do aluno em fazer o estudo do sinal da função y=2x.

A oitava questão consiste em oito itens e nela se trabalha com a função linear y = 4x. No primeiro item, o aluno deverá preencher uma tabela associada a função y = 4x. No segundo item, o aprendiz deverá classificar o ângulo de inclinação (agudo ou obtuso) da função ora em análise e identificar o seu coeficiente angular “a”. Os dois próximos itens tratam da intersecção da reta com o eixo horizontal e vertical. Analisando-os, o aluno deverá perceber que a reta da função linear passa pela origem e, portanto, os valores de x e y são iguais a zero.

O quinto item, por sua vez, visa averiguar a competência do aluno em concluir que a fórmula do zero ou raiz da função linear y = ax (a≠0) é o próprio zero (0). Os dois próximos itens, o quinto e sexto, tratam do estudo do sinal da função y=4x. O último item exige do aluno, baseado nos itens anteriores, resumir as idéias apresentadas e encontrar um método para o estudo do sinal da função f(x) = ax, sendo a>0.

A nona questão é análoga à anterior, mas a função trabalhada aqui é f(x) = -2x. No último item desta questão, da mesma forma que aconteceu no último item da oitava questão, o aprendiz deverá encontrar um método para o estudo do sinal da função linear f(x) = ax, sendo a<0.

A décima questão consiste em oito itens e trabalha com a função f(x) = 2x-1. No primeiro item o aluno deverá preencher uma tabela associada à função y = 2x-1. No segundo item, o aprendiz deverá classificar o ângulo de inclinação (agudo ou obtuso) da função ora em análise e identificar o seu coeficiente angular “a” e seu coeficiente linear “b”.

Os dois próximos itens tratam da intersecção da reta com o eixo horizontal e vertical. Analisando-os, o aluno deverá perceber que a reta da função do primeiro grau f(x) = 2x-1, intercepta o eixo horizontal e vertical, respectivamente, na abscissa x= ½ e ordenada y = -1.

O quinto item, por sua vez, visa averiguar a competência do aluno em concluir que a fórmula do zero ou raiz da função linear y = ax+b (a≠0) é $x = \frac{b}{a}, a \neq 0$. Os dois próximos itens, o sexto e o sétimo, tratam do estudo do sinal da função y=4x. O último item exige do aluno, baseado nos itens anteriores, resumir as idéias apresentadas e encontrar um método para o estudo do sinal da função f(x) = ax+b, sendo a>0.

A décima primeira questão é análoga à anterior, todavia a função aqui trabalhada é f(x) = -2x+1. No último item desta questão, da mesma forma que aconteceu no último da décima questão, o aprendiz deverá encontrar um método para o estudo do sinal da função linear f(x) = ax+b, sendo a<0.

5.5.3 Segunda Avaliação

A segunda avaliação foi um teste escrito individual tendo, como objetivo central, examinar se ocorreu a construção dos principais subconceitos de funções tais como o conjunto domínio, o conjunto imagem, o estudo da variação do sinal de funções, relação entre as grandezas (grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais e nem diretamente nem inversamente). Além disso, visou também avaliar os protótipos e imagens mentais concebidos pelos alunos durante a intervenção metodológica. Compreendeu dez questões que serão detalhadas logo a seguir.

A primeira questão visava verificar o entendimento do aluno sobre o conceito de funções. A segunda questão pedia para o aluno citar cinco exemplos de funções. A idéia maior era verificar quais os principais protótipos criados pelos alunos ao estudar o conceito de função.

A terceira questão objetivava medir a capacidade do aluno em verificar se a equação $5x+4=0$ representa uma função. A quarta questão, por sua vez, exigia do aluno a habilidade de lidar com o gráfico da função afim $f(x) = ax + b$.

A quinta questão tratava dos subconceitos de funções tais como o conjunto domínio e o conjunto imagem. Constava de dois itens. No primeiro item, o aluno tinha que determinar o conjunto imagem de uma função quadrática cujo domínio é um conjunto discreto com cinco elementos. O segundo item exigia do aluno conhecimentos sobre as funções constantes.

A sexta questão constava de cinco itens e visava verificar o comportamento dos alunos diante do estudo do sinal de uma função do primeiro grau $f(x) = ax+b$. Nesta questão, deve-se ressaltar que não foi dada a sua representação algébrica e o aluno tinha que determinar a raiz ou zero real da função através da interpretação gráfica.

A questão sete fazia a interdisciplinaridade com a Física e tinha como meta medir a capacidade do aluno em trabalhar com as grandezas diretamente proporcionais. Constava de quatro itens. No primeiro item, diante de uma tabela que mostra a distância em função do tempo, o aluno tinha que determinar a distância percorrida para um dado tempo específico. O segundo e terceiro itens exigiam a interpretação do aluno quanto à relação entre as duas grandezas (distância e tempo). Para isto, ele deveria responder que as grandezas são diretamente proporcionais e apontar a constante de proporcionalidade. O quarto item objetivava avaliar se o aprendiz tinha a competência de fazer a modelagem dessa situação-problema.

A oitava questão trabalhava com diversos assuntos ligados a função $f(x) = -2x+5$ e envolvia quatro itens. O primeiro item exigia do aluno calcular as imagens de dois números pertencentes ao domínio. O segundo item fazia o caminho inverso, dada uma imagem pertencente ao contradomínio, o aluno tinha calcular o seu valor correspondente x. O terceiro item envolvia conhecimentos sobre o zero ou raiz da função ora em análise e o quarto solicitava o traçado do gráfico da função acima.

A nona questão visava verificar o comportamento dos alunos diante do estudo do sinal da função f(x) = -10x. A décima questão visava verificar se o aluno tinha competência para analisar o conjunto domínio e o conjunto imagem de um gráfico da função.

5.6 Procedimentos de coleta de dados

De acordo com a natureza da questão de investigação e os objetivos da pesquisa, adotou-se, durante a etapa da intervenção metodológica, a postura de **observador participante** conforme conceito elaborado por Becker (1997, p. 84).

> O observador participante coleta dados através de sua participação na vida cotidiana do grupo ou organizado que estuda. Ele observa as pessoas que está estudando para ver as situações com que se deparam normalmente e como se comportam diante delas. Entabula conversação com alguns ou com todos os participantes desta situação e descobre as interpretações que eles têm sobre os acontecimentos que observou. (BECKER, 1997, p.47).

Neste tipo de pesquisa de campo, o pesquisador se integra a um grupo de pessoas para estudá-lo de seu interior, coletando dados quando eles estão conversando, ouvindo, trabalhando, estudando em uma sala de Laboratório de Informática, resolvendo uma situação-problema.

Esses dados são coletados através de conversas, entrevistas e de observações anotadas em um diário de campo, pressupondo um grande envolvimento do pesquisador na situação estudada (FIORENTINI; LORENZATO, 2006).

Na presente pesquisa, quanto à sistemática de coleta de dados, manteve-se um diário de campo onde cada experiência dos alunos foi registrada tanto quanto possível nas suas manifestações concretas. É importante salientar que foram anotados os principais conhecimentos-em-ação (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação) que emergiram na resolução da atividade. Além disso, houve uma descrição detalhada das dificuldades que os alunos tiveram sobre o conteúdo matemático. Nesse sentido, utilizou-se o roteiro do **APÊNDICE N** para orientar as observações.

Como opção metodológica, trabalhou-se com duplas de alunos.

Outro procedimento de coleta de dados utilizado para a compreensão do estudo de funções foi o Método Clínico de Piaget (CARRAHER, 1998), o qual consiste em elucidar, através de perguntas apropriadas, o tipo de raciocínio utilizado pelo aluno ao resolver uma determinada situação-problema. Para acompanhar o curso do pensamento do aluno, o pesquisador deve fazer novas perguntas para esclarecer as respostas anteriores. Além disso, no decorrer das entrevistas, após cada argumentação do aluno, o entrevistador pode lançar mão de contra-sugestões, tendo como fim conhecer mais o pensamento do sujeito e até que ponto a argumentação apresentada resiste a outras alternativas.

6. ANÁLISE E DISCUSSÕES DOS RESULTADOS

Este capítulo se divide em três tópicos. No primeiro tópico, são descritos os resultados obtidos pelos alunos participantes deste estudo, no teste diagnóstico e na atividade 1. No segundo tópico, inicialmente são descritas as categorias encontradas durante cada atividade proposta no estudo. Logo após, exemplificam-se as categorias encontradas com transcrições dos diálogos entre o pesquisador e os alunos entrevistados. Na parte final deste tópico, faz-se uma análise do desempenho dos alunos em cada atividade. No terceiro e último tópico, são detalhados as estratégias e os conceitos em ação lançados pelos estudantes na resolução dos exercícios.

6.1 O estudo de funções mediado pelo Objeto de Aprendizagem *Desafio Funções*

Esta pesquisa foi realizada em uma escola pública de Fortaleza com uma turma de 13 alunos do 1º ano do Ensino Médio. O material usado na pesquisa envolveu uma avaliação realizada antes do OA, um Objeto de Aprendizagem intitulado Desafio Funções, e uma avaliação realizada após o OA. O material foi aplicado na seguinte seqüência: avaliação realizada antes do OA, Objeto de Aprendizagem e avaliação realizada após o AO. Os materiais estão descritos em detalhe a seguir:

Avaliação realizada antes do OA – continha questões com assuntos ligados à interpretação de gráficos tais como: localização de pontos no plano cartesiano, crescimento e decrescimento de funções, a análise de intervalos constantes e a determinação do valor máximo e mínimo da função dentro de um intervalo. Tal atividade foi aplicada antes da exploração do OA Desafio Funções.

Avaliação realizada após o OA – dividida em duas questões. A primeira questão continha seis itens sobre os mesmos assuntos abordados no teste diagnóstico, sendo, aqui, ligados ao contexto de despesas. A segunda questão estava dividida em cinco itens, que assim como a anterior, abordavam os mesmos assuntos do teste diagnóstico, desta vez, ligadas aos conceitos de despesas, receitas e lucros.

Durante a resolução das atividades pelos alunos, o pesquisador realizou entrevistas e observações. As entrevistas foram gravadas e as observações anotadas em um diário de campo, no qual cada experiência dos alunos foi registrada em um maior número possível nas suas manifestações concretas. Os resultados do estudo estão apresentados a seguir.

6.1.1 Resultados

Os resultados foram analisados, usando uma abordagem quantitativa e qualitativa, conforme descritos a seguir.

Análise quantitativa

Antes de se fazer o Teste *t de Student* para dados emparelhados, verificou-se a normalidade dos dados por meio do Teste de Kolmogorov-Smirnov, conforme mostra tabela abaixo.

Tabela 6.1 – Teste Kolmogorov-Smirnov

	Avaliação antes do OA	Avaliação depois do OA
Z de Kolmogorov-Smirnov	0,671	0,531
P	0,759	0,941

Fonte: Pesquisa Direta

Como os resultados da avaliação antes do OA e da avaliação depois do OA apresentaram normalidade, procedeu-se ao o Teste *t de Student* para dados emparelhados.

Tabela 6.2 – Teste t de Student

	Nº. de Alunos	Média	Desvio	Mínimo	Máximo	Percentis		
						25 (Q1)	50 (Mediana)	75 (Q3)
Avaliação antes do AO	13	62,82	20,23640	29,08	100	44,7913	64,75	73,9588
Avaliação depois do OA.	13	78,96	16,152	53	100	67,50	74,50	96,50

Fonte: Pesquisa Direta

Tabela 6.3 – Nível de Significância

	T	p
Par 1 Avaliação antes do OA– Avaliação depois do OA.	-3,718	0,003

Fonte: Pesquisa Direta

Como se observa na tabela 6.3, o resultado do teste implica que houve uma diferença entre as médias das duas avaliações, sendo essa diferença estatisticamente significante (p = 0,003). Os resultados presentes na tabela 6.2 indicam o percentil 75 (Q3) significando dizer que, no grupo avaliado depois do OA, 25% dos alunos acertaram acima de 96,5; enquanto na avaliação realizada antes do Objeto de Aprendizagem, 25% dos alunos acertaram apenas acima de 73,96%. Além disso, observando a figura 5.2, nota-se que na avaliação antes do OA a amplitude de variação das respostas é muito maior do que na avaliação realizada depois do OA.

Na avaliação realizada após a exploração do Objeto de Aprendizagem Desafio Funções (OA DF), a melhoria foi de 25,7% a mais de acerto. Verificou-se, ainda, que esta avaliação apresentou maior homogeneidade nas respostas, pois teve um coeficiente de variação de 20,5% (16,1/78,96), enquanto que a avaliação realizada antes do OA teve um coeficiente de variação de 32,2% (20,23/62,82).

Tais resultados indicam que o uso do OA DF favoreceu o desempenho de alunos na resolução das questões envolvendo localização de pontos no plano cartesiano e análise de variação da função dentro de um intervalo (funções crescentes, decrescentes e constantes).

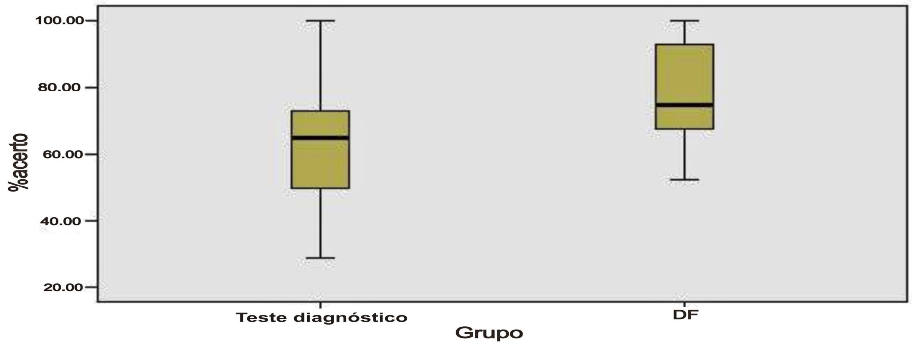


Figura 2 - Amplitude de variação das respostas

Figura 6.1 - Amplitude de Variação das Respostas.

Para corroborar mais esses dados, procedeu-se a análise qualitativa, a qual está descrita a seguir.

Análise qualitativa

Para a análise qualitativa, foram identificadas as dificuldades encontradas pelos alunos na resolução de questões relativas a conhecimentos sobre interpretação gráfica em situações envolvendo lápis e papel. Observou-se também como o uso do OA Desafio Funções auxiliou na superação dessas dificuldades, ao propiciar momentos de negociação entre o professor e os alunos.

Uma das dificuldades encontradas foi a localização de pontos no plano cartesiano, ocorrendo quando o aluno confunde abscissa com ordenada e tem grande dificuldade de localizar um ponto pertencente ao eixo horizontal ou vertical.

O protocolo a seguir[46] ilustra como a produção de significados no contexto do OA, auxiliou uma aluna (Cristina[47]) na superação dessa dificuldade, durante a manipulação do Objeto de Aprendizagem.

[46] As letras "A" e "E" correspondem respectivamente a "Aluno" e "Entrevistador". Transcrevemos as falas dos alunos sem corrigir os erros de português e o uso coloquial das palavras.
[47] Nome fictício.

PROTOCOLO 01

1. E: [...] ao explorar o Objeto de Aprendizagem, a aluna movimentava o mouse horizontalmente e verticalmente, observando respectivamente a variação dinâmica dos meses e dos lucros (ver figura 6.1). Ela já tinha marcado corretamente o mês de maio que correspondia -32000 e agora, o seu objetivo era marcar o lucro do mês de junho que correspondia a R$ -36000. Todavia, após esta exploração preliminar, ela posicionou o mouse fazendo a "mira" posiciona-se no intervalo [30000, 40000].
2. E: - Me diga uma coisa, você não marcou o lucro igual a -32000?
3. A: - Ahã.
4. E: - Agora, você quer marcar o -36000 e está manuseando o mouse de tal forma que a seta está entre 30000 e 40000, por quê?
5. A: - [A aluna ficou calada por um pequeno período de tempo e continuou a manusear o mouse posicionado a "mira" em torno 40000].
6. A: - Mas professor faz é descer?
7. E: - E você pensava como?
8. - Eu marquei o -32000 e achei que o -36000 fazia era subir.
9. E: - Por que você achava que fazia era subir?
10. A: - Não é maior o -36000?
11. E: – Eu sei que você está marcando os lucros. Mas vamos imaginar a seguinte situação. Se você deve 36000 e eu devo 32000, qual dos dois está em mais desvantagem?
12. A: - Como assim?
13. E: – Qual dos dois está perdendo mais? Associe a dívida com os números negativos.
14. A: - O Senhor!
15. E: - Então aonde você vai colocar o -36000?
16. A: - Em baixo do -32000.
17. A: [A partir deste *insight* a aprendiz marcou corretamente a ordenada y = -36000].

No protocolo, observa-se que a aluna ao manipular o Objeto de Aprendizagem Desafio Funções estava com dificuldade de marcar o lucro negativo (linhas 2 a 5). Todavia, a partir de perguntas específicas (linhas 2, 4, 7 e 9) e da constituição de um novo núcleo - uma situação ficcional da "pessoa devedora"- feitas pelo pesquisador, a aluna começou a atribuir significados para a comparação de números inteiros, culminando com a correta localização da ordenada negativa. Assim, temos um novo conhecimento sendo construído (comparação de números inteiros e marcação de lucros negativos em espaços bidimensionais) que na perspectiva de Gimenez e Lins (1997) é uma crença-afirmação. Através de uma situação realista de duas pessoas devedoras, chegamos a um núcleo, um objeto sobre o qual a aluna começou a pensar a respeito e a produzir significados, alcançando uma justificativa: "o professor está perdendo mais porque está devendo mais".

Neste processo dinâmico, houve uma negociação de significados, pois o professor, ao constituir um novo núcleo, abriu um processo de negociações com a aluna, ou seja, ela começou a operar em relação a esse novo núcleo e passou a produzir significados para a tarefa.

6.2 Categorias

Nesta seção, são descritas as categorias que identificam o desempenho dos alunos na resolução das situações-problema. As categorias são:

- Acerto imediato – o aluno, após a leitura da atividade, acerta e, mesmo com os questionamentos do pesquisador, continua acertando.
- Acerto com a intervenção do pesquisador sem a mediação do computador – erra a atividade, mas com a intervenção, começa a entender e a relacionar os dados da atividade, chegando ao seu final com a resposta correta.
- Acerto com a intervenção do pesquisador e a mediação do computador – esta categoria tem as mesmas características da anterior, porém nesta o pesquisador lança mão dos recursos do ambiente computacional.
- Erro contínuo – erra a questão e mesmo com a intervenção, continua errando.

Para ilustrar a categorização do desempenho dos alunos, serão mostradas a seguir algumas transcrições das explicações das respostas, do raciocínio dos alunos e das intervenções do pesquisador.

Acerto Imediato

No teste diagnóstico, a sétima questão consistia em saber se o aluno compreendia o significado do número real ser ou não raiz da equação (solução de uma equação). O próximo protocolo ilustra o entendimento do aluno sobre esta noção. A questão consistia em verificar se o número 2 é raiz da equação $x^2+7x+12=0$.

PROTOCOLO 02

Entrevista:

1. E: Na questão acima, você respondeu que x=2 não era raiz da equação. Como foi que você fez?
2. A: Colocar na equação e se fosse raiz daria zero.
3. E: Existia outra maneira de você responder essa questão? Existe outra maneira de você encontrar essa resposta.
4. A: Usar a fórmula do delta...mas não me lembrava [risos]

Observe que o aluno entende o significado de um número ser raiz de uma equação do segundo grau (linha 2) e, além disso, concebe uma outra alternativa de verificação que seria resolver a equação, utilizando a fórmula de Bhaskara[48] (linha 4).

Deve-se acrescentar que a compreensão do aluno sobre essa noção facilitará a construção da definição do zero ou raiz da função, auxiliando-o a perceber que o gráfico da função intercepta o eixo horizontal justamente nos zeros ou raízes da função.

[48] Fórmula que resolve a equação do segundo grau, a saber, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Acerto com a intervenção do pesquisador sem a mediação do computador

Na transcrição seguinte, inicialmente o aluno Carlos Eduardo tem como foco de atenção a primeira estrutura da definição de função, mas, através dos questionamentos feitos pelo pesquisador, consegue perceber a importância da segunda estrutura (linhas 10 a 23).

PROTOCOLO 03

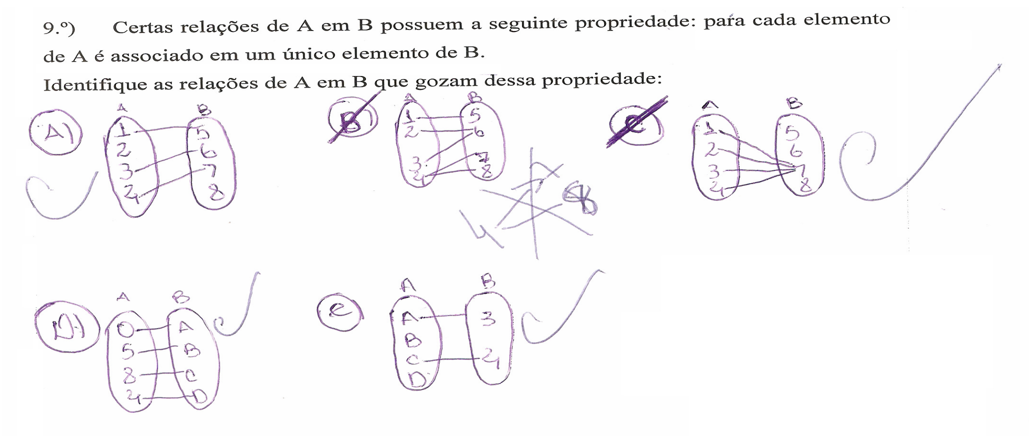


Figura 6.2 – Resolução da nona questão do teste diagnóstico.

1. E: Vamos nos concentrar no item "a". Por que foi que você não marcou?
2. A: O 2 não tem seta para o B.
3. E: Agora vamos analisar o item e. Por que foi que você não marcou o item e?
4. A: [um longo período calado]
5. E: O item "e" não satisfaz a propriedade por quê?
6. A: O "b" e "d" não está associado ao B.
7. E: O item "b" você marcou por quê?
8. A: Há uma ligação dos elementos de A com o de B.
9. E: [o aluno se concentrou na estrutura "para cada elemento de A" e esqueceu-se da estrutura "está associado a um único elemento de B"].
10. E: Você acha que para cada elemento de A estar associado a um único elemento de B? Vá dizendo os elementos e seus associados, assim, por exemplo, o elemento "1" está associado ao 5.
11. A: O 1 com 5, o 2 com 6, 3 com 6 e o 4 com o [uma pequena pausa, talvez percebendo a definição como um todo].

12. E: O elemento “4” pertencente ao conjunto A está associado a quem do B?
13. A: 7 e 8.
14. E: Ok. Esse item satisfaz a propriedade?
15. A: Não!
16. E: Por quê?
17. A: Porque tem mais de um associado ao item “b” [o aprendiz apontou para o elemento 4 e logo em seguida com a caneta percorreu a duas setas partindo do 4].
18. E: Entendi! O item b não satisfaz porque para o elemento “4” existem duas associações, ou seja, têm dois elementos de B que estão associados ao elemento 4.
19. A: Ahã
20. E: Você não marcou o item d? Não corresponde a essa propriedade?
21. A: Cada um está associado a um!
22. E: Nesse caso não corresponde? Nessa frase que você disse “Cada um está associado a um” não corresponde a essa propriedade?
23. A: Corresponde!

<u>Acerto com a intervenção do pesquisador com a mediação do computador</u>

4.º) Agora, utilizando o *Winplot*, trace o gráfico da função g(x)= 0.5x-1 no intervalo [0, 4].

X	y=g(x)
-2	
-0,2	
0	
2	
5	

a. Complete a tabela ao lado. (Sugestão: Menu: Misc/ Tabelas ou Um/Traço).
b. Comparando o gráfico e a tabela da função g(x) = 0.5x-1 {0,4} com os da função f(x) = 0.5x-1 (função trabalhada na terceira questão) quais foram as principais mudanças ocorridas?
c. Com base no gráfico e na tabela, qual seria o intervalo de variação da variável x (Domínio)? E da variável y (Imagem) da função trabalhada nessa questão (g(x)= 0.5x-1 {0,4})?

PROTOCOLO 04

Entrevista.

1. E: [Neste momento, foi traçado o Gráfico da função f(x) = 0.5x-1 no Winplot, e logo em seguida, foi acionado pelo software a sua tabela].

tabela [y = 0.5x-1]

Arquivo Edição Parâmetros Seção Ajuda Fechar

x	y
-5.00000	-3.50000
-4.50000	-3.25000
-4.00000	-3.00000
-3.50000	-2.75000
-3.00000	-2.50000
-2.50000	-2.25000
-2.00000	-2.00000
-1.50000	-1.75000
-1.00000	-1.50000
-0.50000	-1.25000
0.00000	-1.00000
0.50000	-0.75000
1.00000	-0.50000
1.50000	-0.25000
2.00000	0.00000
2.50000	0.25000
3.00000	0.50000
3.50000	0.75000
4.00000	1.00000
4.50000	1.25000
5.00000	1.50000

Figura 6.3 - Tabela da função g(x) = 0,5x-1 obtida pelo Winplot.

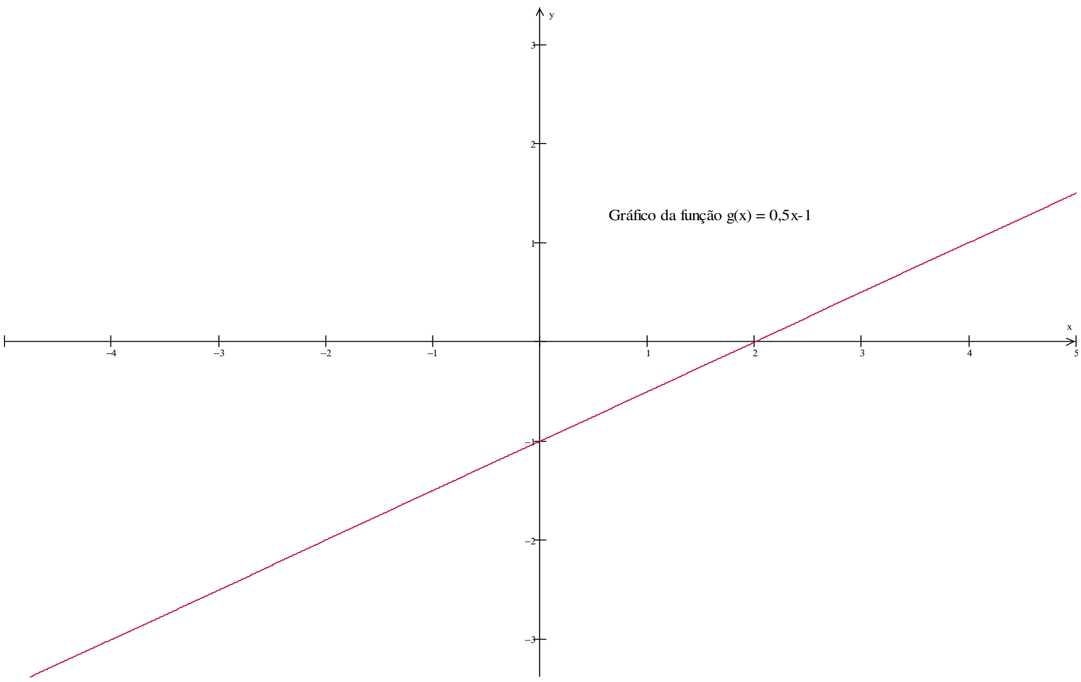


Figura 6.4 – Gráfico da função g(x) = 0,5x-1 obtida pelo Winplot

2. E: Jahnser, observando a tabela o que você está notando?

3. Jahnser: O valor do x está aumentando (apontando para a coluna da esquerda da tabela) e valor do y também (apontando para a coluna da direita da tabela).

4. E: [Neste momento, foi explicado ao aluno que o domínio desta função poderia ser todo o conjunto dos números reais, mas por uma questão de limitação da tela do computador, o intervalo trabalhado era [-5, 5]. Aqui, baseado na tabela, ao ser questionado sobre o valor mínimo e valor máximo que a função poderia assumir neste intervalo, o aluno respondeu corretamente ymin = -3,5 e y max = 1.5. Logo em seguida, foram marcados os seguintes pontos (-5, -3,5) e (5, 1,5) na tela do computador (vide figura abaixo].

5. E: Jahnser, neste caso, analisando o gráfico da função função g(x) = 0,5x-1 restrita ao intervalo [-5, 5], quem seria o conjunto-imagem?

6. A: De -3,5 a 1,5 [apontando como o dedo as ordenadas y=-3,5 e y=1,5 e percorrendo o intervelo [-3,5, 1,5] contido no eixo vertical y].

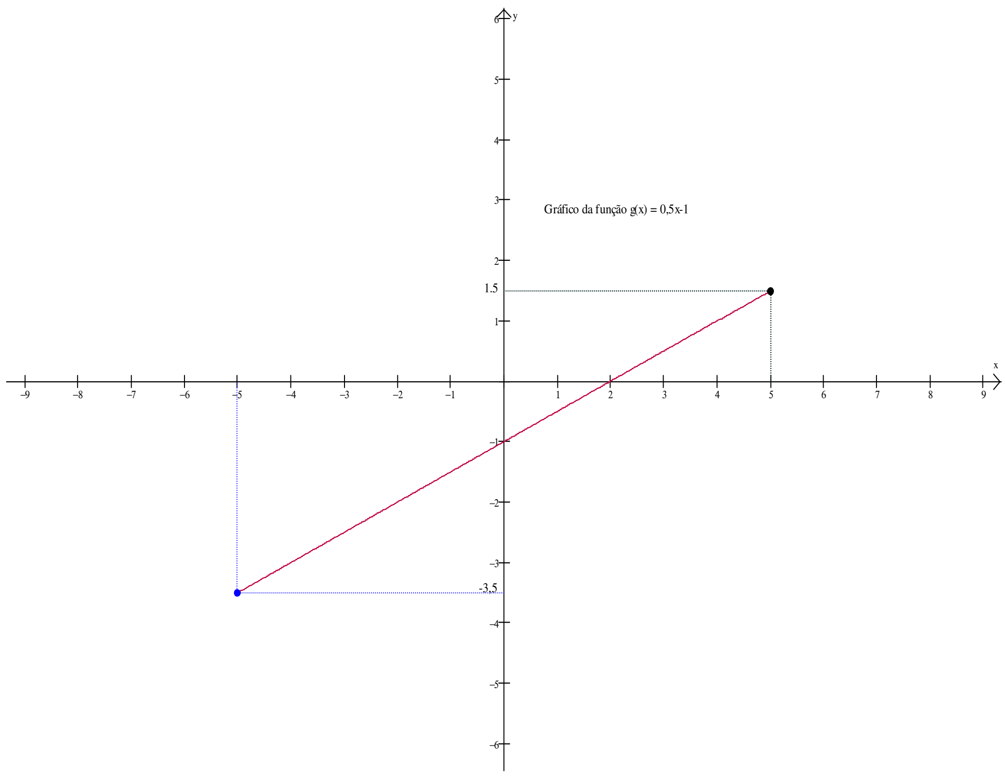


Figura 6.5 - Gráfico da função g(x) = 0,5x -1 restrita no intervalo [-5, 5].

7. E: [Neste momento, foi traçado o Gráfico da função f(x) = 0.5x-1 no Winplot, restrito ao domínio [-2, 2] sem ser mencionada ao aluno esta informação (vide gráfico abaixo].

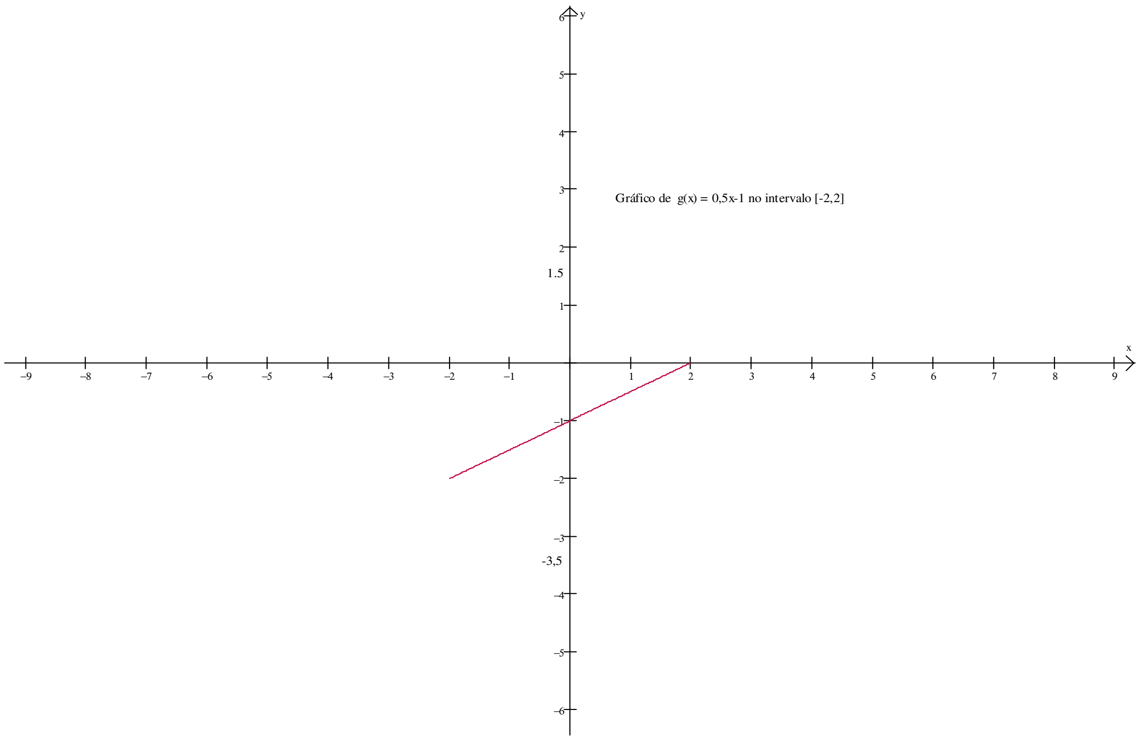


Figura 6.6 – Gráfico da função g(x) = 0,5x – 1 restrita no intervalo [-2, 2].

8. E: Ok! Jahnser! È a mesma função f(x) = 0.5x-1, mas definido num novo intervalo, que intervalo é este?
9. Jahnser: [Silêncio].
10. E: [Neste momento, voltamos para a função trabalhada anteriormente e revisamos o seu domínio e o seu conjunto imagem. Após esta revisão, o gráfico da função g(x) =0,5x-1 no intervalo [-2, 2] foi re-analisada pelo aluno. A sua resposta foi que, neste caso, a função estava restrita ao intervalo [-2, 2]].
11. E: E trabalhando com esta função definida no intervalo [-2, 2], qual será o seu conjunto imagem?
12. Jahnser: Começa do -2 (apontando para a ordenada y=-2) e vai ...até -1 (apontando para a ordenada y=-1) ..hum...não sei...hum até o 2 (apontando para x=2)
13. E: [O aluno acertou o valor mínimo desta função, mas teve dúvidas até onde se estendia, afirmando finalmente que era o dois. Nota-se a confusão do aluno ao achar que x=2 é o valor máximo da função restrita no intervalo trabalhado.

14. E: Mas o número dois não é a abscissa? Como é que uma abscissa pode ser imagem de um número do domínio?

15. Jahnser: [Silêncio].

16. E: [Neste momento, foi solicitado ao aluno que calculasse a imagem de diversos valores entre -1 a 2 na função ora em análise, e logo em seguida, diante dos pontos obtidos, fossem marcados no gráfico. O aluno, utilizando os comandos “UM/TRAÇO”, calculou as imagens dos números -1, 0, 1 e 2. Em seguida, marcou os pontos utilizando os comandos “Equação/Ponto/ (x, y).” (vide figura 6.7)].

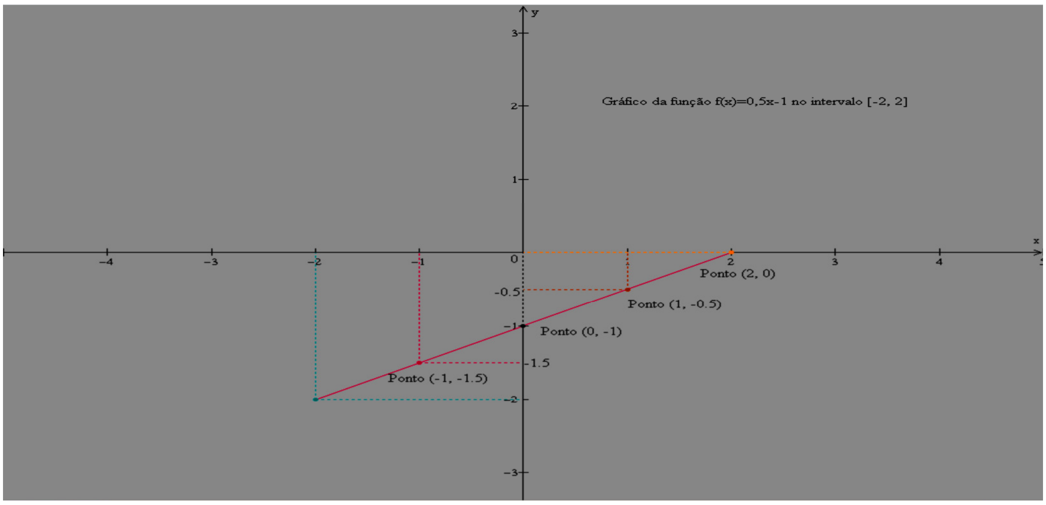


Figura 6.7 – Gráfico da função g(x) = 0,5x-1 no intervalo [-2, 2] com vários pontos marcados.

17. E: E agora, Jahnser, quem você acha que é o conjunto imagem?

18. Jahnser: Vai do -2 (apontando para y=-2) passa pelo -1 (apontando para y=-1) ... hum ... -0,5 (apontando para o y = -0.5) até o -0,5.

19. E: Mas a -0,5 é a imagem de qual valor de x?

20. Jahnser: Do zero! [Apontando para a tabela].

21. E: [Neste momento, houve uma intervenção do pesquisador, mostrando que neste caso, a função trabalhada estaria restrita ao intervalo [-2, 0]].

22. Jahnser: A função está do -2 a 2. Há já sei vai até o zero (apontando para y=0).

23. E: Por quê?

24. Jahnser: a imagem do dois é zero .

25. [Neste momento, sem ser mencionado em qual intervalo estaria restrito a função, foi trabalhada a função f(x) = 1,5x-1 no intervalo [0, 4], (vide figura abaixo). O aluno, após

um pequeno intervalo de tempo pensando, respondeu corretamente o domínio e o conjunto imagem.].

Pelo protocolo acima, observa-se que a mediação do pesquisador auxiliado pelos recursos computacionais do *Winplot* favoreceu a compreensão do aluno sobre o domínio e o conjunto imagem restritos a intervalos contidos no conjunto dos números reais.

De fato, no primeiro momento, trabalhando com as representações gráfica e tabular da função g(x) = 0,5x-1 restrita no intervalo [-5, 5], o aluno conseguiu chegar à resposta correta (linhas 5 e 6). No segundo momento, a intervenção se processou tendo foco de atenção a função g(x) = 0,5x-1 restrita no intervalo [-2, 2]. Utilizando a sua representação gráfica e o cálculo de diversos valores de suas ordenadas, juntamente com alguns questionamentos do pesquisador, o aluno conseguiu corrigir o seu erro e obter corretamente o conjunto imagem da função restrita a um novo intervalo (linhas 7 a 24).

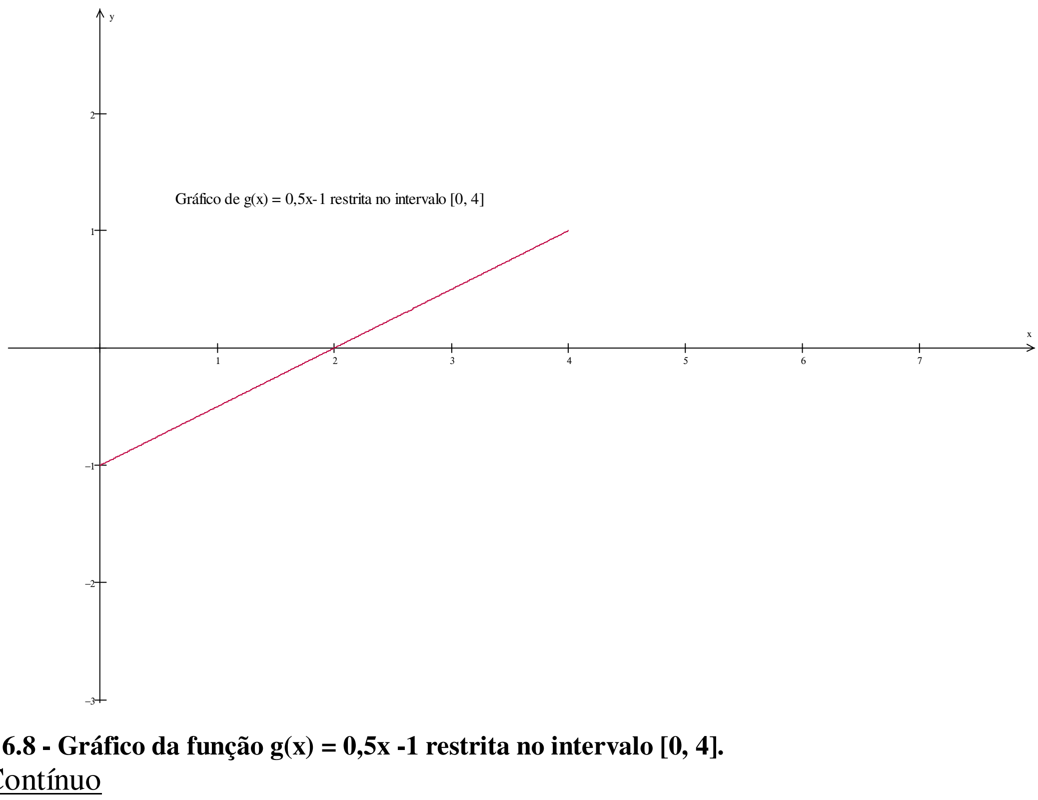


Figura 6.8 - Gráfico da função g(x) = 0,5x -1 restrita no intervalo [0, 4].

Erro Contínuo

Já a aluna Cristina associa a definição de função com a definição de função bijetora, como mostra a entrevista[49]:

PROTOCOLO 05

Entrevista:

1. E: Vamos analisar o item “a”. Por que você não marcou o item “a”?
2. A: Porque 2 não está ligado a B.
3. E: Ok! No item “e” você não marcou, por quê?
4. A: O b e d não têm ligação com B.
5. E: O item “b” não satisfaz! No entanto, todos os elementos de A têm correspondentes! Por que você não marcou?
6. A: Porque tem dois números que está ligados a um só! Do B!
7. E: Muito bem. Por que você não marcou o item c?
8. A: [um longo período calada]
9. A: Porque todos do A está ligado ao 7.
10. E: [Para a aluna, a relação para ser função é necessária que haja uma correspondência biunívoca, ou seja, não pode sobrar nenhum elemento de B. Além disso, todo elemento de B tem que ser imagem de um único elemento de A. Em suma, a aprendiz confunde a definição de função com a da função bijetora].
11. E: Por quê?
12. A: O 5, 6 e 8 não têm relação com o A.
13. E: Mas os elementos 5, 6 e 8 não pertencem ao conjunto B?
14. A: Ahã.
15. E: Eu não estou dizendo que você está certa ou errada. Apenas eu quero saber como foi que você pensou! E também não estou dizendo que você era para marcar o item c. Voltando a falar sobre a questão, você viu que todos os elementos de A tem como imagem o elemento 7 pertencente ao conjunto B. será que nessa situação não irá satisfazer a seguinte propriedade “para cada elemento de A está associado um único elemento de B”?
16. A: [A aluna permaneceu calada por um longo período de tempo].

---

[49] A Questão é a mesma do protoco 03 – página 158.

Observa-se que a aluna assimilou a seguinte estrutura: “para cada elemento de A”, pois não marcou os itens “a” e “e” (linhas 1 a 4). Também a aluna assimilou a seguinte estrutura: “está associado a um único elemento de B”, pois não marcou o item b (linhas 5 e 6). No entanto, para ela, a relação do item “c” não é função, pois sobram elementos de B que não são imagens de algum elemento de A. Parece que a frase “para cada elemento de A está associado a um único elemento de B” faz com que ela pense que não podem sobrar elementos do conjunto de chegada B. Por conseguinte, para ela, a definição de função deve ser interligada com a função bijetora.

6.3 Análise do Desempenho

6.3.1 Teste Diagnóstico

O teste diagnóstico foi aplicado ao grupo dos alunos pesquisados e tinha como objetivo avaliar os conhecimentos prévios necessários à compreensão do conceito de função. Compreendia nove questões. O gráfico 6.1 mostra o desempenho dos alunos, por questão.

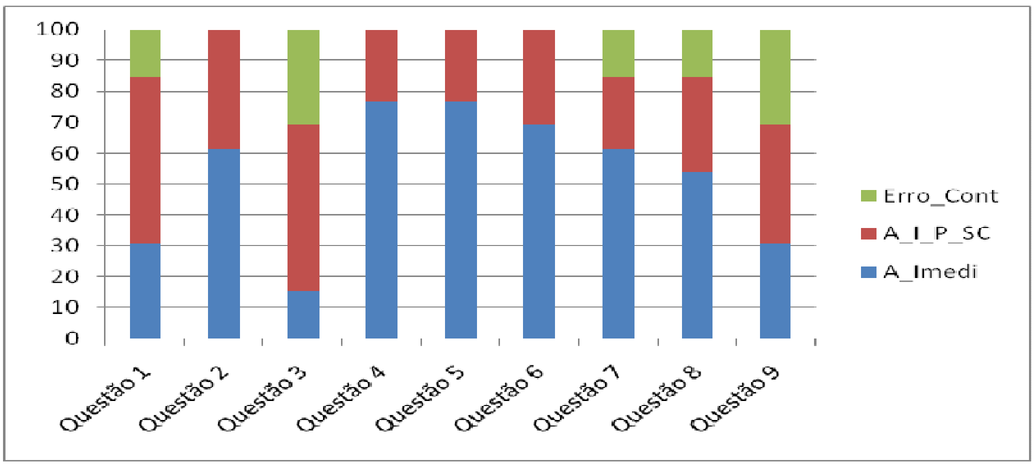


Gráfico 6.1 – Desempenho dos alunos no Teste Diagnóstico, por questão.

As três primeiras questões juntamente com a quinta exigiam do aluno conhecimentos sobre interpretação gráfica.

Por intermédio do gráfico acima, ao comparar as questões desta atividade, observa-se que a primeira e a nona questão tiveram o segundo menor percentual de acerto contínuo. De fato, apenas 30% dos alunos acertaram de imediato a primeira questão e todos eles utilizaram a estratégia do raciocínio inverso[50].

A segunda questão é a continuação da anterior e tem como objetivo avaliar a competência do aluno sobre o estudo da variação da função dentro de um intervalo (função crescente, decrescente ou constante).

Ainda pelo gráfico 6.1, percebe-se que a segunda questão não foi problemática, uma vez que não houve incidência da categoria erro contínuo e apenas 32% dos alunos precisaram da intervenção do pesquisador para resolvê-la corretamente. Os outros 68% dos sujeitos pesquisados acertaram de imediato a questão.

O bom desempenho dos alunos nesta questão deveu-se ao fato de eles utilizarem imagens mentais satisfatórias associadas à análise de gráficos. Assim, por exemplo, um aluno afirmou que houve crescimento populacional no intervalo de1940 a 1970, baseado na imagem mental de que *"houve uma subida do gráfico"*. Já em outro intervalo, respondeu que *"não houve crescimento nem decrescimento porque ficou parado"*.

No primeiro caso, ele poderia ter respondido que de 1940 até 1970 a população aumentou de 1 para 10 milhões. Dessa forma, o seu raciocínio se concentra mais nos pontos pertencentes do gráfico e na noção de subida, descida e ficar parado.

Além disso, pode-se inferir que o bom desempenho nesta questão também se deveu ao fato de a curva estar totalmente contida no primeiro quadrante.

---

[50] Chamamos a estratégia do raciocínio inverso aquela estratégia baseada na localização inicial da ordenada y_1 e a partir daí o aprendiz começar a comparar com as outras ordenadas existentes com suas abscissas correspondentes. O seu objetivo é verificar quais entre estas ordenadas satisfazem as exigências da situação-problema. Para tanto, o aluno pode traçar uma reta $y=y_1$ e logo em seguida verificar quais as ordenadas estão acima desta reta, quais estão abaixo, e finalmente, verificar quais aquelas que pertencem a esta reta.

A terceira questão tratava da localização de pontos no plano cartesiano. Por intermédio do gráfico acima, nota-se o acréscimo da categoria erro contínuo nesta questão. Isto se deve ao fato da grande dificuldade dos alunos em trabalharem com pontos pertencentes ao eixo.

Quando o ponto não é da origem do sistema de eixos cartesianos e pertence ao eixo horizontal, sabemos que a abscissa é diferente de zero e a ordenada é igual a zero. Todavia, apenas quatro alunos conseguiram localizar corretamente este ponto.

Por outro lado, um aluno chegou a cogitar que um ponto pertencente ao eixo horizontal x só possuía uma única coordenada (a abscissa "x"), esquecendo-se que um ponto é representado por um par de coordenadas x e y.

Estas lacunas na formação dos alunos já foram detectadas nos trabalhos de Albuquerque Chaves e Carvalho (2004) quando perceberam a dificuldade dos alunos em entenderem um ponto como um par ordenado. A pesquisa de Rêgo (2000) acusa erros dos aprendizes na determinação dos valores das coordenadas quando o ponto estava na localização sobre os eixos.

No entanto, voltando ao gráfico ora em análise, percebe-se que a soma das duas porcentagens (acerto contínuo e acerto com a intervenção do pesquisador) foi bem maior do que a porcentagem da categoria erro contínuo.

O protocolo a seguir mostra o erro de Cristiane e de como, através da intervenção do pesquisador, reconsiderou a sua concepção sobre pontos pertencentes ao eixo horizontal "x".

PROTOCOLO 06

Solução: A = (4); B=(5); C=(2, 1) e D(-2, -1).

Entrevista:

1. E: No ponto A você colocou quatro. Onde está a outra coordenada?
2. A: [passou um tempo calada].
3. E: Veja! O par ordenado, o nome está dizendo, é um par! Estão se a abscissa é quatro...
4. A: Seria quatro também?!
5. E: [Neste momento, houve uma longa intervenção do pesquisador mostrando que no ponto (4, 4) a abscissa era quatro e a gente caminhava quatro unidades para a direita e a ordenada era quatro e a gente subia, caminhando quatro unidades para cima. Com um raciocínio análogo (recorrendo à idéia de caminhar horizontalmente e verticalmente), foi trabalhada com a aluna a localização dos pontos C=(2, 1) e D(-2, -1). Neste ponto, voltamos a analisar a localização do ponto A].
6. A: O ponto A andou para a direita.
7. E: Ok! Quantas unidades o ponto A andou para a direita?
8. A: Quatro.
9. E: Quantas unidades o ponto A subiu em relação ao eixo horizontal x?
10. A: Não subiu.
11. E: Quantas unidades o ponto A desceu em relação ao eixo x?
12. A: Não desceu.
13. E: Mas cada ponto tem que ter um par ordenado. Um par ordenado é um par! Dois!
14. E: A abscissa, que você disse que andou para direita, é quatro. E a ordenada?
15. A: Vai ser zero!
16. E: Muito bem! A ordenada vai ser zero. Por quê?
17. A: Vai ser zero, nem sobe nem desce!
18. E: Como será o ponto?
19. A: (4, 0).
20. [A partir daqui, a aluna foi questionada sobre o item "b" e respondeu corretamente que a ordenada era cinco (5) por que subia cinco unidades e a abscissa era zero porque, neste caso, *"a gente não anda nem para a direita e nem para a esquerda"*].

Nota-se que o pesquisador auxiliou a aluna a compreender pontos pertencentes aos eixos, recorrendo à imagem mental de caminhar horizontalmente e verticalmente pelos eixos e também de associar a abscissa à idéia de ficar parado, não caminhar nem para a direita nem para a esquerda.

Voltando-se a analisar o gráfico acima, percebe-se que os alunos não tiveram dificuldades com as questões 4 e 5, uma vez que praticamente não precisaram da ajuda do professor e a ocorrência da categoria erro contínuo foi nula.

A questão 4 exige do aluno a resolução de uma equação do 1º grau. Entre os sujeitos pesquisados, cerca de 23% erraram a questão, mas, com a ajuda do professor, conseguiram corrigir o seu erro inicial. Os outros 77% dos alunos acertaram de imediato a questão.

Na questão 5, volta-se a exigir do aluno conhecimentos sobre interpretação gráfica. Por meio do gráfico 6.1, nota-se o ótimo desempenho dos alunos nesta questão, uma vez que 77% dos alunos acertaram de imediato e apenas 23% do total precisaram do auxílio do pesquisador. Ao resolver os itens desta questão, os alunos poderiam lançar mão de estratégias mais fáceis como aquela baseada na estratégia enumerativa (vide seção 6.4.1)[51].

A questão 6 trata das grandezas diretamente proporcionais. Pelo gráfico 6.1, nota-se o bom desempenho dos alunos nesta questão, considerando que 38% dos alunos acertaram de imediato a questão e 62% erraram, mas conseguiram corrigir os seus erros. A grande maioria desses alunos (que precisaram do auxílio do pesquisador) armou corretamente o algoritmo da regra de três, mas errou no final (erro do algoritmo da multiplicação de um número inteiro por um decimal). Além disso, pode-se dizer que esta questão não causou dificuldades aos alunos, pois muitos dos que acertaram de imediato a questão não sabiam ou não se lembravam de usar o algoritmo da regra de três, mas utilizaram estratégias não convencionais[52].

Na questão 7, o aluno tinha que verificar se o número real dado era raiz de uma

---

[51] Chamamos uma estratégia de enumerativa quando envolve um raciocínio baseado na eliminação. O aprendiz, diante de um desafio, procura elencar as diversas opções e verificar quais aquelas que mais se adequam ao contexto da situação-problema.

[52] Neste caso, ao resolver o problema, o aluno pode usar a estratégia de dividir a quantidade total de dinheiro pelo número de unidades comprado; e multiplicar este resultado pelo número de unidades desejado.

equação do segundo grau. Muitos dos alunos que acertaram esta questão utilizaram a estratégia de resolver a equação $x^2+7x+2=0$ pela fórmula de Bháskara e com as raízes obtidas fizeram uma comparação com o valor solicitado.

Os alunos que acertaram com a ajuda do professor não compreendiam inicialmente o significado de um número real ser raiz ou não de uma equação. Com o passar do tempo, a definição formal é esquecida pelo aluno, ficando mais o instrumental de resolução. Nesse sentido, pode-se afirmar que ficou a sua Compreensão Instrumental em detrimento de sua Compreensão Relacional (SKEMP, 1989).

Todavia, através da intervenção do pesquisador, cada aluno acima referido era convidado a substituir as raízes obtidas na equação do 2º grau e verificar se a sentença final obtida era verdadeira. Logo após, esta verificação era feita com o número solicitado. Assim, eles puderam comparar os dois casos e fazer as suas próprias conclusões, chegando à definição de uma raiz de uma equação.

A oitava questão exigia do aluno conhecimentos sobre grandezas inversamente proporcionais. Ainda baseado no gráfico 6.1, percebe-se que os alunos tiveram um bom desempenho nesta questão uma vez que a soma das porcentagens das duas primeiras categorias (acerto imediato e acerto com auxílio do professor) foi maior que a porcentagem da categoria erro contínuo.

Na nona questão, tinha-se como objetivo avaliar a competência do estudante em analisar relações entre dois conjuntos que satisfizessem à definição de Dirichlet. Ainda por intermédio do gráfico 6.1, percebe-se a boa performance dos alunos nesta questão, uma vez que cerca de 70% dos alunos acertaram contra 30% que não conseguiram corrigir os seus erros.

Ao analisar o desempenho dos alunos nesta questão, foram constatadas as suas deficiências em interpretar sentenças que envolvem a idéia de quantificadores. Assim, por exemplo, ao ler a frase *"para cada elemento de A",* o aprendiz não se atenta que todos os elementos desse conjunto, sem exceção, gozam de uma mesma propriedade. Além disso, ora concentra-se na primeira estrutura da definição *“para cada elemento de A”* esquecendo-se da segunda; ora tem como foco de atenção a segunda estrutura *“está associado a um único elemento de B”,* não se lembrando da primeira.

Estes resultados vão ao encontro das pesquisas que afirmam que esta definição causa dificuldades na aprendizagem dos alunos (SIERPINSKA, 1992; VINNER 1992; RÊGO 2000).

No entanto, através da intervenção do pesquisador, os alunos foram paulatinamente tomando consciência de que uma relação para ser função deve satisfazer as duas sentenças *“para cada elemento de A está relacionado a um único elemento de B”* (vide protocolo 03).

6.3.2 Atividade 2[53] – Noção Intuitiva de Funções

Esta atividade explora a noção intuitiva de função. Para tanto, são trabalhados duas questões sobre modelagem (a corrida do táxi com bandeira dois e o total a pagar ao posto de gasolina em função dos litros de combustível comprados). O gráfico 6.2 mostra quantitativamente o desempenho dos alunos por questão.

[53] A atividade 1 foi descrita na seção 5.5.2.2 e analisada na seção 6.1

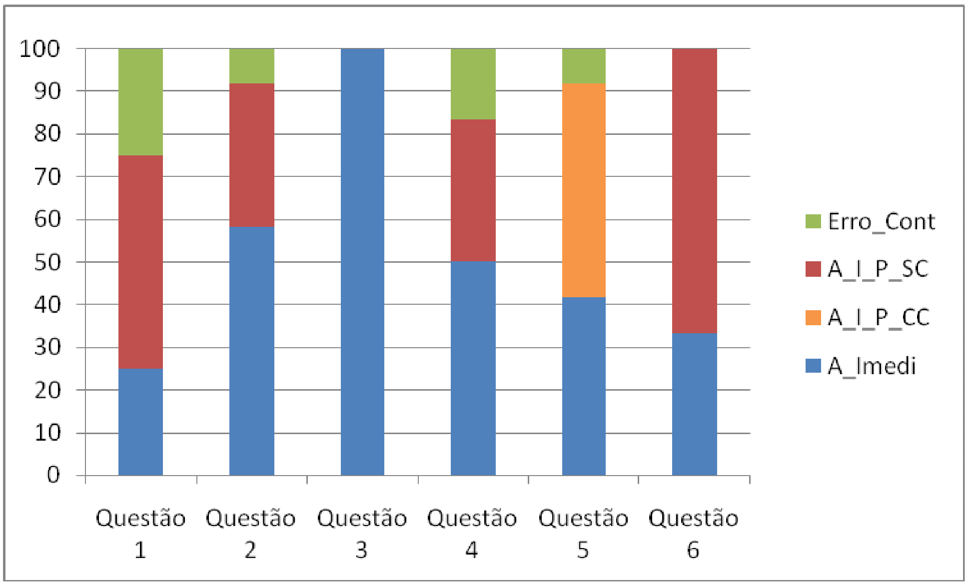


Gráfico 6.2 – Desempenho dos alunos na Atividade 2, por questão.

Das seis questões da segunda atividade, a primeira questão pode ser considerada a mais difícil, pois foi aquela que apresentou menor índice de ocorrências da categoria acerto Contínuo e um maior percentual da categoria erro contínuo. Nesta questão, procurou-se medir a competência do estudante em modelar o problema do taxista com a taxa da bandeira dois.

Os alunos sentiram dificuldade de encontrar uma regularidade neste problema, não percebendo inicialmente que um dado constante desta situação real era o preço que representava a taxa da bandeira dois e que a variável era o número de quilômetros rodados. Todavia, com intervenções direcionadas ao entendimento dos dados da questão, o pesquisador fez os alunos analisar a situação e perceber quais os dados eram constantes e quais eram variáveis.

O próximo protocolo mostra a intervenção do pesquisador que auxilia a aluna a compreender a modelagem do problema do taxista.

PROTOCOLO 07

Tente escrever uma expressão que relacione o total a pagar em função do número de quilômetros rodados.

1 - Um taxista recebe R$ 2,00 pela bandeirada e mais R$ 1,00 por quilômetro rodado.

a. Baseado nessas informações, preencha a tabela abaixo:

Número de quilômetros rodados	Preço a pagar ao taxista
1 km R$ 1,00	R$ 3,00
2 kms R$ 2,00	R$ 4,00
3 kms R$ 3,00	R$ 5,00
4 kms R$ 4,00	R$ 6,00
5 kms R$ 5,00	R$ 7,00
6 km R$ 6,00	R$ 8,00
7 kms R$ 7,00	R$ 9,00
8 km R$ 8,00	R$ 10,00

$x = 2 + x$

Figura 6.9 - Preenchimento da tabela feita pela aluna[54]

1. A: [aluna leu e releu a questão e passou um pequeno período em silêncio].
2. A: Não estou entendendo!
3. E: Tente escrever uma fórmula que envolva o total a pagar em função dos quilômetros rodados.
4. A: [A Aluna manteve-se calada por um pequeno período de tempo].
5. E: Quanto você paga ao motorista do táxi por 1 km rodado?
6. A: R$ 3,00.
7. E: Quanto você paga ao motorista do táxi por 2 km rodados?
8. A: R$ 4,00.
9. E: Tente expressar cada resultado obtido como uma soma de duas parcelas! Ok?
10. A: Continuo a não entender!
11. E: Uma soma de duas parcelas em que uma dela é a bandeirada!
12. E: Aluna: Não!
13. E: Veja!

$1 \rightarrow 2+1=3$

$2 \rightarrow 2+2=4$

$3 \rightarrow 2+3=5$

$4 \rightarrow 2+4=6$

14. E: O que está se repetindo?

[54] Observe a expressão idealizada por ela que expressa o total a pagar em função dos números de quilômetros rodados (abaixo da tabela, canto direito).

15. A: O 2.
16. E: E o dois representa o quê?
17. A: A bandeirada
18. E: Quando você anda 3 quilômetros você paga 2+3=5 ok?
19. A: Sim.
20. E: Você tem uma soma de duas parcelas que resulta 5. O que significa a parcela 3?
21. A: 3 vezes 1.
22. E: OK! Você pode escrever 2+3x1=5.
23. E: Quando você anda 4 quilômetros você paga 2+4=6 ok?
24. E: Você tem uma soma de duas parcelas que resultam 6. O que significa a parcela 4?
25. A: 4 vezes 1.
26. E: Agora tente escrever uma expressão que relacione o total a pagar com o número de quilômetros rodados.
27. A: [A aluna leu e releu a questão e passou um pequeno período em silêncio]
28. E: Represente a variável x como o número de quilômetros rodados.
29. A: Seria x = 2+x.
30. E: Quanto você pagaria por 4 quilômetros rodados?
31. A: 2+4 é seis
32. E: Corresponde com o valor da tabela?
33. A: Ahã!

Inicialmente, deve-se ressaltar que a aluna preencheu corretamente a tabela. No entanto, teve dificuldade em fazer a modelagem do problema (linhas 1 a 12). Após a intervenção do pesquisador, a aluna começa a delinear a constante da variável (linhas 15, 17, 21, 25). Finalmente, na linha 29, ela propõe e escreve a expressão x = 2+x. Veja que, para a aluna, a variável que representa o tanto a pagar é o mesmo da variável dos quilômetros rodados! Após uma longa discussão, foi sugerido usar uma alternativa para a outra variável.

A segunda questão tratava do problema do posto de gasolina. Para resolvê-la, o aluno tinha que perceber uma dependência causal entre as variáveis (relação entre a variável dependente e independente). Neste caso, a variável dependente era o total a pagar ao frentista do posto e a variável independente era o total de litros colocados no tanque de gasolina. Observando o gráfico 5.2 e fazendo uma comparação entre as duas primeiras questões, percebe-se uma diminuição no índice da categoria erro contínuo na questão ora em análise.

Como na questão anterior os alunos já tinham discutido com o pesquisador sobre a modelagem da corrida do táxi com bandeira dois, pode-se concluir que houve um amadurecimento deles na construção desse conceito, não necessitando de maiores esclarecimentos sobre a identificação da variável e da função que expressa o total a pagar em função do número de litros comprados. Além disso, o pesquisador interveio na zona de desenvolvimento proximal dos alunos, fazendo com que eles interligassem os seus conhecimentos prévios com o novo.

Essa ligação era feita, em alguns momentos, através da releitura feita pelos alunos do texto introdutório (organizadores prévios). Nesse processo dinâmico, o aluno revia certas situações do cotidiano, encontrando grandezas as quais uma estava em função da outra. Por conseguinte, o seu entendimento sobre a noção da dependência entre variáveis facilitava a compreensão da idéia intuitiva de função.

A terceira questão ainda tratava da situação real do posto de gasolina. O estudante tinha que calcular quanto pagaria por 18 litros e por 30 litros (o total que o tanque do carro pode comportar). Ainda pelo gráfico 5.2, nota-se o ótimo desempenho dos alunos nesta questão. Pode-se inferir que, pelo fato de tratar de cálculos específicos e não ser exigida a modelagem do problema, os alunos não tiveram dificuldades nesta questão.

A quarta questão envolvia três (3) itens, todos vinculados ao problema do posto de gasolina. Auxiliado pelo computador, o primeiro item exige do aluno o preenchimento de uma tabela que representava a função $y=1,5x$. O item dois é baseado na tabela preenchida. Neste caso, os estudantes tinham que perceber que a variável independente x não pode assumir valores negativos porque representa a quantidade de litros. O terceiro e último item requer do aprendiz a lembrança de que o tanque do carro pode comportar 30 litros. Dessa forma, colocar 37 litros no tanque não faz sentido.

Dos alunos pesquisados, 50% dos alunos acertaram de imediato a questão e 32%

dos alunos erraram, mas conseguiram consertar o seu erro. Dentre estes, três alunos conseguiram entender a questão a partir da intervenção do pesquisador, o qual incentivou os alunos a relacionar o enunciado da situação-problema com os dados numéricos obtidos. O outro aluno, ao ser questionado pelo pesquisador, disse que se distraiu não dando a resposta correta. Este fato foi corroborado durante a entrevista feita com ele. Os outros 18% dos aprendizes erraram e, mesmo com a intervenção, não conseguiram consertar os seus erros. Eles continuaram dando como resposta as informações encontradas nas tabelas sem apresentar nenhuma relação lógica com o problema.

Tendo com referencial ainda a equação y = 1,5x e auxiliado pelo *Graphámatica*, a questão cinco exigia que o aluno completasse corretamente a tabela. Voltando a analisar o gráfico acima e, tendo como foco de atenção a quinta questão, nota-se o aumento da categoria acerto com intervenção do pesquisador e a mediação do computador. Isto aconteceu com 50% dos alunos que erraram inicialmente, mas conseguiram consertar o seu erro.

No ambiente computacional *Graphmática*, após o usuário entrar com a equação y=1,5x e acionar os comandos Ferramenta/Calcular, é dada a opção de calcular a imagem da variável dependente y desde que seja escrito o valor da variável independente x e vice-versa (vide figura abaixo). Diante de observações participantes, foi observada a dificuldade dos alunos de entenderem os resultados obtidos no computador, ou seja, quando atribuíam o valor de x não percebiam que o valor esperado era y e vice-versa. Principalmente esta última possibilidade. Assim, por exemplo, um aluno ao preencher o valor de y = 72 não previu que o computador forneceria o valor de x.

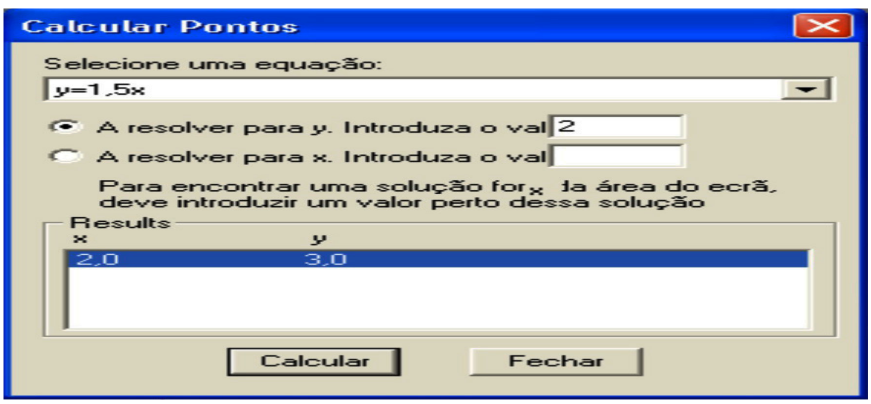


Figura 6.10 - Comando "Calcular Pontos" do Ambiente Computacional *Graphmática*.

Nesse sentido, pode-se inferir que o aluno em sala de aula e em outros contextos de aprendizagem de Matemática é mais solicitado para calcular a imagem da variável "x". O inverso é muito pouco exigido, ou seja, dado o valor de y e a lei algébrica da função, determinar o valor da variável "x" correspondente.

Todavia, através da intervenção do pesquisador, eles começaram a diferenciar um valor de outro e conseguiram consertar o seu erro. O pesquisador sempre frisava que, ao atribuir no ambiente computacional o valor de x, o aprendiz entrava com o dado referente à quantidade de gasolina e esperaria o computador calcular o total a pagar que, neste caso, era o valor de y. Um raciocínio análogo era feito com a entrada inicial y.

Na questão 6, pretendeu-se avaliar a habilidade do aluno de perceber que o dono do carro poderá pagar ao frentista do carro no máximo a quantia de R$ 75,00 uma vez que corresponde ao total de litros do seu carro. Por intermédio do gráfico 6.2, percebe-se que a esta questão não foi problemática ao aluno, pois não houve a ocorrência da categoria erro contínuo.

Como na questão anterior os alunos já tinham discutido com o pesquisador sobre os comandos do ambiente computacional e a compreensão do enunciado da questão, relacionando os cálculos obtidos com uma releitura mais significativa da situação-problema, o pesquisador não precisou de maiores esforços para que os alunos tivessem uma compreensão mais relacional.

6.3.3 Atividade 3 - Noções geométricas

A finalidade desta atividade é fazer uma revisão dos principais conhecimentos geométricos necessários à compreensão do conceito de função. Muitas destas noções estão vinculadas a situações físicas do movimento retilíneo uniforme. Também teve como objetivo mostrar ao estudante alguns comandos do *Winplot*. O gráfico 6.3 mostra quantitativamente o desempenho dos alunos por questão.

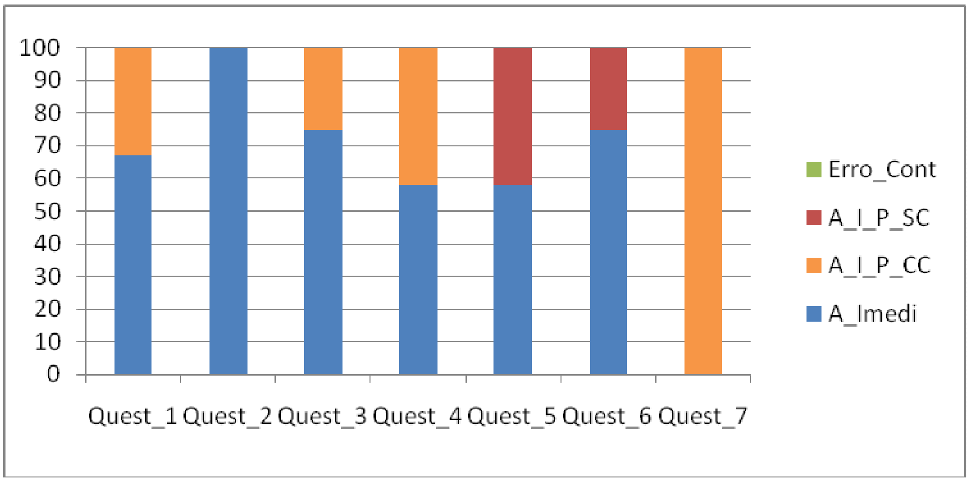


Gráfico 6.3 - Desempenho dos alunos na Atividade 3, por questão.

A primeira questão tem como objetivo introduzir ou revisar o conceito de retas concorrentes e de familiarizar o aluno com as ferramentas do *Winplot*. Pelo gráfico anterior, observa-se o bom desempenho dos alunos, uma vez que não houve a ocorrência da categoria erro contínuo. Além disso, a intervenção maior se efetuou mais no esclarecimento dos principais comandos do ambiente computacional.

As duas questões seguintes têm o mesmo objetivo da questão anterior, sendo que nelas são explorados os conceitos de retas paralelas e coincidentes. Como na introdução da atividade e na resolução da questão anterior os alunos já tinham se introduzido nos conceitos físicos e na posição das retas e, além disso, estavam mais inteirados com as atividades porque houve o auxílio do pesquisador nesses dois momentos, nota-se o aumento de desempenho nestas duas questões.

Na quarta questão, tem-se a idéia de introduzir ou revisar o conceito de retas perpendiculares e familiarizar o estudante como o comando do *Winplot* para determinar o ângulo formado pelas duas retas. Ainda pelo gráfico 6.3, comparando esta questão com as questões anteriores, nota-se o aumento da segunda categoria (acerto com a intervenção do pesquisador e mediação do computador). A intervenção maior do pesquisador foi esclarecer as principais dúvidas dos alunos no tocante à interpretação das principais informações contidas na caixa de diálogo "interseção" (vide figura a seguir).

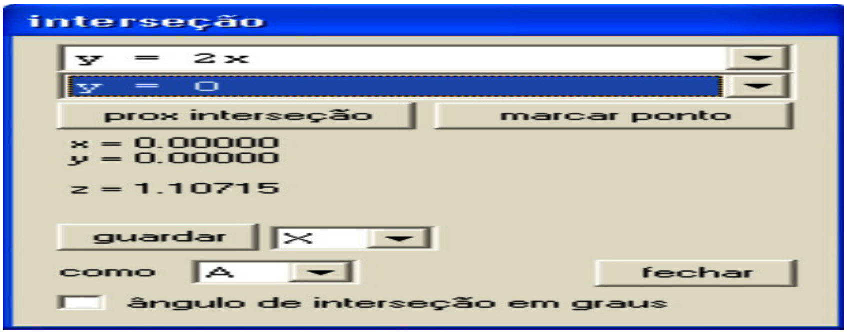


Figura 6.11 – Comando "Interseção" do ambiente computacional Winplot.

A quinta questão envolve quatro itens, todos ligados a conteúdos da Geometria. O primeiro item visa verificar a capacidade do aluno em perceber as principais propriedades de um segmento paralelo ao eixo horizontal. O segundo e terceiro itens objetivam familiarizar os alunos com os comandos do *Winplot* para a construção de segmentos e projeções de pontos sobre os eixos. O quarto envolve a competência do aluno em perceber as principais propriedades de um segmento paralelo ao eixo vertical. Apesar de a atividade ter sido feita no computador, a mediação foi feita sem ele.

A sexta questão não foi problemática uma vez que só 25% dos estudantes necessitaram do auxílio do pesquisador para consertar o seu erro. Esta questão consistia em analisar como variam as coordenadas de um ponto, quando ele caminha sobre uma curva.

Pelo gráfico 5.3, nota-se a ausência da categoria acerto imediato e o aumento do número de ocorrências da segunda categoria (acerto com intervenção do pesquisador e a mediação do computador) na sétima questão. Nessa questão, avaliou-se a capacidade do aluno em trabalhar com equivalência de equações.

Uns alunos não responderam a questão 7 e outros não deram uma justificativa coerente com a sua resposta (vide protocolo 08). Na fase da intervenção, o pesquisador lançou mão de vários recursos computacionais (obtenção de vários pontos, traçado de retas e trabalhar com várias representações). Além disso, o próprio comando do *Winplot* (Equação/Explícita e Equação/Implícita) fez com que houvesse uma discussão sobre os termos variável explícita e implícita de uma equação. O próximo protocolo ilustra todas estas etapas de intervenção.

PROTOCOLO 08

2. Utilizando o WINPLOT, trace o gráfico das seguintes equações:

   2x+y+1= 0

   Procedimento: Click no menu Equação/ Implícita

   y = -2x-1

   c) Existe diferença entre as equações 2x+y+1=0 e y = -2x-1? Justifique a sua resposta

   Emerson e Bruna

   Existe diferença entre as equações 2x+y+1=0 e y = -2x-1? Justifique a sua resposta

   R: Sim, pois são iguais

Entrevista:

1. E: [No Winplot, foram plotados os gráficos das funções y=-2x-1 e 2x+y+1=0]
2. E: O que vocês estão percebendo?
3. Bruna: Só apareceu o gráfico da primeira, professor.
4. E: [Neste momento, foi sugerido que os alunos determinassem um ponto qualquer pertencente à equação y=-2x-1, a aluna Bruna sugeriu o valor de x =2 e calculou o y correspondente usando o comando Um/Traço/. O valor de y obtido foi -5. Logo em seguida, Emerson trabalhou com a função 2x+y=1=0 e encontrou a ordenada y = -5 para a mesma abscissa x=2].

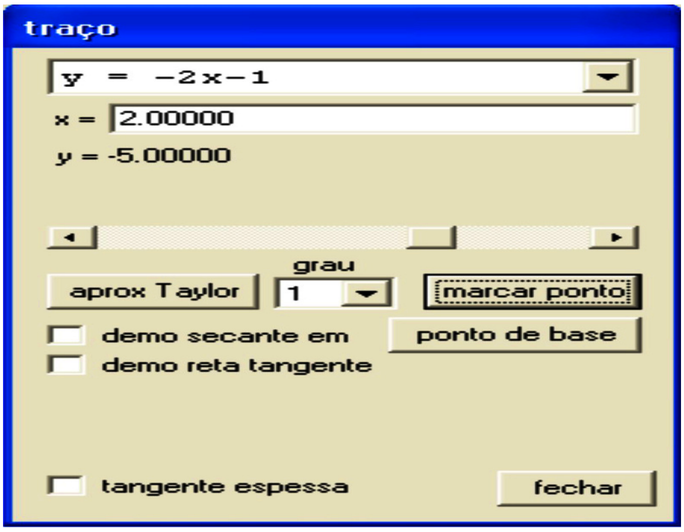


Figura 6.12 – Comando "Traço" do Winplot para cálculor o valor de y dado um valor para x.

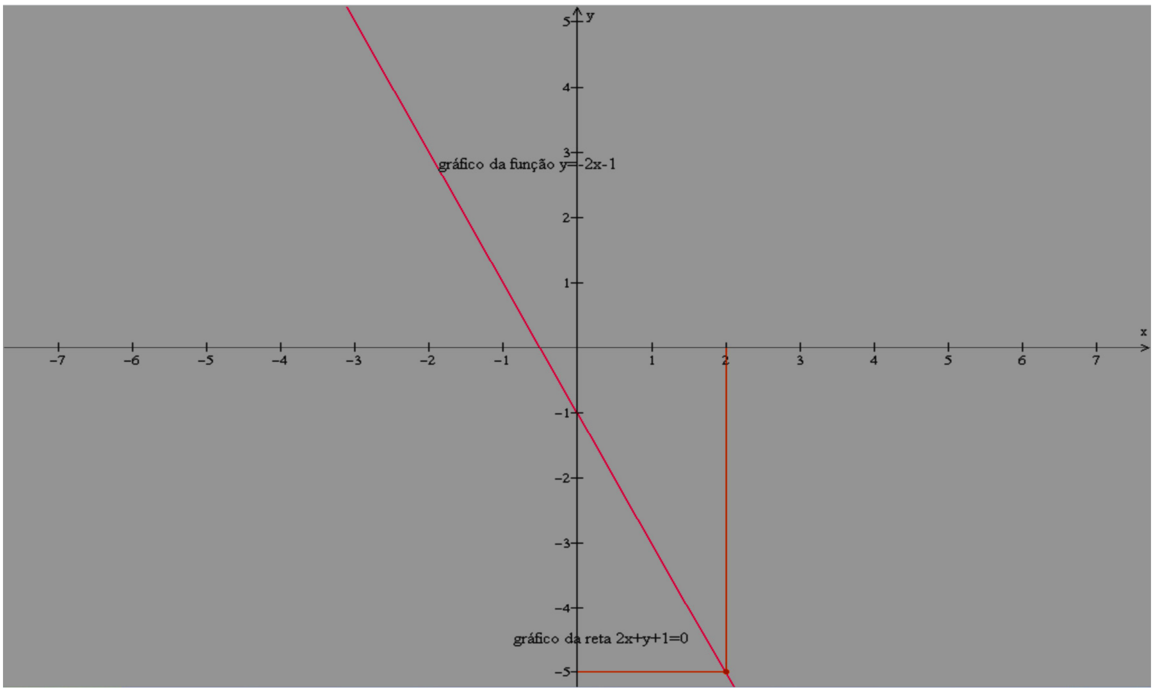


Figura 6.13 – Gráfico da função 2x+y+1=0.

5. E: O que você está percebendo Bruna?
6. Bruna: O mesmo número [apontando para o ponto (2, -5) do gráfico acima].
7. E: Ok! O ponto (2, -5) pertence às duas equações. Vamos marcar mais pontos. [Os alunos marcaram mais pontos e perceberam que eram comuns aos dois gráficos].
8. E: O que você está desconfiando Emerson?
9. Emerson: Esta duas equações são iguais.

10. E: Por que no Winplot o comando para plotar a equação y=-2x-1 é diferente do comando para traçar o gráfico da função 2x+y+1=0.
11. Emerson e Bruna: [silêncio].
12. E: Por que para traçar a reta y =-2x-1 vocês utilizaram o comando Equação/Explícita?
13. E: Emerson e Bruna [silêncio].
14. E: [Aqui, houve uma longa intervenção do pesquisador mostrando que a equação 2x+y+1=0 era equivalente a y=-2x-1. Também foi discutido que a equação y=-2x-1 é chamada de explícita porque a variável y está em função da variável x e a equação 2x+y+1=0 é chamada de equação implícita porque não existe uma clareza em relação à dependência entre as variáveis. Além disso, houve uma revisão sobre a posição das retas (retas concorrentes, paralelas e coincidentes (revisão dos conteúdos].
15. E: Vocês podiam dizer por que y=-2x-1 é considerada uma equação explícita?
16. Emerson: é quando aparece o y sozinho no primeiro lado da equação.
17. E: Bruna, por que a equação 2x+y+1=0 é implícita?
18. Bruna: É como o Emerson falou, professor! O y=-2x-1 é explícita porque o y está sozinho no primeiro lado e o 2x+y+1=0 é implícita porque o x e y estão juntos no primeiro lado.
19. E: Qual seria a posição relativa entre estas duas retas?
20. Bruna: Coincidentes.
21. E: Por quê?
22. Bruna: Porque um está em cima da outra.
23. E: Por que Emerson, estas retas são coincidentes?
24. Emerson: Os pontos de uma é também da outra.
25. [Neste momento, foi ressaltado que duas retas coincidentes possuem infinitos pontos em comum. Logo após, os alunos reavaliaram a sua resposta e disseram que as duas equações eram equivalentes porque possuíam os mesmos pontos e as duas retas eram coincidentes.].

Nota-se que, através do computador, a dupla percebeu que as duas retas continham os mesmos pontos (linhas 4 a 7). A partir desta constatação, o porta-voz da dupla, Emerson, concluiu que as retas era iguais (linha 9). Em outro momento, a dupla percebeu que as retas eram coincidentes (linhas 19 a 24).

Pode-se inferir que, mediada pelo computador, a dupla teve uma aprendizagem significativa, uma vez que conectaram os seus conhecimentos prévios (pontos pertencentes a uma reta e posição relativa de retas) a um novo conhecimento (as retas são iguais porque possuem os mesmos pontos e são coincidentes).

Deve-se ressaltar que a intervenção apresentada no protocolo acima poderia ter sido feita sem a mediação do computador, utilizando atividades com lápis e papel. Com efeito, através de manipulações algébricas, os alunos poderiam perceber que as equações $2x+y+1 = 0$ e $y=2x-1$ eram equivalentes. Contudo, através do *Winplot*, pode-se trabalhar com as posições relativas das duas retas e as construções de diversos pontos, evitando uma sobrecarga de cálculos. Assim, a intervenção foi mediada por duas representações de funções, a saber, a gráfica e a algébrica. Além disso, os comandos do *software* inspiraram uma discussão sobre as palavras "explícita" e "implícita" (linhas 10 a 18).

6.3.4 Atividade 4 – O conjunto domínio e o conjunto imagem

Esta atividade consiste em seis questões e objetiva trabalhar com os dois subconceitos de função: o conjunto domínio e o conjunto imagem. O gráfico 6.4 mostra quantitativamente o desempenho dos alunos por questão.

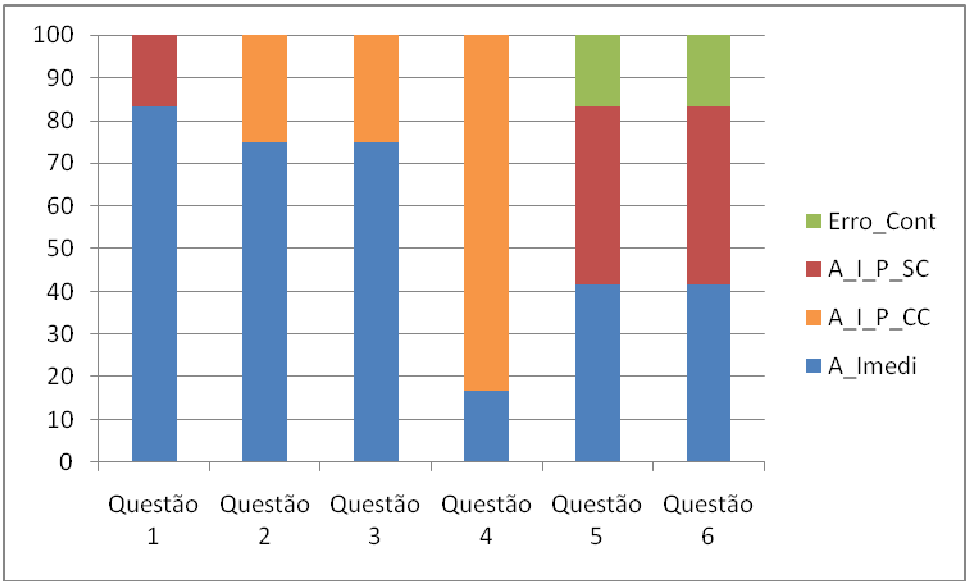


Gráfico 6.4 – Desempenho dos alunos na Atividade 4, por questão.

A primeira questão envolve três itens e visa medir a habilidade do estudante em determinar o conjunto imagem de uma função definida em um conjunto discreto e finito. Para cada item é dada a lei algébrica da função.

Pelo gráfico acima, nota-se o ótimo desempenho dos alunos uma vez que não houve a ocorrência da categoria erro contínuo e o percentual de acertos contínuos foi maior do que o percentual de acerto com auxílio do pesquisador.

Pode-se inferir que o alto índice de acerto dos alunos deve-se a dois fatores. O primeiro está ligado ao texto introdutório, no qual é mostrado o problema contextualizado da venda de pães de uma padaria. No decorrer do texto, através de cálculos numéricos, é explicado que o total a pagar depende do número de carioquinhas comprados e é mostrado, no final, como se determina o conjunto domínio e o conjunto imagem. Assim, ao resolver a questão ora em análise, o aluno era sempre incentivado pelo pesquisador a voltar à leitura do texto para tirar eventuais dúvidas.

Outro fator seria a grande familiaridade do aluno em sala de aula a trabalhar com substituições em expressões algébricas. Em nossa pesquisa, através de observações participantes, foi verificada a grande destreza do aluno em, diante de uma lei de função, calcular corretamente a imagem de um determinado valor do domínio.

A segunda questão exigia do aprendiz a habilidade de marcar os pontos obtidos na questão anterior no ambiente computacional *Winplot*. Nesta questão, 75% dos alunos acertaram de imediato a questão e apenas 25% erraram, mas no final conseguiram consertar os seus erros. O auxílio maior do pesquisador foi esclarecer o que o enunciado da questão queria e os principais comandos para efetuar esta atividade.

A terceira questão trabalhava com a função f(x) = 0.5x-1 e envolvia dois itens. O primeiro item exigia do aluno o preenchimento da tabela. O segundo item, por sua vez, questionava se esta equação interceptava a origem e pedia a justificativa da resposta. Sobre o primeiro item, todos os alunos completaram corretamente a tabela. No segundo item, por sua vez, três alunos deixaram em branco, mas com o auxílio do pesquisador conseguiram responder. No entanto, tiveram dificuldades de esboçar uma justificativa para as suas respostas. Nesse momento, através da sugestão do pesquisador, voltou-se ao item “a” para analisar a tabela. Logo em seguida, foi marcado no *Winplot* cada ponto obtido na tabela como mostra a figura abaixo.

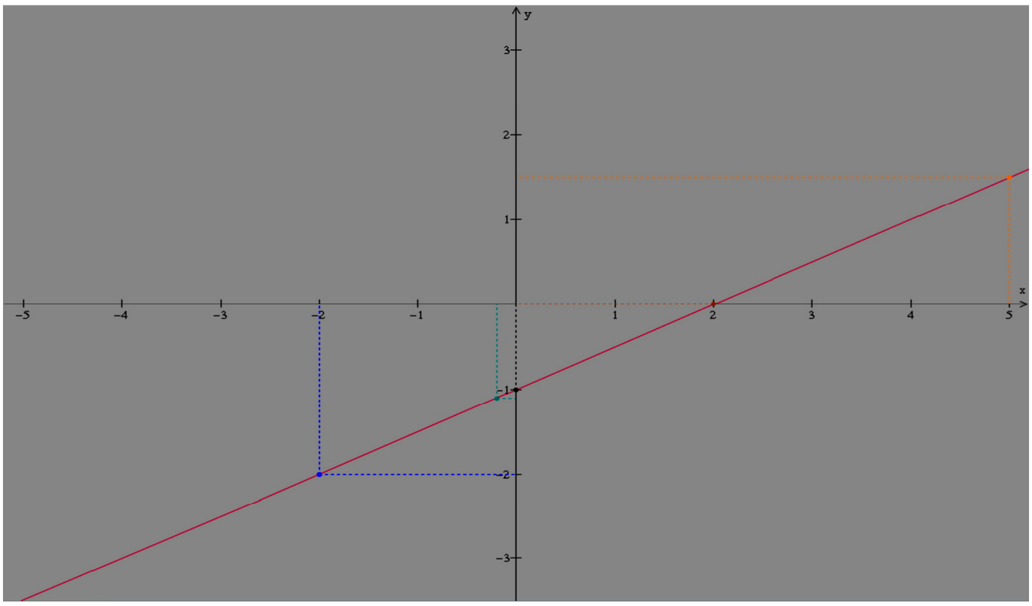


Figura 6.14 - Vários pontos marcados pelo aluno no ambiente computacional *Winplot*.

Ao final, diante das duas representações da função (a tabular e a algébrica), dois alunos justificaram que a reta da função f(x) = 0.5x -1 não interceptava a origem porque passava pelo ponto (0, -1). O outro aluno afirmou que não interceptava a origem porque passava pelo ponto (2, 0).

Deve-se ressaltar que ao preencherem a tabela no item "a" os alunos não perceberam inicialmente estes invariantes. Foi só depois de re-analisarem a tabela juntamente com os pontos plotados no *Winplot* que começaram a percebê-las.

Voltando a análise o gráfico 6.4, nota-se o aumento da segunda categoria (acerto com a intervenção do pesquisador e a mediação do computador) na quarta questão.

Esta questão visa medir a habilidade do aluno em analisar a função f(x) = 0,5x-1 em diversos domínios no ambiente computacional Winplot. A idéia inicial é a de trabalhar com esta função no intervalo padrão do programa (x min = -5 e x Max= +5), sendo que o gráfico da função ora em análise ocupa toda a largura de sua tela. Logo em seguida, o aluno é incentivado a trabalhar com o domínio do gráfico mais restrito (Edição/ x min e x Max/ travar intervalo). Assim, por exemplo, foi trabalhado com o aluno a análise do gráfico da função (domínio e imagem) nos intervalos [-2, 2] e [0, 4] (vide figuras 6.15 e 6.16).

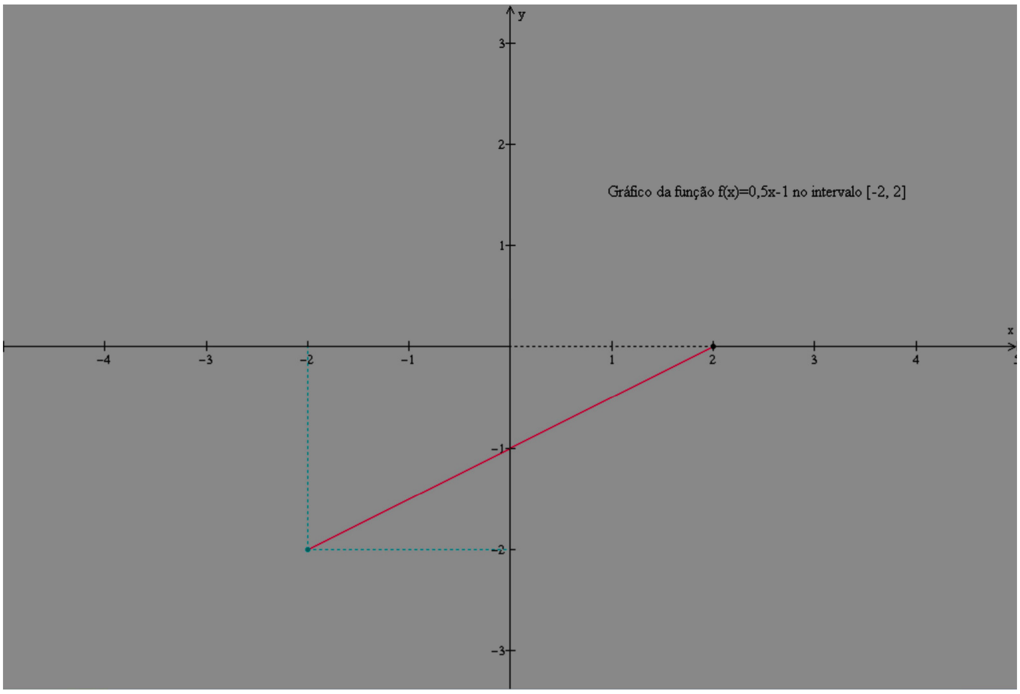


Figura 6.15 – Gráfico da função f(x) = 0,5x -1 no intervalo [-2, 2].

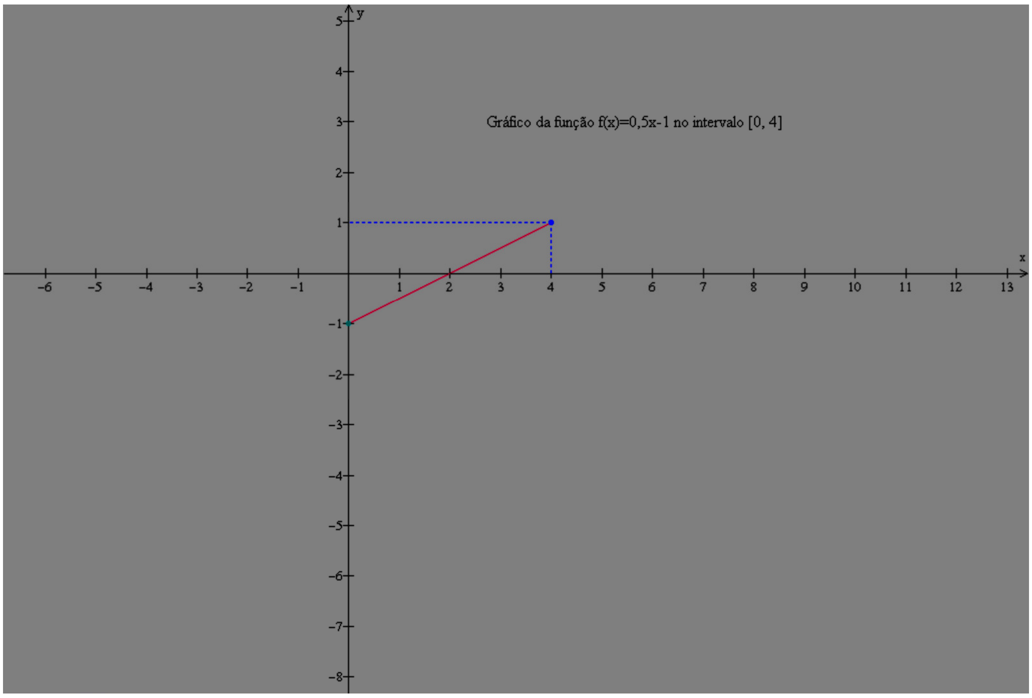


Figura 6.16 – Gráfico da função f(x) = 0,5x -1 no intervalo [0,4].

Através da tabela juntamente com o gráfico da função plotado na tela, o aprendiz foi solicitado a apontar o valor máximo e mínimo da função com suas respectivas abscissas em cada intervalo. Também foi pedido que dissesse os intervalos do domínio e imagem de cada função estudada. Para maiores detalhes sobre a dinâmica desta intervenção, consultar protocolo 04.

Ainda baseado no gráfico 6.4, observa-se a ausência da categoria erro contínuo na presente questão. Através desse dado e pelos procedimentos e várias simulações realizadas no computador, pode-se inferir que o aluno teve uma aprendizagem mais significativa dos subconceitos domínio e imagem da função.

Na questão cinco, volta-se a abordar o problema de modelagem do motorista de táxi com cobrança da taxa da bandeira dois. Este conteúdo já tinha sido discutido na segunda atividade. Comparando o desempenho dos alunos nesta atividade com aquela, observamos que houve uma evolução na aprendizagem deste conteúdo, uma vez que aqui foi registrado apenas 8%de casos que se enquadram na categoria erro contínuo e na segunda atividade, por sua vez, entre os estudantes pesquisados, 25% deles erraram e, mesmo com a intervenção, não conseguiram consertar o seu erro.

Como naquela atividade os alunos já tinham discutido com o pesquisador sobre a modelagem de duas situações-problema (o do taxista e do posto de gasolina), pode-se concluir que houve um amadurecimento deles neste tipo de resolução. Assim, não foram necessários maiores esclarecimentos sobre a identificação da variável que representa o número de quilômetros rodados, da constante que se repete (a taxa da bandeira dois) e da função que expressa o total a pagar em função do número de quilômetros rodados.

A questão seis consiste em três itens e é a continuação da quinta questão. No primeiro item, diante da equação da modelagem $y=2x+1$, o aluno deveria fazer uma vinculação com o seu cotidiano e perceber que não tem sentido a variável dependente "y" assumir valores negativos. Esta noção já tinha sido trabalhada na segunda atividade. Este item não causou dificuldades aos alunos uma vez que, naquele momento, já tinha sido discutido a impossibilidade de existir quantidades negativas no problema contextualizado do posto de gasolina.

No segundo item, o aluno tem que discutir se faz sentido pagar ao motorista de táxi a quantia de R$ 1,00 (somente a taxa da bandeira dois). O terceiro item visa verificar se o aluno tem competência de determinar o conjunto domínio e imagem da situação-problema.

Por intermédio do gráfico, nota-se que a questão causou maiores dificuldades aos alunos uma vez que apareceu a categoria erro contínuo e o percentual de acertos contínuo foi igual ao da categoria acerto com intervenção do pesquisador. De fato, cerca de 42% dos alunos acertaram de imediato a questão, os outros 41% erraram, mas conseguiram fazer uma depuração dos seus erros. E os 17% restantes erraram e continuaram errando mesmo com a intervenção.

Deve-se frisar que eles tiveram deficiência maior na resolução do último item, principalmente na determinação do conjunto imagem. Nesse sentido, eles não percebiam que as imagens começavam pela ordenada $y = 1$.

6.3.5 Atividade 5 – Funções do 1º Grau

Nesta atividade, são apresentadas noções iniciais das funções do 1^0 grau f(x) = ax+b, tendo com objetivo propiciar ao aluno a capacidade de compreender o seu significado, sabendo identificar as variáveis x e y e diferenciar os coeficientes a e b. O gráfico 5 mostra quantitativamente o desempenho dos alunos por questão.

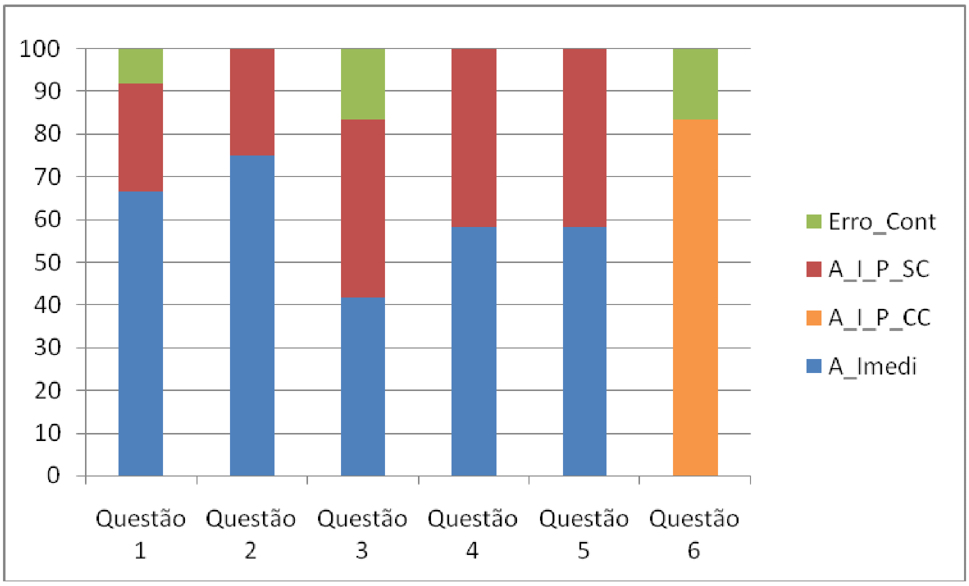


Gráfico 6.5 – Desempenho dos alunos na Atividade 5, por questão.

Por intermédio do gráfico acima, nota-se que os alunos tiveram um ótimo desempenho na primeira questão uma vez que o percentual de erro contínuo foi muito pequeno e o percentual de acertos foi aproximadamente 92%. Esta questão pode ser considerada fácil no sentido de que os alunos apenas tinham que apresentar alguns exemplos de funções do primeiro grau. Para conseguir isto, eles poderiam voltar ao texto introdutório e basear as suas respostas pelos exemplos mostrados.

A segunda questão media a habilidade do aluno de identificar as funções do 1º grau. Esta questão também não causou dificuldades aos alunos uma vez que, pelo gráfico acima, o percentual de erro contínuo foi nulo e apenas 25% dos alunos necessitaram da ajuda do pesquisador. Ainda analisando o gráfico, observa-se também o menor índice de acerto com a intervenção do pesquisador.

A terceira questão apresentava uma tabela com vários pares ordenados pertencentes à reta y=ax+5 e solicitava ao aluno determinar o coeficiente angular "a". Nesta questão, 18% dos alunos erraram e não conseguiram depurar seus erros. Por outro lado, 40% erraram, mas conseguiram acertar com o auxílio do pesquisador, e os outros 42% dos estudantes acertaram de imediato a questão.

Através de entrevistas clínicas, o pesquisador descobriu a origem das deficiências desses alunos. A maioria deles escolhia um par ordenado e ao invés de substituir a abscissa desse ponto na variável x, fazia era substituir no coeficiente a, ou seja, estavam confusos quanto à substituição de um ponto numa equação da reta e na diferenciação do coeficiente angular e da variável "x". A intervenção se processou na re-leitura do texto introdutório. Nesse sentido, foi revisto que o espaço é uma função do tempo e na função horária s= 5 + 2t o coeficiente 5 significava o espaço inicial e o coeficiente 2 a velocidade.

Ao retornarem a trabalhar com a função y = ax+5, os alunos foram convidados a fazer um paralelo entre as duas funções (y=ax+5 com s=5+2t). Uma aluna chegou a afirmar que o y poderia ser considerado o espaço, o número 5 como o espaço inicial e finalmente, o coeficiente "a" a velocidade da função horária. Com esta comparação entre as duas funções, ela começou a atribuir significado ao coeficiente "a" da função y=ax+5, tendo um melhor entendimento do exercício ora em análise, culminando com o correto cálculo do coeficiente "a".

Observando ainda o gráfico acima, os alunos tiveram um ótimo desempenho tanto na quarta questão como na seguinte, uma vez que o percentual de certo contínuo superou o percentual de acerto com o auxílio do pesquisador e pode-se notar a ausência da categoria erro contínuo.

A quarta questão era uma situação análoga ao texto introdutório, ou seja, uma função horária do movimento retilíneo uniforme, não acarretando maiores dificuldades aos alunos uma vez que eles poderiam sempre recorrer as sua informações.

A quinta questão visava medir a habilidade do aluno em trabalhar com a função $d = 4{,}9t^2$ (a função de Galileu). Também aqui os alunos não tiveram dificuldades na resolução de seus itens. Pelo fato de os alunos estarem cursando o 1º ano do Ensino Médio, estudando a disciplina Física com mais acuidade e, em particular, a Mecânica, concomitantemente com a realização desta pesquisa, pode-se inferir que estas questões são de grande familiaridade ao aluno, não necessitando de maiores esclarecimentos.

Das seis questões da quinta atividade, juntamente com a terceira, a mais problemática foi a sexta questão, uma vez que todos os alunos pesquisados deixaram em branco ou responderam errado e houve um aumento da categoria erro contínuo. No entanto, por intermédio do gráfico anterior, observa-se o aumento do número de ocorrências da categoria acerto com a intervenção do pesquisador e a mediação do computador nesta questão.

Mediado pelo *Winplot*, foi trabalhada com os alunos a função de Galileu $y = 4{,}9x^2$ em diversos domínios[55]. Diante de cada situação, era pedido que o aprendiz analisasse a tabela juntamente com seu gráfico correspondente. Também era utilizado o comando deste software para calcular a imagem de um determinado valor negativo de x (variável a qual representava o tempo do problema contextualizado).

Através desses vários recursos, os alunos foram paulatinamente tomando consciência dos dados da questão, culminando com a correta concepção de que, neste caso, o domínio só poderia conter números reais não-negativos e intervalos do tipo [0, a], onde $a>0$. O protocolo abaixo esclarece como o pesquisador auxiliou o aluno a resolver esta questão.

PROTOCOLO 09

Entrevista:

1. E: Davi, usando o Winplot trace o gráfico da função $d = 4{,}9\ t^2$

[55] Sempre era frisado ao aluno que a variável “y” representava a distância e a variável “x” o tempo.

2. Davi: Como é que faço?
3. E: [Neste momento, houve um esclarecimento do pesquisador ressaltando que na caixa de diálogo Explícita aceita qualquer expressão que defina y em função de x. Neste caso, o aluno deveria fazer uma adaptação no qual y representaria a variável distância "d"e x representaria a variável tempo "t". Nesse sentido, o aluno digitou nesta caixa de diálogo a expressão $y = 4{,}9\ x^2$].

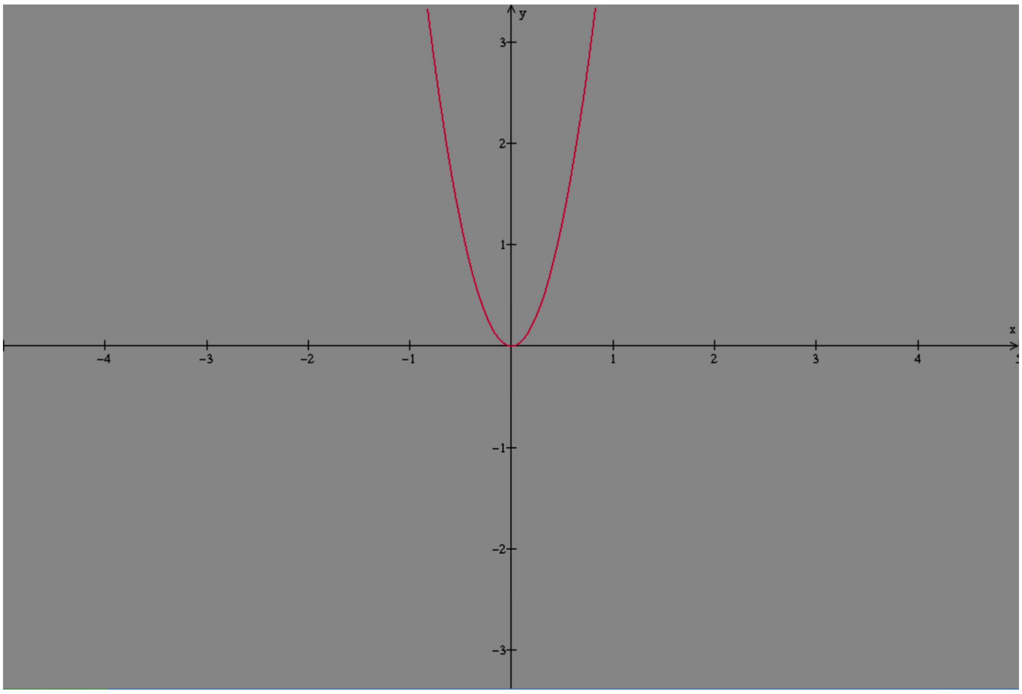
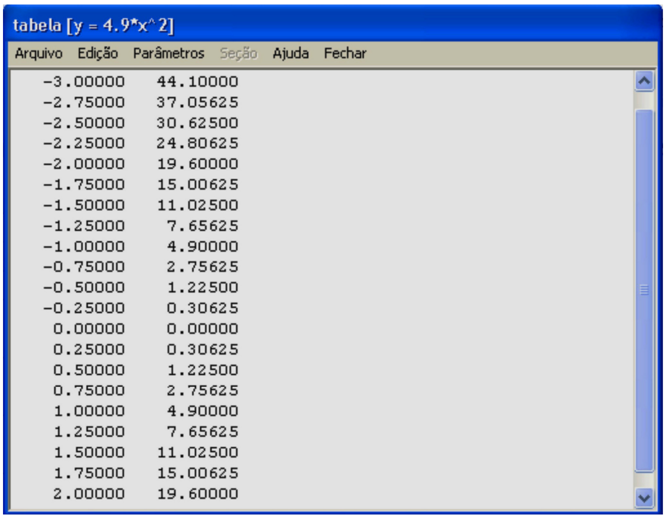


Figura 6.17 – Gráfico da função $y = 4{,}9\ x^2$.

4. E: Este gráfico é de função do primeiro grau?
5. Davi: Não.
6. E: Por quê?
7. Davi: È uma curva!
8. E:O gráfico intercepta a origem do eixo cartesiano?
9. Davi: Sim [apontando para o ponto (0,0) do sistema de eixos cartesiano].
10. E: [Neste momento foi solicitado a tabela do gráfico da função ora em análise]



-3.00000	44.10000
-2.75000	37.05625
-2.50000	30.62500
-2.25000	24.80625
-2.00000	19.60000
-1.75000	15.00625
-1.50000	11.02500
-1.25000	7.65625
-1.00000	4.90000
-0.75000	2.75625
-0.50000	1.22500
-0.25000	0.30625
0.00000	0.00000
0.25000	0.30625
0.50000	1.22500
0.75000	2.75625
1.00000	4.90000
1.25000	7.65625
1.50000	11.02500
1.75000	15.00625
2.00000	19.60000

Figura 6.18 – Tabela da função y = 4,9 x^2 fornecido pelo Winplot.

11. E: Lembre que o y representa a variável distância “d”e x representa a variável tempo “t”. Olhando para tabela, será que todos estes valores que a variável x está assumindo podem pertencer ao domínio da função?
12. Davi: Não!
13. E: E como seria este domínio?
14. Davi: Eu tiro os negativos?
15. Por quê?
16. Davi: O tempo é positivo!
17. E como seria o gráfico certo?
18. Davi: [Silêncio].
19. E: [Neste momento, após a seqüência dos movimentos Ctrl I/ Editar/, foi a mostrado a caixa de diálogo Explícita. Além disso, foi esclarecido que o intervalo padrão do programa era o intervalo [-5,5] e que o usuário poderia restringir o domínio do gráfico digitando os valores min e max de x nas caixas de edição e cliquando em "travar intervalo" para confirmar].

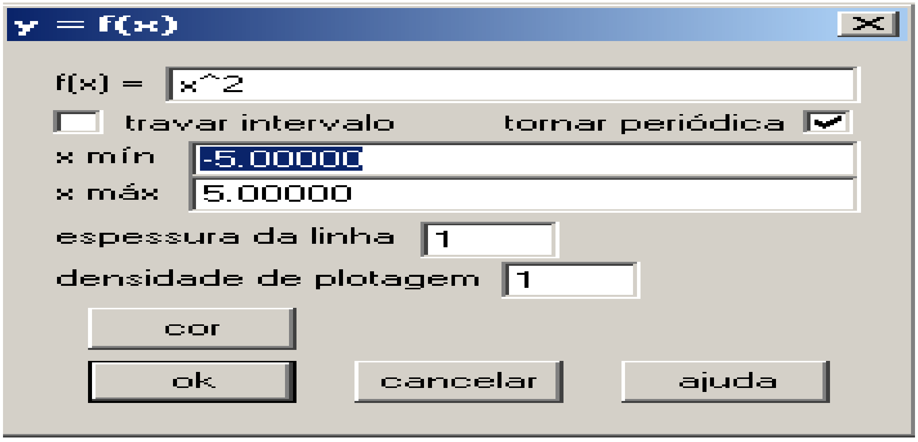


Figura 6.19 – Comando editar do Winplot.

20. E: Davi, com esta mesma função vamos trabalhar agora no intervalo [-1,1]!

21. Davi: [Executando os comandos descritos logo acima, o aprendiz tomou a iniciativa de plotar o gráfico da função no intervalo de -1 a 1].

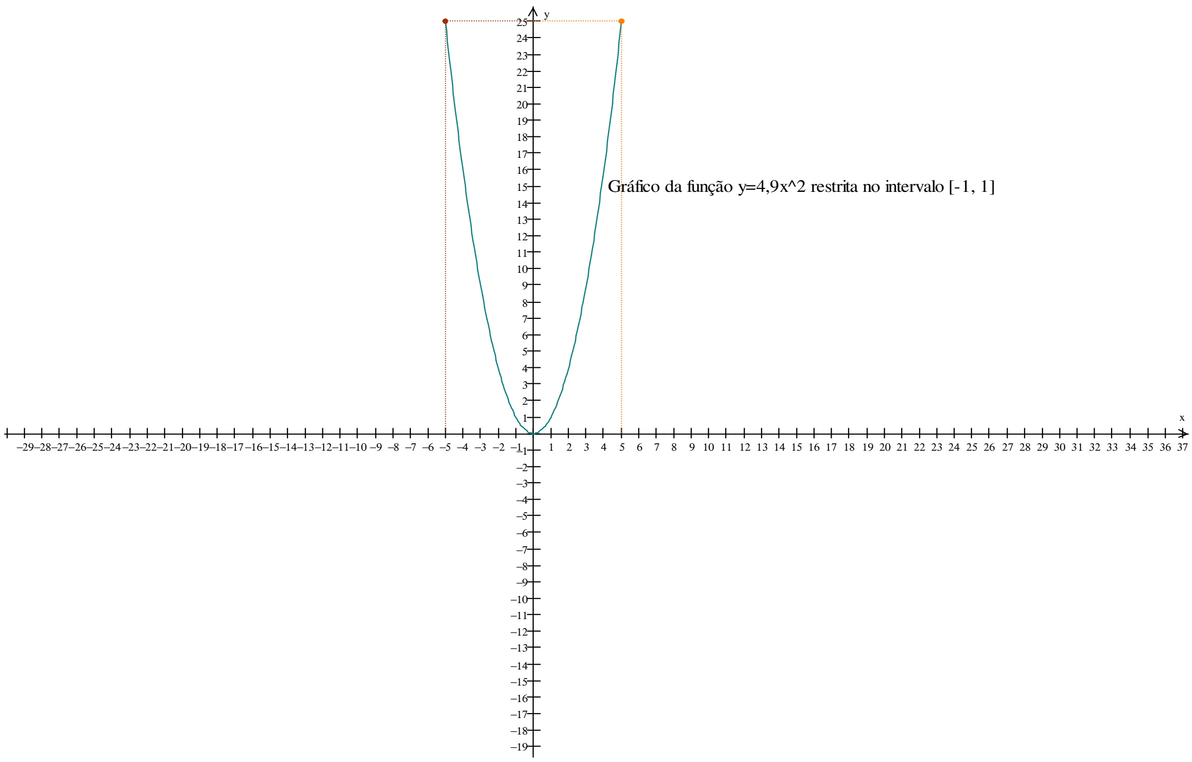


Figura 6.20 – Gráfico da função y = 4,9 x^2 no intervalo [-1,1] traçado pelo Winplot.

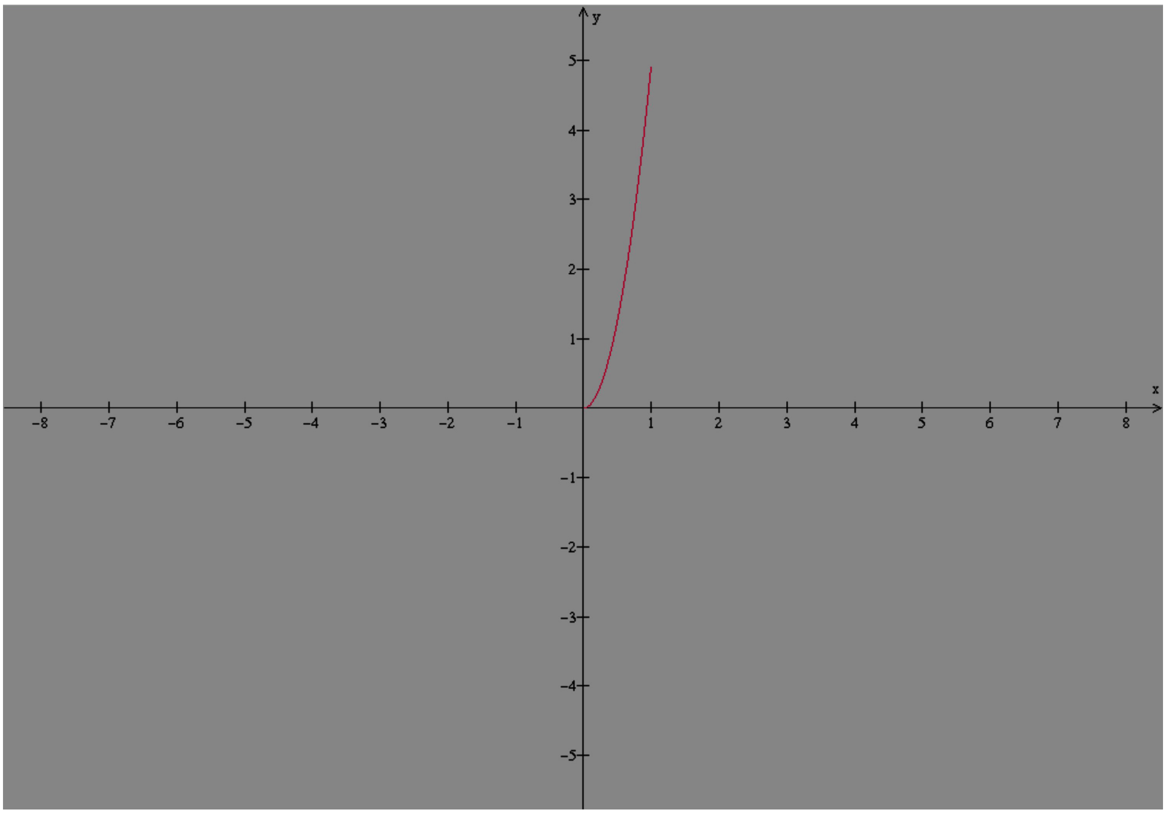


Figura 6.21 – Gráfico da função y = 4,9 x^2 no intervalo [0, 1].

22. E: O que você está percebendo?

23. A: O fim da curva.

24. E: Como assim?

25. A: A curva para no -1 e no1.

26. E: Ok! Trabalhando com a função do Galileu y = 4,9 x^2, será que podemos trabalhar com todos estes números entre -1 e 1? Lembrem que você disse que como a variável x não pode assumir valores negativos porque representa a variável tempo.

27. Davi: [Olhando para o gráfico] Não.

28. E: E com seria o gráfico da função?

29. Davi: Só aqui [apontando com o dedo o gráfico restrito ao intervalo [0, +1]].

30. Certo! Eu gostaria que você plotasse o gráfico correto no Winplot.

31. Davi: [O aluno executando os comandos necessários, plotou o gráfico da função no intervalo [0,1] como mostra na figura 6.21].

32. [Após esta entrevista, houve um esclarecimento do pesquisador que o x max poderia se estender além do +1].

Deve-se ressaltar, inicialmente, que o aluno deixou a questão em branco. Além disso, durante a intervenção, baseado na tabela, percebeu que o domínio da função trabalhada não poderia conter números reais negativos (linhas 11 a 16). No entanto, não soube explicar como seria o gráfico da função neste caso. Só a partir de trabalhar com intervalos no *Winplot*, com seus valores mínimos e máximos, associados aos seus gráficos, começou a atribuir significados para o domínio da função ora em análise.

Veja que, mediado pelo computador, o aprendiz transitou pelas três representações (algébrica, gráfica e tabular e algébrica) e, incentivado pelo pesquisador, teve um desafio de plotar.

6.3.6 Atividade 6 – Funções do 1º Grau

Esta atividade é a continuação da anterior, e tem como idéia trabalhar com invariantes relativos aos gráficos da função polinomial do primeiro grau. Por uma questão de seqüenciamento de idéias, esta seção será iniciada com a categoria erro contínuo e, logo em seguida, a categoria acerto com a intervenção do pesquisador e a mediação do computador.

ERRO CONTÍNUO

PROTOCOLO 10

1. Utilizando o *WINPLOT*, trace o gráfico da função f(x) = 1,5x-6.

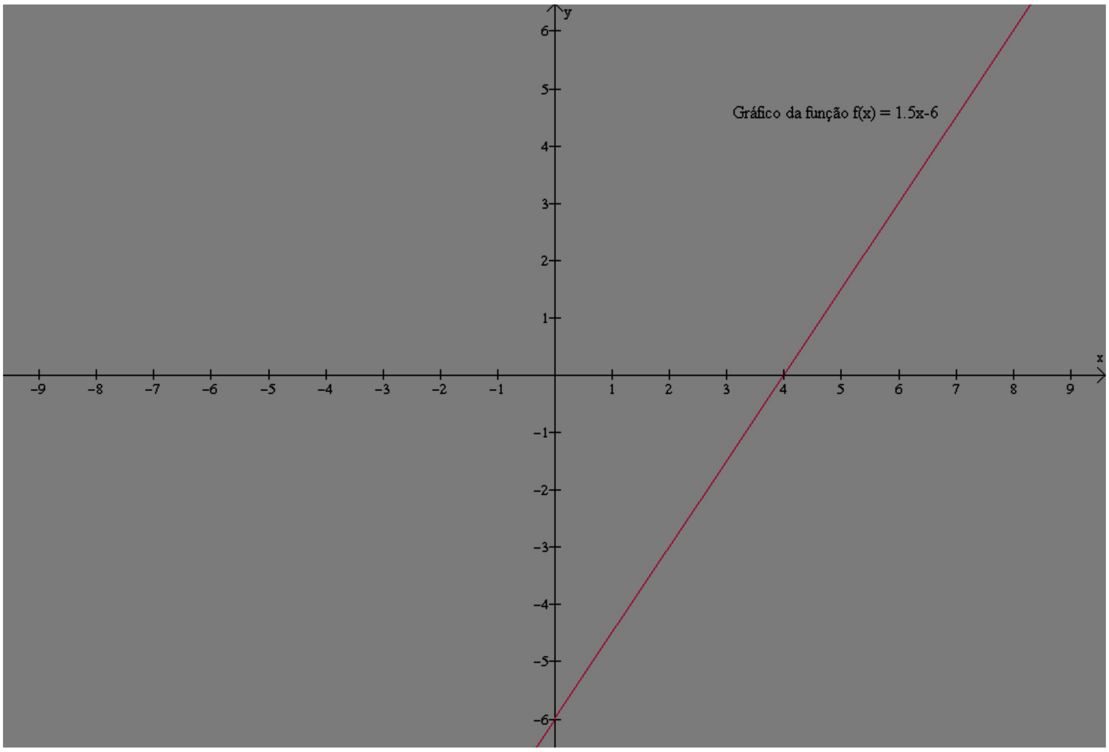


Figura 6.22 – Gráfico da função f(x) = 1.5x-6.

1. E: Olhando para o gráfico, as imagens dos números que estão situados à esquerda do 4, são nulas, positivas ou negativas?
2. A: [Silêncio].
3. E: Qual é a imagem do número quatro?
4. A: [Silêncio].
5. E: Ana substitua x=4 na lei da função f(x) = 1,5x-6.
6. A: [A aluna substituiu e encontrou f(4) = 0].
7. E: Qual é a sua imagem?
8. Ana: Zero.
9. E: Utilizando o Winplot, qual seria outra maneira de saber que a imagem do dois é zero?

10. Ana: Pela tabela [em seguida, a aluna executando o menu tabela apareceu a tabela na tela do computador].
11. E: Você está vendo a imagem do 2 (dois) Vilania?
12. Vilania: To sim! [Apontando para a coluna referente ao y e para o número y=0]
13. E: Ainda se baseando pelo Winplot, qual seria a outra maneira de sabermos que a imagem do dois na função f(x) = 2x-4 é zero?
14. A: [Silêncio].
15. E: Vou dá uma dica! Olhe para o gráfico da função!
16. A: Silêncio
17. E: As imagens dos números que estão situados à direita do quatro, são nulas, positivas ou negativas?
18. Vilânia: Positiva!
19. E: Por quê?
20. Vilânia: Porque o quatro é positivo.
21. E: Você concorda Ana?
22. A: [Silêncio, a aluna olha fixamente para o gráfico].
23. E: Nós vimos que quando x for igual a quatro a sua imagem é zero, agora, quando os valores são menores do que dois, ou seja, que ficam à esquerda do dois, suas imagens são positivas ou negativas?
24. Ana: Negativa.
25. E: Por quê?
26. Ana: [Apontando para y=-6 (o coeficiente linear, ou seja, a interseção da reta com o eixo vertical y].
27. E: Olhe para tabela! Vilânia, os números que estão à esquerda do dois têm imagem positiva ou negativa?
28. Ana: Negativas.
29. E: Os números que estão situados à direita do dois têm imagens positivas ou negativas, Vilânia?
30. [Silêncio].

Para responder o estudo do sinal, as alunas se baseiam não nas imagens dos números pertencentes à vizinhança da raiz da função, mas no sinal do zero da função ou pelo sinal do coeficiente linear (linhas 20 e 26). Elas estão centradas nesses dois quadros, ou seja, a fixação dessas alunas nos pontos de interseção do gráfico com o eixo horizontal e vertical é de tal forma determinante que elas não conseguem perceber as imagens dos números que estão na vizinhança de x=4.

PROTOCOLO 11

Neste momento, foi traçado num *Winplot*, o gráfico da função $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

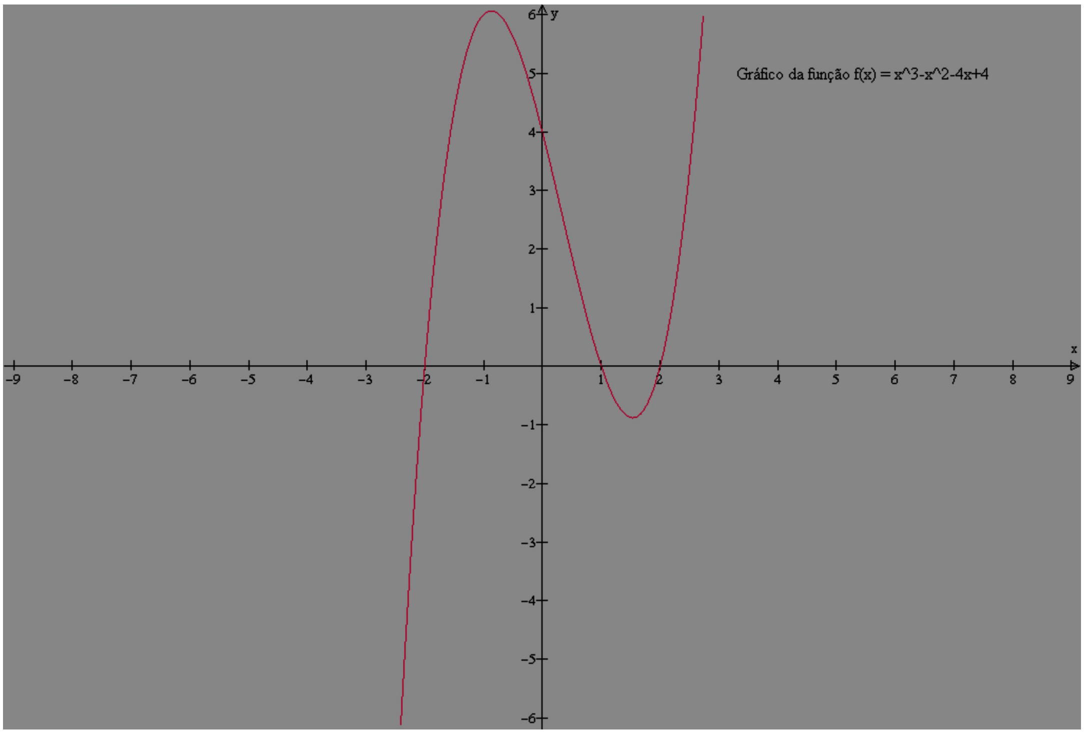


Figura 6.23 – Gráfico da função $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

1. E: No eixo x, os números que estão entre –2 e 0 têm imagens nulas, positivas ou negativas?
2. Ana: Positivas.
3. E: Por quê?
4. Ana: Estão para cima [apontando com o dedo os pontos do gráfico situados no intervalo $-2 \leq x \leq 0$].
5. E: Vilânia, mas neste intervalo, de -2 a 0, os valores que a variável x assume não são negativos?
6. Vilânia: [silêncio].

7. E: [Neste momento, utilizando o comando “tabela de parâmetros”, foi trabalhado com a tabela desta função no intervalo $-2 \leq x \leq 0$. A aluna Vilânia, observando a coluna da variável x afirmou que os valores eram negativos, mas suas imagens eram positivas porque a coluna da variável y mostrava números positivos].

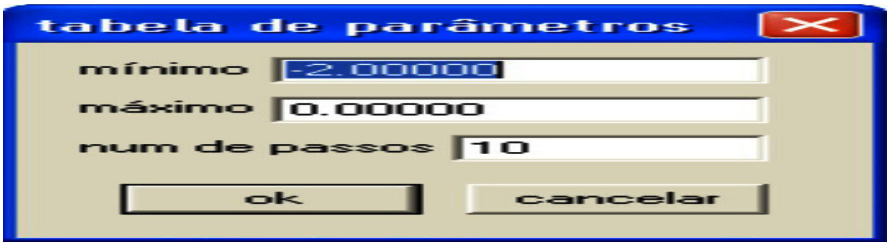


Figura 6.24 - Comando “tabela de parâmetro” do ambiente computacional Winplot.

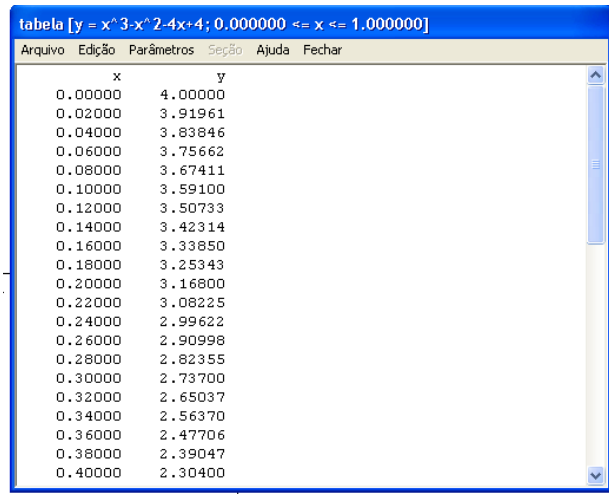


tabela [y = x^3-x^2-4x+4; 0.000000 <= x <= 1.000000]

Arquivo Edição Parâmetros Seção Ajuda Fechar

x	y
0.00000	4.00000
0.02000	3.91961
0.04000	3.83846
0.06000	3.75662
0.08000	3.67411
0.10000	3.59100
0.12000	3.50733
0.14000	3.42314
0.16000	3.33850
0.18000	3.25343
0.20000	3.16800
0.22000	3.08225
0.24000	2.99622
0.26000	2.90998
0.28000	2.82355
0.30000	2.73700
0.32000	2.65037
0.34000	2.56370
0.36000	2.47706
0.38000	2.39047
0.40000	2.30400

Figura 6.25 – Tabela da função $f(x) = x^3-x^2-4x+4$ restrita no intervalo [0,1].

8. E: E agora, os números que estão situados entre zero e um? As suas imagens são positivas, nulas ou negativas?

9. Ana: Positivas.

10. E: Por quê?

11. A: Estão para cima [apontando com o dedo os pontos do gráfico no intervalo $0 \leq x \leq 1$]

12. E: [Neste momento, utilizando o comando “tabela de parâmetros” foi trabalhado com a tabela desta função no intervalo $0 \leq x \leq 1$. A dupla de alunas afirmou que, observando a coluna da variável x juntamente com a coluna da variável y, neste intervalo a função ora em análise admitia imagens positivas].

13. E: Vilânia, no eixo x, os números que estão entre 1 e 2 têm imagens nulas, positivas ou negativas?

14. Vilânia: Negativas!

15. E: Vilânia, mas neste intervalo, de 1 a 2, os valores que a variável x assumem não são positivos?

16. [Silêncio. Foi solicitado a ela que fizesse outra justificativa para esta afirmação que não fosse baseada só pelo gráfico. Após a tomada do mouse, a aluna acionou a tabela da função no intervalo $0 \leq x \leq 1$ e, baseado nele, afirmou que os valores da variável x podiam ser positivos, mas suas imagens eram negativas.

17. E imagens dos números que ficam à direita do valor de x=2?

18. A: [Silêncio. Aqui, foi sugerido que as alunas calculassem as imagens de alguns números maiores do que quatro. Para tanto, utilizassem o menu "*UM/TRAÇO*". Um exemplo com cálculo para x = 3 está logo abaixo. Logo em seguida, foi pedido que elas marcassem este ponto no gráfico (vide gráfico mais abaixo)].

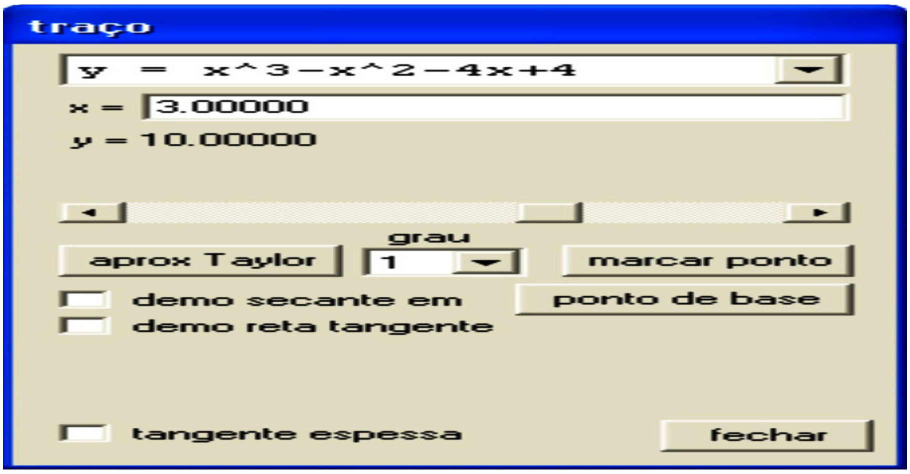


Figura 6.26 - Comando "traço" do ambiente computacional Winplot.

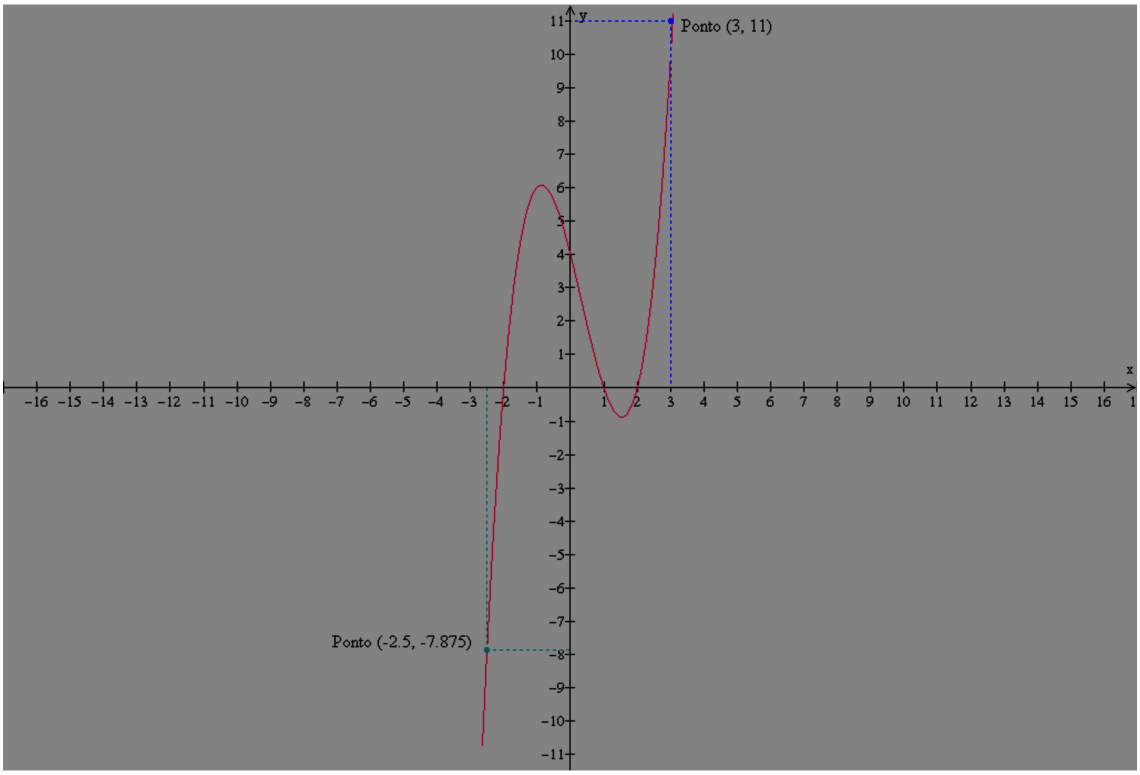


Figura 6.27 – Pontos (3, 11) e (-2.5, -7.875).

19. E: E aí? Números que ficam à direita do 2 tem imagens nulas, positivas ou negativas?

20. A: Vilânia: Negativos.

21. E: Por quê?

22. A: Vilânia: O senhor não me pediu para saber o valor de x = 3 e não deu 101

23. E: E os valores que ficam à esquerda do valor de x=-2?

24. A: Vilânia: O que que tem?

25. E: Quais são os sinais dele, positivo, negativo ou nulo?

26. A: Vilânia: Negativo!

27. E: Por quê?

28. A: [(risos, apontando para o gráfico da função no intervalo [-∞, -1]], È o contraio do que o senhor me perguntou.

29. E: [Neste momento, utilizando o comando "UM/TRAÇO", foram calculados as imagens dos números -2.5, -3, -4 e -5 e logo em seguida, o ponto obtido (-2.5, -7.875) foi marcado no gráfico. Diante disso, a dupla de alunas, tendo como porta-voz Ana, afirmou que para valores menores do que -2 as suas imagens são negativas].

30. E: Quais são os zeros ou raízes desta função?

31. Ana: -2.

32. Só tem esse?

33. Vilânia: O 1 e o 2.

34. E: Como você soube que esses números eram os zeros reais desta função?

35. Ana: O gráfico toca nele [apontando para o eixo x e as abscissas x=1 e x=2].

36. E: Ta certa! Os zeros ou raízes reais da função são pontos de encontro do gráfico com o eixo horizontal x. Mas por que Vilânia é chamado de zero ou raiz da função?

37. Vilânia: Hum!! Não sei!

38. E: [Utilizando o comando "UM/TRAÇO", a aluna Ana, calculou as imagens dos números -2, 1 e 2, todos tendo como imagens o número y=0]

39. . E: E agora, por que x = -2 é chamado de zero ou raiz da função?

40. Vilânia: Há, já estudei isso, porque dá zero!

41. E: O que dá zero?

42. Vilânia: A imagem de -2.

43. E: Diante disso, sobre que vocês disseram sobre o zero ou raiz da função, vocês podiam fazer um resumo].

44. Ana: Toda a vida que um gráfico cruzar o x é a raiz.

45. E: E o que mais?

46. Ana: Ele tem imagem zero [apontando para x=-2].

47. [Neste momento, foi pedido que a aluna Vilânia dissesse quais os intervalos contidos no domínio da função assumia valores positivos, apontando com o dedo, ela respondeu dois intervalos, a saber, para $x> 2$ e para o intervalo $-2 \leq x \leq 1$. A aluna Ana, por sua vez, afirmou que a função ora em análise, assumia valores negativos para dois intervalos, $x<-2$ e para o intervalo $+1 \leq x \leq 2$].

48. [Voltando-se para o a função f(x) = 1.5x-6, os alunos conseguiram responder corretamente o estudo do seu sinal].

Como sabemos, um gráfico de função é uma maneira particularmente útil de visualizar seus atributos e seu comportamento geral. Pelo protocolo mais acima (vide protocolo 10), quando confrontadas pelo professor sobre o estudo do sinal, as alunas não deram uma justificativa coerente, baseando suas respostas ora no sinal do zero ou raiz da função, ora no sinal do coeficiente linear. Contudo, ao trabalhar com a função polinomial do terceiro grau $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$, as alunas se concentram mais nos intervalos $-2 \leq x \leq 1$ e $+1 \leq x \leq 2$ e têm uma percepção melhor do seu sinal (linhas 2 a 4; 8 a 11 e 13 a 14). A função restrita a estes intervalos faz com que percebam melhor o comportamento da função. Além disso, durante a intervenção, ao utilizar os diversos recursos do *Winplot* com alternâncias de representações (da gráfica para algébrica, passando pela tabular), fazem a passagem desta formação de idéias iniciais se estendem a um conhecimento mais consistente (linhas 7, 12, 16, 18 e 29).

Observa-se também que as alunas só tinham a noção de que o zero ou raiz da função era a abscissa de encontro do gráfico com o eixo horizontal x. Através do *Winplot*, elas perceberam que a interpretação algébrica do zero ou raiz da função, ou seja, o zero ou raiz da função é o valor de x que anula a função (linhas 30 a 46). O gráfico 6.6 mostra quantitativamente o desempenho dos alunos por questão.

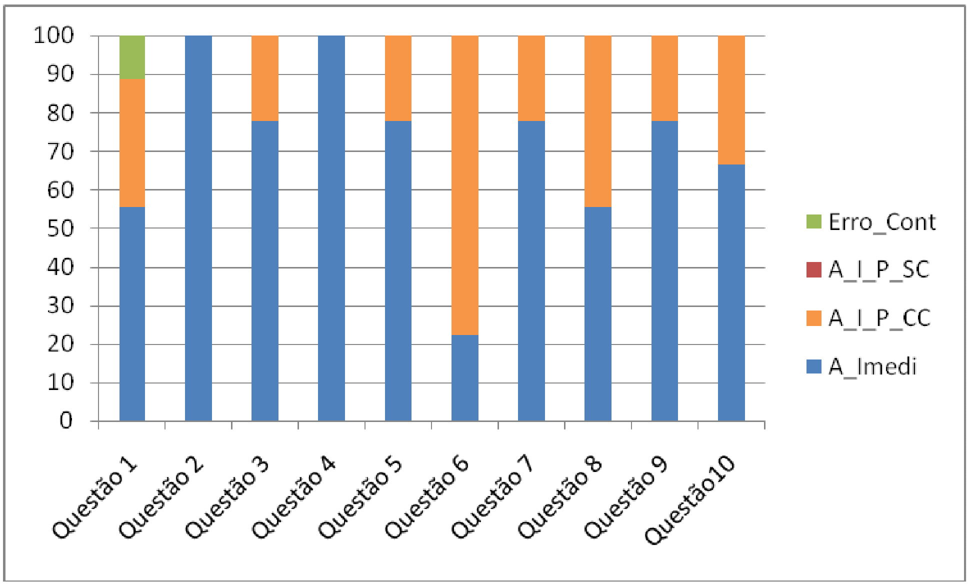


Gráfico 6.6 – Desempenho dos alunos na Atividade 6, por questão.

Por intermédio do gráfico acima e levando em conta as categorias acerto imediato e erro contínuo, pode-se inferir que a primeira questão foi aquela que causou maiores dificuldades aos alunos. Esta questão constava de três itens e pedia que os alunos fizessem o estudo da variação da função f(x) = 1,5x – 6.

Muitos alunos responderam corretamente o item “c”, no qual era solicitado que eles fizessem o estudo do sinal da função quando a variável x ficasse à esquerda da raiz ou zero da função. Mas quando questionados, justificaram que, para valores menores do que x=2, a função assumia valores negativos por causa do sinal da ordenada y=-1 (o coeficiente linear b). Outra aluna chegou a declarar que, para valores maiores do que x=2, a função admitia valores positivos porque o número 2 era positivo.

Observa-se que, ao fazer o estudo do sinal, estes alunos têm uma forte fixação nos pontos de interseção do gráfico com o eixo horizontal e vertical, respectivamente o zero ou raiz real da função e o coeficiente linear "b". Esses resultados também são encontrados nos estudos de Ferreira (1998). No entanto, durante a intervenção, o professor, ao lançar mão de diversos recursos computacionais (tabela, gráficos e obtenção de pontos), fez com que os alunos percebessem importantes invariantes do estudo do sinal (vide protocolo 11).

A terceira questão objetivava medir a habilidade do aluno em trabalhar com uma família de retas do tipo $f(x) = 1{,}5x + b$, com o parâmetro "b" variando. Nesta questão, por intermédio do gráfico 6.6, observa-se o ótimo desempenho dos alunos, uma vez que não houve a incidência da categoria erro contínuo e o percentual de acertos com a mediação do professor foi aproximadamente 22%. Além disso, nesta questão os alunos lançaram importantes teoremas-em-ação (vide 6.5).

A quarta e quinta questões visavam verificar o comportamento dos alunos diante de uma família de retas $f(x) = ax+4$, com o coeficiente "a" variando. Por intermédio do gráfico 6.6, observa-se o ótimo desempenho dos alunos nestas questões, uma vez que o percentual de erros contínuos foi zero. Para resolvê-las corretamente, os alunos tinham que lançar mão dos seus conhecimentos prévios sobre posição de retas e pontos de interseção, assuntos já vistos e discutidos nas atividades anteriores (principalmente na atividade "noções geométricas"). Pode-se inferir que isto contribuiu para um ótimo rendimento dos alunos na resolução dessa questão.

A questão seis exige do aluno perceber invariantes relativos às duas retas concorrentes traçadas pelo *Winplot*. Ainda pelo gráfico 5.6, nota-se o aumento da categoria acerto com intervenção do pesquisador e mediação do computador nesta questão.

Muitos dos alunos não entenderam o enunciado da questão e a deixaram em branco. Portanto, a intervenção inicial do pesquisador foi na compreensão do que a atividade pedia. Outros alunos deram uma resposta parcialmente correta, ou seja, afirmaram que as retas eram concorrentes, mas se esqueceram ou não notaram que se interceptavam no mesmo coeficiente linear “b”.

A intervenção continuou com a amostra aos alunos de uma família de retas f(x) = ax -2 e com perguntas específicas tais como, “*que tipos de retas são*”, “*elas interceptam em qual ordenada*”. A partir daí, os alunos afirmaram que as retas eram concorrentes e interceptavam no “b”.

A questão sete é análoga à questão anterior, ou seja, era dado um par de retas e pedia para serem apontados os invariantes relativos a estas retas. Voltando a analisar o gráfico 6.6 e comparando o desempenho dos alunos desta questão com anterior, nota-se o aumento do percentual de acerto contínuo e a diminuição do percentual de acerto com a intervenção do pesquisador e a mediação do computador.

O motivo maior disto foi a resposta dos alunos. Como nesta questão o aluno poderia responder que as retas eram concorrentes sem vincular ao coeficiente linear “b” foi critério para ser considerada correta (vide figura 6.29). Portanto, esta questão pode ser classificada como mais fácil se comparada com a anterior. A intervenção foi análoga à anterior. Todavia, neste contexto, o pesquisador utilizou mais recursos computacionais na medida em que determinou a interseção entre as retas, utilizando o comando *“Dois/Interseção”*.

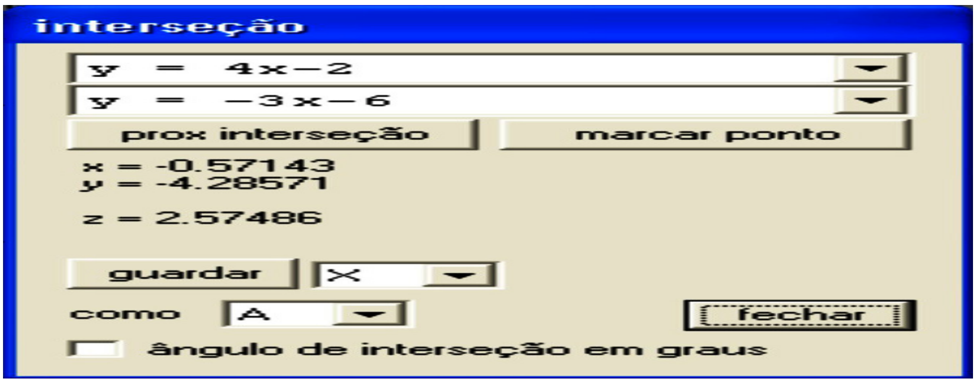


Figura 6.28 - O comando “interseção” do ambiente computacional Winplot.

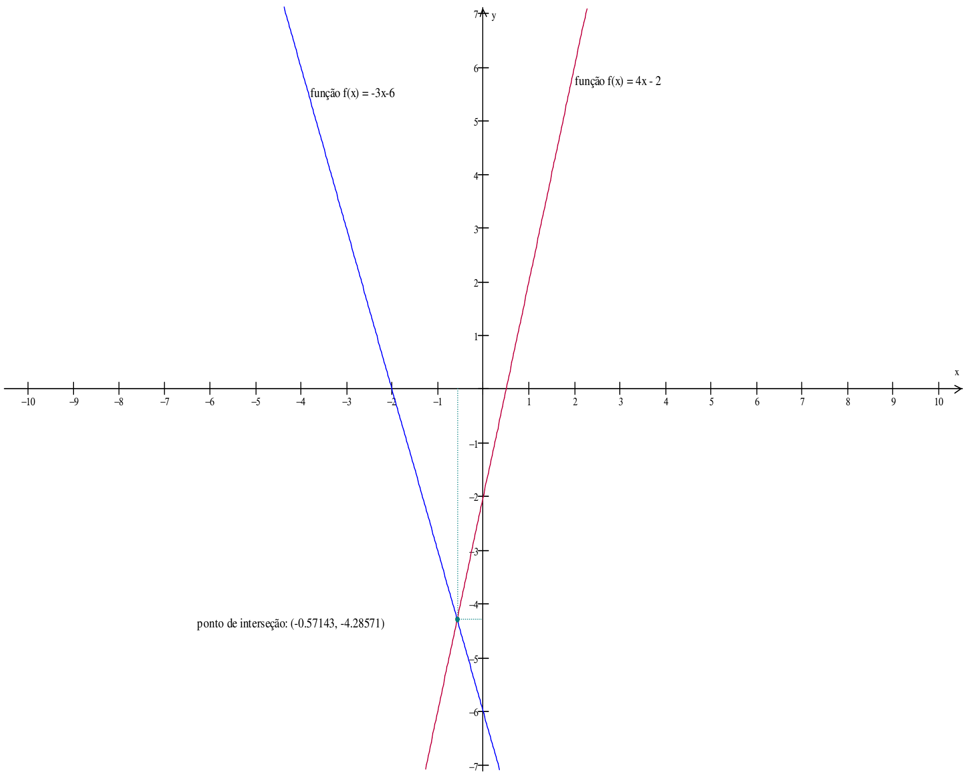


Figura 6.29 – Gráficos da funções f(x) = 4x – 2 e y = -3x-6.

A questão oito exige do aluno descobrir que os coeficientes angulares das retas paralelas são iguais. Pelo fato de ter havido um diminuição do aumento da categoria acerto contínuo e de exigir um poder maior de síntese dos alunos, esta questão pode ser considerada mais difícil que a anterior.

O pesquisador auxiliou os alunos a encontrar o invariante retornando às propriedades encontradas nas questões anteriores, principalmente as questões de número quatro e cinco.

A questão nove fornecia um gráfico da função do primeiro grau e exigia do aluno a percepção de que o seu coeficiente angular era positivo. Pelo gráfico 6.6, observa-se o grande percentual de acertos contínuos nesta questão. Muitos alunos que acertaram de imediato esta questão afirmaram que esta reta tinha o sinal do coeficiente "a" positivo porque a função era crescente. Isto aponta para a conclusão de que esta justificativa foi trazida de outros estudos da função do primeiro grau. De fato, o aluno pode ter visto essa propriedade na série anterior ou até mesmo ouvido falar do seu professor de Matemática na série em que estava cursando.

Na intervenção, houve dedicação aos alunos que estavam com problema questionando qual seria o valor do coeficiente linear “b”. Um aluno disse que era -3. Ao ser questionado, apontou para o ponto de interseção da reta com o eixo vertical. O pesquisador continuou a intervenção, ressaltando que a propriedade percebida pelo aluno estava correta e, logo em seguida, começou a trabalhar com uma família de retas f(x) = ax-3, com o parâmetro “a” variando de 1 a 5. Associando os diversos gráficos traçados pelo *Winplot* com os seus coeficientes angulares “a”, os alunos consertaram os seus erros, afirmando que o gráfico da questão ora em análise possui o coeficiente “a” positivo.

A décima questão é análoga à anterior, porém nela o aprendiz tem que perceber que o coeficiente angular “a” é negativo. Para evitar repetições desnecessárias e fazendo alguns ajustes, a análise desta questão é a mesma da anterior.

6.3.7 Atividade 7 – Estudo da variação do sinal da função do 1º grau

Esta atividade trata de conteúdos ligados a funções do primeiro grau tais como: cálculo do zero ou raiz e estudo do sinal. O gráfico 6.7 mostra quantitativamente o desempenho dos alunos por questão.

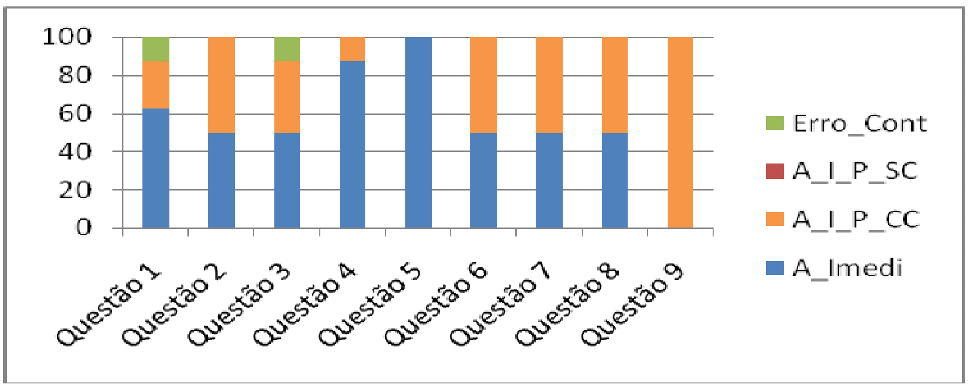


Gráfico 6.7 – Desempenho dos alunos na Atividade 7, por questão.

A primeira questão trata do estudo do sinal da função lucro de uma empresa expressa pela representação algébrica L(x) = 2x-6. Por meio do gráfico logo acima, percebe-se que os alunos tiveram um bom desempenho nesta questão, uma vez que a soma dos percentuais das duas primeiras categorias é 88%, superando o percentual da categoria erro contínuo (12%).

Os alunos que acertaram com o auxílio do pesquisador o item "d" achavam inicialmente que as imagens que ficavam à direita da raiz real x=3 da função L(x) = -2x+6 eram positivas porque o valor da raiz era positivo. O protocolo a seguir ilustra a intervenção do pesquisador, auxiliando o aluno a perceber e a corrigir o seu erro.

PROTOCOLO 12

Entrevista.

1. [Neste momento foi traçado a função f(x) = -2x+6 como mostra a figura a seguir].

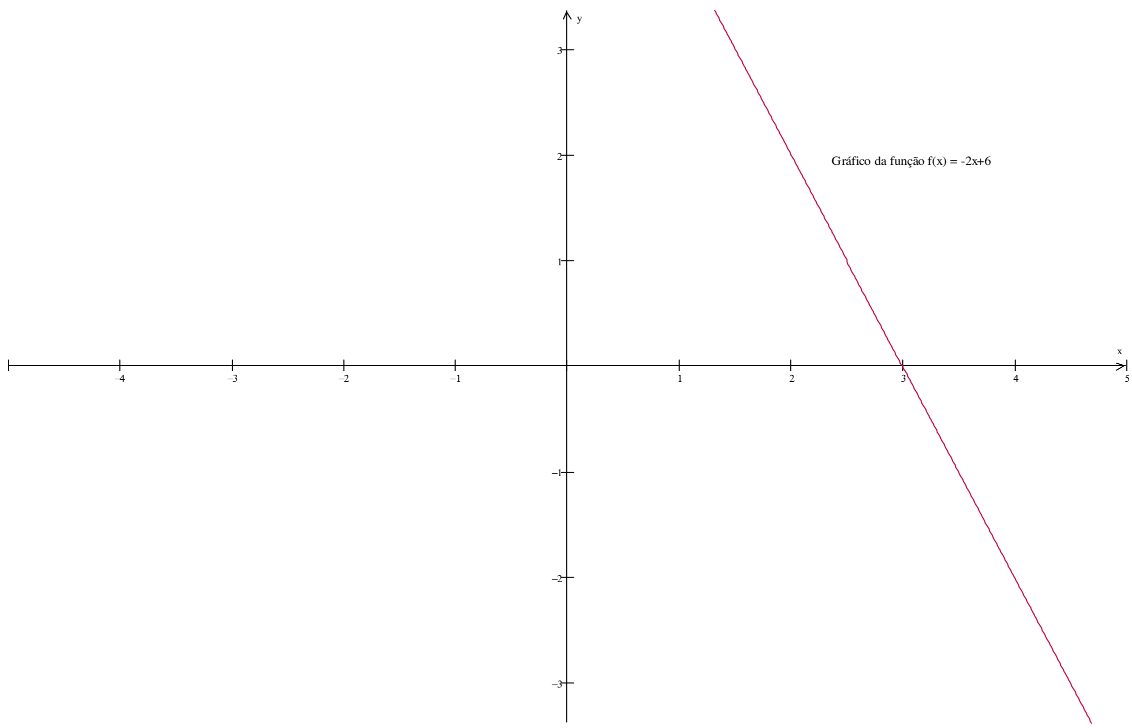


Figura 6.30 – Gráfico da função f(x) = -2x+6.

2. [Aqui, foi explicado ao aluno que a função iria ser analisada no intervalo de [3, 7] (vide gráfico logo abaixo). Utilizando a setas "←" e "→" e os comandos "PgDn" e

"PgUp" ao aluno centralizou o gráfico no centro da tela do computador e em seguida foi executado o menu tabela].

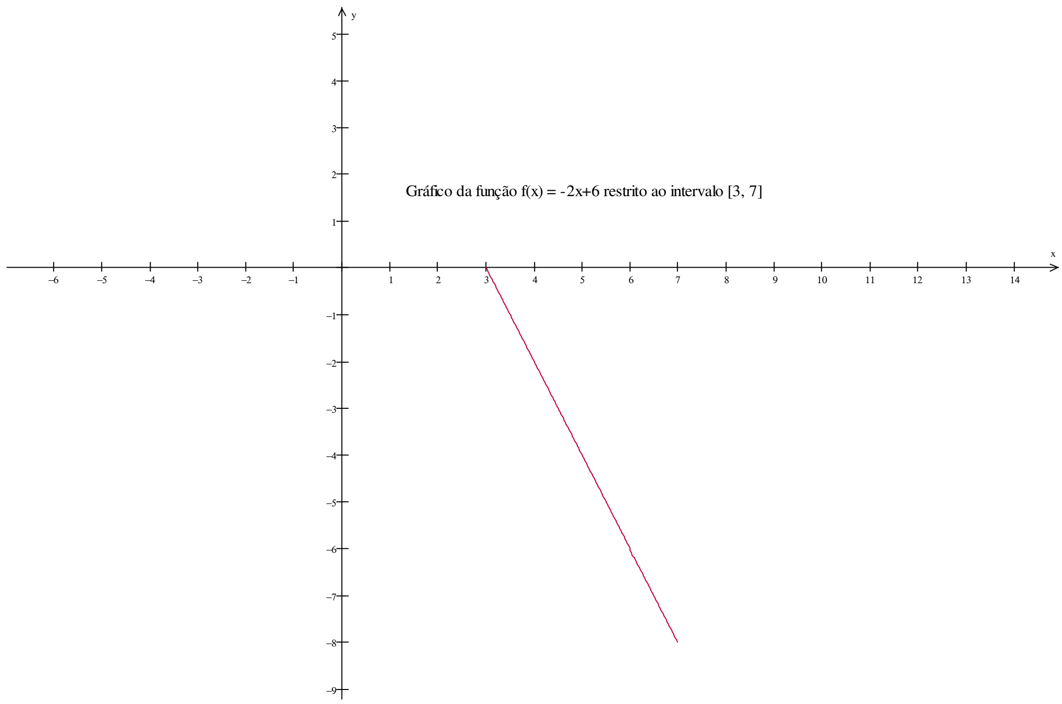


Figura 6.31 – Gráfico da função f(x) = -2x+6 restrita no intervalo [3, 7].

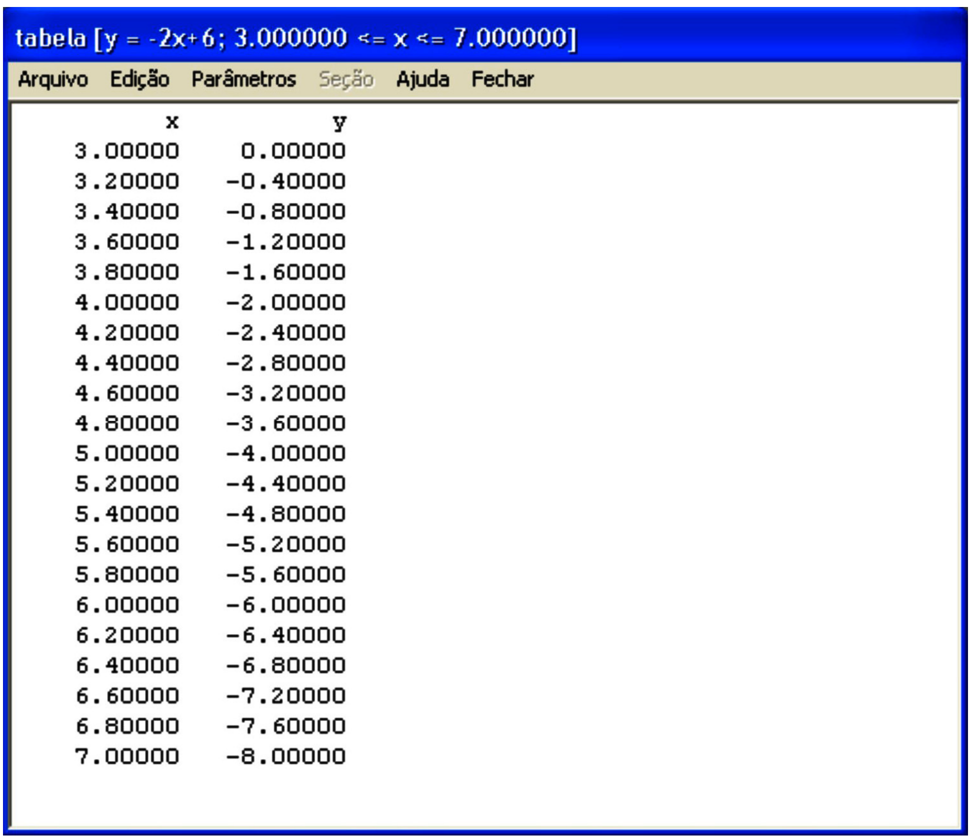


tabela [y = -2x+6; 3.000000 <= x <= 7.000000]

Arquivo Edição Parâmetros Seção Ajuda Fechar

x	y
3.00000	0.00000
3.20000	-0.40000
3.40000	-0.80000
3.60000	-1.20000
3.80000	-1.60000
4.00000	-2.00000
4.20000	-2.40000
4.40000	-2.80000
4.60000	-3.20000
4.80000	-3.60000
5.00000	-4.00000
5.20000	-4.40000
5.40000	-4.80000
5.60000	-5.20000
5.80000	-5.60000
6.00000	-6.00000
6.20000	-6.40000
6.40000	-6.80000
6.60000	-7.20000
6.80000	-7.60000
7.00000	-8.00000

Figura 6.32 - Tabela da função f(x) = -2x+6 restrita no intervalo [3, 7].

3. E: Observando a tabela, para valores maiores do que o três, a função acima possui imagem positiva, nula ou negativa?
4. A: [Olhando para a tabela]. Negativa.
5. E: [Neste momento, o aluno escolheu os pontos (3.2, -0.4) e (3.4, -0.8) e os marcou corretamente no *Winplot*. E, por sugestão do pesquisador, marcou também os pontos (4, -2) e (6, -6). Logo em seguida, ao ser solicitado para fazer a mesma análise anterior, mas agora, baseado pelo gráfico, o aluno respondeu que para valores maiores do que três as imagens eram negativas porque os pontos estavam para baixo e eram negativos (vide figura 6.33)].

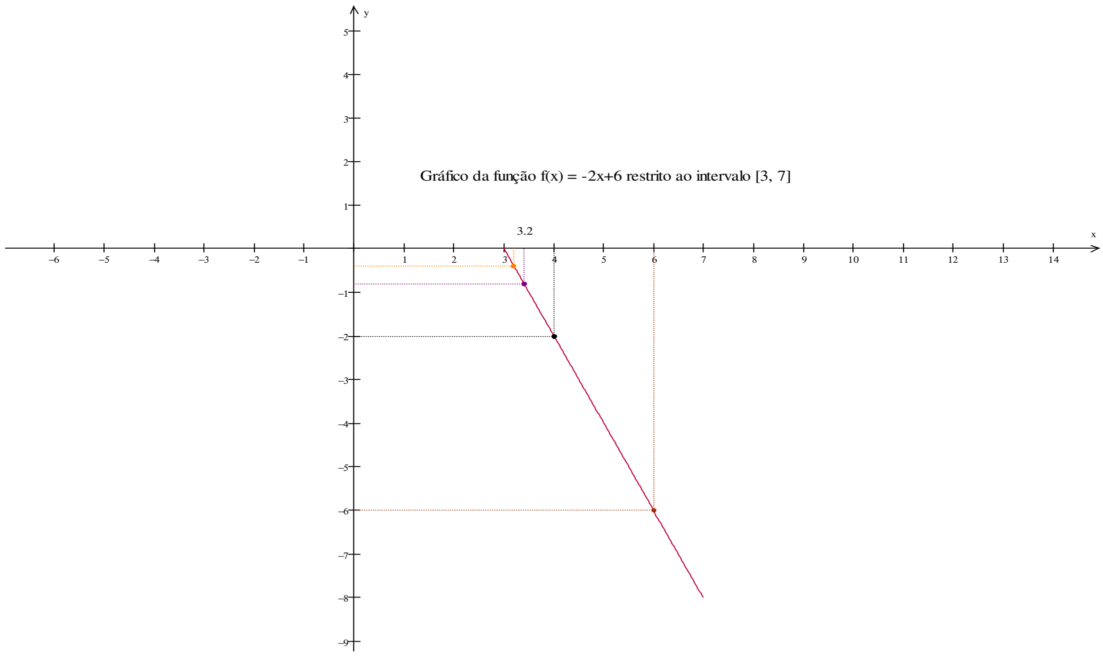


Figura 6.33 - Pontos (3.2, -0.4), (3.4, -0.8), (4, -2) e (6, -6) marcados no Winplot.

6. E: [Após todos estes momentos, voltou-se a trabalhar com a função f(x) = 2x-6, só que agora restrita ao intervalo [3, 7]. Utilizando a setas "←" e "→" e os comandos "PgDn" e "PgUp" ao aluno centralizou o gráfico no centro da tela do computador e em seguida foi executado o menu tabela. Também analisou a sua tabela e foram marcados alguns pontos.].

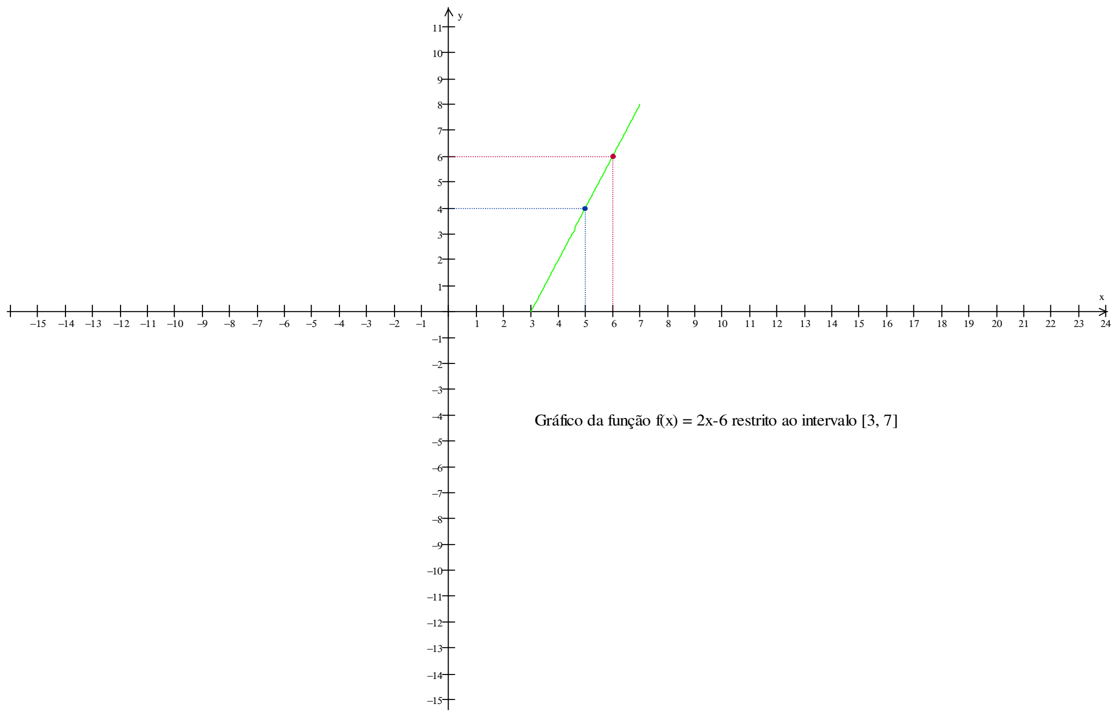


Figura 6.34 – Gráfico da função f(x) = 2x – 6 restrita no intervalo [3, 7].

7. E: Para valores maiores do que o número três, as imagens são negativas, nulas ou positivas?
8. A: Positivas.
9. E: Por quê?
10. E: Está para cima.
11. E: E o quê mais?
12. A: Os número são positivos [apontando para as ordenadas 4 do ponto (5, 4) e para a ordenada 6 para o par (6, 6)].
13. E: Comparando os dois gráficos, o que você pode concluir.
14. A: Neste [referindo-se a função f(x) = 2x-6] quando ando pra cá [apontando o intervalo [3, +∞)]. a função é positiva.
15. E: E: E o outro?
16. A: Quando ando pra cá [referindo-se a função f(x) = -2x+6 e apontando o intervalo [3, +∞)] a função é negativa.
17. E: Por quê?
18. A: As ordenadas são negativos.

Com já foi frisado, a aprendiz achava que a função f(x) = 2x-6 era positiva para x >3 porque este número era positivo. Assim, o aluno estava lançando um teorema-em-ação falso. Através da intervenção, trabalhou-se com uma nova função $f(x) = -2x+6$ e o aluno percebeu que para $x>3$ a função era negativa.

A partir daí, ao ser questionado pelo pesquisador, o aluno começou a justificar não mais baseado nesse teorema-em-ação (observe pelo protocolo acima que, em nenhum momento, o aprendiz fez menção ao sinal da raiz), e sim através de pontos pertencentes ao gráfico e pelo sinal das ordenadas (linhas 5, 10, 12, 14, 16 e 18). Com isto, pode-se inferir que o aluno fez uma depuração do seu erro.

O computador prestou grande auxílio na compreensão deste assunto. De fato, através dos comandos de ZOOM, o aluno centralizou o gráfico e começou a ter uma visão melhor e mais centralizada do gráfico da função. E pelas alternâncias de representações (gráfica, tabular e voltando para gráfica), o aluno pôde perceber melhor o estudo do sinal.

Voltando a analisar o desempenho dos alunos na atividade 7, a segunda questão é análoga a questão anterior. Contudo, na questão 2, a função trabalhada é $f(x) = 5x-5$.

A terceira questão constava de três itens e visava verificar o comportamento dos alunos diante do estudo do sinal da função $f(x) = -2x+4$. Ainda pelo gráfico 6.7, nota-se que os alunos tiveram um bom desempenho nesta questão, uma vez que a soma dos percentuais das categorias relativas a acertos foi 87% superando o percentual da categoria erro contínuo (13%).

Os alunos que acertaram o item “b” com o auxílio do pesquisador achavam inicialmente que as imagens que ficavam à direita da raiz real $x=2$ eram positivas. Eles pensavam que somente valores negativos atribuídos à variável independente x tornavam a função negativa. Assim como, também, números positivos atribuídos a x tornavam a função positiva. Aqui temos um raciocínio linear, ou seja, valores positivos tornam a função positiva e valores negativos tornam a função negativa. Temos um obstáculo epistemológico que pode dificultar a construção do conceito de função.

No entanto, o professor tendo como recurso o computador e a abordagem de utilizar as múltiplas representações pôde reverter esse quadro. O próximo protocolo mostra como isto foi possível.

PROTOCOLO 13

Entrevista:

1. E: Dada a função f(x) = -2x+4, para que valores de a esta função tem imagem positiva?
2. A: Pra x maior que quatro
3. E: Por quê?
4. A: Por quê? Hum! Porque os números são todos positivos [apontando para o intervalo $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$].
5. E: [Neste momento, foi traçado num *Winplot*, o gráfico da função $f(x) = x^2-9x+8 = 0$. Ao ser questionado sobre valores de x que ficam entre 1 e 8, o aprendiz enumerou alguns números e afirmou que esses números eram positivos. Utilizando a setas "←" e "→" e os comandos "PgDn" e "PgUp" ao aluno centralizou o gráfico no centro da tela do computador e em seguida foi executado o menu tabela].
6. E: No eixo x, os números que estão entre 1 e 8 têm imagens nulas, positivas ou negativas?
7. A: Negativas?
8. E: Por quê?
9. A: O gráfico está para baixo.
10. E: [Neste momento, trabalhou-se com mesma função $f(x) = x^2-9x+8$, só que agora restrita ao intervalo [1, 8] (vide figura 6.35) e logo em seguida foi acionada a sua tabela. O aluno, observando a tabela afirmou que a função assumia imagens negativas entre os valores 1 e 8 (vide figura 6.36). Ao ser questionado sobre as raízes, ele respondeu, ainda olhando para tabela, que as raízes eram 3 e 8 porque tinha imagens nulas. Logo após, foram marcados alguns pontos inclusive o ponto do vértice].

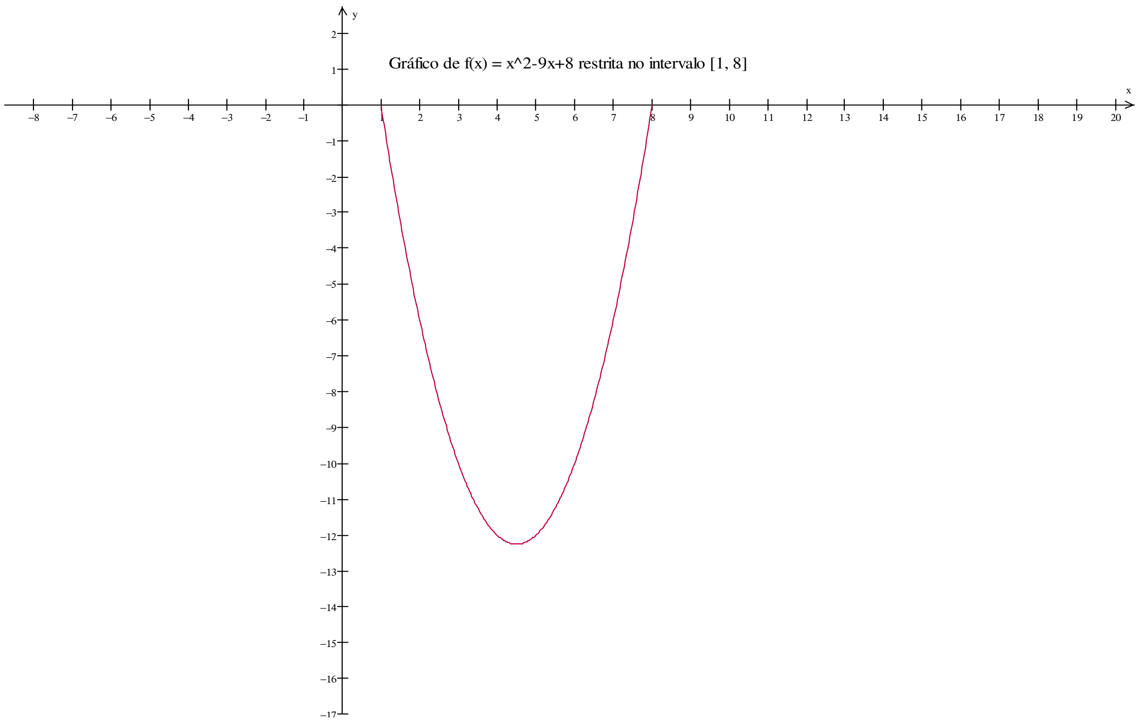


Figura 6.35 – Gráfico da função f(x) = x^2-9x+8 restrita no intervalo [1, 8].

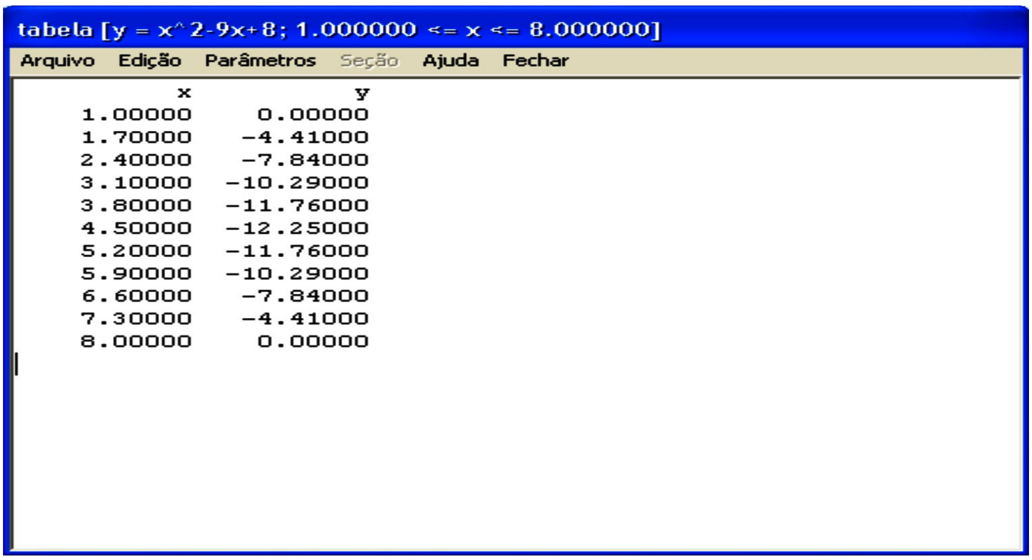


tabela [y = x^2-9x+8; 1.000000 <= x <= 8.000000]

Arquivo Edição Parâmetros Seção Ajuda Fechar

x	y
1.00000	0.00000
1.70000	-4.41000
2.40000	-7.84000
3.10000	-10.29000
3.80000	-11.76000
4.50000	-12.25000
5.20000	-11.76000
5.90000	-10.29000
6.60000	-7.84000
7.30000	-4.41000
8.00000	0.00000

Figura 6.36 - Tabela da função f(x) = x^2-9x+8 restrita no intervalo [1, 8].

11. E: [Aqui, voltou-se a analisar a função f(x) = -2x+4, só que agora restrita ao intervalo [2, 5] (vide figura 6.37). Utilizando a setas "←" e "→" e os comandos "PgDn" e "PgUp" ao aluno centralizou o gráfico no centro da tela do computador e em seguida foi executado o menu tabela (vide figura 6.38)].

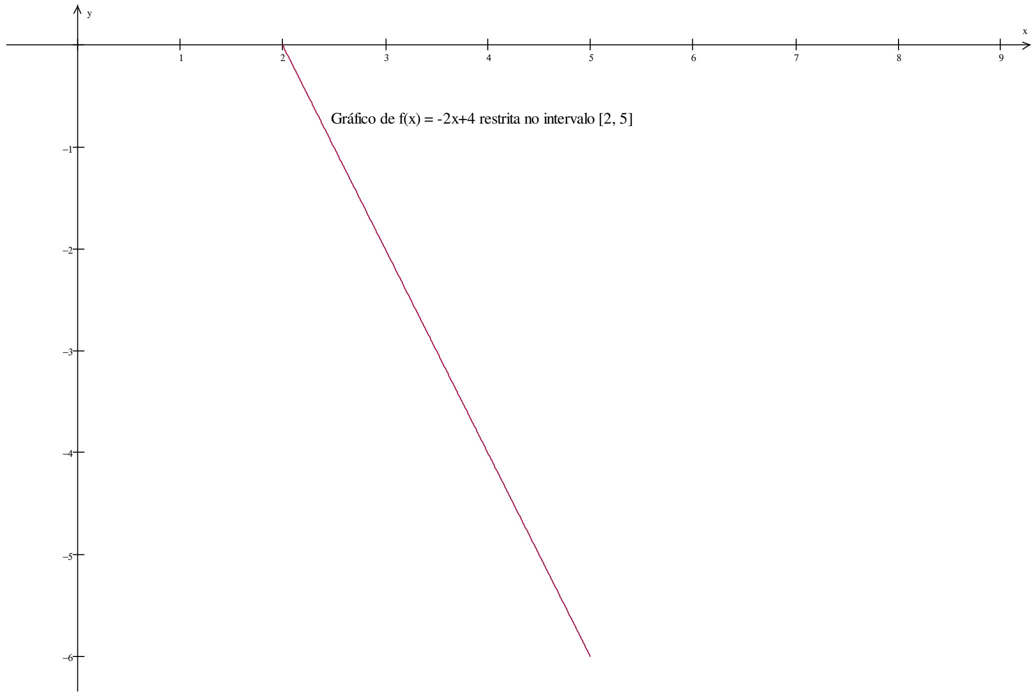


Figura 6.37 – Gráfico da função f(x) = -2x+4 restrita no intervalo [2, 5].

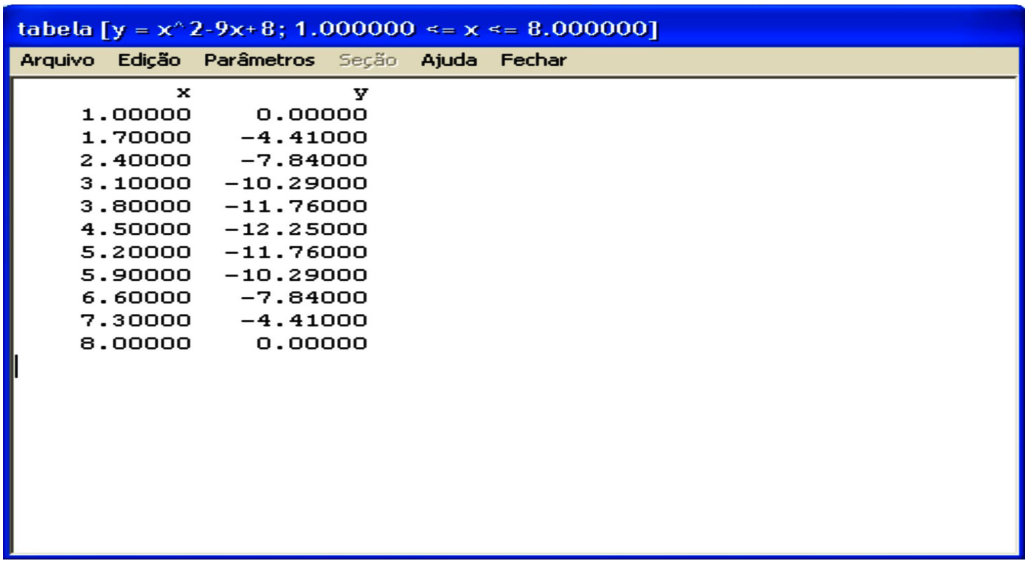


tabela [y = x^2-9x+8; 1.000000 <= x <= 8.000000]

Arquivo Edição Parâmetros Seção Ajuda Fechar

x	y
1.00000	0.00000
1.70000	-4.41000
2.40000	-7.84000
3.10000	-10.29000
3.80000	-11.76000
4.50000	-12.25000
5.20000	-11.76000
5.90000	-10.29000
6.60000	-7.84000
7.30000	-4.41000
8.00000	0.00000

Figura 6.38 - Tabela da função f(x) = 2x-4 restrita no intervalo [2, 5].

12. E: Observando a tabela, para valores maiores do que o três, a função acima possui imagem positiva, nula ou negativa?

13. A: Negativa [Apontando para a coluna dos valores de y da tabela].

14. E: [Neste momento, foi sugerido que o aluno escolhesse alguns pontos da tabela e marcasse no *Winplot*].

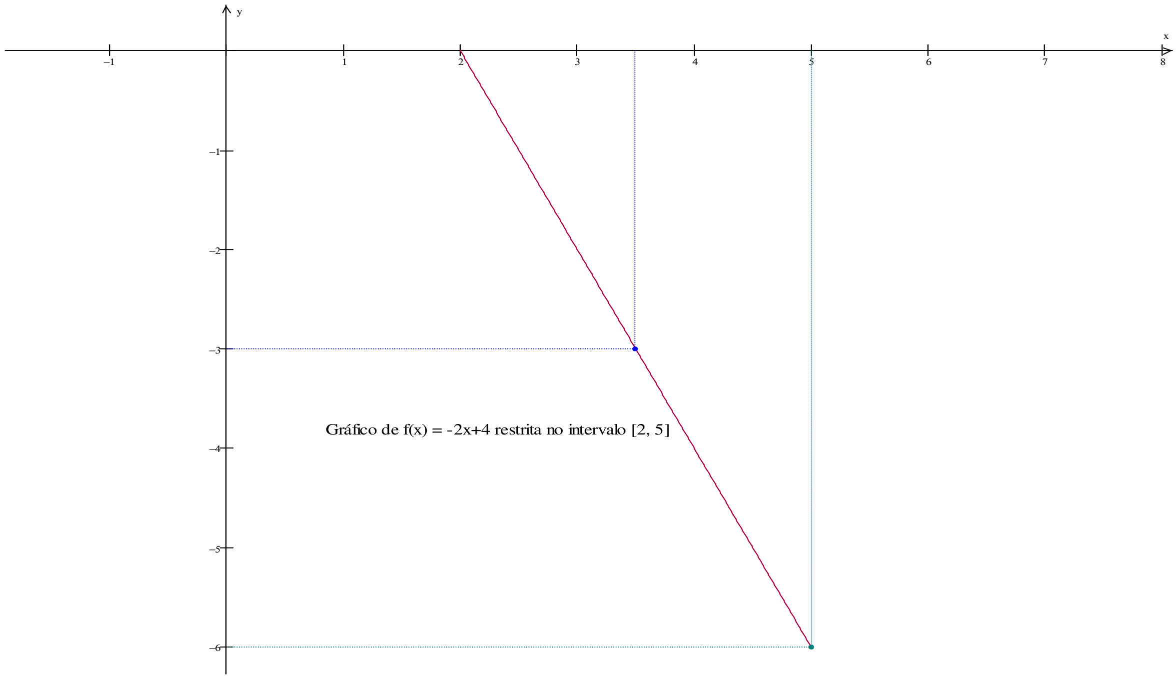


Figura 6.39 – Os pontos (3.5, -3) e (5, -6) marcados no *Winplot*.

15. E aí? O que você pode concluir? Os números que ficam à direita do 2 têm imagens nulas, positivas ou negativas?
16. A: Negativos.
17. E: Mas no eixo x, os números que ficam à direita do 2 não são positivos?
18. A: Os números são positivos [apontando para o intervalo [2, 7] contido no eixo x], mas as ordenadas aqui são negativas [apontando para as ordenadas -2, -5 e -6 dos pontos plotados].

Voltando-se a analisar o desempenho dos alunos, agora, na quarta questão, por intermédio do gráfico 6.7, nota-se o ótimo desempenho dos alunos uma vez que o percentual de acertos foi quase 90%. Essa questão trabalha com interseção de retas e o ângulo formado por elas. Por ser uma questão que revisa conceitos já estudados, objetivando exercitar o aluno com alguns comandos do *Winplot*, esta questão não causou maiores dúvidas aos alunos. Os alunos que erraram inicialmente tiveram dúvidas em acionar alguns comandos, sendo devidamente esclarecidos pelo pesquisador.

A quinta questão por sua vez, media a competência do aluno de elencar algumas propriedades relativas ao feixe de retas y = ax – 1. Ainda pelo gráfico 6.7, nota-se o desempenho máximo dos alunos na categoria acerto contínuo. Pode-se inferir que, por ser uma questão já muito exercitada e discutida com os alunos na intervenção metodológica, esta questão não causou nenhuma dificuldade aos aprendizes.

A questão seis era complementar às duas questões anteriores. Baseado nelas, o aluno poderia chegar à conclusão que retas cujos ângulos de inclinação são agudos correspondem ao sinal do coeficiente angular “a” positivo.

A sétima é a análoga à quarta, sendo a idéia aqui a de trabalhar com o coeficiente angular “a” negativo e os ângulos de inclinação do tipo obtuso. A oitava questão por sua vez, media a competência do aluno de elencar algumas propriedades relativas ao feixe de retas $y = ax + 4.5$, só que aqui, o parâmetro “a” tem variação através de números negativos.

A questão nove era complementar às duas questões anteriores. Baseado nelas, o aluno poderia chegar à conclusão que retas cujos ângulos de inclinação são obtusos correspondem ao sinal do coeficiente angular “a” negativo. Muitos alunos externaram dificuldades nesta questão porque não entendiam o que a questão estava pedindo. Mas com a intervenção do pesquisador, conseguiram responder corretamente.

6.3.8 Atividade 8 – Funções Lineares

Esta atividade trata de conteúdos relacionados às funções lineares tais como: determinação do zero ou raiz, estudo do sinal e propriedades relativas às retas do tipo $y = ax$ $(a \neq 0)$. O gráfico 6.8 mostra quantitativamente o desempenho dos alunos por questão.

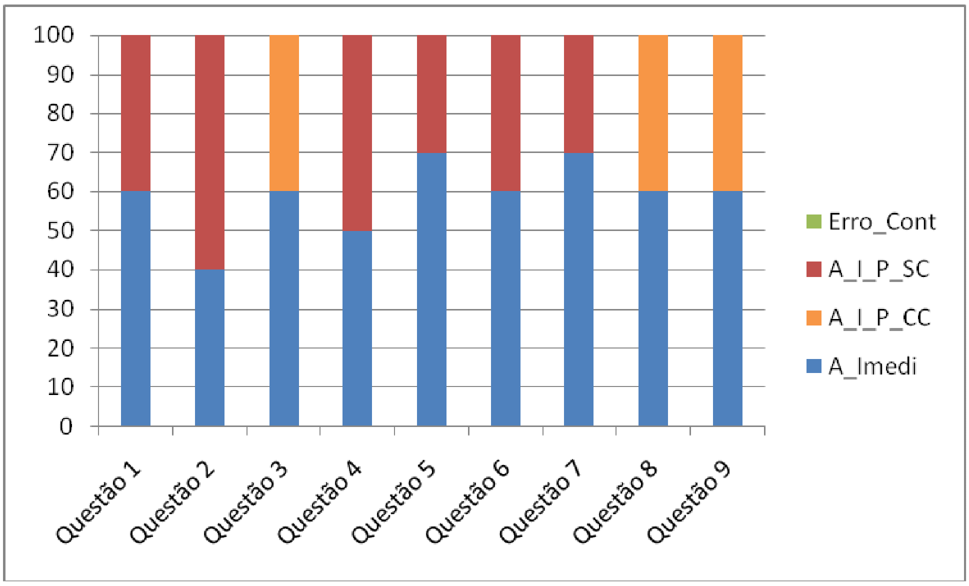


Gráfico 6.8 – Desempenho dos alunos na Atividade 8, por questão.

Por intermédio do gráfico 6.8, nota-se que a primeira questão não foi problemática uma vez que o percentual de erro contínuo foi nulo e o percentual da categoria acerto imediato foi superior ao percentual de acerto com a intervenção do pesquisador sem a mediação do computador. Dessa forma, esta questão pode ser considerada fácil no sentido de que os alunos apenas tinham que apresentar alguns exemplos de funções lineares. Para conseguir isto, eles poderiam voltar ao texto introdutório e basear as suas respostas pelos exemplos mostrados.

A segunda questão objetivava verificar a capacidade do aluno de identificar as funções lineares. Esta questão também não causou dificuldades aos alunos uma vez que, pelo gráfico acima, o percentual de erro contínuo foi nulo. Nela, também se identifica uma boa quantidade de acertos, uma vez que 40% dos alunos acertaram a questão de imediato e 60% erraram, mas conseguiram corrigir seus erros. Observa-se também a ausência da categoria erro contínuo.

A terceira questão constava de três itens e visava verificar o comportamento dos alunos diante do estudo do sinal da função f(x) = 2x. Nela, também se identifica uma boa quantidade de acertos uma vez que 60% dos alunos acertaram e 40% dos alunos conseguiram corrigir seus erros. A intervenção do pesquisador foi realizada mediada pelo computador semelhante àquela descrita na atividade anterior.

Nas questões de números quatro a seis, exigiam-se dos alunos mais conhecimentos sobre operações inversas (multiplicação é a operação inversa da divisão) e discriminação entre as variáveis dependentes e independentes. Nota-se, então, o crescimento da categoria acerto com a intervenção do pesquisador.

Neste momento, muitos alunos externaram a visão de que a ordem das variáveis é vista como irrelevante, ocasionando um obstáculo epistemológico à construção do conceito de funções como afirma Sierpinska (1992). Assim, por exemplo, diante da função y=5x, pedia-se o valor da variável x tal que f(x) = 7. Imediatamente, o aluno substituiu a variável x por 7 e encontrava o valor y= 21.

O protocolo a seguir mostra a dificuldade de uma dupla de alunos em considerar a não simetria das variáveis juntamente com as operações inversas.

PROTOCOLO 14

1. Considerando a função s = -3e, complete a tabela abaixo:

E	s
2	
	7
-2	
	-15

Fonte: Pesquisa Direta

Entrevista:

Janailson: eu divido 7 por -3 ou tem que multiplicar?

E: O que você acha Carlos?

Carlos: Multiplica 7 por -3.

E: Por quê?

Carlos: O -3 não multiplica pelo e?

E: A fórmula é s=-3e. Na tabela, foi dado s=7 e pedido qual valor?

Carlos: O valor de e?

E: E aí?

Janilson: Divido 7 por -3?

Pelo protocolo acima, nota-se a dificuldade dos alunos em distinguirem a variável "s" da variável "e" e também de fazerem manipulações algébricas. De fato, apesar de o aluno ter substituído corretamente na fórmula, ou seja, o valor de s por 7, observou-se a sua dificuldade de trabalhar com a operação inversa. Já o outro aprendiz, por sua vez, tem em mente um raciocínio meramente algorítmico, *sempre quando é dado um valor deve ser multiplicado por -3*.

Diante disso, através de representações de funções por diagramas, houve uma intervenção do professor realçando o papel das variáveis com sua assimetria e de algumas de suas operações. Vejamos a dinâmica dessa intervenção.

PROTOCOLO 15

E: [Neste momento, são atribuídos alguns valores reais à variável "e", obtendo-se valores de s, correspondentes. Logo em seguida, estes pontos são organizados através de diagramas].

E: O que vocês estão observando, para cada valor atribuído a "e" o que acontece com ele, este número.

J: É multiplica pelo -3.

E: Ok! É multiplicado por -3 para obter o valor de s correspondente. E se eu fizesse o inverso, desse primeiramente os valores de "s'", vocês iriam calcular o que, qual variável?

J: O e?

E: Isto! E como é que vocês fariam?

J: Dividia por -3.

E: [Neste momento, houve uma longa intervenção, mostrando que na fórmula s=-3e, a variável "s" está em função da variável "e", e neste caso, a variável s é a variável dependente porque depende do valor atribuído a "e", e a variável "e" era considerada independente porque ela estava livre para receber os números. Além disso, foi mostrada, através de manipulações algébricas, que a função s=-3e era equivalente a função e=-1/3s. Aqui, foi enfatizado que os papéis se invertiam, agora a variável dependente era “e” e a variável independente era “s”].

Pode-se acrescentar que todas essas dificuldades podem também ser acentuadas por obstáculos didáticos baseados em práticas pedagógicas que, segundo Domingues (1995), têm uma fixação exagerada nas manipulações mecânicas com símbolos.

Voltando a analisar o desempenho dos alunos nesta atividade, a oitava questão objetivava avaliar a habilidade do aprendiz em trabalhar com uma família de funções de retas do y=ax com o coeficiente “a” positivo variando.

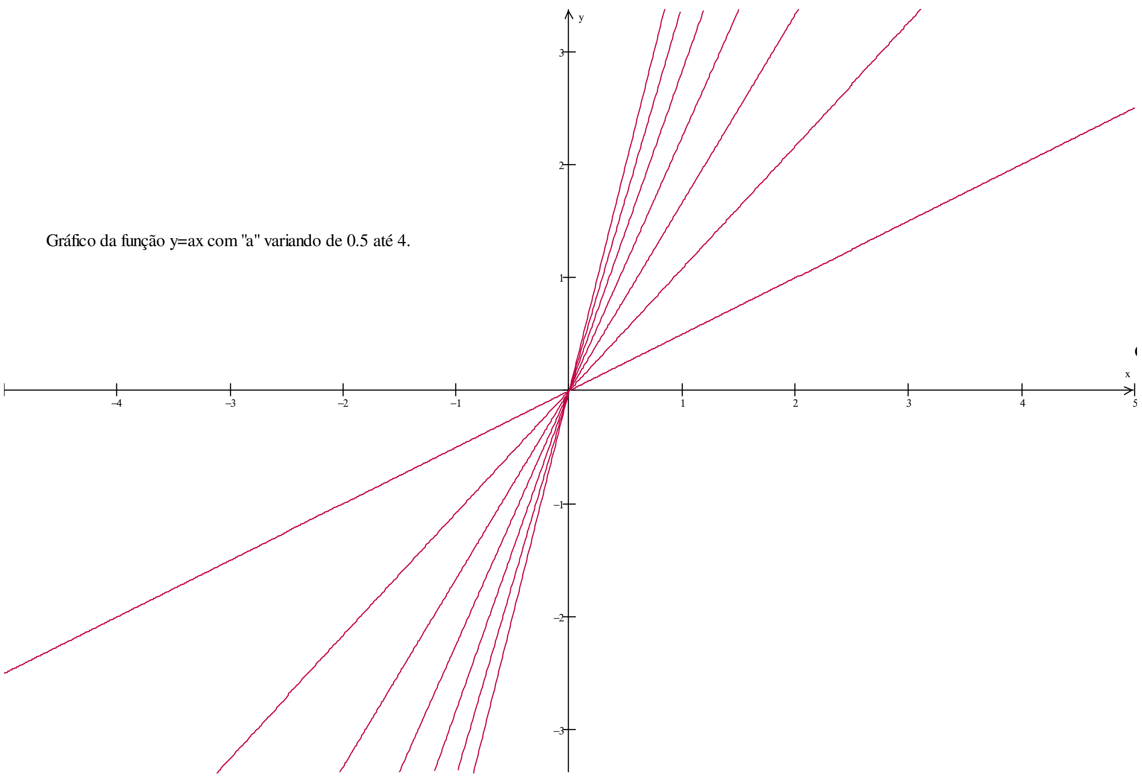


Figura 6.40 – Gráfico da função y = ax com “a” variando de 0.5 até 4.

Por intermédio do gráfico 6.8, observa-se o bom desempenho dos alunos nesta questão, uma vez que não houve a incidência da categoria erro contínuo e, além disso, nesta questão, os alunos lançaram importantes teoremas-em-ação (vide seção 6.5).

No entanto, ainda baseado pelo gráfico 6.8, observa-se o aumento da categoria acerto com a intervenção do pesquisador e a mediação do computador. Através de várias simulações da tela do computador, os alunos corrigiram seus erros respondendo que à medida que o coeficiente angular da função linear f(x) = ax cresce mais as retas dão “impressão” que se aproximam do eixo vertical y.

A nona questão é semelhante à anterior, sendo que o feixe de retas y=ax aqui tem como variação do parâmetro “a” valores negativos. Para evitar repetições desnecessárias e fazendo alguns ajustes, a análise desta questão é a mesma da anterior.

6.3.9 Atividade 9 – Grandezas Diretamente e Inversamente Proporcionais

Nesta atividade, trabalha-se com os alunos as grandezas diretamente e inversamente proporcionais uma vez que se tem em mente desenvolver a idéia de função linear associada à proporcionalidade entre as grandezas distintas. Também são exploradas relações entre grandezas que não podem ser enquadradas em nenhuma das duas anteriormente citadas. O gráfico 6.9 mostra quantitativamente o desempenho dos alunos por questão.

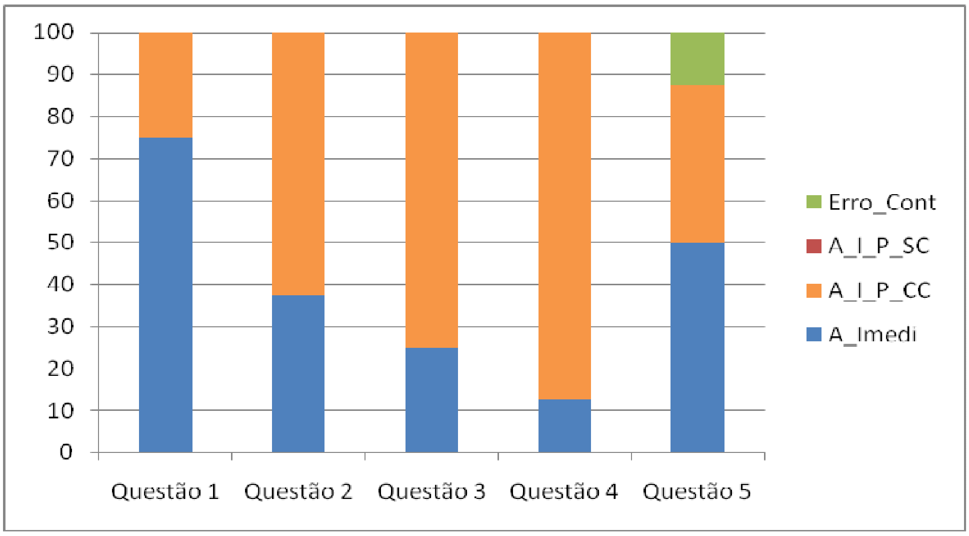


Gráfico 6.9 – Desempenho dos alunos na Atividade 9, por questão.

A primeira questão tratava de uma modelagem e exigia do aluno encontrar uma expressão que relacionasse o total a pagar em função do número de quilogramas de arroz comprados. Por intermédio do gráfico acima, nota-se o ótimo desempenho dos alunos nesta questão uma vez que o percentual de acerto imediato foi superior ao percentual de acerto com a intervenção do pesquisador e a mediação do computador. Isto se deve ao fato deste assunto (modelagem de situações práticas) ter sido amplamente trabalhado com os alunos nas atividades anteriores.

A segunda questão trabalhava com a função linear f(x) = 2x e visava verificar o comportamento dos alunos diante das grandezas diretamente proporcionais. Nesta questão, 25% dos alunos acertaram de imediato a questão e 75% erraram, mas conseguiram corrigir seus erros com ajuda do pesquisador. Inicialmente, eles achavam que para duas grandezas serem diretamente proporcionais bastava verificar simultaneamente o aumento das duas. Veja que, neste caso, há células de imagens conceituais, entrando em conflito com este conceito (VINNER, 1992). No entanto, mediada pelo computador, a intervenção do pesquisador teve uma vital importância para os esclarecimentos aos alunos sobre essas concepções errôneas. O próximo protocolo ilustra este processo.

Utilizando o *Winplot*, trace o gráfico da função f(x) = 4x.

PROTOCOLO 16

a. Complete a seguinte tabela. (Sugestão: Menu: Equação\Inventário\Tabelas de Pontos).

X	y
--3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

b. Explique por que y é diretamente proporcional a x.

RESPOSTA: Por que ele está em função de x, logo quando x aumenta ele tende a aumentar.

c. Nesse caso, qual é a constante de proporcionalidade?

RESPOSTA: a constante 4.

Entrevista

1. E: [Neste momento, foi traçado o Gráfico da função f(x) = 4x no Winplot, e logo em seguida, foi acionado pelo *software* a sua tabela].

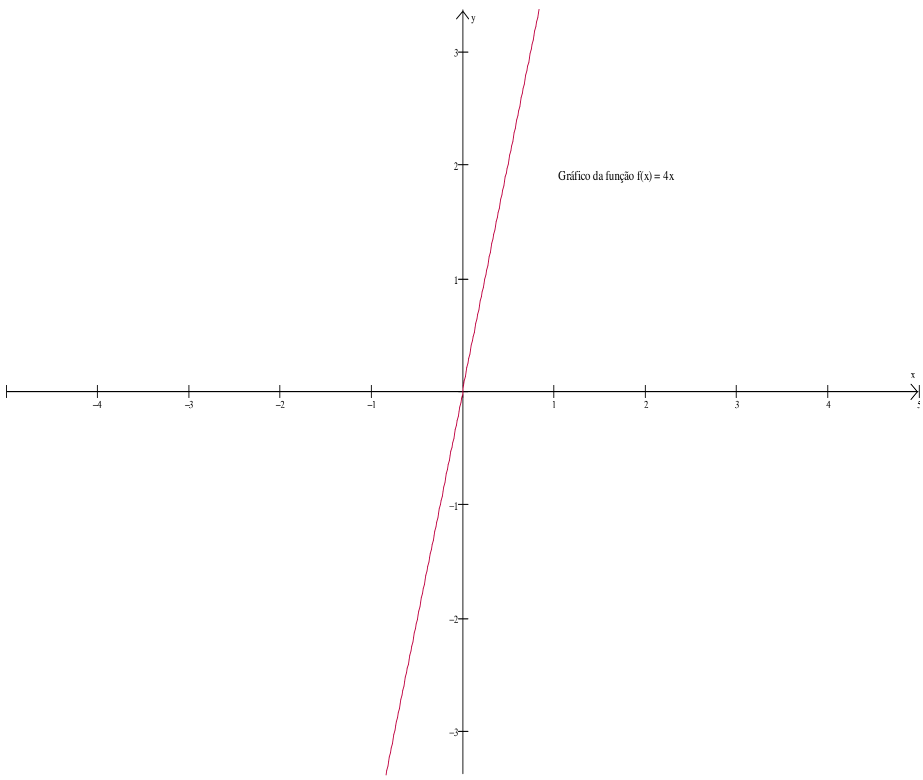


Figura 6.41 – Gráfico da função f(x) = 4x.

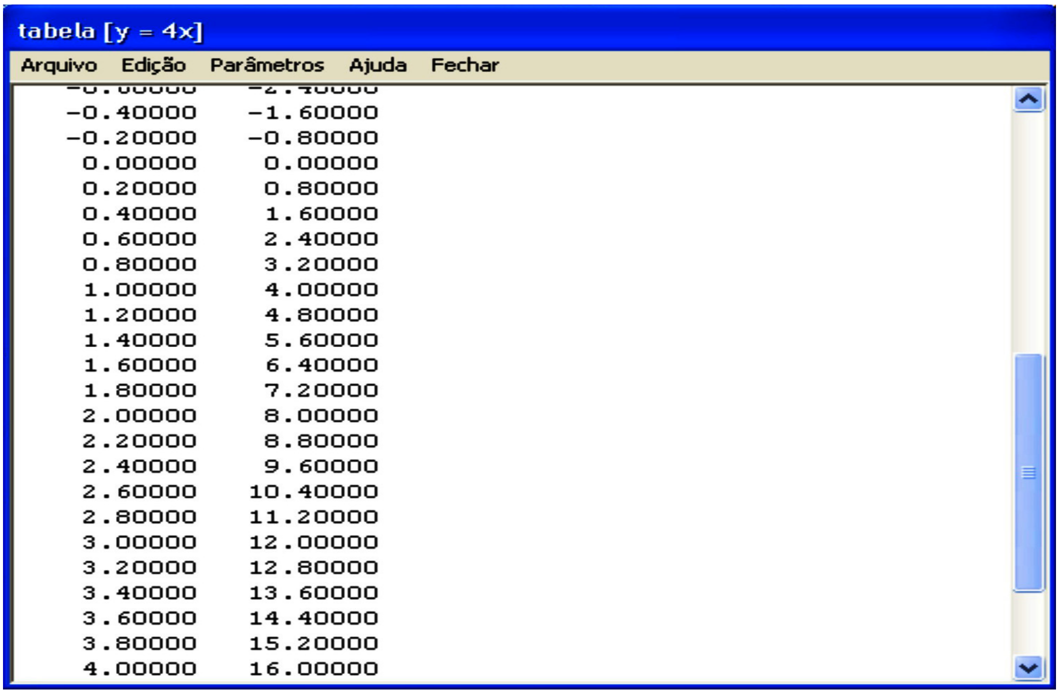


tabela [y = 4x]

Arquivo Edição Parâmetros Ajuda Fechar

-0.40000	-1.60000
-0.20000	-0.80000
0.00000	0.00000
0.20000	0.80000
0.40000	1.60000
0.60000	2.40000
0.80000	3.20000
1.00000	4.00000
1.20000	4.80000
1.40000	5.60000
1.60000	6.40000
1.80000	7.20000
2.00000	8.00000
2.20000	8.80000
2.40000	9.60000
2.60000	10.40000
2.80000	11.20000
3.00000	12.00000
3.20000	12.80000
3.40000	13.60000
3.60000	14.40000
3.80000	15.20000
4.00000	16.00000

Figura 6.42 – Tabela da função f(x) = 4x.

2. E: Jahnser, que relação você notou entre os valores de x e y?
3. Jahser: Quando x aumenta o y também aumenta.
4. E: Neste caso, o y é diretamente proporcional ao x?
5. Jahnser: Aham.
6. E: Por quê?
7. A: O y está em função de x, logo quando x aumenta ele também aumenta.
8. E: No item “c”, você acertou, como foi que você achou que a constante de proporcionalidade era quatro?
9. Jahnser: Todo número é multiplicado pelo quatro [apontando para os números localizados à esquerda da tabela (os valores referentes a x)]
10. E: [Neste momento, foi esclarecido que esta constante encontrada pelo aprendiz poderia ser calculada da seguinte forma: $\frac{12}{3}=4; \frac{8}{2}=4; \frac{4}{1}=4 \text{ etc}$. E, além disso, foi ressaltado que todas estas razões formavam uma proporção: $\frac{12}{3}=\frac{8}{2}=\frac{4}{1}=4$. Aqui, foi trabalhada com a função f(x) = 4x restrita ao intervalo [0, 4]. Tomando como referência o segmento OA_1, o aluno afirmou que multiplicando este segmento OA_1 por 2, o segmento A_1A duplicava, e multiplicando o segmento OA_1 por 3, o segmento A_1A triplicava e assim por diante].

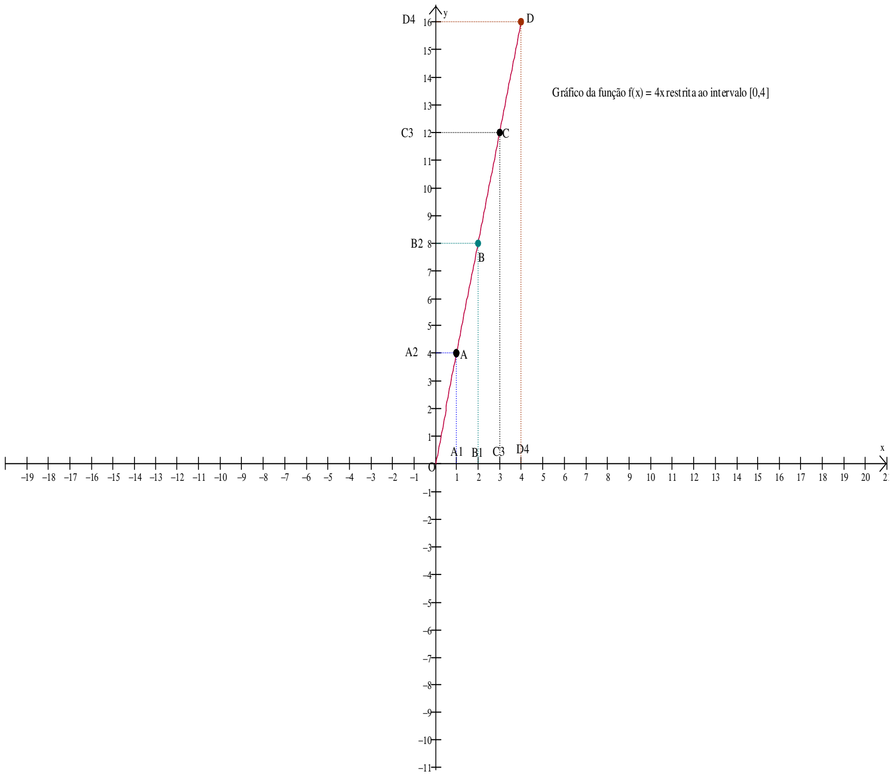


Figura 6.43 - Gráfico da função restrita no intervalo [0, 4].

11. E: [Neste momento, foi traçado o Gráfico da função f(x) = -4x no Winplot, e logo em seguida, foi acionado pelo *software* a sua tabela].

12. E: Janser, que relação você notou entre os valores de x e y?

13. Jahser: Quando x aumenta o y diminui.

14. E: Neste caso, o y é diretamente proporcional ao x?

15. Jahnser: Não!

16. E: Por quê?

17. A: Não, o x aumenta e o y faz é diminuir.

18. E: [Neste momento, foi trabalhado com aluno a função f(x) = -4x restrita ao intervalo [0, 4], e logo em seguida, foi acionada a sua tabela e pedido para o aluno comparar as duas quantidades por meio da razão entre elas (dividir -4 por 1, -8 por 2 e assim por diante)].

19. E: Jahnser, o que você está observando?

20. A: Jahnser: - 4 dividido por 1 dá -4, -8 dividido por 2 dá 4...Ih!Dá uma constante.

21. E: Neste caso, as grandezas são diretamente proporcionais?

22. A: [silêncio].

23. E: Você está percebendo que todas estas razões formam uma proporção $\frac{-4}{1} = -4; \frac{-8}{2} = -4$. Nesse caso, estas grandezas são diretamente proporcionais?
24. A: São.
25. E: Por quê.
26. A: A constante se repete [apontando para o -4].
27. E: Aquilo que você estava pensando, aquilo estava suspeitando estava correto? Ou seja, para serem grandezas diretamente proporcionais uma grandeza tem crescer e a outra também?
28. A: Não obrigatoriamente.
29. E: Como é que você agora vai dizer para que duas grandezas sejam diretamente proporcionais.
30. A: Eu pego e divido elas e se a constante repetir vai ser.

Voltando a analisar o desempenho dos alunos nesta atividade, quanto à terceira questão, alguns alunos externaram dificuldades de modelar o problema, não percebendo inicialmente que, quanto maior o número de ganhadores, menor a quantia da premiação a ser repartida. Por conseguinte, por intermédio do gráfico acima, nota-se o crescimento da categoria acerto com a intervenção do pesquisador e a mediação do computador.

A quarta questão, por sua vez, media a competência do aluno em analisar situações-problema, envolvendo grandezas inversamente proporcionais. A função trabalhada foi f(x) = $\frac{1}{x}, x \neq 0$. Nesta questão, apesar de ter havido o aumento da categoria acerto com intervenção do pesquisador e a mediação do computador, pode-se considerar o bom desempenho dos alunos uma vez que o percentual de erro contínuo foi nulo. Como houve uma intervenção na primeira questão, apontando e corrigindo as falsas concepções sobre o assunto grandezas diretamente proporcionais, nesta atividade, os alunos estavam mais abertos a aceitar que nem sempre num par de grandezas elas podem ser consideradas inversamente proporcionais quando uma aumenta e outra diminui.

Esse processo de intervenção foi semelhante ao já citado na primeira questão. O pesquisador, mediado pelo ambiente computacional, analisou várias funções com suas tabelas (inclusive foi retomado a análise da função f(x) = -4x), mostrando a relação de dependências entre elas.

Na quinta questão, um aluno teve dificuldades e não conseguiu corrigi-la, mesmo com auxílio do pesquisador. Outros quatro erraram inicialmente, mas, durante a intervenção, conseguiram obter um resultado satisfatório. Estes alunos, diante da tabela associada à função f(x) = 3,5x+2, achavam que a grandeza y era diretamente proporcional a x uma vez que esta função é crescente em todo o seu domínio. Durante a intervenção e, enfatizando a idéia da constante de proporcionalidade, foi esclarecido que, neste caso, estas grandezas nem são diretamente proporcionais nem inversamente.

6.3.10 Atividade 10 - Função Identidade

Esta atividade proporciona ao aluno o estudo das Funções do tipo Identidade (f(x) = x). Lendo a introdução, o estudante se depara com a situação de uma loja que vende qualquer produto por um real. O gráfico 6.10 mostra quantitativamente o desempenho dos alunos por questão.

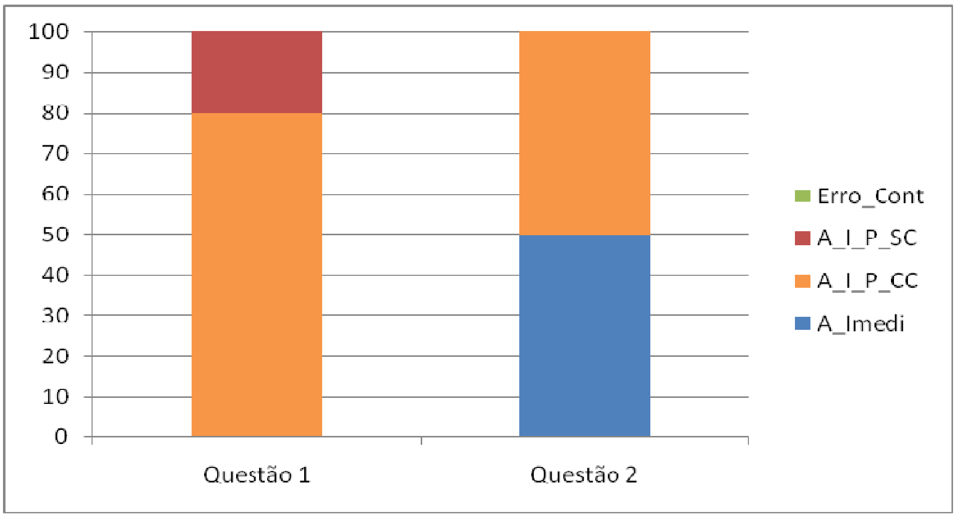


Gráfico 6.10 – Desempenho dos alunos na Atividade 10, por questão.

Esta atividade consiste em duas questões. A primeira questão visa medir a capacidade do aluno em analisar a função identidade f(x) = x quanto ao estudo do sinal. Em um dos seus itens, retorna-se ao problema da loja onde qualquer mercadoria é vendida ao consumidor por um real. Nessa realidade, o estudante deverá entender que x = 0 (o zero ou raiz da função identidade f(x) = x) indica que nenhuma mercadoria foi vendida.

Por intermédio do gráfico anterior, observa-se que a primeira questão tem um alto índice de ocorrências da categoria acerto com intervenção do pesquisador e a mediação do computador. Inicialmente, uma dupla apresentou dificuldades de calcular o zero ou raiz real da função f(x) = x (o item "a"). Após a intervenção do pesquisador, perceberam que a raiz é o próprio zero (vide protocolo abaixo).

PROTOCOLO 17

a) Utilizando o *Winplot*, trace o seu gráfico.

1. Dada a função f(x) = x, responda e faça o que se pede:

a) Qual o zero ou raiz dessa função f? é o valor de x

c) **Complete a seguinte tabela. (Sugestão: Menu: Inventário\ Tabela)**

X	Y
-2.00000	-2
-1,6	-1.60000
-1.00000	-1
-0.2	-0.20000
0	0
1	1
2	2
3	3

d) Imagine que você seja o dono de uma loja "POR UM REAL".
Você deve ter percebido que a função venda desse estabelecimento comercial é uma função identidade f(x) = x. Nesse sentido, qual seria o significado comercial do zero ou raiz da função? Para saber o seu lucro.

e) Para que valores de x temos f(x) >0? quando o x for maior que zero

f) Para que valores de x temos f(x) < 0? quando x for menor que zero.

Figura 6.44 – Acerto com intervenção do pesquisador sem a mediação do computador.

Entrevista:

1. E: Vamos analisar o item “a”, vocês disseram que o zero ou raiz da função é o valor de x. Que valor é esse?
2. Davi: O valor de x é x.
3. E: Como assim?
4. Davi: [Apontando para f(x) = x]. O x é 80 o valor é 80.
5. E: Você concorda Emerson?
6. Emerson: Concordo.
7. E: Por quê?
8. Emerson: O x é 40 dá também 40.
9. E: Vocês estão dizendo que quando a variável x assume 80 sua imagem é 80. Quando a variável x assume 20 a sua imagem é 20. Ok! Vocês estão certos. Mas o item “a” está pedindo o zero ou raiz da função f(x) = x. E aí, qual é o valor do zero ou raiz da função f(x)?
10. Emerson: Professor, cadê a equação?
11. E: Que equação?
12. Emerson: A gente não pega uma equação pra saber raiz?
13. E: Acho que estou entendendo o seu raciocínio! Veja Davi, determine o zero ou raiz da função f(x) = 7x-14.
14. [Davi calculou a raiz da função 7x-14=0 resultando x=2]
15. E: Qual é o zero ou raiz da função Emerson?
16. Emerson: 2.
17. E: Mas quem é zero ou raiz da função f(x) = x?
18. [A dupla manteve-se calada por pequeno período de tempo]
19. E: Vou dá uma dica qual o valor de x que satisfaz f(x) =0.
20. Davi: o zero.
21. E: Por que Emerson?

22. O zero vai no zero.

23. No item "a" vocês responderam que o zero ou raiz da função é o valor de x, agora estão sabendo que o zero ou raiz da função f(x) = x é o próprio zero. Agora, vamos analisar o item "d". [Reli a questão em voz alta]. Vocês responderam "para saber o seu lucro". Aí vocês acertaram ou erraram:

24. Emerson: E não é para saber o lucro não?

25. E: Não sei! Estou querendo entender o raciocínio de vocês. O que você acha Davi?

26. [Davi manteve-se calado por um pequeno período de tempo]

27. E: O zero ou raiz da função é próprio zero. O x=0 é lucro?

28. Davi: Não.

29. E: È o quê?

30. Davi: Dá empate.

31. E: Ok! Nem é lucro nem prejuízo. [Aqui, o pesquisador explicou que, neste caso, a loja quando não vende nenhum produto está associado ao valor x=0].

32. E: Vamos analisar o item "e". [Reli o item "e" em voz alta]. Vocês acertaram! Os valores de x maiores do zero tornam f(x) >0. Como foi que vocês pensaram?

33. Emerson: Pela tabela!

34. E: Como assim Davi?

35. Davi: O x positivo tem o y positivo. O x negativo tem o y negativo.

36. E: Você concorda Emerson?

37. Emerson: Concordo.

38. E: Por quê?

39. Emerson: È como o Davi falou, o x positivo tem o y positivo. O x negativo tem o y negativo.

Pelo protocolo acima, observa-se a dificuldade inicial da dupla de entender que a raiz real da função f(x) = x é x=0 (linhas 9 a 18). Eles estão habituados a encontrar a raiz de ax+b=0, mas não imagina em associar à equação x=0 a função f(x) = x para calcular a raiz real. Além disso, não questionam qual o valor de x que satisfaz f(x) =0. Desejam logo resolver uma equação (linhas 10 a 13).

A dupla errou o item "d" porque errou o item "a". Respondendo que o zero ou raiz da função f(x) = x é o valor de x naturalmente iriam responder que a interpretação do zero ou raiz da função serve para "saber o seu lucro". Note que os dois erros estão conectados. Quando souberam que o zero ou raiz da função era o próprio zero, reavaliaram a sua resposta (vide linhas 24 a 32 do protocolo acima).

Voltando para a atividade ora em análise, a segunda questão exige de o aluno perceber invariantes relativos ao feixe de retas y = x+b, a saber, retas paralelas, interseção do gráfico com o eixo horizontal, translações em relação à reta y= x.

Ainda pelo gráfico 6.10, nota-se o bom desempenho dos alunos nesta questão, uma vez que, entre eles, 50% acertaram imediatamente e os outros 50% erraram, mas conseguiram consertar seus erros com intervenção do pesquisador. Através do computador, os alunos puderam lançar mão de teoremas em ação que guiavam as suas resoluções (vide seção 6.5).

6.3.11 Atividade 11 – Funções Constante

Esta atividade trata das funções constantes (f(x) = k) e envolve oito questões. Ao estudar os conteúdos desta atividade, o estudante deve ter em mente que as funções constantes são casos particulares das funções do primeiro grau. O gráfico 6.11 mostra quantitativamente o desempenho dos alunos, por questão.

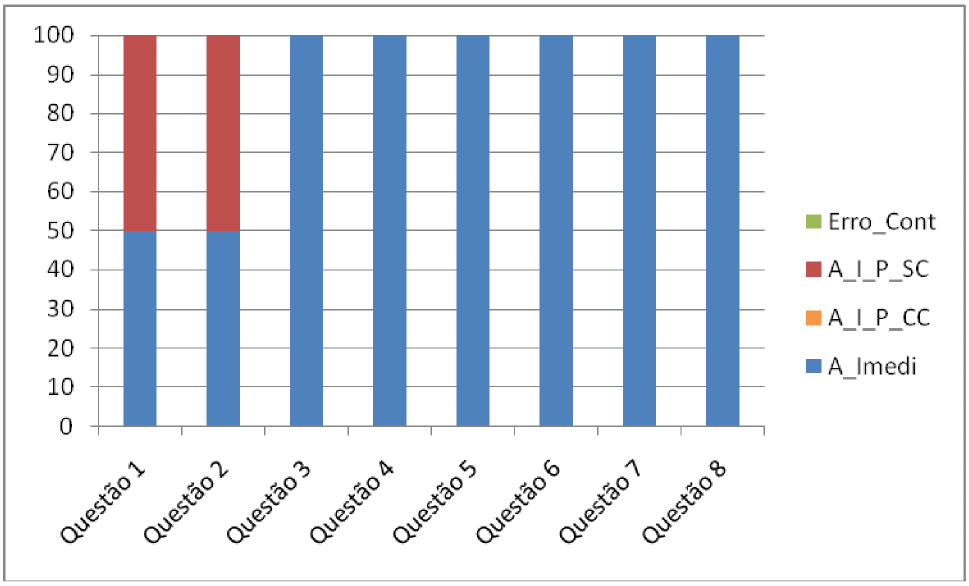


Gráfico 6.11 – Desempenho dos alunos na Atividade 11, por questão.

Por meio do gráfico 6.11, percebe-se que os alunos tiveram ótimo desempenho ao longo das questões. Na primeira questão, 50% dos estudantes erraram, mas conseguiram corrigir seus erros com nossa intervenção. Os outros 50% acertaram de imediato a questão.

A primeira questão envolvia a capacidade de o aluno traçar o gráfico de um preço constante em função dos meses. No seu enunciado, não foram indicadas as escalas ou em que eixo o aluno deveria dispor os dados relativos a cada variável. Nesse sentido, um aluno traçou um esboço do gráfico, colocando o eixo horizontal como o eixo da variável dependente (preço a pagar) e o eixo vertical como o eixo da variável independente (os meses do ano).

Houve uma discussão coletiva esclarecendo que a escolha no outro caso (preço x meses) é apenas uma questão de convenção, dirigida para facilitar a leitura e interpretação dos valores do gráfico. Dessa forma, o próprio aluno reconheceu que era preferível colocar no eixo horizontal os meses (variável independente) e no eixo vertical, o preço (variável dependente), porque assim a leitura dos dados ficaria mais clara.

Uma dupla teve o raciocínio de dividir 983 por 6, quando questionados um deles disse: *"Ela tem que juntar né? Então cada mês ela terá que ter 163, 83!"*. Aqui, percebe-se uma deficiência na interpretação dos dados da questão, por um lado, confundindo preço constante em função dos meses, por outro, com a quantidade total dividida pelo número de meses.

A segunda questão exige do estudante a habilidade de lidar com retas do tipo y=2 com suas propriedades. A terceira questão exige do aprendiz completar a tabela com alguns valores de x e y da função y = 2.

A quarta questão é baseada nas duas anteriores e visa medir a competência do aluno de determinar o conjunto imagem e o domínio da função ora em análise. A quinta questão tem como objetivo observar o comportamento dos alunos diante do feixe de retas paralelas y = k, k>0. A sexta questão é análoga à anterior. Contudo, para resolvê-la, o aluno tem que lidar com um feixe de retas que tem como variação de k, números negativos.

Por intermédio do gráfico acima, nota-se que o desempenho da segunda questão foi análogo à primeira questão e, a partir da terceira questão, nota-se o excelente desempenho dos alunos uma vez que houve uma totalidade de acertos imediatos. Isto pode ser explicado pela facilidade dos alunos em perceberem invariantes relativos aos gráficos das funções constantes. Assim, por exemplo, eles não têm dificuldades de perceber que a funções do tipo y = k (k<0) são paralelas ao eixo x e ficam abaixo deste eixo porque a interseção do seu gráfico com o eixo vertical y é numa ordenada negativa.

6.3.12 Atividade 12 – Definição de Função

Nesta atividade, o conceito e os subconceitos de função são tratados numa perspectiva sistematizada, ou seja, é apresentada a sua definição com exemplos e contra-exemplos. O gráfico 6.12 mostra quantitativamente o desempenho dos alunos por questão.

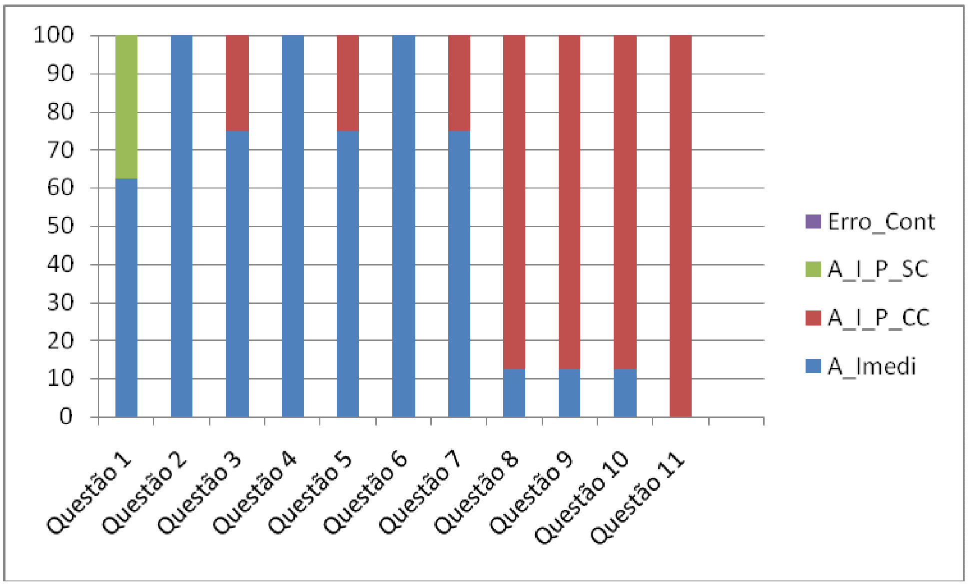


Gráfico 6.12 – Desempenho dos alunos na Atividade 12, por questão.

Na primeira questão, 37,5% dos alunos tiveram dificuldades, mas conseguiram corrigir seus erros com a nossa mediação. Os outros 62,5% acertaram de imediato a questão. Esta questão mede a capacidade do aluno em lidar com a representação de função por diagramas e aplicar a definição de Dirichlet. Pelo fato de já ter sido trabalhado no teste diagnóstico e na introdução desta atividade, não houve uma incidência de erros contínuos.

A segunda questão visa verificar se o estudante apreendeu a técnica de utilizar o teste da reta vertical para saber se o gráfico de uma relação representa ou não uma função. Nesta questão, é especificamente trabalhado o gráfico da relação $f(x) = \sqrt{x - 1}, x \geq 1$.

A terceira questão é análoga à anterior, sendo analisado aqui, o gráfico da relação $x^2 + y^2 = 1$. Nesta questão, 75% dos alunos acertaram de imediato e os 25% restante erraram, mas com o auxílio do pesquisador, conseguiram corrigir seus erros. Esta fase de intervenção será mostrada a seguir.

PROTOCOLO 18

ATIVIDADE Utilizando o software educativo *GRAGHMÁTICA* verifique se o gráfico da equação $x^2+y^2=1$ representa uma função. Sugestão: Trace os gráficos de $x^2+y^2=10$ e x = 2 no GRAPHMATICA.
INSERIR A RESPOSTA DA QUESTÃO: Resposta: È função ALUNOS: Antônio Davi e Emerson:

Entrevista

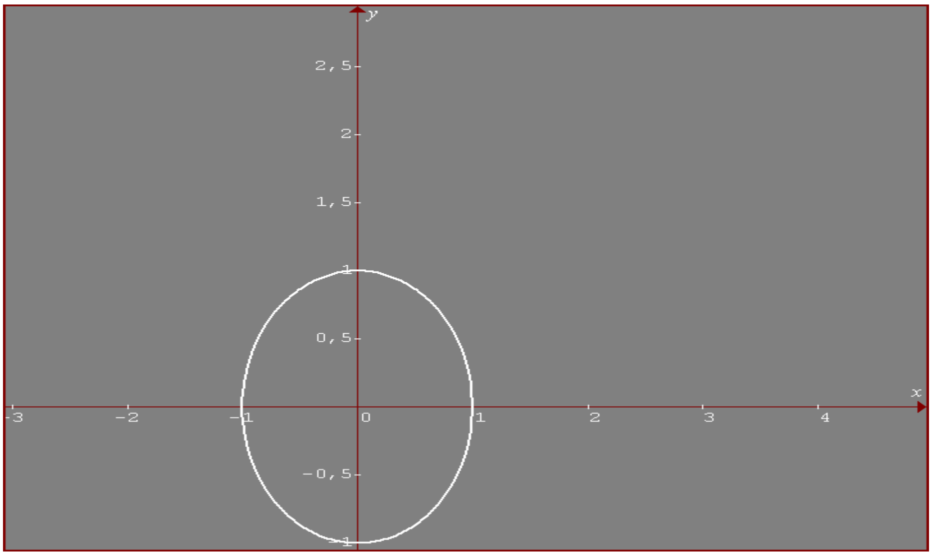


Figura 6.45 – Gráfico da relação $x^2+y^2=1$ traçado no *GRAGHMÁTICA*.

1. E: Por que vocês responderam que era função?
2. Emerson: Porque tem uma fórmula com x e y.
3. E: Você concorda Davi?
4. A: [O aluno passou um pequeno período de tempo calado].

5. E: Irei dar uma dica! Através do computador consultem a tabela dessa função.

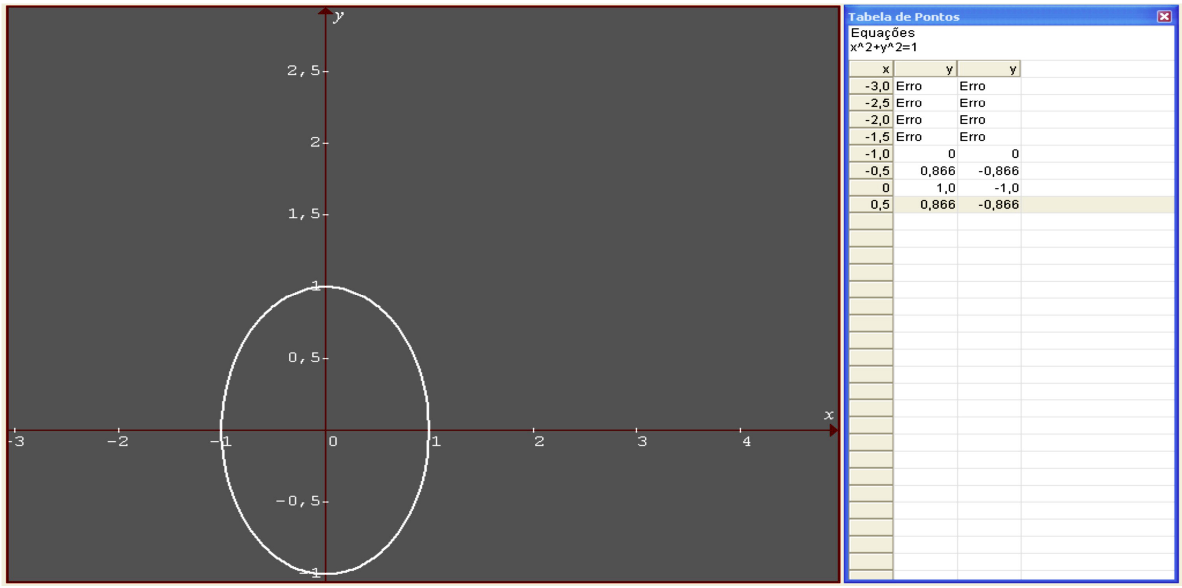


Figura 6.46 – Gráfico e tabela da relação $x^2+y^2=1$ traçado no *GRAGHMÁTICA*.

6. A: [O aluno Davi tomou a iniciativa de consultar a tabela do *software* e verificar a coluna da direita com a coluna da esquerda].
7. E: E aí?
8. Davi: Para o valor do zero tem duas imagens + 1 e -1.
9. E: Ok! São dois valores de y que correspondem à variável x= 0: +1 e -1. Nesse caso Emerson, podemos afirmar que pode ser função?
10. Emerson: Não!
11. E: Por quê?
12. Emerson: porque um único elemento de 0 está relacionado com dois elementos +1 e 1.
13. E: Mas por que agora a pouco vocês disseram que era?
14. Davi: Porque a gente não estava levando em conta este pedaço negativo [apontando para a semicircunferência situada abaixo do eixo x].
15. E: Como assim? Estou querendo entender melhor o seu raciocínio.
16. Davi: Esta reta intercepta o círculo em dois pontos. [Apontando para a reta x= 2 traçado pelo ambiente computacional Winplot].
17. E: Nesse caso, você está usando o teste da reta vertical.
18. Davi: o teste da questão 1.

Mediado pelo computador, o pesquisador sugeriu que os alunos saíssem da representação gráfica e fossem para a representação tabular. Davi, recorrendo a esta representação, pôde verificar que o gráfico da equação $x^2+y^2=1$ não era de uma função. Após a leitura da tabela, o outro aprendiz, Emerson, percebeu que esta equação não representava uma função (linhas 10 a 13). Inicialmente, o conceito de função para ele estava associado à uma expressão analítica com x e y, próximo a um obstáculo epistemológico apontado por Sierpinska.

Após esta entrevista, houve uma longa intervenção do pesquisador, esclarecendo o teste da reta vertical e relacionando-o com a representação tabular. Também foi discutido que nem toda expressão analítica com as variáveis "x" e "y" pode representar uma função. Observa-se a familiaridade dos aprendizes de recorrerem à outra representação para vetar uma hipótese.

A quarta questão visa familiarizar o estudante com o ambiente computacional *Int. Diagramas\ Vertical Line Test*. Utilizando o menu *Relation List*, ele deverá escolher uma equação e decidir se seu gráfico representa uma função, recorrendo ao teste da reta vertical.

A quinta questão é análoga à anterior. Todavia, neste contexto, o aprendiz ao acionar o menu *Sketch Tool* deverá desenhar algumas curvas e decidir se elas representam o gráfico de uma função.

A sexta questão visa verificar se o aluno aprendeu a técnica de utilizar o teste da reta horizontal para saber se o gráfico de uma função representa ou não uma função um a um (bijetora). A sétima questão, por sua vez, tem como objetivo averiguar a competência do aluno em fazer o estudo do sinal da função y=2x. Observando o gráfico 6.12, nota-se o bom desempenho dos alunos ao longo das questões de número dois a sete.

Contudo, nota-se o crescimento da categoria acerto com intervenção do pesquisador e a mediação do computador nas quatro últimas questões. Para evitar repetições desnecessárias, elas serão analisadas conjuntamente.

O item "g" de cada questão acima citada estava interligado com os itens anteriores (itens “a” e “f”) e exigia dos alunos uma capacidade de reunir os invariantes percebidos anteriormente numa conclusão. Assim, por exemplo, na oitava questão, eles deveriam responder que quando uma função linear f(x) = ax possui um ângulo de inclinação agudo, o seu sinal é positivo para valores maiores do que x=0.

Muitos alunos externaram dificuldades de entender o que o enunciado da questão pedia e por isso deixavam em branco. Outros sabiam expressar verbalmente a conclusão, mas tinham deficiências de passar essa linguagem natural para a linguagem matemática. Assim, no citado exemplo, uma aluna percebia a conclusão, mas não conseguia escrever “y >0 para x>0”.

Alguns alunos confundiram o sinal da função com o sinal da variável x. Fato este já comentado anteriormente (vide atividade seis e principalmente os protocolos 10 e 11). Assim, por exemplo, ao trabalhar com a função f(x) = -2x +1, duas alunas acharam que y>0 para x>½ porque o zero ou raiz desta função x=½ é positivo.

Todavia, ainda analisando o gráfico 6.12, nota-se a ausência da categoria erro contínuo nessas questões (questão de número 8 a 11). Através da intervenção do pesquisador mediada pelo ambiente computacional *Winplot*, os alunos conseguiram depurar seus erros. A dinâmica desta intervenção foi análoga àquelas realizadas nas atividades anteriores.

6.3.13 Segunda Avaliação

A segunda avaliação compreendeu dez questões e tem como objetivo avaliar a compreensão do aluno sobre principais subconceitos de funções tais como o conjunto domínio, o conjunto imagem, o estudo da variação do sinal de funções, relação entre as grandezas (grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais e nem diretamente nem inversamente). O Gráfico 6.13 mostra quantitativamente o desempenho dos alunos por questão.

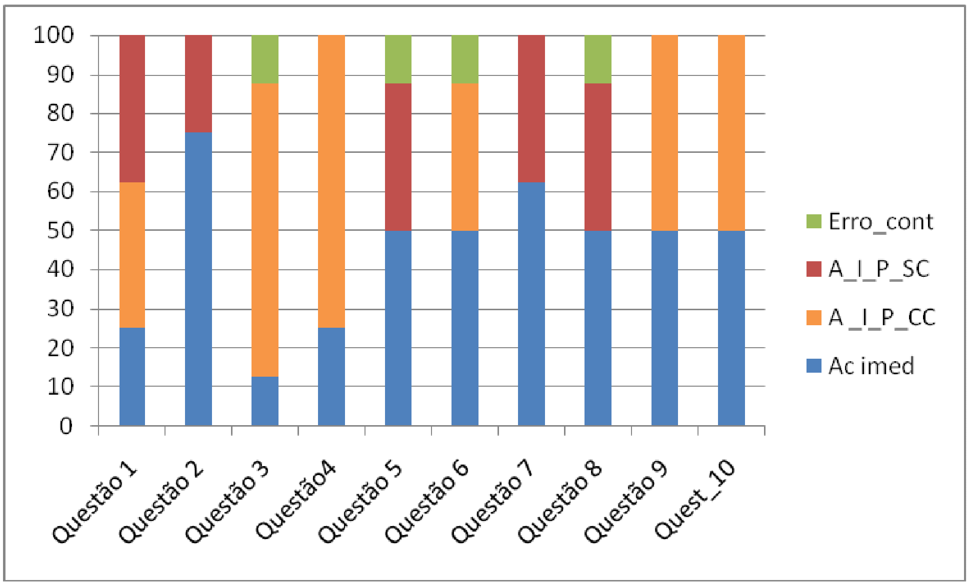


Gráfico 6.13 – Desempenho dos alunos na Segunda Avaliação, por questão.

A primeira questão visa verificar o entendimento do aluno sobre o conceito de funções. Analisando-a, nota-se pelo gráfico acima, a ausência da categoria erro contínuo e, além disso, observa-se o que o percentual da categoria acerto com a intervenção do pesquisador e a mediação do computador é o mesmo para a categoria acerto com a intervenção do pesquisador sem a mediação do computador.

Percebeu-se, a partir das entrevistas e da análise da atividade, que a maioria dos alunos não apresentou a definição formal de função e sim, a sua forma pessoal de interpretar o conceito de função. Nesse sentido, muitas imagens mentais foram formadas. Assim, por exemplo, alguns alunos pensam que toda função é uma relação entre duas variáveis na qual uma é dependente e a outra é independente e, além disso, para ser função basta ter variáveis x e y.

O protocolo a seguir mostra como o pesquisador interveio para que o aluno se convencesse que a concepção que ele tinha sobre funções era errônea. Neste caso, a aluna tem uma forte crença que a relação $x^2+y^2=1$ é uma função porque está representada por uma equação, obtendo resultados e se associa a uma tabela.

PROTOCOLO 19

Questão 1 do pós-teste Em matemática, o que você acha o que é função?
Cristiane Resposta: È a forma de estabelecer número em uma tabela

Entrevista:

1. E: Você está lembrado daquela definição através dos diagramas!
2. A: [Silêncio].
3. E: Aquela definição o que é função?!
4. A: É o elemento de A que corresponde ao de B é?
5. E: [Para a aluna basta que haja correspondência para ser função].
6. E: Isso! Você se lembra daquela definição? Como seria?
7. A: [Pausa feita pela aluna].
8. E: Você pode dizer com suas próprias palavras!
9. A: Que um elemento de A tem que estar ... [pausa].
10. E: Continue!
11. A: A um único correspondente de B!
12. E: A um único?
13. A: Ahã.
14. E: vamos analisar este diagrama. Aqui seria função? [Neste momento, trabalhou-se com o diagrama de uma relação].
15. E: Aqui seria função?
16. A: Não!
17. E: Por quê?
18. A: Não é não... [fazendo um aceno que estava entendendo e percebendo mais elementos para analisar].
19. E: Por que não é?
20. A: Por que um elemento de A está correspondendo a dois de B!
21. E: Vamos para o item B!
22. E: Seria função?
23. A: Seria!

24. E: Por quê?

25. A: Porque se ele não tiver no A fica B... O A ele não tenha...é... Assim... como posso falar... porque tendo correspondente em B... assim... Sendo ligados... Vai ter um único elemento tanto em A como em B... Acho que é função.

26. E: [Observa-se seu raciocínio confuso. A aluna não atentou que falta um elemento de A que não tem um único elemento de B associado. Além disso, a sua preocupação maior é saber se existia um elemento de A que tinha dois correspondentes em B.]

27. E: Vamos Revisar! Para cada elemento de A existe um único elemento de B. Agora, quando eu digo para você "para cada elemento de A", o que você entende?

28. A: Todos de A têm que está relacionado com um único elemento de B!

29. E: Nesse caso seria?

30. A: [pausa]. Não!

31. E: Por quê?

32. A: Porque está faltando para o quatro!

33. E: [Neste momento, foi trabalhado no Graphmática as representações gráfica e tabular da equação $x^2 + y^2 = 1$

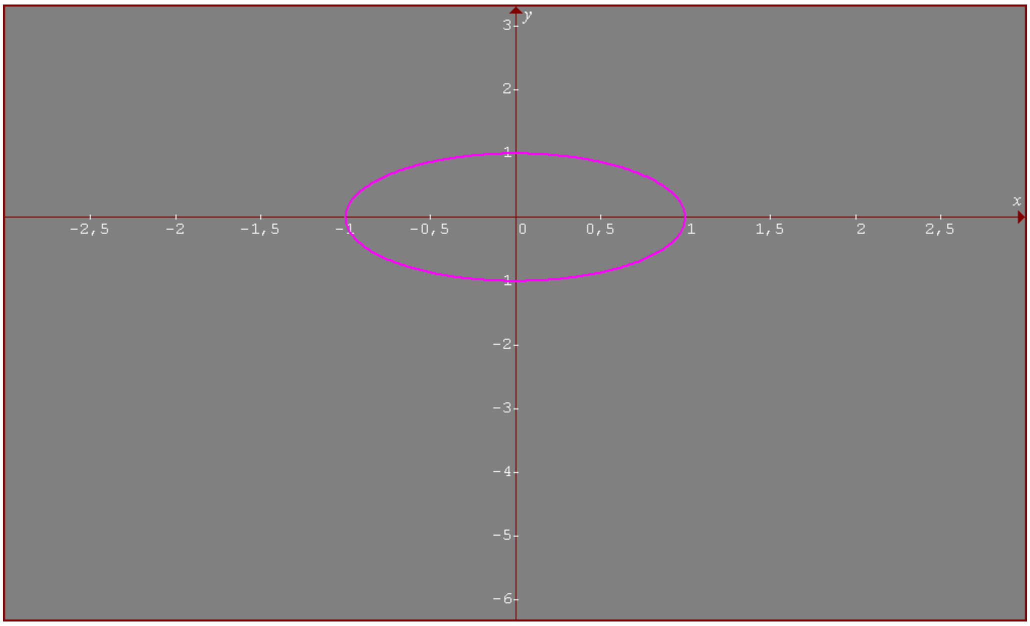
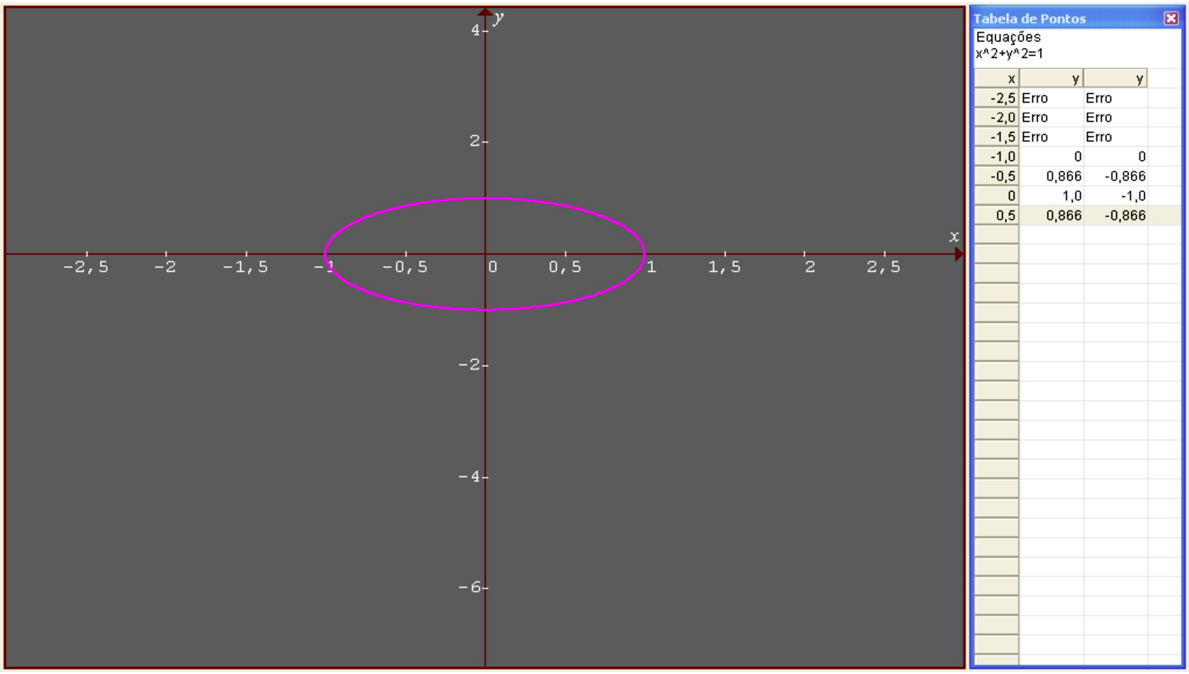


Figura 6.47 – Gráfico da relação $x^2+y^2=1$

34. E: Este gráfico representa uma função?

35. A: [Silêncio. Deve-se frisar que a aluna poderia ter feito o teste da reta vertical e verificar que este gráfico não representa uma função. Neste momento, foi acionada a tabela desta relação].



x	y	y
-2,5	Erro	Erro
-2,0	Erro	Erro
-1,5	Erro	Erro
-1,0	0	0
-0,5	0,866	-0,866
0	1,0	-1,0
0,5	0,866	-0,866

Figura 6.48 – Gráfico e tabela da relação $x^2+y^2 = 1$.

36. E: Olhando para a tabela, quais são as imagens do número 0?

37. A: Mais um e menos um.

38. E: Para responder a esta questão você disse que "É uma forma de estabelecer número em uma tabela". Nesse caso aqui eu estabeleci os números em uma tabela! Seria função?

39. A: Seria!

40. E: [Dificuldade de passar da representação tabular para a representação por diagramas].

41. E: Por quê?

42. A: Porque é uma equação e iria dar um resultado e ia corresponder na tabela!

43. E: [Para ela, uma relação para ser função tem satisfazer três critérios: ter uma equação, dar um resultado e corresponder na tabela].

44. E: Faça o seguinte! Pegue esses dados na tabela e represente os dados através de diagramas.

45. E: [A aluna fez a associação correta e a representação por diagramas também].

46. E: Seria função?

47. A: Não!
48. E: Por quê?
49. E: Porque os elementos de A têm que estar relacionados a um único elemento de B!
50. E: Então isso que você falou sobre função está correto?
51. A: Não!
52. E: Por quê?
53. A: Nem tudo que é tabela é função viu?
54. E: O que seria função?
55. A: Um único elemento de A está relacionado com um único elemento de B.

A aluna viu que temos uma relação que relaciona x e y e uma tabela, mas não é uma função. Pela resposta da aluna, vemos que a concepção imagem da aluna sobre o conceito de função é uma maneira de trabalhar com números em uma tabela. Sobre a definição de função, a aluna se concentra na segunda parte de definição: existe um único elemento de B. A sua preocupação maior é verificar se num diagrama não existe um elemento de A que está associado a dois elementos de B (linhas 9, 11, 23, 25 e 28). Se não acontecer este caso, é suficiente para aluna classificar esta relação como função. Todavia, ao se trabalhar com a representação de tabelas, mesmo sabendo que o número zero (0) possui duas imagens, -1 e +1, ela entra em conflito cognitivo, afirmando que essa tabela representa uma função, tendo uma justificativa baseada no argumento de ser uma tabela conjugada a uma equação e apresentar resultados (linha 42). Após a intervenção do pesquisador, sugerindo uma alternância de representações, passando da tabular para a representação de funções através de diagramas, a aprendiz começa a perceber que nem toda tabela com números pode representar uma função. Esta imagem mental já tinha sido encontrada por Vinner (1992).

Agora, dando continuidade a analisar o desempenho dos alunos nesta atividade, iremos ter como foco de atenção a segunda questão.

Essa questão pede para o aluno citar cinco exemplos de funções. A idéia maior é verificar quais os principais protótipos criados pelos alunos ao estudar o conceito de função. O gráfico 6.14 mostra quantitativamente os protótipos concebidos pelos alunos.

Gráfico 6.14 – Protótipos categorizados

Por intermédio do gráfico acima, observa-se que o protótipo mais freqüente foi aquele associado à função afim. Além disso, também os alunos tiveram como modelo errôneo de funções as equações.

Também alguns alunos têm como modelo de função as funções angulares e as funções geométricas. Isto aponta um engano dos alunos quanto aos subconceitos de função, confundindo o conceito de coeficiente angular com os tipos de funções. Quanto ao segundo protótipo citado, pode-se inferir que alguns alunos se enganaram, associando os tipos de função quanto a uma de suas representações, a geométrica (gráfica).

Através da intervenção sem o computador, foram discutidos e revisados os tipos de funções com seus principais exemplos, sobretudo as funções do tipo afim, sobre as quais foi enfatizada a diferenciação dos seus coeficientes (angular e linear). Quanto ao esclarecimento de que nem sempre uma equação pode ser considerada uma função, foi feito na terceira questão.

A terceira questão visa medir a capacidade do aluno em verificar se a equação $5x+4=0$ representa uma função. Por intermédio do gráfico acima, pode-se notar o bem desempenho dos alunos nesta questão, uma vez que a soma das duas primeiras categorias (acerto imediato e acerto com a intervenção do pesquisador e a mediação do computador resultou quase 90%.

Nota-se ainda pelo gráfico anterior que, de todas as questões da segunda avaliação, esta questão, juntamente com as duas seguintes, foi aquela que exigiu mais a intervenção do pesquisador.

Através do computador, foram mostradas algumas equações que não podem ser consideradas como representações algébricas de uma função. Utilizando o *Graphmática*, os alunos puderam perceber que a equação 5x+4=0 não representa uma função porque para o elemento $x = -0,8$ irão existir infinitas imagens.

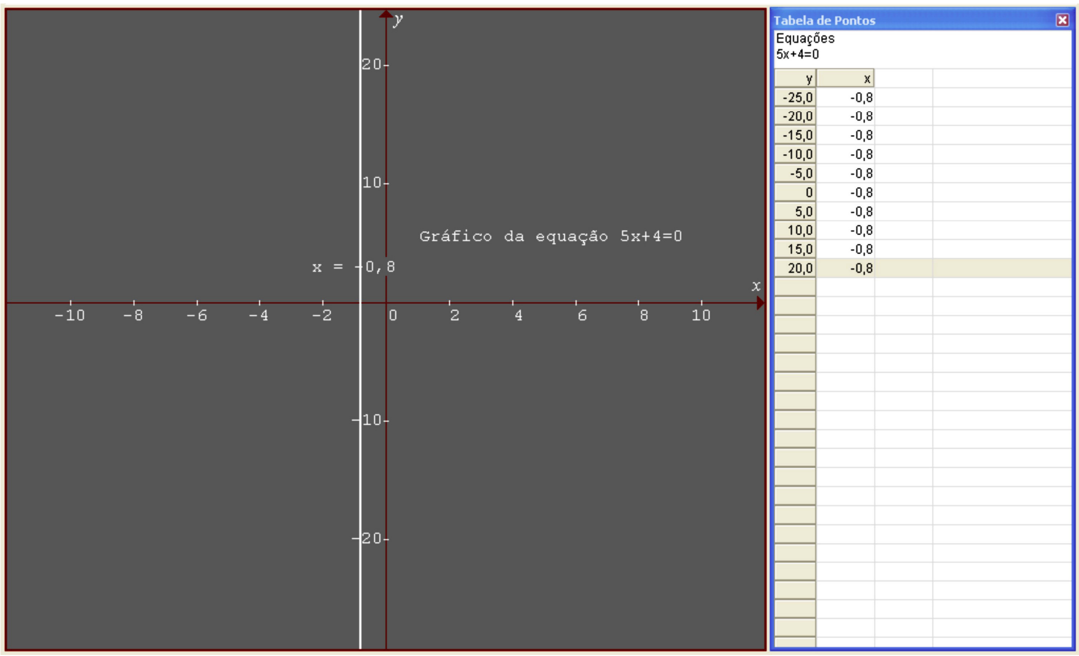


Figura 6.49 – Gráfico da equação 5x+4=0.

A quarta questão, por sua vez, exige do aprendiz a habilidade de lidar com o gráfico da função afim f(x) = ax +b. Por intermédio do gráfico 6.13, observa-se o ótimo desempenho do aluno nesta questão uma vez que o percentual de erro contínuo foi nulo. Pode-se inferir que os alunos não sentiram muitas dificuldades nesta atividade porque este assunto foi amplamente discutido e revisado nas atividades anteriores. Além disso, o processo de intervenção com o auxílio do computador foi análoga às aquelas feitas anteriormente.

Na quinta questão, duas funções são trabalhadas: a função quadrática e a função constante. Para cada uma delas, o aluno deve determinar o conjunto domínio e o conjunto imagem. Ainda analisando o gráfico 6.13, observa-se o bom desempenho dos alunos nesta questão uma vez que o percentual de acertos (as duas primeiras categorias) foi muito maior do que o percentual da categoria erro contínuo.

A grande maioria dos alunos que erraram inicialmente teve dificuldades de determinar as imagens dos números pertencentes ao domínio. Inicialmente, eles não acreditaram que a relação y=4 podia ser função uma vez que não possuía a variável independente "x" para substituir. Para corroborar com este fato, observa-se a pouca ocorrência (vide gráfico 6.14) do protótipo de funções do tipo constante. Esta constatação vai ao encontro das pesquisas de Tall & Bakar (1992) e Fossa e Fossa (2000).

Entretanto, com o auxílio do pesquisador eles conseguiram depurar seus erros sobre as funções constantes. Esta intervenção se processou baseado nos princípios de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa propostas por Ausubel para efetivar e facilitar a aprendizagem significativa.

Tento isso em mente, foi revisto inicialmente que a função polinomial do 1^0 grau é definida por f(x) = ax+b, onde a é o coeficiente angular e b e o coeficiente linear e seu gráfico é uma reta que intercepta o eixo vertical y no ponto (0, b). Logo após, o aluno se recordou que a função linear f(x) = ax é um caso particular das funções polinomiais do $1^{\underline{o}}$ Grau. O seu gráfico é uma reta que passa pela origem, e seus coeficientes a e b são, respectivamente, $a \in \Re^*$ e b=0.

Finalmente, ao deparar-se com a função constante f(x) = k, foi ressaltado ao aluno que esta família de funções também é um caso particular das funções polinomiais do $1^{\underline{o}}$ grau. Logo em seguida, o aluno compreendeu que o seu gráfico é uma reta paralela ao eixo x, e seus coeficientes são, respectivamente, a= 0 e b= k.

Abaixo, segue um recorte de uma entrevista na qual Jahnser reavalia seus conhecimentos e consegue fazer o item “b” da quinta questão.

PROTOCOLO 20.

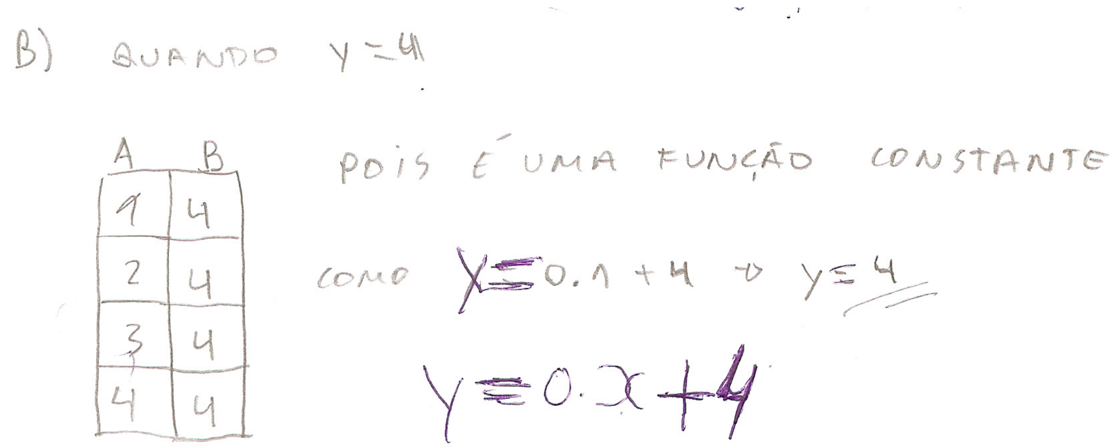


Figura 6.50 – Resolução da quinta questão.

Entrevista:

1. E: Que tipo de função é do item b?
2. E: [um longo período calado]
3. E: O item b é a função constante!
4. A: Ei! Quando é a função constante o “a” é igual a zero?!
5. E: Isto [Neste momento, o aluno tomando a iniciativa retornou ao item b da quinta questão fazendo o seguinte cálculo: y = 0.1+4 →y=4].
6. E: Mas y = 0x+4, pois o x representa qualquer número, não só o 1.
7. A: Ah!!
8. E: [Neste momento, o aluno retornou ao item b da quinta questão, calculando as imagens dos outros números do domínio utilizando a equação y = 0.x+4].
9. A: Não importa o valor de x! Sempre vai ser constante!
10. E: Por que uma relação y = 4 que é constante é uma função?
11. A: Porque é y=0x +4 aparecendo a variável dependente e independente!
12. E: [Ao ser questionado, o aprendiz respondeu corretamente que a variável dependente é o y a independente é o x
13. E: Tente relacionar com o teste da reta vertical!
14. A: Tem que satisfazer o teste da reta vertical?

15. E: Não sei! Eu queria entender a sua linha de raciocínio.
16. E: No caso se eu fosse fazer o teste da reta vertical daria certo?
17. A: [Apontando para o gráfico plotado no WINPLOT]. Daria sim! Pois interceptaria em apenas um único ponto!]
18. E: [Aqui, foi frisado que para saber se uma equação de uma relação representa uma função não basta identificar a variável dependente e independente, mas juntamente com este critério usar o teste da reta vertical.].

Pela entrevista acima, nota-se que o aprendiz compreendeu que função constante é um caso particular da função do primeiro grau (vide solução e linhas 4, 5, 8 e 11 do protocolo). Ao tentar justificar que a relação y = 4 era uma função, ele baseou a sua resposta na equação y = 0x+4, frisando a variável dependente e independente. Por sugestão do pesquisador, o aprendiz recorreu ao teste da reta vertical, aplicando-o corretamente.

Voltando a avaliar o desempenho dos alunos nesta atividade, a sexta questão visava verificar o comportamento dos alunos diante do estudo do sinal de uma função do primeiro grau f(x) = ax+b. Por intermédio do gráfico 6.13, nota-se o bom desempenho dos alunos uma vez que a soma de acertos totalizou quase 90% e apenas 10% dos alunos não conseguiram corrigir os seus erros. A intervenção foi feita com o computador de forma semelhante às anteriores.

A questão sete fazia a interdisciplinaridade com a Física e visava medir a capacidade do aluno em trabalhar com as grandezas diretamente proporcionais. Voltando a analisar o gráfico 6.13, observa-se o ótimo desempenho dos alunos nesta questão uma vez que não houve a ocorrência da categoria erro contínuo o percentual de acerto imediato foi maior do que o percentual de acerto com a intervenção do pesquisador sem a mediação do computador. Pode-se inferir que o sucesso dos alunos nesta questão deveu-se ao fato desses assuntos terem sido vistos com mais acuidade nas atividades anteriores (vide atividade 2 e atividade 10).

A oitava questão trabalha com diversos assuntos ligados a função f(x) = -2x+5 e envolve quatro itens. O primeiro item exige do estudante calcular as imagens de dois números pertencentes ao domínio. O segundo item faz o caminho inverso ao anterior: dada uma imagem pertencente ao contradomínio, o aprendiz tem que calcular o seu valor correspondente x. O terceiro item envolve conhecimentos sobre o zero ou raiz da questão e o quarto solicita o traçado do gráfico da função acima. O desempenho dos alunos nesta questão foi semelhante à anterior, tendo um percentual de acertos quase 90%.

Nessa questão apenas 10% dos alunos não conseguiram depurar os seus erros. Eles responderam corretamente os dois primeiros itens e com a ajuda conseguiram construir o gráfico da função f(x) = -2x+5. No entanto, ficaram confusos ao trabalhar com o terceiro item. È bom salientar que, neste momento, foi justamente onde apareceu a categoria Obstáculo Epistemológico apontada por Sierpinska (1992).

A nona questão visa verificar o comportamento dos alunos diante do estudo do sinal da função f(x) = -10x. Esta questão não causou dificuldades aos alunos, uma vez que as suas principais dúvidas foram tiradas nas atividades anteriores, inclusive os teoremas-em-ação falsos. Nesse sentido, observando o gráfico 6.13, percebe-se a ausência da categoria erro contínuo. Também o processo de intervenção foi semelhante às atividades anteriores.

A décima questão visa verificar se o aluno tem competência de analisar o conjunto domínio e o conjunto imagem de um gráfico da função. Observando o gráfico acima, nota-se o ótimo desempenho dos alunos uma vez que o percentual da categoria erro contínuo foi nulo e o número de ocorrências da categoria acerto imediato foi igual ao da categoria acerto com a intervenção do pesquisador e a mediação do computador.

Pelo fato dos alunos já terem visto estes assuntos com mais acuidade nas atividades anteriores (principalmente na atividade 4), inclusive compartilhando momentos de discussões com o pesquisador, pode-se afirmar a ausência de dificuldades maiores nesta questão.

6.4 Estratégias

Nessa seção, estão descritas as estratégias utilizadas pelos alunos para a resolução dos problemas propostos. Foram encontradas as seguintes categorias de estratégias: enumerativa, estratégia do raciocínio inverso e cálculo mental, as quais estão descritas abaixo. Em cada uma das duas primeiras, serão apresentados exemplos de estratégias dos trabalhos dos alunos quando resolviam a questão 5 do Teste Diagnóstico. A terceira estratégia é exemplificada quando os alunos resolviam a oitava questão.

6.4.1 Enumerativa

No presente trabalho, estratégia enumerativa é a que envolve um raciocínio baseado na eliminação. O aprendiz, diante de um desafio, procura elencar as diversas opções e verificar quais aquelas que mais se adequam ao contexto da situação-problema. Segue abaixo um exemplo dessa estratégia.

Questão 5 - Usamos um gráfico de linhas quando pretendemos mostrar mudanças nos dados, como o gráfico a seguir, que mostra a variação da precipitação pluvial em uma semana, numa certa cidade:

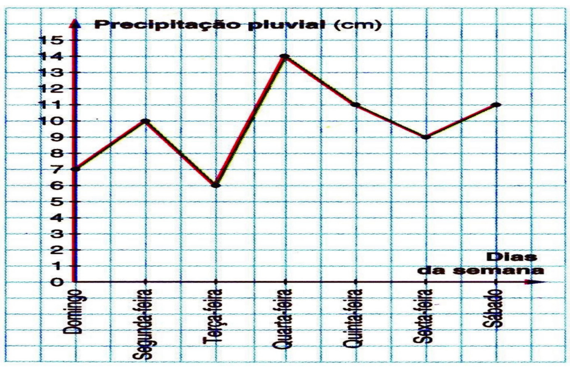


Figura 2 — Resolução da quinta questão referente ao pré-teste

Figura 6.51 – Quinta questão do teste diagnóstico.

Com base no gráfico do exemplo, responda:

a) Em que dia choveu mais? Em que dia choveu menos?

b) Em quais dias a chuva foi superior a 10cm?

c)Quanto centímetro a mais choveu na sexta-feira que no doming

PROTOCOLO 21

Entrevista:

1. E: Como foi que você resolveu o item "b" da quinta questão?
2. A: No dia de quarta eu vi que estava maior do que 10.
3. E: O que mais?
4. A: Quinta, quarta e sábado!
5. E: E os outros dias, por quê não servem?
6. A: Domingo é 7, segunda é 10, terça é 6 e sexta é 9.
7. E: Você teria outra maneira, outro modo de resolver esta questão?
8. A: Não sei não!

Veja que o processo de raciocínio do aprendiz foi verificar a precipitação pluvial de cada dia e comparar quais deles superavam a precipitação pluvial de 10 cm (linha 4 a 6). O seu foco de pensamento é mais pontual. Ele poderia ter traçado uma reta y = 10 e perceber quais ordenadas eram maiores do que 10 relacionando com os dias. Nesse caso, haveria também uma inferência baseada na eliminação, mas o processo eliminatório seria mais geral, qualitativo, do que exaustivo.

6.4.2 Estratégia do raciocínio inverso

Considera-se aqui como estratégia do raciocínio inverso, aquela estratégia baseada na localização inicial da ordenada y_1, a partir da qual o aprendiz começa a comparar com as outras ordenadas existentes com suas abscissas correspondentes. O seu objetivo é verificar quais entre estas ordenadas satisfazem às exigências da situação-problema. Para tanto, o aluno pode traçar uma reta $y=y_1$ e, logo em seguida, verificar quais ordenadas estão acima desta reta, quais estão abaixo, e finalmente, verificar quais aquelas que pertencem a essa reta. O protocolo a seguir exemplifica este tipo de estratégia.

PROTOCOLO 22

Entrevista:

1. E: Como foi que você resolveu o item a da primeira questão?
2. A: Olhei o gráfico e olhei o que tinha mais e também olhei o que tinha menos!
3. E: Como foi que você fez o item c.
4. A: O que era 10 eu passei uma reta e o ponto que tivesse superior eu anotava e ponto que tivesse inferior também!

6.4.3 Cálculo mental

A estratégia do calculo mental é aquela na qual o aluno calcula mentalmente o problema e explica oralmente. Dentro da categoria cálculo mental, podem-se destacar alguns recortes. A seguir, o aluno Jaques concebe um algoritmo para a resolução da questão, mas verifica que não é adequado, e aí, recorre ao cálculo mental.

6.º) Cinco pintores levam 40 dias para pintar uma escola. No mesmo ritmo de trabalho, quanto tempo levariam 10 pintores para fazer o mesmo serviço? – 20 dias

5 - 40
10 - x
5x=400
x= .

Figura 6.52 - Tentativa do aluno de resolver o problema por grandezas diretamente proporcionais.

PROTOCOLO 23

Entrevista:

1. E: Como foi que você fez a oitava questão?
2. A: Fiz pelo óbvio! Se 5 levaram 40 dias (10 fariam pela metade).
3. E: Você tentou armar uma regra de três e não continuou! Por quê?
4. A: Eu vi que não dava certo né!
5. E: Como assim? Não dava certo?
6. A: Fiz de cabeça!
7. E: Para você o que significa grandezas inversamente proporcionais?
8. A: [um longo período de tempo calado].

O aprendiz armou a regra de três para obter a resposta, mas viu que não daria o resultado 20 dias. Logo em seguida, o aprendiz lançou mão de um conceito-em-ação baseado na idéia de que, aumentando o número de operários (o dobro), diminui o número de dias (pela metade). O protocolo a seguir ilustra a dificuldade do aluno em se lembrar de grandezas inversamente proporcionais.

8.º) Cinco pintores levam 40 dias para pintar uma escola. No mesmo ritmo de trabalho, quanto tempo levariam 10 pintores para fazer o mesmo serviço?

20 Dias.

Figura 6.53 – Resposta do aluno obtida através do cálculo mental.

PROTOCOLO 24

Entrevista:

E: Como foi que você fez a oitava questão?

A: De cabeça!

E: Como assim de cabeça? Explique melhor seu raciocínio!

A: Se cinco pintores levam 40 dias para pintar uma escola, 10 levariam a metade!

E: Para você o que são grandezas inversamente proporcionais?

A: [um longo período calado]

E: Muito bem! Você está lembrado de que no final da sexta série estudou no finalzinho do ano dois assuntos: grandezas diretamente proporcionai e inversamente proporcionais?

A: São as contas feitas por regra de três?

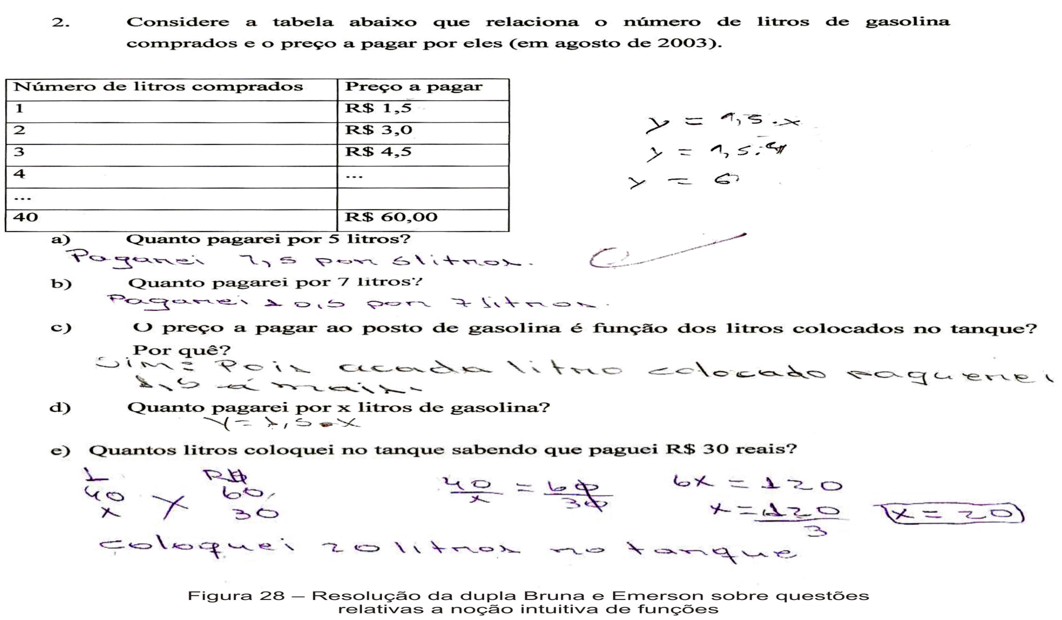
O aprendiz usou a estratégia do cálculo mental. Seu raciocínio está baseado no conceito em ação de que, quando aumentado o número de operários, o número de dias é reduzido. Observe que os elementos da célula de definição conceitual estão insatisfatórios e a imagem mental que ele tem dos assuntos acima referidos está relacionado à regra de três!

6.5 Os conceitos-em-ação

Conceitos-em-ação e teoremas-em-ação - Na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais, elaborada pelo psicólogo francês Gérard Vergnaud, um conceito para ser compreendido deve estar inserido numa variedade de situações e as situações, por sua vez, estão envolvidas por uma diversidade de conceitos. Dessa forma, o estudo de conceito envolve uma teia de conceitos e situações interligados. Além disso, Vergnaud postula que até chegar à solução de um problema, o professor precisa valorizar os caminhos percorridos pelo aluno. Diante de uma situação-problema, os aprendizes aplicam estratégias, mobilizam conceitos que se encontram no interior de um esquema cognitivo, chamados pelo pesquisador francês de conceitos-em-ação. Esta seção trata os quatro conceitos-em-ação identificados na pesquisa.

6.5.1 A diferença constante

Na fase de modelagem algébrica[56], trabalhando com as funções do primeiro grau, os alunos, ao preencherem a tabela, podem perceber que os números que ficam à direita da tabela – coluna que consta os valores da variável dependente – apresentam uma diferença constante numa seqüência gerada a partir de uma função linear. O protocolo abaixo ilustra esse conceito-em-ação lançado pelos alunos.



2. Considere a tabela abaixo que relaciona o número de litros de gasolina comprados e o preço a pagar por eles (em agosto de 2003).

Número de litros comprados	Preço a pagar
1	R$ 1,5
2	R$ 3,0
3	R$ 4,5
4	...
...	
40	R$ 60,00

y = 1,5.x
y = 1,5.4
y = 6

a) Quanto pagarei por 5 litros?
Paguei 7,5 por 5litros.

b) Quanto pagarei por 7 litros?
Paguei 10,5 por 7litros.

c) O preço a pagar ao posto de gasolina é função dos litros colocados no tanque? Por quê?
Sim: Pois a cada litro colocado paguerei 1,5 á mais.

d) Quanto pagarei por x litros de gasolina?
Y= 1,5.x

e) Quantos litros coloquei no tanque sabendo que paguei R$ 30 reais?

L R$
40 60
x 30

$\frac{40}{x} = \frac{60}{30}$ 6x = 120 x = $\frac{120}{3}$ $\boxed{x = 20}$

coloquei 20 litros no tanque

Figura 28 – Resolução da dupla Bruna e Emerson sobre questões relativas a noção intuitiva de funções

Figura 6.54 – Resolução da dupla Bruna e Emerson sobre questões relativos a noção intuitiva de funções.

PROTOCOLO 25

Entrevista:

1. Emerson: quanto pagarei por 5 litros?
2. Bruna: quatro, seis, sete e meio.
3. E: [Observe que a aluna não usou a fórmula y = 1,5x; a resposta foi calculada com o

[56] Meira (1997) define modelagem algébrica como o processo de criar equações para representar e estudar fenômenos (físicos, sociais, econômicos etc.).

seguinte cálculo: 6+1,5 = 7,5.]

4. Emerson: Quanto pagarei por 5 litros? [O aluno repete a pergunta como se tivesse tentando entender a resposta da colega].

5. Bruna: sete e meio! Quatro e meio com mais um e meio seis. Com mais um e meio sete e meio.

Pela entrevista acima, constata-se que utilizaram um conceito-em-ação relativo à definição de uma P.A. (Progressão aritmética). De fato, observando a tabela, a dupla percebeu uma diferença constante de uma seqüência gerada a partir de uma função linear.

Como se pode perceber, essa seqüência é uma progressão aritmética (P.A) de razão 1,5. Para calcular a quantia correspondente a 5 litros, a dupla fez o seguinte cálculo: 6+1,5 = 7,5(vide linha 1 a 5 do protocolo). Tem-se, então, um conceito-em-ação do assunto Progressão Aritmética:

$$a_n = a_{n-1} + r$$
$$a_5 = a_4 + 1{,}5$$

O aluno Janailson também utilizou este teorema para resolver uma situação-problema contextualizada de Física.

Questão 4

Um carro realiza um movimento uniforme (MU). O espaço (posição em que o carro se encontra no percurso) varia com o tempo, segundo a função horária $s=s_0+vt$, na qual s_o indica a posição do automóvel no instante t = 0 e v, a velocidade desenvolvida por ele. Sabendo-se que s = 20, quando t = 0, e que s = 28, quando t = 1, responda:

a) Qual é o valor de s_o?
b) Qual é o valor de v?
c) Qual é o valor de s, quando t = 7?
d) Qual é o valor de t, quando s = 52?

Figura 6.55 -Resposta do aluno Janailson sobre a quarta.

PROTOCOLO 26

Entrevista:

1. E: Janailson, Eu gostaria de entender como foi que você pensou para responder o item "c". Como foi que você encontrou o resultado s=76?
2. A: Pela tabela!
3. E: Como foi que você fez a tabela?
4. A: 0 não é 20?
5. E: Sim! Quando o tempo é igual a zero o espaço é vinte. E o que mais?
6. A: 1 corresponde a 28
7. E: Ok! Quando o tempo é igual a 1 o espaço é 28. Como foi que você descobriu que a velocidade era 8m/s?
8. A: Diminui 20 de 28.
9. E Por quê? Em que você se baseou?
10. A: O início da folha.
11. [O aluno apontou a introdução do texto].
12. E: Ok! Você se baseou pelo texto que estava no início da tarefa. Mas como você descobriu que a velocidade era 8 m/s?
13. A: Na tabela [apontando para a segunda coluna da introdução] vi que anda de dois em dois! E a velocidade é 2.
14. E: OK! A função horária da tabela é s = 5+2t e você observou que a velocidade é 2. E aqui, nesta questão?
15. A: Anda de 8 em 8!
16. E: Entendi! Aí você foi completando a tabela.

Para responder o item c, o aprendiz lançou mão do conceito-em-ação relativo à PA cuja razão é 8. Nesse caso, o seu raciocínio implícito foi:

$$A_7 = a_6 + r, \text{ ou seja, } a_7 = 68+8=76.$$

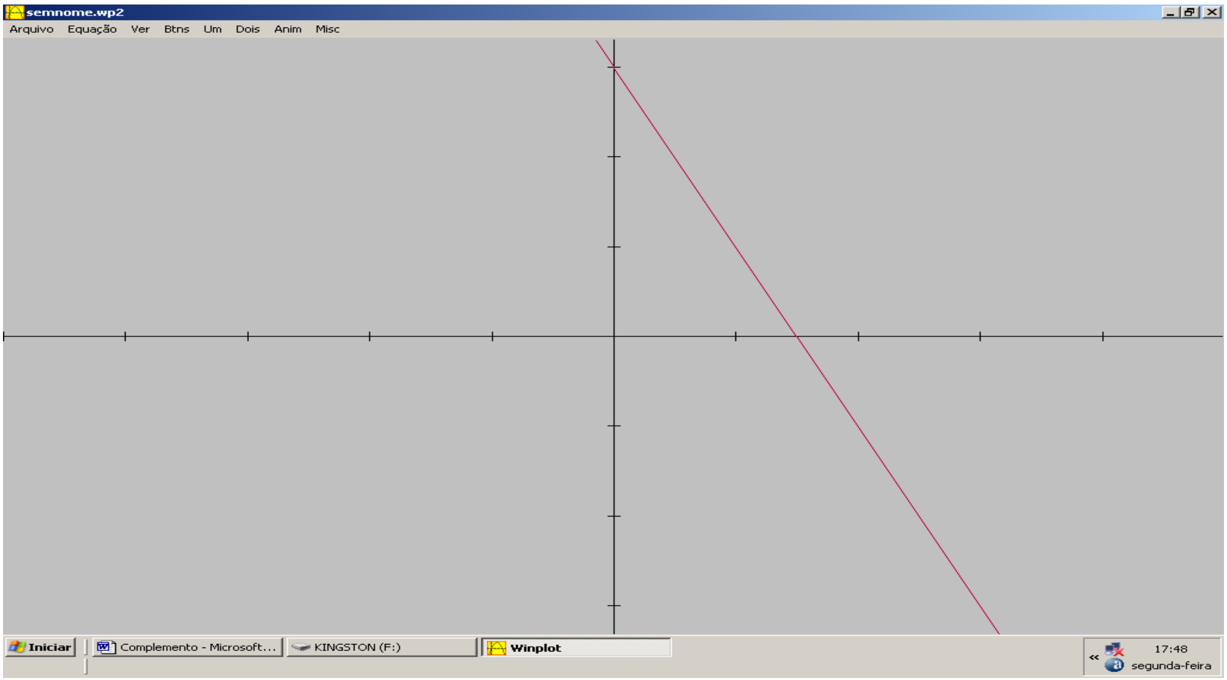
Através dos organizadores prévios, os aprendizes podem lançar mão de importantes conceitos-em-ação. Nesse caso, o aluno releu o texto e notou que, para calcular a velocidade a cada 1 segundo, bastava diminuir dois espaços consecutivos (linhas 8). Nessa ordem de idéias, o aluno foi completando a tabela e respondendo corretamente os itens da questão. Observe também que, em nenhum momento, utilizou seus conhecimentos físicos (fórmula da velocidade média).

6.5.2 O raciocínio algébrico para determinar o sinal do coeficiente "a" de uma função afim

Neste conceito em ação, diante de um gráfico de uma reta, o aluno substitui pontos na lei algébrica f(x) = ax+b para determinar o sinal do coeficiente "a".

Quarta questão

4.) Qual é o sinal do coeficiente a da função y = ax +b representada pelo gráfico ilustrado abaixo?



Antônio Davi

Resposta: Será negativo.

$0 = 1{,}5^{a}+3$

$1{,}5^{a}=-3$

$$a = \frac{-3}{1{,}5} \rightarrow a = -2$$

Figura 6.56– Resolução da quarta questão

O aprendiz sabe que o gráfico da função é do primeiro grau (f(x) = ax+b) e que o coeficiente linear "b" é igual a 3. Veja que tem a noção geométrica do zero ou raiz da função porque substituiu a variável x por 1,5 e a variável y por zero. Assim, o aprendiz utilizou o instrumental da Álgebra para saber o sinal do coeficiente "a".

PROTOCOLO 27

Entrevista:

1. E: Davi, você acertou! Como foi que você fez aqui!
2. A: Eu observei o gráfico onde o gráfico interceptava o eixo x seria x e onde interceptou o eixo y seria o b! E aí eu substituo. Aí achei o "a".
3. E por que você igualou a variável dependente y igual a zero?
4. A: Porque toda vida que toca no x, o y é zero.
5. E: Mas se você não usasse esse raciocínio, por que essa reta teria o valor do coeficiente "a" negativo?
6. A: Porque é uma função decrescente!
7. E: Veja! Em termos de ângulo de inclinação!
8. A: AH! Porque o ângulo formado é obtuso!
9. E: Continue o seu raciocínio1
10. A: E a reta tem um ângulo obtuso o a é negativo!

Observa-se que o aluno interliga a interpretação geométrica com a interpretação algébrica do zero ou raiz da função (linhas 2 a 4), tendo uma compreensão relacional da questão ora em análise.

6.5.3 Conceitos-em-ação relativos à transformação linear

O aprendiz lança mão de conceitos-em-ação baseados na definição e propriedades da função linear $f(x) = ax$, $a \neq 0$.

Sétima questão A tabela mostra a distância d percorrida por um carro que viaja a uma constante de 75 km/h durante t horas. a) Se t= 6h, quanto vale d?	
T (h)	d (km
1	75
2	150
3	225
4	300
Djones	

Figura 6.57– Resolução da sétima questão da segunda avaliação

PROTOCOLO 28

Entrevista:

E: Se t= 6 h, quanto vale d?

A: 450 km.

E: Como foi que chegou a esse resultado?

A: 4 é 300 e 2 é 150 .[pensando] 2 horas a mais ia ser mais 150. Total: 450 Km

A única função do primeiro grau que é uma T.L. é a função linear. De fato, $f(ka_1)=a(ka_1)=k(aa_1)=kf(a_1)$ e $f(a_1+b_1)=a(a_1+b_1)=aa_1+ab_1=f(a_1)+f(b_1)$.

Observa-se que o aprendiz evocou um teorema-em-ação. Com efeito, como $f(4) = 300$ e $f(2) = 150$ então: $f(6) =300+150=450$ e $f(6)=f(4+2)=f(4)+f(2)$.

6.5.4 Conceitos-em-ação relativos ao gráfico da função do primeiro grau f(x) = ax+b

Na resolução das atividades relativas aos gráficos das funções do primeiro grau f(x) = ax+b, muitos conceitos-em-ação foram concebidos pelos alunos. Esta categoria de conceitos-em-ação está dividida em três itens: conceitos-em-ação relativos à distância da reta ao eixo vertical “y”, conceitos-em-ação relativos à função y=x+b e propriedades do gráfico da função f(x) = ax+b com o coeficiente b fixo, os quais estão descritos abaixo.

6.5.4.1 Conceitos-em-ação relativos à distância da reta ao eixo vertical “y”.

O aluno percebe que numa família de retas y = ax+b, fixado o coeficiente linear “b”, e aumentando o ângulo de inclinação agudo, mais as retas vão se aproximando do eixo vertical y.

Questão 4 da atividade 7 4. Utilizando o *WINPLOT*, trace o gráfico das seguintes funções: a) y=0.5x-1 b) y=1x-1 c) y =1.5x-1 d) y = 2x-1
CRISTIANE Resposta: As retas estão próximas ao eixo x e tocam o mesmo ponto (-1.0).

Figura 6.58– Resolução da quarta questão da sétima atividade

PROTOCOLO 29

Entrevista:

1. E: As retas se interceptam no ponto cuja ordenada é y = -1. O eixo vertical é o eixo y. O eixo horizontal é o eixo x. Você disse que as retas estão próximas do eixo x?
2. A: È não! Do eixo vertical.
3. E: Você está notando mais alguma coisa?
4. A: O quê?

5. E: Nós já discutimos isso! Na equação y = ax+b, o valor de a é o coeficiente angular; e o valor de b é o coeficiente linear. Olhando para os coeficientes angulares dessa reta, o que você está percebendo?

6. A: Não sei não!

7. E: Vou dar uma dica! Olhe para os coeficientes angulares e a posição da reta.

8. E: [Neste momento foi trabalhado novamente o Winplot objetivando explorar mais o comando “família”. Em seguida, foram visualizadas várias famílias de retas y=ax-1].

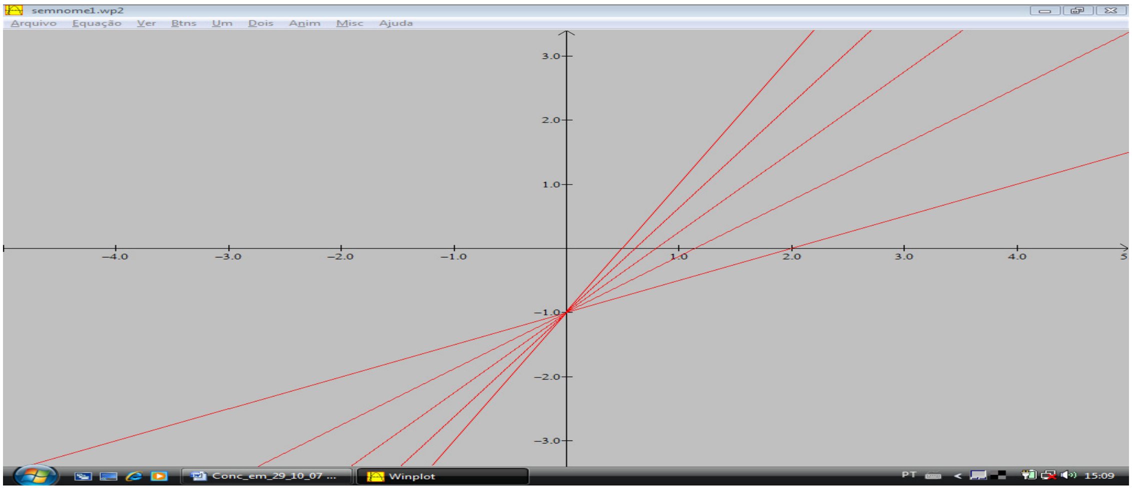


Figura 6.59 - Família de retas y=ax-1 (quatro retas).

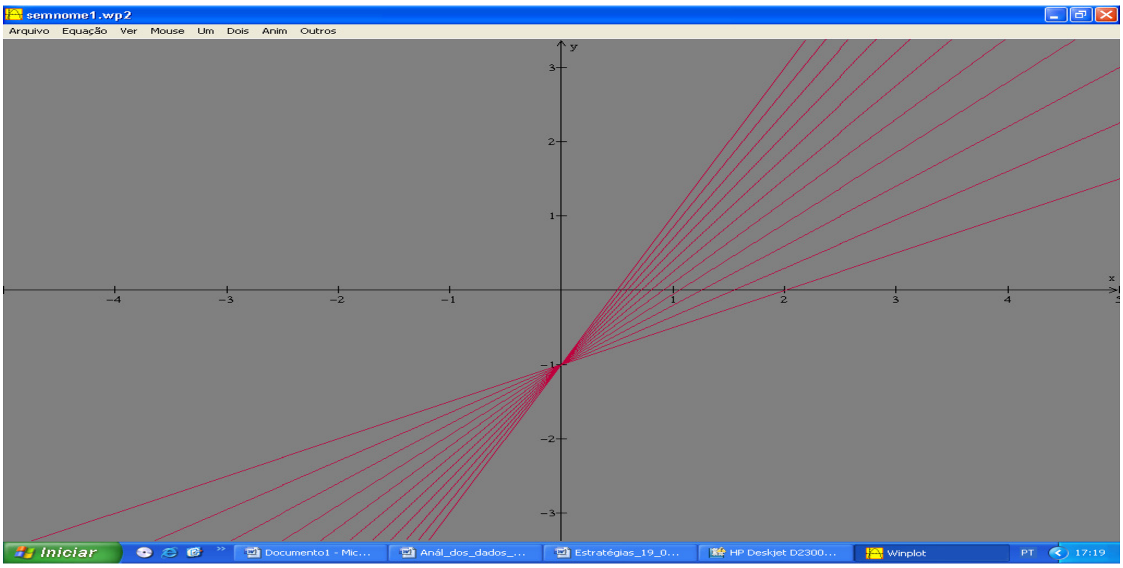


Figura 6.60 - Família de retas y=ax-1 (dez retas).

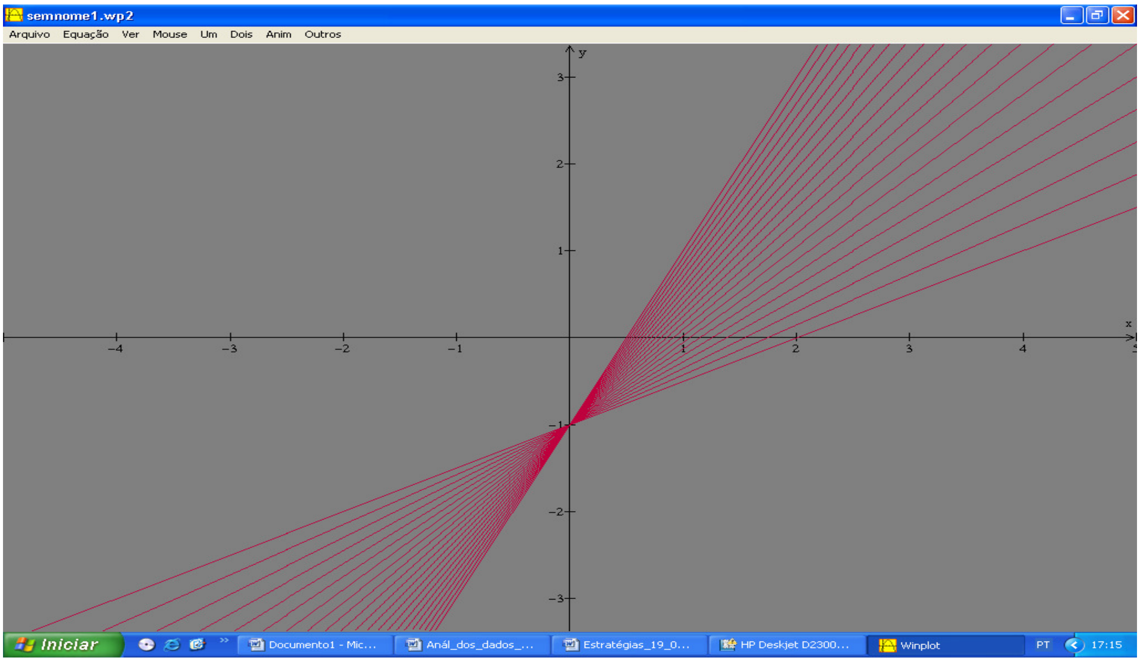


Figura 6.61 - Família de retas y=ax-1 (20 retas)

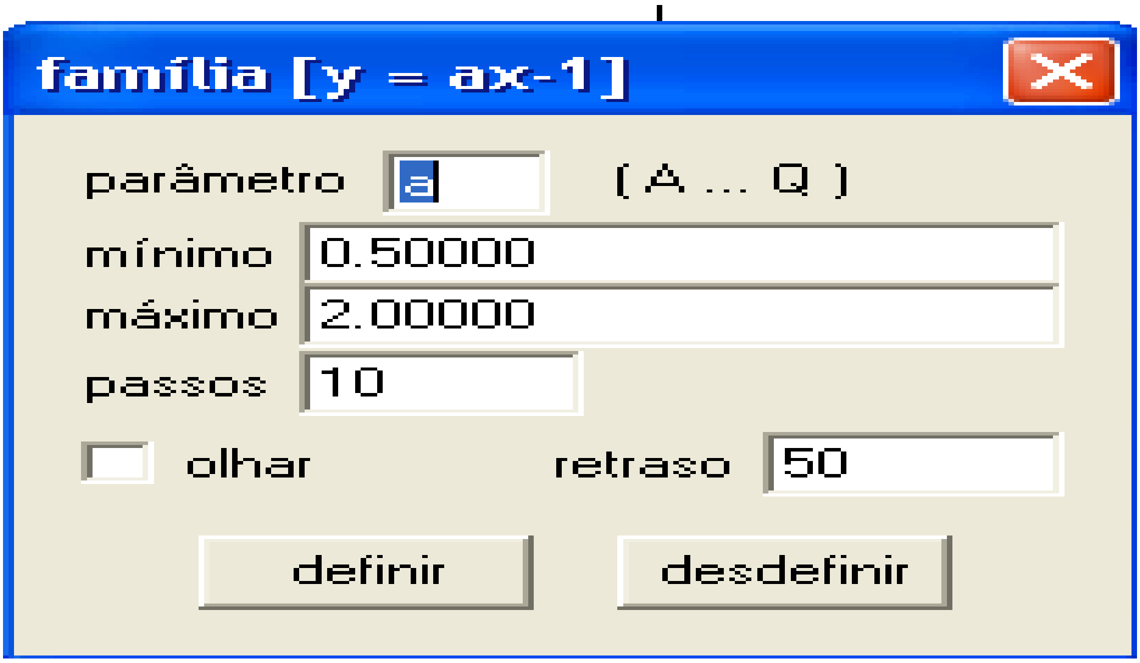


Figura 6.62 – Comando do Winplot para traçar a família de retas y = ax-1.

9. E: Vou dá uma dica! Olhe para os coeficientes angulares e a posição da reta.
10. A: Há! Está aumentando!
11. E: O que está aumentando?

12. A: 0.5, 1, 1.5, 2.
13. E: Ok! Está aumentando os coeficientes angulares! E o que está acontecendo mais?
14. A: As retas estão próximas do eixo vertical.
15. E: E o que mais?
16. A: O b é igual.
17. E: OK! Tem o mesmo coeficiente linear.
18. E: Vamos recapitular. O que você notou? Diga às coisas que você notou.
19. A: As retas estão próximas ao eixo vertical! Mesmo b e os valores de a vão aumentando.

Por intermédio da entrevista acima, percebe-se que a aluna se enganou. Veja que quis dizer que estão próximas do eixo vertical "y" (linhas 1 e 2).

Ao utilizar o comando "*Inventário/Família*" do *Winplot*, foram plotados vários gráficos da família de retas y=ax-1, cuja variação do parâmetro foi de 0,5 a 2. Inicialmente, a aluna Cristiane colocou o número de passos 5, em seguida alterou para 10 e finalmente para 20. Com isto, pôde visualizar seguidas simulações de retas na tela do computador (vide figuras 6.58 a 6.61). A partir dessas simulações, ela pôde perceber que essas retas se interceptavam no coeficiente linear -1 e se aproximavam do eixo vertical

Diante desse quadro, houve um processo de negociação entre o pesquisador e a aluna, quando aquele incentivou que ela começasse a fazer uma associação entre os coeficientes angulares com os seus respectivos gráficos.

Neste processo dinâmico, ela começou a conceber um conceito-em-ação (linhas 8, 10 e 12), a saber: "*fixado o coeficiente linear b, quanto maior o coeficiente angular, mais as retas vão se aproximando do eixo vertical y*". De fato, fixado o coeficiente linear "b", quanto maior o ângulo de inclinação, maior o coeficiente angular. Consequentemente, as retas "dão uma impressão" que estão se aproximando do eixo vertical y.

Aqui, o ambiente computacional *Winplot* ajudou na aprendizagem sendo capaz de realizar rapidamente o traçado de gráficos. Através deles, a aluna se concentrou mais em perceber propriedades do que fazer técnicas rotineiras de construção de gráficos.

Este conceito-em-ação evocado pela aluna é relacionado a conteúdos da Geometria Analítica, particularmente distância entre dois pontos. De fato, sejam duas retas mostradas no gráfico a seguir.

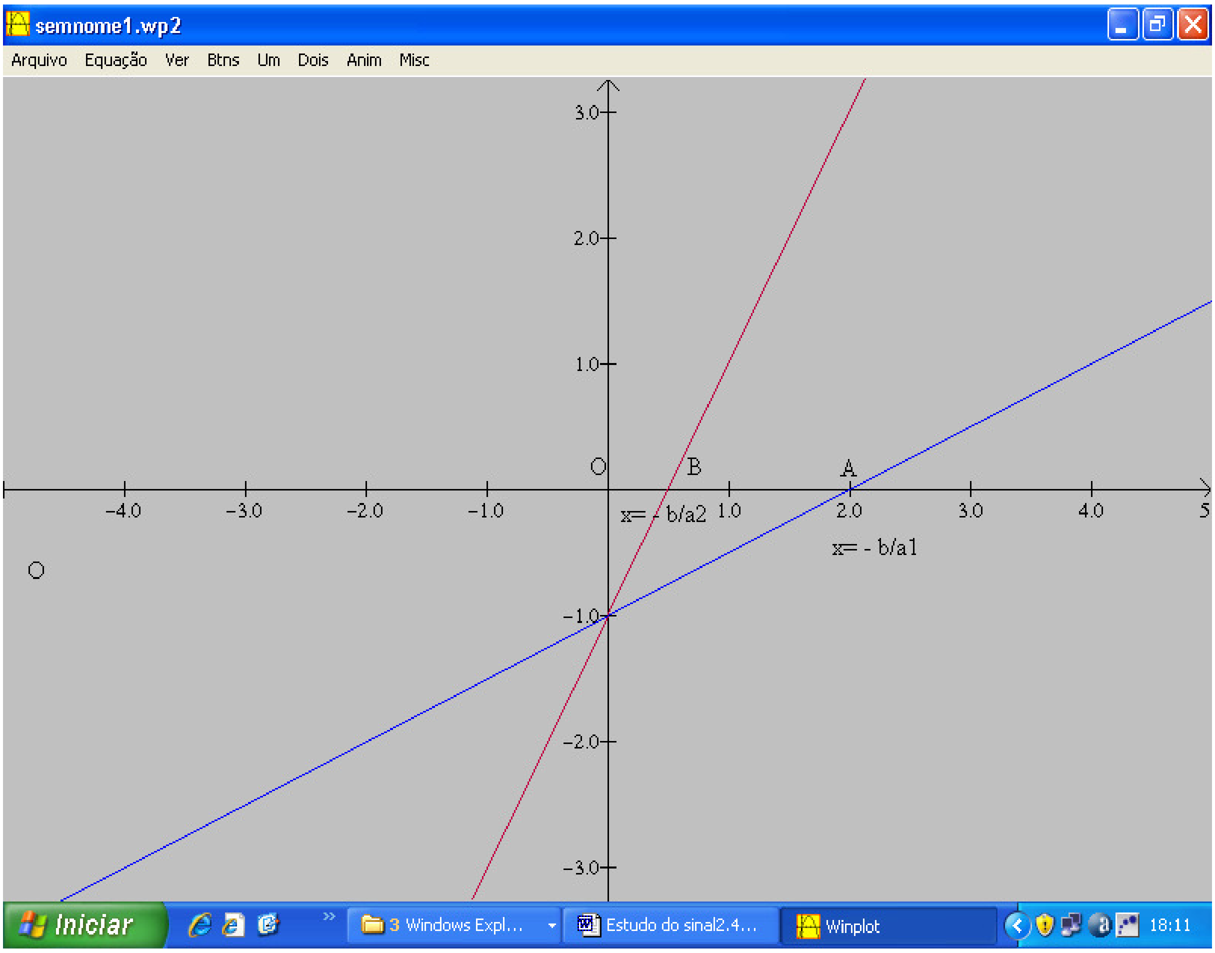


Figura 6.63 – Duas retas que se interceptam na mesma ordenada e têm diferentes raízes.

Inicialmente note que se $b < 0 \Rightarrow -b > 0$. Dessa forma temos,

$$a_2 > a_1 \Rightarrow \frac{1}{a_2} < \frac{1}{a_1} \Rightarrow -\frac{b}{a_2} < -\frac{b}{a_1} \Rightarrow \left|-\frac{b}{a_2}\right| < \left|-\frac{b}{a_1}\right| \Rightarrow \overline{OB} < \overline{OA}$$

6.5.4.2 Conceitos-em-ação relativos à função y=x+b

O aprendiz ao explorar a família de retas y = x+b, descobre um invariante, a saber, quando o coeficiente linear "b" for positivo, o zero ou raiz da função y = x+b é negativo; por outro lado, quando "b" for negativo, o zero ou raiz da função é positivo.

Questão sete
7. Com o auxílio do Winplot trace o gráfico da função y = x + b 7.1 Qual é o valor do coeficiente angular "a"? 7.2 Faça o gráfico da função com b = 0. 7.3 Obtenha o gráfico da função para diferentes valores de "b". 7.4 Qual o significado do coeficiente "b" nos gráficos obtidos? Associe o valor do coeficiente ao gráfico correspondente. 7.5 Descreva os gráficos das funções em termos de movimentos aplicados ao gráfico de y = x.
EMERSON E DAVI 2.1 1. 2.2 Ok! 2.3 Ok! 2.4 Quando o B for positivo o x vai ser negativo Quando o B for negativo o x vai ser positivo. 2.5 a) Porcentagem: 100%.

Figura 6.64 - Conceitos-em-ação relativos a funções afim y = x+b.

Entrevista:

[No *Winplot*, foram traçados os gráfico y=x-1, y=x-2, y=x-3, y=x+1, y=x+2 e y=x+3].

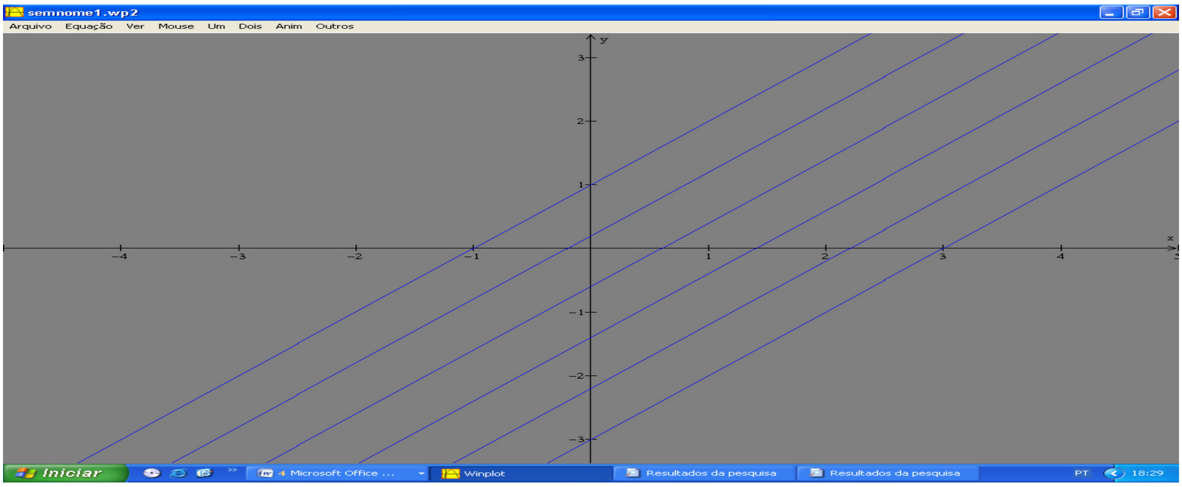


Figura 6.65 - Família de retas y=a+b.

PROTOCOLO 30

Entrevista:

1. E: Eu gostaria de entender o raciocínio de vocês. No item “2.4” vocês responderam que “quando o b for positivo o x vai ser negativo”, o que significa esse x?
2. Davi: È essa abscissa aqui [apontando para a equação y=x+1 e a abscissa x=-1].
3. E: Emerson, vocês disseram que quando o b for negativo o x vai ser positivo, que x é esse?
4. Emerson: Esse x aqui [Apontado para a reta y=x-1 e a abscissa x=1].
5. E: Muito bem! Quando o coeficiente linear “b” for positivo a reta intercepta o eixo horizontal no ponto cuja abscissa x é negativa e quando o coeficiente linear “b” for negativo a reta intercepta o eixo horizontal cuja abscissa é positiva. Esta abscissa significa o quê?
6. Davi: O encontro da reta com o x.
7. E: Você concorda Emerson?
8. Emerson: Ahã.
9. E: Por quê?
10. Emerson: É o ponto de cruzamento.
11. E: Emerson, nesse ponto de cruzamento, a abscissa é o ponto x=-1 e qual vai ser a ordenada?
12. [O aprendiz manteve-se calado por um pequeno período de tempo].

13. E: Você pode falar Davi.
14. Davi: O zero.
15. E: Ok! Geometricamente, a reta y=x+1 intercepta o eixo horizontal x na abscissa x=-1 e a ordenada é quanto?
16. Davi: zero.
17. E: Mas algebricamente, o que significa o valor x=-1? Nós já estudamos isso!
18. [A dupla manteve-se calada por um pequeno período de tempo].
19. E: Vou dá uma dica! Substitua o x=-1 na equação y=x+1.
20. [Davi substituiu x=-1 na equação y=x+1 encontrando y=0]
21. E: Muito bem! Qual o significa algébrico de x=-1
22. Davi: A raiz da função?
23. E: Ok! A abscissa x=-1 significa o zero ou a raiz da função y=x-1.

Através do computador, os alunos perceberam que, numa família de retas y=x+b, existe uma associação com o sinal do coeficiente linear "b" com a abscissa do ponto de interseção dessas retas com o eixo horizontal. Mas, em suas respostas, não explicitaram quem era esta abscissa. Neste sentido, através da intervenção do pesquisador, desencadeou-se um processo investigativo com iniciação baseada nestas respostas, até a percepção de que esta abscissa é o zero ou raiz da função.

Deve-ressaltar que o professor interferiu na zona de desenvolvimento proximal dos alunos, fazendo-os associar o novo conhecimento (descrição feita mais acima[57]) ao conhecimento prévio (o zero ou raiz da função).

Além disso, os aprendizes lançaram mão de um importante teorema-em-ação sobre as retas y=x+b (vide protocolo acima): quando b for positivo, o zero ou raiz da função y=x+b é negativo; por outro lado, quando b for negativo, o zero ou raiz da função é positivo.

Com efeito, o zero ou raiz da função y=ax+b é $x_{zero} = -\frac{b}{a}$; mas a=1 e b>0. Assim

[57] Os invariantes percebidos inicialmente pelos aprendizes: "*quando o B for positivo o x vai ser negativo*" etc.

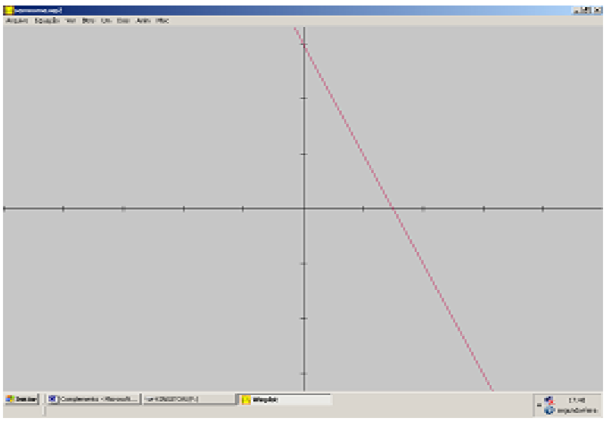
tem-se que $x_{zero}= -\frac{b}{1} = -b$.<0. Por conseguinte, a reta intercepta o eixo x na abscissa negativa x=-b.

Por outro lado, quando b<0, a reta interceptará o eixo x na abscissa positiva x=-b.

6.5.4.3 Propriedades do gráfico da função f(x) = ax+b com o coeficiente b fixo

Concebendo este conceito em ação, o aluno descobre invariantes relativos à família de retas y=ax+b, onde o coeficiente angular “a” varia e o coeficiente “b” é fixo.

4.) Qual é o sinal do coeficiente a da função y = ax +b representada pelo gráfico ilustrado abaixo?



DJONES: Resposta: O sinal do coeficiente é positivo

Figura 6.66 – Resolução da quarta questão da segunda avaliação

Figura 6.67 - Família de retas y=ax+2 com variação do “a” de 1 a 5.

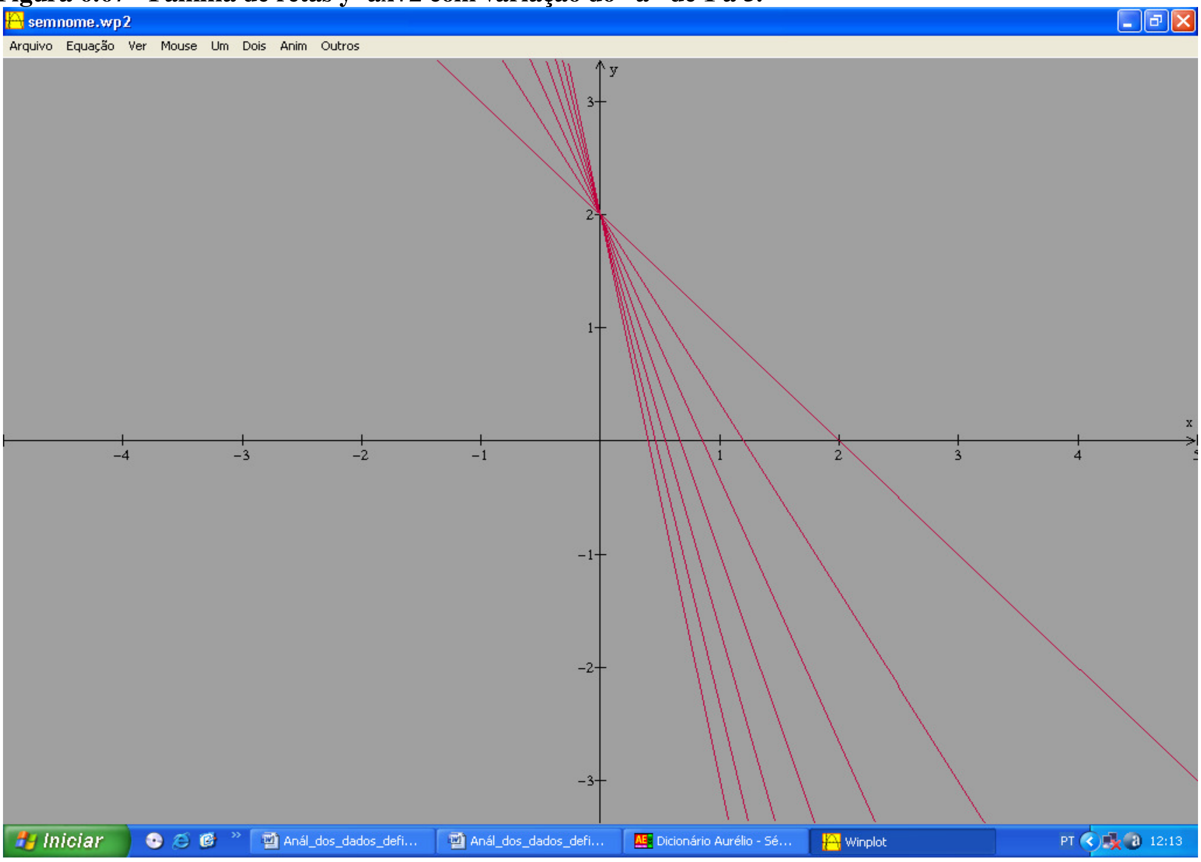


Figura 6.68 - Família de retas y=ax+2 com variação do “a” de -5 a -1

Entrevista:

Neste momento, Djones, utilizando o comando “família” do ambiente computacional *Winplot,* faz várias simulações com a família de retas y=ax+2. Esse procedimento é dividido em dois momentos. No primeiro momento, ele varia o parâmetro “a” de 1 a 5 (vide figura 6.66). No segundo momento, por sua vez, varia o parâmetro “a” de -5 a -1 (vide figura 6.67).

PROTOCOLO 31

Entrevista:

1. E: Qual é a diferença dessa família para outra?
2. A: Quando “a” é negativo vai interceptar pela direita! Quando a é positivo vai interceptar pela esquerda!
3. E: E aí a sua resposta está correta ou errada?
4. A: Errada, o a é negativo.

Sabe-se que o zero ou raiz real da função y=ax+b é $x = -\frac{b}{a}$. De fato, se y=0 temos 0=ax+b $\Rightarrow x = -\frac{b}{a}$. Para o conceito-em-ação lançado pelo aluno analisa-se dois casos.

Primeiro caso: Quando a>0 e b>0.

$$\text{Se a} > 0 \text{ e b} > 0 \Rightarrow \tfrac{b}{a} > 0 \Rightarrow x = -\tfrac{b}{a} < 0.$$

Assim, quando o zero ou raiz da função afim é negativo e o valor do coeficiente linear “b” é positivo, a reta intercepta, respectivamente, no eixo horizontal x em uma abscissa negativa e eixo vertical y em uma ordenada positiva, “interceptando pela esquerda”.

Segundo caso: Quando a<0 e b>0.

$$\text{Se a} < 0 \text{ e b} > 0 \Rightarrow \tfrac{b}{a} < 0 \Rightarrow x = -\tfrac{b}{a} > 0.$$

Assim, quando o zero ou raiz da função é positivo e o valor do coeficiente linear "b" é positivo, a reta intercepta, respectivamente, o eixo horizontal "x" numa abscissa positiva e eixo vertical y numa ordenada positiva, "interceptando pela direita". Portanto, o conceito-em-ação lançado pelo aluno está correto para b>0. Para o caso do coeficiente "b" negativo, a análise é análoga e foi feita e discutida com os alunos.

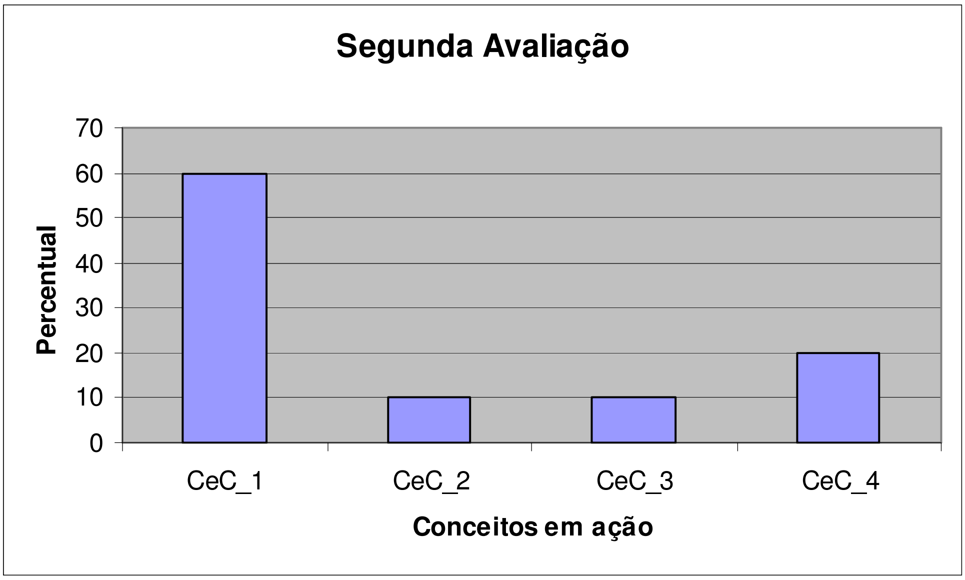


Gráfico 6.15 – Conceitos-em-ação concebidos pelos alunos

Por intermédio desse gráfico, observa-se que um dos conceitos-em-ação menos utilizados foi aquele denominado "o raciocínio algébrico para determinar o sinal do coeficiente "a" de uma função afim" (CeC_2) uma vez que se baseia num esquema de raciocínio bastante sofisticado. De fato, ao invés de o aprendiz determinar o sinal do coeficiente através do crescimento e decrescimento da função ou analisar através do ângulo de inclinação e, por conseguinte pelo coeficiente angular, ele substitui um ponto conhecido (x_1, x_2) na função f(x) = ax+b e determina o sinal do coeficiente "a". Este conceito-em-ação deve ser incentivado pelo professor em práticas pedagógicas destinados ao estudo do conceito de funções e Geometria Analítica.

Os conceitos-em-ação mais utilizados foram aqueles relacionados ao gráfico da função do primeiro grau f(x) = ax+b (CeC-1). Mas muitas dentre estas estratégias estão parcialmente corretas, uma vez que o aluno se fixa muito nos pontos de interseção do gráfico da função com os eixos horizontal e vertical e a partir daí começa a fazer inferências. Isto já tinha sido percebido nos estudos de Ferreira (1998).

Já o aparecimento do conceito-em-ação baseado nas transformações lineares (CeC_4) é interessante, pois poderá ser trabalhados com os alunos já no primeiro ano do Ensino Médio. Deve-se salientar que esta abordagem deve ser trabalhada inicialmente a nível intuitivo e depois a nível formal com uma abordagem condizente ao nível de estrutura cognitiva do aluno.

Já o conceito em ação baseado nas diferenças constante (CeC3) é uma indicação de que ao se trabalhar com as múltiplas representações, o ensino poderá ter bons resultados propiciando aos alunos um ambiente rico de investigações. Além disso, o conteúdo de progressão aritmética pode ser trabalhada concomitantemente com o estudo de funções. De fato, uma progressão aritmética é uma seqüência que pode ser enquadrada como uma função cujo o domínio é o conjunto dos números naturais..

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O conceito de função causa empecilhos na compreensão do aluno. De fato, ele tem dificuldade em entender variável, ficando muito preso ao conceito de incógnita, visto com maior profundidade a partir da sétima série. No próprio conceito de função, por sua vez, trabalha-se com outros conceitos subjacentes, a saber, conjunto domínio, conjunto imagem, conjunto contradomínio, relação, par ordenado, dentre outros. Dessa maneira, o aprendiz se sente inseguro de fazer a interligação entre esses conceitos e de conectar as principais representações de funções (SIERPINSKA, 1992; VINNER, 1992; RÊGO, 2000).

O objeto matemático função pode ser apresentado aos alunos sob diversas abordagens. Uma delas é a abordagem dada pelo grupo de matemáticos franceses denominado Bourbarki, em 1939, que define este conceito através de pares ordenados. Mas, também, o conceito de função pode ser visto como um tipo especial de correspondência entre dois conjuntos, dada pelo matemático Dirichlet em 1837 (SIERPINSKA, 1992; ZUFFI, 2001; BRAGA, 2006). Muitos pesquisadores apontam que a definição bourbarkiana é abstrata, principalmente numa abordagem inicial. Como alternativa, e por ser mais intuitivo, o conceito de função poderia ser introduzido através daquela preconizada por Dirichlet.

Em nossa pesquisa, ao utilizar a abordagem de Dirichlet numa fase inicial, o aluno teve dificuldades de conectar as duas estruturas dessa definição. Em alguns momentos, ao fazer a relação entre os dois conjuntos A e B, o aprendiz se concentrava mais na primeira estrutura da definição (para cada elemento de A), esquecendo-se ou não atentando para a segunda e, em outros momentos, concentrava-se mais na segunda estrutura (associando um único elemento de B), não se lembrando da primeira. Este resultado traz importantes implicações para o ensino-aprendizagem do conceito de função. Com efeito, diante dessa informação, o professor, em sala de aula, deve detectar essas deficiências de compreensão nos alunos e procurar meios para superá-las. No caso específico desta pesquisa, o pesquisador-professor fez a intervenção sem a mediação do computador. Através de questionamentos, sempre voltando para a definição, o aprendiz era incentivado a lembrar, perceber e interligar as duas estruturas interconectadas desse conceito.

Muitas pesquisas apontam que o computador auxilia a aprendizagem do conceito de funções (FERREIRA, 1998; RÊGO, 2000; CASTRO-FILHO, 2001). Primeiramente, através de seu impacto visual, o aluno se sente mais motivado ao resolver uma determinada situação-problema com sua mediação. Por outro lado, utilizando os seus comandos, rapidamente podem ser traçados vários gráficos com suas tabelas correspondentes, evitando cálculos algébricos cansativos e desnecessários. Em segundo lugar, ao trabalhar com as múltiplas representações oferecidas pelo *software* educacional, o aprendiz tem mais possibilidades de produzir significados aos conteúdos ligados ao conceito de função, uma vez que ele pode interligar essas representações, ampliando o seu repertório de compreensão (BORBA, 1999; BARRETO; CASTRO FILHO, 2008).

Nesta pesquisa, houve muitos casos em que o aluno se familiarizou com uma determinada representação, mas foi orientado pelo pesquisador-professor a recorrer a outra para vetar uma hipótese. Assim, por exemplo, houve momentos, no decorrer deste estudo, em que o estudante, trabalhando com a representação algébrica de uma relação, achava que a equação $x^2+y^2=1$ era uma função.

Através da sugestão do pesquisador, foi sugerido que os alunos trabalhassem com as outras duas representações de função, a saber, a gráfica e a tabular. Com essa última representação, surgiram novos questionamentos que recaíram no domínio da relação e a conclusão de que esta não representava uma função. Comparando essas três representações, observou-se uma melhor familiaridade do aluno com a representação tabular. Ao trabalhar com ela, o aluno vetou a hipótese de que esta relação representava uma função. Esses dados são coerentes com a afirmação de Borba e Penteado (2001, p. 30) de que “não devemos privilegiar um tipo de representação de funções, mas trabalhar com várias delas”. No presente caso, trabalhamos as representações algébrica, gráfica e tabular.

Na seção 2.2, foi realizada uma breve explanação cronológica da formalização de função. A definição que em tempos atuais conhecemos e divulgamos em nossa prática docente não foi concebida de uma hora para outra, em um momento único e isolado. Em 1718, Bernoulli considerou função como uma expressão formada de uma variável e algumas constantes. Nessa época, a definição de função era uma conjectura puramente abstrata voltada para o campo conceitual da Matemática e "demonstrava um certo encantamento pela Álgebra onde função é dada como uma expressão algébrica" (ZUFFI, 2001, p.12). De forma semelhante, os alunos também sentem um certo enlevo pela Álgebra, tendo grande convicção na força das operações formais usadas em expressões algébricas. Para eles, somente relações descritas como fórmulas analíticas merecem ser denominadas de funções. Dessa forma, na pesquisa, foram encontrados alunos que associaram o conceito de função a uma expressão analítica com x e y, enquadrando-se num obstáculo epistemológico.

Levando em conta essas considerações, na fase inicial da construção do conceito de funções, não se devem restringir funções à forma analítica ou algébrica uma vez que se pode constituir num obstáculo à aprendizagem do conceito de função. Nesse sentido, na proposta pedagógica desta pesquisa, propôs-se aos alunos atividades em que eles puderam ter oportunidades de se familiarizar com tabelas e gráficos que reconhecidamente são de fundamental importância para a formação do conceito.

Segundo Sierpinska (1992), muitos alunos não fazem a discriminação entre variáveis dependentes e independentes quando estão diante de uma fórmula de função, representadas por letras como x ou y. É um obstáculo epistemológico à construção do conceito de função uma vez que a ordem das variáveis é vista como irrelevante. Há uma forte convicção de que quando uma fórmula de função é dada, em que aparece x e f(x), deve-se substituir o valor da variável independente "x"pelo número dado. Aqui, a ordem das variáveis não tem importância. A fixação do aluno no raciocínio puramente algorítmico de que na fórmula sempre deve ser encontrado o valor da variável dependente f(x) = y é de tal forma determinante, que não consegue perceber que a variável que está sendo procurada é a variável independente "x". Para Sierpinska (1992), uma condição necessária para a aprendizagem do conceito de funções consiste na discriminação entre as variáveis dependentes e independentes. No presente estudo, foi identificado esse obstáculo. Contudo, através da intervenção do pesquisador-professor, os alunos foram orientados a utilizar o ambiente computacional *Graphmática.* Mediados por esta ferramenta, conseguiram identificar e transpor esse obstáculo à compreensão do conceito de função.

Muitas pesquisas (TALL & BAKAR, 1992; FOSSA; FOSSA, 2000; LIMA, 2008) apontam que o aprendiz tem dificuldade de lidar com a representação algébrica das funções constantes. Para eles, relações do tipo y = k não podem ser vistas como funções uma vez que não existe ou não aparece a variável x para substituir. Eles não consideram esses tipos de relações como funções porque não conseguem visualizar uma dependência causal entre as variáveis (relação entre a variável dependente e independente). Lima (2008), em uma pesquisa recente com estudantes licenciandos em Matemática, conclui que eles tiveram dificuldades de ressignificar o conceito de funções, sobretudo em relação à função constante. No decorrer desta pesquisa, foram constatadas essas dificuldades, verdadeiros obstáculos à compreensão do conceito de função. Todavia, com a intervenção do pesquisador, os alunos conseguiram transpor essas barreiras.

A intervenção foi desencadeada tendo como referência os princípios de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa propostos por Ausubel (AUSUBEL NOVAK; HANESIAN, 1980) para efetivar e facilitar a aprendizagem significativa. Dessa forma, a definição e a relação causal entre as variáveis da função do primeiro grau foram apresentadas, em primeiro lugar aos estudantes com dificuldades, para, logo em seguida, serem exibidas as funções lineares e constantes. Com isso, o pesquisador proporcionou as relações entre idéias e conceitos dessas três funções, fazendo com que o estudante percebesse ou lembrasse que os das duas últimas funções são casos particulares da primeira e que a função constante y = k pode ser escrita como y = 0x+k. Como segundo momento, as peculiaridades dessas três funções foram trabalhadas com os aprendizes, ressaltando as propriedades relativas a cada uma.

Outra dificuldade encontrada foi aquela relacionada ao estudo da variação do sinal da função, principalmente as funções do primeiro grau do f(x) = ax+b, com a <0. Para responder o estudo do sinal, alguns alunos desta pesquisa se basearam não pelas imagens dos números pertencentes à vizinhança da raiz da função, mas pelo sinal do zero ou raiz da função e, ainda, pelo coeficiente linear “b”. Eles estavam centrados nestes dois quadros, ou seja, a fixação desses aprendizes nos pontos de interseção do gráfico com o eixo horizontal e vertical é de tal forma determinante, que eles não conseguem perceber as imagens dos números que estão na vizinhança do zero ou na raiz da função do primeiro grau. Estes resultados também foram encontrados nos estudos de Ferreira (1998). Em nosso estudo, mediado pelo ambiente computacional *Winplot*, começou-se o trabalhar com uma função polinomial do terceiro grau com três raízes reais, fazendo com que os aprendizes se descentralizassem dos pontos de interseção do gráfico com o eixo horizontal e vertical da antiga função (a função do primeiro grau) e começassem a se concentrar nas vizinhanças das raízes da nova função (a função do terceiro grau).

Nessa dinâmica, os alunos têm uma melhor percepção dessas vizinhanças e ao focalizar a função restrita a estes intervalos fazem com que vejam e compreendam melhor o comportamento da função. Para tanto, foram utilizados os diversos recursos do ambiente computacional *Winplot* com alternâncias de representação (da gráfica para algébrica, passando pela tabular). Além disso, através de um processo de questionamentos, foi identificado que alguns alunos possuíam apenas uma compreensão instrumental do zero ou raiz da função na medida em que só tinham a noção de que este número real era a abscissa de encontro do gráfico com o eixo horizontal x. Mediada pelo *Winplot*, eles começaram a perceber ou se lembrar da interpretação algébrica da raiz da função, ou seja, o zero ou a raiz da função é o valor de x que anula a função. Assim, conectando as duas concepções sobre este assunto, conceberam uma compreensão relacional (SKEMP, 1989).

Para Vinner (1991, 1992), um aprendiz forma e expressa conceitos imagem e definição de um conceito matemático. Muitas vezes, em contextos de ensino e de aprendizagem, o professor espera que seus alunos recorram às definições formais, mas eles acabam utilizando as imagens conceitual. Fazer um mapeamento das imagens conceitual dos alunos, num processo de aquisição de conceitos, pode auxiliar o professor a organizar estratégias que os levem em consideração, podendo facilitar, assim, a aprendizagem. Nesta pesquisa, muitas imagens mentais conceitual foram observadas e, algumas delas, eram errôneas, ou seja, imagens mentais que poderiam entrar em conflito com o conceito (fenômeno de Compartimentar (VINNER, 1992). Contudo, com a mediação, propiciada pelo computador e através da alternância de representações, o aprendiz se convencia de que esta concepção estava em desacordo com a definição de função.

Como já foi mencionado, o conceito de função é de difícil compreensão e deve-se tomar cuidado com a sua apresentação. Tendo isto em mente, devem-se planejar atividades que favoreçam o enriquecimento das células das imagens do conceito, promovendo desta forma um melhor entendimento desse importante conceito da Matemática. Giraldo (2004) afirma que a definição do conceito de função deve fazer sentido ao aluno. Para tanto, deve haver uma imagem de conceito pré-existente, desenvolvida através do contato com uma gama ampla e diversificada de representações e ambientes de aprendizagem. Os resultados desta pesquisa indicam que a abordagem desse conceito, ao se utilizar intervenções mediadas por ambientes computacionais e privilegiar as múltiplas representações, propicia ao estudante estabelecer ligações significativas entre os sub-conceitos, gerando um enriquecimento das imagens do conceito e, consequentemente, do assunto em estudo.

Numa aula tradicional de Matemática, o professor tem como foco a exposição de conteúdos e fórmulas. O aluno é considerado como um elemento passivo na sala de aula, cuja tarefa consiste em copiar a matéria e fazer exercícios baseados no único modelo exposto pelo seu mestre. Muito dessa prática pedagógica foi influenciada pelo Movimento da Matemática Moderna, movimento internacional surgido na década de 1960 que enfatiza o conhecimento da linguagem formal e o rigor na resolução dos problemas. Na programação dos conteúdos, muitas questões com fundamentos da teoria dos conjuntos e da Álgebra devem ser resolvidas com os estudantes. Contrariamente a essa abordagem tradicional, a corrente construtivista defende que o aluno deve ser ativo no seu processo de aprendizagem, construindo conceitos e estratégias na resolução de problemas. Além disso, para haver avanços em sua aprendizagem, é preciso incentivar que os alunos criem e experimentem diferentes estratégias e teoremas em ação (VERGNAUD, 1993).

Nesta pesquisa, muitas estratégias e teoremas-em-ação utilizados pelos alunos na resolução de problemas foram identificados, ajudando a entender como eles constroem o conhecimento. Essas diferentes formas de raciocínios devem ser compreendidas e levadas em conta pelo professor no momento em que estão planejando as suas aulas, pois podem tornar a sua intervenção mais eficiente.

Durante a realização da intervenção e na fase de análise de dados da presente pesquisa, foram observadas as dificuldades dos alunos quanto à localização de pontos no plano cartesiano e interpretação gráfica de uma função. Essa defasagem dos alunos, em localizarem pontos no plano cartesiano, já tinha sido apontada por Chaves e Carvalho (2004), quando constataram, em uma pesquisa feita com uma turma do primeiro ano do Ensino Médio, a dificuldade de alguns alunos entenderem um ponto como par ordenado. Como os autores salientam: “esta ‘âncora’ para a formação do conceito de função precisa estar muito bem ‘atracada’ uma vez que muitos outros conceitos relativos à construção do conceito de funções dependem dela” (CHAVES; CARVALHO, 2004, p. 8). Todavia, após a exploração do Objeto de Aprendizagem (OA) Desafio Funções, como vimos na análise estatística, houve um aumento significativo de desempenho dos alunos em relação a estes conteúdos, revelando ainda uma menor dispersão de conhecimentos. Além disso, o OA criou um contexto para que uma negociação de significados pudesse ser feita, uma âncora no entender de Chaves e Carvalho (2004).

Uma das grandes vantagens de se ter trabalhado com o Desafio Funções, ao invés de trabalhar com situações convencionais de sala de aula, foi a possibilidade de o aluno localizar pontos dinamicamente. Assim, por exemplo, ao marcar a despesa referente ao mês de maio, o aluno manuseando o *mouse*, visualiza dinamicamente os meses e os valores relativos às despesas, percebendo as dimensões do espaço bi-dimensional. Além disso, outro potencial deste Objeto de Aprendizagem é inserir os alunos em uma situação de mundo real, na qual o aluno é um gerente de uma empresa que irá lidar com os conceitos de despesas, receitas e lucros. Com isso, o aluno pôde construir conhecimentos, produzindo significados aos conceitos matemáticos em relação a estes três núcleos (GIMENEZ; LINS, 1997). Este diferencial foi possível pelo uso das situações presentes no OA e da negociação de significados entre os alunos e o professor-pesquisador (BARRETO; CASTRO-FILHO, 2008).

Atualmente, no Ensino Médio, o estudo de funções é voltado essencialmente para Álgebra, ou seja, para a expressão analítica de uma função. Os alunos pouco estudam as representações gráficas ou tabulares das funções matemáticas. Acreditamos que o motivo maior de enfocar mais a representação simbólica em detrimento das outras se deve à ênfase no raciocínio algorítmico, praticando a seqüência técnica (algoritmo) e prática (exercícios), objetivando a aprovação no vestibular. Além disso, como argumentam Borba e Penteado (2001, p. 29): “[...] tal destaque muitas vezes está ligado à própria mídia utilizada. Sabemos que é difícil a geração de diversos gráficos num ambiente em que predomina o uso de lápis e papel e, então, faz sentido que não se dê muita ênfase a esse tipo de representação”.

Esses autores lembram que, no final dos anos 1980 e início dos anos 1990, muitos pesquisadores já alertavam para essa perigosa tendência do ensino de funções e propunham que as funções deveriam ser estudadas por representações múltiplas. Para eles, o interessante não era só privilegiar um tipo de representação e, sim, diferentes representações para uma mesma função: a expressão algébrica, o gráfico e a tabela. Todavia, este estudo de diferentes representações não deve ser isolado, mas de uma maneira coordenada. “Assim, conhecer sobre funções passa a significar saber coordenar representações. Essa nova abordagem só ganha força com ambientes computacionais que geram gráficos vinculados a tabelas e expressões algébricas” (BORBA; PENTEADO, 2001, p. 30).

Nesse sentido, o OA Desafio Funções cumpre este papel, ou seja, de conectar as múltiplas formas de representação de função. Muitas vezes, numa aula tradicional e sem recursos computacionais, dificilmente o professor consegue detectar as principais dificuldades conceituais dos alunos sobre o estudo do conceito de funções. Por meio da realização desta pesquisa, foi possível identificar algumas dificuldades dos alunos quando eles estavam explorando o OA Desafio Funções. Assim, pode-se concluir que a utilização de ferramentas computacionais é de grande auxílio ao professor na medida em que podem ser detectados os principais obstáculos à elaboração conceitual.

Segundo Scheinerman (2003), o mundo da matemática pode ser dividido em aproximadamente em dois domínios: o discreto e o contínuo. Assim, como os números inteiros são o instrumento principal da Matemática Discreta, os números reais estão no cerne da Matemática Contínua. Durante a realização da intervenção e na fase de análise dos dados do presente estudo, observa-se que uma pesquisa mais detalhada sobre a compreensão do aluno sobre o conceito de função na passagem do discreto para o contínuo deve ser feita, na medida em que, na presente pesquisa, as atividades realizadas, os *softwares* e OA utilizados trabalharam o conceito de função a partir da perspectiva dos números inteiros. Portanto, a perspectiva do contínuo não foi suficientemente contemplada. Neste sentido, como objeto de futuras investigações, pode-se fazer um mapeamento dos obstáculos epistemológicos à compreensão do conceito de continuidade já encontrados e outros que poderão ser descobertos.

Muitas pesquisas realizadas na área da Educação Matemática (FELICE, 2007; IGLIORI, 2007) apontam que o conceito de número real (números racionais e irracionais) causa muita dificuldade aos alunos, pois estão subjacentes vários outros conceitos: densidade da reta, relação de equivalência e de ordem, de infinito e de número irracional, dentre outros.

Por outro lado, os professores se sentem inseguros ao tratar desses conceitos com seus alunos.

Assim, por exemplo, Igliori (2007), realizando um estudo diagnóstico com 45 professores de matemática do ensino fundamental e médio sobre a imagem conceitual e definição da reta real, evidenciou concepções apresentadas pelos professores sobre números reais não muito diferentes das dos alunos. As informações foram obtidas por meio de testes diagnósticos e realização de entrevistas.

O conceito imagem de alguns professores indicava a existência de "vários", "alguns" e "muitos números reais entre dois números reais dados. Além disso, alguns deles acreditavam na existência de antecessor e sucessor entre os dois números reais, entrando em conflito com a compreensão do conceito de densidade da reta real.

Continuando com sua pesquisa, agora sobre o conceito de função e com oito alunos do 2º ano de um curso de Licenciatura em Matemática, a autora inferiu, a partir de dados colhidos por meios de questionários e entrevistas, que esses sujeitos tinham conceitos imagem sobre gráficos de funções como sendo contínuos.

Pesquisas futuras poderão investigar que atividades e objetos de aprendizagens poderiam dar suporte ao desenvolvimento de conceitos de funções relacionados à matemática dos contínuos.

Os resultados da presente pesquisa de doutoramento darão suporte para propor um padrão de análise para o uso de Objetos de Aprendizagem e *software* educativo para o ensino de funções. Que aspectos um *software* ou OA de funções deveria ter?

Um deles já pode ser destacado. Um ambiente computacional voltado para o estudo de funções deve trabalhar com as múltiplas representações. O aprendiz, ao articulá-las, poderá ter uma compreensão relacional dos conteúdos relacionados ao conceito de função. Neste sentido, o uso de Objetos de Aprendizagem deve pressupor uma ou mais situações-problemas que devem ser resolvidas pelos alunos, usando uma variedade de representações e, conseqüentemente, pondo em ação um conjunto de invariantes.

Além disso, também baseados nas conclusões desse estudo e tendo em mente trabalhos e pesquisas futuras, pretende-se esboçar uma proposta de formação continuada para professores de Matemática, na área de Álgebra e, em particular, no estudo de funções, na modalidade à distância. O conteúdo do curso abordará os seguintes tópicos: obstáculos epistemológicos à compreensão do conceito de função, teoria dos campos conceituais, exploração de *software* e objetos de aprendizagem que enfoquem o conceito de função; planejamento de aulas sobre o conceito de função com suporte de *software* e objetos de aprendizagem.

Segundo Machado (1992), o uso de Metáforas, figuras de linguagem que predominam na literatura e na linguagem materna, é um instrumento essencial aos que se dedicam à Matemática, sobretudo ao seu ensino, podendo ser um recurso didático poderoso para a compreensão de conceitos matemáticos. Para o autor, baseado em Aristóteles, uma metáfora é "[..] dar a uma coisa o nome de outra coisa, produzindo-se como que uma transferência de significados, com base na analogia e na semelhança" (MACHADO, 1992, p. 10).

Assim, por exemplo, o professor ao ensinar o conteúdo equações poderá utilizar a metáfora da balança utilizada em uma feira livre. Neste sentido, o aprendiz, fazendo analogias, poderá fazer uma transferência de significados entre o princípio de equivalência com as ações, executadas na balança, realizadas pelo feirante.

Neste sentido, como resultados desta pesquisa e tendo em mente o relevante papel que as metáforas podem desempenhar no exercício da função docente, pretende-se produzir um Objeto de Aprendizagem destinado ao estudo de funções, utilizando a alegoria da máquina. Mediado por esse Objeto, o aluno imaginará uma função y = f(x) como sendo uma máquina onde os elementos x do domínio são transformados nas imagens correspondentes f(x). Este processo de transformação é justamente a lei de correspondência entre a variável dependente y com a variável dependente x. Os assuntos tais como composição e inversa de funções estarão igualmente contemplados neste Objeto de Aprendizagem.

Finalmente, durante o processo interventivo e na análise dos dados desta pesquisa, foram anotados e observados diversos recursos computacionais que poderiam ser inseridos num ambiente computacional. Levando em conta essas considerações, pretende-se viabilizar a construção de um novo *software* educativo.

Neste *software*, além das representações tradicionais do estudo de funções (a algébrica, tabular e gráfica), deverão estar contidos a representação de funções por diagramas e o estudo desse conceito através da alegoria da máquina. Também nele, serão trabalhados gráficos de funções definidos tanto em domínios discretos como contínuos.

O presente trabalho não teve a intenção de esgotar todas as questões relacionadas à aprendizagem do conceito de funções mediadas por ambientes computacionais. Espera-se que os resultados contribuam para a realização de outros estudos e a aplicação traga melhoria na aprendizagem desses conceitos fundamentais no desenvolvimento do pensamento matemático.

REFERÊNCIAS

ABRAHÃO, Ana Maria Carneiro; PALIS, Gilda L. R. A questão da escala e as concepções de professores ao analisarem gráficos de funções f:R→R obtidos em calculadora. **Educação Matemática em Revista - SBEM**, a. 11, n. 16, p. 10-16, 2004.

ALVES, Francisco Régis Vieira. **Análise do desenvolvimento conceitual no cálculo diferencial e integral: continuidade de funções.** 2001. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Ceará - UFC, Fortaleza, 2001.

AUSUBEL, D.P; NOVAK, J.D.; HANESIAN, H. **Psicologia Educacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BARBOSA, G. O.; BORGES-NETO, H. Raciocínio lógico formal e aprendizagem em cálculo diferencial integral: o caso da Universidade Federal do Ceará. **Temas e Debates**, v. 8, n.6, p. 60-70, 1995.

BARRETO, A. L. O.; CASTRO-FILHO, J.A. O estudo de funções mediado por um objeto de aprendizagem. IN: II Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2008, Recife. II SIPEMAT. **Anais...** Recife : Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, 2008. V. 1. P. 1-12.

BECKER, Howard. Problemas de inferência e prova na observação participante. In: **Métodos de Pesquisa em Ciências Sociais.** São Paulo: Hucitec, 1997.

BOGDAN E BICKLEN. In LÜDKE, Menga & ANDRÉ, Marli. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

BORBA, M. C. Tecnologias informáticas na educação matemática e reorganização do pensamento. IN: BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas.** São Paulo: Editora UNESP, 1999.

______.; JANUZZI, G. **Fun** [software]. 1998.

BORBA, M. C.; PENTEADO M. G. **Informática e Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BOYER, C. Proportion, equation and function: tree steps in the development of a concept. **Scripta Mathematica**, n.16, p.5-13, 1946.

BRAGA, Ciro. **Função: a alma do ensino da matemática.** São Paulo: Annablume; FAPESP, 2006.

BRANDÃO, Carlos Rodrigues. **Repensando a pesquisa participante.** São Paulo: Brasiliense, 1984.

CARRAHER, D. W. A aprendizagem de conceitos com o auxílio do Computador. In: ALENCAR, M. E. **Novas contribuições da psicologia aos processos de ensino-aprendizagem.** São Paulo: Cortez Editora, 1992.

CARRAHER, T.N. O método Clínico: usando o exame de Piaget. Petrópolis: Vozes, 1998.

CARRETERO, Mario. **Construtivismo e educação.** Porto Alegre, RS: Editora Artes Médicas, 1997.

CASTRO-FILHO, J. A**.** Balança interativa: um ambiente para auxiliar o progresso das operações aritméticas para a álgebra. In: WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA ESCOLA, 7.; CONGRESSO DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE COMPUTAÇÃO, 21., 2001, Fortaleza. **Anais...** Fortaleza: SBC, 2001a.

______. Novas tecnologias e o ensino de função, taxa de variação e acumulação**,** In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2001, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: ENEM, 2001b.

______.; CONFREY, Jere . Interactive diagrams: investigating java-applets for learning mathematics. In: CONGRESSO DA SOCIEDADE BRASILEIRA DA COMPUTAÇÃO, 21., 2001, Fortaleza. **Anais…**Fortaleza: SBC, 2001.

CAVALCANTI, J. D. B.; CAMARA DOS SANTOS, M. . Significado do símbolo "=" o contexto das funções e as concepções dos alunos do 3º ano do Ensino Médio. In: II Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2008, Recife. II SIPEMAT. **Anais..**. Recife : Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, 2008. V. 1. P. 1-15.

CHAVES, M. I. de Albuquerque; CARVALHO, H. C. de. Formalização do conceito de função no ensino médio: uma seqüência de ensino-aprendizagem. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais...** Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2004.1 CD-ROM.

CONFREY, J.. Using computers to promote students' inventions on the function concept. In S. Malcom , L. Roberts, and K. Sheingold (eds.). **The year in school science 1991**. (pp. 141-174). Washington , DC : American, 1992.

DUBINSKY, E.; HAREL, G. (1. The nature of the process conception of function, In: ______. (Ed.). **The concept of function - aspects of epistemology and pedagogy**. [S.l]: M.A.A. Notes, 1992. v.25. p.85-106.

FERREIRA, Verônica G. Gomes. Aproveitando o potencial dinâmico do computador no ensino de função matemática. ENCONTRO DE PESQUISA EDUCACIONAL DO NORDESTE, 13., 1998, Natal. **Anais...** Natal: UFRN, 1998. v. 19, p. 37-50.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas, SP: Autores Associados, 2006. (Coleção Formação de professores).

FOSSA, John Andrew; FOSSA, Maria da Glória. **Funções, equações e regras:** ensaios sobre a educação matemática. Belém, PA: EDUEPA, 2000.

FRANCHI, A. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. In: ALCÂNTARA-MACHADO, S.D. *et al*. **Educação Matemática:** uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. p. 155-195.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia:** saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

FREUDENTHAL, H. **Didatical phenomenology of mathematical structures**. Mathematics education Library. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1983.

GARDING, Lars. **Encontro com a matemática.** 2. ed. Brasília, DF: Universidade de Brasília Editora, 2000.

GIMENEZ, J.; LINS, R. C. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** Campinas, SP: Papirus, 1997.

HECTOR, Judith H. Graphical insight into elementary functions. In: FEY, J.T.; HIRSCH, C. R (org.). **Calculators in mathematics education.** [s.l]: NCTM/Yearbook, 1992.

JESUS, M. A. S. de; SILVA, R. C. O. A teoria de David Ausubel – o uso dos organizadores prévios no ensino contextualizados de funções. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais...** Recife: UFPE, 2004. 1 CD-ROM.

JOHANNOT, Louis. **Le raisonnement mathématique de l´adolescent.** Paris: Delachaux & Niestlé, 1947.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. **Metodologia do Trabalho Científico**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2004.

LEITE, Monalisa de Abreu. **Processo de mediação de conceitos algébricos durante o uso de um objeto de aprendizagem**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Ceará – UFC, Fortaleza, 2006.

LIMA, Elon (editor). **Exame de Textos.** Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LIMA, L. **A aprendizagem significativa do conceito de funções na formação inicial do professor de matemática.** Dissertação de mestrado. Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2008.

MAGINA, S. *et al*. **Repensando a adição, subtração: contribuições da teoria dos campos conceituais.** São Paulo: PROEM, 2001.

MARINHO, Rômulo. **Uma abordagem alternativa de ensino de cálculo utilizando infinitésimos.** Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal UFRN, Natal, 2000.

MASINI, E. *et al.* **Psicopedagogia na escola:** buscando condições para a aprendizagem significativa. São Paulo: Edições Loyola, 1994.

MEIRA, Luciano L. Aprendizagem e ensino de funções. In: **Estudos em Psicologia da Educação Matemática.** Recife: UFPE, 1993.

______. Educação algébrica e resolução de problemas: significados e modelagem algébrica. 1997. Disponível em: < http://www.tvebrasil.com.br/salto>. Acessado em 17 fev. 08.

MIRAS M. Um ponto de partida para a aprendizagem de novos conteúdos: os conteúdos prévios. In: COLL, C. *et al*. **O construtivismo em sala de aula.** São Paulo: Ática, 1998.

MORAES, M. Cândida. **O paradigma educacional emergente.** Campinas, SP: Papirus, 1997

MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 7, n. 1, 2002. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/revista.htm> . Acessado em: 14 fev. 2009.

______.; MASINE, Elcie F. Salzano. **Aprendizagem Significativa**: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Moraes Ltda., 1982.

______. Aprendizagem Significativa. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1999.

MORETTI, Vanessa. O conceito de função: os conhecimentos prévios e as interações sociais como desencadeadoras da aprendizagem. SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2000. **Livros de Resumos.** Serra Negra, SP: SIPEM, 2000.

OLIVEIRA, C., C.; COSTA, J., W.; MOREIRA, M.. Ambientes Informatizados de Aprendizagem. **Produção e Avaliação de Software Educativo.** Editora papirus, 2001.

OLIVEIRA. Marta Kohl. Vygotsky e processo de formação de conceitos. In: LA TAILLE, I. de *et al*. **Piaget, Vygotsky e Wallon: teorias psicogenéticas em discussão.** São Paulo: Summus, 1992.

______. Vygotsky: aprendizado e desenvolvimento – um processo sócio-histórico. 4. ed. São Paulo: Scipione, 2000.

POZO, J. I. **Teorias cognitivas da aprendizagem**. 3. ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

RÊGO, Rogéria Gaudêncio. **Um estudo sobre a construção do conceito de função. 2000.** Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN, 2000.

REGO. T. C. **Vygotsky: uma perspectiva histórico cultural da educação.** Petrópolis, RJ: Vozes, 2000.

SANTOS, Monica dos *et al*. **A construção do conceito de função no ensino fundamental.**

In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais...** Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2004. 1 CD-ROM.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: DUBINSKY, E; HAREL, G. (Ed.). **The concept of function - aspects of function and pedagogy.** Nova York: MAA Notes, 1992. v.25. p.195-213.

SKEMP, R. **Structured acitivies for primary mathematics.** London: Routledge, 1989.

TALL, David. The psychology of advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (Ed.). **Advanced mathematical thinking**, Kluwer: Dordrecht, 1991. p. 65-81.

______.; BAKAR, M. Students Mental prototypes for Functions and Graphs. **Int. J. math. educ. Sci. Technol.**, v.23, n.1, 1992.

______.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematical with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, v.12, n.2, p.151-169, 1981.

TINOCO, Lucia A. A. (Coord.) **Construindo o Conceito de Função.** Rio de Janeiro: Instituto de Matemática/ UFRJ, 2001.

TRIVIÑOS, Augusto N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais:** a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 1987.

VERGNAUD G. Theorical framewooks and empirical facts in the psychology of mathematics education. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 6., 1988, Budapest. **Proceedings of the International Congress on Mathematical Education.** Budapest: ICME, 1988. p. 39-41.

______. Teoria dos campos conceituais. In: NASSER, L. (Ed.). SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1, 1993, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: SIEM, 1993. p. 1-26.

VINNER, S. The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. In: DUBINSKY, E; HAREL, G. (Ed.). **The concept of function - aspects of function and pedagogy.** Nova York: MAA Notes. 1992. v.25. p. 195-213.

______. The Role of definitions in the teaching and learning mathematics. In: TALL, D.

(Ed.). **Advanced Mathematical Thinking**. Kluwer: Dordrecht, 1991. p. 65-81.

VYGOTSKY. L. S. **A construção do pensamento e da linguagem.** São Paulo: Martins Fontes, 2001.

______. **A formação social da mente:** o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. 6. ed. São Paulo: Mastins Fontes, 1998.

______. **Pensamento e linguagem.** São Paulo: Martins Fontes, 2000.

WILEY, D. A. Connecting learning objects to instructional design theory: a definition, a metaphor,and a taxonomy. In: WILEY, D. A. (Ed.). **The instructional use of learning object.** 2000. Available at: <http://www.reusability.org./read/chapters/wiley.doc>. Retrieved in feb., 14, 2002.

ZUFFI, E. M. Alguns Aspectos do Desenvolvimento Histórico do Conceito de Função. **Educação Matemática Em Revista,** São Paulo, a. 8, n.9, p.10–16, 2001.

______. Linguagem matemática: o conceito de função e professores do ensino médio. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1, 2000, Serra Negra. **Livro de Resumos do I Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Serra Negra, SP: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2001. p.348-352.

______. **O tema funções e a linguagem matemática de professores do Ensino Médio: por uma aprendizagem de significado.** 1999. 307f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo - USP, São Paulo, 1999.

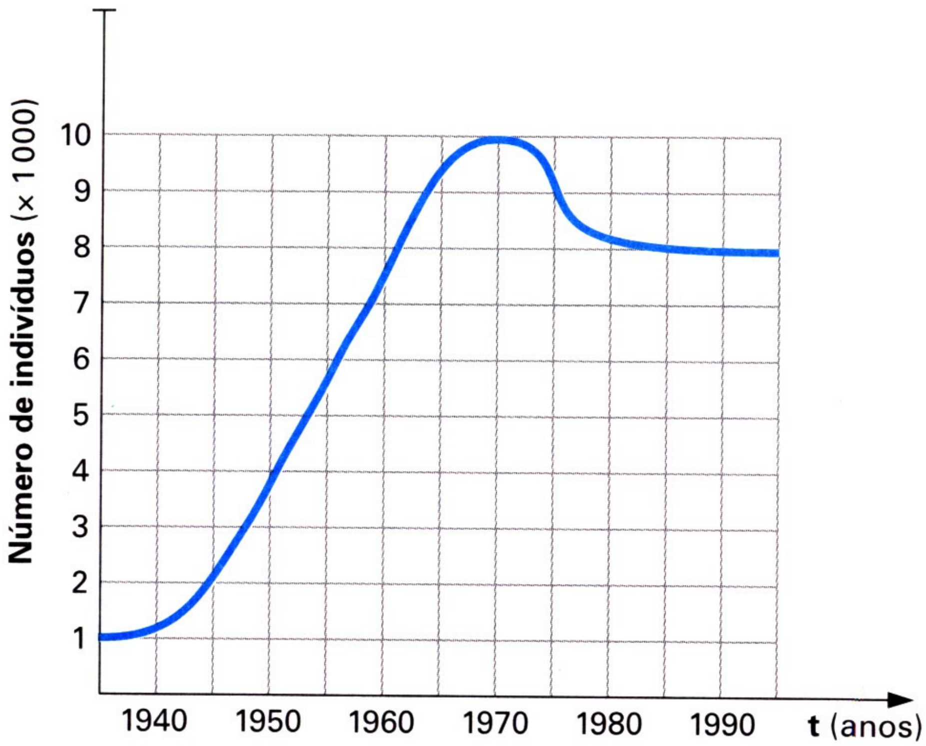
APÊNDICES

APÊNDICE A – Teste Diagnóstico

Escola:____Aluno: ____

Nº__________Turma_______

1.º) (Enem) O número de indivíduos de certa população é representado pelo gráfico abaixo:



Em 1975, a população tinha um tamanho aproximadamente igual à população no ano de:

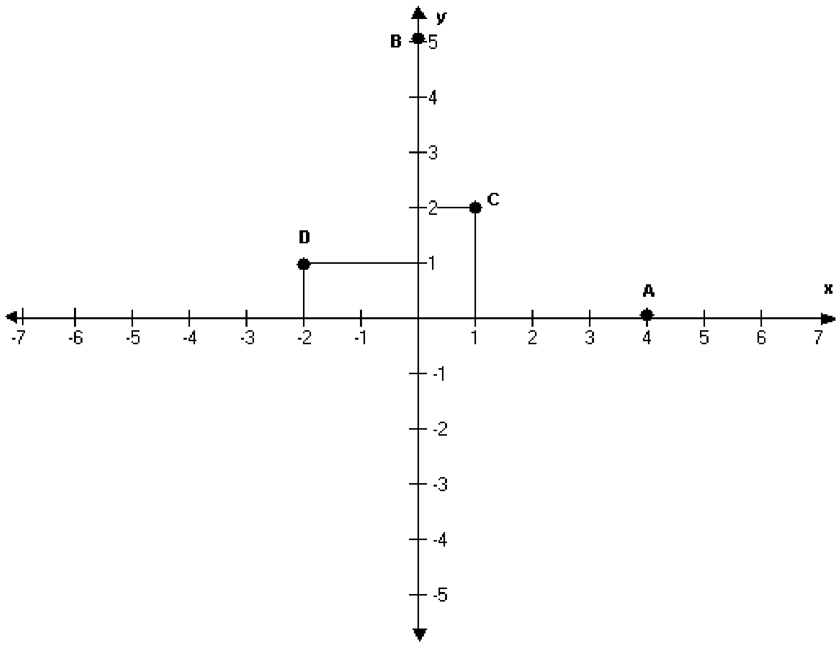
a) 1960. b) 1963 c) 1967 d) 1970 e) 1980.

2.º) Baseado no gráfico da questão anterior responda:

a) Entre os anos de 1940 a 1970 o número de indivíduos cresceu ou decresceu? E entre os anos de 1970 a 1980, o que ocorreu?

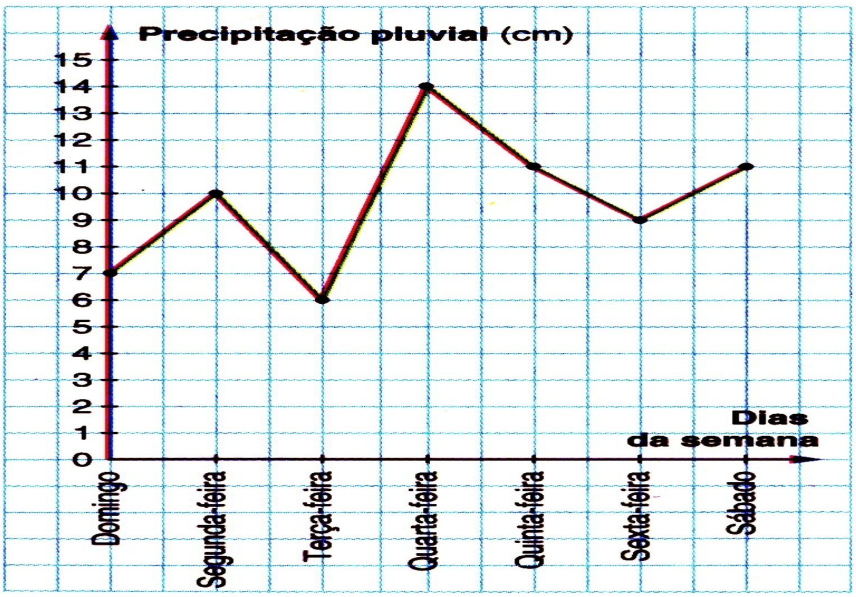
b) Entre os anos de 1935 a 1939, o que aconteceu?

3.º) Indique as coordenadas dos pontos A, B, C e D dados abaixo:



4.º) Determine o valor de x na equação: $4x - 6 = 2$.

5.º) Usamos um gráfico de linhas quando pretendemos mostrar mudanças nos dados, como o gráfico a seguir, que mostra a variação da precipitação pluvial em uma semana, numa certa cidade:



Com base no gráfico do exemplo, responda:

a) Em que dia choveu mais?

b) Em que dia choveu menos?

c) Em quais dias a chuva foi superior a 10cm?

d) Quantos centímetros a mais choveu na sexta-feira que no domingo?

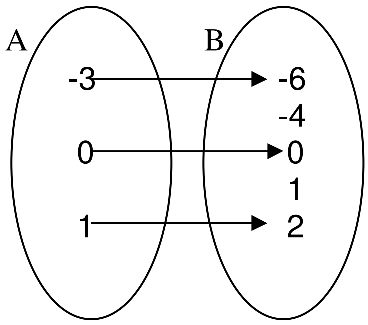
6.º) Comprando 3 pãezinhos, você paga 36 centavos. Quanto você paga por 15 pãezinhos?

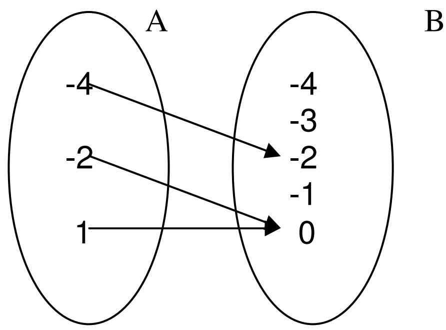
7.º) Verifique se o número 2 é raiz da equação $x^2+7x+12=0$.

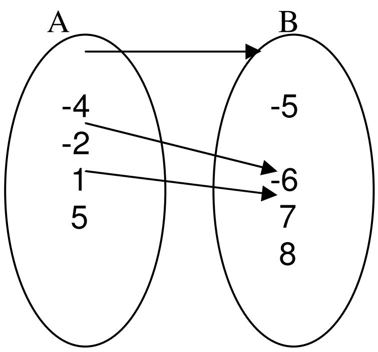
8.º) Cinco pintores levam 40 dias para pintar uma escola. No mesmo ritmo de trabalho, quanto tempo levariam 10 pintores para fazer o mesmo serviço?

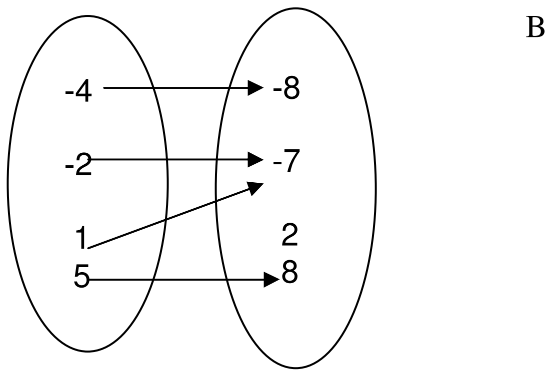
9.º) Certas relações de A em B possuem a seguinte propriedade: para cada elemento de A é associado em um único elemento de B.

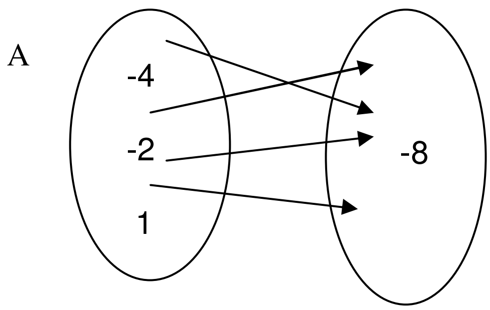
Identifique as relações de A em B que gozam dessa propriedade:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

APÊNDICE B – Atividade 1 – Avaliação após o OA

INTRODUÇÃO

No cotidiano, encontramos muitas situações que envolvem a aplicação de funções, principalmente aquelas que envolvem fórmulas, gráficos e tabelas. Diversas vezes, trabalhamos com funções especiais tais como as lineares, sem nos percebermos.

Empresas, por exemplo, usam funções para calcular quanto tempo deve manter uma máquina considerando seu custo e sua depreciação anual antes de trocá-la por outra que possui custo maior mesmo que esse apresente maior produção. Podem ainda utilizar uma função para relacionar a venda de um produto com o investimento feito com propaganda em meios de comunicação (televisão, jornal, revista etc).

Um último exemplo seria o cálculo do valor que se paga por kilograma (kg) de um produto. Você sabe quanto custa um kg de feijão? Se você for comprar 5,5 kg, como você calcularia o preço total?

Além disso, em várias áreas do conhecimento, estamos sempre relacionando duas grandezas, mas nem sempre conseguimos percebê-las. A atividade proposta no Objeto de Aprendizagem: Desafio Funções baseia-se, portanto, na importância que o conhecimento sobre funções tem para a compreensão de muitos problemas da vida, em especial o controle de despesas e receitas.

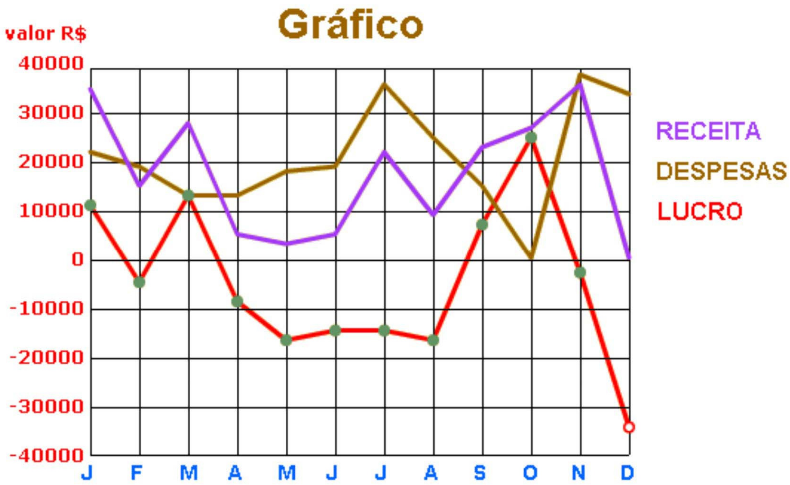
Após a exploração do Desafio funções no computador, responda as questões abaixo.

1. O gráfico abaixo representa as despesas em função dos meses dos anos. Nele estão marcados os pontos A, B, C, D, E, F, G e H.
   a) No gráfico de despesas, onde se vêem as datas (meses) referentes ao gráfico?
   b) Onde se vê as despesas?
   c) Desses pontos, qual o de maior despesa? E o de menor?
   d) Qual foi a despesa aproximada do mês de setembro?
   e) Em que meses as despesas foram iguais?

f) Entre os meses de junho a julho as despesas cresceram ou diminuíram? E durante os meses de agosto e outubro, o que ocorreu?

2. O gráfico abaixo, representa as despesas, receitas e lucros em função dos meses do ano. Agora, responda as seguintes perguntas:

a) Em que meses as despesas foram maiores que as receitas?
b) Qual foi mês que apresenta o maior lucro? E qual o menor lucro(responder em termos monetários)?
c) Houve crescimento do lucro entre maio a junho? Por quê?
d) Em que meses as despesas e as receitas foram iguais?



APÊNDICE C – Atividade 2 – Noção Intuitiva de Funções

INTRODUÇÃO

Em muitas relações entre dois conjuntos, o valor de uma delas depende do valor da outra. Por exemplo, o imposto sobre um produto depende do seu preço de venda, a distância que um objeto percorre em determinado tempo depende de sua velocidade, o preço de postagem de uma encomenda pelo correio depende do seu peso, e a área de um círculo depende do seu raio.

ATIVIDADES

1. Um taxista recebe R$ 3,00 pela bandeirada e mais R$ 2,00 por quilômetro rodado.

1.1 Baseado nessas informações, preencha a tabela abaixo:

Número de quilômetros rodados	Preço a pagar ao taxista
1 km	
2 kms	
3 kms	
4 kms	
5 kms	
6 km	
7 kms	
8 km	

1.2 O valor da corrida paga ao motorista é função dos quilômetros rodados? Por quê?

1.3 Utilizando o papel quadriculado, faça o gráfico dos pontos obtidos na tabela.

1.4 Tente escrever uma expressão que relacione o total a pagar em função do número de quilômetros rodados.

2. Considere a tabela abaixo que relaciona o número de litros de gasolina comprados e o preço a pagar por eles (em agosto de 2003).

Número de litros comprados	Preço a pagar
1	R$ 1,5
2	R$ 3,0
3	R$ 4,5
4	...
...	
40	R$ 60,00

a) Quanto pagarei por 5 litros?

b) Quanto pagarei por 7 litros?

c) O preço a pagar ao posto de gasolina é função dos litros colocados no tanque? Por quê?

d) Quanto pagarei por x litros de gasolina?

e) Quantos litros coloquei no tanque sabendo que paguei R$ 30 reais?

3. O motorista Antônio possui uma camioneta cujo tanque comporta 30 litros. Ele vai abastecer num posto de gasolina que cobra R$ 1,5 por cada litro de gasolina. Sabendo que ele abasteceu 18 litros o seu carro, o quanto pagou? Se enchesse o seu tanque completamente, o quanto pagaria?

4. Utilizando o software *GRAPHMATICA*, trace o gráfico da função encontrada na questão anterior.

X	Y
-30	
-7	
-15	
15	
30	
37	

a) Complete a seguinte tabela. (Sugestão: Menu: Ver\Tabelas de Pontos e use os ícones Ampliar e Reduzir).

b) Para o dono de um posto, existe sentido em calcular o valor de y quando x =-15? Por quê?

c) Para o motorista Antônio, existe sentido em calcular o valor de y quando x = 37? Por quê?

5. Complete a seguinte tabela. (Sugestão: Menu: Ferramentas\Calcular)

x	y
35	
	72
	74
-41	

6. Existe alguma possibilidade em que Antônio poderá pagar R$ 75,00? Nesse caso, quantos litros iriam ser colocados no tanque de sua camioneta? Explique com suas próprias palavras.

APÊNDICE D – Atividade 3 – Noções geométricas

INTRODUÇÃO

Às vezes, é necessário determinar o ponto de intersecção entre os gráficos de duas funções. Vejamos um exemplo.

O carro de Júlia e o de Pedro estão em movimento uniforme na mesma estrada, que é reta. Pedro saiu do marco 1m e dirige a 2 m/s. Júlia, por sua vez, saiu do marco 2m e vai à mesma direção e sentido que Pedro, a 1.5 m/s.

Se desejarmos saber em que metro os carros irão se encontrar e em quantos segundos chegarão nesse ponto, precisamos calcular as funções horárias e determinar a posição de encontro.

As funções horárias são

- $S_J = 2 + 1.5t$, para o carro de Júlia.
- $S_P = 1 + 2t$, para o carro de Pedro.

Como queremos posições iguais, devemos fazer $S_P = S_J$, isto é, $1 + 2t = 2 + 1.5t$ e, resolvendo a equação, obtemos $t = 2s$. Assim, $S_P = S_J = 5$.

Os carros irão encontrar-se no marco 5 m, dois segundos após a saída.

Conhecidas as leis das funções horárias, podemos construir os gráficos correspondentes, em um par de eixos.

O gráfico a seguir mostra os valores de t e de s.

ATIVIDADE 1

Duas partículas A e B movimentam-se segundo uma mesma trajetória retilínea. Sabe-se que a função horária da partícula A é $S_A = 1.8 + 0.6t$. A partícula B, por sua vez, tem função horária $S_B = 1 + 2t$. Sendo que t (tempo) está em segundos e s (espaço), em metros. Pede-se:

a) Utilizando o *WINPLOT*, trace o gráfico da função horária da partícula A: $S_A = 1.8 + 0.6t$. (Procedimento: Menu: Equação\Explicita. Além disso, lembre-se que a adaptação tem que ser feita para $y = 1.8 + 0.6x$).

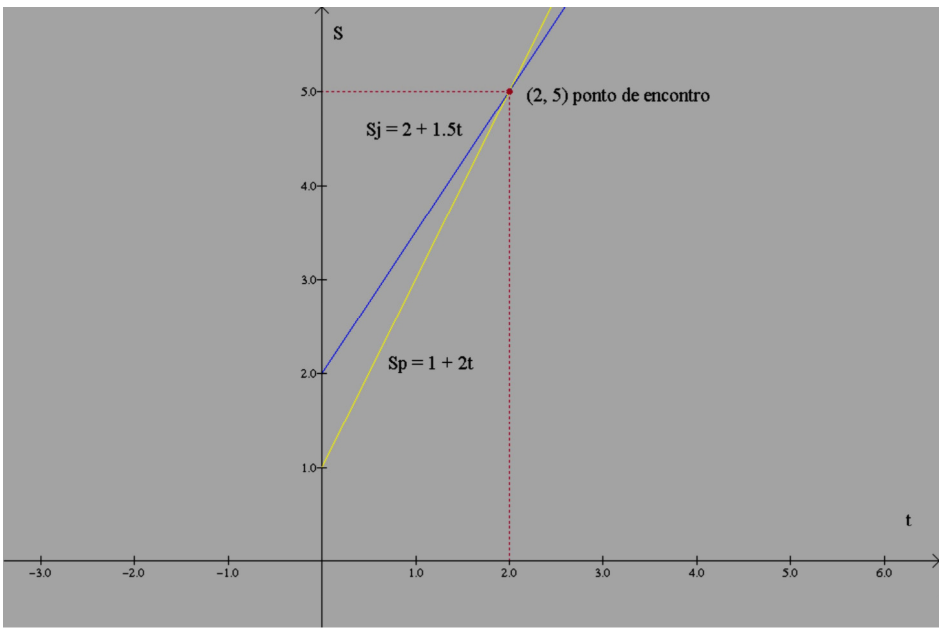
b) Utilizando o *WINPLOT*, trace o gráfico da função horária da partícula B: $S_B= 2.7+0.3t$

c) Determine o ponto de encontro das duas partículas.

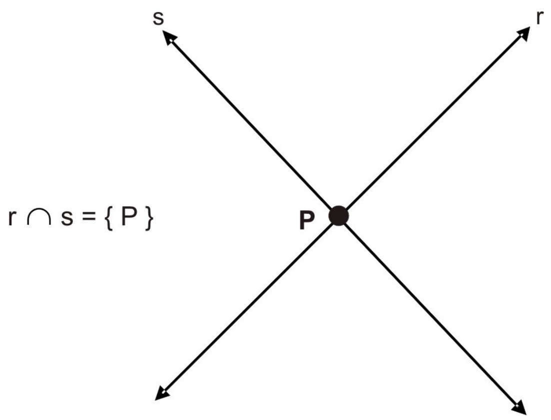
d) No *WINPLOT* utilizando o menu Equação/Ponto/(x, y) plote o ponto encontrado na questão anterior.

Na geometria euclidiana quando duas retas se encontram chamamos de retas concorrentes.

RETAS CONCORRENTES



Definição: Duas retas são concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto comum.



ATIVIDADE 2

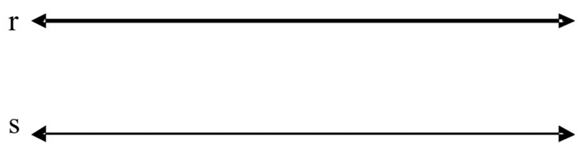
Duas partículas A e B movimentam-se segundo uma mesma trajetória retilínea. Sabe-se que a função horária da partícula A é $S_A = 1.8 + 0.6t$. A partícula B, por sua vez, tem função horária $S_B = 1 + 0.6t$. Sendo que t (tempo) está em segundos e s (espaço), em metros. Pede-se:

a) Utilizando o *WINPLOT*, trace o gráfico da função horária da partícula A: $S_A = 1.8 + 0.6t$. (Sugestão: Menu: Equação\Explicita. Além disso, lembre-se que a adaptação tem que ser feita para $y = 1.8 + 0.6x$).
b) Utilizando o *WINPLOT*, trace o gráfico da função horária da partícula B: $S_B= 1+0.6t$
c) As retas se interceptam em algum ponto? Justifique a sua resposta.

Na geometria euclidiana, quando duas não se interceptam são chamadas de retas paralelas.

RETAS PARALELAS

Duas retas são paralelas quando são coplanares (estão no mesmo plano) e não possuem ponto comum. Vejamos o exemplo abaixo.



Observe que as retas r e s não têm pontos comuns: r $\cap$s =Ø. Para representarmos o paralelismo, utilizamos o símbolo / /. No nosso exemplo temos r / /s.

ATIVIDADE 3

1. Utilizando o WINPLOT verifique se as retas (r): 3x-y-2 = 0 e (s): -9x+3y-1 = 0 são paralelas.

Procedimento: Na opção Equação/ Implícita digite as equações pedidas.

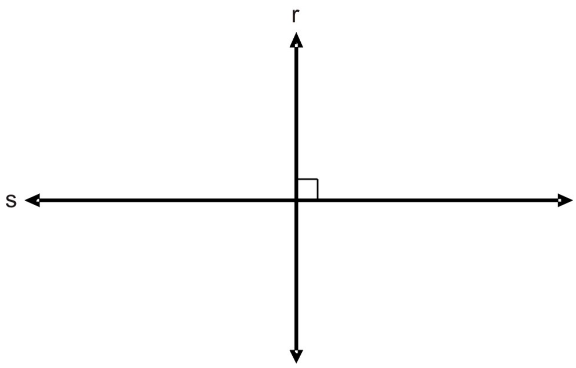
2. Classifique as retas r e s conforme suas posições relativas:

a) (r) 2x –y +20 = 0
   (s) 2x –y +1 = 0

b) (r) -3x+3y-3=0
   (s) 3x-3y+1=0

c) (r) x-5y+3=0
   (s) 5x+y-1=0

d) (r) 5x+2y+1=0
   (s) 2x+5y+4 =0



3. Construa os seguintes pontos: A(1, 3) e B(-2, -3).

Procedimento:

Selecione Ponto com a opção: (x, y) e preencha os valores solicitados: Na opção Ver/ Grade marque as unidades e coloque setas nos eixos. Para editar os pontos no plano cartesiano (indicar os pontos A e B) selecione Btns/Texto e Click com o botão direito do mouse para nomear os pontos.

ATIVIDADE 4

Duas partículas A e B movimentam-se segundo uma mesma trajetória retilínea. Sabe-se que a função horária da partícula A é $S_A = 1 + 2t$. A partícula B, por sua vez, tem função horária $S_B = -\frac{1}{2} + 0.6t$. Sendo que t (tempo) está em segundos e s (espaço), em metros. Pede-se:

a) Utilizando o *WINPLOT*, trace o gráfico da função horária da partícula A: $S_A = 1 + 2t$. (Sugestão: Menu: Equação\Explicita. Além disso, lembre-se que a adaptação tem que ser feita para $y = 1 + 2x$).
b) Utilizando o *WINPLOT*, trace o gráfico da função horária da partícula B: $S_B = -\frac{1}{2} + 0.6t$.
c) As retas se interceptam em algum ponto? Justifique a sua resposta.
d) Qual o ângulo formado pelas duas retas?
Procedimento: Para encontrar o ângulo formado pelas duas retas no *WINPLOT,* utilize os seguintes comandos: Dois/ Interseções/ ângulo de interseção em graus.

RETAS PERPENDICULARES

Consideremos duas retas r e s concorrentes e observemos os quatro ângulos (não rasos) que elas determinam. Se um desses ângulos for reto, diremos que elas são retas perpendiculares entre si e indicaremos (indiferentemente) $r \perp s$ ou $s \perp r$, para significar que r é perpendicular a s ou s é perpendicular a r.

ATIVIDADE 5

1. Construa o segmento definido pelos pontos H(-2, 3) e I(4, 3). Observe as posições dos pontos H e I. Depois responda às perguntas.

Procedimento: Selecione Equação com a opção Segmento/ (x, y) e preencha os valores solicitados: Na opção Ver/ Grade marque as unidades e coloque setas nos eixos. Para editar os pontos no plano cartesiano (indicar os pontos A e B) selecione Btns/Texto e Click com o botão direito do mouse para nomear os pontos.

a) Suas abscissas são iguais?
b) Qual é o de menor abscissa? Qual é o de maior abscissa?
c) De H para I as abscissas crescem ou decrescem?
d) Quais desses pontos têm abscissa negativa? Quais têm abscissa positiva?
e) De H para I as ordenadas crescem ou decrescem?
f) Pontos que estão situados sobre um mesmo segmento horizontal, paralelo ao eixo das abscissas, possuem abscissas iguais?

2. Utilizando o WINPLOT faça a projeção do segmento $\overline{HI}$ sobre o eixo horizontal x.
Sugestão: Selecione a opção Equação/Ponto/(x, y)/âncoras.

3. Construa o segmento definido pelos pontos L(2, 1) e M(2, 3) e faça a sua projeção sobre o eixo horizontal x e vertical y.

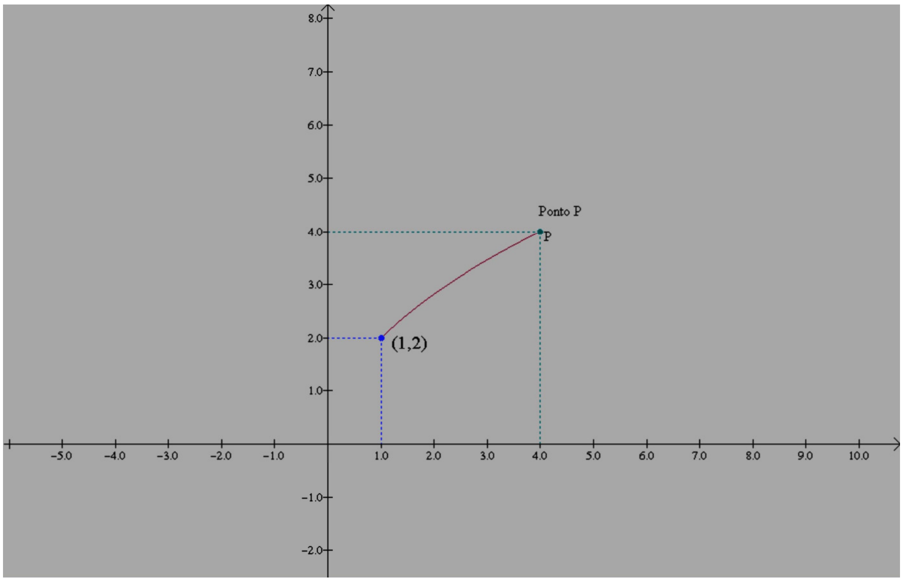
4. Observe as posições dos pontos L e M. Depois responda às perguntas.

a) Quais são as abscissas desses pontos?
b) Suas ordenadas são iguais?
c) Qual deles tem a maior ordenada? Qual o de menor ordenada?
d) De L para M, as ordenadas crescem ou decrescem?
e) De L para M, as abscissas crescem ou decrescem?
f) Os dois pontos estão situados sobre um mesmo segmento vertical, paralelo ao eixo das ordenadas. Suas ordenadas são iguais? Suas abscissas são iguais?
g) Pontos que estão situados sobre um mesmo segmento vertical, paralelo ao eixo das ordenadas, possuem ordenadas iguais?

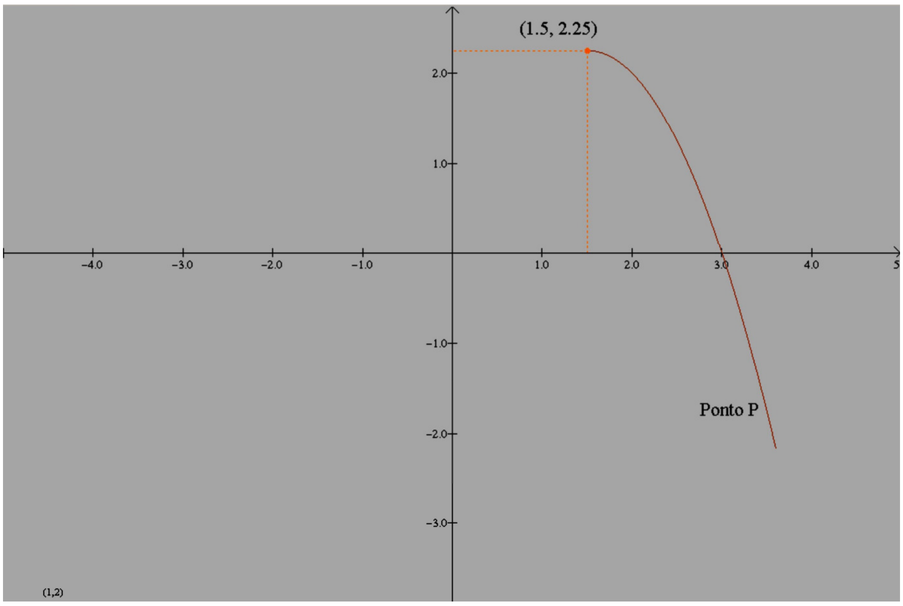
MOVIMENTOS NUMA CURVA

Neste item, vamos analisar como variam as coordenadas de um ponto, quando ele caminha sobre curvas quaisquer.

Considere, como exemplo, o ponto de coordenadas (1, 2). Se P parte dele, caminhando para a direita e para cima, como mostra a Figura Abaixo, sua abscissa aumenta e sua ordenada também aumenta.



Se P parte do ponto (1.5, 2.25) e caminha para a direita e para baixo, como mostra a Figura Abaixo, sua abscissa aumenta e sua ordenada diminui.

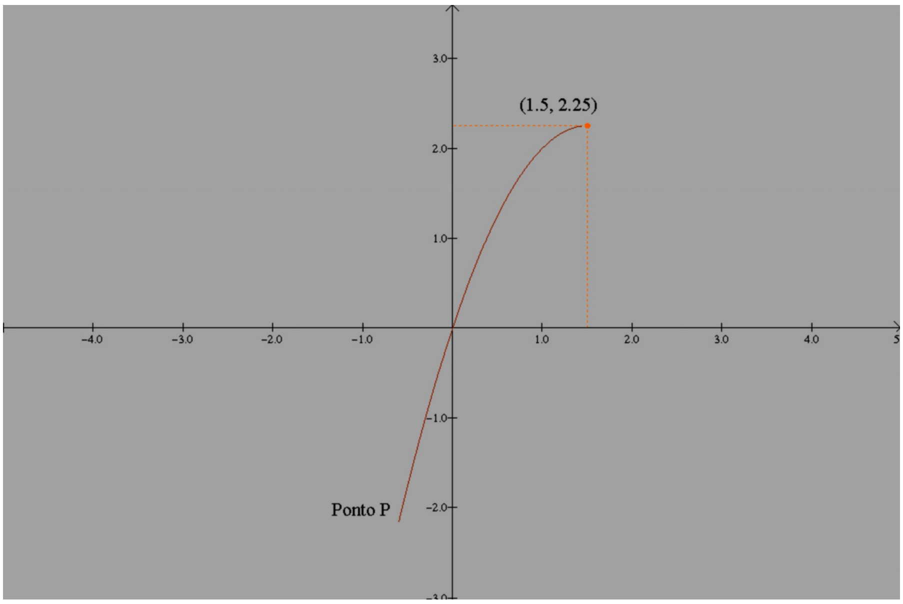


ATIVIDADE 6

Agora analise o caso em que P parte do ponto (1.5; 2.25) e caminha para a esquerda e para baixo, como na Figura Abaixo. Em seguida, preencha os espaços em branco.

No movimento descrito, a ordenada P________________________________

E a sua abscissa ____



ATIVIDADE 7

1. Desenhe no plano cartesiano:

   a) O segmento definido pelos pontos (1;y) com $-2 \leq y \leq 3$

   b) O segmento definido pelos pontos (x; -3) com $-1 \leq x \leq 4$

   c) O retângulo determinado pelos pontos (x;y), em que $-1 \leq x \leq 4$ e $-2 \leq y \leq 3$.

   d) O retângulo determinado pelos pontos (x;y), em que $-2 \leq x \leq 3$ e $-1 \leq y \leq 4$.

2. Utilizando o WINPLOT, trace o gráfico das seguintes equações:

   a) 2x+y+1= 0

      Procedimento: Click no menu Equação/ Implícita

   b) y = -2x-1

   c) Existe diferença entre as equações 2x+y+1=0 e y = -2x-1? Justifique a sua resposta

Atividades no Winplot

Construa o segmento definido pelos pontos A(-2, 3) e B(4, 3).

Procedimento: Selecione Equação com a opção Segmento/ (x, y) e preencha os valores solicitados: Na opção Ver/ Grade marque as unidades e coloque setas nos eixos.

Para editar os pontos no plano cartesiano (indicar os pontos A e B) selecione Btns/Texto e Click com o botão direito do mouse para nomear os pontos.

2.1 Agora, marque os seguintes pontos: C(1.5, 3); D (-1, 3) e E(-1.7, 3). Analisando os pontos marcados, o que é possível concluir?

2.2 Marque os seguintes pontos: F(5, 3); G (-4.6, 3) e H(4.5, 3). Analisando os pontos marcados o que é possível concluir?

2.3 Marque os seguintes pontos I(1.5, 3.5); J (-1, 2) e L(-1.7, 1.9). Analisando os pontos marcados o que é possível concluir?

3. Construa o segmento definido pelos pontos M(2, 1) e N(2, 4).

3.1 Qual a distância entre A e B?

3.2 Agora, marque os seguintes pontos: O(2, 3.2); P (-1, 3) e Q(2, 2.9). Analisando os pontos marcados, o que é possível concluir?

4. Marque o segmento determinado pelos pontos L(2, 3) e M(1, 2) e encontre a sua projeção sobre o eixo horizontal e vertical. Desenhe no plano cartesiano:

a) O segmento definido pelos pontos (1;y) com $-2 \leq y \leq 3$

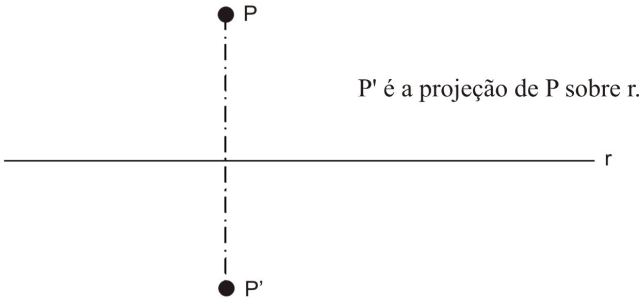
b) O segmento definido pelos pontos (x; -3) com $-1 \leq x \leq 4$

c) O retângulo determinado pelos pontos (x;y), em que $-1 \leq x \leq 4$ e $-2 \leq y \leq 3$.

d) O retângulo determinado pelos pontos (x;y), em que $-2 \leq x \leq 3$ e $-1 \leq y \leq 4$.

PROJEÇÃO DE UM PONTO SOBRE UMA RETA

Chama-se projeção ortogonal (ou simplesmente projeção) de um ponto sobre uma reta ao ponto de interseção da reta com a perpendicular a ela conduzida por aquele ponto.

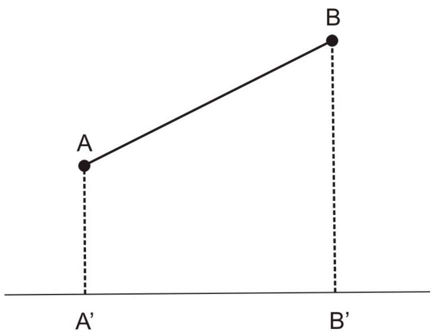


$$\overleftrightarrow{PP'} \perp r \quad \text{e r} \quad \text{e} \quad \overleftrightarrow{PP'} \cap r = \{P'\}$$

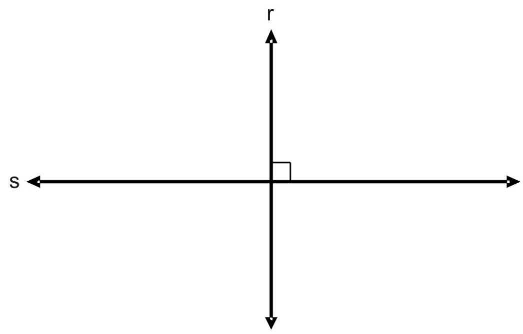
P´é o pé da perpendicular à reta r conduzida por P.

PROJEÇÃO DE UM SEGMENTO SOBRE UMA RETA

A projeção de um segmento da reta $\overline{AB}$ não perpendicular a uma reta r sobre esta reta é o segmento de reta $\overline{A`B`}$ em que: A´é a projeção de A sobre r e B´é a projeção de B sobre r.



Consideremos duas retas r e s concorrentes e observemos os quatro ângulos (não rasos) que elas determinam. Se um desses ângulos for reto, diremos que elas são retas perpendiculares entre si e indicaremos (indiferentemente) $r \perp s$ ou $s \perp r$, para significar que r é perpendicular a s ou s é perpendicular a r.


r
s

APÊNDICE E – Atividade 4 - O conjunto domínio e o conjunto imagem

No nosso cotidiano, é comum irmos a uma padaria comprarmos pães "carioquinhas". O valor que uma dona de casa gasta, por dia, com carioquinhas, depende de quantos pães comprados. Observe a tabela de preços a seguir.

Quantidade de pães comprados (q)	Valor gasto em reais (r)
1	0.15
2	0.30
8	1.2
10	1.5
20	3.0

$0.15 = 1 \bullet 0.15$
$0.30 = 2 \bullet 0.15$
$1.2 = 8 \bullet 0.15$
$1.5 = 10 \bullet 0.15$
$3.0 = 20 \bullet 0.15$

Note que temos dois conjuntos de números. O primeiro, que representa os pães comprados e o segundo, que representa o total a pagar. No nosso exemplo, podemos representar o conjunto dos pães como $P = \{1, 2, 8, 10, 20\}$. Em matemática, costumamos chamar esse conjunto de domínio. Já o conjunto doa valores gastos podem ser representados por V= {

Vemos que a tabela obedece a um padrão numérico. Cada número da segunda coluna é igual ao seu correspondente na primeira, multiplicado por 0.15.

A lei da função é $v = p \bullet 0,15$ sendo que p indica a quantidade de pães comprados, e v, o valor pago pela comprar. Sabemos que, se p vale 20, v é 3 uma vez que $3 = 20 \bullet 0.15$. Dizemos que 3 é imagem do elemento 20.

Quando temos uma função de um conjunto A em um conjunto B, dizemos que A é o domínio dessa função.

O conjunto imagem da função é formado por todas as imagens dos elementos do domínio.

ATIVIDADES

1. Monte as tabelas das funções dadas por suas leis, conhecendo-se seus domínios. Em cada caso, determine o conjunto imagem I da função.

   a) Lei da função: $y = 4x+1$, domínio $D=\{1,3,5,7\}$

b) Lei da função: y= $\frac{x}{6}$, domínio D={0,6,12,18,24}

c) Lei da função: d=$\frac{g-6}{2}$, domínio D={6,8,10,12,14}

2. Utilizando o *software* WINPLOT marque os pontos obtidos nos itens a e b da questão anterior.

3. Utilizando o software WINPLOT trace o gráfico da função f(x)= 0.5x-1.

a) Complete a seguinte tabela. (Sugestão: Menu: Misc/ Tabelas).

X	y=f(x)
-2	
-0,2	
0	
2	
5	

b) O gráfico da função f(x)= 0.5x-1 intercepta a origem? Por quê?

4. Agora, trace o gráfico da função g(x)= 0.5x-1 {0,4}.

a) Complete a seguinte tabela. (Sugestão: Menu: Misc/ Tabelas ou Um/Traço).

X	y=g(x)
-2	
-0,2	
0	
2	
5	

b) Comparando o gráfico e a tabela da função g(x)= 0.5x-1 {0,4} com os da função f(x) = 0.5x-1 (função trabalhada na terceira questão) quais foram as principais mudanças ocorridas?

c) Com base no gráfico e na tabela, qual seria o intervalo de variação da variável x (Domínio)? E da variável y (Imagem) da função trabalhada nessa questão
(g(x)= 0.5x-1 {0,4})?

5. Um taxista recebe R$ 1,00 pela bandeirada e mais R$ 2,00 por quilômetro rodado. Quanto o motorista do táxi receberá por uma corrida de 10 quilômetros rodados? Tente escrever uma expressão que relacione o total a pagar em função do número de quilômetros rodados.

6. Utilizando o software *WINPLOT*, trace o gráfico da função encontrada na questão anterior e complete a seguinte tabela (Sugestão: Menu: Um\Traço).

X	Y =f(x)
-14	
-1	
0	
12	
13.4	
35	
70.3	

a) Para o taxista, existe sentido em calcular o valor de y quando x =-14? Por quê?
b) Existe alguma corrida em que você poderia pagar R$ 1,00? Discutam e expliquem com suas próprias palavras como solucionar esse problema.
c) Com base na tabela, ou gráfico, qual seria o intervalo de variação da variável quilômetro rodado (Domínio)? E da variável total a pagar (Imagem)?

7. Observando as tabelas das funções dadas. Dê uma lei que represente cada uma delas e escreva o domínio e o conjunto imagem.

a)

X	Y
5	20
6	24
7	27
8	32
9	36
10	40

b)

X	Y
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
6	6

c)

X	Y
0	5
1	7
2	9
3	11
4	13
5	15

8. Com base nas questões anteriores, dada uma tabela, você seria capaz de encontrar uma maneira mais “rápida” de determinar o Domínio e o Conjunto Imagem? Explique com suas próprias palavras.

APÊNDICE F – Atividade 5 – Função do 1º grau

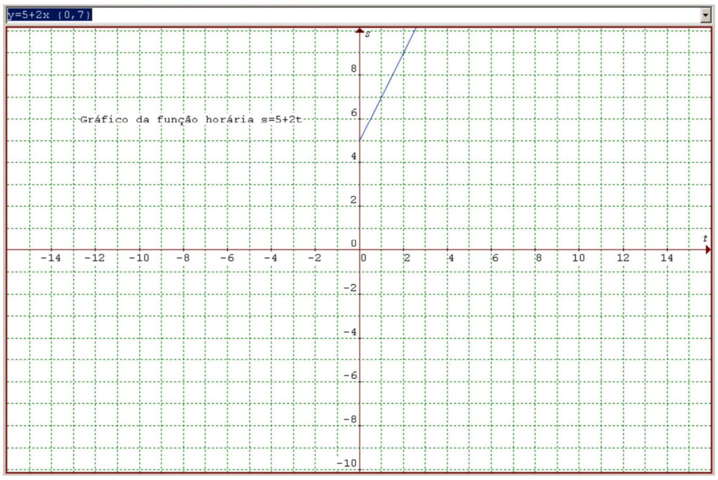
Um carro está se locomovendo em uma estrada reta, na qual foi colocado um marco a cada 2 metros. Um cronômetro registrou o instante da passagem do carro em cada um dos marcos. Com os dados obtidos, montamos a seguinte tabela:

Tempo em segundos (t)	Espaço em metros (s)
0	5
1	7
2	9
3	11
4	13
5	15
6	17

O espaço representa a posição em que o automóvel se encontra na pista, em relação ao ponto inicial (marco zero). Observando a tabela, notamos que o carro realizou um Movimento Uniforme (MU), já que ele percorreu distâncias iguais em intervalos de tempo iguais, ou seja, a cada 1 segundo o carro percorreu 2 metros.

O espaço é uma função do tempo. A lei dessa função é $s = s_o + vt$, na qual s_o representa o espaço inicial e v, a velocidade desenvolvida pelo carro. A posição em que o carro se encontra no instante $t = 0$ fornece o valor de s_o. A função que possui a lei $s = s_o+vt$ é chamada **função horária.**

A função horária do movimento do carro de provas citado é a função $s = 5+2t$ e seu gráfico a partir do espaço inicial, é:



Uma função do 1º grau é do tipo y=ax+b, sendo a e b números reais.

EXEMPLOS

a) $y = 4x - 4 \begin{cases} a = 4 \\ b = -4 \end{cases}$ b) $y = -0{,}5x + 5 \begin{cases} a = -0{,}5 \\ b = 5 \end{cases}$ c) $y = \frac{x}{3} - \frac{1}{2} \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$

ATIVIDADES

1. Escreva algumas funções do 1.º grau.

2. Identifique as funções do 1º grau:
    a) y = x-5
    b) y= 2
    c) $d = t^2$
    d) s = 5t+4
    e) y = 2x
    f) $s = \sqrt{t}$

3. A função do 1º grau y = ax+5 é definida pela tabela:

X	Y
1	7
2	9
-1	3
-3	-1

a) Determine o domínio D e o conjunto imagem I dessa função.

b) Determine o valor de a.

Sugestão: você pode fazer isso usando qualquer par de valores da tabela.

4. Um carro realiza um movimento uniforme (MU). O espaço (posição em que o carro se encontra no percurso) varia com o tempo, segundo a função horária s=so+vt, na qual s_o indica a posição do automóvel no instante t = 0 e v, a velocidade desenvolvida por ele. Sabendo-se que s = 20, quando t = 0, e que s = 28, quando t = 1, responda:

a) Qual é o valor de s_o?
b) Qual é o valor de v?
c) Qual é o valor de s, quando t = 7?
d) Qual é o valor de t, quando s = 52?

5. Galileu Galilei fez descobertas que contribuíram muito para o avanço da física. Uma delas foi de que à distância d percorrida por um corpo que cai é função do tempo t. Se d está em metros e t em segundos, a fórmula aproximada dessa função é $d = 4{,}9\ t^2$.

a) Baseado nessas informações, preencha a tabela abaixo:

t (em segundos)	d em (metros)
1	
2	
3	
4	

b) A função é do primeiro grau? Por quê?

c) Se t= 6s, quanto vale d?

d) Quanto tempo, aproximadamente, leva uma pedra para cair 491 m?

e) Quando a variável tempo cresce o que acontece com a distância percorrida pela pedra?

f) De acordo com a função estabelecida por Galileu, o que cai mais depressa: uma bola de chumbo de 1 kg ou uma bola de ferro de 2 kg?

g) A variável d percorrida pela pedra depende do peso da pedra? Por quê?

6. No *WINPLOT* trace o gráfico da função anterior.

a) O gráfico intercepta a origem do eixo cartesiano?

b) Quais são os valores de x que não pertencem ao domínio da função? Por quê?

c) No item b, você observou que muitos valores de x não pertencem ao domínio. Nesse sentido, trace o gráfico que se adapte a famosa função descoberta por Galileu.

Sugestão: Observando o gráfico, qual o intervalo no eixo horizontal x que não está contido no domínio da função?

APÊNDICE G – Atividade 6 – Função do 1º Grau (continuação)

2. Utilizando o *WINPLOT*, trace o gráfico da função f(x) = 1,5x-6.

X	Y
-3	
-2	
0	
3,2	
3,4	
3,6	
4	
4,2	
4,6	
4,8	
5	

a) Complete a seguinte tabela.
(Sugestão: Menu: Inventário \ Tabela)

b) Qual é o valor de y no ponto em que o gráfico corta o eixo x?

c) Qual o sinal de y quando x está à direita do ponto de intercessão da reta com o eixo x?

d) Qual o sinal de y quando x está à esquerda do ponto de intercessão da reta com o eixo x?

3. Utilizando o *WINPLOT*, trace o gráfico da função f(x) = -1,5x +6.

X	Y
-3	
-2	
0	
3,2	
3,4	
3,6	
4	
4,2	
4,6	

a) Complete a seguinte tabela.
(Sugestão: Menu: Inventário \ Tabela)

4. Utilizando *WINPLOT* trace o gráfico das funções abaixo.

a) y = 1,5x-2 b) y= 1,5x-1 c) y = 1,5x+1 d) y = 1,5x+2

Procedimento: Entre com a equação: y=1,5x+b, selecionando esta equação na janela “inventário” e acionando o botão “família” aparecerá a seguinte janela: Em “parâmetro” coloque a letra b (que aparece na equação). Em “mínimo” e “máximo” coloque a variação que deseja para o parâmetro b (-2 e +2) Em “passos” coloque o número de curvas da família (4). Acione o botão “definir” para visualizar a família de curvas. Para excluir a família de curvas, entre novamente nessa janela (selecionando a mesma curva, no caso, y=1,5x+b) e acione o botão desdefinir.

Baseado nos gráficos traçados pode-se dizer que:

a) As retas são paralelas e possuem o mesmo coeficiente linear.
b) As retas são concorrentes e possuem o mesmo coeficiente angular.
c) As retas são paralelas e possuem diferentes ângulos de inclinação.
d) As retas possuem diferentes coeficientes lineares.
e) Nenhuma das anteriores.

Justifique a sua resposta.

5. Utilizando *WINPLOT* trace o gráfico das funções abaixo.

a) y = -2x + 4 b) y = -1x + 4 c) y = +1x + 4 d) 2x + 4

6. Procedimento: Entre com a equação: y = ax +4, selecionando esta equação na janela “inventário” e acionando o botão “família” aparecerá a seguinte janela: Em “parâmetro” coloque a letra a (que aparece na equação). Em “mínimo” e “máximo” coloque a variação que deseja para o parâmetro a (-2 e +2) Em “passos” coloque o número de curvas da família (4). Acione o botão “definir” para visualizar a família de curvas. Para excluir a família de curvas, entre novamente nessa janela (selecionando a mesma curva, no caso, y=ax+4) e acione o botão desdefinir.

Baseado nos gráficos traçados, pode-se dizer que:

a) As retas são concorrentes e perpendiculares.
b) As retas são coincidentes.
c) As retas são concorrentes e possuem diferentes ângulos de inclinação.
d) As retas possuem diferentes coeficientes lineares.
e) Nenhuma das anteriores.

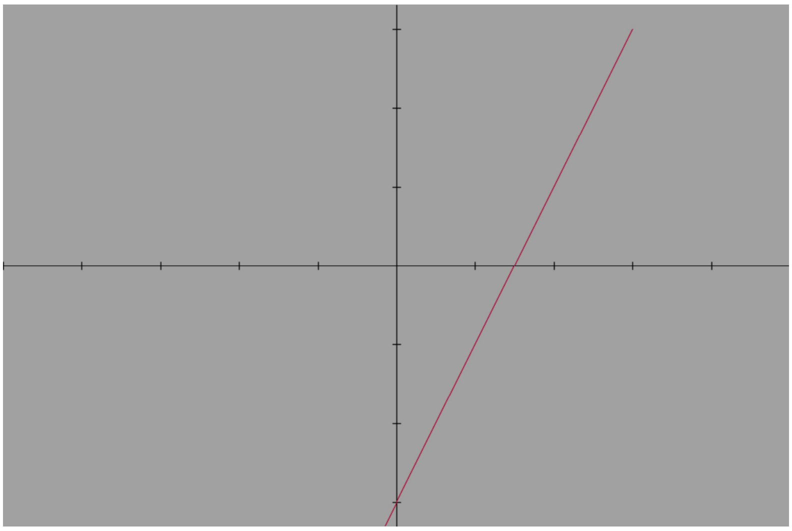
Justifique a sua resposta.

7. Utilizando *WINPLOT* trace o gráfico y = 2x –2 e y = -2x –2. Qual a diferença entre eles?

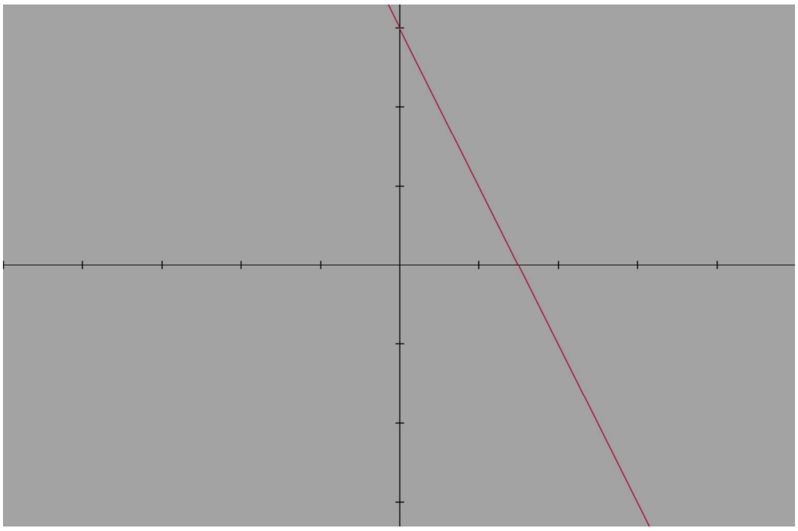
8. Utilizando *WINPLOT* trace o gráfico y = 4x –2 e y = -3x –6. Analisando os gráficos obtidos, além de serem retas, o que é possível concluir? Qual é a diferença entre eles.

9. Qual deve ser o valor do coeficiente a da função y = ax+b, para que seu gráfico seja paralelo à reta que representa a função y = 4x+5?

10. Qual é o sinal do coeficiente a da função y = ax +b representada pelos gráficos ilustrados abaixo?



11. Qual é o sinal do coeficiente a da função y = ax +b representada pelos gráficos ilustrados abaixo?



APÊNDICE H – Atividade 7 – Estudo do Sinal da Função do 1º grau

Um comerciante teve uma despesa de R$ 6,00 na compra de certa mercadoria. Como vai vender cada unidade por R$ 2,00; ele deseja saber quantas unidades dessa mercadoria devem ser vendidas para que haja lucro no final da venda.

Sabemos que o lucro (receitas menos despesas) é dado em função do número x de unidades vendidas, ou seja,

$$L(x) = R(x) - D(x)$$

Assim, a lei dessa função é L(x) = 2x-6.

- Vendendo 3 unidades dessa mercadoria não haverá lucro nem prejuízo.
  Para x = 3, temos L(3) = 2.(3)-6 = 6-6 = 0.
- Vendendo mais de 3 unidades haverá lucro.

Para x >3, temos L(x) >0, uma vez que

$$L(x) > 0 \Rightarrow 2x\text{-}6 > 0 \Rightarrow 2x>6 \Rightarrow x > \frac{6}{2} = 3$$

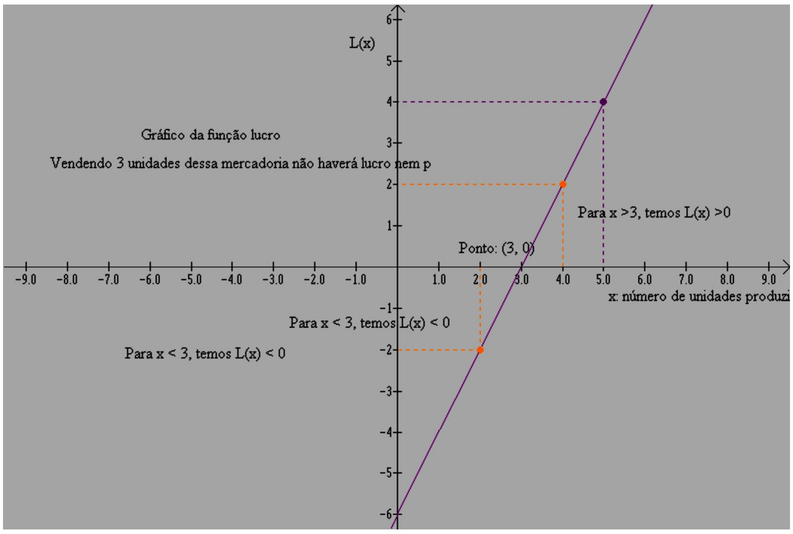
- Vendendo menos de 3 unidades haverá prejuízo. Para x < 3, temos L(x) < 0, uma vez que

$$L(x) < 0 \Rightarrow 2x\text{-}6 < 0 \Rightarrow 2x<6 \Rightarrow x < \frac{6}{2} = 3$$

Em situações com esta, dizemos que foi feito o estudo do sinal da função, que consiste em determinar os valores de x do domínio para os quais f(x) = 0, f(x) > 0 e f(x)<0.

Para maiores detalhes, observar o gráfico abaixo.

Vimos que a empresa teria prejuízo ao produzir unidades de mercadoria menores que três. Todavia, daqui a pouco, iremos ver que nem todo valor de x irá satisfazer a condição de a função lucro ter prejuízo.



1. Utilizando o *WINPLOT*, trace o gráfico da função L(x) = 2x-6.

   a) Complete a seguinte tabela. (Sugestão: Menu: Inventário \ Tabela)

X	Y
-4	
-3	
-2	
0	
2,6	
2,8	
3	
4	
5	

   b) Para que valores de x o lucro será maior que R$ 35,00?

   c) Para que valores de x a empresa não terá lucro nem prejuízo?

   d) Para que valores de x a empresa terá lucro?

   e) Lembre-se que o eixo horizontal ou o eixo das abscissas (valores de x), representa o número de unidades produzidas. Além disso, muitos valores de x não pertencem ao domínio. Nesse sentido, o conjunto de unidades produzidas pode estar contido totalmente no eixo horizontal? Por quê? Agora, especifique para que valores de x a empresa terá prejuízo.

ZERO OU RAIZ DA FUNÇÃO

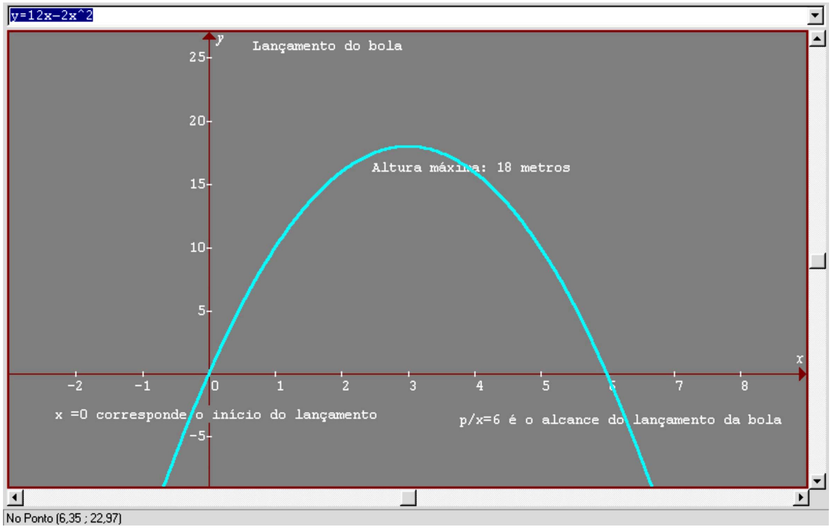
Em uma partida de futebol, Luiz fez um lançamento, e a bola descreveu uma parábola, dada por $y = 12x - 2x^2$. Podemos notar que, quando y = 0, x assume dois valores, x = 0 e x = 6, uma vez que $0 = 12x - 2x^2 = x(12-2x)$, ou seja, x = 0 e 12-2x=0. Resolvendo esta última equação:

$$12\text{-}2x = \leftrightarrow -2x = -12 \leftrightarrow x = \frac{-12}{-2} = 6.$$

X	Y
0,6	
0,8	
1	
1,2	
1,4	
2	
3	

Observe que o alcance desse lançamento foi de 6 metros e x =0 corresponde o início do lançamento.

Os valores de x para o qual a função $y = 12x - 2x^2$ se anula, ou seja, para o qual y = 0, denomina-se *zeros ou raízes* da *função*.



ZERO OU RAIZ DA FUNÇÃO DO PRIMEIRO GRAU

O valor de x para o qual a função L(x) = 2x – 6 se anula, ou seja, para o qual y = 0, denomina-se *zero ou raiz da função do primeiro grau*. Assim:

$$y = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3 \text{ (zero ou raiz da função)}$$

Por exemplo, o zero da função definida por f(x) = 3x –9 é 3, pois:

$$3x - 9 = 0 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{3} = 3 \text{ (zero ou raiz da função)}$$

Agora, responda:

1. Dada a função f(x) = 5x -5, responda e faça o que se pede:

a) Qual é o zero ou raiz dessa função f?

b) Utilizando o *WINPLOT*, trace o seu gráfico.

c) Complete a tabela ao lado. (Sugestão: Menu: Inventário \ Tabela)

d) Baseado nos itens anteriores, qual é o significado geométrico do zero ou raiz da função afim y =5x-5 ou f(x) = 5x-5?

(Sugestão: Reveja também a tabela e o gráfico dessa função)

e) Para que valores de x temos f(x) < 0? Como pode ser interpretado esse caso?

f) Para que valores de x temos f(x) > 0? Como pode ser interpretado esse caso?

g) Para que valores de x temos f(x) = 0? Como pode ser interpretado esse caso?

2. Utilizando o *WINPLOT*, trace o gráfico da função f(x) = -2x+4

a) Complete a tabela ao lado.

(Sugestão: Menu: Inventário \ Tabela)

b) Para quais valores de x a função tem imagem positiva?

c) Para quais valores de x a função tem imagem negativa?

d) Para quais valores de x a função tem imagem nula?

X	Y
1,6	
1,8	
2	
2,2	
2,4	
3	
4	
5	

3. Utilizando o *WINPLOT*:

a) Determine a intersecção das retas y = 0.5x-1 e y=0.

Procedimento:

Na opção ***<u>Equação/Explícita</u>*** digite as equações da reta. Para a intersecção das retas utilize os menus: ***Dois/Interseções/ângulo de interseção em graus.***

a) No ponto de intersecção, qual o valor de x? E o da ordenada y?

b) Na função y = 0.5x-1, qual o valor do coeficiente angular "a"? E qual o valor do coeficiente linear "b"?

c) Qual o valor do ângulo de intersecção da reta y = 0.5x –1 com a reta y=0?

d) O ângulo formado é:

a. obtuso b. agudo c. retângulo

4. Utilizando o *WINPLOT*, trace o gráfico das seguintes funções:

a) y=0.5x-1 b) y=1x-1 c) y =1.5x-1 d) y = 2x-1

Anote as suas observações

5. Baseado na terceira e quarta questões, qual é a relação que existe entre os coeficientes angulares e o ângulo de inclinação?

6. Utilizando o *WINPLOT*:

   a) determine a intersecção das retas y = -1.5x+4.5 e y=0.

Procedimento:

Na opção ***Equação/Explícita*** digite as equações da reta. Para a intersecção das retas utilize os menus: ***Dois/Interseções/ângulo de interseção em graus.***

a. No ponto de intersecção, qual o valor de x? E o da ordenada y?
b. Na função y = -1.5x+4.5, qual o valor do coeficiente angular "a"? E qual o valor do coeficiente linear "b"?
c. Qual o valor do ângulo obtuso formado pela interseção das duas retas y = -1.5x+4.5 com a reta y=0?

Observação: O ângulo de interseção de duas retas dado pelo *WINPLOT* é sempre o ângulo agudo.

7. Utilizando o *WINPLOT*, trace o gráfico das seguintes funções:

   a) y=-1.5x+4.5   b) y = -2x+4.5   c) y =-3x+4.5   d) y =-4x+4.

   Anote as suas observações.

8. Baseado na sexta e sétima questões, qual é a relação que existe entre os coeficientes angulares e o ângulo de inclinação?

APÊNDICE I – Atividade 8 – Funções lineares

INTRODUÇÃO

Um carro está se locomovendo em uma estrada reta, na qual foi colocado um marco a cada 1000 metros. Um cronômetro registrou o instante da passagem do carro em cada um dos marcos. Com os dados obtidos, montamos a seguinte tabela:

Tempo em segundos (t)	Espaço em metros (s)
0	0
50	1000
100	2000
150	3000
200	4000
250	5000

O espaço representa a posição em que o automóvel se encontra na pista, em relação ao ponto inicial (marco zero). Note que:

$$\frac{1000}{50} = \frac{2000}{100} = \frac{3000}{150} = \frac{4000}{200} = \frac{5000}{250} = \frac{1000}{50} = 20$$

Vemos que a tabela obedece a um padrão numérico. Cada número da segunda coluna é igual ao seu correspondente na primeira, multiplicado por 20.

A lei da função é s(t) = 20• t sendo que t indica a tempo gasto em segundos pelo carro, e s, o espaço percorrido. Sabemos que, se t vale 50, s é 1000, uma vez que 1000 = 20•50. A fórmula mostra como s varia em função de t:

- em 50 s, o carro percorreu s(50) = 20•50 = 1000 m;
- em 100 s, o carro percorreu s(100) = 20•100 = 2000 m;
- em 150 s, o carro percorreu s(150) = 20 • 150 = 3000 m,
- em 200 s, o carro percorreu s(200) = 20 • 200 = 4000 m;
- em 250 s, o carro percorreu s(250) = 20• 250 = 5000 m.

Observando a tabela, notamos que o carro realizou um Movimento Uniforme

(MU), já que ele percorreu distâncias iguais em intervalos de tempo iguais, ou seja, a cada 50 segundos o carro percorreu 1.200 metros.

FUNÇÃO LINEAR

Chamamos de função linear toda função do tipo: f(x) = ax, a$\in$ R e a $\neq$ 0.

Exemplos:

- f(x) = -2x (a = -2)
- f(x) = $\frac{1}{5}$x (a = v)
- f(x) = $\sqrt{3}$ x (a = $\sqrt{3}$)

1. Escreva algumas funções lineares
2. Identifique nas funções abaixo, quais são as lineares. Justifique.
   a. y = 2x-5
   b. y=2
   c. d = t^2
   d. s = 5t+4
   e. y = 5x
   f. s = $\sqrt{t}$
   g. y = $-\frac{1}{2}$x
3. Utilizando o *WINPLOT:*

X	Y
-3	
-2	
-1	
-0,4	
-0,2	
0	
0,2	
0,4	
1	
2	

a) Trace o gráfico da função f(x) = 2x.
b) Complete a tabela ao lado. (Sugestão: Menu: Inventário\Tabela)
c) Qual é o valor de y no ponto em que o gráfico corta o eixo x?
d) Qual o sinal de y quando x está à direita do ponto de intercessão da reta com o eixo x?
e) Qual o sinal de y quando x está à esquerda do ponto de intercessão da reta com o eixo x?

4. Considerando a função s = -3e, complete a tabela abaixo:

e	s
2	
	7
-2	
	-15

5. Baseado na função da questão anterior e no preenchimento da tabela complete as frases abaixo
   I. Sempre que e for positivo, s será ....
   II. Se e é negativo, então s é ....

6. Considerando a função y=5x, complete a tabela abaixo:

x	y
2	
	7
-2	
	15

7. Baseado na função da questão anterior e no preenchimento da tabela complete as frases abaixo
   I. Sempre que x for positivo, y será ....
   II. Se x é negativo, então y é ....

8. Utilizando o *WINPLOT*, plote as seguintes famílias de retas:
   a) família de retas y = ax com a variando de 0.5 até 4.

Procedimento:

Na opção **Equa** escolha y = f(x) e digite a expressão **ax**, use a opção **Equa/Inventário /Família** com os limites 0.5 até 4 para o parâmetro **a**. Para o número de passos digite 5. Repita o procedimento para as demais famílias.

b) família de retas y = ax com a variando de 0.5 até 8.

c) família de retas y = ax com a variando de 0.5 até 16.

Analisando os gráficos obtidos, o que é possível concluir? Os gráficos possuem algum ponto em comum? Por quê? À medida que os coeficientes das funções lineares crescem o que acontecem com a posição das retas em relação aos eixos x e y?

9. Utilizando o *WINPLOT*, plote as seguintes famílias de retas:

a) família de retas y = ax com a variando de -0.5 até -4.

b) família de retas y = ax com a variando de -0.5 até -8.

c) família de retas y = ax com a variando de -0.5 até 16.

Analisando os gráficos obtidos, o que é possível concluir? Os gráficos possuem algum ponto em comum? Por quê? À medida que os coeficientes das funções lineares crescem o que acontecem com a posição das retas em relação aos eixos x e y?

10. Construa o gráfico das funções lineares, em um mesmo par de eixos.

a) $y = \frac{1}{2}x$, y=x, e y=2x.

b) $y=\frac{1}{5}x$, y = x e y = 5x.

11. Baseado na questão anterior, observe a lei das funções em cada item e seus coeficientes, à medida que os coeficientes das funções lineares crescem o que acontecem com a posição das retas em relação aos eixos x e y? .

12. Em um mesmo par de eixos, construa o gráfico das funções.

a) y= -2x, y=-x e $y=-\frac{1}{2}x$

b) d=-5t, d= -t e $d=-\frac{1}{5}t$

13. Observe a lei das funções em cada item e a posição de seus gráficos em relação ao eixo vertical. O que pode dizer sobre as retas correspondentes às funções?

APÊNDICE J – Atividade 9 – Grandezas diretamente e inversamente proporcionais

1. Sabe-se que numa mercearia, 4 quilogramas (kg) de arroz custam R$ 8,00. A partir das informações dadas, complete a tabela abaixo:

Quantidade de quilos comprados (kg)	Valor pago (R$)
1	
2	
3	
4	8
8	
10	

1.1 Utilizando o *WINPLOT*, marque os pontos obtidos na tabela anterior.

1.2 Tente escrever uma expressão que relacione o total a pagar em função do número de quilogramas de arroz comprados.

1.3 Utilizando o *WINPLOT*, trace o gráfico da lei da função obtida do item anterior e verifique se intercepta os pontos marcados.

GRANDEZAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

Sabe-se que 4 quilogramas (kg) de arroz custam R$ 8,00, e que o preço do quilograma de arroz não sofre aumento ou redução de preço quando a quantidade comprada varia. Ao dobrarmos a quantidade de arroz, o custo total também dobra. Se triplicarmos a quantia de arroz, o preço também triplica. Se dividirmos a quantidade de arroz por 2, o preço também se reduz à metade e assim por diante. Nesse caso, as razões entre as quantidades preço e quantidade não se alteram, por exemplo, $\frac{8}{4}=\frac{18}{9}$ ou $\frac{4}{2}=\frac{16}{8}$. Quando isso ocorre, as grandezas são diretamente proporcionais.

Observe que quando calculamos $\frac{y}{x}$ temos um valor constante que é 2.

DEFINIÇÃO

Duas grandezas x e y são diretamente proporcionais se existir uma constante c, tal que $\frac{y}{x}$=c para cada dupla de valores correspondentes de x e y.

N	P
1	
2	
3	
4	
5	

EXEMPLO:

Observe a tabela:

Ela representa duas grandezas, x e y, diretamente proporcionais. Isso ocorre porque os valores de x aumentam juntamente com os valores correspondentes de y, de tal forma que quando calculamos $\frac{y}{x}$ temos um valor constante que é $\frac{1}{2}$.

X	Y
2	36
6	12
12	6
72	1

EXERCÍCIOS

1. Utilizando o *WINPLOT*, trace o gráfico da função f(x) = 4x.

   1.1 Complete a seguinte tabela. (Sugestão: Menu: Equação\Inventário\Tabelas de Pontos).

X	Y
--3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Explique por que y é diretamente proporcional a x.Nesse caso, qual é a constante de proporcionalidade?

2. Um prêmio de loteria de doze milhões será dividido igualmente entre n ganhadores. Cada um receberá P reais. A partir das informações dadas, complete a tabela abaixo:

2.1 Utilizando o *WINPLOT*, marque os pontos obtidos na tabela anterior.

2.2 O prêmio é diretamente proporcional ao número de ganhadores?

2.3 Tente escrever uma expressão que relacione o prêmio da loteria em função do número de ganhadores.

2.4 Utilizando o *WINPLOT*, trace o gráfico da lei da função obtida do item anterior e verifique se intercepta os pontos marcados.

X	Y
$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{2}$	
1	
2	
4	
5	

Aqui é fácil observar que, se dobrarmos a quantidade de ganhadores, o prêmio se reduz pela metade. Se triplicarmos a quantidade de ganhadores, o prêmio se reduz à terça parte. Por outro lado, sabemos que quatro ganhadores receberão três milhões cada um, e um, ganhará doze milhões. Por conseguinte, se dividirmos a quantidade de ganhadores por 4, o prêmio será quadruplicado e assim por diante. Nesse caso, quando aumentamos uma das grandezas, a outra diminui na mesma proporção e vice-versa. Quando isso acontece, dizemos que as grandezas são inversamente proporcionais.

DEFINIÇÃO

X e y são inversamente proporcionais se existir uma constante c, tal que xy=c para cada dupla de valores correspondentes de x e y.

EXEMPLO

Observe a tabela:

X	Y
2	36
6	12
12	6
72	1

Ela representa duas grandezas, x e y, inversamente proporcionais. Isso ocorre porque os valores de x aumentam e, em compensação, os valores correspondentes de y diminuem, de tal forma que quando calculamos $x \cdot y$ temos um valor constante que é 72.

EXERCÍCIO

1. Considere a função de fórmula $y = \frac{1}{x}$, sendo x um número qualquer, diferente de 0.

a) Copie a tabela ao lado em seu caderno e complete-as:

b) Explique por que y é inversamente proporcional a x.

c) Nesse caso, qual é a constante de proporcionalidade?

2. Utilizando o *WINPLOT*, trace o gráfico da função y = 3.5x+2.

2.1 Complete a seguinte tabela. (Sugestão: Menu: Equação\Inventário\ Tabelas de Pontos).

X	Y
--3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

2.2 O que acontece com os valores de y quando os valores de x duplica?

2.3 Existe alguma relação de proporcionalidade entre os valores de y e os valores de x?

2.4 As grandezas da tabela podem ser classificadas em inversamente proporcionais? Por quê?

EXERCÍCIOS ADICIONAIS

1. Considere uma função polinomial do 1 grau y=f(x) tal que y seja diretamente proporcional a x e y = 20 quando x=8. Encontre uma fórmula e trace o gráfico dessa função. Qual é a constante de proporcionalidade?

2. Considere uma função polinomial do 1 grau y=g(x) tal que seja diretamente proporcional a x e y=-15 quando x=20. Encontre uma fórmula e trace o gráfico da função.

3. Considere uma função polinomial do 1 grau y=F(x) tal que x seja diretamente proporcional a 2y+1 e y =1 quando x=3/2. Encontre uma fórmula e trace o gráfico dessa função.

4. A tabela mostra o perímetro p de um quadrado de lado l.

l (cm)	P (cm)
1	4
3	12
36	144
50	200

Encontre a função polinomial do 1º grau que contém todos os pares ordenados da tabela. Trace o gráfico dessa função. Qual é a constante de proporcionalidade?

5. A tabela mostra a distância d percorrida por um carro que viaja a uma constante de 75 km/h durante t horas.

t (h)	d (km
1	75
2	150
3	225
40	300

Encontre a função polinomial do 1.º grau que contém todos os pares ordenados da tabela. Trace o gráfico da função. Qual é a constante de proporcionalidade?

7. O preço de venda de um livro é de R$ 15,00 por unidade. A receita total obtida pela venda desse livro pode ser calculada pela fórmula: receita total = preço de venda por unidade vezes quantidade de livros vendidos.

a) Indicando por x a quantidade de livros vendidos, escreva a lei dessa função.

b) Essa função é linear?

c) A receita total é diretamente proporcional ao número de livros vendidos?

8. Dada uma função linear f tal que f(4) = 3, calcular f(8), f(2) e f(10).

APÊNDICE K – Atividade 10 – Função Identidade

INTRODUÇÃO

Nas grandes cidades, como São Paulo, existem lojas de comércio que se chamam "POR UM REAL". São estabelecimentos que possuem uma grande variedade de produtos. Se você comprar um alicate de manicura pagará R$ 1,00. Outra alternativa, seria a compra de uma fruteira de plástico cujo custo seria também de um real. Neste sentido, um pequeno comerciante poderá fazer compras nessas lojas para revender em seu mercantil. Na compra de 80 unidades diferentes de produtos, pagará R$ 80,00 e, assim, sucessivamente.

FUNÇÃO IDENTIDADE

Chamamos de função identidade toda função do tipo: f(x) = x.

Observe que as funções identidades são casos particulares de funções do primeiro grau. De fato, lembre-se que as funções do primeiro grau são da forma f(x) = ax+b.
Assim, se o valor do coeficiente angular "a" for 1 e se o valor do coeficiente linear "b" for zero a função do primeiro grau f(x) = ax+b se torna a função identidade f(x) = x.

$$\text{Veja,}\quad f(x) = x \quad \begin{cases} a = 1 \\ e \\ b = 0 \end{cases}$$

ATIVIDADES

40. Dada a função f(x) = x, responda e faça o que se pede:
    a) Qual o zero ou raiz dessa função f?
    b) Utilizando o *WINPLOT*, trace o seu gráfico.
    c) Complete a seguinte tabela. (Sugestão: Menu: Inventário\ Tabela)

X	Y
-2.00000	
	-1.60000
-1.00000	

	-0.20000
0	
1	
	2
3	

d) Imagine que você seja o dono de uma loja “POR UM REAL”.
   Você deve ter percebido que a função venda desse estabelecimento comercial é uma função identidade f(x) = x. Nesse sentido, qual seria o significado comercial do zero ou raiz da função?
e) Para que valores de x temos f(x) >0?
f) Para que valores de x temos f(x) < 0?

2. Com o auxílio do Winplot trace o gráfico da função y = x + b

2.1 Qual é o valor do coeficiente angular “a”?

2.2 Faça o gráfico da função com b = 0.

2.3 Obtenha o gráfico da função para diferentes valores de " b".

2.4 Qual o significado do coeficiente " b " nos gráficos obtidos? Associe o valor do coeficiente ao gráfico correspondente.

2.5 Descreva os gráficos das funções em termos de movimentos aplicados ao gráfico de y = x.

APÊNDICE L – Atividade 11 – Funções Constantes

INTRODUÇÃO

No nosso cotidiano, lidamos com muitas funções constantes. Mesmo sem saber nomeá-las, você já resolve situações relacionadas a elas. Por exemplo, um restaurante com sistema rodízio cobra 15 reais, não importando com a quantidade consumida, ou seja, ela pode ser 0,2 kg, 0,5 kg, 2 kg, etc, o preço único pago é sempre R$ 15,00. Logo, se relacionarmos o consumo ao valor pago, obtermos uma função f constante: y = 15. Observe que o valor de y não varia.

FUNÇÕES CONSTANTES

Chamamos de função constante toda função do tipo: f(x) = k, onde k é um número real.

EXEMPLOS

a) $y = 4$ b) $y = 0.5$ c) $y = \frac{1}{6}$

CONTRAEXEMPLOS

a) $y = x^3$ b) $y = 2x+1$ c) $y = sen(x+3)$

ATIVIDADES

1. Uma dona de casa quer comprar um jogo de estofado. No mês de março o preço do conjunto era R$ 983, 00 e se manteve constante durante 6 meses. Construa o gráfico da função que representa essa situação.

2. Utilizando *WINPLOT* trace o gráfico da função y = 2. Baseado no gráfico, responda as seguintes questões:
   2.1 Qual é o ponto de intersecção do gráfico com o eixo vertical?
   2.2 A posição da reta, que representa a função y = 2, em relação ao eixo vertical é:
   a) paralelas b) coincidentes c) perpendiculares.

2.3 A posição da reta, que representa a função y = 2, em relação ao eixo horizontal é:

a) paralelas b) coincidentes c) perpendiculares

2.4 Qual é o ponto de intersecção do gráfico com o eixo horizontal?

3. Baseado na questão anterior complete a seguinte tabela. (Sugestão: Menu: Inventário \ Tabela)

X	Y
-5	
-4.8	
-4.6	
-1	
-2	
0	
1	
3	
4.8	

4. Baseado na tabela e no gráfico, determine o conjunto-imagem e o domínio da função y = 2.

5. Utilizando *WINPLOT* trace o gráfico das seguintes funções:

   a) y = 1 b) y = 2 c) y = 3 d) y = 4 e) y = 5

Procedimento: Entre com a equação: y= k, selecionando esta equação na janela "inventário" e acionando o botão "família" aparecerá a seguinte janela: Em "parâmetro" coloque a letra k (que aparece na equação). Em "mínimo" e "máximo" coloque a variação que deseja para o parâmetro b (1 e 5) Em "passos" coloque o número de curvas da família (4). Acione o botão "definir" para visualizar a família de curvas. Para excluir a família de curvas, entre novamente nessa janela (selecionando a mesma curva, no caso, y = k) e acione o botão desdefinir.

6. Além do fato de serem retas, o que os gráficos construídos pelo *WINPLOT* têm em comum?

7. Utilizando *WINPLOT* trace o gráfico das seguintes funções:
   a) y = -5 b) y = -4 c) y =-3 d) y = -2 e) y = -1

Procedimento: Entre com a equação: y= k, selecionando esta equação na janela "inventário" e acionando o botão "família" aparecerá a seguinte janela: Em "parâmetro" coloque a letra k (que aparece na equação). Em "mínimo" e "máximo" coloque a variação que deseja para o parâmetro b (-5 e -1) Em "passos" coloque o número de curvas da família (4). Acione o botão "definir" para visualizar a família de curvas. Para excluir a família de curvas, entre novamente nessa janela (selecionando a mesma curva, no caso, y = k) e acione o botão desdefinir.

8. Além do fato de serem retas, o que os gráficos construídos pelo *WINPLOT* têm em comum?

APÊNDICE M – Atividade 12 – Definição de função

INTRODUÇÃO

Durante o nosso curso, vimos o problema do tanque de gasolina. Nesse caso, o motorista do carro sabe que o total a pagar ao frentista do posto de gasolina depende da quantidade de litros de gasolina colocados no tanque. O total a pagar varia em função do número de litros colocados. Nesse sentido, o total a pagar é a variável dependente e o número de litros colocados é a variável independente. Revendo a tabela, poderemos se lembrar mais dos detalhes.

Número de litros comprados	Preço a pagar
1	R$ 1,5
2	R$ 3,0
3	R$ 4,5
4	R$ 6,0
5	R$ 7,5
6	R$ 9,0

Observe que para cada número de litros colocados há em correspondência apenas uma única quantia a pagar. É claro que se o motorista colocar 4 litros pagará uma quantia bem menor do que se colocasse 10 litros.

Vejas que um dos focos principais do estudo das funções é a variação das grandezas entre si. Mas o que é exatamente uma função?

DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO

Uma **função** é uma relação entre duas variáveis tal que, a cada valor da variável independente, corresponde exatamente um valor da variável dependente.

O **domínio** da função é o conjunto de todos os valores da variável independente para os quais a função é definida. A **imagem** da função é o conjunto de todos os valores assumidos pela variável dependente.

Antônio tem uma lotação que transporta diariamente passageiros de uma cidade a outra. Ele fez uma tabela no dia anterior.

Passageiros	Quantidade a receber: R$
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12
7	14

Nesse caso temos de fato uma função, pois para cada número de pessoas transportadas diariamente há em correspondência apenas uma quantia de dinheiro.

Essa correspondência pode expressar-se pela equação

$$Q = 2.p.$$

Nessa equação, o valor de Q (quantidade de dinheiro a receber ao final do dia) depende do valor do número de passageiros p. Por isto, Q é a variável dependente e p a variável independente. Em notação de função, esta equação tem a forma:

$$f(x) = 2x \qquad \textit{Notação de função}$$

A variável independente é x, e o nome da função é "f". O símbolo f(x) lê-se "f de x" e denota o valor da variável dependente. Por exemplo, o valor de f quando x = 8 é

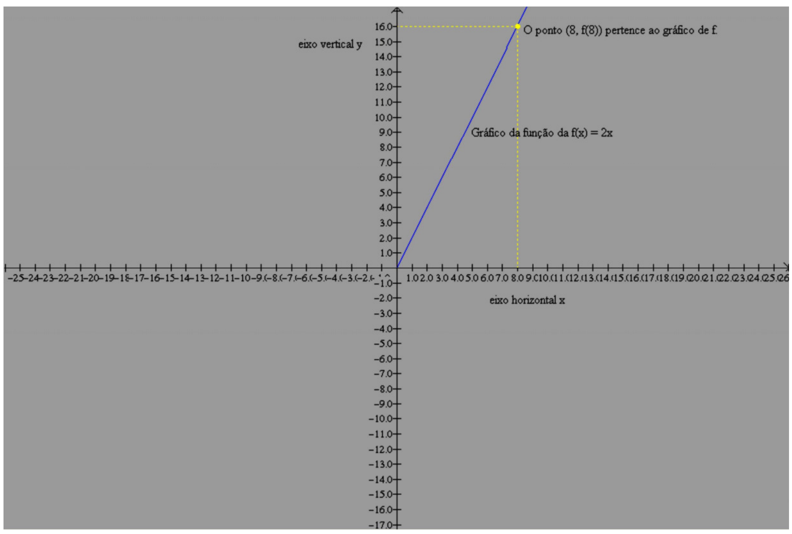
$$f(8) = 2.8 = 16.$$

O valor de f(8) é chamado um valor da função, e está na imagem de f. Também podemos expressar uma função através da equação y = 2x.

O GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

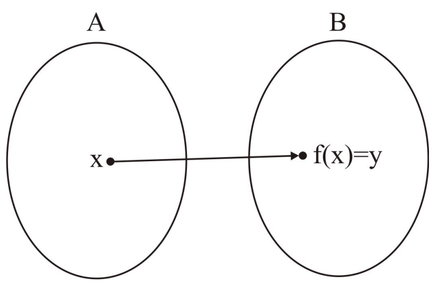
Ao traçar o gráfico de uma função, a convenção é representar a variável independente x no eixo horizontal x. Já a variável dependente f(x) será representada no eixo vertical y.

No nosso exemplo, o valor da variável independente x = 8 pertence ao eixo horizontal. Já o valor de f(8) pertence ao eixo vertical. Isto significa que o ponto (8, f(8) pertence ao gráfico de f.



O ESTUDO DE FUNÇÕES ATRAVÉS DE DIAGRAMAS DE FLECHAS.

Uma função de A em B pode ser representada por um diagrama de flechas como o seguinte:

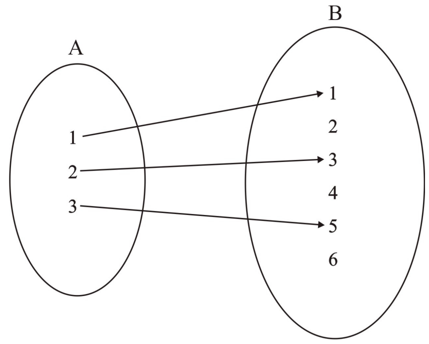


No diagrama de flechas, x representa um elemento de A (conjunto de partida) e f(x) representa um elemento de B (conjunto de chegada).

Agora, analisemos alguns exemplos de relações de A em B. Alguns deles serão funções e outros não.

EXEMPLO 1

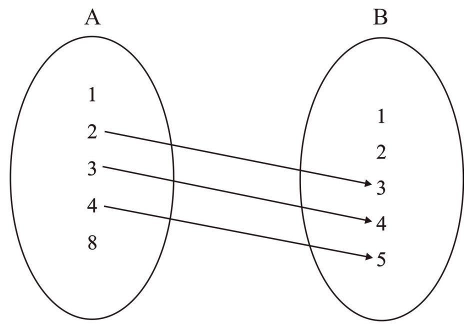
Observe que a seguinte relação de A em B representada por um diagrama de flechas é uma função.



De fato, a cada elemento de A corresponde um único elemento de B. Veja que D=A={1,2, 3}, B= {1,2,3,,4,5,6} e Im = {2,4,6}. Observe que: f(1) = 2; f(2) = 4 e f(3)=6.

EXEMPLO 2

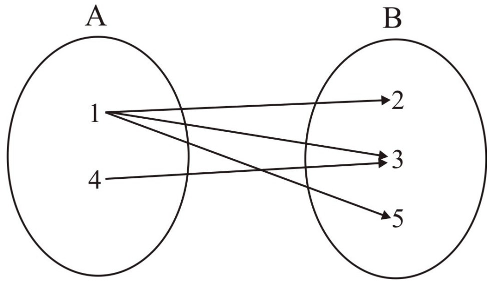
O seguinte esquema abaixo não representa uma função de A em B.



Observe que há elementos de A (os números 1 e 8) que não têm correspondente em B.

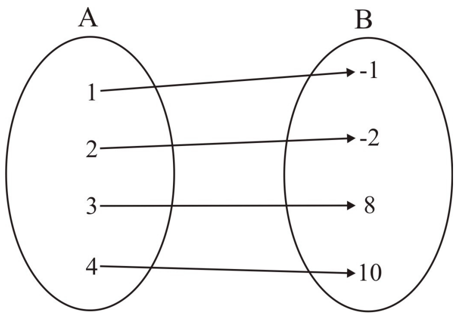
EXEMPLO 3

Agora, vamos observar o seguinte esquema:



Nesse caso não temos uma função de A e B, pois ao elemento 1 de A corresponde a três elementos de B: 2, 3 e 5. E não apenas um único elemento de B.

EXEMPLO 4

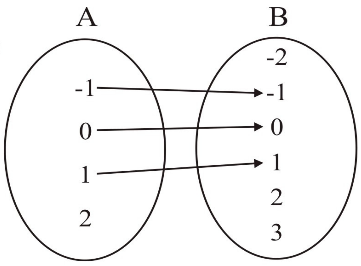


Note que para cada elemento em A está associado um único elemento em B. Por conseguinte, a relação de A em B é uma função.

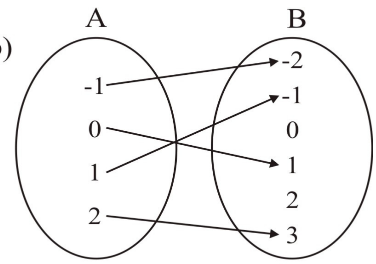
ATIVIDADES

1. Responda se cada um dos esquemas abaixo define ou não uma função de A={-1, 0, 1, 2} em B = {-2, -1, 0, 1, 2, 3} e justifique:

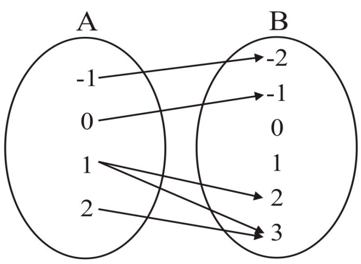
a)



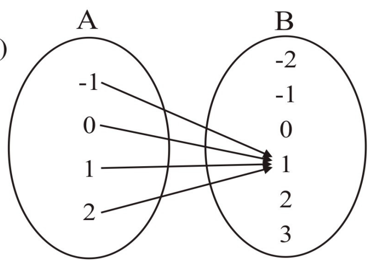
b)



c)



d)



2. Para decidirmos se o gráfico de uma relação é uma função podemos usar o teste da reta vertical. Este teste afirma que, se toda reta vertical intercepta o gráfico de uma equação em, no máximo um ponto, então a equação define y com função de x. Agora, utilizando o software educativo *GRAGHMÁTICA* verifique se o gráfico da equação INSERIR representa uma função.

Sugestão: Digite y = sqrt(x-1). Em seguida digite a função x = 2 para fazer o teste da reta vertical.

3. Utilizando o software educativo *GRAGHMÁTICA* verifique se o gráfico da equação $x^2+y^2=1$ representa uma função.

4. Agora, vamos trabalhar com o software *Int. Diagramas\ Vertical Line Test*. Utilizando o Menu Relation List escolha uma equação e decida se seu gráfico representa uma função. Para seu auxílio use o comando removível VERTICAL LINE TEST.

5. No mesmo software, utilize o menu *SKETCH TOOL* para desenhar um círculo qualquer. O seu gráfico representa uma função? Por quê? Qualquer curva fechada ou semi-fechada pode representar uma função? Justifique a sua resposta.

6. Uma função é bijetora se cada valor da variável dependente na imagem corresponde exatamente um valor da variável independente. Por exemplo, a função do Exemplo 4 é um a um, enquanto a função do exemplo 1 não o é. Geometricamente, uma função é um a um se toda reta horizontal intercepta seu gráfico no máximo uma vez. Esta interpretação geométrica é o teste da reta horizontal para funções um a um. Assim, um gráfico que represente uma função um a um deve satisfazer tanto o teste da reta vertical como o teste da reta horizontal. Agora, utilizando o software educativo *WINPLOT* verifique se o gráfico da equação $f(x) = x^2+5x+4$ é uma função bijetora.

Sugestão: Na opção Equação escolha a opção Explicita e digite a expressão x^2+5x+4. Logo após, trace uma reta paralela ao eixo x que corte o gráfico.

7. Com o auxílio do *WINPLOT* trace o gráfico da função y = x + b

7.6 Qual é o valor do coeficiente angular “a”?

7.7 Faça o gráfico da função com b = 0.

7.8 Obtenha o gráfico da função para diferentes valores de “b".

7.9 Qual o significado do coeficiente " b " nos gráficos obtidos? Associe o valor do coeficiente ao gráfico correspondente.

7.10Descreva os gráficos das funções em termos de movimentos aplicados ao gráfico de y = x.

8. Utilizando o *WINPLOT*, trace o gráfico da função y = 2x.

a) Complete a seguinte tabela. (Sugestão: Menu: Inventário \ Tabela)

X	y
-1	
-0.4	
-0.2	
0	
0.2	
1	
2	
3	

b) Para que valores de x temos y = 0?

c) Para que valores de x temos y > 0?

d) Para que valores de x temos y < 0?

9. Utilizando o *WINPLOT*, trace o gráfico da função y = 4x.

a) Qual é o valor do coeficiente a? O ângulo de inclinação é maior ou menor do que 90º?

b) Qual é o valor de y no ponto em que o gráfico corta o eixo dos x?

c) Qual é o valor de x no ponto em que o gráfico corta o eixo dos x?

d) Você seria capaz de encontrar uma maneira de determinar para que valor de x temos y = 0, para uma equação do tipo y = ax, associada a uma função linear qualquer?

e) Qual o sinal de y quando x está à direita do ponto de intercessão da reta com o eixo x?

f) Qual o sinal de y quando x está à esquerda do ponto de intercessão da reta com o eixo x?

g) Tente resumir as ideias apresentadas nos itens a e g. Encontre um método para o estudo do sinal da função linear f(x) =ax, sendo a>0.

10. Utilizando o *WINPLOT*, trace o gráfico da função f(x) = -2x.

a) Complete a seguinte tabela. (Sugestão: Menu: Inventário \ Tabela)

X	y
-1	
-0.4	
0	
0.2	
1	
2	
3	

b) Qual é o valor do coeficiente a? O ângulo de inclinação é maior ou menor do que 90º?

c) Qual é o valor de y no ponto em que o gráfico corta o eixo dos x?

d) Qual é o valor de x no ponto em que o gráfico corta o eixo dos x?

e) Você seria capaz de encontrar uma maneira de determinar para que valor de x temos y = 0, para uma equação do tipo y = ax, associada a uma função linear qualquer?

f) Qual o sinal de y quando x está à direita do ponto de intercessão da reta com o eixo x?

g) Qual o sinal de y quando x está à esquerda do ponto de intercessão da reta com o eixo x?

h) Tente resumir as ideias apresentadas nos itens a e g. Encontre um método para o estudo do sinal da função linear f(x) =ax, sendo a<0.

11. Utilizando o *WINPLOT*, trace o gráfico da função f(x) = 2x -1.

a) Complete a seguinte tabela.

(Sugestão: Menu: Inventário\ Tabela. Caso os valores da variável x não coincidam com os valores da tabela do *WINPLOT,* entre na opção Inventário\ Tabela\ Parâmetros e mude o número de passos de 50 para 40).

b) Qual é o valor do coeficiente a? Qual o valor do coeficiente b? O ângulo de inclinação é maior ou menor do que 90º?

c) Qual é o valor de y no ponto em que o gráfico corta o eixo dos x?

d) Qual é o valor de x no ponto em que o gráfico corta o eixo dos x?

e) Qual o valor de y no ponto em que o gráfico corta o eixo dos y?

f) Você seria capaz de encontrar uma maneira de determinar para que valor de x temos y = 0, para uma equação do tipo y = ax+b, associada a uma função do primeiro grau qualquer?

g) Qual o sinal de y quando x está à direita do ponto de intercessão da reta com o eixo x?

h) Qual o sinal de y quando x está à esquerda do ponto de intercessão da reta com o eixo x?

i) Tente resumir as ideias apresentadas nos itens a e h. Encontre um método para o estudo do sinal da função do primeiro grau f(x) =ax+b, sendo a>0.

12. Utilizando o *WINPLOT*, trace o gráfico da função f(x) = -2x +1.

a) Complete a seguinte tabela.

(Sugestão: Menu: Inventário \ Tabela. Caso os valores da variável x não coincidam com os valores da tabela do *WINPLOT,* entre na opção Inventário\ Tabela\ Parâmetros e mude o número de passos de 50 para 40).

X	y
-1	
-0.5	
0	
0.5	
1	
1.5	
2	
2.5	

b) Qual é o valor do coeficiente a? Qual o valor do coeficiente b? O ângulo de inclinação é maior ou menor do que 90º?

c) Qual é o valor de y no ponto em que o gráfico corta o eixo dos x?

d) Qual é o valor de x no ponto em que o gráfico corta o eixo dos x?

e) Qual o valor de y no ponto em que o gráfico corta o eixo dos y?

f) Você seria capaz de encontrar uma maneira de determinar para que valor de x temos y = 0, para uma equação do tipo y = ax+b, associada a uma função do primeiro grau qualquer?

g) Qual o sinal de y quando x está à direita do ponto de intercessão da reta com o eixo x?

h) Qual o sinal de y quando x está à esquerda do ponto de intercessão da reta com o eixo x?

i) Tente resumir as ideias apresentadas nos itens a e h. Encontre um método para o estudo do sinal da função linear $f(x) = ax+b$, sendo $a>0$.

APÊNDICE N – Questionário para orientar Diário de Campo

1.º) Descreva o que você havia planejado. Qual foi a atividade realizada? Fazer uma descrição dos tópicos sobre funções desenvolvidos na atividade, assim como os ambientes computacionais utilizados.

2.º) Quais foram as principais dúvidas sobre a utilização do programa?

3.º) Como superar essas dúvidas?

4.º) Quais foram os principais conhecimentos-em-ação (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação) que emergiram na resolução da atividade?

5.) Quais foram as imagens conceitual evocadas pelos estudantes ao explorarem os ambientes computacionais e ao resolveram as atividades?

6.) Quais foram os principais obstáculos epistemológicos que surgiram durante as atividades?

7.) Aparecem alguns protótipos de funções? Quais?

5.º) Quais foram as principais dificuldades sobre o conteúdo matemático que os alunos tiveram?

6.º) Como superar essas dificuldades?

7.º) Descrição da interação entre os pares

- Como os alunos interagem?

- Quem inicia a atividade?
- Quem utiliza mais o mouse?
- Os sujeitos estão atentos?
- De que modo eles participam na atividade?
- Quando surgem dúvidas os alunos conversam entre si para achar uma solução?
- Como os alunos reagem quando a atividade termina?

8.º) Descreva o que foi diferente do que havia planejado.

9.º) Com você avalia a atividade?

10.º) Faça um sumário dos principais acontecimentos.

ANEXOS

ANEXO A – Pós-Teste

Escola:____Aluno s:____

____

____

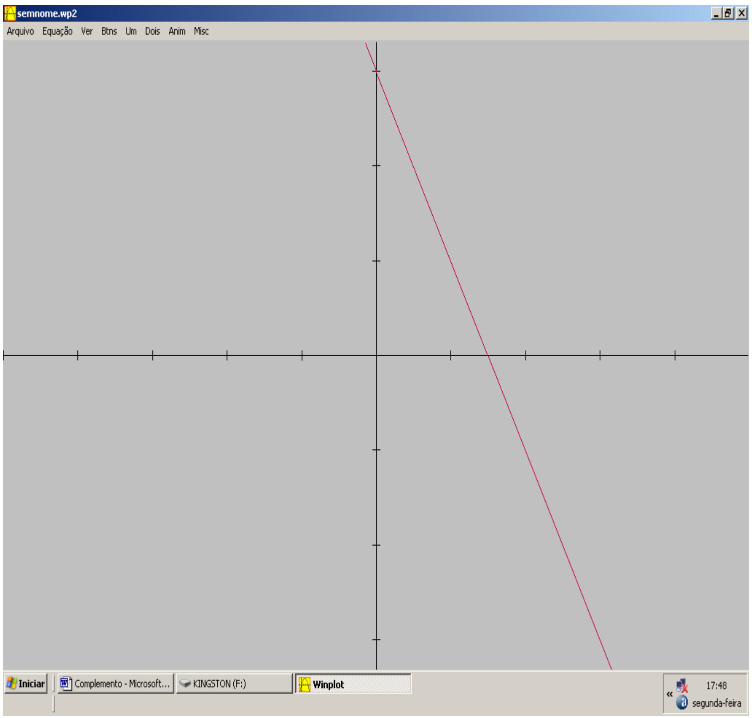
Turma_______

1.º) Em matemática, o que você acha o que é função?

2.º) Cite cinco exemplos quaisquer de funções.

3.º) 5x+4 = 0 é uma função? Justifique a sua resposta.

4.) Qual é o sinal do coeficiente a da função y = ax +b representada pelos gráficos ilustrado abaixo?

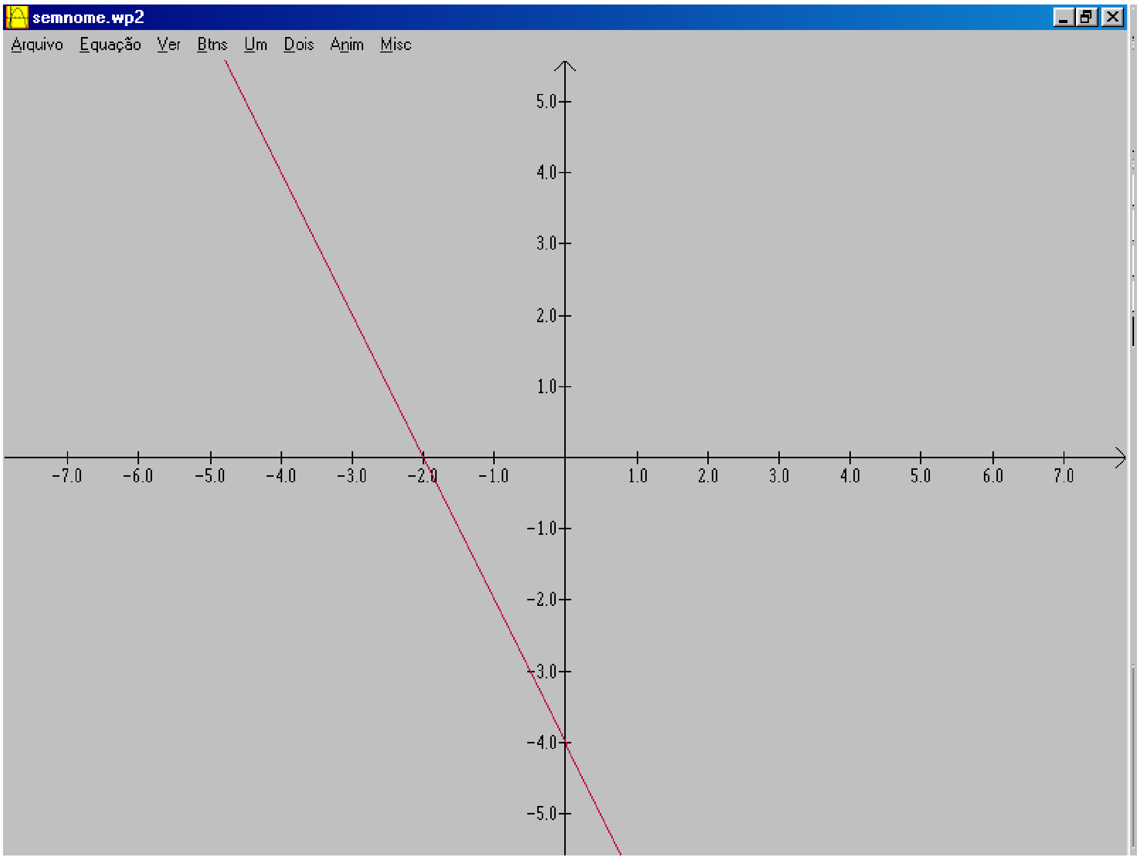


5.º) Monte as tabelas das funções dadas por suas leis, conhecendo-se seus domínios. Em cada caso, determine o conjunto imagem I da função.

a) Lei da função: $y = 2x^2+5x+1$, domínio A = {-2, -1, 0, +1, +2}.

b) Lei da função: y = 4, domínio A = {+1, +2, +3, +4}.

6.º) Dado o gráfico da função abaixo, responda:



a) Para que valores de x temos f(x) = 0?

b) Para que valores de x temos f(x) < 0?

c) Para que valores de x temos f(x) > 0?

d) Qual o ponto de intersecção do gráfico da função com o eixo vertical y (eixo das ordenadas)?

e) Qual o ponto de intersecção do gráfico da função com o eixo horizontal x (eixo das abscissas)?

f) O gráfico da função intercepta a origem do sistema de coordenadas cartesianas? Por quê?

7.º) A tabela mostra a distância d percorrida por um carro que viaja a uma constante de 75 km/h durante t horas.

T (h)	d (km
1	75
2	150
3	225
4	300

a) Se t= 6s, quanto vale d?

b) Quando a variável tempo cresce o que acontece com a distância percorrida pela carro?

c) A distância d percorrida pelo carro é diretamente proporcional ao tempo t? Em caso afirmativo, ou seja, se você acha que sim, escreva a constante de proporcionalidade.

d) Tente escrever uma expressão que relacione a distância percorrida em função da variável tempo.

8.º)Dado a função f(x) = -2x+10, calcule:

Os valores de f(0) e f(5).

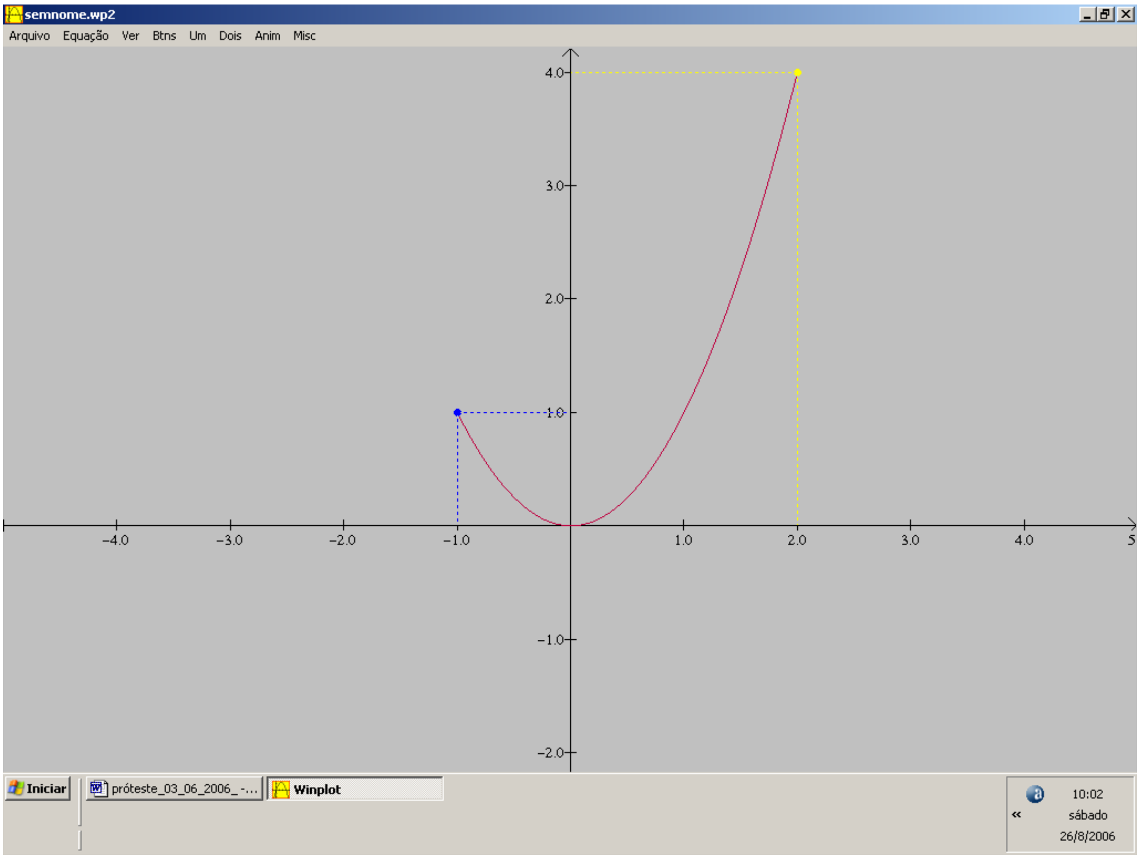
O valor de x para o qual f(x) = 20.

O zero ou raiz da função.

Faça o seu gráfico.

9. Faça o estudo do sinal da função f(x) = -10x

10. O esboço seguinte representa uma função, observando-o, determine o domínio D e o conjunto imagem Im da função:



Considere a função y = 5x –3.

a) Para x = 10, qual é o valor de y?

b) Para que valores de x se tem y = 10?

Um projétil lançado da origem (0,0), segundo um referencial dado, percorre uma trajetória parabólica cuja função representativa é y = ax^2+bx. Sabendo que o projeto atinge sua altura máxima no ponto (2, 4), escreva a função dessa trajetória.

Boa Sorte!