UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
INSTITUTO DE CULTURA E ARTE
DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

HENDRICK CORDEIRO MAIA E SILVA

NOMINALISMO DE CATEGORIAS: TEORIA DAS FORMAS ESQUEMÁTICAS E FUNTORIALIZAÇÃO DA NOÇÃO DE PARTICULAR PARADIGMÁTICO

FORTALEZA
2015

HENDRICK CORDEIRO MAIA E SILVA

NOMINALISMO DE CATEGORIAS: TEORIA DAS FORMAS ESQUEMÁTICAS E FUNTORIALIZAÇÃO DA NOÇÃO DE PARTICULAR PARADIGMÁTICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Filosofia. Área de concentração: Filosofia da Linguagem e do Conhecimento.

Orientador: Prof. Dr. André Leclerc.

FORTALEZA

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S58n Silva, Hendrick Cordeiro Maia e.
Nominalismo de categorias : teoria das formas esquemáticas e funtorialização da noção de particular paradigmático / Hendrick Cordeiro Maia e Silva. – 2015.
173 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Instituto de cultura e Arte, Programa de Pós-Graduação em Filosofia, Fortaleza, 2015.
Orientação: Prof. Dr. André Leclerc.

1. Nominalismo de Categorias. 2. Formas Esquemáticas. 3. Funtorialização. I. Título.
CDD 100

HENDRICK CORDEIRO MAIA E SILVA

NOMINALISMO DE CATEGORIAS: TEORIA DAS FORMAS ESQUEMÁTICAS E FUNTORIALIZAÇÃO DA NOÇÃO DE PARTICULAR PARADIGMÁTICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Filosofia. Área de concentração: Filosofia da Linguagem e do Conhecimento.

Aprovada em: 04/09/2015.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. André Leclerc (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____

Prof. Dr. Carlos Eduardo Fisch de Brito
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____

Prof. Dr. André da Silva Porto
Universidade Federal de Goiás (UFG)

Dedico esta dissertação à minha mãe,
Silvia Helena Cordeiro Maia e Silva.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe, Silvia Helena Cordeiro Maia e Silva.

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

Ao Prof. Dr. André Leclerc, pela excelente orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora Prof. Dr. Carlos Eduardo Fisch de Brito e Prof. Dr. André da Silva Porto pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

"Adjoint functors arise everywhere."
(Saunders Mac Lane)

RESUMO

A presente dissertação mostra como a teoria das categorias pode ser utilizada como ferramenta para tratar o Problema dos Universais. Os resultados desenvolvidos aqui permitem que o Problema dos Universais seja encarado a partir de uma nova e original perspectiva, a saber, a de uma ontologia esquemática. De fato, o presente trabalho mostra como construir formas esquemáticas de sentenças. A ideia básica é que a justificativa para a aplicação de um mesmo predicado a particulares distintos é dada por meio de uma relação esquemática entre formas esquemáticas de sentenças; para tal, eu defino também a forma esquemática da noção de particular paradigmático. Para levar a cabo essa ideia, eu utilizo construções presentes na teoria das categorias. Assim, formas esquemáticas de sentenças são formalizadas como cones, a forma esquemática da noção de particular paradigmático é formalizada como o limite para um dado funtor, e a relação esquemática entre formas esquemáticas de sentenças é formalizada como a relação esquemática *fatora-se por meio de*. Além disso, eu defino uma categoria na qual os objetos são formas esquemáticas de sentenças, e as setas são as relações esquemáticas entre essas formas esquemáticas de sentenças. Finalmente, eu "funtorializo" a noção de particular paradigmático, mostrando que perguntar sobre a existência de uma forma esquemática da noção de particular paradigmático é perguntar sobre a existência do adjunto direito de um dado funtor. Como um exemplo do nominalismo de categorias desenvolvido nesta dissertação, eu apresento uma solução para o regresso infinito apontado por Russell no nominalismo de semelhança. Na conclusão, eu esboço brevemente como a teoria das formas esquemáticas desenvolvida aqui pode ser utilizada em problemas do âmbito das teorias da verdade e das teorias do significado.

Palavras-chave: Nominalismo de Categorias. Formas Esquemáticas. Funtorialização.

ABSTRACT

The present dissertation shows how Category Theory can be used as a tool to deal with the Problem of Universals. The results developed here allow the Problem of Universals to be viewed from a new and original perspective, that is, of a schematic ontology. In fact, the present study demonstrates how to build schematic forms of sentences. The basic idea is that the justification for applying the same predicate to distinct particulars is given by a schematic relation between schematic forms of sentences; for this, I also define the schematic form of the paradigmatic particular notion. To conclude this idea, I use constructions present in Category Theory. Hence, schematic forms of sentences are formalized as cones, the schematic form of the paradigmatic particular notion is formalized as the limit for a given functor, and the schematic relation between schematic forms of sentences is formalized as the schematic relation *factors through*. Moreover, I define a category in which the objects are schematic forms of sentences, and the arrows are the schematic relations between these schematic forms of sentences. Finally, I "functorize" the notion of paradigmatic particular, showing that asking about the existence of a schematic form of the notion of paradigmatic particular is asking about the existence of the right adjoint of a given functor. As an example of the Category Nominalism developed in this dissertation, I present a solution to the infinite regress pointed out by Russell in the Resemblance Nominalism. In the conclusion I briefly outline how the theory of schematic forms developed here can be used in problems in the field of the theories of truth and theories of meaning.

Keywords: Category Nominalism. Schematic Forms. Functorialization.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esta dissertação contém os resultados alcançados na minha pesquisa durante o mestrado. Os pré-requisitos para um bom entendimento e absorção do conteúdo presente neste trabalho podem ser divididos em duas partes. A primeira concerne a uma maturidade filosófica, no sentido de saber que o trabalho principal do filósofo é buscar soluções para os problemas que competem à atividade filosófica. Ou seja, o leitor deve ter maturidade suficiente para não esperar deste trabalho uma mera repetição do que já existe. E deve ter em mente que a atividade filosófica termina onde começa a atividade científica. Nós discorreremos mais sobre o último pormenor adiante. A segunda concerne à familiaridade com noções básicas de matemática. Por exemplo, o leitor é encorajado a familiarizar-se com as noções de relação e função (injeção, sobrejeção, bijeção, composição e identidade).

Esta dissertação está estruturada de forma bastante simples. Existe um capítulo introdutório no qual eu discorro sobre a questão dos universais (realismo e nominalismo) e apresento a minha ideia da maneira mais intuitiva possível, bem como justifico a necessidade da utilização da teoria das categorias. Espero que esse capítulo introdutório encoraje o leitor a entender e absorver o conteúdo aqui presente. A teoria das categorias talvez assuste um pouco no início, mas o que o leitor deve ter em mente é que a teoria das categorias não é apenas mais uma teoria, é uma nova forma de raciocinar. Então, a partir do momento em que o leitor entender isso, todas as noções categoriais passarão a fazer sentido de forma intuitiva. Depois do capítulo introdutório supracitado, vem um capítulo dedicado à teoria das categorias. Tal capítulo é uma apresentação detalhada do que eu presumo ser o básico que alguém deve saber sobre teoria das categorias para poder entender a sua utilização nesta dissertação. O próximo capítulo é onde eu desenvolvo a minha teoria das formas esquemáticas e apresento o meu nominalismo de categorias.

2 UNIVERSAIS

2.1 O que é o Problema dos Universais?

Antes de iniciar qualquer tratamento sobre o Problema dos Universais, eu devo explanar a que se refere esse problema. Nós podemos caracterizar universais da seguinte maneira: algo é um universal se, e somente se, pode ser instanciado; caso contrário é um particular. A instanciação, claro, pode ser realizada por outro universal, e não somente por particulares; por exemplo, a sabedoria é um universal, mas também é uma instância de outro universal, a saber, a virtude. Já um particular não pode, de forma alguma, possuir uma instância; por exemplo, Gregg Allman não pode ter uma instância. Assim, a distinção entre particular e universal é tomada como sendo exaustiva e exclusiva. Podemos dizer que o assunto 'universais' se inicia (ou pelo menos ganha força e destaque) em Platão. No Parmênides, Platão discorre sobre uma série de problemas que surgem a partir da sua teoria das formas, sem, contudo, fornecer respostas que poderiam ser consideradas satisfatórias.

É de conhecimento de todos que Aristóteles discordava veementemente da teoria de Platão. Entretanto, alguns neoplatônicos, tais como Plotino, Agostinho e Boécio, enxergavam nas obras dos dois filósofos uma concordância básica: em Aristóteles se encontra a explicação de como a mente do ser humano adquire conceitos universais a partir das coisas particulares encontradas na experiência; e em Platão se encontra a explicação de como as coisas particulares têm as características universais estabelecidas por meio de uma modelação efetuada pelos seus arquétipos universais. Essa maneira de expor e tratar o problema no final da Antiguidade foi o ponta pé inicial para tratamentos mais sofisticados na Idade Média. Por exemplo, os conceitos (da mente humana) foram considerados como posteriores às coisas particulares que tais conceitos representam; assim, conceitos eram *universalia post rem*. Já as características inerentes às coisas particulares, isto é, suas características universais, eram considerados universais nas coisas, ou seja, eram *universalia in re*. Já os universais na mente divina eram *universalia ante rem*.

Daí para atrelar os universais à linguagem foi um caminho natural. Todas as noções explanadas acima são expressas e ganham significados por meio dos óbvios sinais universais presentes na linguagem ordinária. Por exemplo, se nós tomarmos o termo 'homem' constataremos imediatamente que se trata de um termo universal, tendo em vista que podemos predicá-lo de maneira sempre verdadeira a todos os particulares que são homens. Em contrapartida, se tomarmos o termo singular 'Grothendieck', constataremos imediatamente que, se utilizado de forma inequívoca, poderemos predicá-lo de forma verdadeira somente a um único particular.

Universais são, digamos assim, universais dentro da filosofia. Ou seja, mesmo que o filósofo não se dedique ao estudo envolvendo a questão dos universais diretamente, de uma maneira ou de outra, e em maior ou menor grau, ele estará comprometido com alguma posição com respeito a universais: é algo que não é uma opção. A classificação dessas posições, grosso modo, é a seguinte: realistas; conceitualista; e nominalistas. Deixe-me, agora, ser um pouco mais explícito sobre o que é o Problema dos Universais, e por que ele é um problema.

Rodriguez-Pereyra (2000) mostra que o Problema dos Universais possui a mesma forma que Nozick (1981, p. 9) identifica em muitos problemas filosóficos: "como é uma certa coisa, digamos 'X', possível dada (ou supondo) certas outras coisas?"[1] Por exemplo, como é possível que tenhamos livre-arbítrio, dado que todas as nossas ações são causalmente determinadas? Ou, como o movimento é possível, dado o argumento de Zenão? Nozick chama essas "certas outras coisas" de "excluidores aparentes" (*apparent excluders*), ou seja, eles parecem excluir a possibilidade de X ocorrer. Tal como Rodriguez-Pereyra percebe, a força desses "excluidores aparentes" varia: alguns parecem excluir X logicamente, já em outros casos tal exclusão parece ser metafísica, e em outros casos apenas física. O ponto em questão é que a coexistência de X e seus "excluidores aparentes" configura-se um quebra-cabeças que necessita de uma explanação. Assim, explanar como X é possível é mostrar que seus "excluidores aparentes" não são reais. Obviamente, tal como Rodriguez-Pereyra pontua, existem duas maneiras de fazer isso: a primeira é mostrar que os "excluidores aparentes" não existem; e a segunda é mostrar que esses "excluidores aparentes" são, de fato, aparentes.

Rodriguez-Pereyra argumenta que podemos constatar, na formulação de Armstrong (1978, p. 41), que o Problema dos Universais possui a forma dos problemas de Nozick: "o problema de como particulares numericamente diferentes podem, mesmo assim, ser idênticos em natureza, ser todos do mesmo 'tipo'"[2]. A existência de um "excluidor aparente" aqui, tal como notado por Rodriguez-Pereyra, é indicada pelo

[1] how is a certain thing, call it 'X', possible given (or supposing) certain other things?

[2] the problem of how numerically different particulars can nevertheless be identical in nature, all be of the same 'type'.

advérbio contrastivo "*nevertheless*", e o "excluidor aparente" é justamente a diferença numérica entre os particulares. Mais especificamente, o problema em questão é saber como pode existir identidade na diferença, ou como pode existir unidade na multiplicidade. A incompatibilidade aqui pode variar, por exemplo, alguns podem ver uma incompatibilidade lógica, enquanto outros podem ver uma incompatibilidade mais fraca. Mas, seja qual for o grau de incompatibilidade, explaná-la é exatamente o que soluções para o Problema dos Universais tentam fazer. Note, entretanto, tal como Rodriguez-Pereyra (2000, p. 257) aponta, que algumas pessoas podem sugerir que não existe incompatibilidade alguma entre, por exemplo, *a* e *b* serem os mesmos em tipo (ou em relação a algum aspecto qualitativo), e, não obstante, numericamente diferentes. Mas, o ponto é que existe uma incompatibilidade entre ser o mesmo e ser diferente, e apelar para uma distinção entre identidade numérica e identidade qualitativa já é uma tentativa de explanar como particulares podem ser idênticos apesar de serem diferentes. No entanto, sem uma explanação dos tipos ou das propriedades, dizer meramente que particulares numericamente diferentes podem ser idênticos em tipo é uma explanação incompleta.

Seja como for, existe ainda um problema mais básico, a saber, a pouca clarificação do requerido tipo de explanação sobre como particulares diferentes podem ter as mesmas propriedades. Quais fatos devemos explanar? O fato de que a e b têm uma propriedade comum? O fato de que *a* e *b* têm em comum a propriedade *F*? O fato de que *a* e *b* são ambos *F*? Rodriguez-Pereyra cita Campbell para mostrar que a possibilidade de discordância vai mais além:

> [...] nós podemos colocar duas questões bastante diferentes sobre, digamos, objetos vermelhos. Nós podemos pegar um *único* objeto vermelho e perguntar: o que é isso sobre esse objeto em virtude do qual ele é vermelho? Nós vamos chamar essa questão de *questão A*.
>
> Segundo, nós podemos perguntar sobre quaisquer dois objetos vermelhos: o que é isso sobre esses dois objetos em virtude do qual eles são ambos vermelhos? Deixemos essa ser a *questão B*. (CAMPBELL, 1990, p. 29, tradução nossa.)

Tal como Rodriguez-Pereyra pontua, é comum a confusão envolvendo as duas questões acima. Por exemplo, para Devitt (1980, p. 435), uma solução para o Problema dos Universais deve explanar verdades como "*a* é *F*", e não verdades como "*a* e *b* têm a mesma propriedade *F*". Rodriguez-Pereyra prossegue mostrando como Oliver (1996, pp. 49-50) aponta o exemplo mais notável desse tipo de confusão, a saber, o próprio Armstrong. Oliver mostrou que Armstrong vacila entre as seis seguintes sentenças, que indicam os fatos a serem explanados por uma solução para o Problema dos Universais:

(1) *a* e *b* são do mesmo tipo / têm uma propriedade comum.

(2) *a* e *b* são ambos F.

(3) *a* e *b* têm uma propriedade comum, *F*.

(4) *a* tem uma propriedade.

(5) *a* é *F*.

(6) *a* tem a propriedade *F*.

Segundo Oliver (1996, p. 50), Armstrong vacila entre (1) - (6) pelo fato de utilizar o seguinte raciocínio: "*a* é *F*" é equivalente a "*a* tem a propriedade *F*", assim, pode-se inferir a partir disso "*a* tem uma propriedade"; da mesma forma, "*a* e *b* são ambos *F*" é equivalente a "*a* e *b* têm uma propriedade comum, *F*", igualmente, pode-se inferir a partir disso "*a* e *b* são do mesmo tipo / têm uma propriedade comum"; e, por último, de "*a* tem a propriedade *F*" e "*b* tem a propriedade *F*" pode-se inferir "*a* e *b* têm uma propriedade comum, *F*". A questão levantada por Oliver é que, algumas vezes, "*a* é *F*" não é equivalente a "*a* tem a propriedade *F*", o que pode ser visto no fenômeno da auto-instanciação. Entretanto, a discussão sobre a distinção entre "*a* é *F*" e "*a* tem a propriedade *F*" não importa muito aqui, tendo em vista que o Problema dos Universais se preocupa apenas com propriedades esparsas e, o tipo de propriedade utilizada para gerar uma contradição na supracitada discussão, a saber, a de não ser auto-instanciada, se existe, é uma propriedade abundante[3].

Deixando de lado a discussão sobre se "*a* é *F*" é ou não equivalente a "*a* tem a propriedade *F*", Rodriguez-Pereyra toma, provisoriamente, (2) e (3) e, da mesma forma (5) e (6), como expressando os mesmos fatos. Assim, os fatos que necessitam de explanação são quatro: (1), (2)/(3), (4) e (5)/(6). Portanto, a questão que se põe é saber qual desses fatos uma solução para o Problema dos Universais deve explanar. Tal como Rodriguez-Pereyra pontua, tal questão não é de maneira nenhuma trivial, tendo em vista que se os fatos são diferentes, não necessariamente deve existir uma explanação

[3] Para a distinção entre propriedades esparsas versus propriedades abundantes, ver Lewis (1983, pp. 346-7, 1986, pp. 59-63).

unificada para todos. Por exemplo, Lewis (1983, pp. 354-5) sustenta que (1) e (3) possuem explanações diferentes e, como visto, Campbell pede explanações diferentes para (2) e (5). Neste ponto, as questões que surgem são as seguintes: (i) o que deve ser explanado por soluções para o Problema dos Universais; e (ii) que tipo de explanação é requerida.

Para (ii), Rodriguez-Pereyra nota que Oliver (1996, p. 50) aponta três visões de o que uma explanação de (1) - (6) deveria ser, e entre as quais Armstrong parece vacilar:

(a) uma análise conceitual do conteúdo de (1) – (6);

(b) uma descrição do comprometimento ontológico de (1) – (6); e

(c) uma descrição dos *truthmakers* de (1) – (6).

Rodriguez-Pereyra toma as três visões acima como os possíveis candidatos ao tipo de explanação requerida pelo Problema dos Universais. Entretanto, logo de cara o candidato (a) é descartado, tendo em vista que, para Rodriguez-Pereyra, o Problema dos Universais é um problema ontológico:

> [...] seja qual for a natureza exata do Problema dos Universais, algo sobre isso parece claro, a saber, que é um problema ontológico, um problema sobre quais tipos de entidade existem, não sobre como nós conhecemos, pensamos ou falamos sobre tais entidades (embora uma solução pode, e provavelmente terá, consequências interessantes para estes) (RODRIGUEZ-PEREYRA, 2000, pp. 256-257, tradução nossa).

Assim, uma solução não pode ser uma que seja capaz apenas de nos informar sobre o conteúdo dos conceitos e palavras que são usados para falar e pensar sobre o que existe, mas uma que diga alguma coisa sobre o que existe. Por outro lado, os candidatos (b) e (c) não possuem o problema do candidato (a), pois ambos dizem algo sobre o que existe e, portanto, não podem ser descartados tendo como base o problema de (a). Tal como encontrado em Oliver (1996, p. 60), a caracterização de comprometimento ontológica de uma sentença pode ser dada da seguinte forma:

(OC) A sentença S é ontologicamente comprometida com a entidade E se, e somente se, S implica "E existe".

Ou seja, o comprometimento ontológico de uma sentença é sobre quais entidades devem existir para que tal sentença seja verdadeira. Já o *truthmaker* de uma sentença é aquilo que faz algo verdadeiro, ou aquilo em virtude do qual uma dada sentença é verdadeira.

Tal explanação intuitiva não é exatamente clara, entretanto, nas palavras de Rodriguez-Pereyra: [...] "autores concordam que 'fazer verdadeiro' não significa 'causar ser verdadeiro', e muitos deles pensam que isso significa 'implicar'."[4] (2000, p. 260).

Portanto, a caracterização do *truthmaker* de uma sentença é, na maior parte das vezes, dada da seguinte forma (OLIVER, 1996, p. 69):

(T) A entidade *E* é um *truthmaker* de sentenças *S* se, e somente se, "*E* existe" implica *S*.

Note que as noções de implicação envolvidas aqui são recíprocas:

> [...] a necessidade nas noções de implicação envolvidas aqui é amplamente lógica ou metafísica. Mas, seja qual for a noção de implicação, comprometimento ontológico e truthmaking são relações recíprocas de implicação, indo da linguagem para o mundo por comprometimento ontológico e do mundo para a linguagem por truthmaking (RODRIGUEZ-PEREYRA, 2000, p. 260, tradução nossa).

Apesar da íntima ligação entre os candidatos (b) e (c), fica óbvio, a partir do exposto acima, que somente o candidato (c) se qualifica como o tipo correto de explanação requerida pelo Problema dos Universais. Isso pode ser visto facilmente pelo fato de que, no caso do candidato (b), a existência de E é compatível com a não existência do fato de que S e, portanto, compatível com a existência de seus "excluidores reais" (*real excluders*), tendo em vista que S implica, mas não é implicado por "E existe". Portanto, a existência de E não é suficiente para explanar como o fato de que S é possível. Por outro lado, desde que, como visto acima, o Problema dos Universais diz respeito a dar uma explanação filosófica ou metafísica de como os fatos expressados por (1) – (6) são possíveis, fica fácil constatar que o candidato (c) faz exatamente o requerido. Para ver isso, basta notar, como apontado por Rodriguez-Pereyra, que uma maneira simples de explanar como algum dado fato S é possível é invocar a existência de algo que o implique. Ora, mas é exatamente isso o que ocorre no caso do candidato (c):

> Se "E existe" implica S, então a existência de E *exige* o fato de que S, que significa que, *dado* E, o fato de que S não pode deixar de obter, não que obtém ou existe necessariamente. A existência de E exclui os excluidores reais do fato de que S: o que exige o fato de que S "impossibilita" seus excluidores reais e, assim, explica como S é possível. Mas, se E é um truthmaker de S, então "E existe" implica S (RODRIGUEZ-PEREYRA, 2000, p. 261, tradução nossa).

[4] authors agree that 'making true' does not mean 'causing to be true', and many of them think that it means 'entailing'.

Portanto, com Rodriguez-Pereyra eu concluo que somente o candidato (c) se qualifica como o tipo correto de explanação requerida pelo Problema dos Universais. Dessa forma, uma solução para o Problema dos Universais deverá ser uma explanação dos truthmakers das sentenças (1) – (6).

2.1.1 Teoria dos *truthmakers*

Apesar de ser o candidato correto, a noção de truthmaker não está livre de controvérsias. Como apontado por Rodriguez-Pereyra, existem argumentos que tentam mostrar que tal noção é vazia ou incoerente, como, por exemplo, uma versão do *Slingshot argument* (Oliver 1996, p. 73). Entretanto, o *Slingshot argument* pode ser parado com pela adoção do chamado critério de identidade "estruturalista" para fatos (OLSON, 1987, p. 91). Outro problema da noção de *truthmaker* diz respeito à própria definição (T): a partir da definição (T), cada *truthmaker* para uma dada sentença S é também um *truthmaker* para cada verdade necessária. A noção relativamente clara de implicação é utilizada para esclarecer as noções relativamente obscuras de "fazer verdadeiro" e "ser verdadeiro em virtude de". O problema é que uma proposta que implique, por exemplo, que Wittgenstein é o *truthmaker* de uma verdade necessária, obviamente mais distorce do que clarifica a noção de *truthmaker*. A solução encontrada por Rodriguez-Pereyra para esse problema em particular é a seguinte:

(T*) Se E é um truthmaker de S, então "E existe" implica S.

Ou seja, a implicação é uma condição necessária, porém, não suficiente para E ser *truthmaker*. A definição mais fraca (T*) não pode, obviamente, ser usada para mostrar quais são os *truthmakers* de uma sentença, mas pode ser usada para mostrar que algo não é o *truthmaker* de uma sentença; entretanto, para os propósitos de Rodriguez-Pereyra isso é suficiente. É importante salientar que o debate sobre a questão dos *truthmakers* é bastante controverso[5]; no entanto, Rodriguez-Pereyra não se aprofunda em tal debate, tendo em vista que o seu foco são as sentenças (1) – (6) apenas. Assim, a noção de *truthmaker* que eu irei apresentar aqui será a concepção de Rodriguez-Pereyra, a saber, os *truthmakers* das sentenças existenciais singulares, das sentenças de

[5] Armstrong, Truth and Truthmakers (2004, pp. 24-25).

identidade, das sentenças disjuntivas, das sentenças conjuntivas e das sentenças de generalização existencial.

Uma sentença existencial singular é definida por Rodriguez-Pereyra como qualquer sentença contendo apenas uma constante individual e o predicado 'existe', por exemplo, "Wittgenstein existe". Já uma sentença de identidade é definida como qualquer sentença composta por um sinal de identidade ladeado por ocorrências de constantes individuais, por exemplo, "Wittgenstein = Wittgenstein". A partir dessas definições fica claro que os *truthmakers* de sentenças existenciais singulares e sentenças de identidade são particulares. Sentenças disjuntivas são da forma P ∨ Q. Assim, os *truthmakers* de sentenças disjuntivas são os *truthmakers* de quaisquer de seus disjuntos. Para as sentenças conjuntivas, uma análise mais apurada se faz necessário. A fim de evitar o problema de se ter a indesejável conclusão de que P é verdadeira em virtude do fato de que P ∧ Q, Rodriguez-Pereyra (2002, p. 39) define os *truthmakers* de uma sentença conjuntiva por meio do seguinte princípio geral, o qual ele chama de *joint truthmaking*:

(T**) If $E_1, \ldots, E_n$ são *joint truthmakers* of 'S' then 'E_1 existe e...e E_n existe' implica 'S'.

Tudo o que (T**) diz é que é impossível que um grupo de *joint truthmakers* de 'S' coexista enquanto 'S' é falso.

Sentenças de generalização existencial são da forma $(\exists x)(Fx)$, e qualquer coisa que torne verdadeiro 'Fa', 'Fb', 'Fc' etc. também tornará verdadeira a sentença $(\exists x)(Fx)$. Assim, o *truthmaker* de uma sentença tal como $(\exists x)(Fx)$ é qualquer coisa que seja F, ou seja, os *truthmakers* das sentenças de generalização existencial são quaisquer coisas que as torne verdadeiras.

2.1.2 *Many over one*

Para Rodriguez-Pereyra, uma solução para o Problema dos Universais consiste na descrição dos *truthmakers* de sentenças do tipo (5) e (6). Mas, por quê? Porque os *truthmakers* de sentenças do tipo (5) e (6) oferecem uma descrição dos *truthmakers* de todas as outras sentenças consideradas para o Problema dos Universais, ou seja, as sentenças (1) – (6). Lembremo-nos que Rodriguez-Pereyra toma, provisoriamente, (2) e (3) e, da mesma forma (5) e (6), como expressando os mesmos fatos. Essa assunção é agora enfraquecida tomando (2) e (3) e, da mesma forma (5) e (6), não como expressando os mesmos fatos, mas, como tendo os mesmos *truthmakers*. Rodriguez-Pereyra prossegue argumentando que sentenças do tipo (1) são uma *covert disjunction*, algo como "*a* é (tem a propriedade) *F* e *b* é (tem a propriedade) *F,* ou *a* é (tem a propriedade) *G* e *b* é (tem a propriedade) *G*...". As sentenças do tipo (1) podem também ser tomadas como generalizações existenciais, algo como "Existe alguma coisa (alguma propriedade) que tanto *a* quanto *b* são (tem)". O ponto é que, seja como for, o que faz sentenças do tipo (1) verdadeiras são exatamente os *truthmakers* de sentenças dos tipos (2) e (3). Da mesma forma, sentenças do tipo (4) são uma *covert disjunction*, algo como "*a* é (tem a propriedade) *F* ou *a* é (tem a propriedade) *G* ou *a* é (tem a propriedade) *H*...". Também da mesma forma, as sentenças do tipo (4) podem ser tomadas como generalizações existenciais, algo como "Existe alguma coisa (alguma propriedade) que *a* é (tem)". Igualmente, o ponto é que, seja como for, o que faz sentenças do tipo (4) verdadeiras são exatamente os *truthmakers* de sentenças dos tipos (5) e (6). Agora, note que, como apontado por Rodriguez-Pereyra, as sentenças dos tipos (2) e (3) são encurtamentos para conjunções como "*a* é (tem a propriedade) *F* e *b* é (tem a propriedade) *F*". Por (T**) pode-se dizer que os *truthmakers* de sentenças dos tipos (5) e (6) tomados conjuntamente fazem sentenças dos tipos (2) e (3) verdadeiras. Ou seja, uma descrição dos *truthmakers* de sentenças dos tipos (5) e (6) nos dará uma descrição dos *truthmakers* de sentenças dos tipos (1) – (6). Assim, assumindo que o Problema dos Universais é um problema sobre *truthmakers*, a solução é uma descrição dos *truthmakers* de sentenças dos tipos (5) e (6).

A questão que se põe imediatamente é a seguinte: quais são os *truthmakers* de sentenças do tipo (5) e (6)? Como aponta Rodriguez-Pereyra, diferentes teorias propõem diferentes respostas a essa questão:

> Assim, o realismo sobre universais diz que o trethmaker de (5) e (6) é que *a* instancia a *F*-idade, que é também um truthmaker de (4); e que *a* instancia a *F*-idade e que *b* instancia a *F*-idade são os joint truthmakers das sentenças (2) e (3) e, portanto, de (1). Similarmente, o nominalismo de semelhança responde ao Problema dos Universais dizendo, grosso modo, que o truthmaker de (5) e (6) é que *a* se assemelha a *F*-particulares, que é também um truthmaker de (4); e que *a* se assemelha a *F*-particulares e que *b* se assemelha a *F*-particulares são os joint truthmakers das sentenças (2) e (3) e, consequentemente, de (1) também. Finalmente, a teoria dos tropos deve dizer que o truthmaker de (5) e (6) é que *a* tem um tropo que se assemelha ao *F*-tropos, que é também um truthmaker de (4); e que um dos tropos de *a* se assemelha aos *F*-tropos e que um dos tropos de *b* se assemelha aos *F*-tropos são os joint truthmakers de (2) e (3) e, assim, de (1) (RODRIGUEZ-PEREYRA, 2000, pp. 266-267, tradução nossa).

Existe ainda o nominalismo de avestruz, segundo o qual o *truthmaker* das sentenças de tipo (5) e (6) é apenas *a*. Rodriguez-Pereyra apresenta vários motivos que mostram a deficiência de se considerar apenas o particular *a* como um *truthmaker*. Entretanto, eu não irei apresentar essa discussão aqui, para maiores detalhes ver a seção *Against Truthmaker Ostrich Nominalism* (RODRIGUEZ-PEREYRA, 2002, pp. 43-46). Assumindo que *a* somente não pode ser o *truthmaker* das sentenças de tipo (5) e (6), uma explicação da multiplicidade de propriedades de *a* se faz necessário. Isso mostra, tal como Rodriguez-Pereyra argumenta, que o Problema dos Universais não é saber como é possível que particulares numericamente diferentes possuam a mesma propriedade, mas sim, saber como é possível que um particular, que é numericamente uma unidade, possua muitas propriedades. Essa nova perspectiva do Problema dos Universais é chamada por Rodriguez-Pereyra de *Many over One*, em contraste à perspectiva original do problema, chamada de *One over Many*:

> O fato a ser descrito por uma solução para o Problema dos Universais é o que eu chamo o *Many over One* (...) O One over Many requer uma explicação da unicidade dado o seu excluidor aparente – multiplicidade. Correspondentemente, o Many over One requer uma explicação da multiplicidade dado o seu excluidor aparente – unidade. A questão colocada pelo Many over One – exatamente a oposta da cquestão colocada pelo One over Many – é, então "Como pode existir multiplicidade na unidade?", ou seja, "Como pode um particular ser em algum sentido múltiplo, dado que ele é numericamente um?" (RODRIGUEZ-PEREYRA, 2000, p. 269, tradução nossa).

Mas, então, isso significa que a perspectiva *One over Many* deve ser negligenciada? Não! Para Rodriguez-Pereyra, o que ocorre, na verdade, é que ao considerarmos a perspectiva *Many over One* juntamente com a solução proposta pela teoria dos *truthmakers*, a perspectiva *One over Many* desaparece. Isso porque a perspectiva *One over Many* tem como ponto de partida fatos sobre múltiplos particulares compartilhando uma mesma propriedade, ou seja, fatos expressados por sentenças como "*a* é (tem a propriedade) *F* e *b* é (tem a propriedade) *F*". Mas, como visto acima, os *truthmakers* dessas conjunções são os *truthmakers* de "*a* é (tem a propriedade) *F*" e "*b* é (tem a propriedade) *F*" tomados conjuntamente. Portanto, o problema que fica é justamente saber como a multiplicidade de propriedades que *a* possui é possível, isto é, a perspectiva *Many over One*.

Para Rodriguez-Pereyra, explicar como é possível que um particular *a*, que é numericamente uma unidade, possua múltiplas propriedades, pode tomar duas formas:

> [...] ou nega-se que existam quaisquer particulares numericamente um ou mostra-se que a unicidade de particulares é meramente um excluidor aparente de ter uma multiplicidade de propriedades (RODRIGUEZ-PEREYRA, 2000, p. 270, tradução nossa).

A segunda forma é realizada por meio da explanação de como essa multiplicidade de propriedades de um dado particular é compatível com a sua unidade numérica. Tal como Rodriguez-Pereyra aponta, nesse sentido, soluções para o Problema dos Universais são teorias de propriedades, ou seja, o papel de tais teorias é o de explicar em virtude de que um particular individual pode ter múltiplas propriedades. Por exemplo, o nominalismo de semelhança explica a perspectiva *Many over One* por meio da semelhança entre particulares: o que faz ser verdade que *a* é *F* é, grosso modo, que *a* se assemelha a todos os *F*-particulares, onde *F* é uma variável. Ou seja, um particular pode ter múltiplas propriedades diferentes se ele se assemelhar a múltiplos grupos diferentes de particulares.

Todos os que reconhecem que o *Many over One* é um problema genuíno comprometem-se, em maior ou menor grau, com propriedades. Para Rodriguez-Pereyra tal comprometimento é mínimo, tendo em vista que o comprometimento é apenas com a ideia de que o que faz sentenças como "*a* é *F*" e "*a* tem a propriedade *F*" verdadeiras é mais do que apenas *a*, e é esse extra que diz respeito a teorias de propriedades. Agora que já sabemos o que é o Problema dos Universais, eu vou apresentar duas teorias (já citadas brevemente aqui) que dão diferentes respostas à questão sobre quais são os *truthmakers* das sentenças (5) e (6), a saber, o realismo e o nominalismo. Eu não vou me ater muito ao realismo, pois essa posição não terá relevância para o que será apresentado neste trabalho. Entretanto, tentarei ser mais abrangente sobre o nominalismo, desde que é a posição que proponho aqui é uma forma de nominalismo.

2.2 Realismo e Nominalismo

2.2.1 Realismo

A posição realista sustenta que universais existem. Realistas argumentam que eliminar os universais da nossa ontologia nos torna incapazes de explanar um fato supostamente aparente e fundamental, a saber, a uniformidade e sistematização da natureza. A experiência mostra que os particulares parecem compartilhar propriedades; para o realista isso ocorre porque é o que de fato acontece. Ou seja, em cada particular desses existe, ao mesmo tempo, uma entidade que explica como é possível que nós possamos dizer que tais particulares são qualitativamente idênticos; essa entidade é um universal.

Dentro da posição realista encontram-se algumas variações. Dentre essas duas se destacam: o realismo extremo e o realismo forte que são inspiradas, respectivamente, em Platão e Aristóteles. A explicação dada em Platão para o fato de termos indivíduos qualitativamente idênticos é fornecida postulando a existência do que ele chama de Formas. Por exemplo, a existência de duas xícaras vermelhas se dá pelo fato de existir uma Forma capaz de se manifestar nessas duas xícaras. Assim, é postulada a existência de uma entidade além dessas duas xícaras que é a responsável pelas suas identidades qualitativas. Mas, qual é a natureza dessa Forma? Grosso modo, podemos dizer prontamente que essas Formas são imateriais, estão completamente fora do espaço e do tempo, e são totalmente abstratas. Entretanto, obviamente que para que a Forma seja a responsável pela 'vermelhidão' da xícara deve existir uma relação entre a Forma e a xícara; para Platão, essa relação é chamada de participação. Dessa forma, em Platão diz-se que as coisas estão participando na Forma, e é a partir dessa 'participação' que as coisas adquirem as suas qualidades. Note, também, que a Forma é uma espécie de ápice da qualidade em questão, perfeita. Assim, a Forma na qual os particulares vermelhos participam e pela qual adquirem a qualidade de serem vermelhos é, em si, vermelha; mas não vermelha como os particulares participantes, ela é o supremo e perfeito vermelho. Além disso, a existência dessas Formas perfeitas independe da existência dos particulares participantes.

Como dito, o realismo forte é inspirado em Aristóteles. Grosso modo, podemos dizer que a diferença entre o realismo extremo e o realismo forte é que o último rejeita universais independentemente existentes. Como vimos, na versão extrema do realismo há uma tríade relacional envolvendo indivíduo, uma dada qualidade do indivíduo e a Forma (que é a responsável pelo fato de o indivíduo possuir a qualidade em questão). No realismo forte há apenas o indivíduo e a sua qualidade. Não há a necessidade de uma terceira parte (uma entidade independente) para que o indivíduo possua a qualidade. Assim, para o realista forte, um universal é apenas a qualidade que está no indivíduo em questão (e em qualquer outro qualitativamente idêntico). Ou seja, o universal não possui existência independente do indivíduo. Entretanto, o universal na versão forte do realismo também pode existir em muitos lugares de uma vez, e é numericamente idêntico em cada lugar.

2.2.2 Nominalismo

2.2.2.1 *Duas variantes gerais de nominalismo*

Em geral, encontra-se na literatura duas variantes do que os filósofos denominam de nominalismo, a saber, a variante que rejeita os objetos abstratos e a variante que rejeita os universais. Tais variedades não são dependentes, no sentido de que qualquer uma das variantes pode ser levada a cabo sem a outra. Entretanto, como veremos, não obstante essa independência, ambas possuem motivações e argumentos bastante próximos. Neste tópico nós abordaremos o nominalismo em ambas as formas. O intuito disso é tornar claro como o nosso nominalismo apresenta uma nova maneira de encarar a questão dos universais.

Em primeiro lugar, é importante destacar que essas variedades se dão principalmente pelo fato de que o termo ‘nominalismo’ de certa maneira tornou-se ambíguo na contemporaneidade. Ou seja, se levarmos em consideração aquilo a que os filósofos medievais referiam com esse termo, nós estamos lidando com a doutrina segundo a qual universais não existem. Por outro lado, se levarmos em consideração aquilo a que os filósofos contemporâneos referem com o mesmo termo, nós estamos lidando com a doutrina segundo a qual objetos abstratos não existem. Obviamente que essa distinção só faz sentido se universais e objetos abstratos não são, em geral, a mesma coisa. De fato, por um universal se entende aquilo que pode ser instanciado por entidades distintas; já por um objeto abstrato se entende aquilo que não tem existência espaço-temporal. Mas, claro, pode-se dizer que um universal é um objeto abstrato, mas não se pode dizer, em geral, que um objeto abstrato é um universal; portanto, não podem ser a mesma coisa.

Entretanto, como veremos, a distinção entre universais e objetos abstratos nessas variedades seguem como coisas, de fato, diferentes. Por exemplo, David Armstrong e Willard Quine evidenciam bem esse fato: Armstrong (1978; 1997) sustenta a existência de universais, mas nega a existência de objetos abstratos, tendo em vista que para ele tudo o que existe é espaço-temporal; já Quine, pelo menos em algumas fases de suas posições filosóficas (1964; 1981), não rejeita a existência de conjuntos e classes, sendo, portanto, um nominalista que sustenta a existência de objetos abstratos, mas não a de universais. Assim, a distinção entre essas duas variedades de nominalismo é que uma (a que rejeita universais) sustenta que cada coisa é um objeto particular; enquanto a outra (a que rejeita objetos abstratos) sustenta que cada coisa é concreta.

No entanto, claro, as duas variedades de nominalismo são ambas antirrealistas: o nominalismo de universais nega a existência e, portanto, a realidade de objetos abstratos; e o nominalismo de objetos abstratos nega a existência e, portanto, a realidade de universais. Mas, o ponto importante aqui é no trato das alegações de determinadas entidades como sendo, para alguns, universais, e para outros, objetos abstratos. Como o nominalista trabalha com essas questões? Vamos chamar de opção negativa (ON) a posição segunda a qual o nominalista simplesmente nega a existência e realidade dessas supostas entidades; e vamos chamar de opção de aceitação (OA) a posição segunda a qual o nominalista aceita a existência dessas suposta entidades, mas, não obstante, justifica essa aceitação argumentando que tais entidades são ou particulares ou concretos.

O que está sendo apresentando aqui é uma ampliação da compreensão do que é o nominalismo. Isto é, eu não estou apresentando o nominalismo como a posição que rejeita propriedades, proposições, classes etc.; isso seria apenas um exemplo de (ON), por exemplo. O objetivo de mostrar o nominalismo nessas duas variedades é apresentá-lo como a posição que utiliza (ON) e (OA) como estratégias. Portanto, não é o fato da rejeição de determinadas entidades que caracteriza o nominalismo, mas sim o fato de essa rejeição ter como principal razão a constatação de que essas entidades são universais ou objetos abstratos. Da mesma forma, aceitar determinadas entidades, tais como proposições, classes ou mundos possíveis, não entra em conflito com a posição nominalista, desde que essas entidades sejam caracterizadas como particulares ou objetos concretos. Com isso em mente, nós mostraremos, então, que o nosso nominalismo é a posição que utiliza uma nova estratégia.

É importante salientar algumas observações sobre objetos abstratos. Objetos abstratos são caracterizados como não existentes no espaço e no tempo e, por conseguinte, causalmente inertes. Entretanto, essa caracterização não é, de modo algum, o que se pode chamar de definição padrão. De fato, existem outras definições alternativas de caracterização mais positiva[6]; todavia, ao nosso particular, tais alternativas não são importantes, pois o problema que concerne ao nominalista não é o de caracterizar de forma positiva os objetos abstratos, mas sim o de evitar justamente a sua apresentação negativa, ou seja, não existentes no espaço e no tempo e causalmente inertes. Dessa forma, o problema (e principal motivação) que o nominalista tem com os objetos abstratos é exatamente os problemas decorrentes do fato de que esses objetos não existem no espaço-tempo e são causalmente inertes. Note que na posição *ante rem* os universais possuem suas existências fora do espaço e do tempo, ou seja, se for assumida a inércia causal, universais são objetos abstratos nessa posição.

De forma análoga ao caso *ante rem*, note que desde que na posição *in re* as instâncias (que são particulares) existem no espaço e no tempo, podemos dizer que os universais também existem no espaço e no tempo nessa posição. Entretanto, tanto no caso *ante rem* quanto no caso *in re*, o envolvimento que há entre o espaço e universais é obviamente diferente do que há entre o espaço e os objetos do cotidiano: no primeiro, os universais estão fora do espaço; no segundo, os universais podem ocupar vários lugares no espaço ao mesmo tempo.

2.2.2.2 *Argumentos contra objetos abstrato e universais*

Mas o que exatamente existe de tão ruim em universais e objetos abstratos? Grosso modo, podemos dizer que a base para a rejeição tanto de universais quanto de objetos abstratos é a famosa navalha de Occam, segundo a qual não se deve multiplicar entidades ou tipos de entidades desnecessariamente. Ou seja, se é possível que um objeto concreto efetue o mesmo papel teórico que um objeto abstrato, então se deve preferir o primeiro e eliminar o último. Rodriguez-Pereyra (2002, pp. 210-16) sustenta um outro princípio que serve como mais um apoio à não aceitação da postulação de

[6] Burgess e Rosen (1997, pp. 13-25).

entidades. Isto é, o princípio segundo o qual não se deve postular entidades *ad hoc* ou tipos de entidades desnecessariamente. Esse princípio se aplica no caso em que podemos usar tanto um objeto concreto quanto um objeto abstrato para desempenhar um determinado papel teórico. Se temos como única evidência de existência o fato de a entidade desempenhar um papel teórico qualquer, ou seja, entidades sem provas de existência que independam dos seus papéis teóricos desempenhados, então, essas entidades devem ser evitadas, se possível.

Mas os princípios citados acima não são as únicas razões contra objetos abstratos. De fato, existe um argumento epistemológico bastante comum na literatura contra tais objetos. Esse argumento é bastante intuitivo quando pensamos na inércia causal dos objetos abstratos: ora, se esses objetos são causalmente inertes, é possível termos conhecimento ou crença confiável sobre eles? E, se for o caso, como isso se dá? Um argumento amplamente discutido que utiliza o viés da inércia causal é o argumento de Benacerraf (1973): como é possível a referência linguística e, ou mental a objetos abstratos? Field (1989, pp. 25-27) também utiliza um argumento similar.

Existe, também, um argumento de viés ontológico. Embora não tão divulgado e debatido quanto o argumento de viés epistemológico, esse argumento é importante. O argumento ataca a inteligibilidade da ontologia realista, que muitas vezes admite objetos sem condições claras e inteligíveis de identidade (a própria noção de objeto abstrato é, em geral, inteligível). Entretanto, obviamente, não é o fato de serem objetos abstratos a razão da inteligibilidade e falta de clareza nas suas condições de identidade, tendo em vista que, por exemplo, conjuntos, não obstante serem objetos abstratos, possuem condições claras e inteligíveis de identidade. O problema aqui é o princípio de Goodman sobre composição: pode-se argumentar que as condições de identidade para conjuntos são inteligíveis se, e somente se, a noção de um conjunto é inteligível; mas, como diferentes entidades podem ser compostas a partir dos mesmos constituintes fundamentais? Aqui, novamente, o problema não é ser um objeto abstrato, pois é possível a existência de objetos abstratos simples, mas sim uma lacuna explicativa na composição de objetos abstratos complexos.

Como é fácil notar, grande parte desses argumentos que motivam a rejeição de objetos abstratos podem igualmente motivar a rejeição dos universais *ante rem*. É fácil notar, também, que a navalha de Occam se aplica mesmo aos universais *in re* (desde que se possa demonstrar que particulares podem desempenhar os papéis teóricos dos universais *in re*), tendo em vista que tais entidades, a despeito de serem espaciotemporais, são, como já notado acima, tipos de entidades distintas dos objetos ordinários. No entanto, existem argumento que atacam universais diretamente. Um desses argumentos é o bem conhecido regresso infinito que surge a partir da postulação de universais. Para ver esse regresso, suponha que existem universais, monádico e relacional. Agora, suponha (ou constate) que quando uma entidade (várias entidades) instancia um universal (relação) essa ligação se dá por meio de uma relação de instanciação.

Todavia, note que a relação de instanciação também é um universal, já que a relação de instanciação se dá em todas as coisas que são instâncias de universais. Ou seja, se uma coisa é uma instância de algum universal (se um grupo de entidades instancia uma relação), então, podemos dizer que existe uma relação de instanciação que os liga. Dessa forma, se a instancia P, então, a, P, e 'instancia' devem ser ligados por uma relação de instanciação, digamos R_2, já que 'instancia' é uma relação universal. Mas, se R_2 é uma relação universal, então deve existir uma relação de instanciação R_3 que liga a, P, 'instancia' e R_2, e assim ao infinito. Esse argumento é devido a Bradley (1893, pp. 27 – 28), e talvez seja um pouco forçado, pois não é conclusiva a suposta intuição de que há uma relação entre um universal e o particular que o instancia.

Mas, vejamos outro argumento. É algo mais ou menos óbvio o fato de que teorias de universais devem postular estados de coisas. Agora, note que para um estado de coisas que Rab, onde R é uma relação qualquer não simétrica, a existência de b é exigida. Assim, parece existir uma necessária conexão entre existências completamente distintas. Por outro lado, digamos que a, b e R são partes do estado de coisas que Rab; logo, a, b e R também compõem o estado de coisas que Rba. Mas, então, isso implica dizer que duas entidades são compostas de, exatamente, as mesmas partes. Nesse caso, os realistas possuem apenas duas alternativas: a primeira seria a não aceitação de universais estruturais e estados de coisas, admitindo apenas universais simples; e a segunda seria admitir universais estruturais e estados de coisas, mas aceitar que entidades distintas, pelo menos algumas entidades, possam ser compostas de exatamente os mesmos constituintes, mas com a ressalva que essa composição seja dada por ligações de caminhos diferentes. Para ver mais sobre essa discussão: Armstrong (1986), Forrest (1986b) Armstrong (1997, pp. 31–38).

2.2.2.3 Tipos de nominalismo

Eu irei manter o foco apenas no nominalismo de universais, pois é o mais debatido e o que carrega o problema principal na questão dos universais. Como dito, para essa variedade de nominalismo existem apenas particulares. Dessa forma, nominalistas de universais tendem a tratar a questão sobre a existência de supostas entidades universais por meio de duas vias: a primeira é, claro, simplesmente negar a existência de universais (o que seria a estratégia (ON) aplicada ao nominalismo de universais); e a segunda é aceitar que universais existem, mas, não obstante, são particulares, ou seja, não são universais no sentido do realismo (o que seria a estratégia (OA) aplicada ao nominalismo de universais). As duas formas mais comuns de aplicar (ON) e (OA) são: as famosas paráfrases (aceitáveis do ponto de vista do nominalismo) ou análises de sentenças as quais são intuitivamente verdadeiras, mas implicam a existência de universais; e dar descrições (aceitáveis do ponto de vista nominalista) dos *truthmakers* de sentenças, isto é, se é um universal que supostamente faz com que uma sentença seja verdadeira, a estratégia é descrever um *truthmaker* que não seja um universal.

No que segue, irei utilizar apenas o problema concernente a propriedades. No entanto, é muito simples reorganizar tudo de modo a abranger espécies e relações, não o faremos aqui por uma questão de brevidade. Para começar, é importante salientar que propriedades possuem diversos papéis teóricos, dentre os quais se encontra o de ser o valor semântico de predicados, e o de serem as responsáveis (ou representarem) pela similaridade e poderes causais das coisas. Assim, para os filósofos contemporâneos, a discussão sobre universais, em geral, gira em torno da noção de propriedade como sendo as responsáveis pela similaridade e poderes causais de coisas. Lewis (1983) introduziu a distinção entre propriedades esparsas e abundantes. A noção de propriedade que estamos lidando aqui é a de propriedades esparsas, que são aquelas capazes de (além de serem responsáveis pela similaridade e poderes causais de coisas) caracterizar as coisas de forma completa e sem redundâncias. Com isso em mente nós podemos, agora, falar sobre a questão principal a que realistas e nominalistas querem responder: o que faz uma coisa P ser P (onde P é um predicado de propriedade esparsa)?

Uma possível resposta nominalista a essa questão é dada pela teoria dos tropos (CAMPBELL, 1990, EHRING, 2011). Teóricos dessa posição não rejeitam propriedades, o que eles fazem é renegociar os termos (utilizando a estratégia (OA)) argumentando que propriedades são tropos. Mas, o que são tropos? Tropos são particulares exatamente no mesmo sentido que os objetos ordinários do cotidiano são particulares. Isso quer dizer que se nós temos um objeto, por exemplo, uma xícara, vermelha, a ‘vermelhidade’ da xícara não é um universal, mas uma ‘vermelhidade’ particular, a saber, a ‘vermelhidade’ da xícara em questão, e essa ‘vermelhidade’ é um tropos. Além disso, esse tropos existe apenas, e somente apenas, no espaço e no tempo em que a xícara em questão é vermelha. Assim, a xícara é vermelha por possuir um tropo vermelho, e não por ser uma instância do universal ‘vermelhidade’. A questão que surge aqui é: mas o que faz do tropo vermelho um tropo vermelho? Uma resposta possível é apelar para a semelhança, sem, contudo, explicar essas semelhança em termos de instanciação de universais. Por exemplo, o tropo vermelho da xícara é vermelho porque se assemelha a outro tropo vermelho, que por sua vez é vermelho porque se assemelha a outro tropo vermelho, isto é, são vermelhos porque se assemelham um ao outro, e somente um ao outro. Isso quer dizer que um tropo é vermelho, e não azul, por se assemelhar somente aos tropos vermelhos, e não aos azuis. Ehring (2011, pp. 175-241) defende outra resposta possível à questão: tropos vermelhos formam uma classe primitiva natural.

O problema com a semelhança vai além do fato de se é o caso ou não que tropos vermelhos são vermelhos por se assemelharem um ao outro. Independente de tal fato ser a razão pela qual tropos vermelhos são vermelhos, o caso é que tropos vermelhos se assemelham a outros tropos vermelhos, ou seja, tropos de mesma cor se assemelham. Com isso em mente, considere que as xícaras x, y e z são vermelhas e, por conseguinte, possuem, cada uma, um tropo particular vermelho. Vamos denotar cada tropo particular de x, y e z por t_x, t_y e t_z, respectivamente. Note, agora, que t_x, t_y e t_z são tropos vermelhos e, portanto, assemelham-se. Isto é, t_x é semelhante a t_y, que por sua vez é semelhante a t_z, que por sua vez é semelhante a t_x; ou seja, nós temos três tropos semelhança, os quais vamos denotar por t_xSt_y, t_ySt_z e t_xSt_z. Mas, desde que os tropos semelhança são tropos semelhança, eles se assemelham. Assim, nós temos t_xSt_y é semelhante a t_ySt_z, que por sua vez é semelhante a t_xSt_z, que por sua vez é semelhante a t_xSt_y, que são tropos semelhança de segunda ordem, os quais nós denotamos por $t_xSt_yS^2t_ySt_z$, $t_ySt_zS^2t_xSt_z$ e $t_xSt_yS^2t_xSt_z$. Mas, desde que esses tropos semelhança de segunda ordem são tropos semelhança de segunda ordem, eles se assemelham. Dessa forma, nós temos tropos semelhança de terceira ordem, e assim ao infinito.

Outros dois tipos de nominalismo de universais são o nominalismo de predicados e o nominalismo de conceitos. Para o nominalista de predicados não existe tal coisa como a ‘vermelhidade’, ou seja, uma xícara é vermelha apenas pelo fato de o predicado ‘vermelho’ se aplicar a ela. Já para o nominalista de conceitos uma xícara é vermelha apenas pelo fato de cair sob o conceito ‘vermelho’. Mas, claro, esses dois tipos nominalismos implicam que uma xícara é vermelha somente se existem falantes e pensantes. Existe, também, o nominalismo mereológico. Para esse tipo de nominalismo, a propriedade de ser vermelho é apenas o agregado (soma mereológica) das coisas que são vermelhas. Assim, uma xícara é vermelha pelo fato de fazer parte do agregado das coisas que são vermelhas, que por sua vez é um particular. O problema com esse tipo de nominalismo é revelado quando tratamos de propriedades extensivas, tais como massa e forma. Por exemplo, não é o caso que todas as partes do agregado das coisas que são quadradas são quadradas. Assim, não podemos dizer que coisas quadradas são quadradas por fazerem parte do agregado das coisas que são quadradas.

Um tipo de nominalismo bem mais conhecido, e que também é um nominalismo de universais, é o nominalismo de classe, sustentado por Lewis (1983). Nesse tipo de nominalismo as classes são particulares (se são abstratos ou concretos é outra discussão, mas aqui são particulares). Assim, propriedades para o nominalista de classe são apenas classes de coisas. Ou seja, a propriedade de ser vermelho é apenas a classe de todas, e somente aquelas, coisas que são vermelhas. O problema principal com esse tipo de nominalismo é justamente o fato de identificar classes com propriedades. Isso é um problema porque classes são extensionais e propriedades são intencionais. Assim, duas classes que possuem os mesmos membros são exatamente as mesmas, mas duas propriedades que possuam as mesmas instâncias não necessariamente são as mesmas. Ou seja, não há nada que garanta a correção dessa identificação, e mesmo quando ela parece ser correta, não é de modo algum necessário que seja correta. Outro ponto seria o seguinte: digamos que cada F é um G e que cada G é um F; nós devemos dizer, se o nominalismo de classe é correto, que o que torna algo F é o mesmo que o torna G. Não há problemas em dizer que cada F pode ser um G e que cada G pode ser um F. Mas não podemos dizer que o que faz das coisas F seja o mesmo que os torna G. Por exemplo, cada bola pode ser vermelha, e cada coisa vermelha pode ser uma bola (basta pensar que existem apenas bolas vermelhas). Mas disso não se segue que o que faz da bola uma bola seja a mesma coisa que a faz ser vermelha.

Talvez o tipo de nominalismo que mais esteja em voga hoje em dia seja o que iremos apresentar agora, a saber, o nominalismo de semelhança. Nesse tipo de nominalismo a ordem é invertida, grosso modo: não é por ser vermelho que as coisas vermelhas se assemelham, mas são vermelhas porque se assemelham. Aqui, semelhança é fundamental e primitivo. Ou seja, ou as propriedades das coisas dependem sobre as coisas que elas se assemelham, ou não há propriedades. Além disso, a semelhança é algo não analisável. Isso quer dizer que em uma versão desse tipo de nominalismo uma xícara é vermelha porque possui uma propriedade que nada mais é do que uma classe cujos membros satisfazem certas condições de semelhança definidas. Em outra versão, propriedades apenas não existem, sendo a xícara vermelha[7] porque ela satisfaz certas condições de semelhança. A questão que se coloca imediatamente a partir do exposto acima é: o que são essas condições de semelhança? Rodriguez-Pereyra (2002, pp. 156-98) apresenta um nominalismo de semelhança cujas condições de semelhança incluem diretrizes a serem satisfeitas não pelo objeto em questão, mas pelas coisas que se relacionam de uma dada forma com esse objeto. Por exemplo, no caso da xícara vermelha, há um grau de semelhança d tal que não há duas coisas vermelhas, e não há dois pares de ordem n cujos urelementos são coisas vermelhas, assemelhando-se em um grau menor do que d; e a classe de coisas vermelhas está, ou não está incluída em outras classes definidas em termos das condições de semelhança explanadas acima. Tal como o nominalismo de classe, o nominalismo de semelhança enfrenta o problema sobre a identidade de propriedades de mesma extensão. Além disso, há o problema do regresso infinito de Russell, o qual falaremos adiante.

2.3 Por que Teoria das Categorias?

Aqui eu irei fornecer justificativas e um pano de fundo geral sobre por que a teoria das categorias deve ser usada no problema dos universais, e como ela nos direciona a uma nova forma de encarar a questão. A primeira coisa que devo deixar bastante clara aqui é a distinção entre esquemático e assertório. Essa distinção é a principal razão que leva à utilização da teoria das categorias como uma ferramenta no

[7] Todos querendo saber por que a xícara é vermelha. Será que ninguém acredita que a xícara é vermelha simplesmente porque alguém a pintou de vermelho?

tratamento do Problema dos Universais. Sem essa distinção, nada funcionaria, pois eu estaria usando no tratamento aquilo que queremos eliminar, e tudo não passaria de um grande equívoco. Portanto, antes de entrarmos em detalhes sobre o que é uma categoria, devemos entender essa distinção.

2.3.1 Esquemático versus Assertório

Para compreender a distinção esquemático versus assertório é necessário compreender a distinção entre axiomas esquemáticos versus axiomas assertórios. Axiomas assertórios são verdades básicas, seus termos primitivos possuem significados determinados que contribuem para a acima mencionada verdade dos axiomas; em suma, como o nome sugere, esse tipo de axioma enuncia verdades acerca de um dado domínio. Os axiomas de teorias não-algébricas, tais como aritmética, geometria Euclidiana e teoria de conjuntos, são tradicionalmente assim entendidos. Já os axiomas esquemáticos não são verdades básicas, e seus termos primitivos falham em ter um significado determinado, adquirindo qualquer significado somente no contexto de uma dada interpretação, são apenas esquemas, “andaimes”, nos diz meramente o que é ser uma estrutura de um dado tipo, por exemplo, o que é ser um grupo, ou um anel.

Particularmente, os axiomas esquemáticos são neutros no que diz respeito ao status ontológico. Essa distinção remonta ao famoso debate entre Frege e Hilbert acerca da concepção de sistemas axiomáticos. Na teoria de conjuntos os axiomas são assertórios, ou seja, frequentemente a teoria inicia com axiomas existenciais, por exemplo, “há um conjunto infinito”, e deriva conjuntos adicionais por meio de axiomas tais como “cada conjunto tem um conjunto potência” etc., construindo, assim, um universo de objetos matemáticos, a saber, conjuntos. Os axiomas da teoria das categorias, por exemplo, “cada seta tem um domínio e um codomínio” não são assertórios, ou seja, não devem ser entendidos da mesma forma que o axioma “cada conjunto tem um conjunto potência”, isto é, os axiomas categoriais não são assertórios, são esquemáticos.

Mas o que isso tem a ver com o tema da presente dissertação? Absolutamente tudo! Como dito, sem essa distinção tudo seria um equívoco. Por exemplo, quando eu for definir categorias e as demais construções categoriais falarei muito em ‘propriedades’; então, seria no mínimo estranho que uma dissertação que apresenta um tipo de nominalismo utilizasse ‘propriedades’ como um realista.

Entretanto, quando eu utilizo o termo ‘propriedade’, estou me referindo a propriedades esquemáticas, ou seja, propriedades que não implicam ou se comprometem ontologicamente com nenhum tipo de entidade. Tal como falei acima, essas propriedades são apenas esquemas, “andaimes”, nos dizem apenas o que é ser uma estrutura de um dado tipo, nada mais. Assim, ‘propriedade’ nas definições e construções categoriais que serão realizadas adiante sempre se referirá a propriedades esquemáticas, e não assertórias.

Note, portanto, que a teoria das categorias é essencial para uma abordagem esquemática da questão. Qualquer outra teoria matemática implicaria o comprometimento ontológico com algum tipo de entidade. Mas, então, do que adianta ter todo um trabalho para tratar o Problema dos Universais se a ferramenta utilizada está até o pescoço comprometida ontologicamente com diversas entidades? Assim, para que possamos estar despreocupados quanto a comprometimentos indesejados, devemos pagar o preço de usar uma teoria que exige bastante no quesito formal. Entretanto, como dizia Bertrand Russell, não espere uma solução simples para um problema complexo. Então, tenha em mente que nós necessitamos da teoria das categorias para que nós possamos trabalhar no âmbito esquemático e evitar comprometimentos ontológicos indesejados que, de outra forma, seriam inevitáveis.

2.3.2 Esboço intuitivo da ideia

No entanto, o viés esquemático da minha abordagem não serve apenas para evitar os comprometimentos ontológicos indesejados; mas é a noção principal do nominalismo que apresento aqui. De fato, a ideia básica é chegar até o esquema de uma sentença tal como “a é F”, e a partir disso mostrar como nós podemos raciocinar e falar sobre propriedades sem nos comprometer ontologicamente com elas. O que nós temos em mente é um processo de categorificação de sentenças a fim de, como dito, chegarmos até o seu esquema. Isso significa que podemos responder à questão: em virtude de um particular tem múltiplas propriedades? Essa questão deve, então, assumir a sua forma mais nominalista: como podemos raciocinar e falar sobre propriedades sem que para isso tenhamos de nos comprometer ontologicamente com universais? Todo o trabalho desta dissertação se resume a uma resposta a essa questão.

O esboço do que tenho em mente é como segue. Por exemplo, para saber em virtude de que o predicado F é atribuído a a e a b, onde a, b são distintos, nós devemos primeiro chegar até o esquema das sentenças "a é F" e "b é F". Vamos denotar esses esquemas por E_F^a e E_F^b, respectivamente. Nós, então, devemos estabelecer uma seta entre os esquemas E_F^a e E_F^b tal que "a é F" é verdadeira porque $E_F^a \rightarrow E_F^b$, e "b é F" é verdadeira porque $E_F^b \rightarrow E_F^a$. Mas isso não é tudo. Será definida uma maneira de chegar a uma sentença "u é F" e ao seu esquema E_F^u, tal que para qualquer x, "x é F" é verdadeira se, e somente se, $E_F^x \rightarrow E_F^u$. Assim, um mesmo predicado F é atribuído aos termos distintos $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ se, e somente se, existe um a_i, $1 \leq i \leq n-1$, tal que para qualquer a_j, $1 \leq j \leq n-1$, $E_F^{a_j} \rightarrow E_F^{a_i}$. Note que em algum momento nós teremos $j = i$, pois a definição será dada de tal modo que para qualquer a_j, $1 \leq j \leq n-1$, $E_F^{a_j} \rightarrow E_F^{a_j}$. Mas isso irá concordar exatamente com as nossas intuições. Por exemplo, nós podemos dizer que um objeto x é semelhante a um objeto y se, e somente se, $E_F^x \rightarrow E_F^y$ e $E_F^y \rightarrow E_F^x$.

Note que a perspectiva utilizada no esboço da minha ideia, exposto no parágrafo anterior, está no formato *One over Many*, e já foi especificado que a perspectiva correta do Problema dos Universais diz respeito ao *Many over One*. Entretanto, a escolha de colocar o esboço, bem como a ideia na íntegra, que será apresentada à frente, na forma do *One over Many* é apenas a título de uma melhor compreensão intuitiva da ideia. Todos os resultados podem ser traduzidos naturalmente para a forma do *Many over One*, por exemplo, múltiplos predicados $F, G, H, \dots$ são atribuído a a, isto é, "a é F" é verdadeira, "a é G" é verdadeira, "a é G" é verdadeira,... porque existem setas $E_F^a \rightarrow E_F^u$, $E_G^g \rightarrow E_G^u$, $E_H^a \rightarrow E_H^u$,..., onde E_F^u, E_G^u, E_H^u,... são os esquemas tais que para qualquer x, "x é F" é verdadeira se, e somente se, $E_F^x \rightarrow E_F^u$, "x é G" é verdadeira se, e somente se, $E_G^x \rightarrow E_G^u$, "x é H" é verdadeira se, e somente se, $E_H^x \rightarrow E_H^u$,... .

Note, também, que o fato de que $E_F^x \rightarrow E_F^y$ e $E_F^y \rightarrow E_F^x$ não é o que torna o objeto x semelhante ao objeto y, e nem a semelhança é o que faz como que x e y sejam, por exemplo, F. Eu não estou querendo aqui explicar como e por que o objeto x é F. Isso ficará mais claro no próximo parágrafo.

Dando continuidade ao esboço que tenho em mente, a primeira coisa que deve ser enfatizada é que eu não estou utilizando nem a estratégia (ON) nem a estratégia (OA). Note que eu não estou negando que há universais, o que estou fazendo é afirmando que a filosofia não tem as ferramentas necessárias para tratar essa questão. Mas, o ponto importante no fato de que não estou utilizando a estratégia (ON) é que eu desenvolvi uma estratégia de tal modo que se há ou não universais se torna completamente irrelevante para respondermos à questão para a qual o filósofo tem as ferramentas, ou seja, a de saber como podemos raciocinar e falar sobre propriedades sem que para isso tenhamos que nos comprometer ontologicamente com universais.

Alguém poderia argumentar que eu estou utilizando a estratégia (ON), já que estou desenvolvendo uma maneira de evitar universais. Sim, eu quero evitar universais, mas eu não estou argumentando que tudo o que há são particulares. Nem eu, nem nenhum filósofo, pode afirmar isso. A estratégia (ON) não é apenas evitar universais, mas negar a existência de universais afirmando que tudo o que há são particulares. Mas, o filósofo não pode afirmar ou negar isso, pelo simples fato de ele não possuir as ferramentas para tal. Quem deve concluir se há ou não apenas particulares é a ciência, pois esta sim possui as ferramentas. Ao filósofo cabe encontrar maneiras de libertar a linguagem dos comprometimentos ontológicos, justamente para que o uso da linguagem não interfira nas investigações científicas: a linguagem deve ser ontologicamente neutra. E essa neutralidade será possível se tivermos uma maneira de esquematizar as sentenças, ou seja, chegarmos até os seus esquemas, e se tivermos uma maneira esquemática de relacionar esses esquemas e tirar conclusões a partir dessas relações esquemáticas.

Assim, embora eu concorde com Rodriguez-Pereyra sobre o Problema dos Universais ser um problema sobre os truthmakers das sentenças (5) e (6), e que a perspectiva correta do Problema dos Universais é a forma *Many over One*, e não a forma *One over Many*, a minha posição difere fundamentalmente da sua no seguinte sentido: enquanto Rodriguez-Pereyra quer encontrar uma maneira de mostrar como é possível que um particular possua múltiplas propriedades diferentes, o que eu quero é simplesmente encontrar uma maneira de falar sobre um particular que possui múltiplas propriedades diferentes sem, contudo, precisar levantar a questão sobre como ou por que tal particular possui múltiplas propriedades diferentes. Em outras palavras, o que eu quero é encontrar uma maneira de falar sobre múltiplas propriedades diferentes sem precisar me comprometer ontologicamente com múltiplas propriedades, e não explicar por que ou como um particular possui múltiplas propriedades diferentes.

Da mesma forma, e talvez com ainda mais eficácia, o argumento acima pode ser utilizado para mostrar que não estou usando a estratégia (OA). Pois é muito óbvio que não estou afirmando que existem entidades tais como universais, mas que, na verdade, são particulares. A minha estratégia é, como já deve ter ficado evidente, a neutralidade ontológica. É importante deixar claro, a fim de evitarmos compreensões errôneas, que a neutralidade ontológica a que me refiro não quer dizer que, no fim das contas, o problema dos universais que concerne à filosofia permanece em aberto, pois ele não permanece. Dado tudo o que expusemos acima, fica fácil perceber qual é o problema dos universais que compete à filosofia resolver: nós podemos raciocinar e falar sobre propriedades sem que para isso tenhamos que nos comprometer ontologicamente com universais, ou isso é impossível? Ou seja, é impossível raciocinar e falar sobre propriedades sem postular universais? Para esse problema dos universais nós damos uma resposta nesta dissertação, a qual, como já deve ter ficado claro, é: Sim, nós podemos raciocinar e falar sobre propriedades sem que para isso tenhamos que nos comprometer ontologicamente com universais. Se universais existem ou não, se apenas existem particulares ou não, são questões para a ciência responder.

É bom enfatizar, também, que uma das principais definições que apresentarei nesta dissertação é uma categoria cujos objetos são formas esquemáticas de sentenças, e as setas são relações esquemáticas entre esses esquemas, sendo possível tirarmos certas conclusões dessas relações esquemáticas. Grosso modo, uma categoria consiste de objetos e setas regidos por certos axiomas. Não será necessário entrar em detalhes aqui, quero apenas tentar passar da maneira mais clara e intuitiva possível o que tenho em mente. Nessa categoria nós teremos como objetos esquemas tais como E_F^a, e, claro, setas entre esses esquemas. Essas setas serão relações esquemáticas que nos permitirão concluir certas coisas dos esquemas em questão, e serão essas conclusões que nos permitirão responder afirmativamente a questão sobre universais apresentada acima. O objetivo é que os esquemas nos permitam responder questões sobre as sentenças, tais como "por que 'a é F'?", já esboçadas acima.

2.3.3 Três bases principais

A distinção "esquemático versus assertório" já foi explicada, e já deixei claro que essa distinção é a base sobre a qual repousa toda a teoria que será apresentada nesta dissertação. Ficou claro também que utilizar a teoria das categorias é essencial para mantermos tudo no âmbito esquemático. Assim, a partir do que já foi exposto, acredito que ficou claro que a distinção "esquemático versus assertório" é a primeira base e o principal motivo que justifica o uso da teoria das categorias. A segunda base e o segundo principal motivo que justifica o uso da teoria das categorias é que ela nos permite criar um ambiente no qual todas as nossas definições estão interligadas, bem como possuem um objetivo definido dentro desse ambiente. Sendo mais claro, nós não precisaremos de nada *ad hoc* para que a teoria aqui proposta funcione. Assim, por exemplo, e como já esbocei brevemente acima, será necessário a presença de um esquema E_F^u tal que para qualquer x, “x é F” é verdadeira se, e somente se, $E_F^x \to E_F^u$. Na categoria que será definida, isso equivale a dizer que E_F^u é um objeto terminal. Será necessário, também, a presença de um procedimento que “produza” E_F^u; mas isso, na categoria que será definida, equivale a dizer que devemos ter um procedimento que nos dê o limite de um dado funtor. Ou seja, tudo o que é necessário para que a teoria proposta aqui funcione possui um correspondente categorial no ambiente que será definido, isto é, na categoria que será definida.

A terceira base e o terceiro principal motivo que justifica o uso da teoria das categorias é a capacidade que essa teoria possui de generalizar e abstrair. Antes de prosseguirmos, é bom ficar claro que o termo ‘abstrair’ aqui também é utilizado num sentido esquemático, e não no sentido de objeto abstrato. Como se pode ver, a terceira base é intimamente ligada à primeira e à segunda; mas, é bom que ela seja explanada separadamente, para que se torne intuitivamente clara. Sem a capacidade de generalização e abstração da teoria das categorias nós não poderíamos utilizar construções categoriais familiares e poderosas dentro da teoria proposta aqui. Por exemplo, é por ser suficientemente geral que a noção de um objeto terminal pode ser utilizada para definir o esquema E_F^u; e é por ser suficientemente geral que nós podemos usar o procedimento para encontrar o limite de um dado funtor na nossa categoria. Dessa forma, a teoria das categorias se torna essencial para os propósitos desta deste trabalho.

3 TEORIA DAS CATEGORIAS

3.1 Definições introdutórias

3.1.1 Um breve panorama histórico

A teoria das categorias teve seu germe na parceria entre os matemáticos Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane. Os dois trabalhavam juntos num problema em topologia algébrica formulado anteriormente por Borsuk e Eilenberg. Durante a colaboração, os métodos utilizados evidenciaram que muitos homomorfismos de grupo eram "naturais". Tal fato despertou nos dois colaboradores a necessidade de uma definição mais exata da expressão "isomorfismo natural", como eles mesmos afirmam: "Nós estamos agora em uma posição para dar um preciso significado ao fato de que os isomorfismos estabelecidos no capítulo V são todos 'naturais'." (EILENBERG; MAC LANE, 1942b, p. 815). No decorrer do trabalho em conjunto e dos resultados que conheciam, o fenômeno denominado por eles de 'naturalidade' mostrou-se comum em diferentes contextos, o que os motivou a escrever um pequena nota na qual introduzem, em geral, a noção de um funtor, e em particular, a noção de um isomorfismo natural. Por meio dessas noções, os dois queriam dar um significado preciso ao que é partilhado pelos isomorfismos naturais. Tal nota era uma base para uma teoria geral apropriada, entretanto, os isomorfismos naturais eram restritos à teoria dos grupos. No final da nota, Eilenberg e Mac Lane afirmam que a presença de isomorfismos naturais é requerida, também em outras áreas da matemática, pela estrutura axiomática geral (EILENBERG; MAC LANE, 1942a, p. 537).

Dando continuidade às pesquisas, Eilenberg e Mac Lane escrevem em 1945 um artigo intitulado *General Theory of Natural Equivalences*. É um consenso a afirmação de que o nascimento da teoria das categorias se dá, oficialmente, nesse artigo. O objetivo principal era pormenorizar o que foi esboçado na nota, ou seja, apresentar um framework axiomático geral a fim de definir a noção de isomorfismo natural, que por sua vez seria utilizada para 'capturar' aquilo que é compartilhado pelas estruturas de áreas distintas da matemática. A noção de categoria surge justamente da necessidade de uma definição precisa da noção de isomorfismo natural: para levar a cabo essa empreitada, funtores tiveram que ser definidos numa completa generalidade no artigo de 1945, e para atingir essa completa generalidade foi necessária a definição de categorias.

Aqui é como o próprio Mac Lane explica: "nós tivemos que descobrir a noção de uma transformação natural. Que por sua vez obrigou-nos a olhar para functores, que por sua vez nos fez olhar para categorias." (MAC LANE, 1996, p. 136). E ele diz também que "[...] o desenvolvimento conceitual da topologia algébrica inevitavelmente descobriu as três noções básicas: categoria, funtor e transformação natural." (MAC LANE, 1996, p. 130).

Algumas dificuldades foram imediatamente percebidas por Eilenberg e Mac Lane. É importante salientar, antes de prosseguirmos, que a noção de funtor para os dois era como sendo a de função, e, como tal, necessitava de domínios e codomínios bem definidos; assim, a noção de categoria teve que ser introduzida justamente para satisfazer essa restrição na definição de funtor. Dito isso, fica fácil ver o que Eilenberg e Mac Lane logo perceberam: construções tais como a categoria de todos os grupos, ou a categoria de todos os espaços topológicos, não são legitimadas se o ponto de vista for a partir da teoria de conjuntos padrão. Vejamos, nas próprias palavras dos dois, como eles, inicialmente, objetivaram driblar essa dificuldade:

> ... Todo o conceito de uma categoria é, essencialmente, um auxiliar, os nossos conceitos básicos são essencialmente aqueles de um functor e de uma transformação natural ... A ideia de uma categoria é exigida apenas pelo preceito de que cada função deve ter uma classe definida como domínio e uma classe definida como codomínio, as categorias são fornecidas como os domínios e codomínios de functores. Assim, pode-se abandonar o conceito de categoria completamente e adotar um ponto de vista ainda mais intuitiva, em que um functor tal como "Hom" não está definido sobre a categoria de 'todos' os grupos, mas para cada par especial de grupos que podem ser dados. O ponto de vista seria suficiente para as aplicações, uma vez que nenhum dos nossos empreendimentos envolvem construções elaboradas sobre as próprias categorias (EILENBERG; MAC LANE, 1945, p. 247, tradução nossa).

Fica claro, a partir da citação exposta acima, que em 1945 a noção de categoria para Eilenberg e Mac Lane não era nada mais do que um dispositivo heurístico, algo completamente descartável para o bom funcionamento das aplicações que os dois tinham em mente naquele momento. De fato, de 1945 até 1957-1958 essa era, grosso modo, a posição subjacente ao status de categorias. Mesmo assim, Eilenberg e Mac Lane não estavam completamente satisfeitos com essa solução intuitiva, tendo em vista que logo passam a buscar alternativas. Por exemplo, uma alternativa seria a adoção de NBG como um framework e a utilização da sua distinção entre conjuntos e classes, sendo possível, dessa forma, afirmar que a categoria de todos os grupos é uma classe.

A adoção dessa alternativa suscitaria a preocupação no que diz respeito à legitimidade das operações realizadas nessas classes. No entanto, na prática, em decorrência da simplicidade dessas operações nos primeiros, pelo menos, dez anos, tal legitimidade não era uma grande preocupação no uso da alternativa NBG. Diversos livros na década de sessenta adotaram a alternativa segunda a qual categorias grandes devem ser tomadas como classes (EILENBERG; STEENROD, 1952). É importante salientar, também, que no livro de Cartan and Eilenberg (1956) sobre álgebra homológica, que teve bastante influência no que diz respeito ao papel de certos funtores, a questão sobre o que são categorias sequer é levantada, todo o livro é desenvolvido sem a definição de categorias. Em particular, os livros de Eilenberg e Steenrod, e de Cartan e Eilenberg foram cruciais para o desenvolvimento posterior da teoria das categorias.

Até aqui fica óbvio que a teoria das categorias não era vista ainda como um campo de investigação autônomo, mas, apenas como uma linguagem acessível, uma linguagem de orientação. As coisas começaram a mudar em meados dos anos cinquenta, e não pelas mãos dos dois fundadores, mas pelos trabalhos de Alexander Grothendieck e Daniel Kan, que foram publicados, respectivamente, em 1957 e 1958. Em seu, hoje clássico, artigo *Sur quelques points d'algèbra homologique,* Grothendieck definiu as categorias abelianas, além de introduzir uma hierarquia de axiomas, os quais categorias abelianas podem ou não satisfazer, que permite determinar o que se pode construir e/ou provar nesses contextos. Nesse artigo, ele generaliza vários resultados, como, por exemplo, os trabalhos de Cartan e Eilenberg. Mas o que nos importa aqui é que é justamente no contexto das categorias abelianas, tal como definido por Grothendieck, que a teoria das categorias adquiri a generalidade que conhecemos hoje. Ou seja, nesse contexto, aquilo sobre o que o sistema estudado trata não tem a menor importância.

A ideia é mover a investigação para um nível comum de descrição, no caso, o das categorias abelianas e suas propriedades, e por meio de funtores estabelecer que as relações de determinados objetos categóricos $a, b, c, \dots$ entre si são as mesmas que as relações de determinados objetos categóricos $o, p, q, \dots$ entre si. Isso significa que a caracterização de um tipo de estrutura se dá por meio dos padrões dos funtores existentes entre objetos, sem, contudo, qualquer necessidade de especificação dos objetos e setas. Como McLarty explica:

> [...] conceitualmente isso não é como os axiomas para grupos abelianos. Esta é uma descrição axiomática da categoria toda de grupos abelianos e outras categorias similares. Nós não prestamos atenção ao que os objetos e morfismos são, somente a quais padrões de setas existem entre os objetos. (MCLARTY, 1990, p. 356, tradução nossa).

As implicações disso são óbvias. Em particular, isso influenciou diretamente na alternativa NBG que, como vimos, até então era padrão entre os que utilizavam a teoria das categorias, tendo em vista que se nós não precisamos nos preocupar com a questão sobre a natureza das setas e objetos para caracterizar uma dada categoria, nós não precisamos da teoria de conjuntos NBG para responder essa questão. De fato, como afirma McLarty sobre as categorias abelianas: "os axiomas básicos permitem executar as construções básicas da álgebra homologica e provar os teoremas básicos, sem o uso da teoria de conjuntos em absoluto." (MCLARTY, 1990, p . 356).

Em 1958, Kan publicou um artigo intitulado *Functors involving c.s.s. complexes*, no qual unifica vários resultados do seu trabalho em homotopia. Para levar a cabo tal unificação, Kan utilizou a noção de funtor adjunto, introduzida por ele em 1956. Entretanto, obviamente, a unificação dos seus resultados publicados em *Functors involving c.s.s. complexes* só faria sentido com uma explicação da ferramenta utilizada, ou seja, com uma explicação da noção de funtor adjunto. Para cumprir esse propósito, Kan publica um artigo separado, um pouco antes da publicação de *Functors involving c.s.s. complexes*, intitulado simplesmente *Adjoint functors*. O que nos importa aqui é que a noção de um funtor adjunto acabou se mostrando para Kan, enquanto escrevia *Adjoint functors*, uma noção absolutamente geral. Em particular, Kan observou que a noção de um funtor adjunto estava conectada com outras noções categóricas fundamentais, tais como as noções de limite e colimite. A noção de um funtor adjunto tornou-se a noção fundamental na teoria das categorias, como afirma Mac Lane: “o conceito sobre o qual uma teoria completa e autônoma poderia ser construída e desenvolvida.” (MAC LANE, 1971, p. 103).

3.1.2 Visão geral

Antes de entrarmos nas definições categóricas em si, será útil darmos uma visão bem geral de como a teoria das categorias funciona. A teoria parte da ideia de que propriedades de sistemas matemáticos podem ser representados por meio de diagramas de setas, tornando possível, como veremos, unificar e simplificar essas propriedades.

Um exemplo bastante simples pelo qual podemos começar é a representação da composição de funções que pode ser vista como

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & Z \end{tikzcd}$$

o diagrama acima, que comuta quando $h = g \circ f$. Pela simples substituição dos conjuntos X, Y e Z pelos espaços topológicos X, Y e Z, nós temos que f, g e h são mapeamentos contínuos, e X, Y e Z como grupos, nós temos f, g e h como homomorfismos, o que mostra que esse mesmo diagrama pode ser aplicado em outros contextos matemáticos. O diagrama é visto, então, como uma propriedade universal dos contextos que envolvem espaços topológicos, grupos, conjuntos e as respectivas composições de mapeamentos contínuos, homomorfismos e funções.

De fato, como dito, essa propriedade universal dada pelos diagramas pode representar propriedades de diversas construções, vamos a um exemplo um pouco mais complexo. Seja X, Y conjuntos quaisquer, o produto cartesiano $X \times Y$ é definido como todos os pares ordenados $<x, y>$ tal que $x \in X$ e $y \in Y$. Agora, considere o seguinte: as funções $p: X \times Y \longrightarrow X$, $q: X \times Y \longrightarrow Y$ são as projeções $<x, y> \longmapsto x$, $<x, y> \longmapsto y$, de modo que qualquer função $h: C \longrightarrow X \times Y$ é unicamente determinada pelas compostas $p \circ h$ e $q \circ h$. De modo análogo, sejam as funções $f: C \longrightarrow X$ e $g: C \longrightarrow Y$, existe, então, uma única função $h: C \longrightarrow X \times Y$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & X \times Y \arrow[l, "p"] \arrow[r, "q"'] & Y \end{tikzcd}$$

comuta. Ou seja, $h(c) = \langle f(c), g(c) \rangle$, para cada $c \in C$.

Nós podemos ver facilmente que dados X e Y e dado o par $\langle f, g \rangle$ de um conjunto qualquer, no caso C, para X e Y, tal par fatora-se unicamente por meio de $\langle p, q \rangle$ (via h), o que, como veremos à frente, faz de $\langle p, q \rangle$ o universal dentre os pares arbitrários de funções de um conjunto arbitrário * para X e Y. Essa propriedade descreve unicamente (a menos de bijeção) o produto cartesiano $X \times Y$. Tal como na primeira propriedade acima, podemos utilizá-la nos contextos dos espaços topológicos e dos grupos.

3.1.3 Categorias por axiomas

Categorias podem ser descritas sem a necessidade de qualquer menção a conjuntos, somente por meio de axiomas, é o que usualmente é chamado de "metacategorias". A noção utilizada para esse fim é a de (meta) grafo. Um metagrafo tem objetos $a, b, c, \ldots$, setas $f, g, h, \ldots$, como constituintes, juntamente com duas operações chamadas domínio e codomínio que, respectivamente, atribui a cada seta f um objeto $a = \operatorname{dom} f$, e a cada seta f um objeto $b = \operatorname{cod} f$. Tais operações são representadas como segue: $f: a \longrightarrow b$ ou $a \xrightarrow{f} b$. Um grafo finito é exibido como segue: $* \longrightarrow * \longrightarrow *$ ou $* \rightrightarrows *$.

Podemos agora definir uma metacategoria, que nada mais é do que um metagrafo juntamente com duas operações adicionais, a saber, as operações identidade e composição que, respectivamente, atribuem a cada objeto a uma seta[8] $id_a = 1_a: a \to a$, e a cada par de setas $\langle f, g \rangle$ com $\operatorname{dom} g = \operatorname{cod} f$ uma seta $g \circ f: \operatorname{dom} f \to \operatorname{cod} g$. Essas duas operações adicionais obedecem a dois axiomas:

- Sejam $f: a \to b,\ g: b \to c,\ k: c \to d$, temos sempre que

$$k \circ (g \circ f) = (k \circ g) \circ f \qquad \text{(AS)}$$

ou seja, a operação de composição é associativa, o que pode ser representado diagramaticamente da seguinte forma:

[8] As duas notações para a seta identidade serão utilizadas.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "k \circ (g \circ f) = k \circ (g \circ f)"] \arrow[d, dotted, "f"'] \arrow[dr, dotted, "g \circ f" near start] & d \\
b \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, "k \circ g"' near end] & c \arrow[u, "k"']\, .
\end{tikzcd}$$

- Dadas as setas $f : a \to b$ e $g : b \to c$, juntamente com a seta identidade 1_b, temos

$1_b \circ f = f$ e $g \circ 1_b = g$ (UN)

ou seja, 1_b atua como uma identidade para a operação de composição. Representamos diagramaticamente isso da seguinte forma:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & b \arrow[d, "1_b"] \arrow[dr, "g"] & \\
 & b \arrow[r, "g"'] & c\, .
\end{tikzcd}$$

3.1.4 Categorias

Uma categoria é distinta de uma metacategoria pelo fato de a primeira ser uma interpretação da segunda (dos axiomas) com teoria de conjuntos. Em primeiro lugar introduziremos a noção de um grafo dirigido que é a seguinte: um conjunto O de objetos, um conjunto A de setas, e duas funções

$$A \underset{cod}{\overset{dom}{\rightrightarrows}} O\, . \qquad (3.1.4.1)$$

Temos o seguinte conjunto como o conjunto de pares componíveis de setas no grafo:

$A \times_O A = \{\langle g, f\rangle |\ g, f \in A\ e \ \mathrm{dom}\ g = \mathrm{cod}\ f\}$, que é o "produto sobre O".

Assim, uma categoria é um grafo com as seguintes funções, respectivamente, identidade

$$O \xrightarrow{id} A \qquad\qquad A \times_O A \xrightarrow{\circ} A \tag{3.1.4.2}$$

$$c \longmapsto id_c \qquad\qquad < g, f > \longmapsto g \circ f$$

tais que

$$\mathrm{dom}(id_a) = a = \mathrm{cod}(id_a),\ \mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}\, f, \text{ e } \mathrm{cod}(g \circ f) = \mathrm{cod}\ g \tag{3.1.4.3}$$

para todo $a \in O$, $\langle g, f\rangle \ \in A \times_O A$, e tais que (AS) e (UN) valem.

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria qualquer, como usual, nós deixamos de lado as letras A, O e escrevemos

$$c \in \mathcal{C} \text{ e } f \text{ em } \mathcal{C} \tag{3.1.4.4}$$

para indicar que c é um objeto da categoria $\mathcal{C}$ e f é uma seta da mesma categoria. Nós também escrevemos

$$\mathrm{hom}(b, c) = \{f \mid f \text{ em } \mathcal{C}, \mathrm{dom}\, f = b, \mathrm{cod}\, f = c\} \tag{3.1.4.5}$$

para o conjunto de setas de b para c.

Deixe-nos, antes de prosseguir, dar aqui a definição teórico-categórica abstrata de uma noção importante. Tal definição é abstrata no sentido de fazer uso apenas das noções teórico-categóricas sem mencionar informações adicionais sobre objetos e setas.

Definição 3.1.4.6. Uma seta $f: a \to b$ em uma categoria qualquer $\mathcal{C}$ é chamada um isomorfismo (ou invertível) se há uma seta $g: b \to a$ em $\mathcal{C}$ tal que $g \circ f = 1_a$ e $f \circ g = 1_b$. Uma seta g relacionada a f pela satisfação da equação acima é chamada uma inversa para f. Dois objetos a e b são ditos isomórficos se existe pelo menos um isomorfismo $f: a \to b$, e tal fato é denotado por $a \cong b$. A relação de isomorfismo entre objetos é obviamente reflexiva, simétrica e transitiva.

Proposição 3.1.4.7. Se $g: b \to a$ é uma inversa para $f: a \to b$, então, ela é única, e é denotada por f^{-1}.

Prova. Digamos que exista uma seta $k: b \to a$ tal que $k \circ f = 1_a$, $f \circ k = 1_b$ e $g \neq k$. Mas, $k = 1_a \circ k = (g \circ f) \circ k = g \circ (f \circ k) = g \circ 1_b = g$, contradizendo a hipótese de que $g \neq k$.

■

3.1.5 Categorias usando conjuntos-hom

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pequena, e a, b objetos de $\mathcal{C}$. Para tais objetos a, b o conjunto-hom

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(a, b) = \{f \mid f \text{ é uma seta } f: a \to b \text{ em } \mathcal{C}\}$$

é o conjunto de todas as setas de $\mathcal{C}$ com domínio a e codomínio b. A notação para o conjunto-hom$_{\mathcal{C}}$ varia na literatura: $\mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(a, b) = \mathcal{C}(a, b) = \mathrm{hom}(a, b) = (a, b) = (a, b)_{\mathcal{C}}$. Nesta dissertação nós utilizaremos a que melhor se encaixe no contexto e espaço, ou seja, não ficaremos com uma notação fixa para conjuntos-hom.

Definição 3.1.5.1. A definição de uma categoria pequena em termos de conjuntos-hom é dada abaixo:

(i) Um conjunto de objetos $a, b, c, \ldots$, esse conjunto é comumente denotado por $Ob\mathcal{C}$;

(ii) Uma função que atribui a cada par ordenado $\langle a, b \rangle$ de objetos um conjunto hom (a, b);

(iii) Para cada tripla ordenada $\langle a, b, c \rangle$ de objetos uma função

$$\mathrm{hom}\,(b, c) \times \mathrm{hom}\,(a, b) \longrightarrow \mathrm{hom}\,(a, c)$$

$$\langle g, f \rangle \longmapsto g \circ f$$

para $g \in \mathrm{hom}\,(b, c)$ e $f \in \mathrm{hom}\,(a, b)$, chamada composição;

(iv) Para cada objeto b, um elemento $1_b \in \text{hom}\,(b, b)$, chamado a identidade de b.

Tal que satisfazem os axiomas (AS) e (UN). Além disso, a definição em termos de conjuntos-hom requer que um axioma "disjuntador" adicional seja satisfeito:

(v) Se $\langle a, b\rangle \neq \langle a', b'\rangle$, então $\text{hom}(a, b) \cap \text{hom}(a', b') = \emptyset$, onde $\emptyset$ é o conjunto vazio.

Em termos de comutação de diagramas, o axioma da associatividade (AS) requer que o seguinte diagrama comute:

$$\begin{tikzcd}
\text{hom}(c,d) \times \text{hom}(b,c) \times \text{hom}(a,b) \arrow[r] \arrow[d] & \text{hom}(b,d) \times \text{hom}(a,b) \arrow[d] \\
\text{hom}(c,d) \times \text{hom}(a,c) \arrow[r] & \text{hom}(a,d)\ .
\end{tikzcd}$$

Exemplo 3.1.5.2.

0 é a categoria vazia (sem objetos, e sem setas);

1 é a categoria ↻ com apenas um único objeto e uma única seta (a seta identidade);

2 é a categoria ↻→↻ com apenas dois objetos a, b e uma única seta $a \to b$ não-trivial (ou seja, exceto as duas setas identidades);

3 é a categoria com três objetos e cujas setas não-triviais são dadas como no triangulo abaixo:

$$\begin{tikzcd} & * \arrow[dr] & \\ * \arrow[ur] \arrow[rr] & & * \end{tikzcd}$$

$\downdownarrows$ é a categoria com dois objetos a, b e apenas duas setas não-triviais $a \rightrightarrows b$. Tais setas são comumente chamadas de setas paralelas.

Em todos os casos citados acima, existe apenas uma única definição possível de composição[9].

Ens é a categoria definida como segue: se Vé qualquer conjunto de conjuntos, a categoria $\mathbf{Ens}_V$ é a categoria cujos objetos são todos os conjuntos $X \in V$, e cujas setas são todas as funções $f: X \to Y$, com a usual composição de funções e a usual seta identidade de funções.

Definição 3.1.5.3. Uma categoria $\mathcal{C}$ é chamada uma categoria discreta quando cada seta em $\mathcal{C}$ é uma seta identidade.

Da definição acima se segue que cada conjunto X é o conjunto de objetos de uma categoria discreta, ou seja, para cada $x \in X$ nós temos a seta identidade $x \to x$. Assim, cada categoria discreta é determinada pelo seu conjunto de objetos. Dessa forma, categorias discretas são apenas conjuntos. Note que a categoria vazia **0** é, portanto, o conjunto vazio.

3.1.6 Funtores (Covariantes)

Grosso modo, funtores são transformações entre categorias que preservam domínios, codomínios, identidades e composições.

Definição 3.1.6.1. Dadas duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ arbitrárias, um funtor (covariante) $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é uma transformação consistindo de duas funções adequadamente relacionadas: a função objeto F, que atribui a cada objeto $c$de $\mathcal{C}$ um objeto Fc de $\mathcal{C}$; e a

---

[9] Veja Mac Lane (p. 11)

função seta, também denotada por F, que atribui a cada seta $f: c \to c'$de $\mathcal{C}$ uma seta $Ff: Fc \to Fc'$ em $\mathcal{D}$[10], de tal forma que satisfaz as seguintes condições:

(F1) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ para todo par (g, f) de setas de $\mathcal{C}$ cuja composição $g \circ f$ está definida;

(F2) $F(1_c) = 1_{F(c)}$, para todo objeto c de $\mathcal{C}$.

Uma explicação mais clara sobre **(F1)** será útil. Tal condição afirma que sempre que o diagrama abaixo comuta em $\mathcal{C}$,

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & a' \arrow[d, "g"] \\ & a'' \end{tikzcd}$$

ou seja, $h = g \circ f$, o diagrama abaixo também comuta em $\mathcal{D}$,

$$\begin{tikzcd} F(a) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, "F(h)"'] & F(a') \arrow[d, "F(g)"] \\ & F(a'') \end{tikzcd}$$

ou, seja, $F(h) = F(g) \circ F(f)$. Então, a F-imagem de uma composição de duas setas é a composição das suas F-imagens.

Definição 3.1.6.2. Um funtor $F: \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ é pleno (*full*) quando para todo par c, c' de objetos de $\mathcal{C}$ e para toda seta $g: Fc \to Fc'$ de $\mathcal{B}$, há uma seta $f: c \to c'$ de $\mathcal{C}$ com $g = Ff$. Claramente, a composição de dois funtores plenos é um funtor pleno. Um funtor $F: \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ é fiel (*faithful*) quando para todo par c, c' de objetos de $\mathcal{C}$ e para todo par $f_1, f_2: c \to c'$ de setas paralelas de $\mathcal{C}$ a igualdade $Ff_1 = Ff_2: Fc \to Fc'$ implica $f_1 = f_2$.

[10] Aqui, novamente não nos fixaremos numa única notação, utilizaremo $F(a), Fa$ ou $F(f), Ff$, ou seja, o uso ou não de parênteses vai depender, mais uma vez, do contexto e espaço.

Funtores podem ser descritos em termos de conjuntos-hom. Seja $F: \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ um funtor, a descrição de F usando conjuntos-hom apenas "reescreve" a função seta, a função objeto é a usual. A função seta é uma coleção de funções

$$F_{c,c'}: \hom_{\mathcal{C}}(c, c') \longrightarrow \hom_{\mathcal{B}}(Fc, Fc')$$

$$f \longmapsto Ff$$

para $f \in \hom_{\mathcal{C}}(c, c')$, tal que cada $F_{c,c} 1_c = 1_{Fc}$, e tal que cada diagrama

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathcal{C}}(c', c'') \times \hom_{\mathcal{C}}(c, c') \arrow[r] \arrow[d, "F_{c',c''} \times F_{c,c'}"'] & \hom_{\mathcal{C}}(c, c'') \arrow[d, "F_{c,c'}"] \\
\hom_{\mathcal{B}}(Fc', Fc'') \times \hom_{\mathcal{B}}(Fc, Fc') \arrow[r] & \hom_{\mathcal{B}}(Fc, Fc'')
\end{tikzcd},$$

sendo as setas horizontais a composição em $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, é comutativo.

Definição 3.1.6.3. Um funtor $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ é dito ser fiel se para todo o par de objetos a, a' de C a função $F_{a,a'}$ é injetora; pleno se para todo o par de objetos a, a' de C a função $F_{a,a'}$ é sobrejetora; injetivo em objetos se a respectiva função objeto é injetora; uma **imersão** se é fiel, pleno e injetivo em objetos.

Proposição 3.1.6.4. Sempre que $k: a \to a'$ é um isomorfismo de $\mathcal{A}$, então Fk é um isomorfismo de $\mathcal{B}$, para qualquer funtor $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Ou seja, preserva isomorfismos.

Prova. $F(k) \circ F(k^{-1}) = F(k \circ k^{-1}) = F(1_{a'}) = 1_{Fa'}$.

Da mesma forma, $F(k^{-1}) \circ F(k) = 1_{Fa}$. ■

3.1.7 Transformações Naturais

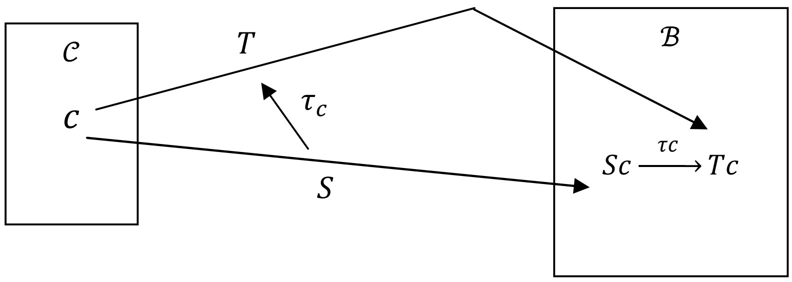
Para explicar a noção de transformação natural de forma intuitiva, deixe-nos considerar uma situação que surge frequentemente. Por exemplo, seja $\mathcal{C}$ uma categoria arbitrária, muitas vezes nos deparamos com uma determinada construção sobre $\mathcal{C}$ que se relaciona com outra determinada construção de maneira tal que é independente de objetos específicos e setas envolvidas. Em tal situação, a relação se dá entre as próprias construções. Para exemplificar, vamos considerar que $\mathcal{C}$ tem produtos, e vamos supor que a, b, c são objetos de $\mathcal{C}$. Agora, considere o seguinte: $(a \times b) \times c$ e $a \times (b \times c)$. Agora, note que existe um isomorfismo $h: (a \times b) \times c \to a \times (b \times c)$ que não depende da especificidade dos objetos a, b, c, ou seja, é independente do que são os objetos a, b, c. Mas, o que isso significa? Uma maneira de explicar é da seguinte forma: dada qualquer seta $f: a \to a'$ nós temos um quadrado comutativo como segue:

$$\begin{tikzcd}
(a \times b) \times c \arrow[r, "h_a"] \arrow[d] & a \times (b \times c) \arrow[d] \\
(a' \times b) \times c \arrow[r, "h_{a'}"'] & a' \times (b \times c)\,.
\end{tikzcd}$$

Como podemos ver, o isomorfismo acima é uma relação que se dá, na verdade, entre as construções $(- \times b) \times c$ e $- \times (b \times c)$, ou seja, o isomorfismo é independente da consideração sobre o que é tomado como argumento. Obviamente que o que estamos querendo dizer com "construção" é, claro, apenas um funtor, e o que estamos querendo dizer por "relação entre construções" é na verdade uma seta entre funtores. No nosso exemplo, o isomorfismo $(- \times b) \times c \cong - \times (b \times c)$ é um isomorfismo de funtores $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Se tomarmos os funtores $(- \times -) \times -: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ e $- \times (- \times -): \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ de três argumentos, o isomorfismo $(- \times -) \times - \cong - \times (- \times -)$ permanece de maneira análoga, nesse caso, um isomorfismo de funtores $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. É isso o que a definição de transformação natural captura de forma rigorosa.

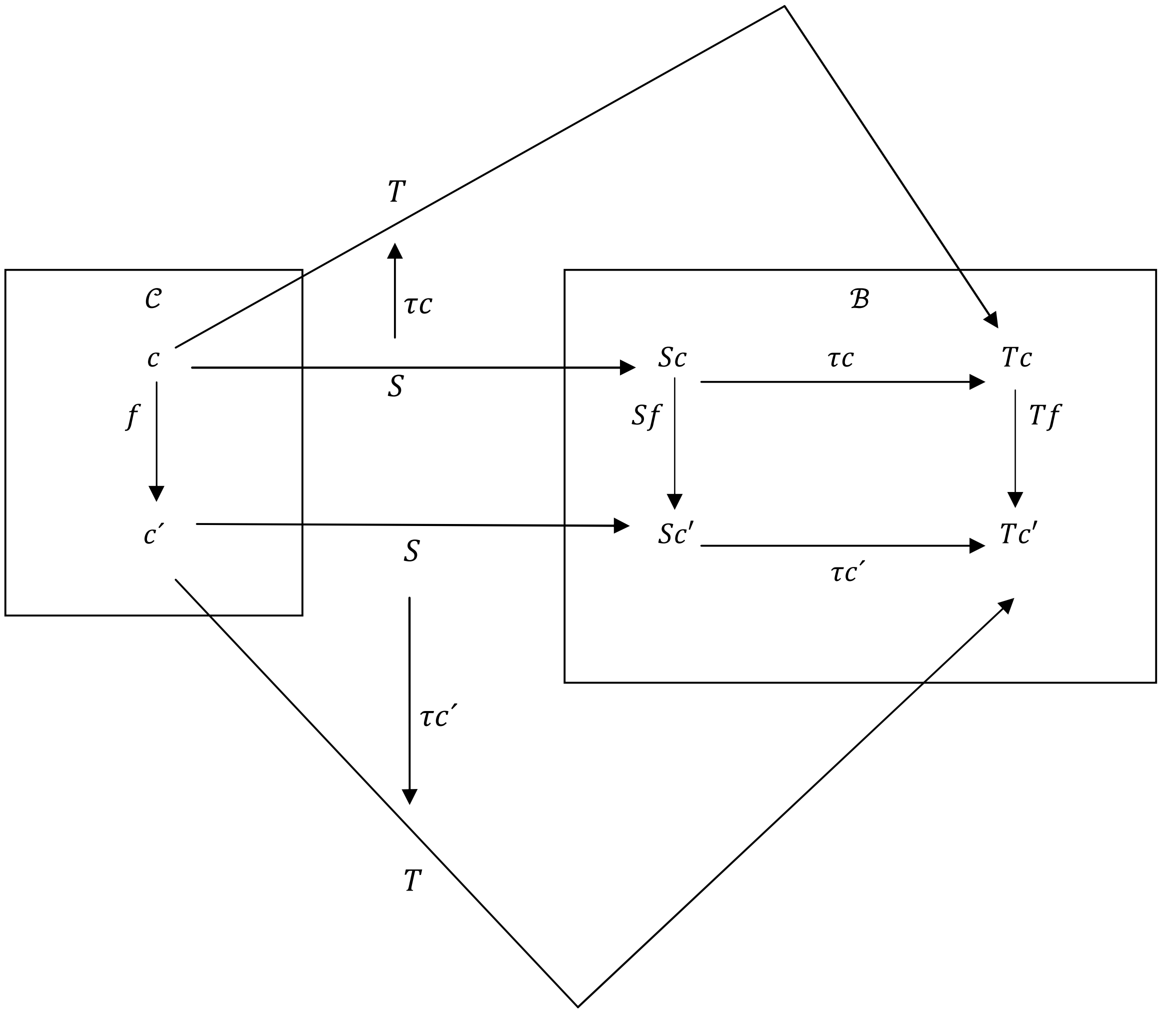
Definição 3.1.7.1. Dados dois funtores $S, T: \mathcal{C} \to \mathcal{B}$, uma transformação natural $\tau: S \dot{\to} T$ é uma função que atribui a cada objeto c de $\mathcal{C}$ uma seta $\tau_c = \tau c: Sc \to Tc$ de $\mathcal{B}$ de tal forma que cada seta $f: c \to c'$ em $\mathcal{C}$ produz um diagrama comutativo. Como pode ser visto, os funtores precisam possuir os mesmos domínios e codomínios. Deixe-nos pormenorizar um pouco mais essa noção.

- **Componentes:** cada objeto c de $\mathcal{C}$ é mapeado para uma seta $Sc \to Tc$ em $\mathcal{B}$ que são os componentes de τ em c. O seguinte diagrama mostra de forma mais intuitiva esse processo:



Isso é o que ocorre com os objetos da categoria domínio dos funtores $S, T: \mathcal{C} \to \mathcal{B}$. Agora vamos mostrar o que ocorre com a estrutura nessa categoria, para isso, devemos mostrar o que ocorre com as setas em $\mathcal{C}$, $f: c \to c'$, em $\mathcal{B}$.

- **Condição de Naturalidade:** cada seta $f: c \to c'$ em $\mathcal{C}$ é mapeada para duas setas em $\mathcal{B}$, componentes de τ em c e em c'. Novamente, o diagrama abaixo mostra de forma mais intuitiva esse processo:



Para a naturalidade é requerido que o quadrado em $\mathcal{B}$ comute, ou seja, $\tau c´ \circ Sf = Tf \circ \tau c$. Quando isso é o caso, dizemos que $\tau_c: Sc \to Tc$ é natural em c, e como vimos, $\tau a, \tau b, \tau c, \ldots$, são chamados os componentes da transformação natural τ. Como é fácil constatar, aqui se dá um passo adiante no caminho da abstração e define-se o que podemos chamar de um morfismo entre funtores.

Proposição 3.1.7.2. Sejam $S, T: \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ funtores e $\tau: S \dot{\to} T$ uma transformação natural de S para T. Assuma que, para cada objeto a de $\mathcal{C}$, $\tau_a: Sa \to Ta$ é um isomorfismo. Então, τ é um isomorfismo natural.

Prova. Defina $\tau^{-1}: T \to S$ por ${\tau^{-1}}_a = (\tau_a)^{-1}$.

τ^{-1} é natural, desde que para cada seta $f: a \to b$ em $\mathcal{C}$, nós temos

$$ {\tau^{-1}}_b \circ T(f) = (\tau_b)^{-1} \circ T(f) \circ \tau_a \circ (\tau_a)^{-1} $$

$$= (\tau_b)^{-1} \circ \tau_b \circ S(f) \circ (\tau_a)^{-1}$$

$$= T(f) \circ \tau^{-1}{}_a \,. \qquad \blacksquare$$

Assim, se cada componente τc da transformação natural τ é invertível em $\mathcal{B}$, ou seja, se para cada τc existe uma inversa $(\tau c)^{-1}$ em $\mathcal{B}$, τ é uma equivalência natural ou um isomorfismo natural, e é denotada por $\tau : S \cong T$ e, obviamente, as inversas $(\tau c)^{-1}$ em $\mathcal{B}$ são os componentes de um isomorfismo natural $\tau^{-1}{:}T \dot{\to} S$. Para uma melhor compreensão intuitiva, podemos fazer um paralelo com a noção de funtor. Se um funtor S de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{B}$ dá uma imagem em $\mathcal{B}$ de todos os objetos e setas de $\mathcal{C}$, uma transformação natural τ é um conjunto de morfismos mapeando (ou traduzindo) a imagem de S para a imagem de T. Isso é o mesmo que dizer que todos os quadrados e paralelogramos do diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "h"'] & \\
& b \arrow[dl, "g"] \\
c &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Sa \arrow[rrr, "\tau a"] \arrow[dr, "Sf"] \arrow[dd, "Sh"'] & & & Ta \arrow[dr, "Tf"] \arrow[dd] & \\
& Sb \arrow[rrr, "\tau b"] \arrow[dl, "Sg"] & & & Tb \arrow[dl, "Tg"] \\
Sc \arrow[rrr, "\tau c"'] & & & Tc &
\end{tikzcd}$$

comutam. A definição de naturalidade captura a ideia intuitiva de “fazer a mesma coisa” com objetos diferentes.

Exemplo 3.1.7.3.

Tome um conjunto fixado X e defina um funtor $F_X\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ da seguinte forma: a função objeto é definida por $A \mapsto (X \Rightarrow A) \times X$, onde $X \Rightarrow A$ é o conjunto de funções de X para A; e a função seta é definida por $f \mapsto (f \circ -) \times id_X$. Aqui, claro, $(X \Rightarrow A) \times X$ é um produto cartesiano de conjuntos, e $(f \circ -) \times id_X$ denota um produto cartesiano de funções. Nós podemos, então, definir uma transformação natural $ev\colon F_X \dot{\to} id_{Set}$ por $ev_A(g, x) = gx$, onde $(g, x) \in (X \Rightarrow A) \times X$. De fato, para qualquer função $f\colon A \to B$ em $\mathbf{Set}$, o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & F_X(A) \arrow[r, "ev_A"] \arrow[d, "F_X(f)"'] & id_{Set}(A) \arrow[d, "id_{Set}(f)"] \\ B & F_X(B) \arrow[r, "ev_B"'] & id_{Set}(B) \end{tikzcd}$$

comuta da seguinte forma:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & (X \Rightarrow A) \times X \arrow[r, "ev_A"] \arrow[d, "F_X(f)"'] & A \arrow[d, "id_{Set}(f)"] \\ B & (X \Rightarrow B) \times X \arrow[r, "ev_B"'] & B \end{tikzcd}$$

isto é, seja $(g, x) \in (X \Rightarrow A) \times X$, então

$$\begin{aligned} (id_{Set}(f) \circ ev_A)(g, x) &= f\big(ev_A(g, x)\big) \\ &= f(g(x)) \\ &= ev_B(fg, x) \end{aligned}$$

$$= ev_B(F_X(f)(g,x))$$

$$= (ev_B \circ F_X(f))(g,x)\ .$$

Assim, nós temos uma transformação natural $ev: F_X \dot{\rightarrow} id_{Set}$ com componentes $ev_A: (X \Rightarrow A) \times X \rightarrow A$.

3.1.8 Categorias de Funtores

Devemos agora definir a composição de duas transformações naturais, e mostrar que tal composição também é uma transformação natural.

Definição 3.1.8.1. Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorias, F, G, H funtores de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$. A lei de composição das transformações naturais (vertical) $\tau : F \dot{\rightarrow} G$, $\sigma : G \dot{\rightarrow} H$ é definida como segue:

1. $\sigma \cdot \tau : F \rightarrow H$ é definida como $(\sigma \cdot \tau)_a = \sigma_a \circ \tau_a$.

Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"'] & Fa \arrow[r, "\tau_a"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[rr, bend left, "(\sigma \circ \tau)_a"] & Ga \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, "Gf"] & Ha \arrow[d, "Hf"] \\
b & Fb \arrow[r, "\tau_b"'] \arrow[rr, bend right, "(\sigma \circ \tau)_b"'] & Gb \arrow[r, "\sigma_b"'] & Hb
\end{tikzcd}$$

Dado que τ, σ são ambas naturais, os dois quadrados no diagrama acima comutam. Dessa forma, o retângulo externo também comuta, ou seja, $(\sigma \cdot \tau)_b \circ F(f) = H(f) \circ (\sigma \cdot \tau)_a$. Como podemos ver, a composição de transformações naturais também é uma transformação natural, e $(\sigma \cdot \tau)_a$ são os componentes de uma transformação natural $\sigma \cdot \tau : F \stackrel{\cdot}{\to} H$ para cada a de $\mathcal{C}$.

Para cada funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, existe uma transformação natural identidade $1_F : F \stackrel{\cdot}{\to} F$ que atribui a cada objeto a de $\mathcal{C}$ o morfismo identidade $1_{Fa}: Fa \to Fa$ em $\mathcal{D}$, ou seja, temos os componentes $(1_F)_a = 1_{Fa}$ para cada objeto a de $\mathcal{C}$. O diagrama abaixo mostra que $1_F : F \stackrel{\cdot}{\to} F$ é de fato uma transformação natural:

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"'] & & Fa \arrow[r, "1_{Fa}"] \arrow[d, "Ff"'] & Fa \arrow[d, "Ff"] \\
a' & & Fa' \arrow[r, "1_{Fa'}"'] & Fa' .
\end{tikzcd}
$$

Isto é, para cada seta $f: a \to a'$ em $\mathcal{C}$ nós temos $1_{Fa'} \circ Ff = Ff \circ 1_{Fa}$.

Além disso, os axiomas (AS) e (UN) são satisfeitos:

(AS) Dadas $\tau : F \stackrel{\cdot}{\to} G$, $\sigma : G \stackrel{\cdot}{\to} H$, $\alpha : H \stackrel{\cdot}{\to} Q$, transformações naturais entre funtores $F, G, H, Q : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, nós temos:

$\big((\alpha \cdot \sigma) \cdot \tau\big)_a = (\alpha \cdot \sigma)_a \circ \tau_a = \alpha_a \circ \sigma_a \circ \tau_a = \alpha_a \circ (\sigma \cdot \tau)_a = (\alpha \cdot (\sigma \cdot \tau))_a$, para cada a de $\mathcal{C}$.

(UN) Dadas $\tau : F \stackrel{\cdot}{\to} G$, $\sigma : G \stackrel{\cdot}{\to} H$, transformações naturais entre funtores $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, juntamente com a transformação identidade $1_G: G \stackrel{\cdot}{\to} G$, nós temos:

$$1_G \circ \tau = \tau \text{ e } \sigma \circ 1_G = \sigma.$$

Recapitulando, o que nós mostramos é que a composição de uma transformação natural também é uma transformação natural; que a composição entre transformações naturais é associativa; que para cada funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ existe uma transformação natural identidade; e que (AS) e (UN) são satisfeitos. Nós temos, então, todos os requisitos necessários e suficientes para a definição de uma categoria onde objetos são funtores e morfismos são transformações naturais, ou seja, a categoria de todos os funtores de uma dada categoria $\mathcal{C}$ para uma dada categoria $\mathcal{D}$, a qual se denota por $[\mathcal{C},\mathcal{D}] = \mathcal{D}^{\mathcal{C}}$.

O "conjunto-hom" da categoria $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ é definido como segue:

$$\mathrm{Nat}(F,G) = \mathcal{D}^{\mathcal{C}}(F,G) = \{\tau \mid \tau : F \dot{\to} G \text{ natural}\}\,.$$

3.1.9 Monomorfismo e Epimorfismo. Objeto Inicial e Objeto Terminal

As definições de quatro noções devem ser dadas aqui, tendo em vista que as utilizaremos posteriormente. Tais noções são as de monomorfismo, epimorfismo, objeto inicial e objeto terminal.

Definição 3.1.9.1. Uma seta $m: a \to b$ é um monomorfismo em uma dada categoria $\mathcal{C}$ quando para quaisquer duas setas paralelas $f_1, f_2: d \to a$ a igualdade $m \circ f_1 = m \circ f_2$ implica $f_1 = f_2$. Uma seta que é um monomorfismo também é chamada de uma seta cancelável à esquerda. Uma seta $h: a \to b$ é um epimorfismo em uma dada categoria $\mathcal{C}$ quando para quaisquer duas setas $g_1, g_2: b \to c$ a igualdade $g_1 \circ h = g_2 \circ h$ implica $g_1 = g_2$. Uma seta que é um epimorfismo também é chamada de uma seta cancelável à direita. Uma seta $h: a \to b$ é dita ter inversa à direita se existe uma seta $h': b \to a$ tal que $h \circ h' = 1_b$, e se uma tal seta possui inversa à direita ela é evidentemente um epimorfismo. A conversa é o caso na categoria Set, mas falha na categoria **Grp**. Similarmente, uma seta $h: a \to b$ é dita ter inversa à esquerda se existe uma seta $h': b \to a$ tal que $h' \circ h = 1_a$, e se uma tal seta possui inversa à esquerda ela é necessariamente um monomorfismo.

Definição 3.1.9.2. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria arbitrária. Um objeto inicial em $\mathcal{C}$ é um objeto tal que para qualquer objeto x de $\mathcal{C}$, existe uma única seta do objeto inicial para x. Um objeto terminal em $\mathcal{C}$ é um objeto tal que para qualquer objeto y de $\mathcal{C}$, existe um único morfismo de y para o objeto terminal.

Proposição 3.1.9.3. Objetos iniciais e terminais, se existem, são únicos a menos de isomorfismo.

Prova. Considere os objetos i, i' como objetos iniciais para uma mesma categoria $\mathcal{C}$. Por definição, existe uma única seta $f: i \to i'$ e uma única seta $g: i' \to i$. Compondo f e

g, e dado que a única seta de i para i e a única seta de i' para i' são suas respectivas setas identidade, nós temos $g \circ f = 1_i$ e $f \circ g = 1_{i'}$. Assim, f é o único isomorfismo entre i e i'. A demonstração para os objetos terminais é análoga. ■

Proposição 3.1.9.4. Uma função é injetiva se, e somente se, é um monomorfismo na categoria Set de conjuntos como objetos e funções totais como setas.

Prova.(⇒) Seja $f: A \to B$ uma função injetiva. Agora, suponha $g, h: X \to A$ funções quaisquer. Então,
$\forall x \in X, f \circ g(x) = f \circ h(x) \Rightarrow$
$\forall x \in X, f(g(x)) = f(h(x)) \Rightarrow$
$\forall x \in X, g(x) = h(x) \Rightarrow$
$g = h$.

(⇐) Seja $f: A \to B$ um monomorfismo em Set. Seja 1 um conjunto unitário fixo, e suponha que $c_x: 1 \to X$ denota a função que associa o único elemento de 1 a constantes $x \in X$. Então,

$$\forall a, b \in A, \exists c_a, c_b: 1 \to A \Rightarrow$$
$$(f \circ c_a = f \circ c_b \Rightarrow c_a = c_b) \Rightarrow$$

$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$. ■

Proposição 3.1.9.5. A é um conjunto unitário se, e somente se, A é objeto terminal em Set.

Prova. (⇒) Seja $A = \{*\}$ um conjunto unitário e B um conjunto qualquer. Agora, considere os seguintes casos:

(1) $B = \emptyset$, então existe uma única função $f: B \to A$, ou seja, a função vazia;

(2) $B \neq \emptyset$, então existe uma única função $f: B \to \{*\}$, isto é, a função constante $f(z) = *$, para todo $z \in B$.

(⇐) Observando os seguintes casos, nós temos:

(1) Se $A = \emptyset$, então este só admite uma função com domínio vazio; nesse caso, essa função seria $\emptyset: \emptyset \to \emptyset$, e assim, A não seria objeto terminal;

(2) Por outro lado, se existissem $\{x, y\} \in A$ tais que $x \neq y$, e dado qualquer conjunto $B \neq \emptyset$, nós poderíamos definir, pelo menos, duas funções distintas $f, g: B \to A$; logo, A não seria objeto terminal. ■

3.1.10 Fundações

Como Mac Lane (1997) afirma, um dos principais objetivos da teoria das categorias é discutir propriedades de totalidades de objetos matemáticos, por exemplo, o "conjunto" de todos os grupos, ou o "conjunto" de todos os homomorfismos entre quaisquer dois grupos etc.. Um grupo, por sua vez, é considerado como um conjunto com dadas propriedades adicionais, assim, podemos considerar um conjunto de todos os conjuntos com alguma dada propriedade adicional. Entretanto, colocar as coisas dessa maneira nos faz voltar aos velhos paradoxos, tais como o famoso paradoxo de Russell, tendo em vista que isso equivale à aplicação do princípio da compreensão: dada uma propriedade $\varphi(x)$ de conjuntos x, é possível formar o conjunto $\{x \mid \varphi(x)\}$ de todos os conjuntos x com essa propriedade. Como sabemos, a prática padrão em teoria de conjuntos, com a usual relação de pertença $\in$, é restringir o supracitado princípio. Grosso modo, permite-se apenas o conjunto de todos aqueles x com uma dada propriedade φ que são membros de um conjunto u já dado. Assim, restringe-se o princípio de compreensão permitindo apenas a compreensão para elementos de u: $\{x \mid x \in u \wedge \varphi(x)\}$.

Antes de prosseguirmos, é essencial explicitarmos aqui uma distinção a fim de evitar possíveis mal-entendidos, a saber, a distinção entre (i_1) **fundações categoriais para a matemática**, e (i_2) **fundações matemáticas para a teoria das categorias**. A teoria das categorias serve como uma alternativa fundacional para a matemática, entretanto, **o que vamos fazer neste tópico não é isso**! Para uma melhor compreensão do que significa utilizar a teoria das categorias como uma alternativa fundacional é necessário ter em mente a distinção entre axiomas assertórios e axiomas esquemáticos esboçada anteriormente.

Dito isso, nós devemos afirmar que a teoria das categorias não necessita, em absoluto, da teoria de conjuntos como uma fundação para si: a teoria das categorias é independente da teoria de conjuntos. Note que isso equivale a afirmar duas coisas: (1) a matemática pode ser fundamentada de modo puramente esquemático ou, colocando as coisas em termos mais filosóficos, a teoria das categorias é um framework fundacional para a variedade esquemática da interpretação *in re* do estruturalismo matemático; e (2) a teoria das categorias não necessita ser fundamentada por qualquer teoria assertória, sendo ela mesma a sua fundação. A afirmação (2) pode parecer estranha e despropositada, mas esse aparente *non-sense* surge pelo desconhecimento dos níveis de hierarquia axiomática categorial, a saber, os níveis de hierarquia entre os axiomas EM (Eilenberg-Mac Lane), ETCS (*An Elementary Theory of the Category of Sets*) e CCAF (*The Category of Categories as a Foundation for Mathematics*). Obviamente que uma defesa da nossa afirmação aqui fugiria completamente do escopo do tema concernente a esta dissertação, e tal defesa necessitaria ela própria de uma dissertação.

Passando para a distinção (i_2), antes de entrarmos em maiores detalhes, considere um conjunto U com as seguintes propriedades:

(i) $x \in u \in U$ implica $x \in U$;

(ii) $u \in U$ e $v \in U$ implica $\{u, v\}$, $\langle u, v \rangle$, e $u \times v \in U$;

(iii) $x \in U$ implica $Px \in U$ e $\bigcup x \in U$;

(iv) $\omega \in U$ (onde $\omega = \{0,1,2, \ldots\}$ é o conjunto de todos os ordinais finitos);

(v) se $f: a \to b$ é uma função sobrejetiva com $a \in U$ e $b \subset U$, então $b \in U$.

O conjunto U é conhecido como o universo de Grothendieck. As propriedades (i) - (v) asseguram que a aplicação de quaisquer das operações que são padrão na teoria de conjuntos aos elementos de U sempre produza elementos de U, ou seja, (i) - (v) são propriedades de fecho para U. O universo de Grothendieck permite que a realização de toda a matemática "ordinária" seja feita exclusivamente dentro de si, ou seja, com os elementos de U.

Definição 3.1.10.1. Dado o universo U, um conjunto $u \in U$ é chamado um conjunto pequeno. Assim, o universo U é o conjunto de todos os conjuntos pequenos. Similarmente, uma função $f: u \to v$ é chamada pequena quando u e v são conjuntos pequenos.

Note que se $f: u \to v$ é pequena, então isso implica que f pode ser considerada como um conjunto pequeno, tendo em vista que f nada mais é do que uma tripla ordenada $\langle u, G_f, v \rangle$, com $G_f \subset u \times v$ que é o usual conjunto de todos os $\langle x, y \rangle$ com $x \in u$, $y = fx$. Note também que o princípio de compreensão na sua forma limitada permite a construção do conjunto A cujos elementos são todos os conjuntos que são funções pequenas, visto que tais funções são também todas elementos de U.

Definição 3.1.10.2. A categoria Set de todos os conjuntos pequenos é a categoria cujos objetos são todos os elementos do conjunto U, e cujas setas são todos os elementos do conjunto A.

Definição 3.1.10.3. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria, nós dizemos que $\mathcal{C}$ é uma categoria pequena se a sua coleção de objetos e a sua coleção de setas são ambos conjuntos pequenos, caso contrário, $\mathcal{C}$ é uma categoria grande.

Definição 3.1.10.4. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria, nós dizemos que $\mathcal{C}$ é uma categoria localmente pequena se, para todos os objetos x, y em $\mathcal{C}$, a coleção $\hom_{\mathcal{C}}(x, y)$ é um conjunto pequeno.

É possível mostrar que todos os conjuntos $x \in U$ satisfazem os axiomas ZFC[11], entretanto, nós não nos aprofundaremos mais do que o estritamente necessário aqui pelo simples fato de que o objetivo deste tópico é apenas nos dar os subsídios necessários para saber o que são categorias pequenas, grandes e localmente pequenas, e sabermos qual categoria estamos denotando quando falamos sobre a categoria Set, tendo em vista que vamos utilizar essas distinções adiante. É importante salientar, também, que é possível assumirmos classes, por meio da utilização dos axiomas Gödel-Bernays e definindo uma classe C como sendo qualquer sub-conjunto $C \subset U$ do universo: desde que $x \in u \in U$ implica $x \in U$, cada elemento de U é também um sub-conjunto de U, portanto, cada conjunto pequeno é também uma classe; entretanto, conversamente, algumas classes, por exemplo, o próprio conjunto U, não são conjuntos pequenos, tais classes são as chamadas classes próprias. Uma categoria grande seria, então, uma categoria cuja coleção de objetos e a coleção de setas são, ambas, classes próprias. Por exemplo, a categoria Set é uma categoria grande.

[11] Ver Mac Lane (1997, p. 23) para maiores detalhes.

3.2 Construções sobre categorias

3.2.1 Dualidade

A noção de dualidade é uma das mais importantes em teoria das categorias; ela nos permite concluir, a partir da obtenção de um resultado válido em uma dada categoria, que tal resultado é igualmente válido na sua categoria oposta. Essa propriedade faz com que comumente seja dito que a teoria das categorias reduz o trabalho pela metade. Grosso modo, a dualidade categorial é o processo de reverter todas as setas. Por exemplo, monomorfismos e epimorfismos são noções duais, assim como as noções de objeto inicial e objeto terminal. Dada a importância da noção de dualidade para a teoria das categorias, daremos aqui uma exata descrição desse processo sobre uma base axiomática.

As afirmações Σ que consistem a teoria elementar de uma categoria abstrata (ETAC do inglês *elementary theory of an abstract category*) envolvem letras $a, b, c, \ldots$ para objetos e letras $f, g, h, \ldots$ para setas. As afirmações atômicas que envolvem os usuais termos indefinidos da teoria das categorias são as afirmações “a é o domínio de f”, “b é o codomínio de f”, “i é a seta identidade de a”, e “g pode ser composta com f, e h é a composição”, “$a = b$” e “$f = g$”. Como é usual, podemos escrevê-las em forma de equações familiares: “$a = dom\, f$”, “$h = g \circ f$”. Dessa forma, uma afirmação Σ é qualquer frase construída a partir das afirmações atômicas por meio dos conectivos proposicionais ordinários (e, ou, não, implica, se e somente se) e os quantificadores usuais (“para todo a”, “para todo f”, “existe um a ...”, “existe um f ...”). Por exemplo, “a é o domínio de f e b é o codomínio de f” é uma afirmação Σ, o que se denota por “$f: a \to b$”. Uma sentença é uma afirmação Σ cujas variáveis estão todas ligadas por quantificadores, por exemplo, “para todo f existem a e b com $f: a \to b$”. Os axiomas são sentenças verdadeiras em todas as categorias. A afirmação dual de uma afirmação Σ de ETAC, que se denota por Σ^*, é construída por meio das seguintes substituições em Σ: “domínio” por “codomínio”, e “h é a composição de g com f” por “h é a composição de f com g”; setas e composições são invertidas, mas a parte lógica é mantida inalterada. Assim, também é o caso que as duais dos axiomas para uma categoria são axiomas. Como é claro de maneira óbvia, a afirmação dual da afirmação dual é a afirmação original, ou seja, $\Sigma^{**} = \Sigma$. É fácil ver que se uma afirmação Σ envolve algum tipo de diagrama de objetos e setas,

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & b \arrow[d, "g"] \\ & c \end{tikzcd},$$

então, a afirmação dual Σ^* envolve o diagrama obtido pela inversão da direção e ordem das composições de setas.

$$\begin{tikzcd} a & b \arrow[l, "f"'] \\ & c \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, "f \circ g"] \end{tikzcd}$$

Podemos agora enunciar o princípio de dualidade.

- **Princípio de Dualidade:** Se uma afirmação Σ da teoria elementar de uma categoria abstrata é uma consequência dos axiomas, então, a afirmação dual Σ^* também o é.

Esse princípio significa que se temos a prova de um teorema sobre uma categoria arbitrária a partir dos axiomas, e substituirmos cada afirmação pela sua dual, nós temos uma prova válida da conclusão dual. Por exemplo, a demonstração do teorema da unicidade a menos de isomorfismo do objeto inicial, nos dá, por meio do processo supracitado, a demonstração do teorema dual, a saber, a unicidade a menos de isomorfismo do objeto terminal.

3.2.2 Categorias opostas (duais)

Dada uma categoria qualquer $\mathcal{C}$, nós sempre podemos associar a $\mathcal{C}$ a sua categoria oposta, a qual se denota por $\mathcal{C}^{op}$: os objetos da categoria $\mathcal{C}^{op}$ são os objetos da categoria $\mathcal{C}$; as setas da categoria $\mathcal{C}^{op}$, as quais são denotadas por $f^{op}, g^{op}, h^{op}, \dots$, estão em uma correspondência 1-1 $f \mapsto f^{op}$ com as setas da categoria $\mathcal{C}$, sendo que a direção das setas f^{op} é uma inversão da direção das setas f, ou seja, para cada seta $f: a \to b$ da categoria $\mathcal{C}$, o domínio e codomínio das correspondentes f^{op} da categoria $\mathcal{C}^{op}$ são como em $f^{op}: b \to a$; a composição $f^{op} \circ g^{op}$ das setas em $\mathcal{C}^{op}$ é definida como $(g \circ f)^{op}$ exatamente quando a composição $g \circ f$ está definida em $\mathcal{C}$; as setas identidade, obviamente, são iguais nas duas categorias. Em termos de conjuntos-hom, a categoria $\mathcal{C}^{op}$ é definida da seguinte forma:

1. $Ob\mathcal{C}^{op} = Ob\mathcal{C}$
2. Dados $a, b \in Ob\mathcal{C}^{op}$, nós temos que $f^{op} \in \hom_{\mathcal{C}^{op}}(a, b) \Leftrightarrow f \in \hom_{\mathcal{C}}(b, a)$. Não havendo riscos de ambiguidade, é comum a denotação de f^{op} por f.
3. Dados $a, b, c \in Ob\mathcal{C}^{op}$, a operação dual de composição categorial

$\circ^{op}$: $\hom_{\mathcal{C}^{op}}(a, b) \times \hom_{\mathcal{C}^{op}}(b, c) \to \hom_{\mathcal{C}^{op}}(a, c)$

é tal que $g \circ^{op} f = (f \circ g)^{op}$, sempre que $f \circ g$ está definida em $\mathcal{C}$;

4. Dado $a \in Ob\mathcal{C}^{op}$, nós temos que $(1_a)^{op} = 1_a$.

Esse processo traduz qualquer afirmação Σ sobre $\mathcal{C}$ na afirmação dual Σ^* sobre $\mathcal{C}^{op}$. Pode-se provar por meio de uma indução evidente sobre a construção de Σ a partir das afirmações atômicas que se Σ é uma afirmação com variáveis livres $f, g, \dots$ na teoria elementar de uma categoria abstrata, então Σ é verdadeira para setas $f, g, \dots$ de uma categoria $\mathcal{C}$ se, e somente se, a afirmação dual Σ^* é verdadeira para as setas $f^{op}, g^{op}, \dots$ da categoria oposta $\mathcal{C}^{op}$. Em particular, uma sentença Σ é verdadeira em $\mathcal{C}^{op}$ se, e somente se, a sentença dual Σ^* é verdadeira em $\mathcal{C}$. Obviamente, isso significa que podemos interpretar a dual de uma propriedade Σ como a propriedade original aplicada à categoria oposta.

3.2.3 Contravariância

Os funtores definidos em §3.1.6 preservam a direção das setas, ou seja, são covariantes. Existem, no entanto, funtores que invertem tal direção, são os chamados funtores contravariantes. Devemos, agora, utilizar o que foi exposto acima para explanar a noção de contravariância e definir alguns funtores importantes. Comecemos pelo óbvio, um funtor $T: \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ pode ter a sua função seta $f \mapsto Tf$ reescrita como $f^{op} \mapsto (Tf)^{op}$ e, junto com a sua função objeto $c \mapsto Tc$, dar origem a um funtor da categoria oposta de $\mathcal{C}$ para a categoria oposta de $\mathcal{B}$, isto é, de $\mathcal{C}^{op}$ para $\mathcal{B}^{op}$, o que é denotado por $T^{op}: \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{B}^{op}$. Além disso, a atribuição $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}^{op}$ e $T \mapsto T^{op}$ define um funtor covariante $Cat \to Cat$.

Vamos considerar, agora, um funtor da categoria oposta de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{B}$, ou seja, vamos considerar um funtor $S: \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{B}$. Por definição, sabemos que a função objeto de S atribui a cada objeto c de $\mathcal{C}^{op}$ um objeto Sc de $\mathcal{B}$, e a função seta atribui a cada seta $f^{op}: b \to a$ em $\mathcal{C}^{op}$ uma seta $Sf^{op}: Sb \to Sa$ em $\mathcal{B}$. Sabemos também pela definição de funtor que $S(f^{op} \circ g^{op}) = S(f^{op}) \circ S(g^{op})$ sempre que $f^{op} \circ g^{op}$ está definida. O que nós queremos mostrar é que podemos expressar o funtor S em termos de $\mathcal{C}$, ou seja, em termos da categoria original. Nós podemos escrever $\bar{S}f$ para Sf^{op}, obtendo, assim, um funtor contravariante de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{B}$, definido pela função objeto $c \mapsto \bar{S}c$ e pela função seta $(f: a \to b) \mapsto (\bar{S}f: \bar{S}b \to \bar{S}a)$ com, obviamente, $\bar{S}(1_c) = 1_{\bar{S}c}$ e, sempre que $f \circ g$ está definida em $\mathcal{C}$, $\bar{S}(f \circ g) = \bar{S}(g) \circ \bar{S}(f)$.

Tendo explanado a noção de contravariância, é importante salientar que podemos (e é o que faremos aqui, seguindo Mac Lane) *representar* funtores contravariantes como funtores covariantes, por exemplo, o funtor contravariante $\bar{S}$ de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{B}$pode ser representado como um funtor covariante $S: \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{B}$, ou como um funtor covariante $S^{op}: \mathcal{C} \to \mathcal{B}^{op}$.

3.2.4 Funtores-hom

Um importante tipo de funtor é o fornecido por conjuntos-hom. Para definirmos, aqui, os funtores-hom, devemos considerar uma categoria $\mathcal{C}$ localmente pequena, ou seja, isso quer dizer que os conjuntos-hom da categoria $\mathcal{C}$ sob consideração são objetos da categoria Set de todos os conjuntos pequenos.

Definição 3.2.4.1. Dito isso, podemos definir o funtor *covariante* $\mathcal{C}(a, -) = \mathrm{hom}(a, -) : \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ definido pela função objeto

$$b \mapsto \mathrm{hom}(a, b)$$

b um objeto de $\mathcal{C}$. E pela função seta

$$(k: b \longrightarrow b') \mapsto (\hom(a,k) : \hom(a,b) \to \hom(a,b'))$$
$$f \quad \mapsto \quad k \circ f$$

$k: b \to b'$ uma seta em $\mathcal{C}$.

Para mostrar que $\mathcal{C}(a,-) = \hom(a,-) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ é um funtor, devemos mostrar que

(F1) $\hom(a, g \circ f) = \hom(a,g) \circ \hom(a,f)$;

F(2) $\hom(a, 1_c) = 1_{\hom\,(a,c)}$.

Suponha as setas $f: c \to b, g: b \to d$. Assim, para qualquer seta $k: a \to c$

$$\begin{aligned}(\hom(a,g) \circ \hom(a,f))\,(k) = \hom(a,g)\,(\hom(a,f)\,(k)) &= \hom(a,g)\,(f \circ k)\\ &= g \circ (f \circ k)\\ &= (g \circ f) \circ k\\ &= \hom(a, g \circ f)\,(k).\end{aligned}$$

Para um objeto c, $\hom(a, 1_c) : \hom(a,c) \to \hom(a,c)$ toma uma seta $f: a \to c$ para $1_c \circ f = f$. Assim, $\hom(a, 1_c) = 1_{\hom\,(a,c)}$, como requerido.

Como dissemos, trataremos a contravariância de funtores de forma covariante, assim, representaremos a contravariância dos funtores-hom de forma covariante.

Definição 3.2.4.2. O funtor-hom *contravariante* é escrito covariantemente da seguinte forma: $\mathcal{C}(-,b) = \hom(-,b) : \mathcal{C}^{op} \to$ Set e definido pela função objeto

$$a \mapsto \hom(a,b)$$

a um objeto de $\mathcal{C}$. E pela função seta

$$(g: a \to a') \mapsto (\hom(g, b) : \hom(a', b) \to \hom(a, b))$$
$$f \mapsto f \circ g$$

$g: a \to a'$ uma seta em$\mathcal{C}$.

A função $\hom(a, k)$ é comumente denotada por k_* e chamada "composição com k à esquerda", ou, "o mapeamento induzido por k". Já a função $\hom(g, b)$ é comumente denotada por g^* e chamada "composição com g à direita". Assim, para cada $f: a' \to b$, nós temos que $k_*\,(f) = k \circ f$ e $g^*\,(f) = f \circ g$. Além disso, note que tanto a seta $g: a \to a'$ quanto a seta $k: b \to b'$, ou seja, para duas tais setas, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\hom(a', b) \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "k_*"'] & \hom(a, b) \arrow[d, "k_*"] \\
\hom(a', b') \arrow[r, "g^*"'] & \hom(a, b').
\end{tikzcd} \qquad (3.2.4.3)$$

é comutativo em Set, tendo em vista que $g^* \circ k_* = k_* \circ g^* = k \circ f \circ g$. Mais sobre isso será dito adiante.

Antes de prosseguirmos, note que os funtores-hom foram definidos somente para uma categoria $\mathcal{C}$ localmente pequena. A categoria grande Set, por exemplo, é localmente pequena. Mas, e quanto a categorias que não são localmente pequenas? Os funtores-hom são funtores importantíssimos e muito úteis, sendo, portanto, essencial apresentarmos aqui a maneira pela qual podemos incluir categorias que não são localmente pequenas.

Definição 3.2.4.4. Dada uma categoria $\mathcal{C}$, tome um conjunto V grande o suficiente para incluir todos os subconjuntos do conjunto de setas de $\mathcal{C}$ (por exemplo, V pode ser o conjunto potência do conjunto de setas de $\mathcal{C}$). Seja $\text{Ens} = \text{Set}_\text{V}$ uma categoria cujos objetos são todos os conjuntos $X \in V$, e cujas setas são todas as funções $f: X \to Y$ entre dois tais conjuntos, com composição e identidade como as usuais em funções. Então, cada conjunto-hom $\mathcal{C}(a, b) = \hom\,(a, b)$ é um objeto da categoria Ens. Nós podemos, assim, definir dois funtores-hom:

$$\mathcal{C}(a,-) = \hom(a,-) : \mathcal{C} \to \text{Ens} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{C}(-,b) = \hom(-,b) : \mathcal{C}^{op} \to \text{Ens}.$$

Note que quando V é o universo de todos os conjuntos pequenos, então Ens $=$ Set. Assim, a categoria Ens é uma categoria variável de conjuntos que atua como uma categoria que "recebe" os funtores-hom de uma categoria $\mathcal{C}$ em questão.

3.2.5 Produto categorial e demais construções universais

Definição 3.2.5.1. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria arbitrária, e a, b objetos de $\mathcal{C}$. Um produto (binário) de a e b é um objeto $a \times b$ de $\mathcal{C}$, junto com duas setas $a \overset{\pi_1}{\leftarrow} a \times b \overset{\pi_2}{\rightarrow} b$ em $\mathcal{C}$, chamadas projeções canônicas, tais que para todo objeto c de $\mathcal{C}$ e para todas as setas $a \overset{f_1}{\leftarrow} c \overset{f_2}{\rightarrow} b$ em $\mathcal{C}$, existe uma única seta $\langle f_1, f_2 \rangle : c \to a \times b$ em $\mathcal{C}$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, "\langle f_1, f_2 \rangle"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
a & a \times b \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & b
\end{tikzcd}$$

comuta. Ou seja, $\pi_1 \circ \langle f_1, f_2 \rangle = f_1$ e $\pi_2 \circ \langle f_1, f_2 \rangle = f_2$.

O produto binário de a, b de $\mathcal{C}$ é, portanto, a tripla $\langle a \times b, \pi_1, \pi_2 \rangle$. Além disso, qualquer objeto c de $\mathcal{C}$, juntamente com quaisquer setas $f_1 : c \to a$ e $f_2 : c \to b$ é denominado usualmente como o pré-produto de a, b. Disso se segue que o produto $\langle a \times b, \pi_1, \pi_2 \rangle$ também é um pré-produto. Obviamente, para verificarmos se, de fato, uma tripla $\langle a \times b, \pi_1, \pi_2 \rangle$ é um produto, deve-se demonstrar a existência e a unicidade da seta $\langle f_1, f_2 \rangle$. Quando $\langle f_1, f_2 \rangle$ existe, e satisfaz todas as propriedades especificadas, tal existência é referida como a *Propriedade Universal do Produto*. Uma propriedade universal é a menor estrutura pela qual qualquer outra estrutura de mesmo tipo pode ser definida de forma única. Esse tipo de abordagem é o que comumente é chamada de construção universal, e é o nosso principal interesse na utilização da teoria das categorias como uma teoria para os universais concretos, isso ficará claro quando tratarmos adiante de limites e colimites.

Definição 3.2.5.2. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Dizemos que $\mathcal{C}$ tem produtos finitos se qualquer número finito de objetos $c_1, \dots, c_n$ de $\mathcal{C}$ possui um produto. Isso quer dizer que para qualquer número finito de tais objetos existe um produto consistindo de um objeto produto $c_1 \times \dots \times c_n$ de $\mathcal{C}$, junto com n projeções canônicas $\pi_i: c_1 \times \dots \times c_n \to c_i$, para $i = 1, \dots, n$, com a seguinte propriedade universal: para qualquer coleção de setas $f_i: b \to c_i$ em $\mathcal{C}$, $i = 1, \dots, n$, existe uma única seta $h: c \to c_1 \times \dots \times c_n$ tal que, para cada $i = 1, \dots, n$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f_i"'] & c_1 \times \dots \times c_n \arrow[d, "\pi_i"] \\
& c_i
\end{tikzcd}$$

comuta. Note que o produto 0-ário é apenas o objeto terminal em $\mathcal{C}$, desde que, nesse caso, a única coisa que resta é a propriedade universal que diz para qualquer objeto c, existe uma única seta h de c para o produto 0-ário, ou seja, dado nenhum objeto, existe um objeto t sem nenhuma projeção canônica, tal que dado qualquer outro objeto c e nenhuma seta, existe uma única seta $!: c \to t$ fazendo nada mais comutar. O produto unário é apenas a seta identidade, ou seja, um produto unário a^1 de um objeto a tem uma seta $p: a^1 \to a$ tal que, dado qualquer objeto b e seta $q: b \to a$, existe uma única seta $\langle q \rangle: b \to a^1$ fazendo o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\langle q \rangle"] \arrow[dr, "q"'] & a^1 \arrow[d, "p"] \\
& a
\end{tikzcd}$$

comutar. A seta identidade $id: a \to a$ satisfaz a propriedade requerida para p: que $id \circ \langle q \rangle = q$ é óbvio, assim como a unicidade de $\langle q \rangle$. Assim, o objeto produto de um único objeto a é apenas a, com a seta $a \to a$ como projeção coordenada. Obviamente, também, se $\mathcal{C}$ tem produtos finitos, então $\mathcal{C}$ tem produtos binários: nós dizemos que uma categoria $\mathcal{C}$ tem produtos binários se para cada par de objetos a, b existe um produto $a \times b$.

Proposição 3.2.5.3. Um objeto b é o objeto produto de um objeto a com projeção coordenada $p: b \to a$ se, e somente se, p é um isomorfismo.

Prova. Se $p: b \to a$ é um diagrama produto unário, então, por definição, para cada objeto Xexiste uma bijeção

$$\mathrm{Hom}(X, a) \to \mathrm{Hom}(X, b)$$

$$f \mapsto \langle f \rangle$$

para a qual $p \circ \langle f \rangle = f$. Essa bijeção é um isomorfismo natural de $\mathrm{Hom}(-, a)$ para $\mathrm{Hom}(-, b)$, desde que, dada uma seta $u: Y \to X$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "u"'] & \mathrm{Hom}(X, a) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(u, a)"'] & \mathrm{Hom}(X, b) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(u, b)"] \\
X & \mathrm{Hom}(Y, a) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(Y, b)
\end{tikzcd}$$

comuta da seguinte maneira

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "u"'] & f \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(u, a)"'] & \langle f \rangle \arrow[d, "\mathrm{Hom}(u, b)"] \\
X & f \circ u \arrow[r] & \langle f \circ u \rangle = \langle f \rangle \circ u\,,
\end{tikzcd}$$

desde que $p \circ \langle f \rangle \circ u = f \circ u$. Como um corolário do assunto que discutiremos quando tratarmos do Lema de Yoneda, a transformação natural $\mathrm{Hom}(-, a) \to \mathrm{Hom}(-, b)$ é um isomorfismo se, e somente se, a correspondente seta $a \to b$ é um isomorfismo. Assim, p é um isomorfismo. ■

Proposição 3.2.5.4. Se uma categoria $\mathcal{C}$ tem objeto terminal e produtos binários, então $\mathcal{C}$ tem todos os produtos finitos.

Prova. Primeiro, note que, dada a Definição 3.2.5.2, em qualquer categoria com produtos binários nós podemos calcular o produto ternário de a, b e c, $a \times b \times c$, a partir de ou $(a \times b) \times c$ ou $a \times (b \times c)$. Nós provamos isso para $(a \times b) \times c$.

Escreva p_i, $i = 1{,}2$, para as projeções que fazem $a \times b$ um produto de a e b, e q_i, $i = 1{,}2$, para as projeções que fazem $(a \times b) \times c$um produto de $a \times b$ e c. Nós vamos provar que

$$\begin{tikzcd}
& & (a \times b) \times c \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[ddrr, "q_2"] & & \\
& a \times b \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & & & \\
a & & b & & c
\end{tikzcd}$$

é um diagrama produto com vértice $(a \times b) \times c$ e projeções $p_1 \circ q_1 \colon (a \times b) \times c \to a$, $p_2 \circ q_1 \colon (a \times b) \times c \to b$ e $q_2 \colon (a \times b) \times c \to c$.

Para ver isso, suponha $f \colon d \to a$, $g \colon d \to b$ e $h \colon d \to c$ são dadas, ou seja, nós temos um diagrama produto (pré-produto) cujo vértice é d e cujas projeções são as setas f, g e h. O que nós temos que fazer é apresentar umaseta $u \colon d \to (a \times b) \times c$, única,tal que

(a) $p_1 \circ q_1 \circ u = f$,
(b) $p_2 \circ q_1 \circ u = g$, e
(c) $q_2 \circ u = h$.

Por definição, $\langle f, g \rangle \colon d \to a \times b$ é a única seta que faz o diagrama abaixo comutar

$$\begin{tikzcd}
 & d \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\langle f,g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\
a & a \times b \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & b
\end{tikzcd} \qquad (3.2.5.5)$$

Daqui, nós temos uma única seta $u = \langle\langle f,g\rangle, h\rangle: d \to (a \times b) \times c$ fazendo o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & d \arrow[dl, "\langle f,g\rangle"'] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "h"] & \\
a \times b & (a \times b) \times c \arrow[l, "q_1"] \arrow[r, "q_2"'] & c
\end{tikzcd} \qquad (3.2.5.6)$$

comutar. Que (a) – (c) valem pode ser constatado por meio dos diagramas (3.2.5.5) e (3.2.5.6): para (a) nós temos $p_1 \circ q_1 \circ u = p_1 \circ \langle f,g\rangle = f$; para (b) temos $p_2 \circ q_1 \circ u = p_2 \circ \langle f,g\rangle = g$; e para (c) temos $q_2 \circ u = h$.

Que a seta u é única pode ser visto da seguinte forma: seja u' outra seta tal que (a) – (c) valem, assim nós temos $p_1 \circ q_1 \circ u' = f$ e $p_2 \circ q_1 \circ u' = g$, mas, desde que $\langle f,g\rangle$ é única em (3.2.5.5), $q_1 \circ u' = \langle f,g\rangle$; desde que $q_2 \circ u' = h$, a unicidade de u em (3.2.5.6) significa que $u = u'$.

Agora note que, como vimos, toda categoria tem produto unário, e por hipótese temos produtos 0-ários e binários. Daqui, a categoria em questão tem produtos n-ários para $n = 0$, 1 e 2, e acabamos de mostrar que o mesmo vale para $n = 3$, e os passos essenciais para uma óbvia indução sobre n. ■

Definição 3.2.5.7. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria arbitrária, e a, b objetos de $\mathcal{C}$. Um coproduto (binário) de a e b é um objeto $a + b$ de $\mathcal{C}$, junto com duas setas $a \overset{i_1}{\to} a + b \overset{i_2}{\leftarrow} b$ em $\mathcal{C}$

tais que para todo objeto c de $\mathcal{C}$ e para todas as setas $a \xrightarrow{f_1} c \xleftarrow{f_2} b$ em $\mathcal{C}$, existe uma única seta $h^*: a + b \to c$ em $\mathcal{C}$ tal que o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & c & \\
a \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "i_1"'] & a + b \arrow[u, "h^*"] & b \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[l, "i_2"]
\end{tikzcd}
$$

comuta. Ou seja, $h^* \circ i_1 = f_1$ e $h^* \circ i_2 = f_2$.

Definição 3.2.5.8. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria arbitrária, e $f, g: a \rightrightarrows b$ duas setas paralelas em $\mathcal{C}$. Um equalizador de f, g é uma seta $e: E \to a$ em $\mathcal{C}$, com $f \circ e = g \circ e$, tal que, para qualquer outra seta $e^*: E^* \to a$ em $\mathcal{C}$ com $f \circ e^* = g \circ e^*$, existe uma única seta $h: E^* \to E$ tal que o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \\
E^* \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "e^*"'] & &
\end{tikzcd}
$$

comuta. Ou seja, $e \circ h = e^*$.

Definição 3.2.5.9. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria arbitrária, e $f, g: a \rightrightarrows b$ duas setas paralelas em $\mathcal{C}$. Um coequalizador de f, g é uma seta $c: b \to C$ em $\mathcal{C}$, com $c \circ f = c \circ g$, tal que, para qualquer outra seta $c^*: b \to C^*$ em $\mathcal{C}$ com $c^* \circ f = c^* \circ g$, existe uma única seta $h^*: C \to C^*$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "c^*"'] & C \arrow[d, "h^*"] \\
& & C^*
\end{tikzcd}$$

comuta. Ou seja, $h^* \circ c = c^*$.

Definição 3.2.5.10. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria arbitrária, e $a \overset{f}{\rightarrow} d \overset{g}{\leftarrow} b$ um par de setas em $\mathcal{C}$ com o mesmo codomínio. Um pullback para o par f, g é dado por um objeto $a \times_d b$ de $\mathcal{C}$, junto com um par de setas $a \overset{p_a}{\leftarrow} a \times_d b \overset{p_b}{\rightarrow} b$ com $f \circ p_a = g \circ p_b$, tal que, dadas duas setas $a \overset{k_a}{\leftarrow} c \overset{k_b}{\rightarrow} b$ em $\mathcal{C}$ com $f \circ k_a = g \circ k_b$, existe uma única seta $h: c \rightarrow a \times_c b$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, "k_a"] \arrow[ddr, "k_b"'] & & \\
& a \times_d b \arrow[r, "p_a"] \arrow[d, "p_b"'] & a \arrow[d, "f"] \\
& b \arrow[r, "g"'] & d
\end{tikzcd}$$

comuta. Ou seja, $p_a \circ h = k_a$ e $p_b \circ h = k_b$. Nós dizemos que p_a é o pullback de g ao longo de f, e que p_b é o pullback de f ao longo de g.

3.2.6 Produtos de categorias

Podemos obter o produto de duas dadas categorias $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, o qual se denota por $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$, sendo também tal produto uma categoria. Os objetos de $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ são pares $\langle b, c \rangle$ de objetos b de $\mathcal{B}$ e c de $\mathcal{C}$; as setas $\langle b, c \rangle \rightarrow \langle b', c' \rangle$ de $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ são pares $\langle f, g \rangle$ de setas $f: b \to b'$ e $g: c \to c'$; a composição das setas $\langle b, c\rangle \xrightarrow{\langle f,g\rangle} \langle b', c'\rangle \xrightarrow{\langle f',g'\rangle} \langle b'', c''\rangle$ é definida em termos das composições em $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ como $\langle f', g'\rangle \circ \langle f, g\rangle = \langle f' \circ f, g' \circ g\rangle$; a seta identidade $1_{\langle b,c\rangle}$ de um objeto $\langle b, c\rangle$ é o par de setas identidade $\langle 1_b, 1_c\rangle$. As projeções da categoria produto $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ são funtores $\mathcal{B} \xleftarrow{P_{\mathcal{B}}} \mathcal{B} \times \mathcal{C} \xrightarrow{P_{\mathcal{C}}} \mathcal{C}$ definidos pelas funções objeto, respectivamente, $\langle b, c\rangle \mapsto b$ e $\langle b, c\rangle \mapsto c$, e pelas funções seta, também respectivamente, $\langle f, g\rangle \mapsto f$ e $\langle f, g\rangle \mapsto g$.

Teorema 3.2.6.1. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ categorias. Então, dada qualquer categoria $\mathcal{D}$ e dois funtores $\mathcal{B} \xleftarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$, existe um único funtor $H: \mathcal{D} \to \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ tal que $P_{\mathcal{B}} \circ H = F$ e $P_{\mathcal{C}} \circ H = G$.

Prova. Suponha primeiro que F e G são os dois dados funtores. Defina o mapeamento $H: \mathcal{D} \to \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ pela regra $H(x) = (F(x), G(x))$ para objetos x de $\mathcal{D}$, e $f: x \to y$ mapeia para $\langle F(x), G(x)\rangle \xrightarrow{\langle F(f),G(f)\rangle} \langle F(y), G(y)\rangle$ para setas $f: x \to y$ em $\mathcal{D}$. Desde que, por definição, $P_{\mathcal{B}} \circ H = F$ e $P_{\mathcal{C}} \circ H = G$, basta demonstrar que H é de fato um funtor e que é único. Sejam, $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$ uma sequência de setas em $\mathcal{D}$, então,

(F1) $H(g \circ f) = \big(F(g \circ f), G(g \circ f)\big) = \big(F(g) \circ F(f), G(g) \circ G(f)\big) = \big(F(g), G(g) \circ F(f), G(f)\big) = H(g) \circ H(f)$ e

(F2) $H(1_x) = \big(F(1_x), G(1_x)\big) = \big(1_{F(x)}, 1_{G(x)}\big) = 1_{(F(x),G(x))} = 1_{H(x)}$.

Para demonstrar a unicidade de H, suponha $H, K: \mathcal{D} \to \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ tal que $P_{\mathcal{B}} \circ H = P_{\mathcal{B}} \circ K = F$ e $P_{\mathcal{C}} \circ H = P_{\mathcal{C}} \circ K = G$. Então, para qualquer x em $\mathcal{D}$,

$$H(x) = \big((P_{\mathcal{B}} \circ H)(x), (P_{\mathcal{C}} \circ H)(x)\big) = \big((P_{\mathcal{B}} \circ K)(x), (P_{\mathcal{C}} \circ K)(x)\big) = K(x)$$

e para qualquer seta $f: x \to y$ em $\mathcal{D}$,

$$H(f) = \big((P_{\mathcal{B}} \circ H)(f), (P_{\mathcal{C}} \circ H)(f)\big) = \big((P_{\mathcal{B}} \circ K)(f), (P_{\mathcal{C}} \circ K)(f)\big) = K(f) . \quad \blacksquare$$

O diagrama comutativo de funtores

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D} \arrow[dl, "F"'] \arrow[d, "H"] \arrow[dr, "G"] & \\ \mathcal{B} & \mathcal{B} \times \mathcal{C} \arrow[l, "P_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "P_{\mathcal{C}}"'] & \mathcal{C} \end{tikzcd} \qquad (3.2.6.2)$$

apresenta uma visualização da construção de H. Mais à frente nós vamos detalhar essas propriedades gerais que caracterizam esse tipo de construção na teoria das categorias. Por agora, deixe-nos dar um passo adiante na abstração e apresentar a noção de um produto de dois funtores. Sejam $U: \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ e $V: \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ dois funtores, o produto de U e V, $U \times V: \mathcal{B} \times \mathcal{C} \to \mathcal{B}' \times \mathcal{C}'$, é um funtor definido sobre objetos e setas da seguinte forma: $(U \times V)\langle b, c\rangle = \langle Ub, Vc\rangle$ e $(U \times V)\langle f, g\rangle = \langle Uf, Vg\rangle$. Nós podemos, também, descrever o funtor $U \times V$ como sendo o único que faz o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[d, "U"'] & \mathcal{B} \times \mathcal{C} \arrow[l, "P"'] \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "U \times V"] & \mathcal{C} \arrow[d, "V"] \\ \mathcal{B}' & \mathcal{B}' \times \mathcal{C}' \arrow[l, "P'"] \arrow[r, "Q'"'] & \mathcal{C}' \end{tikzcd} \qquad (3.2.6.3)$$

comutar.

A partir do exposto acima, fica fácil constatar que a própria operação $\times$ é um funtor $\times: Cat \times Cat \to Cat$ (restrito a categorias pequenas) definido pela função objeto $\langle \mathcal{B}, \mathcal{C}\rangle \mapsto \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ e pela função seta $\langle U, V\rangle \mapsto U \times V$, de tal forma que, claramente, $(U' \times V') \circ (U \times V) = U' \circ U \times V' \circ V$, sempre que as composições $U' \circ U$ e $V' \circ V$ estão definidas.

3.2.7 Bi-funtores

Note, também, que a definição de categoria produto dá de forma automática a definição de um funtor de duas variáveis, ou, bi-funtor. Por exemplo, funtores $S: \mathcal{B} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ de uma categoria produto são funtores de dois objetos variáveis, a saber, em $\mathcal{B}$ e em $\mathcal{C}$, ou bi-funtores sobre $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$. Um exemplo bastante conhecido de ocorrência de um bi-funtor é o produto cartesiano $X \times Y$ de dois conjuntos X e Y, tal produto é a função objeto de um bi-funtor $Set \times Set \to Set$.

Ainda mantendo o foco nos bi-funtores, note que a fixação de um argumento num bi-funtor, por exemplo, $S: \mathcal{B} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, produz um funtor ordinário do argumento que restou. A questão, então, é saber se, em geral, dado um bi-funtor $S: \mathcal{B} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, S é unicamente determinado pelas duas matrizes de funtores de uma variável $S(-,c): \mathcal{B} \to \mathcal{D}$ e $S(b,-): \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, e, além disso, se dado um conjunto parametrizado de funtores $S_c: \mathcal{B} \to \mathcal{D}$ e $S_b: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, para todos os objetos b, c de $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, respectivamente, se existe um funtor $S: \mathcal{B} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tal que $S(b,-) = S_b$ e $S(-,c) = S_c$, para cada b, c, tal que S é único com respeito a essa propriedade.

Teorema Fundamental dos Bi-funtores. Sejam $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Para todos os objetos c de $\mathcal{C}$ e b de $\mathcal{B}$, sejam $S_c: \mathcal{B} \to \mathcal{D}$, $S_b: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores tais que $S_c(b) = S_b(c)$ para todo b e c. Então, existe um bi-funtor $S: \mathcal{B} \times \mathcal{C} \to D$ com $S(-,c) = S_c$ para todo c e $S(b,-) = S_b$ para todo b se, e somente se, para todo par de setas $f: b \to b'$ e $g: c \to c'$ tem-se o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} S_c(b) = S_b(c) \arrow[r, "S_b(g)"] \arrow[d, "S_c(f)"'] & S_{c'}(b) = S_b(c') \arrow[d, "S_{c'}(f)"] \\ S_c(b') = S_{b'}(c) \arrow[r, "S_{b'}(g)"'] & S_{c'}(b') = S_{b'}(c') \end{tikzcd} \quad , \qquad (3.2.7.1)$$

ou seja, $S_{b'}(g) \circ S_c(f) = S_{c'}(f) \circ S_b(g)$.

Essas setas iguais (3.2.7.1) em $\mathcal{D}$ são então o valor $S(f,g)$ da função seta de S em f e g.

Prova. Tomando as correspondentes setas identidades 1_b,$1_{b'}$, 1_c e $1_{c'}$, a definição da composição em $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ mostra que

$$\langle 1_{b'}, g\rangle \circ \langle f, 1_c\rangle = \langle 1_{b'} \circ f, g \circ 1_c\rangle = \langle f, g\rangle = \langle f \circ 1_b, 1_{c'} \circ g\rangle = \langle f, 1_{c'}\rangle \circ \langle 1_b, g\rangle .$$

Aplicando o funtor S a essa equação dá

$S(1_{b'}, g) \circ S(f, 1_c) = S(f, 1_{c'}) \circ S(1_b, g)$;

como um diagrama comutativo essa condição é

$$\begin{tikzcd}
S(b,c) \arrow[r, "S(1_b, g)"] \arrow[d, "S(f,1_c)"'] & S(b,c') \arrow[d, "S(f,1_{c'})"] \\
S(b',c) \arrow[r, "S(1_{b'}, g)"'] & S(b',c') \ .
\end{tikzcd} \qquad (3.2.7.2)$$

Isso é justamente a condição (3.2.7.1) reescrita, então, essa condição (3.2.7.1) é necessária.

Reciprocamente, dados $S_c: \mathcal{B} \to \mathcal{D}$, $S_b: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores tais que $S_c(b) = S_b(c)$ para todo b de $\mathcal{B}$ e c de $\mathcal{C}$, e tais que satisfazem a condição (3.3.7.1), nós definimos $S: \mathcal{B} \times \mathcal{C} \to D$ atuando sobre objetos por $S(\langle b, c\rangle) = (S_b(c) = S_c(b))$, e atuando sobre setas tomando $\langle b, c\rangle \xrightarrow{\langle f, g\rangle} \langle b', c'\rangle$ para $S_{b'}(g) \circ S_c(f) = S_{c'}(f) \circ S_b(g)$. O diagrama abaixo nos mostra que S é um funtor:

$$\begin{tikzcd}
S_c(b) = S_b(c) \arrow[r, "S_b(g)"] \arrow[d, "S_c(f)"'] \arrow[dr, "S(\langle f,g\rangle)"] & S_{c'}(b) = S_b(c') \arrow[d, "S_{c'}(f)"] \\
S_c(b') = S_{b'}(c) \arrow[r, "S_{b'}(g)"'] \arrow[d, "S_{b'}(g)"'] & S_{c'}(b') = S_{b'}(c') \arrow[d, "S_{b'}(g')"] \\
S_{c'}(b') = S_{b'}(c') \arrow[r, "S_{b'}(g')"] \arrow[d, "S_{c'}(f')"'] \arrow[dr, "S(\langle f',g'\rangle)"] & S_{c''}(b') = S_{b'}(c'') \arrow[d, "S_{c''}(f')"] \\
S_{c'}(b'') = S_{b''}(c') \arrow[r, "S_{b''}(g')"'] & S_{c''}(b'') = S_{b''}(c'')\ .
\end{tikzcd}$$

De fato, sejam $\langle b,c\rangle \xrightarrow{\langle f,g\rangle} \langle b',c'\rangle \xrightarrow{\langle f',g'\rangle} \langle b'',c''\rangle$ uma sequência de setas em $\mathcal{B}\times\mathcal{C}$, então,

(F1) $S(\langle f',g'\rangle\circ\langle f,g\rangle) =$

$$= ((S_{b''}(g')\circ S_{c'}(f'))\circ(S_{b'}(g)\circ S_c(f)) = (S_{c''}(f')\circ S_{b'}(g'))\circ S_{c'}(f)\circ S_b(g))$$

$$= ((S_{b''}(g')\circ S_{c'}(f') = S_{c''}(f')\circ S_{b'}(g'))\circ(S_{b'}(g)\circ S_c(f) = S_{c'}(f)\circ S_b(g))$$

$$= S(\langle f',g'\rangle)\circ S(\langle f,g\rangle)\ .$$

(F2) $\left(1_{\langle b,c\rangle}\right) = S(\langle 1_b, 1_c\rangle) = \left(S_b(1_c)\circ S_c(1_b) = S_c(1_b)\circ S_b(1_c)\right) = (1_{S_b(c)}\circ 1_{S_c(b)} = 1_{S_c(b)}\circ 1_{S_b(c)}) = 1_{S(\langle b,c\rangle)}$. ■

Note que, na verdade, $S(-,g){:}\,S(-,c)\to S(-,c')$ e $S(f,-){:}\,S(b,-)\to S(b',-)$ são transformações naturais, respectivamente, entre funtores do tipo $S(-,c){:}\,\mathcal{B}\to\mathcal{D}$ e entre funtores do tipo $S(b,-){:}\,\mathcal{C}\to\mathcal{D}$, induzidas por cada seta, respectivamente, $g{:}\,c\to c'$ em $\mathcal{C}$ e $f{:}\,b\to b'$ em $\mathcal{B}$ e, tendo como componentes, respectivamente, $S(-,g)_b = S(1_b,g){:}\,S(b,c)\to S(b,c')$ para cada b de $\mathcal{B}$ e

$S(f,-)_c = S(f,1_c){:}\, S(b,c) \to S(b',c)$ para cada c de $\mathcal{C}$. A naturalidade tanto de $S(-,g)$ quanto de $S(f,-)$ é atestada pela comutatividade do diagrama (3.3.7.2). Mais especificamente, para cada seta $f{:}\, b \to b'$ em $\mathcal{B}$ nós temos o diagrama comutativo em $\mathcal{D}$

$$\begin{tikzcd} b \arrow[d, "f"'] \\ b' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S(b,c) \arrow[r, "S(1_b,g)"] \arrow[d, "S(f,1_c)"'] & S(b,c') \arrow[d, "S(f,1_{c'})"] \\ S(b',c) \arrow[r, "S(1_{b'},g)"'] & S(b',c') \end{tikzcd} ,$$

ou seja, $S(1_{b'},g) \circ S(f,1_c) = S(f,1_{c'}) \circ S(1_b,g)$. E para cada seta $g{:}\, c \to c'$ em $\mathcal{C}$ nós temos o diagrama comutativo em $\mathcal{D}$

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "g"'] \\ c' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S(b,c) \arrow[r, "S(f,1_c)"] \arrow[d, "S(1_b,g)"'] & S(b',c) \arrow[d, "S(1_{b'},g)"] \\ S(b,c') \arrow[r, "S(f,1_{c'})"'] & S(b',c') \end{tikzcd} ,$$

ou seja, $S(f,1_{c'}) \circ S(1_b,g) = S(1_{b'},g) \circ S(f,1_c)$.

Note que o teorema fundamental dos bi-funtores pode ser reescrito da seguinte forma:

Teorema Fundamental dos Bi-funtores (II). Sejam $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Para todos os objetos c de $\mathcal{C}$ e b de $\mathcal{B}$, sejam $S_c{:}\, \mathcal{B} \to \mathcal{D}$, $S_b{:}\, \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores tais que $S_c(b) = S_b(c)$ para todo b e c. Então, existe um bi-funtor $S{:}\, \mathcal{B} \times \mathcal{C} \to D$ com $S(-,c) = S_c$ para todo c e $S(b,-) = S_b$ para todo b se, e somente se, todo par de setas $f{:}\, b \to b'$ em $\mathcal{B}$ e

$g: c \to c'$ em $\mathcal{C}$ induzem as transformações naturais, respectivamente, $S(f, -): S(b, -) \dot{\to} S(b', -)$ e $S(-, g): S(-, c) \dot{\to} S(-, c')$.

Vários tipos de combinações são possíveis, algumas das quais bastante importantes, de modo que apresentaremos algumas dessas aqui. Por exemplo, é possível formar produtos de mais do que duas categorias, além de ser possível também a combinação de categorias produto com categorias opostas. Em particular, é possível formar um bi-funtor que é contravariante na primeira variável e covariante na segunda variável. Por exemplo, o bi-funtor $\mathcal{B}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, que é contravariante em $\mathcal{B}$ e covariante em $\mathcal{C}$ com valores em $\mathcal{D}$. Um exemplo muito importante desse tipo de bi-funtor é o que surge da combinação dos funtores-hom covariantes e contravariantes. Deixe-nos pormenorizar um pouco mais.

Definição 3.2.7.3. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria localmente pequena. Agora, note que o diagrama (3.2.4.3) em §3.2.4 mostra que os funtores $\hom(-, c): \mathcal{C}^{op} \to \text{Set}$ e $\hom(b, -): \mathcal{C} \to \text{Set}$ satisfazem a condição (3.2.7.1) do teorema, que é requerida para formar bi-funtores. Dessa forma, os funtores-hom covariante e contravariante formam o bi-funtor-hom $\hom(-, -): \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \text{Set}$ que é contravariante na primeira variável e covariante na segunda variável com valores em Set.

3.2.7.4. Bi-funtores-hom

Interpretando o bi-funtor $\hom(-, -): \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \text{Set}$ pela segunda leitura do teorema fundamental dos bi-funtores, cada seta $g: a \to a'$ em $\mathcal{C}$ induz uma transformação natural

$$\hom(g, -) : \hom(a', -) \dot{\to} \hom(a, -)$$

entre funtores

$\mathcal{C}(a, -) = \hom(a, -) : \mathcal{C} \to \text{Set}$,

tendo como componentes $\hom(g, -)_b = \hom(g, b) : \hom(a', b) \to \hom(a, b)$, para cada b de $\mathcal{C}$. Assim, para cada seta $k: b \to b'$ em $\mathcal{C}$ nós temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} b \arrow[d, "k"'] \\ b' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \hom(a',b) \arrow[r, "\hom(g,b)"] \arrow[d, "\hom(a',k)"'] & \hom(a,b) \arrow[d, "\hom(a,k)"] \\ \hom(a',b') \arrow[r, "\hom(g,b')"'] & \hom(a,b') \end{tikzcd}$$

comutando da seguinte forma em Set:

$$\begin{tikzcd} b \arrow[d, "k"'] \\ b' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f \arrow[r, "\hom(g,b)"] \arrow[d, "\hom(a',k)"'] & f \circ g \arrow[d, "\hom(a,k)"] \\ k \circ f \arrow[r, "\hom(g,b')"'] & (k \circ f) \circ g = k \circ (f \circ g)\,. \end{tikzcd}$$

A rota inferior leva f para $(k \circ f) \circ g$, e a rota superior leva f para $k \circ (f \circ g)$. Ou seja, $\hom(g,b') \circ \hom(a',k) = \hom(a,k) \circ \hom(g,b)$.

Similarmente, cada seta $k: b \to b'$ em $\mathcal{C}$ induz uma transformação natural

$$\hom(-,k) : \hom(-,b) \dot{\to} \hom(-,b')$$

entre funtores

$\mathcal{C}(-,b) = \hom(-,b) : \mathcal{C}^{op} \to \text{Set}$,

tendo como componentes $\hom(-,k)_a = \hom(a,k) : \hom(a,b) \to \hom(a,b')$, para cada a de $\mathcal{C}^{op}$. Assim, para cada seta $g: a \to a'$ em $\mathcal{C}^{op}$ nós temos o seguinte diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
a' \arrow[d, "g"'] & \mathrm{hom}(a',b) \arrow[r, "\mathrm{hom}(a',k)"] \arrow[d, "\mathrm{hom}(g,b)"'] & \mathrm{hom}(a',b') \arrow[d, "\mathrm{hom}(g,b')"] \\
a & \mathrm{hom}(a,b) \arrow[r, "\mathrm{hom}(a,k)"'] & \mathrm{hom}(a,b')
\end{tikzcd}
$$

comutando da seguinte forma em Set:

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "g"'] & f \arrow[r, "\mathrm{hom}(a',k)"] \arrow[d, "\mathrm{hom}(g,b)"'] & k \circ f \arrow[d, "\mathrm{hom}(g,b')"] \\
a' & f \circ g \arrow[r, "\mathrm{hom}(a,k)"'] & k \circ (f \circ g) = (k \circ f) \circ g\ .
\end{tikzcd}
$$

A rota inferior leva f para $k \circ (f \circ g)$, e a rota superior leva f para $(k \circ f) \circ g$. Ou seja, $\mathrm{hom}(a,k) \circ \mathrm{hom}(g,b) = \mathrm{hom}(g,b') \circ \mathrm{hom}(a',k)$.

Note que os dois diagramas acima produzem equações que são apenas inversões dos lados da igualdade, o que nos dá justamente o diagrama (3.2.4.3) em §3.2.4.

3.2.7.5. Transformações naturais entre bi-funtores

Nós devemos, agora, apresentar a definição de uma transformação natural entre bi-funtores. Esse tipo de transformação natural é muito importante, pois aparece na definição da noção mais importante da teoria das categorias, a saber, a noção de funtores adjuntos, ou, adjunção.

Definição 3.2.7.5.1. Considere dois bi-funtores $S, S' \colon \mathcal{B} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e seja α uma função que atribui a cada par de objetos b de $\mathcal{B}$, c de $\mathcal{C}$ uma seta $\alpha(b,c) \colon S(b,c) \to S'(b,c)$ em

$\mathcal{D}$. A função α é dita natural em b se para cada objeto c de $\mathcal{C}$ os componentes $\alpha(b,c)$ para todo b definem uma transformação natural $\alpha(-,c)\colon S(-,c) \dot{\to} S'(-,c)$ de funtores $\mathcal{B} \to \mathcal{D}$. Analogamente, a função α é dita natural em c se para cada objeto b de $\mathcal{B}$ os componentes $\alpha(b,c)$ para todo c definem uma transformação natural $\alpha(b,-)\colon S(b,-) \dot{\to} S'(b,-)$ de funtores $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

Teorema 3.2.7.5.2. A função α é uma transformação natural $\alpha\colon S \dot{\to} S'$ para bi-funtores $S, S'\colon \mathcal{B} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se, e somente se, $\alpha(b,c)$ é natural em b para cada objeto c de $\mathcal{C}$ e natural em c para cada objeto b de $\mathcal{B}$.

Prova. Se α é natural em b então para cada $f\colon b \to b'$ em $\mathcal{B}$, o diagrama abaixo comuta em $\mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[d, "f"'] & S(b,c) \arrow[r, "\alpha(b,c)"] \arrow[d, "S(f,1_c)"'] & S'(b,c) \arrow[d, "S'(f,1_c)"] \\
b' & S(b',c) \arrow[r, "\alpha(b',c)"'] & S'(b',c)
\end{tikzcd} ,$$

ou seja, $\alpha(b',c') \circ S(f,1_{c'}) = S'(f,1_{c'}) \circ \alpha(b,c')$.

Se α é natural em c então para cada $g\colon c \to c'$ em $\mathcal{C}$, o diagrama abaixo comuta em $\mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "g"'] & S(b,c) \arrow[r, "\alpha(b,c)"] \arrow[d, "S(1_b,g)"'] & S'(b,c) \arrow[d, "S'(1_b,g)"] \\
c' & S(b,c') \arrow[r, "\alpha(b,c')"'] & S'(b,c')
\end{tikzcd} ,$$

ou seja, $\alpha(b, c') \circ S(1_b, g) = S'(1_b, g) \circ \alpha(b, c)$.

Se α é uma transformação natural $\alpha: S \dot{\rightarrow} S'$ para bi-funtores $S, S': \mathcal{B} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ então para cada seta $\langle b, c\rangle \xrightarrow{\langle f,g\rangle} \langle b', c'\rangle$ em $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$, nós devemos ter, pela condição de naturalidade, $\alpha(b', c') \circ S(f, g) = S'(f, g) \circ \alpha(b, c)$. Vejamos o diagrama abaixo:

$$
\begin{tikzcd}
S(b',c') \arrow[r, "\alpha(b',c')"] & S'(b',c') \\
S(b',c) \arrow[u, "S(1_{b'},g)"] \arrow[r, "\alpha(b',c)"] & S'(b',c) \arrow[u, "S'(1_{b'},g)"'] \\
S(b,c) \arrow[u, "S(f,1_c)"] \arrow[r, "\alpha(b,c)"] \arrow[uu, bend left=60, "S(f,g)"] \arrow[d, "S(1_b,g)"'] & S'(b,c) \arrow[u, "S'(f,1_c)"'] \arrow[uu, bend right=60, "S'(f,g)"'] \arrow[d, "S'(1_b,g)"] \\
S(b,c') \arrow[r, "\alpha(b,c')"'] \arrow[uuu, bend left=80, "S(f,1_{c'})"] & S'(b,c') \arrow[uuu, bend right=80, "S'(f,1_{c'})"'] .
\end{tikzcd}
$$

Desde que α é natural em c, o primeiro e o último quadrado interno do diagrama acima comutam, e desde que α também é natural em b, o quadrado interno do meio e o quadrado externo comutam. Assim, o diagrama inteiro comuta, e $\alpha(b', c') \circ S(f, g) = S'(f, g) \circ \alpha(b, c)$, como requerido. A recíproca é análoga. ■

3.2.8 Exponenciação

Considere a seguinte função entre conjuntos: $f(x,y): A \times B \to C$, com variáveis x sobre A e y sobre B. Agora, fixando $a \in A$, nós temos a função $f(a,y): B \to C$, e, portanto, um elemento $f(a,y) \in C^B$, onde C^B é o conjunto das funções de B para C. Se nós deixarmos a variando sobre A, então nós temos uma função $\tilde{f}: A \to C^B$ definida por $a \mapsto f(a,y)$, ou seja, a função $\tilde{f}: A \to C^B$ toma um parâmetro qualquer $a \in A$ e leva para a função $f(a,y): B \to C \in C^B$. Assim, ela é unicamente determinada pela equação $\tilde{f}(a)(b) = f(a,b)$. De fato, qualquer mapeamento $\phi: A \to C^B$ é unicamente da forma $\phi = \tilde{f}$, para algum $f: A \times B \to C$, o que nos permite definir $f(a,b) := \phi(a)(b)$.

Grosso modo, o exposto acima significa que existe um isomorfismo de conjuntos-hom $\text{hom}\,(A \times B, C) \cong \text{hom}\,(A, C^B)$, ou seja, existe uma correspondência bijetiva entre as funções da forma $f: A \times B \to C$ e as funções da forma $\tilde{f}: A \to C^B$. A mediação dessa bijeção é feita por meio de uma operação de evaluação, a qual devemos explicitar a fim de que a referida bijeção possa ser generalizada para outras categorias. Na categoria Set, a função evaluação é a seguinte: $\text{eval}: C^B \times B \to C$, definida por $(g,b) \mapsto g(b)$, ou seja, $\text{eval}(g,b) = g(b)$. Tal função evaluação possui a seguinte propriedade universal: dado qualquer conjunto A e qualquer função $f: A \times B \to C$, existe uma única função $\tilde{f}: A \to C^B$ tal que $\text{eval} \circ (\tilde{f} \times 1_B) = f$. Isto é, $\text{eval}(\tilde{f}(a), b) = f(a,b)$.

Definição 3.2.8.1. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com produtos binários. Um exponencial de objetos b e c consiste de um objeto c^b e uma seta $\epsilon: c^b \times b \to c$ tal que, para qualquer objeto a e seta $f: a \times b \to c$, existe uma única seta $\tilde{f}: a \to c^b$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "\tilde{f}"'] \\ c^b \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} a \times b \arrow[d, "\tilde{f} \times 1_b"'] \arrow[dr, "f"] & \\ c^b \times b \arrow[r, "\epsilon"'] & c \end{tikzcd}$$

comuta. Isto é, $\epsilon \circ (\tilde{f} \times 1_b) = f$. Segue abaixo a terminologia básica:

- $\epsilon: c^b \times b \to c$ é a seta evaluação;
- $\tilde{f}: a \to c^b$ é chamada a transposta exponencial de f;
- Dada qualquer seta $g: a \to c^b$, nós escrevemos $\bar{g} := \epsilon \circ (g \times 1_b): a \times b \to c$ e chamamos $\bar{g}$ a transposta de g. Pela cláusula de unicidade da definição, nós temos que $\tilde{\bar{g}} = g$, e para qualquer $f: a \times b \to c$, $\bar{\tilde{f}} = f$, ou seja, a transposição da transposição é a identidade.

Dessa forma, a operação de transposição $(f: a \times b \to c) \mapsto (\tilde{f}: a \to c^b)$ fornece uma inversa para a operação induzida $(g: a \to c^b) \mapsto (\bar{g} := \epsilon \circ (g \times 1_b): a \times b \to c)$, produzindo, assim, o isomorfismo hom $(A \times B, C) \cong$ hom (A, C^B).

3.2.9 Categorias *comma*

A categoria que iremos apresentar agora é a categoria comma (categoria das setas). Uma maneira intuitiva de entender essa categoria é da seguinte forma: imagine que queremos comparar guitarras e violinos; então, estabelecemos uma base de discussão comum: instrumentos musicais. Assim, temos a categoria das guitarras, a categoria dos violinos, a categoria "base" dos instrumentos musicais, e dois funtores que traduzem guitarras e violinos para instrumentos musicais. Generalizando, nós temos então que as construções das categorias $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ se relacionam se for estabelecida uma categoria base $\mathcal{C}$ junto com dois funtores $F: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e $G: \mathcal{E} \to \mathcal{C}$, ou seja, F e G mapeiam as construções de $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ permitindo que essas construções sejam relacionáveis em $\mathcal{C}$: dados objetos $x \in \mathcal{D}$ e $y \in \mathcal{E}$, nós podemos ter os morfismos $f: F(x) \to G(y)$ em $\mathcal{C}$, que são exatamente os objetos da categoria Comma. Para sermos mais precisos, os objetos são triplas $\langle x, y, f \rangle$ onde x é um objeto em $\mathcal{D}$, y um objeto em $\mathcal{E}$, e f um morfismo $F(x) \to G(y)$. Para definirmos os morfismos dessa categoria, devemos lembrar que tais morfismos devem respeitar a estrutura dos objetos. Como se trata de uma tripla, isso quer dizer que devemos respeitar cada componente da tripla de maneira separada. Então, dado um morfismo $\langle x, y, f \rangle \to \langle x', y', f' \rangle$, é óbvio que para os componentes x, x' e y, y' nós devemos ter os morfismos $j: x \to x'$ e $h: y \to y'$. Já para respeitar os morfismos f e f', nós devemos respeitar todas as composições nos termos que as envolvem, ou seja, nós devemos ter um diagrama comutativo de algum tipo.

Definição 3.2.9.1. Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ categorias, e $F: \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ e $G: \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ funtores. A categoria comma $(F \downarrow G)$ possui como objetos triplas $\langle \alpha, \beta, f \rangle$, onde α é um objeto em $\mathcal{A}$, β é um objeto em $\mathcal{B}$ e $f: F(\alpha) \to G(\beta)$ é um morfismo em $\mathcal{C}$. Os morfismos entre dois objetos $\langle \alpha, \beta, f \rangle$ e $\langle \alpha', \beta', f' \rangle$ são pares $\langle g, h \rangle$, onde $g: \alpha \to \alpha'$ e $h: \beta \to \beta'$ são morfismos em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente, tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(\alpha) \arrow[r, "F(g)"] \arrow[d, "f"'] & F(\alpha') \arrow[d, "f'"] \\
G(\beta) \arrow[r, "G(h)"'] & G(\beta')
\end{tikzcd}$$

comuta. Ou seja, $f' \circ F(g) = G(h) \circ f$.

O morfismo identidade para qualquer objeto $\langle \alpha, \beta, f \rangle$ é o par $\langle id_\alpha, id_\beta \rangle$, que existe porque id_α e id_β existem em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente. A operação de composição é dada como segue: se $g: \alpha \to \alpha'$ é componível com $g': \alpha' \to \alpha''$ em $\mathcal{A}$, e $h: \beta \to \beta'$ é componível com $h': \beta' \to \beta''$ em $\mathcal{B}$, então, $\langle g, h \rangle$ e $\langle g', h' \rangle$ são componíveis em $(F \downarrow G)$, com $\langle g', h' \rangle \circ \langle g, h \rangle = \langle g' \circ g, h' \circ h \rangle$. Essa composição tem como domínio $\langle \alpha, \beta, f \rangle$ e como codomínio $\langle \alpha'', \beta'', f'' \rangle$. Os diagramas comutativos resultantes de $\langle g, h \rangle$ e $\langle g', h' \rangle$ nos dão o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
F(\alpha) \arrow[r, "F(g)"] \arrow[d, "f"'] & F(\alpha') \arrow[r, "F(g')"] \arrow[d, "f'"] & F(\alpha'') \arrow[d, "f''"] \\
G(\beta) \arrow[r, "G(h)"'] & G(\beta') \arrow[r, "G(h')"'] & G(\beta'') .
\end{tikzcd}$$

Note que as setas horizontais compostas requerem, por funtorialidade, $F(g' \circ g)$ e $G(h' \circ h)$, o que nos dá:

$$\begin{tikzcd}
F(\alpha) \arrow[r, "F(g' \circ g)"] \arrow[d, "f"'] & F(\alpha'') \arrow[d, "f''"] \\
G(\beta) \arrow[r, "G(h' \circ h)"'] & G(\beta'') .
\end{tikzcd}$$

Para mostrar que $(F \downarrow G)$ é realmente uma categoria, devemos verificar que a composição de dois $(F \downarrow G)$-morfismos também é um $(F \downarrow G)$-morfismo; que a composição é associativa; e que $\langle id_\alpha, id_\beta \rangle$ é um morfismo identidade para $\langle \alpha, \beta, f \rangle$. Note que para mostrarmos que a composição de dois $(F \downarrow G)$-morfismos também é um $(F \downarrow G)$-morfismo devemos demonstrar que $f'' \circ F(g' \circ g) = G(h' \circ h) \circ f$. De fato,

$$f'' \circ F(g' \circ g) = f'' \circ F(g') \circ F(g) = G(h') \circ f' \circ F(g) = G(h') \circ G(h) \circ f = G(h' \circ h) \circ f \ .$$

A associatividade da composição de morfismos segue da associatividade em cada morfismo componente. Da mesma forma, a lei da identidade segue da lei da identidade para cada morfismo componente.

3.3 Propriedade universal e limites

3.3.1 Seta universal

Em teoria das categorias nós temos muitas construções com suas respectivas duais, tais como: produto, co-produto, *pullback*, *pullshot*, equalizadores, co-equalizadores etc.. Algo que é bastante freqüente nas definições dessas construções é o seguinte: para todo _ existe um único _ tal que _. Na verdade, todas as construções citadas acima, e outras, podem ser consideradas como casos particulares de uma única e mesma noção (ou, sua dual): a noção de seta universal. A definição de seta universal é dada abaixo:

Definição 3.3.1.1. Sejam $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$ categorias, c um objeto de $\mathcal{C}$, e $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ um funtor. Uma seta universal de c para F é um par $\langle r, u \rangle$, onde r é um objeto de $\mathcal{D}$ e u é uma seta $u : c \to F(r)$ em $\mathcal{C}$, tal que para todo par $\langle d, f \rangle$, onde d é um objeto de $\mathcal{D}$ e f uma seta $f: c \to F(d)$ em $\mathcal{C}$, existe uma única seta $f' : r \to d$ em $\mathcal{D}$, tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} r \arrow[d, "f'"'] \\ d \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & F(r) \arrow[d, "F(f')"] \\ & F(d) \end{tikzcd}$$

comuta. Ou seja, $F(f') \circ u = f$.

Vejamos o conceito dual de seta universal:

Definição 3.3.1.2. Sejam $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$ categorias, c um objeto de $\mathcal{C}$, e $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ um funtor. Uma seta universal de F para c é um par $\langle r, v \rangle$, onde r é um objeto de $\mathcal{D}$, e v é uma seta $v : F(r) \to c$ em $\mathcal{C}$, tal que para todo par $\langle d, f \rangle$, onde d é um objeto de $\mathcal{D}$, e f é uma seta $f : F(d) \to c$ em $\mathcal{C}$, existe uma única seta $f' : d \to r$ em $\mathcal{D}$, tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} d \arrow[d, "f'"'] \\ r \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(d) \arrow[d, "F(f')"'] \arrow[dr, "f"] & \\ F(r) \arrow[r, "v"'] & c \end{tikzcd}$$

comuta. Isto é, $v \circ F(f') = f$.

É possível expressar a noção de universalidade em termos de “elementos universais”.

Definição 3.3.1.3. Seja $\mathcal{D}$ uma categoria e $H: \mathcal{D} \to \boldsymbol{Set}$ um funtor. Um elemento universal do funtor H é um par $\langle r, e \rangle$ consistindo de um objeto r de $\mathcal{D}$ e um elemento $e \in Hr$ tal que, para cada par $\langle d, x \rangle$ com $x \in Hd$, existe uma única seta $f: r \to d$ de $\mathcal{D}$ com $(Hf)(e) = x$.

3.3.1.4 Unicidade da seta universal

Para demonstrar a unicidade a menos de isomorfismo da seta universal (e da sua dual) utilizaremos a categoria *comma*. O objetivo é mostrar que uma seta universal é um objeto em uma categoria *comma*, e mais, é um objeto inicial (e, no caso da sua seta dual, um objeto terminal) em uma categoria *comma*. Assim, desde que já demonstramos a unicidade a menos de isomorfismo de objetos iniciais e objetos terminais, nada mais precisa ser provado.

Definição 3.3.1.4.1. A categoria **1** é uma categoria que possui um único objeto, $*$, e um único morfismo, f. A partir disso, podemos ver que tal estrutura está totalmente determinada:

Como $*$ é o único objeto de **1**, nós temos, necessariamente, $f : * \to *$, e, portanto, (i) $f = id_*$. Vemos, também, que a única composição possível é: (ii) $f \circ f = f$. Podemos, então, satisfazer as condições necessárias para que **1** seja uma categoria:

- Lei da Identidade: $id_* \circ f \overset{(i)}{=} f \circ id_* \overset{(i)}{=} f \circ f \overset{(ii)}{=} f$;
- Lei da Associatividade: $(f \circ f) \circ f \overset{(ii)}{=} f \circ f \overset{(ii)}{=} f \circ (f \circ f)$. ■

Definição 3.3.1.4.2. Sejam $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ categorias arbitrárias, c um objeto de $\mathcal{C}$, e $G: \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ um funtor. c pode ser considerado como sendo um funtor $c : \mathbf{1} \to \mathcal{C}$, isto é, um funtor da categoria **1** para a categoria $\mathcal{C}$. Nós podemos, assim, definir a categoria comma $(c \downarrow G)$. Um $(c \downarrow G)$-objeto é uma tripla $\langle *, b, f \rangle \Leftrightarrow f: c(*) \to G(b)$, e um $(c \downarrow G)$-morfismo entre dois $(c \downarrow G)$-objetos $\langle *, b, f \rangle$, $\langle *, b', f' \rangle$ é um par $\langle l, h \rangle$ com $l : * \to *$ e $h : b \to b'$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} c(*) \arrow[r, "c(l)"] \arrow[d, "f"'] & c(*) \arrow[d, "f'"] \\ F(b) \arrow[r, "F(h)"'] & F(b') \end{tikzcd}$$

comuta. Ou seja, $f' \circ c(l) = G(h) \circ f$.

Note que l é o morfismo identidade $id_* : * \to *$, e, claro, $c(*) = c \in Ob\mathcal{C}$, e $c(id_*) = id_c$. Assim, os objetos de $(c \downarrow G)$ são triplas $\langle c, b, f \rangle \Leftrightarrow f : c \to G(b)$, e os morfismos entre $\langle c, b, f \rangle$, $\langle c, b', f' \rangle$ são pares $\langle id_c, h \rangle$ com $id_c : c \to c$, $h : b \to b'$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "id_c"] \arrow[d, "f"'] & c \arrow[d, "f'"] \\ F(b) \arrow[r, "F(h)"'] & F(b') \end{tikzcd}$$

comuta. Ou seja, $(f' \circ id_c = G(h) \circ f) = (f' = G(h) \circ f)$.

Definição 3.3.1.4.3. Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ categorias arbitrárias, c um objeto de $\mathcal{C}$, e $F: \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ um funtor. c pode ser considerado como sendo um funtor $c : \mathbf{1} \to \mathcal{C}$, isto é, um funtor da categoria **1** para a categoria $\mathcal{C}$. Nós podemos, assim, definir a categoria comma $(F \downarrow c)$. Um $(F \downarrow c)$-objeto é uma tripla $\langle a, *, f \rangle \Leftrightarrow f: F(a) \to c(*)$, e um $(F \downarrow c)$-morfismo entre dois $(F \downarrow c)$-objetos $\langle a, *, f \rangle$, $\langle a', *, f' \rangle$ é um par $\langle l, h \rangle$ com $l : a \to a'$ e $h : * \to *$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} F(a) \arrow[r, "F(l)"] \arrow[d, "f"'] & F(a') \arrow[d, "f'"] \\ c(*) \arrow[r, "c(h)"'] & c(*) \end{tikzcd}$$

comuta. Ou seja, $f' \circ F(l) = c(h) \circ f$.

Note que, analogamente ao que ocorre na Definição 3.4.1.2.2, h é o morfismo identidade $id_* : * \to *$, e, claro, $c(*) = c \in Ob\mathcal{C}$, e $c(id_*) = id_c$. Assim, os objetos de $(F \downarrow c)$ são triplas $\langle a, c, f \rangle \Leftrightarrow f : F(a) \to c$, e os morfismos entre $\langle a, c, f \rangle$, $\langle a', c, f' \rangle$ são pares $\langle l, id_c \rangle$ com $l : a \to a' id_c : c \to c$, tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} F(a) \arrow[r, "F(l)"] \arrow[d, "f"'] & F(a') \arrow[d, "f'"] \\ c \arrow[r, "id_c"'] & c \end{tikzcd}$$

comuta. Ou seja, $(id_c \circ f = f' \circ F(l)) = (f = f' \circ F(l))$.

Teorema 3.3.1.4.4. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ duas categorias, c um objeto de $\mathcal{C}$, e G um funtor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$. Um par ordenado $\langle b_i, f_i \rangle$, onde b_i é um objeto de $\mathcal{B}$ e f_i um morfismo $f_i : c \to G(b_i)$ em $\mathcal{C}$, é um morfismo universal de c para G se, e somente se, $\langle c, b_i, f_i \rangle$ é um objeto inicial na categoria comma $(c \downarrow G)$.

Prova.

($\Rightarrow$) Suponha que $\langle b_i, f_i \rangle$ é um morfismo universal de c para G. Assim, para qualquer outro objeto $\langle c, b, f \rangle$ em $(c \downarrow G)$, o fato de que f é um morfismo $f : c \to G(b)$ nos dá um único morfismo $h : b_i \to b$ tal que $G(h) \circ f_i = f$. Nós, então, vemos que $\langle id_c, h \rangle$ é, de fato, um morfismo em $(c \downarrow G)$, mais especificamente, um morfismo de $\langle c, b_i, f_i \rangle$ para $\langle c, b, f \rangle$. Vamos supor, então, que exista outro morfismo $\langle id_c, k \rangle : \langle c, b_i, f_i \rangle \to \langle c, b, f \rangle$, dessa forma, k deve necessariamente ser um morfismo $k : b_i \to b$ tal que $G(k) \circ f_i = f$; mas, isso contradiz a unicidade do morfismo h. Assim, nós vemos que todo objeto em $(c \downarrow G)$ tem um único morfismo emanando de $\langle c, b_i, f_i \rangle$, e, então, $\langle c, b_i, f_i \rangle$ é objeto inicial em $(c \downarrow G)$.

($\Leftarrow$) Suponha que $\langle c, b_i, f_i \rangle$ é objeto inicial em $(c \downarrow G)$. Agora, note que se b é um objeto em $\mathcal{B}$, e f é um morfismo $f : c \to G(b)$, $\langle c, b, f \rangle$ é um objeto em $(c \downarrow G)$. Como $\langle c, b_i, f_i \rangle$ é objeto inicial em $(c \downarrow G)$, por definição, existe um único morfismo $\langle id_c, h \rangle$ em $(c \downarrow G)$ de $\langle c, b_i, f_i \rangle$ para $\langle c, b, f \rangle$. Dessa forma, h é o único morfismo $h : b_i \to b$ tal que $(G(h) \circ f_i = id_c \circ f) = (G(h) \circ f_i = f)$. ■

Teorema 3.3.1.4.5. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$ duas categorias, c um objeto de $\mathcal{C}$, e F um funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$. Um par ordenado $\langle a_t, f_t \rangle$, onde a_t é um objeto de $\mathcal{A}$ e f_t um morfismo

$f_t : F(a_t) \to c$ em $\mathcal{C}$, é um morfismo universal de F para c se, e somente se, $\langle a_t, c, f_t \rangle$ é um objeto terminal na categoria comma $(F \downarrow c)$.

Prova.

($\Rightarrow$) Suponha que $\langle a_t, f_t \rangle$ é um morfismo universal de F para c. Assim, para qualquer outro objeto $\langle a, c, f \rangle$ em $(F \downarrow c)$, o fato de que f é um morfismo $f : F(a) \to c$ nos dá um único morfismo $l : a \to a_t$ tal que $f_t \circ F(l) = f$. Nós, então, vemos que $\langle l, id_c \rangle$ é, de fato, um morfismo em $(F \downarrow c)$, mais especificamente, um morfismo de $\langle a, c, f \rangle$ para $\langle a_t, c, f_t \rangle$. Vamos supor, então, que exista outro morfismo $\langle k, id_c \rangle : \langle a, c, f \rangle \to \langle a_t, c, f_t \rangle$, dessa forma, k deve necessariamente ser um morfismo $k : a \to a_t$ tal que $f_t \circ F(k) = f$; mas, isso contradiz a unicidade do morfismo l. Assim, nós temos que para todo $(F \downarrow c)$-objeto $\langle a_x, c, f_x \rangle$, existe um único $(F \downarrow c)$-morfismo de$\langle a_x, c, f_x \rangle$ para $\langle a_t, c, f_t \rangle$, e, então, $\langle a_t, c, f_t \rangle$ é objeto terminal em $(F \downarrow c)$.

($\Leftarrow$) Suponha que $\langle a_t, c, f_t \rangle$ é objeto terminal em $(F \downarrow c)$. Agora, note que se a é um objeto em $\mathcal{A}$, e f é um morfismo $f: F(a) \to c$, $\langle a, c, f \rangle$ é um objeto em $(F \downarrow c)$. Como $\langle a_t, c, f_t \rangle$ é objeto terminal em $(F \downarrow c)$, por definição, para todo $(F \downarrow c)$-objeto $\langle a_x, c, f_x \rangle$, existe um único $(F \downarrow c)$-morfismo $\langle l, id_c \rangle$ de $\langle a_x, c, f_x \rangle$ para $\langle a_t, c, f_t \rangle$. Dessa forma, l é o único morfismo $l : a_x \to a_t$ tal que $(f_t \circ F(l) = id_c \circ f_x) = (f_t \circ F(l) = f_x)$. ■

Exemplo 3.3.1.4.6 (Produto categorial como o dual da seta universal)**.**

Podemos ver que as projeções $p : a \times b \to a$ e $q: a \times b \to b$ de um produto numa categoria $\mathcal{C}$ exemplificam uma seta universal. De fato, para quaisquer outros pares $f : c \to a$ e $g : c \to b$ para a e b, existe um único $h : c \to a \times b$ tal que $p \circ h = f$, $q \circ h = g$, sendo assim, $\langle p, q \rangle$ é um par universal. Para que $\langle p, q \rangle$ seja uma seta universal é necessária a introdução do funtor diagonal $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$. O funtor diagonal $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ é dado sobre objetos por $\Delta(c) = \langle c, c \rangle$ e sobre morfismos por $\Delta(f) = \langle f, f \rangle$. Dessa forma, f, g se tornam a seta $\langle f, g \rangle : \Delta(c) \to \langle a, b \rangle$ em $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$. Assim, $\langle p, q \rangle$ é uma seta universal de Δ para o objeto $\langle a, b \rangle$. Vamos pormenorizar isso um pouco.

Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ categorias, $\langle a, b \rangle$ um objeto de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, e $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ um funtor tal como definido acima. Uma seta universal de Δ para $\langle a, b \rangle$ é um par $\langle a \times b, \langle p, q \rangle \rangle$, onde

$a \times b$ é um objeto de $\mathcal{C}$, e $\langle p, q\rangle$ é uma seta $\langle p, q\rangle \colon \Delta(a \times b) \to \langle a, b\rangle$ em $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, tal que para todo par $\langle c, \langle f, g\rangle\rangle$, onde c é um objeto de $\mathcal{C}$, e $\langle f, g\rangle$ é uma seta $\langle f, g\rangle : \Delta(c) \to \langle a, b\rangle$ em $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, existe uma única seta $h : c \to a \times b$ em $\mathcal{C}$, tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "h"'] \\ a \times b \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Delta(c) \arrow[d, "\Delta(h)"'] \arrow[dr, "\langle f, g\rangle"] & \\ \Delta(a \times b) \arrow[r, "\langle p, q\rangle"'] & \langle a, b\rangle \end{tikzcd}$$

comuta. Isto é, $\langle p, q\rangle \circ \Delta(h) = \langle f, g\rangle$. Note que isso atesta exatamente a propriedade universal do produto: $\Delta(h) \colon \Delta(c) \to \Delta(a \times b) = \langle h, h\rangle \colon \langle c, c\rangle \to \langle a \times b, a \times b\rangle$, dada pelas setas $h : c \to a \times b$ e $h : c \to a \times b$; $\langle p, q\rangle \colon \Delta(a \times b) \to \langle a, b\rangle = \langle p, q\rangle \colon \langle a \times b, a \times b\rangle \to \langle a, b\rangle$, dada pelas setas $p : a \times b \to a$ e $q \colon a \times b \to b$; compondo, nós temos $\langle p, q\rangle \circ \langle h, h\rangle \colon \langle c, c\rangle \to \langle a, b\rangle$, dada pelas setas $p \circ h \colon c \to a$ e $q \circ h \colon c \to b$, que pela comutatividade do diagrama nós sabemos que é igual a $\langle f, g\rangle : \Delta(c) \to \langle a, b\rangle = \langle f, g\rangle : \langle c, c\rangle \to \langle a, b\rangle$, dada pelas setas $f : c \to a$ e $g : c \to b$. Ou seja, para quaisquer pares $f : c \to a$ e $g : c \to b$, existe uma única seta $h : c \to a \times b$ tal que $p \circ h = f$, $q \circ h = g$.

3.3.2 Imersão de Yoneda

Dentre as categorias de funtores existe uma muito útil, a saber, a categoria $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}$, onde $\mathcal{C}$ é uma categoria localmente pequena. Tais categorias possuem como objetos os chamados funtores set-valorados, ou seja, funtores tais como $F, G \colon \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$, e como setas transformações naturais $\alpha, \beta \colon F \dot{\to} G$ entre tais funtores. Dentre os objetos da categoria $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}$ estão os já apresentados set-valorados funtores-hom $\mathcal{C}(a, -) = \hom(a, -) : \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$. Note que o set-valorado bi-funtor da forma $\hom(-, -) \colon \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ possui como transposta exponencial um funtor contravariante

$$y \colon \mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Set}^{\mathcal{C}}.$$

Definição 3.3.2.1. A imersão Yoneda de $\mathcal{C}^{op}$ na categoria $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}$ é o funtor

$$y \colon \mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Set}^{\mathcal{C}}$$

que leva cada objeto c de $\mathcal{C}$ para o funtor representável covariante

$$y(c) = \hom(a, -)\colon \mathcal{C} \to \text{Set},$$

e cada seta $g\colon a \to a'$ em $\mathcal{C}$ para uma transformação natural

$$y(g) = \hom(g, -) : \hom(a', -) \dot{\to} \hom(a, -).$$

Note que $y(g)$ é uma transformação natural entre funtores-hom covariantes

$$\mathcal{C}(a, -) = \hom(a, -) : \mathcal{C} \to \text{Set},$$

tendo como componentes $y(g)b = \hom(g, b) : \hom(a', b) \to \hom(a, b)$, para cada b de $\mathcal{C}$.

Para ver que $y\colon \mathcal{C}^{op} \to \text{Set}^{\mathcal{C}}$ é, de fato, um funtor, considere as setas $f\colon a \to b, g\colon b \to c$ em $\mathcal{C}$. Agora, note que se nós tomarmos $g \circ f\colon a \to c$ como argumento para y, nós teremos $y(g \circ f) = \hom(g \circ f, -) : \hom(c, -) \dot{\to} \hom(a, -)$, com componentes dados em cada d de $\mathcal{C}$ por $y(g \circ f)d = \hom(g \circ f, d) : \hom(c, d) \to \hom(a, d)$, definidos por $k \mapsto k \circ (g \circ f)$. Assim, $y(g \circ f)d(k) = k \circ (g \circ f)$. Mas, ainda considerando as setas f, g acima, nós temos $y(g) = \hom(g, -) : \hom(c, -) \dot{\to} \hom(b, -)$, com componentes dados em cada d de $\mathcal{C}$ por $y(g)d = \hom(g, d) : \hom(c, d) \to \hom(b, d)$, definidos por $k \mapsto k \circ g$, e $y(f) = \hom(f, -) : \hom(b, -) \dot{\to} \hom(a, -)$, com componentes dados em cada d de $\mathcal{C}$ por $y(f)d = \hom(f, d) : \hom(b, d) \to \hom(a, d)$, definidos por $k \circ g \mapsto (k \circ g) \circ f$. Dessa forma, a composição $y(g)d \circ y(f)d : \hom(c, d) \dot{\to} \hom(a, d)$ é definida por $k \mapsto (k \circ g) \circ f$, ou seja, $y(g)d \circ y(f)d(k) = (k \circ g) \circ f$. Mas, pela lei da associatividade, $k \circ (g \circ f) = (k \circ g) \circ f$, e portanto, $y(g \circ f)d(k) = y(g)d \circ y(f)d(k)$. Agora, considere um objeto c de $\mathcal{C}$, e assim, nós temos $y(1_c) = \hom(1_c, -) : \hom(c, -) \dot{\to} \hom(c, -)$, com componentes dados em cada d de $\mathcal{C}$ por $y(1_c)d = \hom(1_c, d) : \hom(c, d) \to \hom(c, d)$, definidos por $f \mapsto f \circ 1_c = f$, assim, $y(1_c)d = 1_{y(c)d}$.

Se nós aplicarmos a transposição em $\hom(-, -)$ com respeito ao seu outro argumento, nós teremos, então, um funtor covariante

$$y\colon \mathcal{C} \to \text{Set}^{\mathcal{C}^{op}},$$

ou seja, um funtor covariante de $\mathcal{C}$ para uma categoria de funtores contravariantes set-valorados. A categoria $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ é chamada a categoria de pré-feixes de $\mathcal{C}$, sendo os objetos de $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$os pré-feixes sobre $\mathcal{C}$.

Definição 3.3.2.2. A imersão Yoneda de $\mathcal{C}$ na categoria $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ é o funtor

$$y \colon \mathcal{C} \to \mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{op}},$$

que leva cada objeto c de $\mathcal{C}$ para o funtor representável contravariante

$$y(c) = \hom(-, c) \colon \mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Set},$$

e cada seta $h \colon b \to b'$ em $\mathcal{C}$ para uma transformação natural

$$y(h) = \hom(-, h) : \hom(-, b) \dot{\to} \hom(-, b').$$

Note que $y(h)$ é uma transformação natural entre funtores-hom contravariantes

$$\mathcal{C}(-, b) = \hom(-, b) : \mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Set},$$

tendo como componentes $y(h)a = \hom(a, h) : \hom(a, b) \to \hom(a, b')$, para cada a de $\mathcal{C}^{op}$.
O funtor

$$y \colon \mathcal{C} \to \mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$$

é a imersão de Yoneda covariante.

Lema 3.3.2.3 (Lema de Yoneda)**.**

(Formulação Covariante) Seja $\mathcal{C}$ uma categoria localmente pequena. Para qualquer objeto c de $\mathcal{C}$ e qualquer objeto F de $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}$ existe um isomorfismo

$$\mathcal{Y}_{c,F} \colon \mathrm{Nat}_{\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}}(\hom(c, -), F) \cong Fc$$

natural em F e em c.

(Formulação Contravariante) Seja $\mathcal{C}$ uma categoria localmente pequena. Para qualquer objeto c de $\mathcal{C}$ e qualquer objeto F de $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ existe um isomorfismo

$$\mathcal{Y}_{c,F} \colon \mathrm{Nat}_{\mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{op}}}(\hom(-, c), F) \cong Fc$$

natural em F e em c.

Prova (Formulação Covariante)**.**

Em primeiro lugar, nós devemos mostrar que, para cada c e para cada F, $\mathcal{Y}_{c,F}\colon \mathrm{Nat}_{\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}}(\hom(c,-),F) \to Fc$ é um isomorfismo. Antes, nós devemos definir as atribuições $\mathrm{Nat}_{\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}}(\hom(c,-),F) \to Fc$ e $Fc \to \mathrm{Nat}_{\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}}(\hom(c,-),F)$. As definições seguem abaixo:

$$\mathcal{Y}_{c,F}\colon \mathrm{Nat}_{\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}}(\hom(c,-),F) \longrightarrow Fc$$

$$\alpha \longmapsto \alpha_c 1_c$$

cuja inversa é

$$\mathcal{Y}_{c,F}^{-1}\colon Fc \longrightarrow \mathrm{Nat}_{\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}}(\hom(c,-),F)$$

$$z \longmapsto \left(\begin{array}{rcl} \varphi(z)_d\colon \hom(c,d) & \longrightarrow & Fd \\ f & \longmapsto & Ff(z) \end{array} \right)$$

Aqui, $\varphi(z)_d\colon \hom(c,d) \to Fd$ é um componente da transformação natural $\varphi(z)\colon \hom(c,-) \dot{\to} F$. Assim, obviamente, para que a definição acima faça sentido, nós devemos mostrar que $\varphi(z)$, de fato, é uma transformação natural. Para isso, basta ver que o diagrama

$$\begin{tikzcd} d \arrow[d, "g"'] \\ d' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \hom(c,d) \arrow[r, "\varphi(z)_d"] \arrow[d, "\hom(c,g)"'] & Fd \arrow[d, "Fg"] \\ \hom(c,d') \arrow[r, "\varphi(z)_{d'}"'] & Fd' \end{tikzcd}$$

comuta da seguinte forma

$$\begin{tikzcd} d \arrow[d, "g"'] & f \arrow[r, "\varphi(z)_d"] \arrow[d, "\hom(c,g)"'] & Ff(z) \arrow[d, "Fg"] \\ d' & g \circ f \arrow[r, "\varphi(z)_{d'}"'] & Fg \circ f(z) = Fg \circ Ff(z) \end{tikzcd}$$

De fato,

$$\begin{aligned} Fg \circ \varphi(z)_d(f) &= Fg \circ Ff(z) \\ &= F((g \circ f)(z)) \\ &= \varphi(z)_{d'}(g \circ f) \\ &= \varphi(z)_{d'}(\hom(c,g)(f)) \\ &= \varphi(z)_{d'} \circ \hom(c,g)(f)\ . \end{aligned}$$

Devemos mostrar, agora, que as atribuições $\mathcal{Y}_{c,F}$ são isomorfismos (bijeções) com inversas dadas por $\mathcal{Y}_{c,F}^{-1}$.

O primeiro passo é mostrar que $\mathcal{Y}_{c,F}^{-1}\mathcal{Y}_{c,F} = 1_{\mathrm{Nat}_{\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}}(\hom(c,-),F)}$. Pela naturalidade de α nós temos

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "f"'] & \hom(c,c) \arrow[r, "\alpha_c"] \arrow[d, "\hom(c,f)"'] & Fc \arrow[d, "Ff"] \\ c' & \hom(c,c') \arrow[r, "\alpha_{c'}"'] & Fc' \end{tikzcd}$$

comutando da seguinte forma:

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[dd, "f"'] & & 1_c \arrow[rr, "\alpha_c"] \arrow[dd, "\mathrm{hom}(c,f)"'] & & \alpha_c 1_c \arrow[dd, "Ff"] \\
& & & & \\
c' & & f \arrow[rr, "\alpha_{c'}"'] & & \alpha_{c'} f = Ff(\alpha_c 1_c)
\end{tikzcd} \quad .
$$

Mas, por definição, $\mathcal{Y}_{c,F}^{-1}\mathcal{Y}_{c,F}(\alpha) = \mathcal{Y}_{c,F}^{-1}(\alpha_c 1_c)$, o que nos dá

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Y}_{c,F}^{-1}(\alpha_c 1_c)_{c'}(f) &= Ff(\alpha_c 1_c) \\
&= \alpha_{c'}\big(\mathrm{hom}(c,f)(1_c)\big) \\
&= \alpha_{c'}(f \circ 1_c) \\
&= \alpha_{c'}(f)\ .
\end{aligned}
$$

Assim, os componentes de $\mathcal{Y}_{c,F}^{-1}(\alpha_c 1_c)$ são os mesmos componentes de α, ou seja, as transformações naturais $\mathcal{Y}_{c,F}^{-1}\mathcal{Y}_{c,F}(\alpha)$ e α são idênticas, como requerido.

No segundo passo, nós vamos mostrar que $\mathcal{Y}_{c,F}\mathcal{Y}_{c,F}^{-1} = 1_{Fc}$.

Seja $d \in Fc$, então, nós temos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Y}_{c,F}\mathcal{Y}_{c,F}^{-1}(d) &= \mathcal{Y}_{c,F}(\mathcal{Y}_{c,F}^{-1}(d)) \\
&= \mathcal{Y}_{c,F}^{-1}(d)_c(1_c) \\
&= F(1_c)(d) \\
&= d\ .
\end{aligned}
$$

Tendo mostrado que $\mathcal{Y}_{c,F}$ é um isomorfismo para cada c e para cada F, nós estabelecemos uma bijeção entre o conjunto Fc e a coleção $\mathrm{Nat}_{\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}}(\mathrm{hom}(c,-),F)$, implicando, assim, que a última é realmente um conjunto.

Nós devemos agora mostrar que $\mathcal{Y}_{c,F}$ é um isomorfismo natural em F e em c, para qualquer objeto c de $\mathcal{C}$ e qualquer objeto F de $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}$. O primeiro passo nós já demos, a saber, nós estamos considerando F como um objeto na categoria de funtores $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}$. Em seguida, devemos considerar o domínio e o codomínio de $\mathcal{Y}_{c,F}$ como funtores do par $\langle c, F\rangle$, e considerar tal par como um objeto na categoria $\mathcal{C} \times \mathrm{Set}^{\mathcal{C}}$. Assim, o codomínio para $\mathcal{Y}_{c,F}$ é o funtor evaluação que mapeia cada par $\langle c, F\rangle$ para o valor Fc do funtor F no objeto c, e o domínio é o funtor $\mathrm{Nat}_{\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}}(\hom(-,-),-)$ que mapeia o objeto $\langle c, F\rangle$ para o conjunto $\mathrm{Nat}_{\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}}(\hom(c,-),F)$, e o par de setas $f\colon c \to c'$, $\mu\colon F \dot{\to} F'$ para a seta $\mathrm{Nat}_{\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}}(\hom(f,-),\mu)$. Deixe-nos colocar as coisas de modo mais formal:

Definição 3.3.2.3.1. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria, e $[\mathcal{C}, \mathrm{Set}] = \mathrm{Set}^{\mathcal{C}}$ a categoria dos funtores de $\mathcal{C}$ para Set. Nós podemos, então, definir um bi-funtor $Ev\colon \mathcal{C} \times \mathrm{Set}^{\mathcal{C}} \to \mathrm{Set}$ com função objeto $(c,F) \mapsto Fc$ e função seta $(f,\mu) \mapsto \mu_{c'} \circ Ff = F'f \circ \mu_c$, onde $f\colon c \to c'$ e $\mu\colon F \dot{\to} F'$, tal como pode ser visto no diagrama abaixo:

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "f"'] \\
c'
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
Fc \arrow[r, "\mu_c"] \arrow[d, "Ff"'] & F'c \arrow[d, "F'f"] \\
Fc' \arrow[r, "\mu_{c'}"'] & F'c'
\end{tikzcd}
.
$$

Definição 3.3.2.3.2. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria localmente pequena, $F\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ um funtor, e c um objeto de $\mathcal{C}$. Dado que a coleção $\mathrm{Nat}_{\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}}(\hom(c,-),F)$ é um conjunto, nós podemos definir um bi-funtor

$$\mathrm{Nat}_{\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}}(\hom(-,-),-)\colon \mathcal{C} \times \mathrm{Set}^{\mathcal{C}} \to \mathrm{Set}$$

da seguinte forma: a função objeto é definida como $(c,F) \mapsto \mathrm{Nat}_{\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}}(\hom(c,-),F)$, e a função seta leva o morfismo $(f,\mu)\colon (c,F) \to (c',F')$ em $\mathcal{C} \times \mathrm{Set}^{\mathcal{C}}$ para a função

$$\mathrm{Nat}_{\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}}(\hom(f,-),\mu)\colon \mathrm{Nat}_{\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}}(\hom(c,-),F) \to \mathrm{Nat}_{\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}}(\hom(c',-),F')$$

definida por

$\mathrm{Nat}_{\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}}(\hom(f,-),\mu)(\alpha) = \mu \circ \alpha \circ \hom(f,-)$,

onde, claro, $\alpha\colon \hom(c,-) \dot{\to} F$ é uma transformação natural.

Assim, para mostrar que $\mathcal{Y}_{c,F}$ é um isomorfismo natural, basta mostrar que $\mathcal{Y}\colon \mathrm{Nat}_{\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}}(\hom(-,-),-) \longrightarrow Ev$ é uma transformação natural com componentes $\mathcal{Y}_{c,F}\colon \mathrm{Nat}_{\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}}(\hom(c,-),F) \to Fc$. Isso quer dizer que o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Nat}_{\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}}(\hom(c,-),F) \arrow[r, "\mathcal{Y}_{c,F}"] \arrow[d, "\mathrm{Nat}_{\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}}(\hom(f,-),\mu)"'] & Fc \arrow[d, "F'f \circ \mu_c"] \\
\mathrm{Nat}_{\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}}(\hom(c',-),F') \arrow[r, "\mathcal{Y}_{c',F'}"'] & F'c'
\end{tikzcd} .$$

comuta da seguinte forma:

$$\begin{tikzcd}
\alpha \arrow[r, "\mathcal{Y}_{c,F}"] \arrow[d, "\mathrm{Nat}_{\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}}(\hom(f,-),\mu)"'] & \alpha_c 1_c \arrow[d, "F'f \circ \mu_c"] \\
\mathrm{Nat}_{\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}}(\hom(f,-),\mu)(\alpha) = \varphi \arrow[r, "\mathcal{Y}_{c',F'}"'] & \varphi_{c'} 1_{c'} = F'f \circ \mu_c(\alpha_c 1_c)
\end{tikzcd} .$$

onde, claro, $\langle f,\mu\rangle\colon \langle c,F\rangle \to \langle c',F'\rangle$ é uma seta em $\mathcal{C} \times \mathrm{Set}^{\mathcal{C}}$. Para constatar isso, considere a transformação natural $\alpha\colon \hom(c,-) \dot{\to} F$. Assim, nós temos:

$$(\mathcal{Y}_{c',F'} \circ \mathrm{Nat}_{\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}}(\hom(f,-),\mu))(\alpha) = \mathcal{Y}_{c',F'}(\mathrm{Nat}_{\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}}(\hom(f,-),\mu)(\alpha))$$

$$= \mathcal{Y}_{c',F'}(\mu \circ \alpha \circ \hom(f,-))$$

Pela definição de $\mathcal{Y}_{c',F'}$ $\quad = \mu \circ \alpha \circ \hom(f,-)_{c'} 1_{c'}$

$$= (\mu_{c'} \circ \alpha_{c'} \circ \hom(f,c'))(1_{c'})$$

$$= (\mu_{c'} \circ \alpha_{c'})(\hom(f,c')(1_{c'}))$$

$$= (\mu_{c'} \circ \alpha_{c'})(\hom(c,f)(1_c))$$

$$= (\mu_{c'} \circ \alpha_{c'} \circ \hom(c,f))(1_c)$$

pela naturalidade de α, nós temos que o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[dd, "f"'] & & \hom(c,c) \arrow[r, "\alpha_c"] \arrow[d, "\hom(c,f)"'] & Fc \arrow[d, "Ff"] \\
& & \hom(c,c') \arrow[r, "\alpha_{c'}"'] & Fc' \\
c' & & &
\end{tikzcd}
$$

comuta, e assim, temos

$$= (\mu_{c'} \circ Ff \circ \alpha_c)(1_c)$$

pela naturalidade de μ, nós temos que o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[dd, "f"'] & & Fc \arrow[r, "\mu_c"] \arrow[d, "Ff"'] & F'c \arrow[d, "F'f"] \\
& & Fc' \arrow[r, "\mu_{c'}"'] & F'c' \ . \\
c' & & &
\end{tikzcd}
$$

comuta, e assim, temos

$$= (F'f \circ \mu_c \circ \mathcal{Y}_{c,F})(\alpha). \qquad \blacksquare$$

Prova (Formulação Contravariante)**.**

A prova da formulação contravariante é análoga. ■

3.3.3 Seta universal em termos de conjuntos-hom

Lema 3.3.3.1. Sejam $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$ categorias pequenas, c um objeto de $\mathcal{C}$, e $S : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ um funtor. Um par $\langle r, u : c \longrightarrow S(r) \rangle$ é uma seta universal de c para S se, e somente se, para cada objeto d de $\mathcal{D}$, a função $\alpha_d : \mathcal{D}(r,d) \to \mathcal{C}(c, Sd)$ definida por $f' \mapsto Sf' \circ u$, ou seja, que leva cada $f' : r \to d$ para $Sf' \circ u : c \to Sd$ é uma bijeção. Em tal caso, α é um isomorfismo natural.

Reciprocamente, dados os objetos r e c, qualquer isomorfismo natural $\alpha: \mathcal{D}(r, -) \cong \mathcal{C}(c, S-)$ é determinado dessa forma por uma única seta universal $\langle r, u \rangle$ de c para S.

Prova. A propriedade universal de $\langle r, u \rangle$ é exatamente que para cada objeto d de $\mathcal{D}$, $\alpha_d: \mathcal{D}(r, d) \to \mathcal{C}(c, Sd)$ é uma bijeção. De fato, pela universalidade de $\langle r, u \rangle$, para cada objeto d de $\mathcal{D}$ nós temos que para toda seta $f \in \mathcal{C}(c, Sd)$ existe uma seta $f' \in \mathcal{D}(r, d)$ tal que $\alpha_d(f') = (Sf' \circ u = f: c \to Sd)$, o que faz de α_d uma sobrejeção para cada objeto d de $\mathcal{D}$; além disso, essa seta $f' \in \mathcal{D}(r, d)$ tal que $\alpha_d(f') = (Sf' \circ u = f: c \to Sd)$ é única, assim, se $\alpha_d(f') = \alpha_d(g')$, então, $f' = g'$, e portanto, α_d é injetiva para cada objeto d de $\mathcal{D}$.

A naturalidade de $\alpha: \mathcal{D}(r, -) \to \mathcal{C}(c, S-)$ pode ser provada da seguinte forma: para cada $g: d \to d'$ em $\mathcal{D}$, nós temos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[d, "g'"'] & \mathcal{D}(r, d) \arrow[r, "\alpha_d"] \arrow[d, "\mathcal{D}(r, g')"'] & \mathcal{C}(c, Sd) \arrow[d, "\mathcal{C}(c, Sg')"] \\
d' & \mathcal{D}(r, d') \arrow[r, "\alpha_{d'}"'] & \mathcal{C}(c, Sd')
\end{tikzcd}$$

que comuta da seguinte forma:

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[d, "g'"'] & f' \arrow[r, "\alpha_d"] \arrow[d, "\mathcal{D}(r, g')"'] & Sf' \circ u \arrow[d, "Sg'"] \\
d' & g' \circ f' \arrow[r, "\alpha_{d'}"'] & S(g' \circ f') \circ u = Sg' \circ (Sf' \circ u).
\end{tikzcd}$$

Assim, α é uma transformação natural, e, portanto, um isomorfismo natural.

Reciprocamente, pelo lema de Yoneda, o mapeamento $y: \mathrm{Nat}(\mathcal{D}(r, -), \mathcal{C}(c, S-)) \to \mathcal{C}(c, Sr)$, tal que $y(\alpha) = \alpha_r 1_r$, é uma bijeção. Assim, sendo um isomorfismo natural, requer adicionalmente que α_d seja bijetiva para cada objeto d de $\mathcal{D}$ no seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} r \arrow[dd, "f'"'] & \mathcal{D}(r,r) \arrow[r, "\alpha_r"] \arrow[d, "\mathcal{D}(r,f')"'] & \mathcal{C}(c,Sr) \arrow[d, "\mathcal{C}(c,Sf')"] \\ & \mathcal{D}(r,d) \arrow[r, "\alpha_d"'] & \mathcal{C}(c,Sd) \\ d & & \end{tikzcd}$$

que comuta da seguinte forma:

$$\begin{tikzcd} r \arrow[dd, "f'"'] & 1_r \arrow[r, "\alpha_r"] \arrow[d, "\mathcal{D}(r,f')"'] & \alpha_r 1_r \arrow[d, "\mathcal{C}(c,Sf')"] \\ & f' \arrow[r, "\alpha_d"'] & Sf' \circ (\alpha_r 1_r) \ . \\ d & & \end{tikzcd}$$

Isso quer dizer que cada seta $f\colon c \to Sd$ tem a forma $f = Sf' \circ (\alpha_r 1_r)$ para uma única seta $f'\colon r \to d$. Isso é exatamente a afirmação de que $y(a)$ é universal de c para S. ■

3.3.4 Cocones e colimites. Cones e limites

3.3.4.1 Cocones e colimites

Definição 3.3.4.1.1. Nós podemos definir um diagrama em $\mathcal{C}$ como um funtor covariante. Um diagrama de shape $\mathcal{J}$ em uma categoria $\mathcal{C}$ é um funtor covariante $F : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$, $\mathcal{J}$ é a categoria indexadora (ou, o esquema do diagrama F). Os objetos e morfismo de $\mathcal{J}$ são irrelevantes, apenas a maneira pela qual eles se relacionam entre si importa. Assim, um diagrama de shape $\mathcal{J}$ em uma categoria $\mathcal{C}$ é apenas um quadrado comutativo:

$$
\begin{tikzcd}
j_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & j_2 \arrow[d] \arrow[drr, phantom, "\xrightarrow{F}"] & & a \arrow[r, "f"] \arrow[d] & b \arrow[d] \\
j_3 \arrow[r] & j_4 & & c \arrow[r] & d
\end{tikzcd},
$$

onde $F(j_1) = a$, $F(j_2) = b$ etc., e $F(\alpha) = f$etc..

Assim, o limite e o colimite para um funtor F é o mesmo que o limite e o colimite para um diagrama F.

Definição 3.3.4.1.2. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{J}$ duas categorias, e assuma que $\mathcal{J}$ é uma categoria pequena. Então, nós definimos o funtor diagonal $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ da seguinte forma: a função objeto é tal que $c \mapsto \Delta(c) : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$, que por sua vez é definida pela função objeto $j \mapsto c$ e pela função seta $f : j \to j' \mapsto 1_c : c \to c$, ou seja, a função objeto do funtor diagonal $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ leva cada objeto c de $\mathcal{C}$ para o funtor constante $\Delta(c) : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ que é um objeto da categoria $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ de todos os funtores de $\mathcal{J}$ para $\mathcal{C}$; a função seta do funtor diagonal $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ é tal que $f : c \to c' \mapsto \tau: \Delta(c) \dot{\to} \Delta(c')$ com $\tau_a = f$ para todo a de $\mathcal{J}$, isto é, a função seta do funtor diagonal $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ leva cada seta $f : c \to c'$ para a óbvia transformação natural entre os funtores constantes $\Delta(c)$ e $\Delta(c')$ que é uma seta na categoria $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ de todos os funtores de $\mathcal{J}$ para $\mathcal{C}$.

Definição 3.3.4.1.3. Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{J}$ categorias e $F: \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ um funtor. O Colimite de $F: \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ é uma seta universal $\langle r, \mu \rangle$ de F para o funtor diagonal $\Delta: \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$.

Deixe-nos pormenorizar essa definição. A seta universal de F para Δ é um par $\langle r, \mu \rangle$, onde r é um objeto de $\mathcal{C}$ e μ é uma transformação natural $\mu: F \dot{\to} \Delta(r)$, tal que para todo par $\langle d, \eta \rangle$, onde d é um objeto de $\mathcal{C}$ e η é uma transformação natural $\eta: F \dot{\to} \Delta(d)$, existe uma única seta $t': r \to d$ de $\mathcal{C}$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} r \arrow[d, "t'"'] \\ d \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\eta"'] & \Delta(r) \arrow[d, "\Delta(t')"] \\ & \Delta(d) \end{tikzcd}$$

comuta. Ou seja, $\Delta(t') \circ \mu = \eta$.

Assim, o par $\langle r, \mu \rangle$ consiste de um objeto r de $\mathcal{C}$, que é usualmente denotado por $Co\lim F$, e é chamado o objeto colimite do funtor F, juntamente com a transformação natural $\mu: F \dot{\to} \Delta(r)$, que entre as transformações naturais $\eta: F \dot{\to} \Delta(c)$ é universal para todo objeto c de $\mathcal{C}$. Note que $[\Delta(c)](i) = c$ para todo objeto i de $\mathcal{J}$, assim, η é apenas o morfismo $\eta_i: Fi \to c$ em $\mathcal{C}$, para cada índice i de $\mathcal{J}$, tal que para cada seta $u: i \to j$ em $\mathcal{J}$, pela condição de naturalidade, o diagrama

$$\begin{tikzcd} i \arrow[d, "u"'] \\ j \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Fi \arrow[r, "\eta_i"] \arrow[d, "Fu"'] & c \arrow[d, "1_c"] \\ Fj \arrow[r, "\eta_j"'] & c \end{tikzcd}$$

é comutativo em $\mathcal{C}$. Ou seja, $\eta_j \circ Fu = \eta_i$, tal como no diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} & c \\ Fi \arrow[ur] \arrow[r, "Fu"'] & Fj \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Dado o exposto acima, um cocone da base F para o vértice c é uma transformação natural $\eta: F \dot{\to} \Delta(c)$. A propriedade universal de μ é, então, que μ é um cocone da base F para o vértice $Co\lim F$ tal que, para qualquer cocone η, existe um único morfismo $t': Colim\, F \to c$ tal que $t' \circ \mu_i = \eta_i$ para todo índice i de $\mathcal{J}$. Uma descrição pictórica do exposto acima pode ser visto no diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathrm{Colim}\, F \arrow[r, "t'"] & c \\
Fi \arrow[u, "\mu_i"] \arrow[ur, "\eta_i" near end] \arrow[r, "Fu"'] & Fj\, . \arrow[u, "\eta_j"'] \arrow[ul, "\mu_j" near start]
\end{tikzcd}$$

$\mu =$ cocone limite

3.3.4.2 Cones e limites

Definição 3.3.4.2.1. Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{J}$ categorias e $F: \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ um funtor. O Limite de $F: \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ é uma seta universal $\langle r, v \rangle$ do funtor diagonal $\Delta: \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ para F.

Deixe-nos pormenorizar essa definição. A seta universal de Δ para F é um par $\langle r, v \rangle$, onde r é um objeto de $\mathcal{C}$ e v é uma transformação natural $v: \Delta(r) \dot{\to} F$, tal que para todo par $\langle d, \tau \rangle$, onde d é um objeto de $\mathcal{C}$ e τ é uma transformação natural $\tau: \Delta(d) \dot{\to} F$, existe uma única seta $t: d \to r$ em $\mathcal{C}$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[d, "t"'] \\
r
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\Delta(d) \arrow[d, "\Delta(t)"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\
\Delta(r) \arrow[r, "v"'] & F
\end{tikzcd}$$

comuta. Ou seja, $\tau = v \circ \Delta(t)$.

Assim, o par $\langle r, \nu \rangle$ consiste de um objeto r de $\mathcal{C}$, que é usualmente denotado por $\operatorname{Lim} F$, e é chamado o objeto limite do funtor F, juntamente com a transformação natural $\nu: \Delta(r) \dot{\to} F$, que entre as transformações naturais $\tau: \Delta(c) \dot{\to} F$ é universal para todo objeto c de $\mathcal{C}$. Note que $[\Delta(c)](i) = c$ para todo objeto i de $\mathcal{J}$, assim, τ é apenas a seta $\tau_i: c \to Fi$ em $\mathcal{C}$, para cada índice i de $\mathcal{J}$, tal que para cada seta $u: i \to j$ em $\mathcal{J}$, pela condição de naturalidade, o diagrama

$$\begin{tikzcd} i \arrow[d, "u"'] \\ j \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c \arrow[r, "\tau_i"] \arrow[d, "1_c"'] & Fi \arrow[d, "Fu"] \\ c \arrow[r, "\tau_j"'] & Fj \end{tikzcd}$$

é comutativo em $\mathcal{C}$. Ou seja, $Fu \circ \tau_i = \tau_j$, tal como no diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d] \arrow[dr] & \\ Fi \arrow[r, "Fu"'] & Fj \end{tikzcd} .$$

Dado o exposto acima, um cone para a base F do vértice c é uma transformação natural $\tau: \Delta(c) \dot{\to} F$. A propriedade universal de ν é, então, que ν é um cone para a base F do vértice $\operatorname{Lim} F$ tal que, para qualquer cone τ, existe um único morfismo $t: c \to \operatorname{Lim} F$ tal que $\tau_i = \nu_i \circ t$ para todo índice i de $\mathcal{J}$. Uma descrição pictórica do exposto acima pode ser visto no diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
c \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\tau_i"'] \arrow[dr, "\tau_j"' near start] & \mathrm{Lim}\, F \arrow[d, "\nu_j"] \arrow[dl, "\nu_i" near start] \\
Fi \arrow[r, "Fu"'] & Fj\,.
\end{tikzcd}$$

$\nu =$ cone limite

As propriedades do limite e do co-limite podem ser sumarizadas no diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathrm{Lim}\, F \arrow[r, "\nu"] & F \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Colim}\, F \arrow[d] \\
c \arrow[u] \arrow[r, "\tau"'] & F \arrow[r, "\sigma"'] & c
\end{tikzcd}$$

No diagrama acima os cones são as setas horizontais, e as setas verticais são setas em $\mathcal{C}$. Quando o limite e o co-limite existem, há os seguintes isomorfismos naturais:

$\mathcal{C}(c, \mathrm{Lim}\, F) \cong \mathrm{Nat}(\Delta(c), F) = \mathrm{Cone}(c, F)$,

$\mathrm{Cone}(F, c) = \mathrm{Nat}(F, \Delta(c)) \cong \mathcal{C}(\mathrm{Colim}\, F, c)$.

3.3.4.3 Existência de limites e colimites

Definição 3.3.4.3.1. Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita ser (finitamente) completa ou co-completa se o limite ou co-limite de qualquer diagrama (finito) em $\mathcal{C}$ existe em $\mathcal{C}$.

Teorema 3.3.4.3.2. $\mathcal{C}$ é (finitamente) completa se, e somente se, $\mathcal{C}$ tem produtos (finitos) e equalizadores. Dualmente, $\mathcal{C}$ é (finitamente) cocompleta se, e somente se, $\mathcal{C}$ tem coprodutos (finitos) e coequalizadores.

Prova. Pode ser encontrada em Bell (2008, p. 16).

Teorema 3.3.4.3.3 (Completude da Categoria de Funtores)**.** Se $\mathbb{E}$ é completa (ou, dualmente, cocompleta) e $\mathcal{C}$ é pequena, então $\mathbb{E}^{\mathcal{C}}$ é completa (ou cocompleta).

Prova. Pode ser encontrada em Bell (2008, p. 27).

Corolário 3.3.4.3.4. Para qualquer categoria pequena $\mathcal{C}$, a categoria $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}$ é completa e cocompleta.

3.4 Adjunção

3.4.1 Adjunção com conjuntos-hom

Definição 3.4.1.1 Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{X}$ categorias. Uma adjunção de $\mathcal{X}$ para $\mathcal{A}$ é uma tripla $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathcal{X} \rightharpoonup \mathcal{A}$, onde F e G são funtores

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathcal{A} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

enquanto φ é uma função que atribui a cada par de objetos x de $\mathcal{X}$, a de $\mathcal{A}$ uma bijeção

$$\varphi = \varphi_{x,a} : \mathcal{A}(Fx, a) \cong \mathcal{X}(x, Ga) \tag{3.4.1.2}$$

que é natural em x e em a.

Aqui, $\mathcal{A}(F-,-)$ nada mais é do que a composição do funtor produto

$$F^{op} \times Id : \mathcal{X}^{op} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A}$$

$$\langle x, a \rangle \mapsto \langle F^{op}(x), Id(a) \rangle$$

com o bi-funtor hom

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(-,-) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \to \mathrm{Set},$$

ou seja,

$$\mathcal{A}(F-,-) : \mathcal{X}^{op} \times \mathcal{A} \xrightarrow{F^{op} \times Id} \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(-,-)} \mathrm{Set}$$

que leva cada par de objetos $\langle x, a \rangle$ para o conjunto-hom $\mathcal{A}(Fx, a)$.

Similarmente, $\mathcal{X}(-, G\,-)$ é a composição do funtor produto

$$Id^{op} \times G \colon \mathcal{X}^{op} \times \mathcal{A} \to \mathcal{X}^{op} \times \mathcal{X}$$

com o bi-funtor hom

$$\hom_{\mathcal{X}}(-,-) \colon \mathcal{X}^{op} \times \mathcal{X} \to \mathrm{Set}\ ,$$

ou seja,

$$\mathcal{X}(-, G\,-) \colon \mathcal{X}^{op} \times \mathcal{A} \xrightarrow{Id^{op} \times G} \mathcal{X}^{op} \times \mathcal{X} \xrightarrow{\hom_{\mathcal{X}}(-,-)} \mathrm{Set}$$

que leva cada par de objetos $\langle x, a \rangle$ para o conjunto-hom $\mathcal{X}(x, Ga)$.

A naturalidade da bijeção φ significa que para cada $k \colon a \to a'$ e $h \colon x' \to x$, os diagramas abaixo

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "k"'] & \mathcal{A}(Fx, a) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathcal{A}(Fx, k)"'] & \mathcal{X}(x, Ga) \arrow[d, "\mathcal{X}(x, Gk)"] \\
a' & \mathcal{A}(Fx, a') \arrow[r, "\varphi"'] & \mathcal{X}(x, Ga')
\end{tikzcd}$$

(3.4.1.3)

$$\begin{tikzcd}
x' \arrow[d, "h"'] & \mathcal{A}(Fx, a) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathcal{A}(Fh, a)"'] & \mathcal{X}(x, Ga) \arrow[d, "\mathcal{X}(h, Ga)"] \\
x & \mathcal{A}(Fx', a) \arrow[r, "\varphi"'] & \mathcal{X}(x', Ga)
\end{tikzcd}$$

comutam da seguinte forma:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dd, "k"'] & f \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathcal{A}(Fx,k)"'] & \varphi f \arrow[d, "\mathcal{X}(x,Gk)"] \\
 & k \circ f \arrow[r, "\varphi"'] & \varphi(k \circ f) \\
a'
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
x' \arrow[dd, "h"'] & f \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathcal{A}(Fh,a)"'] & \varphi f \arrow[d, "\mathcal{X}(h,Ga)"] \\
 & f \circ Fh \arrow[r, "\varphi"'] & \varphi(f \circ Fh) \\
x
\end{tikzcd} .$$

3.4.2 Adjunção sem conjuntos-hom

Nós também podemos definir adjunções diretamente em termos de setas, sem a necessidade de conjuntos-hom. Uma adjunção é uma bijeção que atribui a cada seta $f: Fx \to a$ uma seta $\varphi f = \mathrm{rad} f: x \to Ga$, o adjunto direito de f, tal que as condições de naturalidade em (3.4.1.3)

(3.4.2.1a) $\quad \varphi(k \circ f) = Gk \circ \varphi f,$

(3.4.2.1)

(3.4.2.1b) $\quad \varphi(f \circ Fh) = \varphi f \circ h,$

valem para todo f e todas as setas $k: a \to a'$ e $h: x' \to x$. Note que isso equivale a requerer que φ^{-1} seja natural, isto é, que para cada h, k e $g: x \to Ga$, nós temos os diagramas abaixo

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dd, "k"'] & \mathcal{X}(x,Ga) \arrow[r, "\varphi^{-1}"] \arrow[d, "\mathcal{X}(x,Gk)"'] & \mathcal{A}(Fx,a) \arrow[d, "\mathcal{A}(Fx,k)"] \\
& \mathcal{X}(x,Ga') \arrow[r, "\varphi^{-1}"'] & \mathcal{A}(Fx,a') \\
a' & &
\end{tikzcd} \tag{3.4.2.2}$$

$$\begin{tikzcd}
x' \arrow[dd, "h"'] & \mathcal{X}(x,Ga) \arrow[r, "\varphi^{-1}"] \arrow[d, "\mathcal{X}(x,Gk)"'] & \mathcal{A}(Fx,a) \arrow[d, "\mathcal{A}(Fx,k)"] \\
& \mathcal{X}(x',Ga) \arrow[r, "\varphi^{-1}"'] & \mathcal{A}(Fx',a) \\
x & &
\end{tikzcd}$$

que comutam da seguinte forma:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dd, "k"'] & g \arrow[r, "\varphi^{-1}"] \arrow[d, "\mathcal{X}(x,Gk)"'] & \varphi^{-1}g \arrow[d, "\mathcal{A}(Fx,k)"] \\
& Gk \circ g \arrow[r, "\varphi^{-1}"'] & \varphi^{-1}(Gk \circ g) \\
a' & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
x' \arrow[dd, "h"'] & g \arrow[r, "\varphi^{-1}"] \arrow[d, "\mathcal{X}(h,Ga)"'] & \varphi^{-1}g \arrow[d, "\mathcal{A}(Fh,a)"] \\
& g \circ h \arrow[r, "\varphi^{-1}"'] & \varphi^{-1}(g \circ h)\ , \\
x & &
\end{tikzcd}$$

ou seja,

(3.4.2.3a) $\varphi^{-1}(g \circ h) = \varphi^{-1}g \circ Fh,$

(3.4.2.3)

(3.4.2.3b) $\varphi^{-1}(Gk \circ g) = k \circ \varphi^{-1}g.$

Dada uma adjunção como acima, o funtor F é dito ser um adjunto à esquerda para G, enquanto o funtor G é chamado um adjunto à direita para F, o que é comumente denotado por $F \dashv G$.

3.4.3 O que adjunções determinam?

Teorema 3.4.3.1 (unidade)**.** Uma adjunção $\langle F, G, \varphi \rangle: \mathcal{X} \rightharpoonup \mathcal{A}$ determina uma transformação natural $\eta: I_{\mathcal{X}} \dot{\to} GF$ tal que, para cada objeto x, a seta η_x é universal de x para G, enquanto o adjunto direito de cada $f: Fx \to a$ é $\varphi(f) = Gf \circ \eta_x: x \to Ga$.

Prova. Estabelecendo $a = Fx$ na equação (1), o conjunto-hom do lado esquerdo contém a seta identidade $1: Fx \to Fx$, e denotamos por η_x a sua φ-imagem. Pelo Lema 3.3.3.1 nós temos que η_x é uma seta universal

$$\eta_x: x \to GFx, \qquad \eta_x = \varphi(1_{Fx})$$

do objeto x de $\mathcal{X}$ para G, mais especificamente, é uma seta universal $\langle Fx, \eta_x \rangle$, onde Fx é um objeto de $\mathcal{A}$, e $\eta_x: x \to GFx$ uma seta em $\mathcal{X}$, tal que para todo par $\langle a, g \rangle$, onde a é um objeto de $\mathcal{A}$, e $g: x \to Ga$ uma seta em $\mathcal{X}$, existe uma única seta $f: Fx \to a$ em $\mathcal{A}$, tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} Fx \arrow[d, "f"'] \\ a \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[dr, "g"'] & GFx \arrow[d, "Gf"] \\ & Ga \end{tikzcd}$$

comuta. Ou seja, $Gf \circ \eta_x = g$. Dessa forma, a adjunção dá uma seta universal η_x de x para G para cada objeto x.

Para provar que a função $x \mapsto \eta_x$ é uma transformação natural $I_x \to GF$, basta ver pela equação (3.4.2.1), que descreve a naturalidade de φ, que para cada seta $h: x' \to x$ em $\mathcal{X}$ o diagrama

$$\begin{tikzcd} x' \arrow[r, "\eta_{x'}"] \arrow[d, "h"'] & GFx' \arrow[d, "GFh"] \\ x \arrow[r, "\eta_x"'] & GFx \end{tikzcd}$$

é comutativo, ou seja, $GFh \circ \eta_{x'} = \eta_x \circ h$. Para constatar isso basta, baseado em (3.4.2.1), calcular tal como no diagrama abaixo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(Fx', Fx') \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathcal{A}(1_{Fx'}, Fh)"'] & \mathcal{X}(x', GFx') \arrow[d, "\mathcal{X}(1, GFh)"] \arrow[dd, bend left=60, "\text{Tr.Nat.}"] \\
\mathcal{A}(Fx', Fx) \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{X}(x', GFx) \\
\mathcal{A}(Fx, Fx) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[u, "\mathcal{A}(Fh, 1_{Fx})"] & \mathcal{X}(x, GFx) \arrow[u, "\mathcal{X}(h, 1)"']
\end{tikzcd}
$$

que comutando dá:

$$
\begin{tikzcd}
1_{Fx'} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathcal{A}(1_{Fx'}, Fh)"'] & \varphi 1_{Fx'} \arrow[d, "\mathcal{X}(1, GFh)"] \\
\uparrow (1_{Fx} \circ) Fh\ (\circ\, 1_{Fx'}) \downarrow \arrow[r, "\varphi"] & GFh \circ \varphi(1_{Fx'}) = \varphi(1_{Fx}) \circ h \\
1_{Fx} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[u, "\mathcal{A}(Fh, 1_{Fx})"] & \varphi 1_{Fx} \arrow[u, "\mathcal{X}(h, 1)"']
\end{tikzcd}
$$

$$GFh(\varphi(1_{Fx'})) = \varphi(Fh(1_{Fx'})) = \varphi(1_{Fx}(Fh)) = \varphi(1_{Fx}(h))$$

ou seja,

$$GFh \circ \varphi(1_{Fx'}) = \varphi(Fh \circ 1_{Fx'}) = \varphi(1_{Fx} \circ Fh) = \varphi(1_{Fx}) \circ h$$

como requerido.

Por fim, nós podemos expressar a bijeção φ por meio das setas η_x da seguinte forma: para $f: Fx \to a$

$$\varphi(f) = Gf \circ \eta_x \,, \tag{3.4.3.2}$$

a naturalidade (3.4.2.1) de φ mostra que, de fato, o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(Fx, Fx) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathcal{A}(1,f)"'] & \mathcal{X}(x, GFx) \arrow[d, "\mathcal{X}(1,Gf)"] \\
\mathcal{A}(Fx, a) \arrow[r, "\varphi"'] & \mathcal{X}(x, Ga)
\end{tikzcd}$$

comuta da seguinte forma:

$$\begin{tikzcd}
1_{Fx} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathcal{A}(1,f)"'] & \varphi(1_{Fx}) \arrow[d, "\mathcal{X}(1,Gf)"] \\
f \circ 1_{Fx} \arrow[r, "\varphi"'] & (\varphi f = Gf \circ \eta_x)
\end{tikzcd}$$

isto é, nós temos a equação:

$$\varphi(f) = \varphi(f \circ 1_{Fx}) = Gf \circ \varphi(1_{Fx}) = Gf \circ \eta_x \,,$$

o que significa que o adjunto direito de cada $f: Fx \to a$ é $\varphi(f) = Gf \circ \eta_x: x \to Ga$. ∎

Teorema 3.4.3.3 (co-unidade)**.** Uma adjunção $\langle F, G, \varphi\rangle: \mathcal{X} \rightharpoonup \mathcal{A}$ determina uma transformação natural $\varepsilon: FG \stackrel{\cdot}{\to} I_{\mathcal{A}}$ tal que, para cada objeto a, a seta ε_a é universal de F para a, enquanto o adjunto esquerdo de cada $g: x \to Ga$ é $\varphi^{-1}(g) = \varepsilon_a \circ Fg: Fx \to a$.

Prova. Estabelecendo $x = Ga$ em (3.4.1.2) nós temos, similarmente ao que ocorre no conjunto-hom do lado esquerdo, a seta identidade $1: Ga \to Ga$ no conjunto-hom do lado direito, e denotamos por ε_a a sua φ^{-1}-imagem. Pelo Lema 3.3.3.1 nós temos que ε_a é uma seta universal

$$\varepsilon_a : FGa \to a\,, \qquad \varepsilon_a = \varphi^{-1}(1_{Ga})\,, \qquad a \text{ um objeto de } \mathcal{A}\,,$$

de F para a, mais especificamente, é uma seta universal $\langle Ga, \varepsilon_a \rangle$, onde Ga é um objeto de $\mathcal{X}$, e ε_a é uma seta $\varepsilon_a : FGa \to a$ em $\mathcal{A}$, tal que para todo par $\langle x, f \rangle$, onde x é um objeto de $\mathcal{X}$, e f é uma seta $f : Fx \to a$ em $\mathcal{A}$, existe uma única seta $g : x \to Ga$ em $\mathcal{X}$, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d, "g"'] \\ Ga \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Fx \arrow[d, "Fg"'] \arrow[dr, "f"] & \\ FGa \arrow[r, "\varepsilon_a"'] & a \end{tikzcd}$$

isto é, $\varepsilon_a \circ Fg = f$. Dessa forma, a adjunção dá uma seta universal ε_a de F para a para cada objeto a.

Para provar que a função $a \mapsto \varepsilon_a$ é uma transformação natural $FG \to I_{\mathcal{A}}$, basta ver pela equação (3.4.2.3), que descreve a naturalidade de φ^{-1}, que para cada seta $k : a \to a'$ em $\mathcal{A}$ o diagrama

$$\begin{tikzcd} FGa \arrow[r, "\varepsilon_a"] \arrow[d, "FGk"'] & a \arrow[d, "k"] \\ FGa' \arrow[r, "\varepsilon_{a'}"'] & a' \end{tikzcd}$$

é comutativo. Para constatar isso basta, baseado em (3.4.2.3), calcular tal como no diagrama abaixo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{X}(Ga,Ga) \arrow[r, "\varphi^{-1}"] \arrow[d, "\mathcal{X}(1_{Ga},Gk)"'] & \mathcal{A}(FGa,a) \arrow[d, "\mathcal{A}(1,k)"] \arrow[dd, bend left] \\
\mathcal{X}(Ga,Ga') \arrow[r, "\varphi^{-1}"] & \mathcal{A}(FGa,a') \\
\mathcal{X}(Ga',Ga') \arrow[r, "\varphi^{-1}"] \arrow[u, "\mathcal{X}(Gk,1_{Ga'})"] & \mathcal{A}(FGa',a') \arrow[u, "\mathcal{A}(FGk,1)"']
\end{tikzcd}
$$

que comutando dá

$$
\begin{tikzcd}
1_{Ga} \arrow[r, "\varphi^{-1}"] \arrow[d, "\mathcal{X}(1_{Ga},Gk)"'] & \varphi^{-1}1_{Ga} \arrow[d, "\mathcal{A}(1,k)"] \\
\uparrow (1_{Ga'}\circ)Gk\,(\circ\, 1_{Ga})\downarrow \arrow[r, "\varphi^{-1}"] & k\circ\varphi^{-1}(1_{Ga}) = \varphi^{-1}(1_{Ga'})\circ FGk \\
1_{Ga'} \arrow[r, "\varphi^{-1}"] \arrow[u, "\mathcal{X}(Gk,1_{Ga'})"] & \varphi^{-1}1_{Ga'} \arrow[u, "\mathcal{A}(FGk,1)"']
\end{tikzcd}
$$

$$k(\varphi^{-1}(1_{Ga})) = \varphi^{-1}(Gk(1_{Ga})) = \varphi^{-1}(1_{Ga'}(Gk)) =$$

$$k\circ\varphi^{-1}(1_{Ga}) = \varphi^{-1}(Gk\circ 1_{Ga}) = \varphi^{-1}(1_{Ga'}\circ Gk) = \varphi^{-1}(1_{Ga'})\circ FGk.$$

Por fim, nós podemos expressar a bijeção φ^{-1} por meio das setas ε_a da seguinte forma: para $g: x \to Ga$

$$\varphi^{-1}(g) = \varepsilon_a \circ Fg \qquad (3.4.3.4)$$

a naturalidade (3.4.2.3) de φ^{-1} mostra que, de fato, o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}(Ga, Ga) \arrow[r, "\varphi^{-1}"] \arrow[d, "\mathcal{X}(g,1)"'] & \mathcal{A}(FGa, a) \arrow[d, "\mathcal{A}(Fg,1)"] \\
\mathcal{X}(x, Ga) \arrow[r, "\varphi^{-1}"'] & \mathcal{A}(Fx, a)
\end{tikzcd}$$

comuta da seguinte forma:

$$\begin{tikzcd}
1_{Ga} \arrow[r, "\varphi^{-1}"] \arrow[d, "\mathcal{X}(g,1)"'] & \varphi^{-1}(1_{Ga}) \arrow[d, "\mathcal{A}(Fg,1)"] \\
1_{Ga} \circ g \arrow[r, "\varphi^{-1}"'] & \varphi^{-1}g = \varepsilon_a \circ Fg
\end{tikzcd} ,$$

ou seja, $\varphi^{-1}(g) = \varphi^{-1}(1_{Ga} \circ g) = \varphi^{-1}(1_{Ga}) \circ Fg = \varepsilon_a \circ Fg$. ■

- η e ε são denominadas, respectivamente, a unidade e a co-unidade da adjunção.

Teorema 3.4.3.5 (identidade triangular)**.** A composição $F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\varepsilon F} F$ é a transformação identidade de F. A composição $G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\varepsilon} G$ é a transformação identidade de G.

Prova. Tomando $x = Ga$, podemos ver, a partir da fórmula (3.4.3.2) para φ, que $\varepsilon_a = \varphi^{-1}(1_{Ga})$ dá, para cada a de $\mathcal{A}$

$1_{Ga} = \varphi(\varepsilon_a) = G(\varepsilon_a) \circ \eta_{Ga}$,

mostrando, assim, que a transformação natural composta

$$G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\varepsilon} G$$

é a transformação natural identidade para G.

Similarmente, tomando $a = Fx$, podemos ver, a partir da fórmula (3.4.3.4) para φ^{-1}, que $\eta_x = \varphi(1_{Fx})$ dá, para cada x de $\mathcal{X}$

$1_{Fx} = \varphi^{-1}(\eta_x) = \varepsilon_{Fx} \circ F(\eta_x)$,

mostrando, assim, que a transformação natural composta

$$F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\varepsilon F} F$$

é a transformação natural identidade para F. ■

3.4.4 Quais "itens" determinam adjunções?

Os teoremas acima mostram o que cada adjunção $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathcal{X} \rightharpoonup \mathcal{A}$ determina. A seguir, apresentaremos mais três teoremas que mostram a partir de quais "itens" cada adjunção pode ser completamente determinada.

Teorema 3.4.4.1. Cada adjunção $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathcal{X} \rightharpoonup \mathcal{A}$ é completamente determinada pelo seguinte: sejam $\mathcal{X}$, $\mathcal{A}$ categorias, $F: \mathcal{X} \to \mathcal{A}$, $G: \mathcal{A} \to \mathcal{X}$, $1_{\mathcal{X}}: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ funtores, e $\eta: 1_{\mathcal{X}} \dot{\to} GF$ uma transformação natural tal que cada $\eta_x: x \to GFx$ é uma seta universal do objeto x de $\mathcal{X}$ para G. Então, φ é definida por $\varphi f = Gf \circ \eta_x : x \to Ga$.

Prova. Pela hipótese de que $\eta_x: x \to GFx$ é uma seta universal do objeto x de $\mathcal{X}$ para G nós temos que para cada seta $g: x \to Ga$ em $\mathcal{X}$, existe uma única seta $f: Fx \to a$ em $\mathcal{A}$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} Fx \arrow[d, "f"'] \\ a \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[dr, "g"'] & GFx \arrow[d, "Gf"] \\ & Ga \end{tikzcd}$$

é comutativo. Ou seja, $Gf \circ \eta_x = g$. Isso atesta justamente que $\varphi(f) = Gf \circ \eta_x$ define uma bijeção

$$\varphi: \mathcal{A}(Fx, a) \to \mathcal{X}(x, Ga)$$

que é natural em x, tendo em vista que η é natural, e natural em a, dado que G é um funtor, o que significa que $\langle F, G, \varphi \rangle$ é uma adjunção. ■

Teorema 3.4.4.2. Seja $G: \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ um funtor, tal que para cada objeto x de $\mathcal{X}$ existe um objeto $F_0 x$ de $\mathcal{A}$ e uma seta universal $\eta_x: x \to GF_0 x$ do objeto x de $\mathcal{X}$ para G. Então, existe um funtor $F: \mathcal{X} \to \mathcal{A}$ tal que $F(x) = F_0 x$, e F é definido sobre setas $h: x \to x'$ por $GFh \circ \eta_x = \eta_{x'} \circ h$ .Além disso, F é único a menos de isomorfismo.

Prova. Note que neste Teorema 3.4.4.2 é dada apenas a seta universal $\langle F_0 x, \eta_x \rangle$ de x para G, para cada objeto x. O que ele afirma, então, é que cada seta universal desse tipo induz uma adjunção $\langle F, G, \varphi \rangle: \mathcal{X} \rightharpoonup \mathcal{A}$. O que nós precisamos mostrar é que há exatamente uma maneira para fazer F_0 a função objeto de um funtor F para o qual $\eta: I_{\mathcal{X}} \dot{\to} GF$ seja natural. Por hipótese, nós temos que para cada seta $h: x \to x'$, a universalidade de $\langle F_0 x, \eta_x \rangle$ assegura que para o par $\langle F_0 x', \eta_{x'} \circ h: x \to GF_0 x' \rangle$ existe uma única seta $g: F_0 x \to F_0 x'$ tal que o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
F_0 x \arrow[d, "g"'] & x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, "h"'] & GF_0 x \arrow[d, "Gg"] \\
F_0 x' & x' \arrow[r, "\eta_{x'}"'] & GF_0 x'
\end{tikzcd}
$$

comuta. Tomando $Fh = g$, nós temos então que F é definido sobre setas $h: x \to x'$ por $GFh \circ \eta_x = \eta_{x'} \circ h$. Mas, veja que tomando essa seta única como $Fh: F_0 x \to F_0 x'$ nós temos exatamente a comutatividade que assegura a naturalidade de η, ou seja, $GFh \circ \eta_x = \eta_{x'} \circ h$. Assim, $\eta: I_{\mathcal{X}} \dot{\to} GF$ é uma transformação natural.

Que F é um funtor pode ser provado da seguinte forma: considere o par de setas $h: x \to x'$, $z: x' \to x''$, que compondo dá a seta $z \circ h: x \to x''$.

$F(z) = GFz \circ \eta_{x'} = \eta_{x''} \circ z$ e

$F(h) = GFh \circ \eta_x = \eta_{x'} \circ h$.

O que nós temos que mostrar é que $F(z \circ h) = F(z) \circ F(h)$ e que $F(1_x) = 1_{Fx}$. Considere o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, "h"] \arrow[dd, bend right, swap, "z \circ h"] & GF_0x \arrow[d, "GFh"] \arrow[dd, bend left, "G(Fz \circ Fh)"] \\
x' \arrow[r, "\eta_{x'}"] \arrow[d, "z"] & GF_0x' \arrow[d, "GFz"] \\
x'' \arrow[r, "\eta_{x''}"] & GF_0x''
\end{tikzcd}$$

Como G é um funtor, nós temos

$$G(Fz \circ Fh) \circ \eta_x = GFz \circ GFh \circ \eta_x = \eta_{x''} \circ z \circ h.$$

Pela definição de universalidade, nós temos que $F(z \circ h)$ é a única seta que faz o diagrama acima comutar. Disso se segue, portanto, que $F(z \circ h) = Fz \circ Fh$.

Para mostrar que F preserva identidades o raciocínio é análogo. Considere que $h = 1_x$, assim nós temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
F_0x \arrow[d, "F1_x"] & x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, "1_x"] & GF_0x \arrow[d, "GF1_x"] \\
F_0x & x \arrow[r, "\eta_x"] & GF_0x \, .
\end{tikzcd}$$

Note que se $h = 1_x$, então $F1_x$ tem de ser igual a1_{Fx}, pois, tendo em vista que G é um funtor (e, portanto, preserva identidades), 1_{Fx} faz o diagrama acima comutar; mas, pela definição de universalidade, nós temos que $F1_x$ é a única seta que faz o diagrama acima comutar. Disso se segue que $F1_x = 1_{Fx}$.

Sumarizando, o Teorema 3.4.4.2 nos dá a partir do funtor $G: \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ e da seta universal $\langle F_0 x, \eta_x \rangle$ de x para G, para cada objeto x, um funtor $F: \mathcal{X} \to \mathcal{A}$ tal que $F(x) = F_0 x$, e $F(h: x \to x') = (GFh \circ \eta_x = \eta_{x'} \circ h)$ para o qual $\eta: I_{\mathcal{X}} \dot{\to} GF$ é natural. Pelo Teorema (3.4.4.1) isso nos dá uma adjunção $\langle F, G, \varphi \rangle: \mathcal{X} \rightharpoonup \mathcal{A}$. ■

Teorema 3.4.4.3. Cada adjunção $\langle F, G, \varphi \rangle: \mathcal{X} \rightharpoonup \mathcal{A}$ é completamente determinada pelo seguinte: sejam $\mathcal{X}$, $\mathcal{A}$ categorias, $F: \mathcal{X} \to \mathcal{A}$, $G: \mathcal{A} \to \mathcal{X}$, $1_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ funtores, e $\varepsilon: FG \dot{\to} 1_{\mathcal{A}}$ uma transformação natural tal que cada $\varepsilon_a: FGa \to a$ é uma seta universal de F para o objeto a de $\mathcal{A}$. Então, φ^{-1} é definida por $\varphi^{-1}(g) = \varepsilon_a \circ Fg: Fx \to a$.

Prova. Pela hipótese de que $\varepsilon_a: FGa \to a$ é uma seta universal de F para o objeto a de $\mathcal{A}$ nós temos que para cada seta $f: Fx \to a$ em $\mathcal{A}$, existe uma única seta $g: x \to Ga$ em $\mathcal{X}$, tal que o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[d, "g"'] \\
Ga
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
Fx \arrow[d, "Fg"'] \arrow[dr, "f"] & \\
FGa \arrow[r, "\varepsilon_a"'] & a
\end{tikzcd}
$$

é comutativo. Ou seja, $\varepsilon_a \circ Fg = f$. Isso atesta justamente que $\varphi^{-1}(g) = \varepsilon_a \circ Fg$ define uma bijeção

$$\varphi^{-1}: \mathcal{X}(x, Ga) \to \mathcal{A}(Fx, a)$$

que é natural em a, tendo em vista que ε é natural, e natural em x, dado que F é um funtor, o que significa que $\langle F, G, \varphi \rangle$ é uma adjunção. ■

Teorema 3.4.4.4. Seja $F: \mathcal{X} \to \mathcal{A}$ um funtor, tal que para cada objeto a de $\mathcal{A}$ existe um objeto $G_0 a$ de $\mathcal{X}$ e uma seta universal $\varepsilon_a: FG_0 a \to a$ de F para a. Então, existe um funtor $G: \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ tal que $G(a) = G_0 a$, e G é definido sobre setas $g: a \to a'$ por $GFh \circ \eta_x = \eta_{x'} \circ h$ .Além disso, G é único a menos de isomorfismo.

Prova. Note que neste Teorema 3.4.4.4 é dada apenas a seta universal $\langle G_0 a, \varepsilon_a \rangle$ de F para a, para cada objeto a. O que ele afirma, então, é que cada seta universal desse tipo induz uma adjunção $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathcal{X} \rightharpoonup \mathcal{A}$. O que nós precisamos mostrar é que há exatamente uma maneira para fazer G_0 a função objeto de um funtor G para o qual $\varepsilon : FG \dot{\to} I_{\mathcal{A}}$ seja natural. Por hipótese, nós temos que para cada seta $z : a \to a'$, a universalidade de $\langle G_0 a, \varepsilon_a \rangle$ assegura que para o par $\langle G_0 a', \varepsilon_{a'} \circ Ff : FG_0 a \to a' \rangle$ existe uma única seta $f : G_0 a \to G_0 a'$ tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} G_0 a \arrow[d, "f"'] & FG_0 a \arrow[r, "\varepsilon_a"] \arrow[d, "Ff"'] & a \arrow[d, "z"] \\ G_0 a' & FG_0 a' \arrow[r, "\varepsilon_{a'}"'] & a' \end{tikzcd} .$$

Tomando $Gz = f$, nós temos então que G é definido sobre setas $z : a \to a'$ por $\varepsilon_{a'} \circ FGz = z \circ \varepsilon_a$. Mas, veja que tomando essa seta única como $Gz : G_0 a \to G_0 a'$ nós temos exatamente a comutatividade que assegura a naturalidade de ε, ou seja, $\varepsilon_{a'} \circ FGz = z \circ \varepsilon_a$. Assim, $\varepsilon : FG \dot{\to} I_{\mathcal{A}}$ é uma transformação natural.

Que G é um funtor pode ser provado da seguinte forma: considere o par de setas $z : a \to a'$, $h : a' \to a''$, que compondo dá a seta $h \circ z : a \to a''$.

O que nós temos que mostrar é que $G(h \circ z) = G(h) \circ G(z)$ e que $G(1_a) = 1_{Ga}$. Considere o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}
FG_0a \arrow[r, "\varepsilon_a"] \arrow[d, "FGz"'] \arrow[dd, bend right=60, "F(Gh \circ Gz)"'] & a \arrow[d, "z"] \arrow[dd, bend left=60, "h \circ z"] \\
FG_0a' \arrow[r, "\varepsilon_{a'}"] \arrow[d, "FGh"'] & a' \arrow[d, "h"] \\
FG_0a'' \arrow[r, "\varepsilon_{a''}"] & a''
\end{tikzcd}.$$

Como F é um funtor, nós temos

$$\varepsilon_{a''} \circ F(Gh \circ Gz) = \varepsilon_{a''} \circ FGh \circ FGz = h \circ z \circ \varepsilon_a .$$

Pela definição de universalidade, nós temos que $G(h \circ z)$ é a única seta que faz o diagrama acima comutar. Disso se segue, portanto, que $G(h \circ z) = Gh \circ Gz$. A prova de que $G(1_a) = 1_{Ga}$ é análoga (em caso de dúvidas, veja a prova no caso dual acima, basta inverter as setas).

Sumarizando, o Teorema 3.4.4.4 nos dá a partir do funtor $F: \mathcal{X} \to \mathcal{A}$ e da seta universal $\langle G_0a, \varepsilon_a \rangle$ de F para a, para cada objeto a, um funtor $G: \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ tal que $G(a) = G_0a$, e $G(z: a \to a') = (\varepsilon_{a'} \circ FGz = z \circ \varepsilon_a)$ para o qual $\varepsilon: FG \dot{\to} I_{\mathcal{A}}$ é natural. Pelo Teorema 3.4.4.3 isso nos dá uma adjunção $\langle F, G, \varphi \rangle: \mathcal{X} \rightharpoonup \mathcal{A}$. ■

Teorema 3.4.4.5. Sejam $F: \mathcal{X} \to \mathcal{A}$, $G: \mathcal{A} \to \mathcal{X}$, $1_{\mathcal{X}}: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $1_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ funtores, $\eta: I_{\mathcal{X}} \dot{\to} GF$, $\varepsilon: FG \dot{\to} I_{\mathcal{A}}$ transformações naturais, e $F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\varepsilon F} F$, $G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\varepsilon} G$ as respectivas transformações identidades de F e G. Aqui, φ é definida por $\varphi f = Gf \circ \eta_x: x \to Ga$ e φ^{-1} é definida por $\varphi^{-1}(g) = \varepsilon_a \circ Fg: Fx \to a$.

Prova. Por meio de η e ε nós definimos as funções

$$\varphi: \mathcal{A}(Fx, a) \rightleftarrows \mathcal{X}(x, Ga): \theta$$

por $\varphi f = Gf \circ \eta_x$, para cada $f: Fx \to a$, e $\theta(g) = \varepsilon_a \circ Fg$, para cada $g: x \to Ga$. Então, desde que G é um funtor e η é natural, nós temos

$\varphi\theta g = G\varepsilon_a \circ GFg \circ \eta_x = G\varepsilon_a \circ \eta_{Ga} \circ g$.

Mas, por hipótese, $G\varepsilon_a \circ \eta_{Ga} = 1$, e consequentemente, $\varphi\theta = id$. Por dualidade, nós temos $\theta\varphi = id$, e consequentemente, φ é uma bijeção, claramente natural, com inversa θ. Sendo, assim, uma adjunção. ■

Por causa do teorema Teorema 3.4.4.5, uma adjunção $\langle F, G, \varphi\rangle$ é frequentemente denotada por $\langle F, G, \eta, \varepsilon\rangle: \chi \rightharpoonup \mathcal{A}$.

3.4.4.6 Utilidade dos Teoremas 3.4.4.1-3.4.4.5

Nós vamos exemplificar, agora, algumas aplicações dos teoremas apresentados acima. De fato, é fácil constatar que eles podem ser muito úteis. Os Teoremas 3.4.4.2 e 3.4.4.4 afirmam que, sempre que nós temos uma seta universal de ou para cada objeto de uma dada categoria, nós temos uma adjunção. Por exemplo, uma dada categoria $\mathcal{C}$ tem produtos finitos quando para cada par (objeto) $\langle a, b\rangle$ de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ existe uma seta universal de $\Delta: \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ para $\langle a, b\rangle$. Pelo teorema acima podemos concluir que a função $\langle a, b\rangle \mapsto a \times b$ dando o objeto produto é na verdade um funtor $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, e que tal funtor é adjunto direito para o funtor diagonal Δ. Isso significa que nós temos a bijeção

$$\varphi: \mathcal{C} \times \mathcal{C}(\Delta c, \langle a, b\rangle) \cong \mathcal{C}(c, a \times b),$$

que pela definição das setas em $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ nos dá

$$\varphi: \mathcal{C}(c, a) \times \mathcal{C}(c, b) \cong \mathcal{C}(c, a \times b).$$

Tomando $c = a \times b$ no conjunto-hom da direita a co-unidade dessa adjunção é uma seta $\langle a \times b, a \times b\rangle \to \langle a, b\rangle$, sendo, portanto, nada mais do que um par de setas $a \leftarrow a \times b \to b$, que são justamente as projeções $p: a \times b \to a$ e $q: a \times b \to b$ do produto. A adjunção φ^{-1} leva cada $f: c \to a \times b$ para o par $\langle pf, qf\rangle$, que é exatamente a forma pela qual φ é determinada pela co-unidade ε.

Por sua vez, o Teorema 3.4.4.5 descreve uma adjunção por duas simples identidades

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "F\eta"] & FGF \arrow[d, "\varepsilon F"] \\
 & F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
GFG \arrow[d, "G\varepsilon"'] & G \arrow[l, "\eta G"'] \\
G &
\end{tikzcd}
$$

sobre a unidade e a co-unidade da adjunção. A utilidade decorrente desse tipo de construção (comumente chamada de identidade triangular) proporcionada pelo Teorema 3.4.4.5 é que ela não faz uso explícito dos objetos das categorias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{X}$, sendo, assim, de fácil manipulação. Além disso, é muito mais conveniente quando se trata de discutir propriedades de adjunções.

Proposição 3.4.4.6.1. Se os funtores $F, F': \mathcal{X} \to \mathcal{A}$ são adjuntos à esquerda de um funtor $G: \mathcal{A} \to \mathcal{X}$, então eles são naturalmente isomórficos.

Prova. Segue da unicidade a menos de isomorfismo da seta universal. ■

4 NOMINALISMO DE CATEGORIAS

4.1 Formas Esquemáticas de Sentenças

Neste tópico nós introduziremos a noção de forma esquemática de sentenças. O que seria a forma esquemática de uma sentença? A primeira coisa que devemos ter em mente é que formas esquemáticas de sentenças não são entidades, mas sim, como o próprio nome diz, são apenas esquemas. Portanto, não estamos aqui tratando de um mundo cujos habitantes são as formas esquemáticas de sentenças. A segunda coisa que devemos ter em mente é que uma forma esquemática não é nada mais do que uma construção. Ou seja, é uma maneira de tratarmos o nosso problema motivador, a saber, mostrar que é possível falarmos e raciocinarmos sobre propriedades sem que para isso tenhamos de postular universais. Assim, quando dissemos que vamos chegar até à forma esquemática de uma sentença, queremos dizer que vamos construir a forma esquemática de uma sentença. Isto é, não é uma maneira de desvendar algo que está escondido, é apenas uma maneira de construir um esquema que, como tal, é ontologicamente neutro. A terceira coisa que devemos ter em mente é que tal construção não é padrão, no sentido de que só existe uma maneira de tal construção ser efetuada. Pelo contrário, a maneira como essa construção é efetuada está ligada às nossas intuições, e nada mais. Isso quer dizer que não é algo pré-determinado[12] e com existência independente. O que estamos querendo dizer é que a construção utiliza aquilo que intuitivamente nos é dado, a partir da observação empírica.

Dessa forma, nós podemos utilizar algo intuitivo como a aglomeração de coisas; e podemos utilizar coisas que fazem parte de uma determinada aglomeração, mas também fazem parte de outra determinada aglomeração. Por exemplo, nós podemos classificar várias aglomerações a partir de uma única aglomeração, mediante a observação das características dos objetos que compõem essa única aglomeração. Digamos que nós temos uma aglomeração composta de maçãs, uvas, bananas, canetas, cadernos, lápis, xampu, pasta de dentes e escova de dentes. A partir dessa única aglomeração nós podemos identificar três outras aglomerações, a saber, a aglomeração de frutas, a aglomeração de materiais escolares e a aglomeração de produtos de higiene pessoal. Dentre essas três aglomerações, podemos identificar outra aglomeração, por

[12] Talvez pelo nosso aparato cognitivo. Mas quando dizemos que não é pré-determinado queremos dizer que não é algo que não poderia ser de outra forma, como um universal platônico.

exemplo, a aglomeração das coisas vermelhas. Assim, digamos que alguns lápis, algumas canetas e algumas maçãs são vermelhas; logo, nós temos na aglomeração das coisas vermelhas, objetos que também fazem parte de outras aglomerações, a saber, respectivamente, da aglomeração de materiais escolares e da aglomeração de frutas. Isso é óbvio e não precisamos de nada mais do que as nossas intuições e a nossa capacidade de classificação para fazê-lo.

Muitos dos problemas filosóficos (para não dizer todos) surgem de outra capacidade que nós temos, a saber, a capacidade de abstração. Assim, se unirmos a nossa capacidade de abstração às intuições e à capacidade de classificação, fazemos surgir monstros como conjuntos e universais. Usando o nosso exemplo acima, nós podemos dar surgimento a duas entidades: o conjunto das coisas vermelhas, e o universal 'vermelhidade'. O ponto em questão aqui é que é quase impossível para a mente humana deixar de se comprometer ontologicamente com certas entidades quando esta (a mente humana) utiliza as capacidades supracitadas. Entretanto, isso não quer dizer, obviamente, que tais entidades existam de modo independente (ou nas coisas, ou seja lá onde for), e muito menos quer dizer que não podemos nos livrar desses comprometimentos. Assim, do fato de as nossas capacidades nos forçar a certos comprometimentos ontológicos (caso não tenhamos cuidado) não se segue que usar essas capacidades é algo ruim ou proibido. Pelo contrário, a lida com o mundo seria imensamente mais difícil sem elas, e, portanto, é completamente legítimo (e necessário) que as utilizemos.

Mas, o que isso tudo quer dizer? Que nós vamos utilizar as nossas intuições e as nossas capacidades de classificação e abstração[13] no processo de construção das formas esquemáticas de sentenças. O que tem de ficar claro é que nós temos que partir de algo, e o quão esse algo é perigoso nós sabemos, mas o uso é legítimo, pois, note que do fato de a nossa mente associar esses aglomerados a conjuntos não se segue que conjuntos são essenciais ao nosso processo, ou que estamos utilizando como ponto de partida algo abstrato, segue-se apenas que a nossa mente associa esses aglomerados a conjuntos. Para ver isso, basta saber que esses aglomerados não são conjuntos: os aglomerados que o nosso processo toma como ponto de partida são tão concretos quanto os próprios objetos concretos que o formam, pois, caso contrário, nós poderíamos identificar outro conjunto com o aglomerado em questão, a saber, o conjunto das

[13] Note que o termo 'abstração' aqui está sendo utilizado no sentido ordinário.

moléculas dos objetos que formam esse aglomerado; no entanto, por extensionalidade, esses dois conjuntos seriam obviamente distintos, tendo em vista que enquanto o primeiro conjunto teria, digamos quarenta elementos, o último teria trilhões. Assim, o nosso ponto de partida, além de necessário, é completamente legítimo.

Mas, obviamente que a melhor teoria sobre aglomerados que temos é a teoria de conjuntos. Portanto, não adiantaria muita coisa dizer que partimos de aglomerados concretos se utilizarmos teoria de conjuntos. Assim, o primeiro passo do processo é saber como nós podemos utilizar as nossas capacidades acima citadas de uma maneira que nos permita dar o passo seguinte, ou seja, de uma maneira que não nos deixe presos na metade do caminho, em meio a monstros como conjuntos e universais. Dessa forma, o primeiro passo é saber como podemos tratar de forma categorial raciocínios típicos da teoria de conjuntos. O próximo tópico tratará dessa questão.

4.1.1 Sub-conjuntos e elementos em categorias

Sejam A, Bconjuntos tal que $A \subseteq B$. Isso faz surgir uma função inclusão $A \hookrightarrow B$que, como sabemos, é injetiva, e assim, um monomorfismo. Por sua vez, se nós temos qualquer monomorfismo $f: C \rightarrowtail B$, nós podemos determinar um subconjunto de B, ou seja, $\operatorname{Im} f = \{f(x): x \in C\}$. Como sabemos, também, f induz uma bijeção $C \cong \operatorname{Im} f$. Isso quer dizer que o domínio de um monomorfismo é isomórfico a um subconjunto do codomínio, ou seja, a menos de isomorfismo, o domínio é um subconjunto do codomínio. Os dados acima nos levam à definição dos "análogos" sub-objetos em teoria das categorias.

Definição 4.1.1.1. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria, e d um objeto de $\mathcal{C}$. Um sub-objeto de d é um monomorfismo $f: a \rightarrowtail d$, isto é, com codomínio d.

A coleção de todos os subconjuntos de um dado conjunto D é o chamado conjunto potência de D, o qual é denotado por $P(D)$, ou seja, $P(D) = \{A: A \subseteq D\}$. Como sabemos, $\subseteq$ é uma ordem parcial sobre $P(D)$, ou seja, $(P(D), \subseteq)$ é um conjunto parcialmente ordenado (poset). Como também sabemos, $(P(D), \subseteq)$, como um poset, é uma categoria com setas definidas da seguinte forma: $A \to B$ se, e somente se, $A \subseteq B$. Se $A \to B$ existe, então, o diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] & D \\ A \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

comuta, onde todas as setas do diagrama acima são monomorfismos. Esses dados nos permitem definir um "análogo" à relação de inclusão em teoria das categorias.

Definição 4.1.1.2. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria, e $f: a \rightarrowtail d, g: b \rightarrowtail d$ sub-objetos de d. Nós dizemos que $f \subseteq g$ se, e somente se, existe um monomorfismo $h: a \to b$ em $\mathcal{C}$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} d & \\ a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "h"'] & b \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

comuta. Ou seja, $f = g \circ h$.

A definição acima afirma, então, que $f \subseteq g$ exatamente quando f *fatora-se por meio de* g. Note que a relação de inclusão sobre sub-objetos é reflexiva e transitiva, como podemos ver nos seguintes diagramas abaixo:

(i) $f \subseteq f$;

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] & d \\ a \arrow[u, "1_a"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(ii) se $f \subseteq g$ e $g \subseteq k$, então $f \subseteq k$;

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[dr, "k"] & \\
b \arrow[u, "i"] \arrow[r, "g"] & d \\
a \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "f"'] \arrow[uu, bend left, "i \circ h"]
\end{tikzcd}
$$

se $f = g \circ h$ e $g = k \circ i$, então

$f = k \circ (i \circ h)$.

É importante notar, também, que se $f \subseteq g$ e $g \subseteq f$, então f e g fatoram-se um por meio do outro, e temos sub-objetos isomórficos, $f \cong g$, tal como no diagrama abaixo:

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "g"] \arrow[d, shift right, "i"'] & d \\
a \arrow[u, shift right, "h"'] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

ou seja, $f = g \circ h$ e $g = f \circ i$. Aqui, h é um isomorfismo com inversa i, isto é, quando $f \subseteq g$ e $g \subseteq f$, f e g possuem domínios isomórficos.

Note que, para afirmar a antissimetria de $\subseteq$, deve ser possível afirmar que se $f \subseteq g$ e $g \subseteq f$, então $f = g$. No entanto, tal como definida acima, isso não é possível, tendo em vista que podemos ter $a \neq b$. Assim, em geral, $\subseteq$ é uma pré-ordem sobre os sub-objetos de d, e não uma ordem parcial. Note, todavia, que $\cong$ é uma relação de equivalência, ou seja, $\cong$ é reflexiva, simétrica e transitiva. Dessa forma, cada $f: a \rightarrowtail d$ determina uma classe de equivalência

$$[f] = \{g: f \cong g\},$$

e nós podemos, então, formar a coleção

$$\mathrm{Sub}(d) = \{[f]: f \text{ é um monomorfismo com } \mathrm{cod} f = d\}.$$

Agora, seja $\mathcal{C}$ uma categoria qualquer, e d um objeto de $\mathcal{C}$. Vamos denotar por D a coleção de sub-objetos de d. Como já mencionamos, $\cong$ é uma relação de equivalência. O conjunto quociente de D, o qual denotamos por $D_{\cong}$, equivale à união disjunta de todas as classes de equivalência que formam D. Isso quer dizer que, dado $[f] = \{g \in D: f \cong g\}$, nós temos $D_{\cong} = \{[f]: f \in D\}$. Como é fácil notar, $D_{\cong} = \mathrm{Sub}(d)$. Mas, num conjunto quociente, nós temos $[f] \subseteq [g]$ se, e somente se, $f \subseteq g$ em D, e $[f] = [g]$ se, e somente se, $f \cong g$. Portanto, $\subseteq$ é antissimétrica em $\mathrm{Sub}(d)$, desde que se $[f] \subseteq [g]$e $[g] \subseteq [f]$, então $f \subseteq g$ e $g \subseteq f$, logo, $f \cong g$, e assim, $[f] = [g]$. Definidos dessa forma, os sub-objetos de d agora formam um poset $(\mathrm{Sub}(d), \subseteq)$.

Note que, tal como foi o caso para a noção de subconjunto, nós também podemos dar um "análogo" à noção de elementos em teoria das categorias. Um elemento $x \in A$ pode ser identificado com o subconjunto unitário $\{x\} \subseteq A$, e portanto, com uma inclusão $\{x\} \hookrightarrow A$. Conversamente, qualquer função $f: \{*\} \to A$ determina um elemento de A, a saber, a f-imagem do único elemento de $\{*\}$. Lembre-se que inclusões são sempre injetivas, e assim, monomorfismos, e que o conjunto unitário é o objeto terminal (único somente a menos de isomorfismo) na categoria Set. Assim, generalizando, podemos afirmar que em qualquer categoria $\mathcal{C}$ com objeto terminal 1, um elemento x de um objeto a de $\mathcal{C}$ é definido como uma seta $x: 1 \to a$ em $\mathcal{C}$. Note que setas $x: 1 \to a$ são sempre monomorfismos.

4.1.2 Formas esquemáticas de sentenças como cones

Agora que nós já sabemos como tratar raciocínios típicos da teoria de conjuntos, tais como subconjuntos e elementos, de forma categorial, nós estamos prontos para o passo seguinte. Nesse passo nós vamos mostrar como podemos construir esquemas de sentenças utilizando a noção de cones. A ideia aqui é mostrar que podemos converter a nossa intuição sobre o que significaria uma sentença tal como 'x é vermelho' em uma noção totalmente esquemática tal como um cone. Lembrem-se que nós estamos efetuando um passo a passo que envolve intuições perigosas como a de aglomerados, mas que tais intuições são completamente legítimas e necessárias. Assim, utilizando essas intuições, o que significaria dizer que algo é vermelho? Obviamente existem muitas respostas para essa pergunta, mas, vamos nos manter dentro do âmbito primitivo das nossas intuições e das nossas capacidades de classificação e abstração. Podemos dizer que 'x é vermelho' significa que x faz parte do aglomerado das coisas que são vermelhas. Mas, intuitivamente, dizer que x é vermelho é, antes de tudo, dizer que x é alguma coisa, digamos, um lápis, uma caneta, uma maçã etc.. Portanto, x faz parte de um aglomerado que faz parte de outro aglomerado.

Também, intuitivamente, o aglomerado das coisas da qual x faz parte (por exemplo, x pode ser um lápis) é menor do que o aglomerado das coisas que são vermelhas (mas, mesmo que não seja o caso, é muito fácil pensar num aglomerado ao qual um objeto pertença que é menor do que o aglomerado de todas as coisas que são vermelhas; em todo caso, isso é apenas um exemplo intuitivo). Assim, a partir do aglomerado ao qual x pertence podemos separar aqueles objetos que também são vermelhos, e podemos dizer que esse segundo aglomerado está contido no aglomerado de todas as coisas que são vermelhas. Dessa forma, como já dissemos, podemos dizer que 'x é vermelho' significa que x é uma coisa que faz parte do aglomerado das coisas que são vermelhas. Note que aqui não estamos querendo saber como ou por que a coisa x é vermelha, nós estamos querendo saber como podemos utilizar as nossas intuições e as nossas capacidades de classificação e abstração para mostrar o que significa dizer que x é vermelho. Com o exposto acima em mente, vamos dar o passo adiante.

Como mencionado no tópico anterior, $f \subseteq g$ exatamente quando f fatora-se por meio de g. Isso nos diz, imediatamente, que a inclusão de sub-objetos é caracterizada por uma propriedade definidora de cones. Mais especificamente, se nós temos$f: a \rightarrowtail d, g: b \rightarrowtail d$sub-objetos de d, dizer que $f \subseteq g$ é afirmar que $f: a \rightarrowtail d, h: a \rightarrowtail b$ formam um cone com vértice a para $g: b \rightarrowtail d$. Formalmente, a categoria indexadora deve ser $\mathcal{J} = * \rightarrowtail *$, onde $* \rightarrowtail *$ é um monomorfismo, e o funtor $F: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ deve ser tal que preserva monomorfismos, e com $\mathcal{C}$ sendo completa e cocompleta. Mantendo este parágrafo em mente, vamos definir uma relação esquemática e provar uma proposição que será crucial para os próximos passos.

Definição 4.1.2.1 (Relação Esquemática)**.** Seja $\mathcal{C}$ uma categoria arbitrária adequada, a formulação da relação *fatora-se por meio de* pode sempre ser dada em $\mathcal{C}$ da seguinte forma:

Sejam $f: d \rightarrow a$ e $g: d \rightarrow b$ morfismos, dizemos que g *fatora-se por meio de* f, se, e somente se, existe uma seta $h: a \rightarrow b$, tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} d \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ a \arrow[r, "h"'] & b \end{tikzcd}$$

comuta. Ou seja, $g = h \circ f$. Se h é única dizemos que g *fatora-se unicamente por meio de* f.

A noção dual da relação *fatora-se por meio de* é dada abaixo:

Sejam $f: a \to d$ e $g: b \to d$ morfismos, dizemos que f *cofatora-se por meio de* g, se, e somente se, existe uma seta $h: a \to b$, tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} d & \\ a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "h"'] & b \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

comuta. Ou seja, $f = g \circ h$. Se h é única dizemos que f *cofatora-se unicamente por meio de* g. A relação *fatora-se por meio de*, bem como sua dual, são puramente esquemáticas, e como tais, são ontologicamente neutras. Isso quer dizer que não faz nenhum sentido perguntar, por exemplo, se tais relações são um universal ou um particular.

Antes de continuarmos, será necessário falarmos sobre propriedades[14] definidoras de cones. Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{J}$ categorias e $F: \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ um funtor. Vejamos o diagrama abaixo em $\mathcal{C}$:

$$Fi \xrightarrow[Fu]{} Fj \qquad (4.1.2.2)$$

[14] Lembre-se que se trata de propriedades esquemáticas.

Seja, agora, a propriedade G definida sobre pares de morfismos com domínios comuns para Fi e Fj, por exemplo, $\tau_i: c \rightarrow Fi$ e $\tau_j: c \rightarrow Fj$, como $G(\langle\tau_i, \tau_j\rangle) = (Fu \circ \tau_i = \tau_j)$. Note que G é exatamente a propriedade que define cones para o diagrama (4.1.2.2). Considere, agora, o par de morfismos $\lambda_i: c' \rightarrow Fi$ e $\lambda_j: c' \rightarrow Fj$, e o morfismo $h: \langle\tau_i, \tau_j\rangle \rightarrow \langle\lambda_i, \lambda_j\rangle$, o qual se define por $h: c \rightarrow c'$, tal que $\tau_i = \lambda_i \circ h$ e $\tau_j = \lambda_j \circ h$. Dessa forma, podemos ver que $\langle\tau_i, \tau_j\rangle$ *fatora-se por meio de* $\langle\lambda_i, \lambda_j\rangle$. Se o morfismo h é único, então, dizemos que a fatorização é única. A relação *fatora-se por meio de* é a relação[15]entre instâncias[16] da propriedade G. Vejamos o exposto acima em forma diagramática:

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\tau_i"'] \arrow[dr, "\tau_j" near start] & c' \arrow[d, "\lambda_j"] \arrow[dl, "\lambda_i"' near start] \\
Fi \arrow[r, "Fu"'] & Fj\,.
\end{tikzcd}$$

Agora podemos apresentar e provar a proposição que será essencial adiante.

Proposição 4.1.2.3. O morfismo h reflete a propriedade de comutar com Fu, ou seja, reflete a propriedade G. Isto é, se nós temos o par de morfismos $\langle\lambda_i, \lambda_j\rangle$ tal que $G(\langle\lambda_i, \lambda_j\rangle)$, e se o morfismo $h: \langle\tau_i, \tau_j\rangle \rightarrow \langle\lambda_i, \lambda_j\rangle$ existe, então, o par $\langle\tau_i, \tau_j\rangle$ possui a propriedade G.

Prova. Se $G(\langle\lambda_i, \lambda_j\rangle)$, então, $Fu \circ \lambda_i = \lambda_j$, que implica $Fu \circ \lambda_i \circ h = \lambda_j \circ h$, mas, $\tau_i = \lambda_i \circ h$ e $\tau_j = \lambda_j \circ h$, o que nos dá, $\big(Fu \circ \lambda_i \circ h) = \lambda_j \circ h\big) = (Fu \circ \tau_i = \tau_j)$. ■

Assim, a relação *fatora-se por meio de* reflete a propriedade, isto é: se $G(\langle\lambda_i, \lambda_j\rangle)$ e $\langle\tau_i, \tau_j\rangle$ *fatora-se por meio de* $\langle\lambda_i, \lambda_j\rangle$, então $G(\langle\tau_i, \tau_j\rangle)$.

[15] Relação esquemática.
[16] Mais uma vez, note que G é uma propriedade esquemática, e o que é chamado aqui de instância é apenas uma forma esquemática.

Agora, podemos continuar o nosso passo a passo. Vamos considerar o seguinte cenário:

$$
\begin{tikzcd}
\{x\} \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "x"] & \\
B \arrow[r, "v"'] & C\,.
\end{tikzcd}
\qquad (4.1.2.4)
$$

Dizer que $x \subseteq v$ é dizer que existe um $h: \{x\} \to B$ tal que $x = v \circ h$. Podemos dizer, então, que x, um membro de B, é também um membro de C porque existe uma seta $v \circ h$ que injeta x em C, e essa seta é igual à seta x do diagrama acima. Note que as setas h e x injetam, respectivamente, x em B e em C. De acordo com o que já expomos, nós podemos dizer que $\langle h, x\rangle$ possui a propriedade de comutar com v, tal propriedade denotaremos por V. Assim, dizer que $\langle h, x\rangle$ tem a propriedade V é dizer que $x = v \circ h$; portanto, dizer que $\langle h, x\rangle$ possui a propriedade V é dizer que o objeto x que é um membro de B também é um membro de C.

Voltando ao nosso exemplo, digamos que B seja um aglomerado de objetos, e C seja o aglomeradode todos os objetos que são vermelhos. Assim, $V\langle h, x\rangle$ quer dizer 'x é vermelho'[17]. Assim, a forma esquemática da sentença 'x é vermelho' é $V\langle h, x\rangle$. Note que ao chegar nesse ponto não precisamos mais pensar em aglomerados, mas apenas no cone que expressa a forma esquemática de 'x é vermelho', ou seja, precisamos pensar apenas no diagrama (4.1.2.4). Mas, agora, para que possamos colocar em prática o que temos em mente, temos que encontrar uma maneira de relacionar esquemas de sentenças. Mais ainda, nós temos que definir uma categoria na qual esquemas de sentenças são objetos e as relações esquemáticas entre esses esquemas são setas. Sabendo que esquemas de sentenças são cones, fica fácil saber que tal categoria deve ser uma categoria onde os objetos são cones. O próximo tópico irá tratar disso.

[17] x aqui não é uma variável, mas uma constante! É de suma importância que o leitor mantenha em mente que em todos os exemplos envolvendo formas esquemáticas de sentenças estaremos lidando com constantes, e não com variáveis!

4.1.3 Categoria das formas esquemáticas de sentenças

Lembrem-se que limite é um caso particular de seta universal, isto é, sejam $\mathcal{J}$, $\mathcal{C}$ categorias tais que $\mathcal{J}$ é uma categoria pequena, F um funtor de $\mathcal{J}$ para $\mathcal{C}$, e o funtor diagonal $\Delta: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$. Como sabemos, um limite para F é uma seta universal de Δ para F. Isso significa que o limite para o funtor F é o objeto terminal na categoria $(\Delta \downarrow F)$. Deixe-nos pormenorizar essa definição.

Tomemos o funtor diagonal $\Delta: \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$, e também um funtor $F: \mathcal{J} \to \mathcal{C}$. Note que $F: \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ é um objeto de $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$, assim, novamente, podemos considerar o objeto $F: \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ como um funtor da categoria $\mathbf{1}$ para a categoria $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$, ou seja, $F: \mathbf{1} \to \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$. Dessa forma, podemos definir a categoria comma $(\Delta \downarrow F)$ da seguinte forma:

Um objeto de $(\Delta \downarrow F)$ é uma tripla $\langle c,*,\eta \rangle$, onde c é um objeto de $\mathcal{C}$, $*$ é o objeto de $\mathbf{1}$, e $\eta: \Delta(c) \to F(*)$, isto é, $\langle c,*,\eta \rangle \Leftrightarrow \eta: \Delta(c) \to F(*)$. Um morfismo em $(\Delta \downarrow F)$, ou seja, entre dois objetos $\langle c,*,\eta \rangle$, $\langle c',*,\eta' \rangle$ de $(\Delta \downarrow F)$, é um par $\langle h, l \rangle$, com $h: c \to c'$ e $l: * \to *$, tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Delta(c) \arrow[r, "\Delta(h)"] \arrow[d, "\eta"'] & \Delta(c') \arrow[d, "\eta'"] \\
F(*) \arrow[r, "F(l)"'] & F(*)
\end{tikzcd}$$

comuta. Ou seja, $\eta' \circ \Delta(h) = F(l) \circ \eta$. Note que l é o morfismo identidade $1_*: * \to *$, e, claro, $F(*) = F: \mathcal{J} \to \mathcal{C}$, e $F(1_*)$ é a transformação natural identidade $1_F: F \dot{\to} F$, que atribui a cada objeto j de $\mathcal{J}$ a identidade $1_{F(j)}: F(j) \to F(j)$. Assim, a tripla $\langle c,*,\eta \rangle$ representa a transformação natural $\eta: \Delta(c) \dot{\to} F$. Note, também, que $\Delta(c)$, $\Delta(c')$ e $\Delta(h): \Delta(c) \to \Delta(c')$ são justamente, e respectivamente, os funtores constantes e a transformação natural resultantes da aplicação do funtor diagonal $\Delta: \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$, que leva objetos c de $\mathcal{C}$ para o funtor constante $\Delta(c)$, e morfismos $h: c \to c'$ em $\mathcal{C}$ para as óbvias transformações naturais $\tau: \Delta(c) \dot{\to} \Delta(c')$com $\tau_a = h$ para todo a de $\mathcal{J}$. Assim, o diagrama, na verdade, é o seguinte:

$$\begin{tikzcd} \Delta(c) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\eta"'] & \Delta(c') \arrow[d, "\eta'"] \\ F \arrow[r, "1_F"'] & F . \end{tikzcd}$$

Note que como τ é uma transformação natural, para cada $u: i \to j$ em $\mathcal{J}$ nós temos

$$\begin{tikzcd} {[\Delta(c)](i)} \arrow[r, "\tau_i"] \arrow[d, "{[\Delta(c)](u)}"'] & {[\Delta(c')](i)} \arrow[d, "{[\Delta(c')](u)}"] \\ {[\Delta(c)](j)} \arrow[r, "\tau_j"'] & {[\Delta(c')](j)} \end{tikzcd}$$

que dá

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "h"] \arrow[d, "1_c"'] & c' \arrow[d, "1_{c'}"] \\ c \arrow[r, "h"'] & c' , \end{tikzcd}$$

ou seja, $1_{c'} \circ h = h \circ 1_c = h$. Assim, nós precisamos ter apenas a comutatividade do diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\eta"'] & c' \arrow[d, "\eta'"] \\ F \arrow[r, "1_F"'] & F . \end{tikzcd}$$

Obviamente, do fato de η ser uma transformação natural, segue-se que nós temos, para cada objeto j de $\mathcal{J}$, um morfismo $\eta_j: [\Delta(c)](j) \to F(j)$. Mas, claro, $[\Delta(c)](j) = c$ para todo objeto j de $\mathcal{J}$, o que nos faz ter, no fim das contas, apenas um objeto c de $\mathcal{C}$ e um morfismo $c \longrightarrow F(j)$ para cada objeto j de $\mathcal{J}$. Assim, para cada objeto j de $\mathcal{J}$, tanto para η quanto para η', nós temos

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\eta"'] & c' \arrow[d, "\eta'"] \\ Fj \arrow[r, "1_{Fj}"'] & Fj \end{tikzcd} .$$

Obviamente, também, a condição de naturalidade tanto de η quanto de η' deve ser respeitada. Dessa forma, se $u: i \to j$ é uma seta em $\mathcal{J}$, nós temos para η e η', respectivamente, os pares de setas $\eta_i: c \to F(i)$, $\eta_j : c \to F(j)$ e $\eta'_i: c' \to F(i)$, $\eta'_j : c' \to F(j)$, junto com a comutatividade dos seguintes diagramas, respectivamente:

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "\eta_i"'] \arrow[dr, "\eta_j"] & \\ Fi \arrow[r, "Fu"'] & Fj \end{tikzcd}$$

isto é, $F(u) \circ \eta_i = \eta_j$, e

$$\begin{tikzcd} c' \arrow[d, "\eta'_i"'] \arrow[dr, "\eta'_j"] & \\ Fi \arrow[r, "Fu"'] & Fj \end{tikzcd} ,$$

isto é, $F(u) \circ \eta'_i = \eta'_j$, o que nada mais são do que cones para o diagrama $F(u)$. Dessa forma, uma seta em $(\Delta \downarrow F)$, ou seja, entre dois objetos $\langle c,*,\eta\rangle$, $\langle c',*,\eta'\rangle$ de $(\Delta \downarrow F)$, é dado por uma seta $h: c \to c'$ tal que o diagrama

$$
\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
c \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\eta_i"'] \arrow[dr, "\eta_j" near start] & c' \arrow[d, "\eta'_j"] \arrow[dl, "\eta'_i"' near start] \\
F(i) \arrow[r, "F(u)"'] & F(j)
\end{tikzcd}
$$

é comutativo. Ou seja, $\eta_i = \eta'_i \circ h$ e $\eta_j = \eta'_j \circ h$.

Assim, objetos na categoria $(\Delta \downarrow F)$ são cones para o funtor F, e podemos dizer que tal categoria é a categoria dos F-cones, o que denotamos por Cone_F.

Note que a seta h do diagrama acima é justamente a relação *fatora-se por meio de*. Agora, considere o seguinte cenário:

$$
\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
\{x\} \arrow[r, "l"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "x" near start] & \{x'\} \arrow[d, "x'"] \arrow[dl, "h'"' near start] \\
B \arrow[r, "v"'] & C\,.
\end{tikzcd}
$$

De forma análoga ao cone (4.1.2.4), $V\langle h', x'\rangle$ quer dizer 'x' é vermelho'. Como vimos, a propriedade de comutar com v é refletida pela seta l, ou seja, de acordo com a Proposição 4.1.2.3, se $V\langle h', x'\rangle$, e se a seta $l: \langle h, x\rangle \to \langle h', x'\rangle$ existe, então, $V\langle h, x\rangle$. Em outras palavras, o predicado 'é vermelho' é atribuído ao objeto x, ou seja, nós podemos dizer 'xé vermelho', porque a forma esquemática $V\langle h, x\rangle$ *fatora-se por meio de* $V\langle h', x'\rangle$ (que também é uma forma esquemática). Agora, note que a relação esquemática *fatora-*

se por meio de é a forma esquemática da relação de semelhança[18]. Isso porque é intuitivo dizer que nós podemos afirmar que x é vermelho[19] por x se assemelhar a outro objeto vermelho (é claro que do ponto de vista em questão, ou seja, cores). Assim, a relação esquemática entre formas esquemáticas de sentenças é a forma esquemática da relação de semelhança entre objetos.

Mas, se x se assemelha a x', então, obviamente, x' se assemelha a x. Assim, nós temos que ter uma seta de volta, tal como no diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}
\{x\} \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "x" near start] & \{x'\} \arrow[l, "l'"'] \arrow[dl, "h'"' near start] \arrow[d, "x'"] \\
B \arrow[r, "v"'] & C .
\end{tikzcd}$$

Também de acordo com a Proposição 4.1.2.3, se $V\langle h, x\rangle$, e a seta $l'\colon \langle h', x'\rangle \to \langle h, x\rangle$ existe, então, $V\langle h', x'\rangle$. Em outras palavras, o predicado 'é vermelho' é atribuído ao objeto x' por x' se assemelhar ao objeto x. Note que a x e a x' são atribuídos o mesmo predicado, ou seja, 'é vermelho', pelo fato de um assemelhar-se[20] ao outro.

A partir do exposto acima nós podemos ter formas esquemáticas não apenas de sentenças, mas também de fatos. Por exemplo, a forma esquemática do fato[21] de x possuir a mesma cor que x' é o diagrama comutativo abaixo:

[18] Muito cuidado aqui! "Relação de semelhança" aqui está sendo entendido como um fato bruto, ou seja, o fato de x se assemelhar a x´. O interessante sobre isso é notar que podemos construir formas esquemáticas para fatos! Isso bem pode dar bons insights, por exemplo, em teoria da verdade (veja §6 para uma explanação um pouco mais detalhada disso).

[19] Podemos afirmar que x é vermelho, mas não podemos dizer que é por causa dessa semelhança que x é vermelho. Como e por que x é vermelho é um assunto que diz respeito à ciência, e não à filosofia!

[20] Lembre-se que a relação esquemática "fatora-se por meio de" é a forma esquemática da relação de semelhança.

[21] Tal como no caso das formas esquemáticas de sentenças, é de suma importância que o leitor mantenha em mente que estamos lidando com constantes, e não com variáveis.

$$
\begin{tikzcd}
\{x\} \arrow[r, shift left, "l"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "x" near start] & \{x'\} \arrow[l, shift left, "l'"] \arrow[d, "x'"] \arrow[dl, "h'"' near start] \\
B \arrow[r, "v"'] & C\,.
\end{tikzcd}
$$

Entretanto, nós temos um círculo vicioso aqui, pois para que $V\langle h', x'\rangle$ seja o caso, nós temos que ter $V\langle h, x\rangle$; mas para que $V\langle h, x\rangle$ seja o caso, nós temos que ter $V\langle h', x'\rangle$. Assim, deve existir algo fora da relação entre os esquemas das sentenças 'x é vermelho' e 'x' é vermelho'. Para tal, nós vamos precisar da noção de esquemas paradigmáticos, que virá da noção de particular paradigmático.

4.1.4 Particulares paradigmáticos

Intuitivamente falando, a noção de um particular paradigmático comumente ocorre no uso da linguagem ordinária como uma referência paradigmática, ou o exemplo "perfeito", de alguma coisa. Ou seja, podemos usar instâncias concretas para exemplificar de forma paradigmática certas características. Por exemplo, o *moto perpetuo* de Nicolo Paganini é frequentemente utilizado como uma referência paradigmática do virtuosismo musical. Outros exemplos intuitivos podem ser mesmo encontrados na definição de propriedades por meio de particulares paradigmáticos, tais como a propriedade de ser Coltraneano, significando que o músico em questão possui a capacidade de improvisar sobre harmonias complexas de mudanças rápidas. Aqui, John Coltrane é o particular paradigmático para essa propriedade, e todas as pessoas as quais o termo "Coltraneano" é atribuído o são por estas assemelharem-se ao particular paradigmático. Enfim, podemos encontrar, no uso da linguagem ordinária, inúmeros exemplos que caracterizam a noção intuitiva de um particular paradigmático.

Uma intuição metafisicamente ruim sobre isso é a seguinte: um particular paradigmático seria uma entidade x com uma propriedade P, mas, diferente de todas as outras entidades com a propriedade P, x instanciaria P de um modo perfeito. Todas as outras entidades com a propriedade P assemelham-se a x, que representa a essência de P, de modo que todas as outras entidades possuem a propriedade, mas, de maneira imperfeita. Assim, se a propriedade é vermelhidão, o particular paradigmático x seria algo perfeitamente vermelho, e a uma entidade y seria atribuída o termo “vermelho” se, e somente se, ela se assemelhasse a x.

Entretanto, a noção de particular paradigmático possui uma descrição um pouco mais aceitável na visão de H. H. Price. Rodriguez-Pereyra (2002, p. 124) faz uma distinção dentro do nominalismo de semelhança, a saber, o nominalismo de semelhança igualitário e o nominalismo de semelhança aristocrático. A diferença se daria nas concepções de estruturas de semelhança nas classes de propriedades. Classes de propriedades aqui seriam, de acordo com Rodriguez-Pereyra (2002, 4.2), classes cujos membros são todos e somente aqueles particulares compartilhando uma propriedade. Na posição igualitária do nominalismo de semelhança, como é de se esperar pela terminologia, todos os membros dessa classe possuem o mesmo status. Já na posição aristocrática do nominalismo de semelhança existem, nessas classes de propriedades, um ou mais pequenos grupos de particulares privilegiados. Dentre os possíveis exemplos de nominalismo de semelhança aristocrático, o principal é o apresentado por Price (1953). A terminologia igualitário/aristocrático é encontrada no supracitado texto de Price, e é justamente de lá que Rodriguez-Pereyra tira a sua terminologia para distinguir os dois tipos de nominalismo de semelhança. No entanto, Price utiliza o termo ‘igualitário’ para se referir à filosofia dos universais (realismo), deixando o termo ‘aristocrático’ para se referir à filosofia da semelhança. Como Price mesmo explica:

> Ambas as partes concordam que há uma classe de objetos vermelhos. A questão é, que tipo de estrutura uma classe tem? (...) De acordo com a Filosofia dos Universais, uma classe é, por assim dizer, uma promíscua ou igualitária aglutinação. Todos os seus membros têm, por assim dizer, o mesmo status. Todos são instâncias do mesmo Universal, e nada mais pode ser dito. Mas, na Filosofia de Semelhanças uma classe possui uma estrutura mais complexa do que isso; não igualitária, mas aristocrática. Cada classe tem, por assim dizer, um núcleo, um anel interno de membros-chave, consistindo de um grupo pequeno de objetos padrões ou exemplares. Os exemplares para a classe de particulares vermelhos podem ser um certo tomate, um certo tijolo, e um certo *pos-box* Britânico (PRICE, 1953, p. 20, tradução nossa).

Note que o que a Filosofia de Semelhanças de Price é exatamente o nominalismo de semelhança aristocrático de Rodriguez-Pereyra. Seguindo Rodriguez-Pereyra e Armstrong (1978a, pp. 45-46), nós vamos chamar os objetos padrões ou exemplares de Price de paradigmas. Como é algo fácil de constatar, os paradigmas possuem um papel essencial no nominalismo de semelhança aristocrático, desde que as classes de propriedades são determinadas por eles, ou seja, todos os particulares que se assemelham aos paradigmas, em algum certo sentido ou maneira, pertencem à classe em questão. Talvez seja desnecessário dizer, mas para evitar qualquer problema, note que os paradigmas são particulares. Dessa forma, paradigmas e particulares paradigmáticos são a mesma coisa. Note também que, pelos motivos expostos acima, todas tais classes devem possuir paradigmas, como Price mesmo diz

> De acordo com a Filosofia de Semelhanças, não pode existir uma classe a menos que existam objetos exemplares que mantenham a classe junta (...) Na Filosofia dos Universais, o que mantém a classe junta é um universal (...) Na Filosofia de Semelhanças (...) o que mantém a classe junta é um conjunto de membros nucleares ou padrões. Qualquer coisa que possua um grau suficiente de semelhança com esses membros é, assim, um membro da classe; e 'assemelhar-se suficientemente a eles' significa 'assemelhar-se a eles tal como eles assemelham-se uns aos outros' (PRICE, 1953, pp. 21-22, tradução nossa).

Armstrong (1978, p. 47) e Raphael (1955, p. 114) ressaltam, no entanto, que 'assemelhar-se tal como' deve significar 'assemelhar-se pelo menos tal como', ou seja, 'pelo menos ao mesmo grau como'. O motivo disso é que, por exemplo, considere os paradigmas vermelhos. Dado como Price coloca, nenhum outro tomate poderia pertencer à classe, tendo em vista que tal tomate assemelhar-se-ia com o tomate paradigma mais do que com o tijolo e o *pos-box* Britânico. Assim, nenhum tomate satisfaria a condição de assemelhar-se aos paradigmas tal como eles (os paradigmas) assemelham-se uns aos outros. Dessa forma, seguindo Rodriguez-Pereyra, vamos tomar a posição de Price como sendo aquela segundo a qual as classes possuem como membros os particulares que se assemelham aos paradigmas *pelo menos* tal como os paradigmas assemelham-se uns aos outros. Portanto, podemos dizer que, em geral, o Nominalismo de Semelhança Aristocrático é a posição que sustenta o seguinte: para cada propriedade F, a classe dos F-particulares tem alguns paradigmas. Note que, desde que a visão sustenta a não existência de universais, sem os paradigmas, como dissemos, não existiria nada que mantivesse a classe junta. Vamos manter em mente, então, que para Price, o que faz um particular ser F é que ele assemelha-se a F-paradigmas pelo menos tal como eles (os paradigmas) assemelham-se uns aos outros. Nós, agora, vamos mostrar como a teoria das categorias trabalha no que diz respeito a particulares paradigmáticos. O resultado será a construção de formas esquemáticas da noção de particular paradigmático[22].

4.1.5 Forma esquemática da noção de particular paradigmático

Neste subitem será mostrado como nós podemos chegar à forma esquemática da noção de particular paradigmático, ou seja, mostrar que essa noção possui um modelo preciso na teoria das categorias. A primeira coisa que deve ser feita é mostrar como podemos chegar a uma forma esquemática de sentenças que faz o mesmo papel teórico que o particular paradigmático, só que, obviamente, com respeito às formas esquemáticas de sentenças. Entretanto, a partir do que expomos nesta dissertação, mais especificamente, na parte dedicada à teoria das categorias, fica fácil perceber que tal forma esquemática é apenas um limite para um dado funtor. Ou seja, um limite tem o mesmo papel teórico que um particular paradigmático. Isso pode ser visto muito facilmente da seguinte forma: lembrem-se que a relação esquemática *fatora-se por meio de* é a forma esquemática da relação de semelhança[23]; pela Proposição 4.1.2.3, nós vemos, então, que todas as instâncias esquemáticas de uma dada propriedade esquemática G adquirem a propriedade esquemática G por estarem numa relação esquemática com o limite, a saber, a relação *fatora-se unicamente por meio de*. Por definição, todas as instâncias de uma dada propriedade esquemática G fatoram-se unicamente por meio do limite (se ele existe). Nós podemos dizer, então, que a relação esquemática *fatora-se unicamente por meio de* é a forma esquemática da relação de semelhança entre uma instância de uma dada propriedade e o particular paradigmático[24]. Isto é, nós temos aqui duas coisas que tornam o limite a forma esquemática da noção de

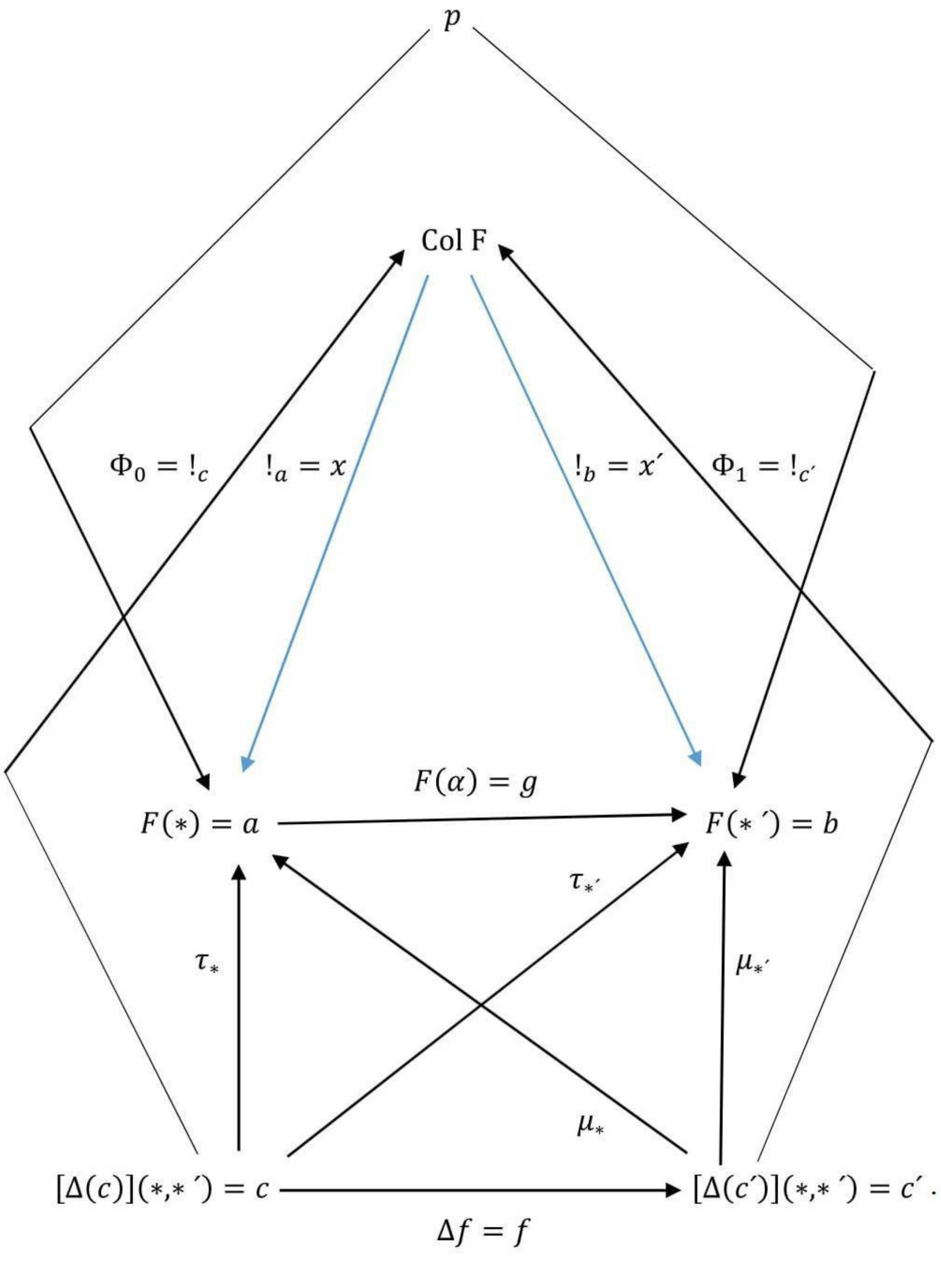
[22] Algo de suma importância que o leitor deve manter em mente aqui é o seguinte: quando falamos sobre “formas esquemáticas da noção de particulares paradigmáticos” não precisamos pressupor a existência de particulares paradigmáticos no sentido de Price, ou no de qualquer outro sentido; nós precisamos apenas saber qual seria o papel teórico de um particular paradigmático, exatamente por isso nós esboçamos acima esse papel teórico; o resto é completamente irrelevante.

[23] Novamente, “relação de semelhança” está sendo entendido aqui como um fato bruto, a saber, o fato de x se assemelhar a x´.

[24] Note que nós estamos falando aqui em termos de papel teórico! Novamente, é completamente irrelevante se há ou não particulares paradigmáticos! A única coisa que importa aqui é o papel teórico da noção de um particular paradigmático. Assim, de acordo com esse papel teórico, a relação *fatora-se unicamente por meio de* é a forma esquemática da relação de semelhança entre x e p, onde p é um particular paradigmático. Lembre-se também que “relação de semelhança” aqui é entendido como um fato bruto, a saber, o fato de x assemelhar-se a p, onde p é um particular paradigmático. E, novamente, a existência ou não desse fato bruto é irrelevante, só nos importa a noção!

um particular paradigmático: (1) a própria definição de limite; e (2) a Proposição 4.1.2.3.

Agora que nós sabemos que a forma esquemática da noção de particular paradigmático é um limite, nós precisamo de uma maneira de chegarmos até essa forma esquemática paradigmática. Considere o seguinte diagrama:



Seja $a \overset{g}{\to} b$ um diagrama em $\mathcal{C}$, isso quer dizer que $a \overset{g}{\to} b$ é a imagem do funtor $F: \mathcal{J} \to \mathcal{C}$, onde $\mathcal{J} = * \overset{\alpha}{\to} *'$. Dois cones para $a \overset{g}{\to} b$ são duas transformação naturais

$\tau: \Delta(c) \dot{\to} F$, $\mu: \Delta(c') \dot{\to} F$. Agora, note que Δf, que é uma transformação natural entre os dois funtores constantes, também forma um diagrama em $\mathcal{C}$, a saber, $c \xrightarrow{f} c'$. Note, também, que os componentes τ_* de τ, μ_* de μ, e $\tau_{*'}$ de τ, $\mu_{*'}$ de μ, formam, respectivamente, dois cocones para $c \xrightarrow{f} c'$, ou seja, $\mu_* \circ f = \tau_*$ e $\mu_{*'} \circ f = \tau_{*'}$. Um colimite para $c \xrightarrow{f} c'$ é dado por um objeto Col F e duas setas $\Phi_0: c \to \mathrm{Col\,F}$, $\Phi_1: c' \to \mathrm{Col\,F}$, com $\Phi_1 \circ f = \Phi_0$, tal que se $\mu_* \circ f = \tau_*$ e $\mu_{*'} \circ f = \tau_{*'}$, então, existe, respectivamente, uma única seta $!_a: \mathrm{Col\,F} \to a$, $!_b: \mathrm{Col\,F} \to b$, com, respectivamente,$!_a \circ \Phi_0 = \tau_*$, $!_a \circ \Phi_1 = \mu_*$ e $!_b \circ \Phi_0 = \tau_{*'}$, $!_b \circ \Phi_1 = \mu_{*'}$. Por sua vez, um limite para o diagrama $a \xrightarrow{g} b$ é dado por um objeto $\mathrm{Lim}\,F$ e duas setas $x: \mathrm{Lim}\,F \to a$, $x': \mathrm{Lim}\,F \to b$, com $g \circ x = x'$, tal que se $g \circ \tau_* = \tau_{*'}$ e $g \circ \mu_* = \mu_{*'}$, então, existe, respectivamente, uma única seta $!_c: c \to \mathrm{Lim}\,F$, $!_{c'}: c' \to \mathrm{Lim}\,F$, com, respectivamente, $x \circ !_c = \tau_*$, $x' \circ !_c = \tau_{*'}$ e $x \circ !_{c'} = \mu_*$, $x' \circ !_{c'} = \mu_{*'}$. Note que o objeto Col F e suas setas associadas satisfazem exatamente a definição de um limite para o diagrama $a \xrightarrow{g} b$. Dessa forma, o limite para o diagrama $a \xrightarrow{g} b$ é o colimite do diagrama $c \xrightarrow{f} c'$ formado pelos domínios dos cones para $a \xrightarrow{g} b$.

Desde que, como já mencionado, um limite é um caso especial de seta universal, mais especificamente, é uma seta universal de Δ para F, como corolário do Teorema 3.3.1.4.5 nós temos que o F-cone limite é o objeto terminal da categoria Cone_F, ou seja, o F-cone limite é um objeto $\langle c_t, *, \eta_t \rangle$ na categoria Cone_F tal que para quaisquer outros Cone_F-objetos $\langle c_x, *, \eta_x \rangle$ existe uma única Cone_F-seta de $\langle c_x, *, \eta_x \rangle$ para $\langle c_t, *, \eta_t \rangle$. Além disso, como corolário do Teorema 3.3.1.4.5, nós temos que Limites são únicos a menos de isomorfismo, e por dualidade, Colimite é o objeto inicial na categoria comma (F $\downarrow$ Δ), que, como corolário do Teorema 3.3.1.4.4, também é único a menos de isomorfismo. A seta única acima mencionada é, então, a forma esquemática da relação de semelhança entre um dado particular que e o particular pradigmático. Portanto, nós temos aqui uma categoria onde os objetos são as formas esquemáticas de sentenças, e as setas são as formas esquemáticas das relações de semelhança.

4.2 Nominalismo de semelhança e o regresso infinito de Russell

Agora eu irei exemplificar o nominalismo de categorias proposto aqui dando uma solução para o regresso infinito identificado por Russell no nominalismo de semelhança.

4.2.1 Nominalismo de semelhança

Como vimos, o nominalista de semelhança explica o fato de que a dois ou mais particulares é atribuído o mesmo predicado em razão da semelhança entre esses particulares. Dessa forma, a semelhança entre particulares não é vista como o resultado da pertença de tais particulares a um dado universal, como instâncias deste, pelo contrário, a semelhança é vista como o fundamento último pelo qual atribui-se o mesmo predicado a particulares distintos. Assim, por exemplo, os particulares aos quais é atribuído o predicado "branco" não são instâncias do universal "brancura", mas apenas particulares semelhantes entre si.

O problema com o nominalismo de semelhança foi apresentado por Bertrand Russell no capítulo 9 do *The Problems of Philosophy*.

> Se nós quisermos evitar os universais brancura e triangularidade, nós devemos escolher alguma mancha branca particular ou algum particular triângulo, e dizer que qualquer coisa é branca ou um triângulo se ela tem o tipo certo de semelhança com os nossos particulares escolhidos. Mas, então, a semelhança requerida deverá ser um universal. Desde que há muitas coisas brancas, a semelhança deve ser o caso entre muitos pares de coisas brancas particulares; e isso é a característica de um universal. Será inútil dizer que existe uma semelhança diferente para cada par, pois nós, então, deveremos dizer que essas semelhanças assemelham-se umas às outras, e, assim, no fim das contas, nós seremos forçados a admitir semelhança como universal. E tendo sido forçados a admitir esse universal, descobrimos que não vale a pena inventar teorias difíceis e implausíveis a fim de evitar a admissão de tais universais como brancura e triangularidade (1912, p. 53, tradução nossa).

Podemos expor o argumento de Russell contra o nominalismo de semelhança da seguinte forma: considere a existência de três particulares a, b e c com uma mesma propriedade P, desde que a é semelhante a b e b é semelhante a c, a relação de semelhança deve ser um universal. Entretanto, o nominalista de semelhança nega a existência de universais, então, ele argumenta que a semelhança entre a e b (digamos s_1), e a semelhança entre b e c (digamos s_2) não são as mesmas, logo, são particulares tais como a e b. Mas, se s_1 e s_2 são particulares, e o nominalista de semelhança explica as propriedades de objetos particulares em termos de semelhança, então, devemos dizer que s_1 e s_2 são semelhantes por serem semelhanças de particulares que são P. Assim, nós temos uma semelhança de segunda ordem, digamos, s_{s_1}, que por sua vez também é um particular, o que nos obriga a efetuar o mesmo procedimento, ou seja, considere as semelhanças s_1, s_2 e s_3 que são semelhantes por serem semelhanças de particulares que são P, então, nós temos que s_1 é semelhante a s_2 e s_2 é semelhante a s_3, o que nos dá as semelhanças s_{s_1} e s_{s_2}, que são semelhantes por serem semelhanças de semelhanças de particulares que são P, e assim por diante, em um regresso infinito.

O problema com o argumento de Russell é o fato de não termos uma definição rigorosa de "semelhança", a noção de semelhança aqui empregada é obscura, nada é dito sobre o que de fato ocorre quando existe uma relação de semelhança entre dois particulares ou mais. E isso, claro, é uma falha do próprio nominalista de semelhança, pois a sua explicação não especifica o que ele quer dizer quando afirma: "os particulares sob os quais atribuímos o predicado 'é Q' não são instâncias da Q-idade, mas sim particulares que se assemelham". O que significa dizer "particulares que se assemelham"? Ou seja, a resposta à questão "Como é possível que dois particulares compartilhem o mesmo predicado?" tem uma resposta, no nominalismo de semelhança, incompleta. Alguém poderia objetar argumentando que não é necessário dar uma definição rigorosa para a noção de semelhança, pois a semelhança entre dois objetos surge a partir da própria existência destes, sendo, portanto, intuitiva e não-analisável. No entanto, não estamos afirmando que a noção de semelhança não é intuitiva, estamos afirmando que apenas dizer que é intuitiva não é suficiente.

4.2.2 Solução de Cargile

Note que a premissa de Russell que deve ser combatida pelo nominalista de semelhança é a que afirma a existência da semelhança entre pares de particulares brancos (no caso do nosso exemplo), ou seja, para Russell, a única forma de evitar o regresso infinito é considerar a semelhança como um universal, pois, como vimos, se sustentarmos que a semelhança entre a e b e a semelhança entre b e c são particulares, isto é, são diferentes, caímos no fatídico regresso. A tentativa de eliminar esse regresso infinito, dada por Cargile (2003), utiliza a noção de particular paradigmático. A ideia básica de Cargile é sustentar que as relações de semelhança se dão apenas entre particulares não paradigmáticos e o particular paradigmático. Assim, por exemplo, tome novamente os objetos a, b e c do exemplo acima, mas, considere agora a como o particular paradigmático. Nós temos, então, as seguintes relações:

1. aR_1b, aR_2c;

2. $(R_1)R_3(R_2)$.

Postulando a como um paradigma, o regresso para em R_3. Note que a solução de Cargile exige certos pressupostos, tais como a não instanciação da relação de semelhança por múltiplos particulares, e a já citada exclusividade das relações, ou seja, as relações de semelhança ocorrem apenas entre particulares não paradigmáticos e o particular paradigmático.

4.2.3 Problemas com a solução de Cargile – A solução que proponho

Miotto Lopes (2012) aponta os problemas da solução de Cargile. O primeiro é sobre a própria noção de particular paradigmático, ou seja, parece não existir nenhuma maneira, além de mera convenção, que nos faça saber como e por que um particular é definido como paradigmático. Assim, sendo uma mera convenção, no caso da não existência de agentes cognitivos num caso qualquer que haja particulares e semelhança entre particulares, o regresso ocorreria, tendo em vista que a não existência de agentes cognitivos que convencionem um particular como paradigmático equivale a não existência de um particular paradigmático no caso acima descrito. Outro problema apontado por Miotto Lopes é sobre a exclusividade das relações de semelhança, isto é, mais uma vez, não existe nenhuma maneira, ou mesmo razão, que nos faça saber por que a relação de semelhança se dá apenas entre particulares não paradigmáticos e o particular paradigmático; e mais ainda, não existe nenhuma razão, além de, mais uma vez, mera convenção, para aceitarmos a exclusividade das relações de semelhança, ou seja, para aceitarmos que as relações de semelhança não ocorrem também entre particulares não paradigmáticos. Por exemplo, se o particular paradigmático a é vermelho, e b, c são vermelhos por se assemelharem a a, então, obviamente deve existir algum tipo de semelhança entre b e c, isto é, devem existir relações de semelhança entre particulares não paradigmáticos. Assim, mesmo se aceitarmos particulares paradigmáticos, o regresso infinito de Russell ocorre.

Assim, nossa proposta resolve todos os problemas apontados por Miotto Lopes. Nós definimos uma categoria onde a forma esquemática da noção de particular paradigmático é o limite, isto é, nós não precisamos convencionar nada, ela está lá, e a sua existência independe da existência de agentes cognitivos. Além disso, a forma esquemática da noção de particular paradigmático não é escolhida e identificada arbitrariamente, ela é o colimite do diagrama formado por todas as formas esquemáticas de sentenças. A exclusividade da relação de semelhança também é garantida, e igualmente independente da existência de agentes cognitivos, pois na categoria em questão, a forma esquemática da noção de particular paradigmático (o limite) é também o objeto terminal, logo, existe uma, e somente uma relação (seta) entre cada forma esquemática de sentença e a forma esquemática da noção de particular paradigmático, e essa relação se dá exclusivamente entre formas esquemáticas de sentenças e a forma esquemática da noção de particular paradigmático, ou seja, ela não se dá entre formas esquemáticas de sentenças. Sobre a existência de relações de semelhança entre particulares não paradigmáticos, na categoria em questão existe uma relação que se dá apenas entre as formas esquemáticas de sentenças. Entretanto, o regresso infinito de Russell não ocorre, pois as relações sempre param na forma esquemáticada noção de particular paradigmático.

5 FUNTORIALIZAÇÃO DA NOÇÃO DE PARTICULAR PARADIGMÁTICO

Eu vou utilizar aqui dois corolários que seguem diretamente de §3.4.

Corolário 5.1. Seja $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor. Então, F tem um adjunto direito se, e somente se, para cada objeto d de $\mathcal{D}$, existe um objeto terminal na categoria dos cones $(F \downarrow d)$.

5.1.1 Aplicação do Corolário 5.1 às formas esquemáticas da noção de particular paradigmático

Seja $\Delta: \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ o funtor diagonal. Então, Δ tem um adjunto direito se, e somente se, para cada objeto (funtor) F de $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$, existe um objeto terminal na categoria dos cones $(\Delta \downarrow F)$. Ou seja, se, e somente se, para cada objeto (funtor) F de $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$, existe uma forma esquemática da noção de particular paradigmático na categoria das formas esquemáticas de sentenças $(\Delta \downarrow F)$.

Assim, o a forma esquemática da noção de particular paradigmático existe se, e somente se, o funtor Δ possui um adjunto direito. Portanto, perguntar pela existência da forma esquemática da noção de particular paradigmático é perguntar se um dado funtor possui um adjunto direito.

Corolário 5.2. Sejam $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores. Então, uma adjunção $(F \dashv G)$ é equivalente a:

- Existe uma transformação natural

$$\varepsilon: FG \to id_{\mathcal{D}} \text{ (co-unidade)}$$

tal que dado qualquer objeto d em $\mathcal{D}$, o morfismo

$$\varepsilon_d: FGd \to d$$

é um objeto terminal na categoria dos cones

$$(F \downarrow d).$$

5.2.1 Aplicação do Corolário 5.2 às formas esquemáticas da noção de particular paradigmático

Sejam $\Delta: \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ e $\bar{\bar{\Delta}}: \mathcal{C}^{\mathcal{J}} \to \mathcal{C}$ funtores. Então, uma adjunção $\left(\Delta \dashv \bar{\bar{\Delta}}\right)$ é equivalente a:

- Existe uma transformação natural

$$\varepsilon: \Delta\bar{\bar{\Delta}} \to id_{\mathcal{C}^{\mathcal{J}}} \text{ (co-unidade)}$$

tal que dado qualquer objeto F em $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$, o morfismo

$$\varepsilon_F: \Delta\bar{\bar{\Delta}}F \to F$$

é um objeto terminal na categoria dos cones

$$(\Delta \downarrow F).$$

5.3 Funtorializando a noção de particular paradigmático

5.3.1 Aplicação do Teorema 3.4.3.3 (co-unidade)

Uma adjunção $\langle \Delta, \bar{\bar{\Delta}}, \varphi \rangle : \mathcal{C} \rightharpoonup \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ determina uma transformação natural $\varepsilon : \Delta\bar{\bar{\Delta}} \dot{\to} I_{\mathcal{C}^{\mathcal{J}}}$ tal que, para cada objeto F, a seta ε_F é universal de Δ para F, enquanto o adjunto esquerdo de cada $g : c \to \bar{\bar{\Delta}}F$ é $\varphi^{-1}(g) = \varepsilon_F \circ \Delta g : \Delta c \to F$.

Pelo Lema 3.3.3.1 nós temos que ε_a é uma seta universal

$$\varepsilon_F : \Delta\bar{\bar{\Delta}}F \to F \;, \qquad \varepsilon_F = \varphi^{-1}(1_{\bar{\bar{\Delta}}F}) \;, \qquad F \text{ um objeto de } \mathcal{C}^{\mathcal{J}} \;,$$

de Δ para F, mais especificamente, é uma seta universal $\langle \bar{\bar{\Delta}}F, \varepsilon_F \rangle$, onde $\bar{\bar{\Delta}}F$ é um objeto de $\mathcal{C}$, e ε_F é uma seta $\varepsilon_F : \Delta\bar{\bar{\Delta}}F \to F$ em $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$, tal que para todo par $\langle c, \lambda \rangle$, onde c é um objeto de $\mathcal{C}$, e λ é uma seta $\lambda : \Delta c \to F$ em $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$, existe uma única seta $g : c \to \bar{\bar{\Delta}}F$ em $\mathcal{C}$, tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "g"'] \\ \bar{\bar{\Delta}}F \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} \Delta c \arrow[d, "\Delta g"'] \arrow[dr, "\lambda"] & \\ \Delta\bar{\bar{\Delta}}F \arrow[r, "\varepsilon_F"'] & F \end{tikzcd}$$

comuta. Isto é, $\varepsilon_F \circ \Delta g = \lambda$.

Dessa forma, a adjunção dá uma seta universal ε_F de Δ para F para cada objeto F.

5.3.2 Co-unidade da adjunção como limite

Relembre a definição de um limite. Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{J}$ categorias e $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ um funtor. O Limite de $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ é uma seta universal $\langle r, \nu \rangle$ do funtor diagonal $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ para F.

Note que a co-unidade da adjunção $\Delta \vdash \bar{\bar{\Delta}}$ satisfaz exatamente a definição de limite. A seta universal da definição acima (o limite), tal como entendida no contexto da co-unidade, é o par $\langle \overline{\overline{\Delta}}F, \varepsilon_F \rangle$, onde nesse contexto, é universal entre os pares $\langle c, \lambda \rangle$. Como já dissemos,$[\Delta(c)](i) = c$ para todo objeto i de $\mathcal{J}$, assim, λ é apenas a seta $\lambda_i: c \to Fi$ em $\mathcal{C}$, , para cada índice i de $\mathcal{J}$. E como já sabemos, para cada seta $u: i \to j$ em $\mathcal{J}$, pela condição de naturalidade, o diagrama abaixo é comutativo em $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} i \arrow[d] \\ j \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} c \arrow[r, "\lambda_i"] \arrow[d, "1_c"'] & Fi \arrow[d, "Fu"] \\ c \arrow[r, "\lambda_j"'] & Fj, \end{tikzcd}$$

ou seja, $Fu \circ \lambda_i = \lambda_j$, tal como no diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "\lambda_i"'] \arrow[dr, "\lambda_j"] & \\ Fi \arrow[r, "Fu"'] & Fj. \end{tikzcd}$$

Da mesma forma no caso da co-unidade: a seta $\varepsilon_F: \Delta\overline{\overline{\Delta}}F \to F$ é, no fim das contas, apenas a seta $\varepsilon_{F(i)}: [\Delta\overline{\overline{\Delta}}F](i) = c \to Fi$, para cada índice i de $\mathcal{J}$

Assim, os pares $\langle c, \lambda \rangle$, como já sabíamos, são os cones, e a co-unidade é exatamente o limite, tal como pode ser visto, novamente, abaixo:

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\lambda_i"'] \arrow[dr, "\lambda_j" near start] & {\left[\Delta\overline{\overline{\Delta}}F\right](i) = \mathrm{Lim}\, F} \arrow[d, "\varepsilon_{F(j)}"] \arrow[dl, "\varepsilon_{F(i)}"' near start] \\
Fi \arrow[r, "Fu"'] & Fj\,.
\end{tikzcd}
$$

$\varepsilon_F =$ cone limite

6 CONCLUSÃO

No decorrer desta dissertação eu apresentei uma nova e original abordagem para o Problema dos Universais. No entanto, podemos dizer que os desdobramentos dos resultados aqui expostos vão muito além do Problema dos Universais, trata-se de uma nova abordagem metafísica. O que foi apresentado aqui pode ser encarado como uma revolução na metafísica, onde foram dados os ingredientes básicos que nos permitirão nos livrar de vez de qualquer tipo de comprometimento ontológico. Uma das principais vantagens dessa abordagem é que podemos trabalhar com ontologia sem que para isso tenhamos que invadir o território da ciência. Ou seja, quando construímos a forma esquemática de um fato, não precisamos postular a existência de uma entidade (a forma esquemática) por trás da realidade.

Outro desdobramento interessante pode ser encontrado em teorias da verdade e do significado. Por exemplo, em geral, o nominalista não pode aceitar a existência de proposições sem se comprometer ontologicamente com entidades extralinguísticas. Ou seja, enquanto uma sentença é apenas uma construção gramatical, o mesmo não pode ser dito de proposições. Proposições são aquilo que as sentenças declarativas sinônimas possuem em comum, isto é, duas sentenças vão expressar a mesma proposição se, e somente se, elas possuem o mesmo significado. Assim, ‘possuir o mesmo significado’ pode ser definido como ‘possuir a mesma forma esquemática’. A vantagem de tratar significados como formas esquemáticas de sentenças é óbvia. Em primeiro lugar, como eu disse, não há comprometimento ontológico, ou seja, nós nos livramos do inconveniente de termos de nos comprometer ontologicamente com significados. Em segundo lugar, nós podemos facilmente definir a ideia de sentenças com a mesma forma esquemática, por exemplo, podemos dizer que duas sentenças possuem a mesma forma esquemática se, e somente se, a seta identidade da forma esquemática de uma é a mesma seta identidade da forma esquemática da outra. Já no caso do significado, para definir a ideia de sentenças com o mesmo significado nós teremos que, primeiro, enfrentar e solucionar o célebre problema da sinonímia, ou seja, nós devemos recorrer à noção celebremente complicada e insolúvel de sinonímia. É fácil ver, a partir do exposto neste parágrafo, que isso nos dá as ferramentas necessárias, e nos mostra o caminho, para uma reabilitação da analiticidade.

Em teorias da verdade a teoria das formas esquemáticas desenvolvida aqui pode dar uma nova, plausível e eficaz roupagem para a teoria da verdade por correspondência. Russell e Wittgenstein, na época em que sustentavam o atomismo lógico, usaram correspondências entre proposições e fatos como definições de verdade. Não é necessário discorrer sobre os detalhes das visões de Russell e Wittgenstein sobre a teoria da verdade por correspondência e o atomismo lógico. O ponto aqui é que as críticas contra tal teoria, em geral, atacam a sua tese principal, a saber, a correspondência entre proposição e fato. Ou seja, os críticos apontam que a correspondência é obscura. Até mesmo se exemplos simples forem escolhidos, tais como, 'o gato está à esquerda do homem', o isomorfismo que a teoria afirma existir entre a estrutura da proposição e a estrutura do fato está envolto em complicações e dificuldades. Se formos analisar a proposição e o fato, constataremos que o fato de o gato estar à esquerda do homem tem apenas dois componentes, enquanto que a proposição tem pelo menos três. Susan Haack (2002, p. 135) chama a atenção para o fato de que a interpretação desse isomorfismo está intimamente relacionada às duas teses características do atomismo lógico, a saber, a teoria sobre a estrutura última do mundo e ideal de uma linguagem perfeitamente clara. E a partir disso ela coloca a seguinte questão: "... a teoria da correspondência pode ser divorciada do atomismo lógico e, se pode, que explicação poderia, então, ser dada a respeito da relação de correspondência" (p. 135). Desde que nós podemos construir tanto formas esquemáticas de sentenças quanto formas esquemáticas de fatos, nós podemos dizer que uma sentença é verdadeira se, e somente se, a sua forma esquemática é isomórfica à forma esquemática do fato declarado. Assim, respondendo à questão colocada pela Susan Haack, nós dizemos que sim, a teoria da verdade por correspondência pode ser divorciada do atomismo lógico. E quanto à explicação da relação de correspondência, como já dito, pode ser dada em termos de isomorfismos entre formas esquemáticas de sentenças e formas esquemáticas de fatos.

Como podemos ver, os resultados apresentados aqui sobre a teoria das formas esquemáticas possuem um fértil terreno para prover soluções a problemas filosóficos conhecidos. De fato, a ideia de uma ontologia esquemática aliada às ferramentas encontradas na teoria das categorias pode tirar a filosofia da sua fama de área dos problemas que não se resolvem.

REFERÊNCIAS

ARMSTRONG, D. M., **Universals and Scientific Realism**, vols. I and II, Cambridge: Cambridge University Press, 1978.

____________, **In Defence of Structural Universals**, Australasian Journal of Philosophy, 64: 85–88,1986.

____________, **A Combinatorial Theory of Possibility**, Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

____________, **A World of States of Affairs**, Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

BALAGUER, M. 2004, **Platonism in Metaphysics**, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2004 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2004/entries/platonism/>

BEALER, G. **Universals and the Defense of Ante Rem Realism**, in Universals, Concepts and Qualities. New Essays on the Meaning of Predicates, P. F. Strawson and A. Chakrabarti (eds), Aldershot and Burlington: Ashgate, pp. 225–238, 2006.

BELL, J. L. **Category theory and the foundations of mathematics**. British Journal for the Philosophy of Science, Oxford, v. 32, n. 4,p. 349-358, dez. 1981.

__________, **From absolute to local mathematics**. Synthese, Dordrecht, v. 69, n. 3, p. 409-426, dez. 1986.

__________, **Toposes and Local Set Theories: an introduction** (Dover Books on Mathematics), 2008.

BENACERRAF, P., **Mathematical Truth**, The Journal of Philosophy, 70: 661–79, 1973.

BRADLEY, F. H. **Appearance and Reality**, Oxford: Oxford University Press, 1893.

BUCUR, I. & DELEANU, A. **Introduction to the Theory of Categories and Functors**. London: John Wiley, 1968.

BURGESS, J. and Rosen, G., **A Subject with no Object, Oxford**: Oxford University Press, 1997.

CAMPBELL, K. **The Metaphysics of Abstract Particulars**. Midwest Studies in Philosophy: The Foundations of Analytical Philosophy, 6, 1981. pp. 477–88.

_____________, **Abstract Particulars**. Oxford and Cambridge, MA: Basil Blackwell, 1990.

CARGILE, J. **On Russell's Argument Against Resemblance Nominalism**. Australian Jornal of Philosophy, Vol.81, Nº 4, p.549-560: 2003.

CARTAN, H. P. & EILENBERG, S. **Homological Algebra**. Princeton: Princeton University Press, 1956.

DALY, C. **Tropes**. In: Properties, D. H. Mellor and A. Oliver (eds.), Oxford: Oxford University Press, 1997, 2011. pp. 140–59.

DEVITT, M. **'Ostrich Nominalism' or 'Mirage Realism'?**. Pacific Philosophical Quarterly, 61, 1980. pp. 433–439.

EHRESMANN, C. **Catégories et Structures**. Paris: Dunod, 1965.

EHRING, D. **Tropes: Properties, Objects, and Mental Causation**, Oxford: Oxford University Press, 2011.

EILENBERG, S. & MAC LANE, S. **Natural Isomorphisms in Group Theory**, Proceedings of the National Academy of Sciences U. S. A., 28 pp. 537–543, 1942a.

_____________, **Group Extensions and Homology**, Annals of Mathematics, 43757–831, 1942b.

_____________, **General Theory of Natural Equivalences**, Transactions of the American Mathematical Society, 58231–294, 1945.

EILENBERG, S. & STEENROD, N. E. **Foundations of Algebraic Topology**, Princeton: Princeton University Press, 1952.

FIELD, H. **Science Without Numbers: A Defence of Nominalism**, Oxford: Basil Blackwell, 1980.

FORREST, P. **Ways Worlds Could Be**, Australasian Journal of Philosophy, 64: 15–24, 1986a.

__________, **Neither Magic nor Mereology**, Australasian Journal of Philosophy, 64: 89–91, 1986b.

FREYD, P. **Abelian Categories**. New York: Harper and Row, 1964.

GOODMAN, N. A **World of Individuals**, em seu Problems and Projects, Indianapolis and New York: The Bobbs-Merrill Company, Inc., pp. 155–72, 1972.

___________, **Nominalisms**. In: The Philosophy of W. V. Quine, L. E. Hahn and P. A. Schilpp (eds.), Open Court: La Salle, Illinois, pp. 159–61, 1986.

GOODMAN, N. e QUINE, W. V. O. **Steps Toward a Constructive Nominalism**, The Journal of Symbolic Logic, 12: 105–22, 1947.

GROTHENDIECK, A. **Sur Quelques Points d'Algèbra Homologique**, Tôhoku Mathematics Journal (2), 9119–221, 1957.

HALE, B. **Abstract Objects**. Oxford and New York: Basil Blackwell, 1987.

KAN, D. **Adjoint Functors**, Transactions of the American Mathematical Society, 87 pp. 294–329, 1958a.

_________, **Functors involving c.s.s. complexes**, Transactions of the American Mathematical Society, 87330–346, 1958b.

KEINÄNEN, M. **Trope Theories and the Problem of Universals**, Helsinki: University of Helsinki Press, 2005.

LAWVERE, F. W. **Functorial Semantics of Algebraic Theories**, Ph.D.Thesis. New York: Columbia University, 1963.

____________, **An Elementary Theory of the Category of Sets**. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, v. 52, p. 1506-1511, 1964.

____________, **The Category of Categories as a Foundation for Mathematics**. Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla, New York: Springer-Verlag, p. 1-20, 1966.

LEWIS, D. **New Work for a Theory of Universals**, Australasian Journal of Philosophy, 61, 1983. pp. 343–377.

_________, **On the Plurality of Worlds**, Oxford: Blackwell, 1986a.

_________, **Against Structural Universals**, Australasian Journal of Philosophy, 64, 1986b. pp. 25–46.

LOUX, M. **The Possible and the Actual**, Ithaca and London: Cornell University Press, 1976.

_________ **Metaphysics. Contemporary Introduction**, London and New York: Routledge, 1998.

LOWE, E. J. **The Metaphysics of Abstract Objects**, The Journal of Philosophy, 92, 1995. pp. 509–524.

MAC LANE, S. **Categories for the Working Mathematician**. New York: Springer-Verlag, 1971.

___________. **The Development and Prospects for Category Theory**, Applied Categorical Structures, 4129–139, 1996.

___________. **Categories for the Working Mathematician**. New York: Springer Verlag (second edition), 1998.

MAURIN, A-S. **If Tropes**, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.

MCLARTY, C. **The uses and abuses of the history of topos theory**, British Journal for the Philosophy of Science, 41351–375, 1990.

_____________. **Axiomatizing a Category of Categories**. Journal of Symbolic Logic, v. 56, n. 4,p. 1243-1260, dez. 1991.

MELLOR, D. H. & OLIVER, A. (eds.), **Properties**, Oxford: Oxford University Press, 1997.

MITCHELL, B. **Theory of Categories**. New York: Academic Press, 1965.

MIOTTO LOPES, L. **Sobre a Regreção Infinita de Russell contra o Nominalismo de Semelhança**, Crítica na Rede, 2012.

NOZICK, R. **Philosophical Explanations**, Oxford: Clarendon Press, 1981.

OLIVER, A. **The Metaphysics of Properties**. Mind, 105, 1996. pp. 1–80.

PAREIGIS, B. **Categories and Functors**. New York: Academic Press, 1970.

PICKEL, B. & MANTEGANI, N., **A Quinean critique of Ostrich Nominalism**, Philosophers' Imprint, 12(6), 2012.

QUINE, W. V. O. **On Universals**, The Journal of Symbolic Logic, 12: 74–84,1947.

______________, **Word and Object**, Cambridge, MA: The M.I.T. Press, 1960.

______________, **On What There Is**, in his From a Logical Point of View, Second edition, revised, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, pp. 1–19, 1964.

RAMSEY, F. P. **Universals**, Mind, 34: 401–417, 1925.

RODRIGUEZ-PEREYRA, G. **What is the Problem of Universals?**. Mind, Volume 109, Issue 434, 2000. pp. 255–273.

_______________________, **Resemblance Nominalism. A solution to the problem of universals**, Oxford: Clarendon Press, 2002.

ROSEN, G., 2001, **Abstract Objects**, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2006 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/spr2006/entries/abstract-objects/>

RUSSELL, B. **The Problems of Philosophy**, London: Oxford University Press, 1912.

ZALTA, E. **Abstract Objects**, Dordrecht, Boston, Lancaster: D. Reidel Publishing Company, 1983.

APÊNDICE A – REFERÊNCIAS (TEORIA DAS CATEGORIAS)

BELL, J. L. **Category theory and the foundations of mathematics**. British Journal for the Philosophy of Science, Oxford, v. 32, n. 4,p. 349-358, dez. 1981.

__________, **From absolute to local mathematics**. Synthese, Dordrecht, v. 69, n. 3, p. 409-426, dez. 1986.

__________, **Toposes and Local Set Theories: an introduction** (Dover Books on Mathematics), 2008.

BUCUR, I. & DELEANU, A. **Introduction to the Theory of Categories and Functors**. London: John Wiley, 1968.

CARTAN, H. P. & EILENBERG, S. **Homological Algebra**. Princeton: Princeton University Press, 1956.

EHRESMANN, C. **Catégories et Structures**. Paris: Dunod, 1965.

EILENBERG, S. & MAC LANE, S. **Natural Isomorphisms in Group Theory**, Proceedings of the National Academy of Sciences U. S. A., 28 pp. 537–543, 1942a.

_____________, **Group Extensions and Homology**, Annals of Mathematics, 43757–831, 1942b.

_____________, **General Theory of Natural Equivalences**, Transactions of the American Mathematical Society, 58231–294, 1945.

EILENBERG, S. & STEENROD, N. E. **Foundations of Algebraic Topology**, Princeton: Princeton University Press, 1952.

FREYD, P. **Abelian Categories**. New York: Harper and Row, 1964.

GROTHENDIECK, A. **Sur Quelques Points d'Algèbra Homologique**, Tôhoku Mathematics Journal (2), 9119–221, 1957.

KAN, D. **Adjoint Functors**, Transactions of the American Mathematical Society, 87 pp. 294–329, 1958a.

_________, **Functors involving c.s.s. complexes**, Transactions of the American Mathematical Society, 87330–346, 1958b.

LAWVERE, F. W. **Functorial Semantics of Algebraic Theories**, Ph.D.Thesis. New York: Columbia University, 1963.

____________, **An Elementary Theory of the Category of Sets**. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, v. 52, p. 1506-1511, 1964.

____________, **The Category of Categories as a Foundation for Mathematics**. Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla, New York: Springer-Verlag, p. 1-20, 1966.

MAC LANE, S. **Categories for the Working Mathematician**. New York: Springer-Verlag, 1971.

___________. **The Development and Prospects for Category Theory**, Applied Categorical Structures, 4129–139, 1996.

___________. **Categories for the Working Mathematician**. New York: Springer Verlag (second edition), 1998.

MCLARTY, C. **The uses and abuses of the history of topos theory**, British Journal for the Philosophy of Science, 41351–375, 1990.

_____________. **Axiomatizing a Category of Categories**. Journal of Symbolic Logic, v. 56, n. 4,p. 1243-1260, dez. 1991.

MITCHELL, B. **Theory of Categories**. New York: Academic Press, 1965.

PAREIGIS, B. **Categories and Functors**. New York: Academic Press, 1970.

APÊNDICE B – REFERÊNCIAS (UNIVERSAIS)

ARMSTRONG, D. M., **Universals and Scientific Realism**, vols. I and II, Cambridge: Cambridge University Press, 1978.

____________, **In Defence of Structural Universals**, Australasian Journal of Philosophy, 64: 85–88,1986.

____________, **A Combinatorial Theory of Possibility**, Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

____________, **A World of States of Affairs**, Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

BALAGUER, M. 2004, **Platonism in Metaphysics**, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2004 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2004/entries/platonism/>

BEALER, G. **Universals and the Defense of Ante Rem Realism**, in Universals, Concepts and Qualities. New Essays on the Meaning of Predicates, P. F. Strawson and A. Chakrabarti (eds), Aldershot and Burlington: Ashgate, pp. 225–238, 2006.

BENACERRAF, P., **Mathematical Truth**, The Journal of Philosophy, 70: 661–79, 1973.

BRADLEY, F. H. **Appearance and Reality**, Oxford: Oxford University Press, 1893.

BURGESS, J. and Rosen, G., **A Subject with no Object, Oxford**: Oxford University Press, 1997.

CAMPBELL, K. **The Metaphysics of Abstract Particulars**. Midwest Studies in Philosophy: The Foundations of Analytical Philosophy, 6, 1981. pp. 477–88.

_____________, **Abstract Particulars**. Oxford and Cambridge, MA: Basil Blackwell, 1990.

CARGILE, J. **On Russell's Argument Against Resemblance Nominalism**. Australian Jornal of Philosophy, Vol.81, Nº 4, p.549-560: 2003.

DALY, C. **Tropes**. In: Properties, D. H. Mellor and A. Oliver (eds.), Oxford: Oxford University Press, 1997, 2011. pp. 140–59.

DEVITT, M. **'Ostrich Nominalism' or 'Mirage Realism'?**. Pacific Philosophical Quarterly, 61, 1980. pp. 433–439.

EHRING, D. **Tropes: Properties, Objects, and Mental Causation**, Oxford: Oxford University Press, 2011.

FIELD, H. **Science Without Numbers: A Defence of Nominalism**, Oxford: Basil Blackwell, 1980.

FORREST, P. **Ways Worlds Could Be**, Australasian Journal of Philosophy, 64: 15–24, 1986a.

__________, **Neither Magic nor Mereology**, Australasian Journal of Philosophy, 64: 89–91, 1986b.

GOODMAN, N. A **World of Individuals**, em seu Problems and Projects, Indianapolis and New York: The Bobbs-Merrill Company, Inc., pp. 155–72, 1972.

___________, **Nominalisms**. In: The Philosophy of W. V. Quine, L. E. Hahn and P. A. Schilpp (eds.), Open Court: La Salle, Illinois, pp. 159–61, 1986.

GOODMAN, N. e QUINE, W. V. O. **Steps Toward a Constructive Nominalism**, The Journal of Symbolic Logic, 12: 105–22, 1947.

HALE, B. **Abstract Objects**. Oxford and New York: Basil Blackwell, 1987.

KEINÄNEN, M. **Trope Theories and the Problem of Universals**, Helsinki: University of Helsinki Press, 2005.

LEWIS, D. **New Work for a Theory of Universals**, Australasian Journal of Philosophy, 61, 1983. pp. 343–377.

_________, **On the Plurality of Worlds**, Oxford: Blackwell, 1986a.

_________, **Against Structural Universals**, Australasian Journal of Philosophy, 64, 1986b. pp. 25–46.

LOUX, M. **The Possible and the Actual**, Ithaca and London: Cornell University Press, 1976.

_________ **Metaphysics. Contemporary Introduction**, London and New York: Routledge, 1998.

LOWE, E. J. **The Metaphysics of Abstract Objects**, The Journal of Philosophy, 92, 1995. pp. 509–524.

MAURIN, A-S. **If Tropes**, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.

MELLOR, D. H. & OLIVER, A. (eds.), **Properties**, Oxford: Oxford University Press, 1997.

MIOTTO LOPES, L. **Sobre a Regreção Infinita de Russell contra o Nominalismo de Semelhança**, Crítica na Rede, 2012.

NOZICK, R. **Philosophical Explanations**, Oxford: Clarendon Press, 1981.

OLIVER, A. **The Metaphysics of Properties**. Mind, 105, 1996. pp. 1–80.

PICKEL, B. & MANTEGANI, N., **A Quinean critique of Ostrich Nominalism**, Philosophers' Imprint, 12(6), 2012.

QUINE, W. V. O. **On Universals**, The Journal of Symbolic Logic, 12: 74–84,1947.

______________, **Word and Object**, Cambridge, MA: The M.I.T. Press, 1960.

______________, **On What There Is**, in his From a Logical Point of View, Second edition, revised, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, pp. 1–19, 1964.

RAMSEY, F. P. **Universals**, Mind, 34: 401–417, 1925.

RODRIGUEZ-PEREYRA, G. **What is the Problem of Universals?**. Mind, Volume 109, Issue 434, 2000. pp. 255–273.

______________________, **Resemblance Nominalism. A solution to the problem of universals**, Oxford: Clarendon Press, 2002.

ROSEN, G., 2001, **Abstract Objects**, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2006 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/spr2006/entries/abstract-objects/>

RUSSELL, B. **The Problems of Philosophy**, London: Oxford University Press, 1912.

ZALTA, E. **Abstract Objects**, Dordrecht, Boston, Lancaster: D. Reidel Publishing Company, 1983.