



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**CURSO DE ENGENHARIA CIVIL**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL**

**JOÃO PEDRO ALEXANDRE SILVA MOTA**

**AVALIAÇÃO DE SOLUÇÕES ÓTIMAS DE LAJES NERVURADAS:  
ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS DE GRELHA**

**FORTALEZA**

**2017**

JOÃO PEDRO ALEXANDRE SILVA MOTA

AVALIAÇÃO DE SOLUÇÕES ÓTIMAS DE LAJES NERVURADAS:  
ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS DE GRELHA

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Macário Cartaxo de Melo.

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

M871a Mota, João Pedro Alexandre Silva.  
Avaliação de soluções ótimas de lajes nervuradas : Análise por elementos finitos de grelha / João Pedro Alexandre Silva Mota. – 2017.  
94 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, 3, Fortaleza, 2017.  
Orientação: Prof. Dr. Antônio Macário Cartaxo de Melo.

1. Laje nervurada. 2. Otimização. 3. Algoritmo Genético. I. Título.

CDD

---

JOÃO PEDRO ALEXANDRE SILVA MOTA

AVALIAÇÃO DE SOLUÇÕES ÓTIMAS DE LAJES NERVURADAS:  
ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS DE GRELHA

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Aprovada em: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_\_

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Antônio Macário Cartaxo de Melo (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Evandro Parente Júnior  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Júnior  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por me dar forças e perseverar nesse caminho árduo.

Aos meus pais, que nas dificuldades da vida nunca deixaram de me apoiar e dar uma educação moral e profissional bastante sólida.

À FUNCAP, pelo apoio financeiro disponibilizado na forma de bolsas de iniciação científica que deram suporte ao desenvolvimento de pesquisas.

Ao professor Dr. Antônio Macário Cartaxo de Melo pela excelente orientação, tanto quando aluno de iniciação científica quanto orientando.

Aos colegas do Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) pelos diversos momentos de aprendizado e diversão.

## RESUMO

As lajes nervuradas são bastante aplicadas a edificações habitacionais, comerciais e industriais devido sua economia quando comparadas a soluções tradicionais, como a laje maciça, considerando estruturas não protendidas. Todavia, a economia proporcionada pela redução de concreto e, possivelmente de aço, é, muitas vezes, mal explorada pelo mal aproveitamento dos materiais em seus limites de resistência. Como agravante para esse cenário, soma-se uma nova realidade de projeto, fruto da revisão da ABNT NBR 15575, em conjunto com a ABNT NBR 6118, as quais impuseram maior atenção sobre o desempenho de estruturas de concreto armado em situações de incêndio. Dessa forma, a busca por novas soluções estruturais ou o aprimoramento dos sistemas atuais é uma realidade pertinente. Alterações na norma de desempenho implicaram em alterações no projeto de lajes nervuradas, principalmente, em dimensões mínimas de cobrimento, espessura de mesa e largura de nervura, inviabilizando diversos padrões de formas plásticas. Nessa situação, a otimização do sistema de lajes nervuradas é de grande interesse, empregando-se como função objetivo o custo de produção do pavimento de lajes nervuradas. Diversos modelos de análise estrutural são disponíveis para avaliação de esforços e deslocamento de lajes, podendo-se destacar métodos analíticos e numéricos. Métodos analíticos são podem ser pouco representativos da realidade de projeto, no entanto, demandam pouco esforço computacional, sendo, por isso, bastante utilizados em diversos problemas de otimização. Contudo, a otimização via métodos analíticos pode gerar falsas soluções ótimas, dadas as limitações de carregamento, geometria e condições de contorno. Assim, métodos de análise numéricos, como o Método dos Elementos Finitos. Estuda-se, portanto, de que forma um método de análise estrutural mais representativo pode afetar soluções ótimas obtidas via método de análise estrutural mais simples. Foram otimizados exemplos de lajes nervuradas de vãos variando de 7 a 8 metros, tanto para lajes quadradas quanto retangulares otimizando-as por método analítico e numérico. Resultados mostram que análises por Elementos Finitos de Grelha geram tanto deslocamentos quanto esforços solicitantes maiores, principalmente para lajes quadradas, impactando no aumento de custo das soluções ótimas obtidas via métodos simplificados de análise.

## ABSTRACT

Waffle slabs are quite applied to housing, commercial and industrial buildings because their economy when compared to traditional solutions, such as reinforced concrete slabs for non-prestressed structures. However, an economy provided by reduction of concrete and possibly steel, is often badly endorsed by the misuse of the materials in their resistance limits. As an aggravating factor for this reality, a new project perspective was created, as a result of the ABNT NBR 15575 revision, as well as the ABNT NBR 6118, which imposed more attention on the performance of reinforced concrete structures in fire situations. In this way, the search for new structural solutions or the improvement of current systems is a pertinent reality. Changes in standard of performance implied in the design of ribbed slabs, mainly in minimum dimensions of cover, thickness and width of rib, making various dimensions of plastic forms impossible to apply. In this situation, the optimization of the waffle slab system is great interest, using as an objective function the cost production of the story of ribbed slabs. Several models of structural analyses are available for evaluation of slab stresses, like analytical and numerical analyses. Analytical methods are less representative of the reality design, however, they require little computational effort and, therefore, are widely used for optimizations problems. Nevertheless, optimization by analytical analyses could results in false optimum solutions, given by limitations on load, geometry and boundary. Thus, numerical methods, such as the Finite Element Method, could be used for validation of results from the optimization process. Therefore, it is studied how a more fidelity model of representation could affect optimum solutions obtained through simplified structural analyses. Samples of ribbed slabs ranging from 7 to 8 meters were optimized for both square and rectangular slabs by analytical e numerical methods. Results show that Finite Grid Analyses generate both larger displacements and stresses, mainly for square slabs, making increase of cost of the optimal solutions obtained through analytical method.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Pavimento de laje nervurada.....	10
Figura 2 - Custo Global.....	11
Figura 3 - Formas de polipropileno. ....	12
Figura 4 - Eixos e direção da carga.....	16
Figura 5 - Equivalência de inércia de laje nervurada e laje maciça.....	18
Figura 6 - Grelha equivalente representando o pavimento. ....	20
Figura 7 - Criação de problema de otimização.....	22
Figura 8 - Algoritmo Genético.....	24
Figura 9 - Seção típica de laje nervurada. ....	26
Figura 10 - Equivalência de inércia à flexão entre laje nervurada e maciça. ....	32
Figura 11 - Seção transversal T.....	34
Figura 12 - Malha representativa para laje nervurada. ....	39
Figura 13 - Carregamentos.....	41
Figura 14 - Conjunto I e II.....	43
Figura 15 - Dimensões caixote. ....	44
Figura 16 - Conjunto III.....	45
Figura 17 - Diagrama de distribuição de tensões.....	52
Figura 18 - Exemplo 1.....	58
Figura 19 - Exemplo 2.....	59
Figura 20 - Esforços e deslocamento normalizados para o Caso 1 .....	63
Figura 21 - Esforços e deslocamento normalizados para o Caso 2. ....	65
Figura 22 - Esforços e deslocamento normalizados para o Caso 3. ....	68
Figura 24 - Esforços e deslocamento normalizados para o Caso 4. ....	69



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Variáveis de Projeto .....	45
Tabela 2 - Dimensões mínimas de espessura de laje e $c_1$ .....	49
Tabela 3 - Taxas mínimas de armadura de flexão para vigas. ....	51
Tabela 4 - Valores do coeficiente $\xi$ em função do tempo. ....	55
Tabela 5 - Exemplo 1. ....	58
Tabela 6 - Exemplo 2. ....	60
Tabela 7 – Casos de lajes maciças analisadas.....	61
Tabela 8 – Solução de Navier para Caso 1.....	62
Tabela 9 – Grelha com 100% de rigidez à torção para o Caso 1 .....	62
Tabela 10 – Grelha com 100%, 15% e 1% de rigidez à torção para o Caso 1 .....	63
Tabela 11 – Solução de Navier para Caso 2.....	64
Tabela 12 – Grelha com 100%, 15% e 1% de rigidez à torção para o Caso 2 .....	64
Tabela 13 – Casos de laje nervuradas analisadas.....	66
Tabela 14 – Solução de Navier para Caso 3.....	67
Tabela 15 – Grelha com 100%, 15% e 1% de rigidez à torção para o Caso 3. ....	67
Tabela 16 – Solução de Navier para Caso 4.....	69
Tabela 17 – Grelha com 100%, 15% e 1% de rigidez à torção para o Caso 4 .....	69
Tabela 18 – Casos de lajes nervuradas otimizados. ....	71
Tabela 19 - Custo unitário de concreto por resistência. ....	72
Tabela 20 – Custo unitário de aço por diâmetro nominal. ....	72
Tabela 21 - Carregamentos.....	72
Tabela 22 - Espaço amostral de variáveis. ....	73
Tabela 23 – Parâmetros do algoritmo genético. ....	74
Tabela 24 – Solução ótima para o Caso 5. ....	74
Tabela 25 – Restrições ativas para o Caso 5.....	75
Tabela 26 – Solução ótima para o Caso 6. ....	76
Tabela 27 – Restrições ativas para o Caso 6.....	77
Tabela 28 – Solução ótima para o Caso 7. ....	78
Tabela 29 – Restrições ativas para o Caso 7.....	78
Tabela 30 – Solução ótima para o Caso 8. ....	79
Tabela 31 – Restrições ativas para o Caso 8.....	80

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>3</b>
1.1	Problema.....	5
1.2	Questões motivadoras .....	6
1.3	Justificativa.....	6
<b>2</b>	<b>OBJETIVOS</b> .....	<b>7</b>
2.1	Objetivo Geral.....	7
2.2	Objetivos Específicos.....	7
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b> .....	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>9</b>
4.1	Estruturas de concreto armado (CA) .....	9
4.1.1	Lajes nervuradas de CA.....	10
4.2	Norma de Desempenho .....	12
4.3	Análise Estrutural .....	14
4.3.1	Teoria Clássica de Placas Finas.....	16
4.3.2	Solução analítica de Navier .....	18
4.3.3	Analogia de grelha .....	19
4.4	Problema de Otimização .....	21
4.5	Algoritmos de solução .....	23
4.5.1	Algoritmos Genéticos (AG's) .....	24
4.6	Otimização de Estruturas de Concreto Armado .....	25
4.6.1	Otimização de lajes nervuradas .....	26
<b>5</b>	<b>ANÁLISE ESTRUTURAL</b> .....	<b>30</b>
5.1.1	Solução analítica de Navier.....	30
5.1.2	Analogia de grelha.....	33
5.1.3	Modelagem da Grelha .....	37
5.1.3.1	Geração de malha.....	38
5.1.3.2	Carregamento.....	41
5.1.3.3	Implementação computacional .....	41
<b>6</b>	<b>OTIMIZAÇÃO</b> .....	<b>42</b>
6.1	Modelo de otimização.....	43
6.1.1	Variáveis de Projeto.....	43
6.1.2	Função objetivo .....	46

<b>6.1.3</b>	<b>Restrições</b> .....	<b>48</b>
<b>6.1.3.1</b>	<b>Grupo I</b> .....	<b>48</b>
<b>6.1.3.2</b>	<b>Grupo II</b> .....	<b>51</b>
<b>6.1.3.3</b>	<b>Grupo III</b> .....	<b>54</b>
<b>6.2</b>	<b>Implementação computacional</b> .....	<b>56</b>
<b>7</b>	<b>APLICAÇÕES</b> .....	<b>57</b>
<b>7.1</b>	<b>Modelos de análise</b> .....	<b>57</b>
<b>7.1.1</b>	<b>Validação do modelo de grelha</b> .....	<b>57</b>
<b>7.1.1.1</b>	<b>Exemplo 1</b> .....	<b>58</b>
<b>7.1.1.2</b>	<b>Exemplo 2</b> .....	<b>59</b>
<b>7.1.2</b>	<b>Laje Maciça</b> .....	<b>60</b>
<b>7.1.2.1</b>	<b>Caso 1</b> .....	<b>62</b>
<b>7.1.2.2</b>	<b>Caso 2</b> .....	<b>64</b>
<b>7.1.3</b>	<b>Laje Nervurada</b> .....	<b>65</b>
<b>7.1.3.1</b>	<b>Caso 3</b> .....	<b>67</b>
<b>7.1.3.2</b>	<b>Caso 4</b> .....	<b>68</b>
<b>7.2</b>	<b>Aplicação da otimização</b> .....	<b>70</b>
<b>7.2.1</b>	<b>Parâmetros do modelo de otimização</b> .....	<b>71</b>
<b>7.2.1.1</b>	<b>Custos</b> .....	<b>71</b>
<b>7.2.1.2</b>	<b>Carregamentos</b> .....	<b>72</b>
<b>7.2.1.3</b>	<b>Espaço amostral de variáveis</b> .....	<b>73</b>
<b>7.2.1.4</b>	<b>Parâmetros do Algoritmo Genético</b> .....	<b>73</b>
<b>7.2.2</b>	<b>Caso 5</b> .....	<b>74</b>
<b>7.2.3</b>	<b>Caso 6</b> .....	<b>76</b>
<b>7.2.4</b>	<b>Caso 7</b> .....	<b>77</b>
<b>7.2.5</b>	<b>Caso 8</b> .....	<b>79</b>
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES</b> .....	<b>81</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>83</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O sistema de lajes nervuradas é, atualmente, uma das melhores alternativas para aplicação em edificações que demandam grandes vãos, uma vez que a utilização de sistemas convencionais de lajes maciças e vigas mostra-se menos vantajosa economicamente para o caso de estruturas não protendidas (COELHO, 2010). Contudo, a maior atenção aos critérios de projeto de estruturas de concreto (ABNT NBR 15575:2013 e ABNT NBR 6118:2014) gerou, inicialmente, um aparente cenário interrogativo quanto à aplicação das lajes nervuradas, instigando um estudo de otimização desse sistema, por vias de manter sua economia frente a sistemas convencionais.

A laje nervurada racionaliza o consumo de concreto da estrutura, tornando-a mais leve, e, por vezes, diminuindo o consumo de aço (SPOHR, 2008). Esse sistema consiste na retirada de parcela do concreto na região tracionada, mantendo-se apenas nervuras para solidarização e transferência de esforços entre as armaduras longitudinais e a mesa da seção transversal. Desse modo, os materiais são melhor aproveitados segundo o papel que exercem estruturalmente.

Lopes (2013), em estudo comparativo de diversos materiais de enchimento, mostra que lajes nervuradas confeccionadas por caixotes de polipropileno reaproveitável (formas) apresentam melhor desempenho estrutural e econômico. No entanto, dentre algumas das alterações recentes na norma desempenho de edifícios habitacionais, o dimensionamento das edificações considerando situações de incêndio passou a ser bastante relevante (ABNT NBR 15200:2012). A necessidade de se garantir resistência ao fogo provocou grande impacto nas dimensões mínimas de muitos elementos estruturais, inviabilizando diversos padrões já existentes de formas de polipropileno.

Frente a esse cenário, aprimorar o sistema de lajes nervuradas torna-se uma necessidade. O aprimoramento é retratado pela busca das dimensões das formas plásticas que poderão trazer a maior vantagem econômica, ou seja, menor consumo de material. Dessa forma, a otimização apresenta-se como a melhor alternativa, sendo esse processo, a busca da solução que minimiza uma função custo representativa de um problema (SARMA e ADELI, 1998).

A função custo representativa da produção de uma laje nervurada é expressa por custos de material e mão de obra (GALEB, 2011). As variáveis do modelo correspondem às dimensões que caracterizam a forma de polipropileno utilizada e as propriedades dos materiais, como resistência do concreto e resistência do aço. A combinação de valores de variáveis que consiga minimizar o custo de produção do pavimento da edificação, respeitando restrições normativas,

é considerada uma solução ótima. Formulações têm sido apresentadas para o problema de otimização de lajes nervuradas por Mota e Melo (2015, 2016).

A solução numérica do problema de otimização pode ser feita de forma eficiente por algoritmos de programação matemática baseados em gradientes quando as variáveis são do tipo contínuas e as funções são diferenciáveis (ARORA, 2012). Quando as variáveis assumem somente valores discretos, o que ocorre frequentemente na prática da engenharia, os algoritmos evolutivos são mais utilizados e também são mais vantajosos por não dependerem de derivadas das funções (GOLDBERG, 1989). Estes algoritmos, entretanto, requerem muitas avaliações das funções envolvidas. Assim, em problemas de otimização estrutural, isto representa a execução de um grande número de análises estruturais.

Nesse cenário, a adoção de um modelo de análise estrutural de boa representatividade e condizente com o grau de complexidade que se quer considerar é o primeiro passo a ser tomado. A partir daí, devem ser estudadas os meios de solucionar tais modelos de análise, sejam para obtenção de soluções analíticas ou soluções aproximadas. Para a representação de lajes, destacam-se alguns modelos de análise, sendo a Teoria de Placas Finas uma das mais amplamente adotadas, podendo-se citar ainda modelos como o de analogia de grelha.

As soluções para tais modelos podem seguir duas linhas principais, seja na obtenção de soluções analíticas pela solução do modelo adotado para determinadas condições, ou soluções aproximadas que permitem maior liberdade. Em geral, existem limitações quanto ao tipo de carregamento, à geometria da laje e às condições de contorno. Dessa forma, para se obter soluções para diferentes situações de carregamentos, condições de contorno e geometrias complexas, recorre-se a utilização de soluções numéricas, como o Método dos Elementos Finitos (MEF), o qual tem se tornado uma das alternativas mais adotadas na academia e na prática de projeto.

Atualmente, a utilização do MEF está bastante difundida, dada a maior facilidade de acesso a ferramentas computacionais cada vez mais potentes. Isso incentivou a produção de diversos trabalhos, os quais comprovam a eficiência da aplicação do MEF frente a outras formas de solução quanto à qualidade da resposta obtida, ressaltando ainda mais seu valor no campo da análise de estruturas.

Em Werner (2013) faz-se um estudo comparativo entre três diferentes modelos para a análise de lajes, sendo tais: Modelo de Marcus, Teoria Clássica de Placas Finas e Elementos Finitos de Placa. Os resultados mostraram o potencial da solução via MEF ao tratar situações gerais de carregamento, condições de contorno e geometria.

Nesse contexto, a otimização de estruturas via aplicação de soluções analíticas de modelos de baixa representatividade da realidade de projeto, podem gerar soluções ótimas comprometidas, uma vez que diversas simplificações são impostas ao modelo de análise estrutural. Assim, a avaliação dessas soluções ótimas obtidas via soluções analíticas devem ser realizadas segundo métodos mais robustos, como o MEF, para observar o grau de comprometimento da resposta obtida, pela violação das restrições.

Dessa forma, o desenvolvimento de um modelo de otimização com a aplicação de soluções analíticas para o modelo podem ser uma boa alternativa para substituir o custo computacional de análises mais onerosas. Tais soluções analíticas devem ser simples e eficientes do ponto de vista da análise estrutural, mas também representativos da estrutura, de modo a haver o menor prejuízo ao modelo.

## **1.1 Problema**

Na prática de projeto, utilizam-se programas computacionais para análise de estruturas para obtenção de respostas em termos de esforços, tensões, deformações etc. necessárias para seu dimensionamento. Em geral, tais ferramentas computacionais utilizam métodos de análise bastante robustos, os quais demandam grande capacidade de processamento, mas que, no entanto, não consideram medidas de desempenho econômico e/ou estrutural, cabendo à expertise do projetista a escolha do melhor tipo de estrutura.

Dada a busca incessante por sistemas mais econômicos e com eficiência estrutural, a incorporação de modelos de otimização ao projeto de estruturas tem se tornado recorrente, sendo necessária formulação e implementação adequada para representação do modelo, uma vez que envolvem diversas variáveis e uma gama de limitações. Nesse sentido, percebe-se que a aplicação da otimização com a utilização de análises estruturais complexas pode tornar o problema de grandes proporções, gerando um custo computacional indesejado para a prática de projeto.

Uma alternativa que vem sendo cada vez mais explorada, é o uso de modelos substitutos de análise. Ou seja, a partir de análises estruturais utilizando modelos refinados produz-se um modelo substituto que é a aproximação do problema real, o qual permite uma avaliação estrutural a baixo custo. Contudo, surge o questionamento de qual a influência da utilização de métodos mais simples de análise nas soluções ótimas, se comparados a métodos mais fidedignos de análise. Isto é, até que ponto os resultados obtidos são representativos para o modelo adotado e que possam ser usados na prática de projeto.

## 1.2 Questões motivadoras

- (a) Qual o estado da arte sobre modelos analíticos e numéricos de análise estrutural aplicados a lajes nervuradas de concreto armado?
- (b) Quais as principais limitações de modelos analíticos quando comparados com modelos numéricos de análise para pavimentos de lajes nervuradas?
- (c) De que modo a aplicação de modelos precisos de análise impacta no modelo de otimização para pavimentos de lajes nervuradas?
- (d) Quais restrições mostram-se mais sensíveis à aplicação do Método dos Elementos Finitos de Grelha à análise estrutural?

## 1.3 Justificativa

Buscar soluções estruturais de menor custo e com bom desempenho é um desafio para qualquer projetista, mesmo para os mais experientes. Dessa forma, a otimização tem ganhado força no campo da engenharia de estruturas, uma vez que o processo de análise estrutural envolve uma grande quantidade de variáveis e uma gama de critérios a serem respeitados. Nesse contexto, surge ainda as recentes revisões em normas que regulam o projeto de estruturas de concreto armado, principalmente, nos requisitos mínimos para estruturas expostas ao fogo (ABNT NBR 15200:2012), as quais trouxeram impactos bastante significativos no mercado da construção civil, impondo uma nova perspectiva de projeto.

Em geral, a aplicação da otimização via modelos de análise refinados tornam o processo em questão bastante oneroso computacionalmente, dificultando sua aplicabilidade à prática de projeto. Assim sendo, a substituição de modelos de alta representatividade por modelos menos representativos, ou até mesmo aplicação de modelos substitutos de análise, mostra-se uma boa alternativa, uma vez que mantem boa representatividade estrutural, assim como há um menor custo computacional.

Dessa forma, este estudo justifica-se pela necessidade de se avaliar os impactos gerados pela substituição acima referida, levantando-se as limitações e vantagens de se aplicar um modelo menos representativo da realidade em processos de otimização de lajes nervuradas de concreto armado.

## **2 OBJETIVOS**

### **2.1 Objetivo Geral**

Avaliação de soluções estruturais ótimas de lajes nervuradas de concreto armado obtidas com modelo de análise estrutural analítico frente à aplicação de modelos de análise mais realistas.

### **2.2 Objetivos Específicos**

- (a) Conhecer o estado da arte sobre modelos de análise estrutural que são aplicados a lajes nervuradas de concreto armado, seja de alta ou baixa representatividade da estrutural.
- (b) Apurar quais as principais limitações dos modelos simplificados de análise ao se comparar com modelos numéricos, com enfoque na análise de pavimentos de lajes nervuradas de concreto armado.
- (c) Identificar as principais consequências que a aplicação de modelos de análise precisos em substituição a soluções analíticas de modelos de placas pode acarretar nas respostas ótimas obtidas.
- (d) Avaliar quais restrições do modelo de otimização mostram-se mais sensíveis à aplicação do Método dos Elementos Finitos na análise estrutural, caracterizando suas causas e consequências nas respostas ótimas.



### 3 METODOLOGIA

De forma a melhor descrever o processo de pesquisa a ser desenvolvido neste trabalho, divide-se o estudo em três etapas:

Na primeira etapa (Revisão Bibliográfica) são buscados conhecimentos acerca de conceitos básicos sobre os principais temas pertinentes neste trabalho, sendo de maior enfoque as estruturas de concreto armado, os métodos de análise de estruturas e os processos de otimização. Essa etapa é de fundamental importância para a familiarização com o estado da arte sobre os modelos de otimização de lajes nervuradas de concreto armado.

Na segunda etapa (Análise via Elementos Finitos) o enfoque é no estudo do método de análise estrutural que será aplicado neste trabalho, o Método dos Elementos Finitos (MEF), o qual é de grande robustez e maior grau de complexidade que métodos analíticos de solução. Nessa etapa também será executada a aplicação do MEF na análise de lajes nervuradas de concreto armado em detrimento de soluções analíticas, utilizando-se de softwares de análise estrutural.

Na terceira etapa (Aplicações e Discussão) serão feitas as aplicações do modelo de otimização das lajes nervuradas utilizando o MEF, gerando soluções ótimas as quais poderão ser utilizadas para comparação com os resultados obtidos via otimização por soluções analíticas.

## 4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A aplicação da otimização em estruturas de concreto armado se desenvolve e torna-se cada vez de maior significado na prática da engenharia, conciliando eficiência estrutural com economia. Com diversas inovações no campo da informática, modelos de análise estrutural mais realistas puderam ser empregados em detrimento de modelos mais simples, mas a um determinado custo computacional. Dessa forma, apresenta-se a seguir os conceitos básicos sobre a otimização estrutural de pavimentos de lajes nervuradas de concreto armado e ainda os modelos de análise estrutural comuns na prática de projeto.

### 4.1 Estruturas de concreto armado (CA)

As estruturas de concreto armado (CA) são bastante comuns em diversos países, mas predomina principalmente no Brasil devido à alta disponibilidade de materiais constituinte de sua composição, tais como cimento, agregados e água. Quando no estado endurecido, esse material se assemelha ao comportamento de uma rocha, de modo que sua resistência à compressão e durabilidade são bastante elevadas. Contudo quando submetidos a esforços de tração, tem comportamento frágil e de baixa resistência a tração (BASTOS, 2014).

Em vias de contornar tal fragilidade, solidariza-se o aço ao concreto, de forma aos esforços de tração aplicados na peça de concreto sejam agora resistidos pelo aço estrutural, material esse bastante resistente a tal tipo de solicitação. Por definição da ABNT NBR 6118:2014 (item 3.1.3) elementos de concreto armado são:

*“Aqueles cujo comportamento estrutural depende da aderência entre o concreto e armadura, e os quais não se aplicam alongamentos iniciais das armaduras antes da materialização dessa aderência”.*

Ou seja, o CA alia as principais qualidades do material concreto com as do aço, permitindo que diversos elementos estruturais possam ser idealizados e executados com segurança e durabilidade. O concreto armado é obtido por meio da associação entre concreto simples e armadura convenientemente colocada (armadura passiva), de tal modo que ambos resistam solidariamente aos esforços solicitantes. Ressalta-se, ainda, diversas qualidades, desde o domínio da execução desse material como a grande resistência a choques e vibrações. (BASTOS, 2014)

#### 4.1.1 Lajes nervuradas de CA

As lajes, de modo geral, são consideradas elementos de placa, isso significa que os principais esforços aplicados são na direção normal ao seu plano médio, assim como afirmado no item 14.4.2.1 da ABNT NBR 6118:

*“Elementos de superfície plana, sujeitos principalmente a ações normais a seu plano. As placas de concreto são usualmente denominadas lajes. [...]”*

Dentre as diferentes tipologias de lajes, as lajes nervuradas de concreto armado são atualmente uma das melhores alternativas construtivas quando se necessita construir edificações de grandes vãos livres. As lajes nervuradas (Figura 1), segundo a ANBT NBR 6118:

*“[...] são as lajes moldadas no local ou com nervuras pré-moldadas, cuja zona de tração para momentos positivos esteja localizada nas nervuras entre as quais pode ser colocado material inerte.”*

Diversos estudos comparativos foram realizados, enriquecendo a literatura acerca do sistema de lajes nervuradas. Em estudo realizado por Albuquerque e Pinheiro (2002) mostra-se que há uma redução de 15,1% no custo quando se aplica as lajes nervuradas em substituição ao sistema convencional de lajes maciças apoiadas em vigas. Em sua publicação, são avaliadas as viabilidades econômicas de diversas concepções estruturais de edifícios de concreto armado, dentre as quais cita-se: estrutura convencional de laje maciças (OP1), nervuradas com caixotes (OP2), nervuradas com tijolos (OP3), nervuradas pré-fabricadas (OP4), nervuradas lisas com caixotes (OP5), nervuradas lisas com tijolos (OP6) e estrutura protendida (OP7). Para a análise de esforços e dimensionamento estrutural foi adotado o software TQS.

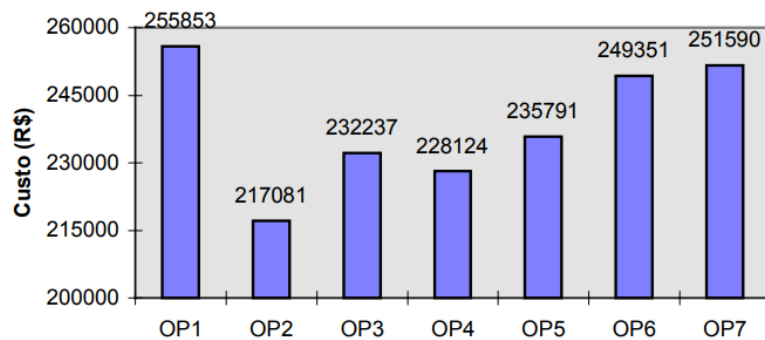
Figura 1 – Pavimento de laje nervurada



Fonte: <<http://www.dicasconstrucoes.com.br/wp-content/uploads/2015/02/lajes-nervuradas2.jpg>>

A Figura 2 retrata o custo das alternativas avaliadas no citado estudo, no qual percebe-se que a opção 2 (OP2), relativa às lajes nervuradas com caixotes é a melhor economicamente viável. Albuquerque e Pinheiro (2002) ainda citam alguns pontos positivos que são pertinentes às estruturas de lajes nervuradas, destacando-se positivamente o baixo consumo de concreto e a diminuição do peso próprio da estrutura.

Figura 2 - Custo Global.



Fonte: (ALBUQUERQUE e PINHEIRO, 2002)

Carvalho e Pinheiro (2009) comentam que para pavimentos que vencem vãos até 5 metros costumam-se empregar lajes maciças apoiadas em vigas, uma vez que demandam pequenas espessuras. Contudo, para vãos maiores que esses, as lajes maciças passam a ter espessuras elevadas, devido ao Estado Limite de Serviço de Deformação, tornando esse sistema antieconômico.

Nesse cenário, Lopes e Bono (2013) mostraram que houve uma redução de 11,22% no custo total da obra quando se substituiu o sistema de lajes maciças por sistemas de lajes nervuradas com caixotes de polipropileno reaproveitáveis. Nesse trabalho foi desenvolvida pesquisa no comparativo de esforços e custos entre os dois tipos de sistemas construtivos, lajes maciças e nervuradas, estas avaliadas com seus diversos materiais de enchimento, sendo eles: blocos de EPS, tijolos cerâmicos e caixotes reaproveitáveis de polipropileno (Figura 3).

Figura 3 - Formas de polipropileno.



Fonte: (ASTRA)

Em seu trabalho, chegou-se à conclusão de que tanto estruturalmente quanto economicamente, o sistema que utiliza lajes nervuradas com caixotes de polipropileno é o mais eficiente frente aos demais materiais de enchimento e o sistema de laje maciça. Observa-se reduções significativas no peso próprio, flecha total, momento fletor positivo, momento fletor negativo e esforço cortante quando comparada com a laje maciça.

#### **4.2 Norma de Desempenho**

A ABNT NBR 15575:2013 – Edificações Habitacionais – Desempenho apresenta uma série de requisitos mínimos que devem ser respeitados para se garantir a durabilidade e segurança estrutural de uma edificação. Com revisão recente, tal norma passou por intenso processo de requalificação, gerando impactos diretos na prática de projeto, principalmente, no projeto de lajes nervuradas de concreto armado.

Segundo o item 5.5.3 dessa norma, os entrepisos e os elementos estruturais associados devem apresentar adequada resistência ao fogo, visando controlar os riscos de propagação do incêndio/fumaça e de comprometimento da estabilidade estrutural da edificação. Dessa forma, introduz-se o conceito de Tempo Requerido de Resistência ao Fogo (TRRF) definido na ABNT NBR 14432:2001 como o tempo mínimo de resistência ao fogo de um elemento construtivo quando sujeito ao incêndio-padrão. Nesta norma, estão expostos todos os TRRF's exigidos para cada tipo de edificação, variando de um mínimo de 30 minutos a 180 minutos.

De forma simplificada, pode-se dividir as edificações nas seguintes classes:

- a) Unidades habitacionais assobradadas, isoladas ou geminadas: 30 minutos.
- b) Edificações multifamiliares até 12 m de altura: 30 minutos.
- c) Edificações multifamiliares com altura acima de 12 m e até 23 m: 60 minutos.
- d) Edificações multifamiliares com altura acima de 23 m e até 30 m: 90 minutos.
- e) Edificações multifamiliares com altura acima de 30 m e até 120 m: 120 minutos.
- f) Edificações multifamiliares com altura acima de 120 m: 180 minutos.

Tais requisitos são necessários para o dimensionamento estrutural, uma vez que estes parâmetros de tempo são tomados por base para aplicação das dimensões mínimas de elementos da estrutura de concreto armado, limitando, por exemplo, cobrimentos mínimos com valores diferentes daqueles requisitados pela ABNT NBR 6118:2014, os quais também devem ser respeitados.

Dessa forma, o sistema de lajes nervuradas tornou-se bastante questionável quanto a sua economia frente a outros sistemas construtivos, tendo em vista que muitas das dimensões características de sua seção transversal, as quais foram bastante aplicadas até então por meio de caixotes de polipropileno, tornam-se obsoletas quanto aos novos requisitos de norma. Por se tratar de uma mudança recente, poucos estudos tratam desta realidade, destacando-se o trabalho desenvolvido por Mota e Melo (2015).

Em seu trabalho foi desenvolvido um estudo de otimização comparativo entre as soluções de lajes nervuradas com aplicação de caixotes de polipropileno. Foi desenvolvido um modelo de otimização nos quais foram utilizadas variáveis de projeto relativas às dimensões da seção transversal da laje nervurada e função objetivo relativa ao custo dos materiais, aço e concreto. A partir daí, foi possível avaliar-se o comportamento do modelo de otimização em dois casos distintos. Primeiramente, observou-se as soluções obtidas sem a aplicação da ABNT NBR 15575:2013, e em um segundo caso, foram aplicadas as limitações impostas por tal norma.

Os resultados observados mostraram que houve aumento significativo no custo da laje nervurada quando da aplicação dos novos requisitos de desempenho, com aumento percentual médio de 18% no custo de material. Isso mostra o significativo impacto que as considerações de desempenho trouxeram para a perspectiva de projeto atual, pondo em questão a viabilidade econômica do sistema de lajes nervuradas não protendidas.

### 4.3 Análise Estrutural

Etapa fundamental em qualquer projeto de estruturas, a análise estrutural tem por objetivo, segundo a ABNT NBR 6118:2014 (item 14.2.1):

*“[...] determinar os efeitos das ações em uma estrutura, com a finalidade de efetuar verificações dos estados-limites últimos e de serviço. A análise estrutural permite estabelecer as distribuições de esforços internos, tensões, deformações e deslocamentos, em uma parte ou em toda a estrutura.”*

A depender do objetivo da análise, vários modelos estruturais podem ser utilizados para obter os resultados desejados. Tais modelos devem representar de forma mais próxima da realidade o comportamento da estrutura, discretizando, se preciso, a estrutura em unidades básicas menores em que se permita a análise mais detalhada. Assim como afirmado na ABNT NBR 6118:2014 (item 14.2.2):

*“A análise estrutural deve ser feita a partir de um modelo estrutural adequado ao objetivo da análise. [...] O modelo estrutural pode ser idealizado como a composição de elementos estruturais básicos, [...], formando sistemas estruturais resistentes que permitam representar de maneira clara todos os caminhos percorridos pelas ações até os apoios da estrutura. “*

Em relação à análise de lajes, essas são elementos de superfície, ou seja, elementos em que uma dimensão, usualmente chamada de espessura, é relativamente pequena em comparação às demais, podendo receber as designações de placas, chapas e cascas. Em geral, as lajes são consideradas elementos de placa, uma vez que sua superfície média é plana e estão sujeitas principalmente a ações normais a seu plano.

A obtenção de esforços e deslocamentos em lajes parte da aplicação de um modelo de análise que permita a boa representatividade da estrutura real. Com base em hipóteses adotadas e propriedades dos materiais, constrói-se um modelo matemático em que o comportamento da laje é representado por equações diferenciais e condições de contorno. Partindo para a solução de tais modelos, podem ser obtidas soluções de forma analítica ou numérica, a depender da natureza do problema.

Soluções numéricas via Método dos Elementos Finitos podem lidar com condições de apoio, carregamentos e geometrias quaisquer, enquanto soluções analíticas são limitadas com relação a tais aspectos. Vários trabalhos têm comparado a aplicação desses métodos de soluções na análise de lajes.

Em Cunha (2003) faz-se um estudo comparativo entre o cálculo de lajes utilizando a modelo da Teoria Clássica de Placas Finas e o modelo por Analogia de Grelha. O método utilizado para solucionar a equação diferencial de placas foi o abordado por Czerny, obtido via aplicação do método das diferenças finitas. A solução adotada por Czerny possibilita apenas a avaliação de lajes de forma isolada, de maneira que a compatibilização de momentos entre lajes de um pavimento se torna difícil, tendo como resultado esforços e deslocamentos que se afastam de forma considerável quando comparados a modelos mais representativos, pela não consideração de fatores como a presença de vigas de apoio deslocáveis.

Por outro lado, o modelo de analogia de grelha se aproxima mais da realidade de projeto, uma vez que tenta representar por meio de elementos de barra o comportamento bidimensional da laje. Cada elemento da grelha possui as características geométricas relativas à região da laje que se encontra, tais como inércia à flexão e torção. Essa versatilidade permite maior liberdade de geometria e carregamentos, além de serem possíveis a aplicação da interface viga-laje no pavimento, atribuindo diferentes inércias a tais elementos.

Para comprovar as diferenças entre as análises, Cunha (2003) avaliou um edifício garagem. Foram utilizados elementos de grelha de 50 cm em ambas as direções. O carregamento foi uniformemente distribuído nas barras sendo obtido pelo método das áreas de influência.

Observou-se que tanto para momentos fletores nas duas direções de análise, assim como para flecha obtida o processo de analogia de grelha retornou valores menores que o processo de Czerny. Uma das possíveis explicações é a não consideração da redistribuição de momentos negativos pelo método de Czerny, fazendo com que momentos positivos na laje aumentem.

Os resultados corroboram o pensamento de que métodos analíticos, tais como o de Czerny, gera soluções bastante conservadoras, uma vez que majoram os esforços obtidos. Tais momentos acarretam taxas de armadura superiores a métodos numéricos, tendo em vista que a consideração do pavimento como um todo na análise estrutural gera um comportamento diferente de esforços.

Em Werner (2013) estuda-se o comportamento dos momentos fletores e deslocamentos máximos por três diferentes métodos: Modelo de Marcus, Teoria Clássica de Placas e modelo por Elementos Finitos. Para solução da equação clássica de placas utilizou-se a solução analítica de Navier. Para o método por elementos finitos, utilizou-se elementos de placa com auxílio de software de análise CypeCad 2008.1.f.



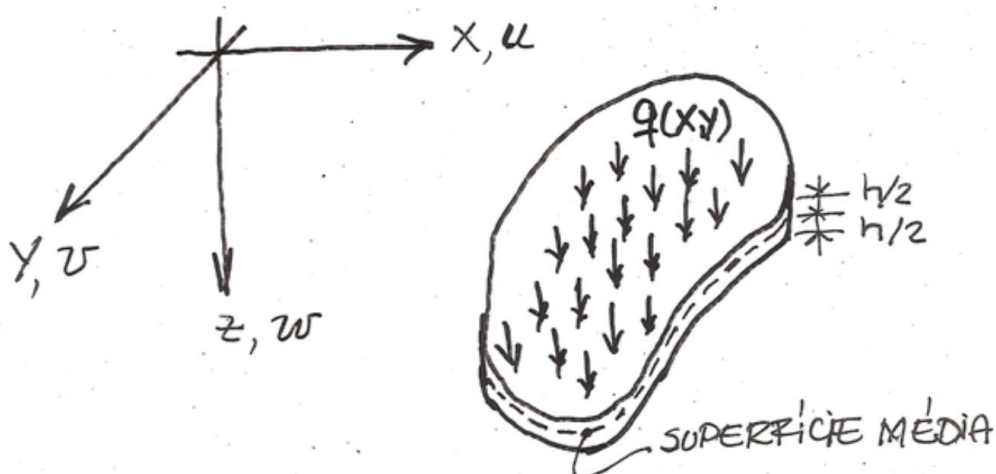
Foram considerados carregamentos de peso próprio, revestimento e sobrecargas, devendo a estrutura obedecer aos Estados Limites Últimos e Estados Limites de Serviço segundo ABNT NBR 6118:2007.

Os resultados foram pertinentes aos encontrados em trabalhos anteriores, nos quais se constatou que os métodos mais simples de representação do modelo, como o modelo de Marcus, retornam valores de esforços bastante superiores em comparação a modelos mais fidedignos, como o modelo por elementos finitos. Dentre os principais pontos de destaque entre os métodos avaliados, está a falta de consideração da interação entre as diferentes lajes do pavimento em modelos simplificados, o que gera análises que divergem da realidade de esforços obtida por modelos mais sofisticados. Dessa forma, a aplicação do MEF torna-se a uma boa alternativa para a análise estrutural.

#### 4.3.1 Teoria Clássica de Placas Finas

Análises por métodos simplificados tem por base a consideração da Teoria Clássica das Placas, ou Teoria de Kirchhoff, a qual admite comportamento linear elástico do material, além de ser homogêneo e isotrópico (ARAÚJO, 2014). Esse modelo se baseia nas equações de equilíbrio de um elemento infinitesimal de placa e nas relações de compatibilidade das deformações do mesmo. (Figura 4)

Figura 4 - Eixos e direção da carga.



Fonte: disponível em:

[http://www.deecc.ufc.br/Download/TB797\\_Analise\\_de\\_Estruturas\\_I/TeoriadasPlacas.pdf](http://www.deecc.ufc.br/Download/TB797_Analise_de_Estruturas_I/TeoriadasPlacas.pdf)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{q(x, y)}{D} \quad (1)$$

onde  $w$  representa o deslocamento vertical da placa.  $x$  e  $y$  representam as coordenadas cartesianas no plano onde a placa está inserida.  $q(x, y)$  é a intensidade de carregamento atuante na placa e  $D$  a rigidez à flexão da placa.

Em que  $D$  é expresso por:

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2)$$

Sendo:

- $E$  Módulo de deformação longitudinal do concreto;
- $h$  Espessura da placa (espessura da laje);
- $\nu$  Coeficiente de Poisson.

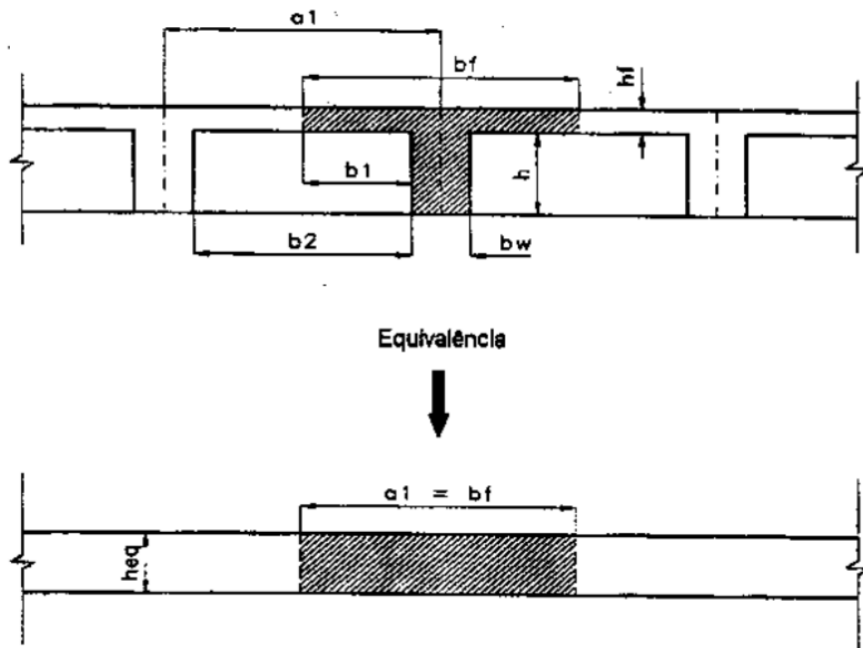
No caso de lajes nervuradas, a ABNT NBR 6118:2014 permite que estas sejam calculadas como placas no regime elástico. Contudo, para o cálculo de flechas nas lajes nervuradas, torna-se necessário a transformação desse tipo de laje em uma laje maciça de espessura equivalente (Figura 5). Tal equivalência é em termos de momento de inércia à flexão, podendo ser obtida por:

$$h = h_{eq} = \sqrt[3]{\frac{12I}{a_1}} \quad (3)$$

Sendo:

- $I$  Momento de inércia à flexão da seção T;
- $a_1$  Distância entre eixos de nervura

Figura 5 - Equivalência de inércia de laje nervurada e laje maciça.



Fonte: (BARBIRATO, 1997)

#### 4.3.2 Solução analítica de Navier

A partir das (1) e (2) diversos autores formularam soluções analíticas para o cálculo de esforços e deslocamentos das lajes para alguns casos específicos de condições de apoio, geometria e carregamentos. Dentre as soluções mais utilizadas na prática de projeto destacam-se as soluções por meio de séries, diferenças finitas ou elementos finitos.

Dentre os métodos citados acima, a metodologia adotada por Navier tenta solucionar a equação fundamental de placas por meio da representação do carregamento via expansão de séries, em específico por séries de Fourier duplas (superposição de carregamentos com a forma bissenoidal) na forma da (4):

$$p(x, y) = \sum_m \sum_n p_{mn} \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \quad (4)$$

Onde:

- $a$  e  $b$  Dimensões da placa;
- $x, y$  Coordenadas cartesianas;
- $p_{mn}$  Valor máximo do carregamento;

$m, n$  Número de retângulo em que se divide a placa, cada um com lados  $a/m$  e  $b/n$

A linha elástica  $w(x, y)$  afim ao carregamento é dada por uma série dupla e obtida a partir das derivadas da equação fundamental e das condições de contorno para a placa, apoiada ao longo das bordas e com rotação livre, resultando na (5):

$$w(x, y) = \frac{p_{mn}}{\pi^4 D \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \quad (5)$$

Os valores de  $p_{mn}$  são dados pela (6):

$$p_{mn} = \frac{4}{a \cdot b} \int_0^b \int_0^a p(x, y) \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \cdot dx \cdot dy \quad (6)$$

### 4.3.3 Analogia de grelha

Quando a solução analítica da Equação de Placas torna-se complexa, ou seja, em cenários em que condições de contorno, geometria e carregamentos são muito particulares, as soluções analíticas tornam-se bastante extensas. Dessa forma, recorre-se á técnicas numéricas que possibilitem a solução aproximada da Equação de Placas. Dentre as técnicas mais utilizadas, destaca-se o Método dos Elementos Finitos (MEF).

Segundo Cook *et al.* (2001), o elemento finito pode ser visualizado como uma pequena parte da estrutura. Cada elemento finito representa um campo de possíveis deslocamentos, aos quais a depender do grau de representatividade do elemento adotado, este pode representar um melhor ou pior comportamento da estrutura. Esses elementos se conectam por nós, gerando a malha da estrutura, de modo que elemento por elemento o comportamento da estrutura é aproximado. Caso sejam necessárias aproximações mais detalhadas, uma malha mais refinada deve ser construída.

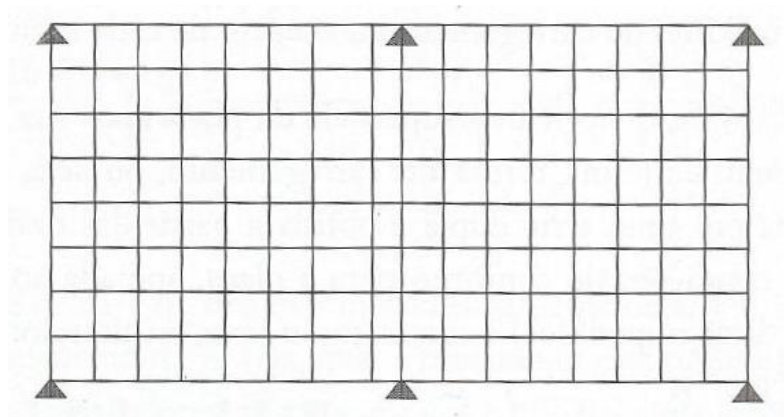
A utilização de elementos lineares na análise de lajes dá origem ao modelo de analogia de grelha. Segundo Carvalho (2015) esse processo consiste na substituição da placa (laje) por uma malha equivalente de vigas. (Figura 6)

A aplicação do modelo de analogia de grelha para a obtenção de esforços em lajes nervuradas é recorrente no dimensionamento de estruturas de concreto armado, tendo em vista a proximidade geométrica da representação do modelo de grelha com esse tipo de laje. No entanto, dada a natureza linear desse método, uma vez que se trata de elementos lineares de barra, mesmo o maior refinamento da malha da grelha não permitirá o alcance da solução exata para uma laje maciça como retratada pela equação diferencial de placa.

Dessa forma, a utilização desse tipo de análise em lajes nervuradas requer uma perspectiva de como os parâmetros, tais como a rigidez à torção das nervuras, efeitos da mesa, vigas de bordo e espaçamentos entre nervuras impactam no modelo de representação do pavimento. Assim, Stramandinoli (2003) comparou resultados obtidos pelo modelo de Analogia de Grelha e modelo por Elementos Finitos de Placas obtendo considerações bastante relevantes quanto à consideração de parâmetros que permitam o processo de grelha se aproximar de modelos mais representativos da estrutura, apesar de suas inerentes limitações.

A partir da contribuição de diversos autores no que concerne à parâmetros geométricos de representação da laje, tais como inércia à flexão e inércia à torção, Stramandinoli (2003) utilizou um pavimento de 5,0 por 5,0 m com diferentes espaçamentos de nervura, para representar diferentes casos, observando os impactos da consideração de diferentes atribuições de inércia à flexão e torção das barras. Resultados mostraram que a utilização do modelo de

Figura 6 - Grelha equivalente representando o pavimento.



Fonte: (CARVALHO, 2015)

analogia de grelha para lajes nervuradas é válida, desde que os parâmetros de rigidezes das barras sejam adequadamente atribuídos.

Kennedy & Bali (1978), contrapondo diversos outros autores, propuseram uma maneira alternativa de considerar a inércia à flexão das lajes nervuradas a partir da representação de sua seção T típica. Para poder levar em consideração a contribuição da mesa como parte resistente da seção, a área da mesa deve ser majorada pelo fator  $\frac{1}{1-\nu^2}$  para sofrer influência da contribuição bidirecional da capa da laje nervurada.

Relativo à consideração do momento de inércia à torção, diversos autores a consideram de forma diferente. Dentre muitos trabalhos (LEONHARDT, 1978) recomendam a não consideração da contribuição da inércia à torção das nervuras devido a sua pequena dimensão, além de que não é conveniente a colocação de armaduras que resistam a esse esforço na nervura. Contudo, Kennedy & Bali (1979) propuseram não desprezar tal inércia.

Stramandinoli (2003) observou que os resultados dos diversos casos avaliados, ponderando de forma diferentes os parâmetros resistentes das lajes, permitiram concluir que a utilização de modelo de analogia de grelha para a representação das lajes nervuradas é bastante adequada. No que concerne à rigidez à torção, a solução mais indicada considera-la com valores baixos, não sendo necessária a aplicação de armadura para resistir a tal esforço nas nervuradas, além de representar a pouca resistência que a nervura apresenta para a torção.

#### 4.4 Problema de Otimização

Por uma definição matemática, o problema de otimização é aquele onde se procura determinar os valores extremos de uma função. De forma mais detalhada, significa a busca dentre os possíveis valores que a função pode assumir, de forma contínua ou discreta, da solução que torna a função um mínimo ou máximo global, respeitando uma série de restrições de igualdade e desigualdade. A representação matemática mais comumente aceita é dada pelas expressões abaixo:

$$\text{Função objetivo: } f(x)$$

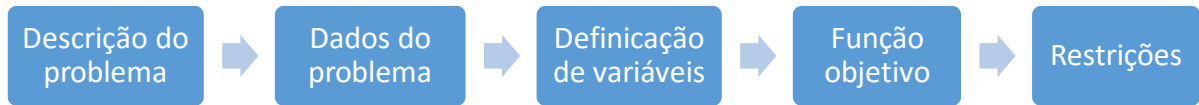
$$\text{Restrições de igualdade: } h_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, l$$

$$\text{Restrições de desigualdade: } g_j(x) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m$$

$$\text{Variáveis Contínuas: } x_{k,inf} \leq x_k \leq x_{k,sup} \quad k = 1, \dots, n$$

$$\text{Variáveis Discretas: } x_k \in \{x_{k1} \quad x_{k2} \quad \dots \quad x_{ks}\} \quad s = 1, \dots, p$$

Figura 7 - Criação de problema de otimização.



Fonte: elaborado pelo autor.

Tomando parte desse conceito, muitos autores viram a oportunidade de aplicá-lo à engenharia, transformando os problemas da realidade de um engenheiro, em representações matemáticas capazes de chegar a soluções satisfatórias para a solução de determinado problema. Dentre os mais diversos autores, destaca-se Vanderplaats (1999), definindo a otimização na engenharia como a busca da melhor performance de determinado sistema, que demonstre não só desempenho satisfatório, mas que se apresente como o mais eficiente a partir da avaliação de determinado parâmetro, respeitando uma série de condições previamente estabelecidas.

Segundo Arora (2012), a fase de descrição do problema representa cerca de 50% da resolução do problema em si. Ou seja, a desconsideração de uma variável ou um requisito não inclusos na formulação do problema, podem gerar soluções destoantes da solução real do problema. Dessa forma, este autor utiliza um procedimento de cinco passos que auxilia no processo de desenvolvimento de variáveis de projeto, definição da função objetivo e escolha de restrições, o qual está ilustrado na Figura 7.

- g) **Descrição do problema:** uma das mais importantes etapas no processo de otimização. Nesta fase há a definição de muitos dos parâmetros e propriedades que irão influir na representação do problema, observando todas as nuances que o problema deverá contornar.
- h) **Dados do problema:** a otimização parte essencialmente de informações dos materiais envolvidos, custos de material ou ainda dos parâmetros limites desses materiais, no caso de problemas físicos.
- i) **Definição das variáveis de projeto:** define-se um conjunto de variáveis independentes que se alterando suas magnitudes será possível chegar a diferentes sistemas para o mesmo problema. Desse modo, poder-se-á escolher dentre esses sistemas, o conjunto de variáveis que retorna a melhor resposta ao problema.
- j) **Função objetivo:** para poder quantificar quais as melhores soluções, define-se um valor numérico que se pode associar para cada solução. Esse valor é a função

objetivo do problema de otimização, que deve ser minimizada ou maximizada. Em problemas de engenharia, essas funções são conhecidas por funções custo. Alguns exemplos de funções objetivo, são a performance (a serem maximizadas) e o custo (a serem minimizadas).

- k) **Restrições:** todas as imposições de requisitos impostos ao problema de otimização são conhecidas por restrições. Para que uma solução seja admissível, tais restrições devem ser respeitadas. Tais restrições são dependentes direta ou indiretamente das variáveis de projeto, atuando de modo diferente para cada solução avaliada.

#### 4.5 Algoritmos de solução

Em engenharia, os problemas enfrentados são bastante complexos, muitas vezes, não lineares e são representados por funções dependentes de diversas variáveis e que na maioria das vezes não são diferenciáveis, necessitando de métodos numéricos para sua solução (SARAMAGO e STEFFEN JR., 2008). Nesse cenário, profissionais buscam sempre desenvolver produtos com melhores performances e menores custos de forma que a busca da solução ótima se torna um processo muitas vezes inviável do ponto de vista da tentativa e erro. Assim, surgem diversas metodologias de otimização que auxiliam a tomada de decisão do profissional, devendo-se adotar aquele modelo que melhor se adequa à representação do seu problema.

Dentre as metodologias de otimização, destacam-se as metodologias determinísticas e as heurísticas. Métodos determinísticos são baseados, principalmente, no comportamento de gradientes ou derivadas da função a ser minimizada ou maximizada, produzindo resultados satisfatórios quando as funções são contínuas, convexas e unimodais. No entanto, muitas dificuldades surgem quando não são respeitadas essas condições, destacando-se a influência do ponto de partida para encontrar a solução ótima, o sistema converge para mínimos locais, a dificuldade em tratar de problemas com variáveis discretas e não serem adequados para serem usados em computação paralela.

Os métodos heurísticos ou naturais podem reduzir algumas das dificuldades apresentadas acima. Tais métodos buscam a melhor solução de um problema a partir da avaliação de diversas possíveis soluções de modo aleatório ou seguindo uma filosofia de procura do espaço de busca. Diferente de métodos determinísticos, a busca toma por base apenas o valor da função objetivo do problema, desconsiderando informações sobre suas derivadas ou possíveis descontinuidades.

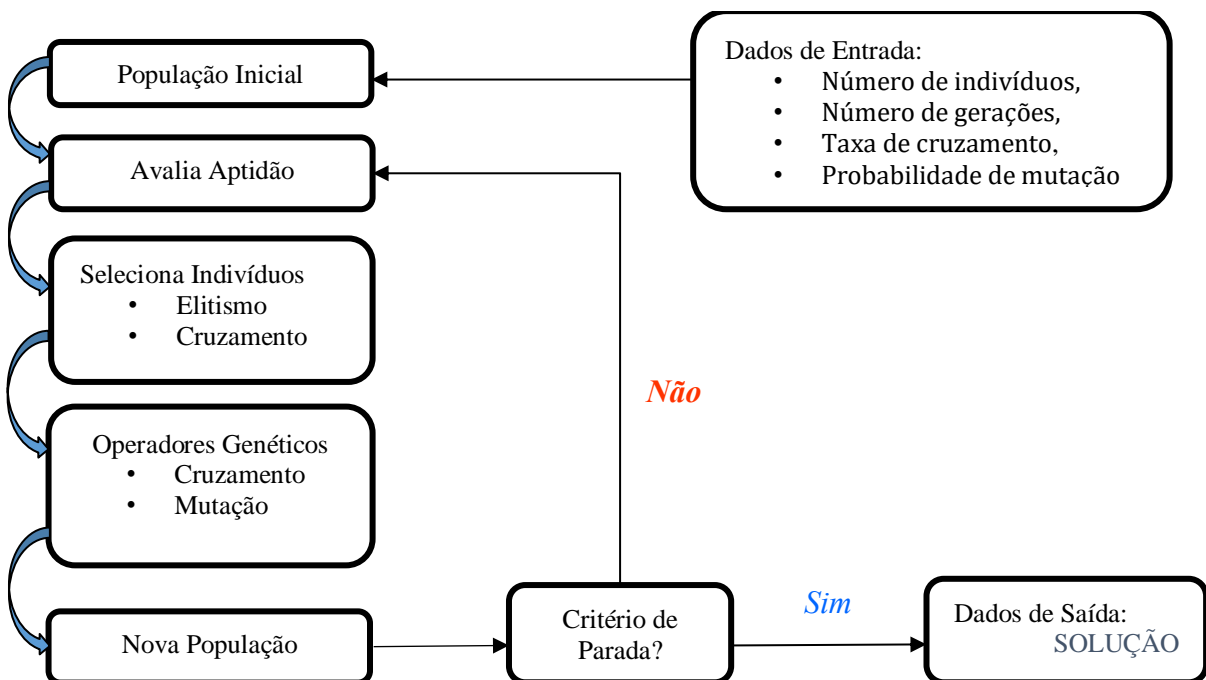


Os métodos naturais são procedimentos que tentam buscar soluções ótimas a partir de processos comuns na natureza. Dentre eles destacam-se os métodos baseados em comportamento de populações de indivíduos. Nesse grupo se dá ênfase a algoritmos evolutivos, como o Algoritmo Genético (AG), e algoritmos de inteligência coletiva, como o Particle Swarm Optimization (PSO). Tais métodos tratam cada possível solução como um ponto no espaço de busca do problema, selecionando aqueles com maior potencial para otimização do sistema.

#### 4.5.1 Algoritmos Genéticos (AG's)

Dentre os métodos heurísticos bio-Inspirados, os Algoritmos Genéticos (AG's) são uma metodologia de solução de problemas matemáticos com procedimentos que fazem alusão a processos biológicos presentes na natureza, principalmente, em conceitos de genética e evolução (HOLLAND, 1975; COLIN, 2007). Nesse processo utiliza-se o paradigma de sobrevivência do mais apto. Os indivíduos, os quais são representações abstratas da solução do problema, que se mostram melhor adequados à solução ótima (valor de função objetivo mínimo) tem maior probabilidade de reproduzirem-se e passarem suas características para gerações futuras. Ao longo do processo, à medida que ocorrem cruzamentos de indivíduos, aptos ou não, tais indivíduos estão sujeitos a mutações aleatórias (Figura 8)

Figura 8 - Algoritmo Genético.



Fonte: elaborado pelo autor.

A eficiência de resolução de cada problema específico depende da definição de diversos parâmetros. Sendo o tamanho da população, quantidade de gerações, taxa de cruzamento e probabilidade de mutação os principais parâmetros a serem calibrados antes da solução de cada problema. Não existem valores desses parâmetros reconhecidamente ótimos, apenas faixas sugeridas de trabalho (MICHALEWICZ, 1996).

Goldberg (1989) comenta sobre a robustez desse algoritmo, uma vez que se diferenciam de procedimentos tradicionais por trabalharem com codificação das variáveis e não com valores propriamente ditos, fazendo buscas dentro de uma população definida, não dependendo de informações de gradientes, e sim, apenas do valor da função objetivo.

Utilizando-se de alguns exemplos de otimização aplicados a estruturas de concreto armado, Silva (2001) aplica a otimização ao dimensionamento de pilar submetidos a flexão composta oblíqua e um pórtico plano de concreto armado de cinco pavimentos. Nesse trabalho, o AG foi ator principal, destacando-se sua qualidade para otimização estrutural. Dessa forma, elenca-se algumas vantagens tais como o funcionamento tanto com parâmetros contínuos como discretos, ou uma combinação deles, pequena convergência para mínimos locais e a não consideração da superfície de resposta, mostrando a independência da metodologia para o grau de complexidade do problema.

Em trabalho mais recente de Lima (2011) são destacados os principais estudos em que o Algoritmo Genético foi utilizado como metodologia de otimização, principalmente em relação à otimização de estruturas. Em seu trabalho a uma descrição satisfatória sobre o desenvolvimento e comportamento dos AG's de modo geral, sendo este aplicado na busca da otimização topológica e paramétrica de vigas de concreto armado, utilizando-se de variáveis discretas e contínuas, e função custo representativa da performance econômica no emprego dos materiais aço e concreto. Assim como em demais estudos, os AG's mostraram-se bastante eficientes na resolução desse tipo de problema.

#### **4.6 Otimização de Estruturas de Concreto Armado**

Por várias décadas a construção utilizando o concreto armado tem sido realizada desconsiderando parâmetros de eficiência atrelada ao seu projeto, estando atento apenas para parâmetros mínimos de resistência que devem ser respeitados por garantias de segurança estrutural. No entanto, a racionalização de material e seu uso sustentável tem se tornado alvo de pesquisas no campo da otimização, principalmente com o desenvolvimento de tecnologias cada vez mais avançadas.

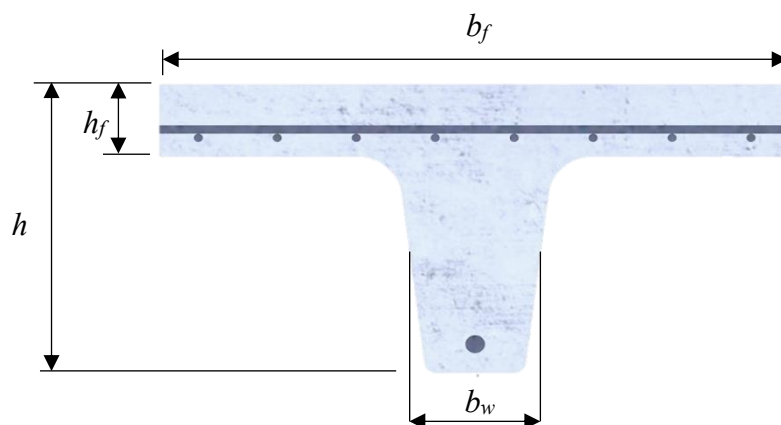
Alguns trabalhos já foram desenvolvidos com o intuito da otimização de estruturas de concreto armado, protendido e pré-moldado, nos quais se objetiva, principalmente, a otimização dos elementos estruturais, ou seja, a busca por soluções que minimizem o custo de material e execução, ao mesmo tempo que garantem significativa segurança estrutural. (ALBUQUERQUE, DEBS, MELO, 2009; SARMA e ADELI, 1998; KOUMOUSIS e ARSENI, 1998; KOSKISTO e ELLINGWOOD, 1998; CASTILHO, 2002).

#### 4.6.1 Otimização de lajes nervuradas

As lajes representam cerca de 38% do custo de um pavimento de um edifício – englobando custo de pilares, vigas e lajes – (ALBUQUERQUE e PINHEIRO, 2002), de modo que sua otimização pode ter impacto significativo no custo total da obra. Por maiores que sejam os benefícios econômicos advindos do sistema de lajes nervuradas, seu projeto deve ainda ser submetido a um processo de otimização, garantindo o máximo de eficiência desse sistema.

No projeto de lajes nervuradas deve-se definir as dimensões de espessura de mesa ( $h_f$ ), altura total da laje ( $h$ ), largura de nervuras ( $b_w$ ), distância entre eixos de nervuras ( $b_f$ ) e definir quais armaduras a utilizar nas regiões das nervuras e mesa. Por vias de simplificação da representação das variáveis, utiliza-se uma seção padrão da laje que se repete para ambas as direções de análise, ilustrada na Figura 9. Em casos de otimização de pavimentos de lajes nervuradas, outras variáveis devem ser consideradas, uma vez que há elementos de apoios das lajes, em casos onde são trabalhadas vigas.

Figura 9 - Seção típica de laje nervurada.



Fonte: elaborado pelo autor.

Em Sarma e Adeli (1998) há uma rica revisão bibliográfica de trabalhos que aplicam a otimização de custo em estruturas de concreto. Nesse estudo é ressaltada a relevância da otimização de custo em detrimento da otimização de peso da estrutura, uma vez que custos unitários de diferentes magnitudes são aplicados a cada material envolvido na construção. Para as diversas aplicações do concreto armado devem ser vinculadas funções custos coerentes com o modelo físico. Esses autores ainda sumarizaram diversas funções custos para otimização de vigas e lajes, pilares e estruturas aperticadas pré-moldadas. Segundo o estudo, a maioria dos artigos em otimização de custo são a respeito de vigas.

Sahab *et al* (2004) trabalha a otimização de lajes maciças de concreto armado de acordo com o British Code of Practice (BS8110), código que rege o procedimento de projeto de estruturas de concreto armado. A edificação a ser otimizada foi um pórtico padrão retangular com um número  $n_x$  de lajes na direção x e  $n_y$  na direção y, com um número de pavimentos  $n_f$ . O modelo adotado para análise de esforços foi o Método dos Pórticos Equivalentes, dada a regularidade da edificação.

A definição de seu modelo de otimização segue o mesmo processo descrito na seção 4.4, sendo variáveis de projeto a espessura da laje maciça e as áreas de armadura em diferentes posições no pavimento. A função objetivo contempla o custo de mão de obra e os materiais concreto, armaduras e formas para uma edificação de  $n_f$  pavimentos,  $n_c$  pilares e um quarto das fundações da edificação, devido a simetria. A função custo é expressa pela (7):

$$C = \sum_{i=1}^{n_f} C_i(x_f) + \sum_{j=1}^{n_c} C_j(x_c) + C_f(x) \quad (7)$$

Onde:

- $C$  Custo total;
- $C_i(x_f)$  Custo total do pavimento;
- $C_j(x_c)$  Custo total de pilares;
- $C_f(x)$  Custo total de fundações;
- $x_f$  Vetor de variáveis de pavimento;
- $x_c$  Vetor de variáveis de pilares;
- $x$  Vetor de variáveis da fundação.

As restrições do modelo de otimização são relativas ao atendimento dos requisitos normativos impostos pela BS8110, tais como verificações de momento e esforço cortante

atuante, áreas mínimas e máximas de armadura e outras de caráter dimensional das lajes e pilares. Dessa forma, um modelo de otimização para lajes planas foi desenvolvido. Sahab (2004) utiliza um processo de otimização em três níveis, utilizando buscas exaustivas e via algoritmos genéticos.

Resultados mostraram que a medida que a edificação tem seu porte aumentando, ou seja, aumentando-se a quantidade de pavimentos, há maior ganho por aplicação da otimização, devido ao aumento significativo do número de elementos estruturais. A permissão de variação das dimensões dos vãos das lajes, permitiu considerável ganho para a otimização.

Buscando uma forma de se aproximar da prática de projeto, Ahmadkhanlou (2004) faz uma otimização de custo de lajes maciças utilizando-se das áreas discretas para a armadura da laje. Essa realidade complementa o estudo de Sahab (2004), em que o número de barras e bitolas de armaduras não são variáveis, carecendo de uma busca exaustiva para encontro do melhor arranjo de barras.

A formulação da função objetivo contempla os custos de concreto, aço e formas. Essa forma de representação de custo difere do que Sahab (2004) utiliza em seu estudo, uma vez que o custo de mão de obra não é considerado no custo total da estrutura.

As restrições aplicáveis em seu modelo foram baseadas no ACI 318-05, código de regras práticas de projeto de estruturas de concreto armado em território americano. Tais restrições incluem verificação de flexão, cortante, condições de serviço e deslocamentos admissíveis. As restrições foram normalizadas, ou seja, representadas como uma variação percentual dos seus respectivos valores limites, para permitir melhor processo de convergência do modelo.

Uma das principais conclusões são a respeito do comportamento da função custo relativa à sensibilidade do modelo a variações nos valores das variáveis. Percebeu-se que pequenas modificações nas dimensões da barra de aço da laje impactam de maneira mais significativa que variações na espessura da laje maciça, ou seja, no aumento da camada de concreto.

Ainda focado na otimização de lajes, Galeb (2011) mostrou maior interesse na otimização de painéis de lajes nervuradas retangulares, utilizando-se das dimensões que caracterizam a seção transversal das lajes nervuradas como variáveis de projeto. São desenvolvidos dois estudos de caso para diferentes sistemas de lajes nervuradas. No primeiro são painéis de lajes nervuradas sem vigas com regiões maciças no entorno de pilares, e no segundo caso são avaliados painéis de lajes nervuradas com vigas faixas não protendidas.

As variáveis de projeto adotadas foram a altura útil da laje, largura de nervuras, espaçamento entre eixos de nervura, espessura de capa, áreas de armadura para a laje e, no caso

em que se otimiza painéis de lajes com vigas faixas não protendidas, as áreas de armadura para as vigas.

Em consonância com trabalhos de otimização citados anteriormente, a função objetivo formulada por Galeb (2011) contempla o custo de concreto, aço e formas, desprezando a parcela relativa à mão de obra.

As restrições do modelo de otimização foram baseadas nos requisitos do ACI 318-05, com limitações de espessura de capa, atendimento da área de armadura necessária para resistir aos esforços de flexão na laje e viga, acomodação das barras e garantia de cobrimento adequado e, no caso de vigas faixas, o atendimento da área de armadura necessária para resistir aos esforços de flexão.

Foram avaliadas diversas dimensões de vãos de lajes, variando de 7 a 15 metros de vão, de modo que cada variável foi avaliada quanto ao seu comportamento à medida que se aumentava o tamanho do vão. Várias conclusões foram obtidas desse estudo, dentre as quais destaca-se a afirmação de que a distância entre eixos de nervura ótima se encontra na faixa de 6,57% a 14,76% do vão da laje para o caso de laje sem vigas. Além disso, nota-se que um aumento na razão entre os custos de concreto e aço provoca uma diminuição no espaçamento entre os eixos de nervura e na área da seção transversal.

## 5 ANÁLISE ESTRUTURAL

Neste capítulo, duas abordagens da literatura para a análise de lajes discutidas, uma solução analítica para o modelo clássico de placas e outra numérica baseada em um modelo aproximado. A primeira é a solução analítica de Navier para o modelo da Teoria Clássica de Placas para lajes maciças retangulares. A segunda é o modelo aproximado de analogia de grelha ou grelha equivalente.

Embora limitada a problemas simples em termos de geometria, carregamento e condições de contorno, a solução de Navier apresenta solução explícitas de fácil implementação e, portanto, é muito atrativa para utilização em problemas de otimização. Por sua precisão, esta solução é usada na otimização como uma análise refinada e permite a avaliação da qualidade de soluções ótimas obtidas com o modelo aproximado. Para situações onde a geometria, o carregamento e as condições de contorno não são simples, poderia ser usada como referência na otimização uma solução por elementos finitos.

### 5.1.1 Solução analítica de Navier

A solução desenvolvida por Navier é representar a carga  $p(x, y)$  por uma série de Fourier dupla do tipo expresso por:

$$p(x, y) = \sum_m \sum_n p_{mn} \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \quad (8)$$

Onde:

$a$  e  $b$  Dimensões da placa;

$x, y$  Coordenadas cartesianas;

$p_{mn}$  Valor máximo do carregamento;

$m, n$  Número de retângulo em que se divide a placa, cada um com lados  $a/m$  e  $b/n$

A linha elástica, expressa por  $\omega(x, y)$ , é resolvida por uma série dupla e obtida a partir das derivadas da equação fundamental e das condições de contorno para a placa, apoiada ao longo das bordas e com rotação livre, resultando na expressão:

$$\omega(x, y) = \frac{p_{mn}}{\pi^4 D \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \quad (9)$$

Em que  $D$  é expresso por:

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (10)$$

Sendo:

$E$  Módulo de deformação longitudinal do concreto;

$h$  Espessura da laje maciça;

$\nu$  Coeficiente de Poisson.

$$h = h_{eq} = \sqrt[3]{\frac{12I}{a_1}} \quad (11)$$

Sendo:

$I$  Momento de inércia à flexão da seção T;

$h_{eq}$  Espessura da laje maciça equivalente; (Figura 10)

$a_1$  Distância entre eixos de nervura

Os valores de  $p_{mn}$  são dados por:

$$p_{mn} = \frac{4}{a \cdot b} \int_0^b \int_0^a p(x, y) \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \cdot dx \cdot dy \quad (12)$$

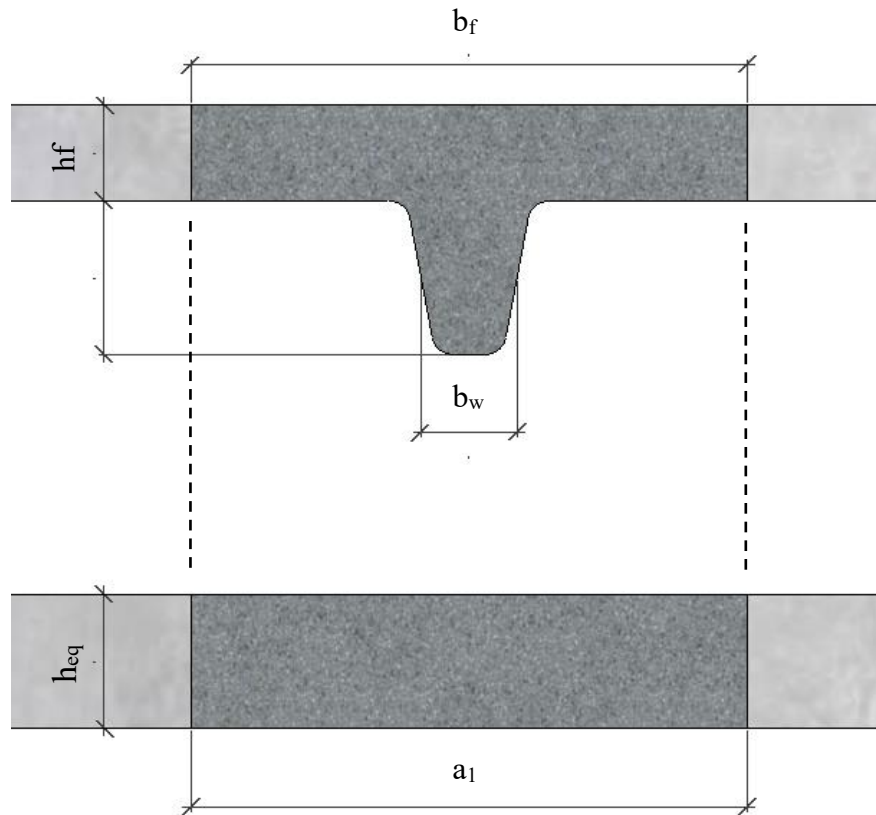
Com  $m$  e  $n$  ímpares (1,3,5...), pois valores pares de  $m$  e  $n$  levam a  $p_{mn} = 0$ , e com  $p(x, y) = \bar{p}$  = carga uniformemente distribuída,  $p_{mn}$  torna-se:

$$p_{mn} = \frac{16 \cdot \bar{p}}{\pi^2 \cdot m \cdot n} \quad (13)$$

Superpondo os efeitos, e colocando  $p_{mn}$  na expressão da linha elástica, tem-se, finalmente, a função  $w(x, y)$  para carga uniformemente distribuída:



Figura 10 - Equivalência de inércia à flexão entre laje nervurada e maciça.



Fonte: elaborado pelo autor.

$$\omega = \frac{16 \cdot \bar{p}}{\pi^2 \cdot D} \sum_m \sum_n \frac{\text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}}{m \cdot n \cdot \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \quad (14)$$

Os momentos  $m_x$  e  $m_y$ , por faixa de comprimento unitário, nas direções x e y (direções de colocação da armadura) são expressos por:

$$m_x = \frac{16 \cdot \bar{p}}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{\left( \frac{m^2}{a^2} + v \cdot \frac{n^2}{b^2} \right)}{m \cdot n \cdot \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot x}{b} \quad (15)$$

$$m_x = \frac{16 \cdot \bar{p}}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{\left( v \cdot \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}{m \cdot n \cdot \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot x}{b} \quad (16)$$

Os cortantes  $Q_x$  e  $Q_y$ , por faixa de comprimento unitário, nas direções  $x$  e  $y$ , são expressos por:

$$Q_x = \frac{\bar{p}}{\pi \cdot a \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)} \cos \frac{\pi \cdot x}{a} \cdot \sin \frac{\pi \cdot y}{b} \quad (17)$$

$$Q_y = \frac{\bar{p}}{\pi \cdot b \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)} \cos \frac{\pi \cdot y}{b} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{a} \quad (18)$$

### 5.1.2 Analogia de grelha

As grelhas são estruturas reticuladas planas submetidas a carregamentos perpendiculares ao seu plano. Tais estruturas são bastante utilizadas na avaliação de esforços de lajes nervuradas tendo em vista sua semelhança física e o fato de seus campos de deslocamentos serem próximos. O deslocamento de um nó da grelha representa exatamente os possíveis deslocamentos existentes em uma laje, os quais são o deslocamento transversal e as duas rotações ortogonais nas direções  $x$  e  $y$ .

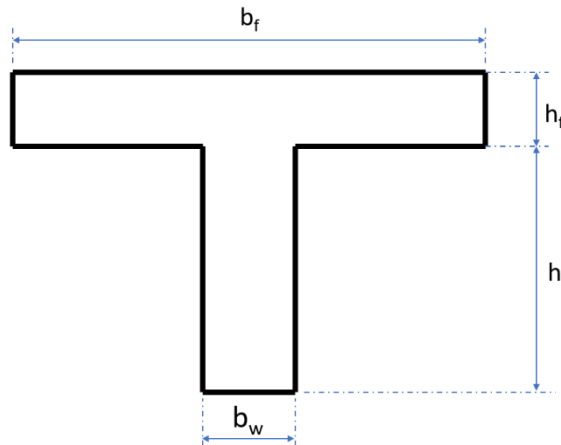
Castro (1998) destaca que a principal diferença entre a modelagem do sistema de lajes por meio de elementos de grelha e a modelagem por meio de elementos de placa está no caráter bidimensional dos elementos. Nos elementos de placa não há possibilidade de dissociar o comportamento de direções diferentes, o que não ocorre na grelha. Sendo a grelha formada por elementos lineares, estes não conseguirão representar de forma exata o comportamento da laje, uma vez que são elementos unidirecionais, mesmo com a geração de malhas mais refinadas.

A analogia de grelha em lajes deve permitir que as mesmas propriedades do sistema estrutural adotado sejam representadas pelo modelo estrutural representado pela grelha. Para que o elemento de grelha seja capaz de resistir aos esforços aplicados, deve-se atribuir aos elementos uma rigidez à flexão e uma rigidez à torção. Essas propriedades devem ser obtidas de forma a representarem da melhor forma o modelo estrutural em questão, seja uma laje maciça ou nervurada.

Para obtenção da rigidez à flexão utiliza-se a inércia da seção que o elemento possui. Ou seja, divide-se a laje em faixas horizontais e verticais de forma que cada elemento terá uma inércia à flexão proporcional à largura da faixa. Na modelagem das lajes nervuradas, é costume adotar como largura de faixa a distância entre nervuras, tendo em vista que a laje nervurada tem comportamento bastante semelhante ao da grelha, além da semelhança física.

Seguindo a premissa de Kennedy & Bali (1978) na qual para levar em consideração a contribuição da capa como parte resistente da seção, com uma contribuição majorada pelo fator  $\frac{1}{1-\nu^2}$ , a inércia à flexão da placa maciça pode ser expressa por:

Figura 11 - Seção transversal T.



Fonte: elaborado pelo autor

$$I = \frac{b_f h_f^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{b_f h_f \left(y_{cg} - \frac{h_f}{2}\right)^2}{(1-\nu^2)} + \frac{b_w h^3}{12} + b_w h \left(h_f + \frac{h}{2} - y_{cg}\right)^2 \quad (19)$$

Onde:  $y_{cg}$  é Centróide geométrico da seção T em relação à face inferior:

$$y_{cg} = \frac{b_f h \left(h_f + \frac{h}{2}\right) + \frac{b_f h_f^2}{2(1-\nu^2)}}{b_w h + \frac{b_f h_f}{(1-\nu^2)}} \quad (20)$$

O comportamento da rigidez à torção da laje é considerado de forma diferente para lajes maciças e nervuradas. Em lajes maciças há maior resistência a esse tipo de esforço, uma vez que o comportamento de placa é proeminente. No entanto, em lajes nervuradas, devido ao seu formato, é prática de projeto desprezar a rigidez à torção, ou adotar valores baixos, como 1% da rigidez relativa à seção bruta.

Seguindo o pensamento adotado por Kennedy & Bali (1979), em que a inércia à torção não é desprezada, pode-se obter a inércia à torção ( $J$ ) de uma seção não fissurada de uma laje nervurada de concreto armado aplicando-se a seção típica da laje nervurada.

$$J = J_1 + J_2 \quad (21)$$

Onde:

- $J_1$  Inércia á torção da mesa
- $J_2$  Inércia á torção da nervura

$$J_1 = \frac{1}{2} \beta h_f^3 b_f \quad (22)$$

$$J_2 = \beta h_f^3 b_f \quad (23)$$

Onde:  $\beta$  é a constante usual de torção para seções retangulares:

$$\beta = \frac{1}{3} - \left( 0,21 \frac{b_i}{h_i} \right) \left( 1 - \frac{b_i^4}{12h_i^4} \right) \quad (24)$$

Onde:

- $b_i$  Menor dimensão;
- $h_i$  Maior dimensão.

Para a análise de lajes nervuradas com nervuras nas duas direções ortogonais é necessário a modificação no cálculo de  $J_1$ , devido ao enrijecimento da laje devido à presença de nervuras ortogonais. Esse aumento é calculado a partir de uma ponderação da contribuição da inércia à torção da nervura da direção ortogonal expressa por:

$$(J_1)_{modificado} = J_1 \frac{(J_s + J_w)}{J_s} \quad (25)$$

Onde:

- $J_s$  Inércia á torção da mesa na direção ortogonal;
- $J_w$  Inércia á torção da nervura na direção ortogonal.

Dessa forma, a inércia à torção para a laje nervurada com nervuras nas duas direções ortogonais é dada por:

$$J = (J_1)_{\text{modificado}} + J_2 \quad (26)$$

Conforme Stramandinoli (2003), a contribuição de esforços de torção na análise de lajes nervuradas pode ser desprezada sem, contudo, haver prejuízo de grande valia na representação de seu comportamento. Dessa forma, a análise de lajes nervuradas não protendidas deverá ser realizada com a consideração de rigidez a torção a valores baixos, tais como 1%, devido à sua reduzida dimensão.

Para o cálculo da flecha imediata, deve-se verificar se haverá fissuração na peça na região tracionada caso o momento atuante na seção seja superior ao momento de fissuração,  $M_r$ , indicado pela ABNT NBR 6118:2014:

$$M_r = \frac{\alpha \cdot f_{ct,m} \cdot I_c}{y_{cg}} \quad (27)$$

Onde:

$\alpha$  1,2 para seções em forma de “T” ou duplo “T”;

$f_{ct,m}$  Resistência média à tração do concreto ( $f_{ct,m} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3}$ );

$I_c$  Momento de inércia da seção bruta de concreto;

$y_{cg}$  Distância do centro de gravidade à fibra mais tracionada.

Na realidade, um elemento de concreto tem seções trabalhando entre os estádios I e II, respectivamente, estado elástico e estado de fissuração. No primeiro, a seção é considerada não fissurada e no segundo, a seção sofre fissuração, desprezando-se a porção de concreto fissurada para cálculo da rigidez à flexão.

Caso a peça de concreto esteja atuando no estágio II, deve-se determinar o momento de inércia no estágio II puro, sendo necessária o cálculo de sua linha neutra a partir do equilíbrio do momento estático da seção homogeneizada.

$$x_{II} = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4 a_1 a_3}}{2 \cdot a_1} \quad (28)$$

$$a_1 = b_w/2$$

$$a_2 = h_f (b_f - b_w) + \alpha_e A_s$$

$$a_3 = -d \alpha_e A_s - \frac{h_f^2}{2} (b_f - b_w)$$

Onde:

$\alpha_e$  Relação entre os módulos de deformação longitudinal do aço.

Para o cálculo da inércia da seção no estágio II, deve ser verificada a posição da linha neutra, avaliando-se se esta encontra-se na mesa ou na alma.

Caso linha neutra localizada na mesa:

$$I_{II} = \frac{b_f x_{II}^3}{3} + \alpha_e A_s (x_{II} - d)^2 \quad (29)$$

Caso linha neutra localizada na alma:

$$I_{II} = \frac{(b_f - b_w) h_f^3}{12} + \frac{b_f x_{II}^3}{3} + (b_f - b_w) \left( x_{II} - \frac{h_f}{2} \right)^2 + \alpha_e A_s (x_{II} - d)^2 \quad (30)$$

Sabe-se que nem toda a peça está submetida a um único estágio, de forma que devesse adotar uma inércia média para o elemento estudado. O modelo de Branson admite para todo o elemento de concreto uma única inércia, que representa os trechos fissurados e não fissurados. Esse procedimento pode ser utilizado para obter o valor da inércia para cálculo da flecha imediata:

$$I_m = \left( \frac{M_r}{M_{at}} \right)^3 I_I + \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M_{at}} \right)^3 \right] I_{II} \quad (31)$$

Onde:

$M_{at}$  Momento atuante na seção mais solicitada;

$I_I$  Momento de inércia da seção bruta;

$I_{II}$  Momento de inércia da seção no estágio II puro.

### 5.1.3 Modelagem da Grelha

Para a aplicação do modelo de analogia de grelha utilizado neste trabalho, recorreu-se à validação da análise implementada, uma vez que retorne valores condizentes com a literatura. Dessa forma, será apresentada o modelo desenvolvido nesse trabalho para geração de malha e leitura de dados do software de análise estrutural. Na sequência, serão apresentados exemplos

presentes em Stramandinoli (2003) e em seguida comparando com os resultados aqui obtidos, validando a análise estrutural apresentada.

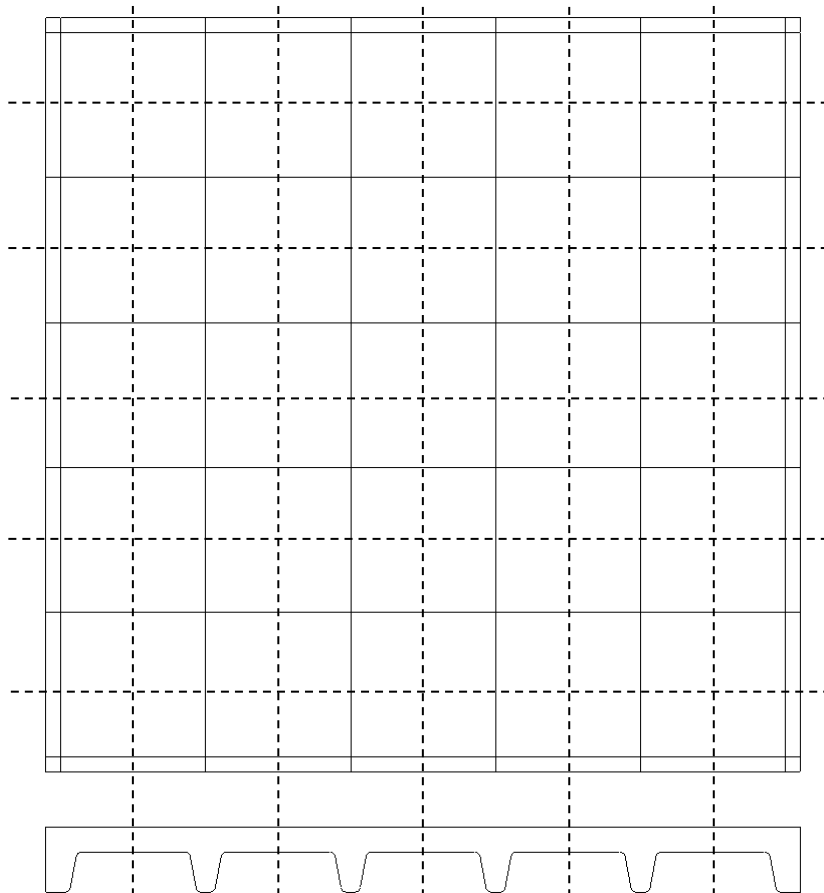
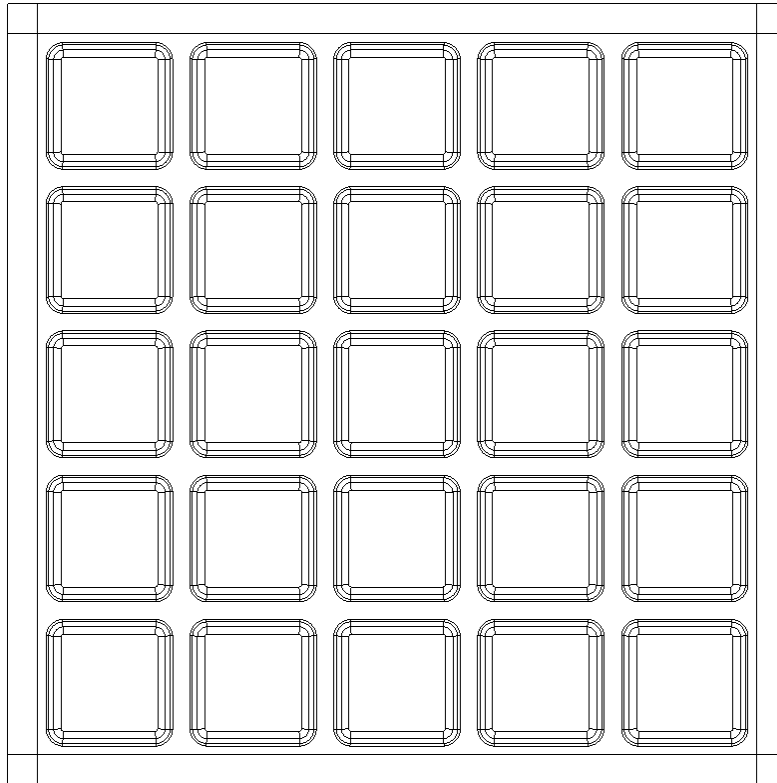
### **5.1.3.1 Geração de malha**

A geração de malha consiste na definição dos nós e elementos representativos da laje, as condições de apoio de cada nó, atribuindo-se as características de cada elemento. Tais informações são essenciais para a atribuição das propriedades de inércia à flexão e torção. Para tanto, foi desenvolvido rotina para geração automática de malha em linguagem de programação C++, no qual o tamanho do elemento representa o espaçamento real entre as nervuras. A esse tipo de modelo de representação das lajes nervuradas, em que as nervuras coincidem com os elementos da grelha, denomina-se acoplado.

Desse modo, devido o modelo de otimização necessitar analisar diversas possíveis soluções no decorrer do processo de otimização e sendo o tamanho dos elementos da malha da grelha uma variável do problema de otimização da laje nervurada, tornou-se necessária a criação de rotina de programação que atualizasse continuamente a dimensão dos elementos. No entanto, o custo de geração de malha não onera de forma significativa a análise como um todo. A principal dificuldade é a comunicação entre os softwares de otimização e análise, sendo necessária a geração de arquivos para o intercâmbio de informações entre os programas.

Como apresentada na Figura 12, os nós e elementos da grelha são dispostos de forma aos eixos das nervuras coincidirem com os respectivos elementos de barra. Foram adotadas duas tipologias de seção transversal, sendo uma representando a forma T para elementos localizados em regiões centrais e forma L para elementos localizados próximos ao bordo, tornando o modelo mais representativo.

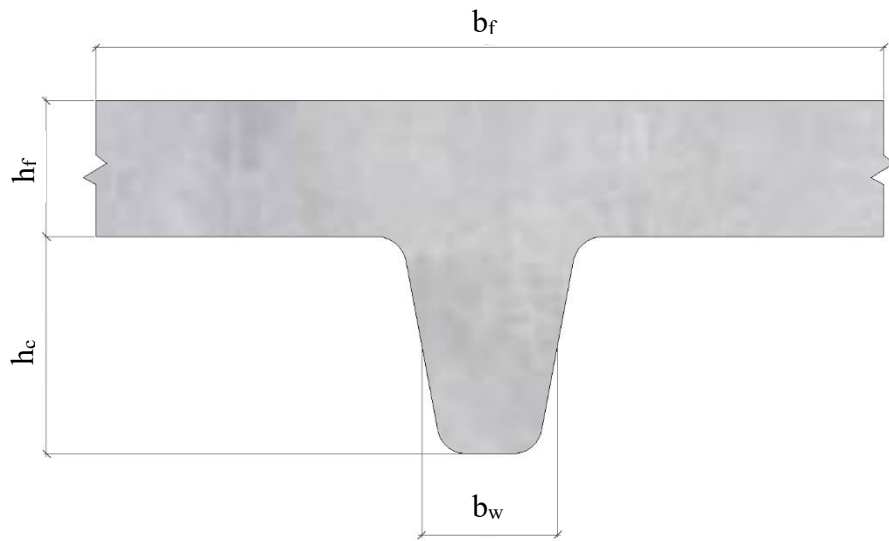
Figura 12 - Malha representativa para laje nervurada.



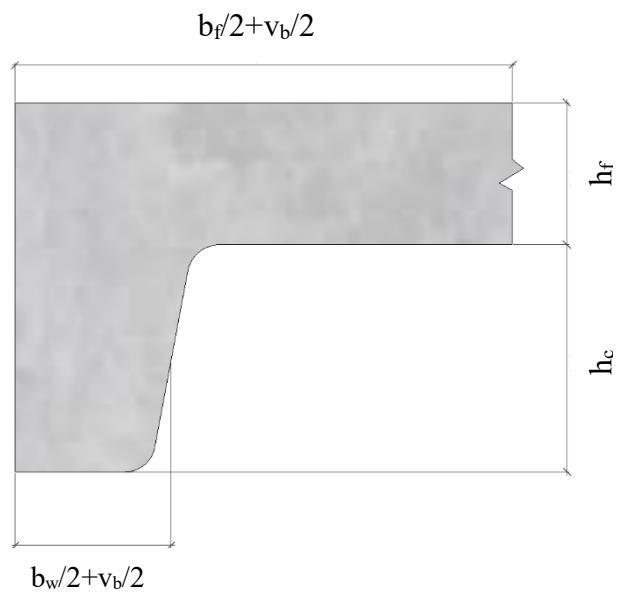
Fonte: elaborado pelo autor.



- Seção T:



- Seção L:



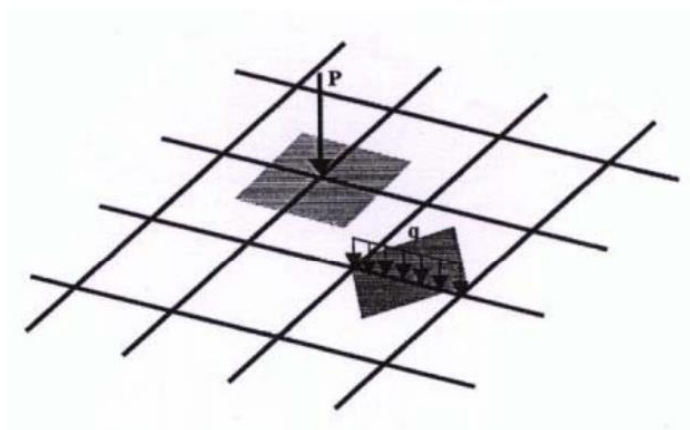
Propriedades	Símbolo
Largura da viga de bordo	$v_b$
Largura de nervura	$b_w$
Altura do caixote	$h_c$
Altura da mesa	$h_f$
Entre eixos de nervura	$b_f$
Inércia à flexão	(19)
Inércia à torção	(26)

(Fonte: elaborado pelo autor)

### 5.1.3.2 Carregamento

Todas as cargas são consideradas distribuídas uniformemente no pavimento da laje na direção perpendicular ao plano da grelha. As cargas atuantes na grelha foram obtidas pelas áreas de influência dos nós. Neste trabalho foi adotada a utilização de cargas pontuais em nós da grelha. (Figura 13)

Figura 13 - Carregamentos.



Fonte: (STRAMANDINOLI, 2003)

### 5.1.3.3 Implementação computacional

A análise por analogia de grelha é realizada no software FAST (Finite Analysis System Tool), o qual utiliza solução numérica pelo método dos elementos finitos. Tal programa é de código aberto em linguagem C++ com a filosofia de programação orientada ao objeto. Sua estrutura é compreendida por classes, onde se pode definir diversos tipos de elementos, carregamentos e seções.

No presente trabalho, foi utilizado o elemento de pórtico 3D para obtenção de esforços e deslocamentos da grelha. Contudo, a seção desejada para aplicação nesse trabalho, como descrita no item 5.1.3.1, não estava presente na estrutura padrão do programa. Dessa forma, para cálculo das inércias à flexão e torção propostas por Kennedy & Bali (1979), foi criada uma nova seção na qual seriam obtidas as inércias corretas para aplicação na grelha.

## 6 OTIMIZAÇÃO

Modelos de otimização estrutural vem a tempos sendo desenvolvidos com o objetivo de buscar soluções de performances cada vez melhores, seja no quesito custo ou peso das estruturas. No entanto, um grande entrave no desenvolvimento de tais modelos é a forma de representação das estruturas quanto a obtenção de esforços e deslocamentos. Como citado em seções anteriores, diversos modelos de análise estrutural podem ser aplicados, contudo, devem ser observados as limitações e benefícios de cada representação.

No cenário de otimização de lajes nervuradas, podem ser desenvolvidas duas linhas de pesquisas em relação à otimização estrutural, sendo uma via soluções analíticas de modelos de equações diferenciais de placa, com diversas limitações na representação da geometria, carregamentos e condições de apoio, e outra com aplicação de soluções numéricas. Como exemplos cita-se a Teoria Clássica de Placas e o modelo de analogia de grelha, respectivamente.

Em geral, devido aos processos de otimização demandarem um considerável tempo de execução, nos quais diversas análises estruturais são realizadas, é intuitivo a aplicação de métodos de solução analíticos, uma vez que se obtêm expressões explícitas para cálculo de esforços. Contudo, uma avaliação mais criteriosa deve ser realizada no que corresponde ao poder de representação de tais soluções, dadas as limitações de aplicações de solução analíticas para demais casos de carregamento, geometria e condições de apoio.

Com base na literatura, um modelo de otimização de custo para lajes nervuradas foi desenvolvido para avaliação do comportamento de diferentes modelos análise estrutural na obtenção de soluções ótimas. A partir da implementação computacional do modelo de otimização, definindo-se variáveis de projeto, restrições e função objetivo, foi possível utilizar-se de diferentes modelos de análise estrutural comparando-se as soluções obtidas por cada otimização e o comportamento das restrições.

Neste capítulo ainda será discutida a forma de implementação do modelo de otimização no software BIOS, o qual possui algoritmos evolutivos já implementados, tais como o AG e PSO. Por fim, será apresentada como é realizada a interação entre os softwares de análise estrutural e otimização que possibilitou a aplicação do modelo de analogia de grelha.

## 6.1 Modelo de otimização

Neste trabalho desenvolveu-se uma otimização de custo de produção, custo esse que engloba os materiais componentes da estrutura e o valor da mão de obra envolvida, dispensando-se o custo de aluguel de forma.

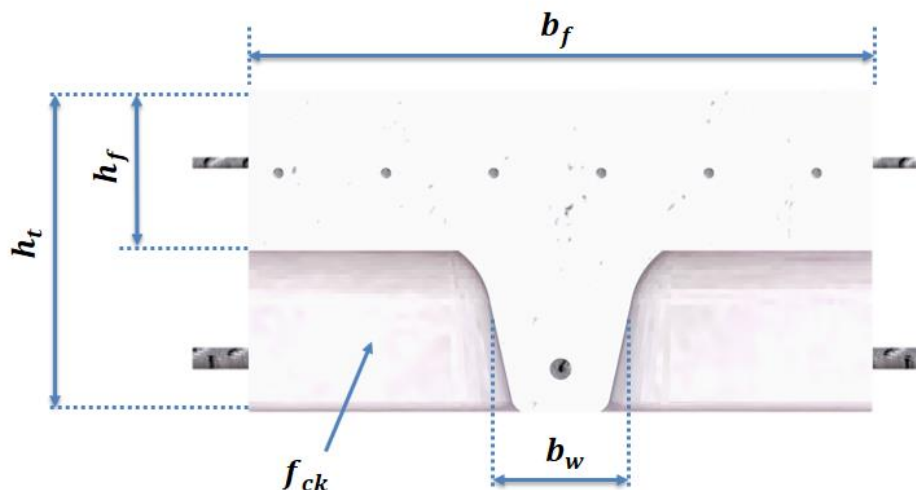
Para a representação da laje nervurada, utilizou-se das características geométricas de sua seção transversal em forma de T, além de variáveis discretas de bitolas de armaduras longitudinais e de mesa. Variável em relação ao material concreto foi também implementada, dado que o custo de concreto depende de sua resistência à compressão.

Por fim, as restrições da otimização são baseadas nas prescrições da ABNT NBR 6118:2014 a qual rege o processo de projeto de estruturas de concreto, assim como da aplicação dos requisitos da ABNT NBR 15575:2013. Foram assistidos requisitos relativos às dimensões mínimas e Estados Limites de Serviço e Último.

### 6.1.1 Variáveis de Projeto

As variáveis de projeto foram divididas em três conjuntos. No primeiro conjunto (Figura 14) estão as variáveis relacionadas às dimensões da seção típica da laje nervurada, sendo: distância entre faces de nervuras ( $b_f$ ), espessura de capa ( $h_f$ ), altura total da laje ( $h_t$ ) e largura de nervura ( $b_w$ ). O segundo conjunto de variáveis contempla a resistência característica à compressão do concreto ( $f_{ck}$ ).

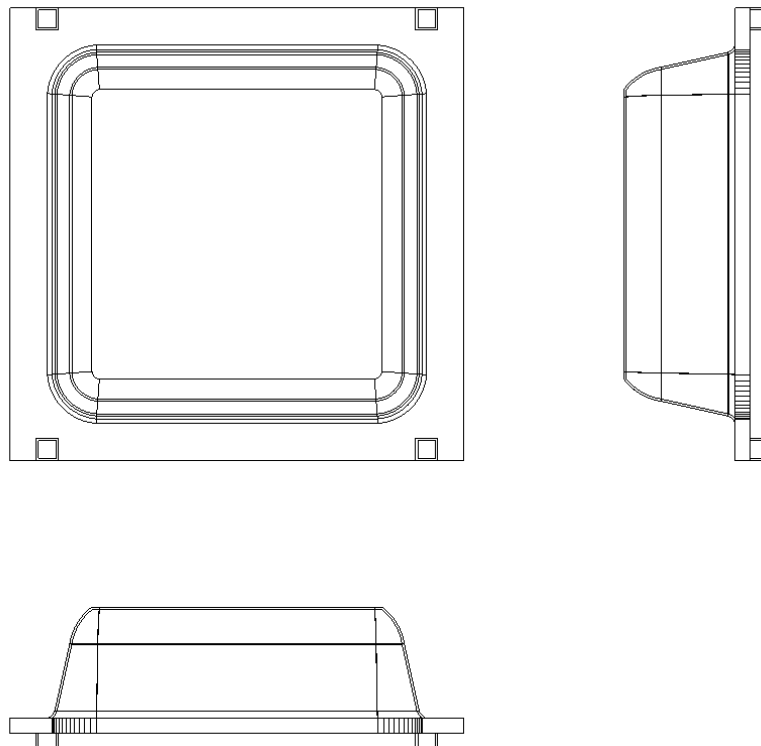
Figura 14 - Conjunto I e II



Fonte: elaborado pelo autor.

Por se tratar de caixotes quadrados, não foi necessária a adoção de variáveis de projeto para representar as duas direções da laje. Vale ressaltar que essas variáveis são compatíveis com a otimização do caixote, uma vez que o formato da laje nervurada advém diretamente do formato do caixote de polipropileno (Figura 15).

Figura 15 - Dimensões caixote.

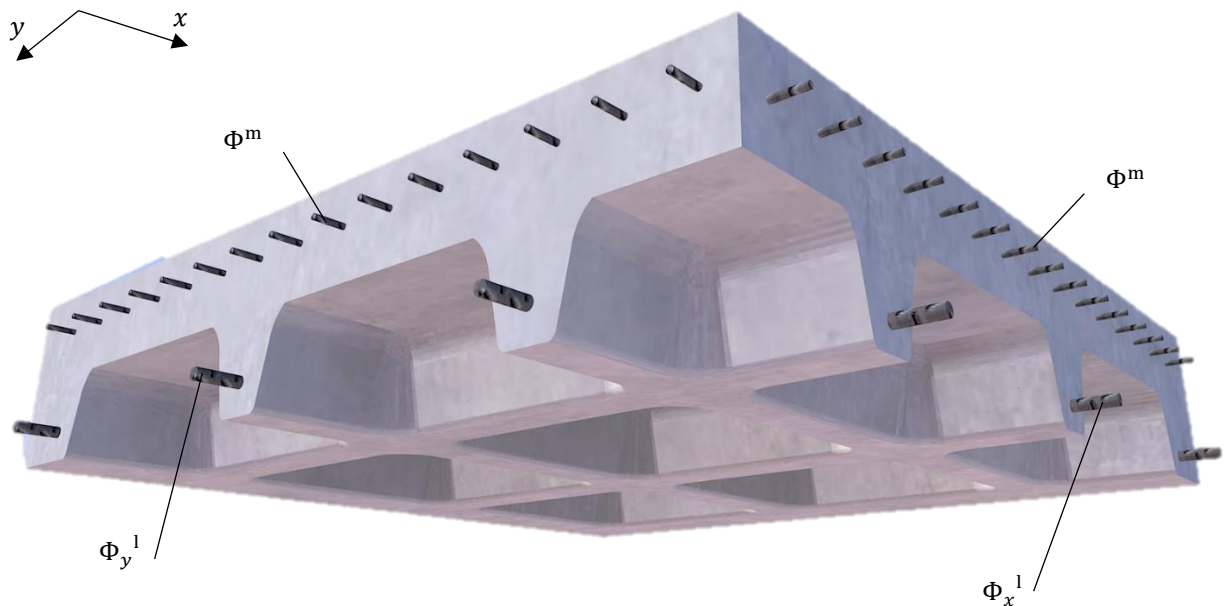


Fonte: elaborado pelo autor.

O terceiro conjunto de variáveis representa a escolha de bitolas para armadura longitudinal e armadura de mesa (distribuição). As armaduras longitudinais ( $\Phi_x^l$  e  $\Phi_y^l$ ) são responsáveis por resistir aos momentos positivos da laje. As armaduras de distribuição ( $\Phi_x^m$  e  $\Phi_y^m$ ) são aplicadas para resistir aos momentos positivos na capa da laje e combater fissuração e distribuição de cargas concentradas.

A Figura 16 ilustra o que as variáveis relativas às armaduras representam em uma seção típica de laje nervurada. Nesta ilustração está apresentada uma porção de uma laje nervurada com 2 cortes ortogonais normais à seção transversal. Destaca-se o posicionamento das armaduras ao longo das nervuras e das mesas com suas respectivas direções.

Figura 16 - Conjunto III



Fonte: elaborado pelo autor.

As variáveis de projeto relativas às armaduras são de natureza discreta, ou seja, os diâmetros nominais (bitolas) existem em apenas algumas dimensões padronizadas disponibilizadas por fabricantes. Dessa forma, as áreas de armaduras para cálculo de volume possuem da mesma maneira valores discretos que dependem diretamente das bitolas. A Tabela 1 resume as variáveis de projeto da laje nervurada:

Tabela 1 - Variáveis de Projeto

Grupos	Variável	Símbolo
1	Distância entre eixos de nervura	$b_f$
	Largura de nervura	$b_w$
	Altura total da laje	$h_t$
	Espessura da capa	$h_f$
2	Resistência característica do concreto	$f_{ck}$
3	Bitola Armadura Positiva (Momentos no eixo x)	$\Phi_x^l$
	Bitola Armadura Positiva (Momentos no eixo y)	$\Phi_y^l$
	Bitola Armadura da Mesa (Tela Soldada)	$\Phi^m$

(Fonte: elaborado pelo autor)

### 6.1.2 Função objetivo

Neste trabalho estuda-se soluções ótimas de lajes nervuradas obtidas por otimização de custo, ou seja, busca pela solução que traz a melhor performance econômica para a construção de lajes nervuradas. Dessa forma, a função objetivo pode ser expressão pela soma dos custos de material e mão de obra:

$$f_{objetivo} = f_{custo} = \frac{(C_{aço} + C_{concreto} + C_{mão\ de\ obra})}{l_x \cdot l_y} \quad (32)$$

Onde:

$C_{concreto}$	Custo de concreto [R\$]
$C_{aço}$	Custo de aço [R\$]
$C_{mão\ de\ obra}$	Custo de mão de obra [R\$]
$l_x$	Vão na direção x [m]
$l_y$	Vão na direção y [m]

A composição do custo de aço contempla toda a área de armadura no interior da massa de concreto da laje nervurada, sendo as armaduras longitudinais nas direções x ( $A_{s,x}^l$ ) e y ( $A_{s,y}^l$ ), armaduras de mesa nas direções x ( $A_{s,x}^m$ ) e y ( $A_{s,y}^m$ ). As áreas de armadura são de distribuição discreta, uma vez que as variáveis de projeto são as bitolas comerciais.

$$C_{aço} = (V_{aço}^l + V_{aço}^m) \cdot \rho \cdot C_{aço}^u \quad (33)$$

onde:

$V_{aço}^l$	Volume de armadura longitudinal [m <sup>3</sup> ]
$V_{aço}^m$	Volume de armadura de distribuição [m <sup>3</sup> ]
$\rho$	Massa específica de aço [kg/m <sup>3</sup> ]
$C_{aço}^u$	Custo unitário de aço [R\$/kg]

$$V_{aço}^l = (A_{s,x}^l \cdot L_x^l + A_{s,y}^l \cdot L_y^l) \quad (34)$$

onde:

$L_x^l$	Comprimento total de armadura longitudinal na direção x [m]
$L_y^l$	Comprimento total de armadura longitudinal na direção y [m]

$$V_{aço}^m = (A_{s,x}^m \cdot L_x^m + A_{s,y}^m \cdot L_y^m) \quad (35)$$

onde:

$L_x^m$  Comprimento total de armadura longitudinal na direção x [m]

$L_y^m$  Comprimento total de armadura longitudinal na direção y [m]

O custo de concreto é composto por todo o volume da massa de concreto na laje nervurada, descontando-se o volume ocupado pelos caixotes ( $V_{caixotes}$ ) e volume da armadura ( $V_{aço}^l + V_{aço}^m$ ). Ou seja, o volume líquido de concreto ( $V_{concr}^l$ ) é obtido pelo cálculo do volume de uma laje maciça com altura da laje nervurada ( $V_{concreto}^b$ ), descontando-se os espaços vazios das armaduras e forma plástica.

$$C_{concreto} = (V_{concr}^l) \cdot C_{concr}^u \quad (36)$$

$$V_{concr}^l = (V_{concr}^b) - [(V_{aço}^l + V_{aço}^m) + V_{caixotes}] \quad (37)$$

onde:

$V_{concr}^b$  Volume de concreto bruto [m<sup>3</sup>]

$V_{caixotes}$  Volume de vazios de caixotes [m<sup>3</sup>]

$C_{concr}^u$  Custo unitário de concreto [R\$/m<sup>3</sup>]

$$V_{concr}^b = l_x \cdot l_y \cdot h_t \quad (38)$$

onde:

$l_i$  Dimensão do vão da laje nervurada [m]  $i = \{x \text{ e } y\}$

$$V_{caixotes} = n_{caixotes} \cdot [(b_f - b_w)^2 \cdot (h_t - h_f)] \quad (39)$$

onde:

$n_{caixotes}$  Número de caixotes na laje

O custo de mão de obra é calculado com base no volume de concreto líquido utilizado.

$$C_{mao \ de \ obra} = (V_{concr}^l) \cdot C_{mao \ de \ obra}^u \quad (40)$$

onde:

$C_{mao \ de \ obra}^u$  Custo unitário de mão de obra [R\$/m<sup>3</sup>]



### 6.1.3 Restrições

As restrições são condicionantes específicas do problema as quais devem ser obedecidas para que se alcance uma solução na qual se está garantido determinado grau de segurança e durabilidade. Desse modo, as restrições aplicadas nesse estudo são representativas dos requisitos mínimos e máximos que devem ser respeitados para que se garanta segurança estrutural do sistema em estudo:

- l) Restrições de dimensão ou forma - (Grupo I): relacionadas aos parâmetros dimensionais da seção da laje de concreto e restrições relativas à taxa e tamanho de armaduras;
- m) Restrições de verificação de Estado Limite Último (ELU) - (Grupo II): relacionado ao colapso ou a qualquer outra forma de ruína estrutural que determine paralisação, no todo ou em parte, do uso da estrutura e;
- n) Restrições de verificação de Estado Limite de Serviço (ELS) - (Grupo III): relacionado à durabilidade, à aparência, ao conforto do usuário e à boa utilização funcional das estruturas.

#### 6.1.3.1 Grupo I

Neste grupo estão presentes as restrições prescritas normativas da ABNT NBR 6118:2014 relativas às dimensões máximas das lajes nervuradas, tais como espaçamento máximo entre nervuras, cobertura mínimo para a laje, largura mínima de nervura, taxas máximas de armadura tanto em capa quanto na nervura.

- o) Distância entre eixos de nervura: segundo o item 13.2.4.2 da ABNT NBR 6118:2014 para projeto de lajes nervuradas, devem ser obedecidas as seguintes condições:
  - a. Para lajes com espaçamento entre eixos de nervuras entre 65 cm e 110 cm, exige-se a verificação da flexão da mesa, e as nervuras devem ser verificadas ao cisalhamento como vigas; permite-se essa verificação como lajes se o espaçamento entre eixos de nervuras for até 90 cm e a largura média das nervuras for maior que 12 cm;

Tendo em vista tais critérios, restringiu-se o modelo de otimização para que a distância máxima entre nervuras não ultrapassasse o limite de 90 cm, de modo a evitar a verificação das nervuras como vigas como descrito no item a, e assim,

evitar a necessidade de se aplicar armadura transversal na nervura. A expressão relativa a tal restrição é expressa por:

$$g_1 = \frac{(b_f)}{0,90} - 1 \leq 0 \quad (41)$$

- p) Cobrimentos mínimos: garante-se uma distância mínima necessária para atendimento de critérios de durabilidade e segurança contra incêndio. Os valores mínimos variam de acordo com a classe de agressividade ambiental da edificação, podendo ser encontrados em tabela 7.2 da ABNT NBR 6118:2014. Além do quesito durabilidade garantida pela adoção dos cobrimentos mínimos, a ABNT NBR 15200:2012 impõe limites mínimos para os cobrimentos de diversos elementos estruturais, dentre eles a laje nervurada. Para atendimento dessa norma, devem ser respeitadas espessuras de mesa ( $h$ ) e distância entre o eixo da armadura longitudinal e a face do concreto exposta ao fogo ( $c_1$ ).

Tabela 2 - Dimensões mínimas de espessura de laje e  $c_1$ .

TRRF min	Nervuras Combinações de $b_{\min}/c_1$ <sup>1)</sup> mm/mm			Capa* $h/c_1$ <sup>2)</sup> mm/mm
	1	2	3	
30	80/10			80/10
60	100/25	120/15	190/10	80/10
90	120/35	160/25	250/15	100/15
120	160/45	190/40	300/30	120/20

<sup>1)</sup>  $b_{\min}$  corresponde à largura mínima da nervura.  
<sup>2)</sup>  $h$  corresponde à altura da laje.  
\* Dimensões mínimas para garantir a função corta-fogo.

Fonte: ABNT NBR 15200:2012.

Dessa forma, são expressas as restrições de cobrimento mínimo e  $c_1$ :

$$g_2 = \frac{c_1}{\left[c + \frac{\phi^l}{2}\right]} - 1 \leq 0 \quad (42)$$

Onde:

$c$  Cobrimento adotado [m]

$c_1$  Distância entre o eixo da armadura longitudinal e a face do concreto exposta ao fogo. [m]

- q) Espessura de mesa: sua espessura, quando não existirem tubulações horizontais embutidas, deve ser maior ou igual a 1/15 da distância entre as faces das nervuras ( $b_f$ ) e não menor que 4 cm. Assim como para o cobrimento mínimo, a ABNT NBR 15200:2012 impôs novas dimensões mínimas para a espessura de mesa (capa), devendo ser respeitando os disponíveis.

$$g_3 = \frac{\left[ (b_f - b_w) / 15 \right]}{h_f} - 1 \leq 0 \quad (43)$$

$$h_f = \{h_{f,min}; \dots; h_{f,i-1}; h_{f,i}\} \quad (44)$$

onde:

$h_{f,min}$  Espessura mínima permitida pelo espaço de busca

$h_{f,i}$  Maior valor possível para a variável em questão.

- r) Largura de nervura: sendo a largura de nervura ( $b_w$ ) uma variável de projeto, a restrição é implementada no próprio espaço de busca, devendo ser respeitadas as exigências da ABNT 15200:2012.

$$b_w = \{b_{w,min}; \dots; b_{w,i-1}; b_{w,i}\} \quad (45)$$

onde:

$b_{w,min}$  Cobrimento mínimo permitido pelo espaço de busca

$b_{w,i}$  Último valor possível para a variável em questão.

- s) Taxa máxima de armadura: a soma das áreas de armaduras longitudinais e de distribuição ( $A_{s,x}^l + A_{s,y}^l$ ) e ( $A_{s,x}^m + A_{s,y}^m$ ) não pode ter valor maior que 4% da área de concreto, calculada na região fora da zona de emendas.

$$g_4 = \frac{[(A_{s,x}^l + A_{s,y}^l) + (A_{s,x}^m + A_{s,y}^m)]}{0,04 \cdot A_c} - 1 \leq 0 \quad (46)$$

Onde:

$A_c$  Área de concreto da seção transversal típica.

- t) Taxa mínima de armadura de tração: deve ser determinada pelo dimensionamento da seção a um momento fletor mínimo, respeitada a taxa mínima absoluta de 0,15% da área da seção transversal de concreto. Alternativamente, a armadura mínima pode ser considerada atendida se forem respeitadas as taxas mínimas de armadura.

Tabela 3 - Taxas mínimas de armadura de flexão para vigas.

Forma da seção	Valores de $\rho_{\min}^a (A_{s,\min}/A_c)$														
	%														
	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
Retangular	0,150	0,150	0,150	0,164	0,179	0,194	0,208	0,211	0,219	0,226	0,233	0,239	0,245	0,251	0,256

<sup>a</sup> Os valores de  $\rho_{\min}$  estabelecidos nesta Tabela pressupõem o uso de aço CA-50,  $d/h = 0,8$  e  $\gamma_c = 1,4$  e  $\gamma_s = 1,15$ . Caso esses fatores sejam diferentes,  $\rho_{\min}$  deve ser recalculado.

Fonte: ABNT NBR 6118:2014

$$g_5 = \frac{0,0015 \cdot A_c}{(A_{s,x}^l + A_{s,y}^l)} - 1 \leq 0 \quad (47)$$

- u) Ductilidade da armadura longitudinal: para proporcionar o adequado comportamento dútil em vigas e lajes, a posição relativa da linha neutra no ELU deve obedecer ao limite de 0,45 para concretos com  $f_{ck}$  até 50 MPa, conforme item 14.6.4.3 da ABNT NBR 6118:2014:

$$g_6 = \frac{\beta_x}{\beta_{x,lim}} - 1 \leq 0 \quad (48)$$

onde:

$\beta_{x,lim}$  Altura relativa da linha neutra limite.

### 6.1.3.2 Grupo II

As restrições de Estado Limite Último avaliadas são relacionadas à verificação de esforços máximos suportados pela estrutura, sendo avaliadas as resistências à flexão e cisalhamento da laje nervurada, não tratando a nervura como viga.

- v) Restrição quanto à resistência à Flexão: o momento solicitante de cálculo ( $M_{sd}$ ) deve ser inferior ao momento resistente de cálculo ( $M_{rd}$ ). Essa consideração garante a segurança da laje quanto à ruína por flexão.

$$g_8 = \frac{M_{sd}}{M_{rd}} - 1 \leq 0 \quad (49)$$

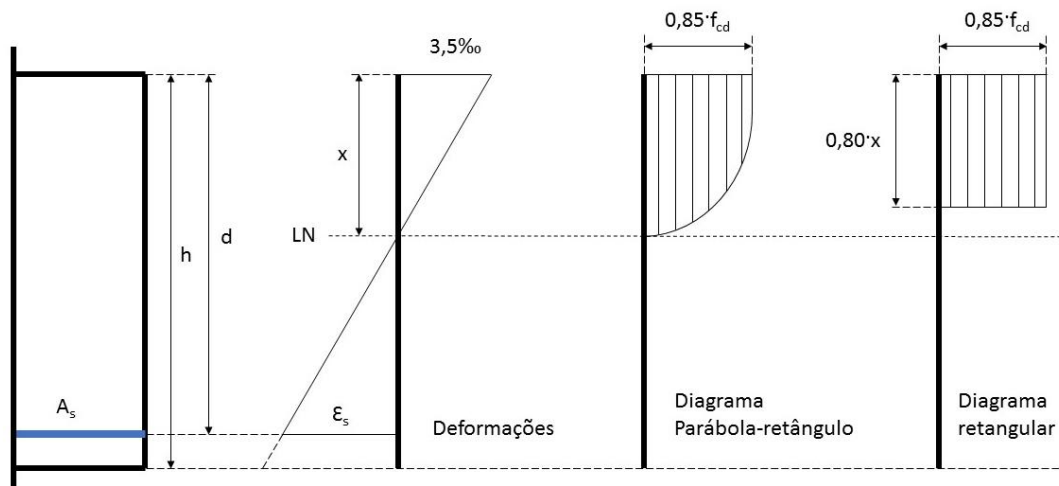
onde:

$M_{sd}$  Momento solicitante para combinação última normal;

$M_{rd}$  Expresso pelas Equações (52) e (53)

O cálculo do momento resistente é realizado para uma seção típica da laje nervurada para atendimento do Estado Limite Último, sendo realizado pelo equilíbrio de forças de tração e compressão que compõem o binário resistente concreto-armadura. Para o cálculo de tensões no concreto, atuantes na parcela comprimida da seção, admite-se que o diagrama de tensões tem distribuição retangular em substituição à distribuição parábola-retângulo. (Figura 17)

Figura 17 - Diagrama de distribuição de tensões



Fonte: elaborado pelo autor.

A depender da posição da linha neutra, o dimensionamento da seção pode ser feito considerando ou não a contribuição da alma para resistência. Quando a posição da linha neutra está posicionada na mesa, a seção é denominada de falso T por apresentar o mesmo comportamento de uma seção retangular. Na outra situação, com a linha neutra cruzando a nervura, deve-se levar em consideração a parcela resistida por essa região da seção.

Do equilíbrio de forças, obtêm-se as expressões de posição da linha neutra para cada situação, verificando-se a ocorrência ou não de linha neutra na alma.

Caso linha neutra localizada na mesa:

$$x = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{b_f \cdot 0,80 \cdot 0,85 \cdot f_{cd}} \quad (50)$$

onde:

$A_s$  Armadura longitudinal tracionada;

$f_{yd}$  Tensão de escoamento da armadura longitudinal;

$f_{cd}$  Resistência de cálculo do concreto.

Caso linha neutra localizada na alma:

$$x = \frac{A_s \cdot f_{yd} - 0,85 \cdot f_{cd} \cdot h_f \cdot (b_f - b_w)}{b_f \cdot 0,80 \cdot 0,85 \cdot f_{cd}} \quad (51)$$

Para o cálculo do momento resistente aplicam-se, respectivamente, as expressões relativas à posição da linha neutra na seção, utilizando-se os valores das linhas neutras para cada situação.

Caso da linha neutra localizada na mesa:

$$M_{rd} = b_f \cdot 0,8 \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \cdot (d - 0,4 x) \quad (52)$$

Caso da linha neutra localizada na mesa:

$$M_{rd} = b_w \cdot 0,8 \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \cdot (d - 0,4 x) + (b_f - b_w) \cdot h_f \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \cdot (d - 0,5 h_f) \quad (53)$$

onde:

$d$  Altura útil da seção

w) Resistência da laje ao cisalhamento: a verificação ao cisalhamento das nervuras segue o mesmo processo para lajes sem armadura de cisalhamento, desde que a distância entre eixos das nervuras seja igual ou inferior a 65 cm. No entanto, a norma permite que para situações em que a nervura possua largura igual ou superior a 12 cm e comprimento de mesa não superior a 90 cm, a verificação de lajes também seja aplicada, dispensando a análise da nervura como viga. A

restrição será satisfeita se a força cisalhante resistente de cálculo ( $V_{rd1}$ ) superar ou igualar-se à força cisalhante de cálculo ( $V_{sd}$ ).

$$g_8 = \frac{V_{sd}}{V_{rd1}} - 1 \leq 0 \quad (54)$$

Onde:

$V_{sd}$  Cortante solicitante para combinação última normal;  
 $V_{rd1}$  Expresso pela Equação (55).

A força cortante resistente de cálculo é dada por:

$$V_{rd1} = [\tau_{Rd} \cdot k \cdot (1,2 + 40 \cdot \rho_1)] \cdot b_w \cdot d \quad (55)$$

onde:

$$\tau_{Rd} = 0,25 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} / \gamma_c$$

$$\rho_1 = \frac{A_s}{b_w \cdot d}, \text{ não maior que } 0,02$$

$$k = |1,60 - d|, \text{ não menor que } 1, \text{ com } d \text{ em metros;}$$

$\tau_{Rd}$  é a tensão resistente de cálculo do concreto ao cisalhamento.

### 6.1.3.3 Grupo III

As restrições de Estado Limite de Serviço conforme item 10.4 da ABNT NBR 6118:2014, são relacionados à durabilidade das estruturas, à aparência, ao conforto do usuário e à boa utilização funcional das mesmas, seja em relação aos usuários, às máquinas ou aos equipamentos utilizados. Elas são Formação de fissuras (ELS-F), Abertura das fissuras (ELS-W), Deformação excessiva (ELS-DEF) e Vibrações excessivas (ELS-VE). Dentre esses, apenas uma será avaliada pelo modelo de otimização, a qual corresponde à deformação excessiva (ELS-DEF). Estado em que as deformações atingem os limites estabelecidos para utilização normal da estrutura.

- x) Restrição relativa à Flecha: a flecha calculada, considerando a configuração inicial de aplicação de carga e a parcela diferida, deve ser inferior ou igual à razão entre o menor vão e um dado fator a depender do rigor impetrado à edificação:

$$g_{11} = \frac{\omega_{\infty}}{\omega_{lim}} - 1 \leq 0 \quad (56)$$

Onde:

- $\omega_{\infty}$  Flecha diferida no tempo;  
 $\omega_{lim}$  Flecha limite da edificação.

A flecha diferida pode ser calculada conforme item 14.3.2.1.2 da ABNT NBR 6118:2014 na qual se considera a atuação de cargas de longa duração em função da fluência:

$$\omega_{\infty} = \omega_i \cdot (1 + \alpha_f) \quad (57)$$

Onde:

- $\omega_i$  Flecha imediata;  
 $\alpha_f$  Fator de fluência.

$$\alpha_{def} = \frac{\Delta \xi}{1 + 50 \rho'} \quad (58)$$

Onde:

$$\rho' = A_s' / A_c$$

$\xi$  é um coeficiente função do tempo, que pode ser obtido diretamente na ou ser calculado pelas expressões.

$$\Delta \xi = \xi(t) - \xi(t_0)$$

$$\xi(t) = 0,68 \cdot (0,996^t) \cdot t^{0,32} \text{ para } t \leq 70 \text{ meses}$$

$$\xi(t) = 2 \text{ para } t > 70 \text{ meses}$$

Tabela 4 - Valores do coeficiente  $\xi$  em função do tempo.

<b>Tempo (t)</b> meses	0	0,5	1	2	3	4	5	10	20	40	$\geq 70$
<b>Coeficiente</b> $\xi(t)$	0	0,54	0,68	0,84	0,95	1,04	1,12	1,36	1,64	1,89	2

Fonte: ABNT NBR 6118:2014

$t$  o tempo, em meses, quando se deseja o valor da flecha diferida;

$t_0$  a idade, em meses, relativa à data de aplicação da carga de longa duração.



Ressalta-se que a combinação de cargas para cálculo da flecha deferida considera a combinação quase permanente de cargas. A essa designação atribuem-se apenas 30% da carga acidental atuante na laje, uma vez que haverá momentos de ociosidade da estrutura.

## **6.2 Implementação computacional**

O software BIOS (Biologically Inspired Optimization System) é um software que está sendo desenvolvido no Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) em linguagem C++ (ROCHA *et al.*, 2013; BARROSO *et al.*, 2014). Nele é possível implementar o problema de otimização, apresentando-se as variáveis de projeto, a função objetivo e as restrições, utilizando-se de técnicas de otimização baseada em algoritmos bio-inspirados.

Neste trabalho foi utilizado o AG como metodologia de otimização, devido ao bom desempenho deste tipo de metodologia na solução de problemas de variáveis discretas. Como já mencionados em seções anteriores, os AG's são reconhecidamente aplicados para otimização de estruturas de concreto armado.

O software possui a filosofia de programação orientada ao objeto, de forma que para a implementação do modelo de otimização, deve-se criar uma nova classe específica para o problema. Nesta classe são apresentadas as variáveis de projeto, assim como o espaço de busca de cada variável, o vetor de restrições e a função objetivo.

Além da classe do problema foram criadas, por motivo de organização, classes específicas para a otimização de lajes nervuradas de concreto armado. Tais classes são relacionadas aos modelos de análise, para obtenção de esforços e deslocamentos, para definição das propriedades dos materiais, aço e concreto, e definição das propriedades do objeto laje nervurada.

Dessa forma, a implementação criada permite a otimização de mais de uma laje nervurada isolada ao mesmo tempo. O que permitiria, por exemplo, a otimização de um pavimento de lajes nervuradas isoladas, em que é necessário o detalhamento e obtenção de esforços e deslocamentos de cada laje em separado. No entanto, o escopo deste trabalho não objetiva a otimização do pavimento, mesmo sendo possível sua realização.

## 7 APLICAÇÕES

Para avaliar o impacto da análise estrutural sobre o comportamento das soluções ótimas, serão considerados vários casos de lajes nervuradas, tanto de lajes quadradas quanto de retangulares. Inicialmente será dado enfoque aos modelos de análise discutidos em seções anteriores, sendo o modelo da Teoria Clássica de Placas e o modelo de Analogia de Grelha, discutindo as principais diferenças na obtenção de esforços e deslocamentos para lajes maciças e nervuradas. Em uma segunda etapa, serão estudados os efeitos desses diferentes modelos no modelo de otimização, a partir da avaliação das variáveis de projeto, funções objetivo e restrições.

### 7.1 Modelos de análise

O estudo dos modelos de análise pode-se dividir em três etapas. Na primeira etapa, a partir de exemplos da literatura, será validado o modelo de analogia de grelha utilizado neste trabalho, utilizando-se um exemplo de laje quadrada e um de laje retangular. Na segunda etapa, com o modelo de analogia de grelha já validado, faz-se a análise de lajes maciças quadradas e retangulares, utilizando-se a solução analítica de Navier para a equação de Placas, para a qual é exata, e solução por analogia de grelha adotando-se diferentes rigidezes à torção. Na terceira etapa, são analisadas lajes nervuradas quadradas e retangulares, utilizando-se o modelo de laje equivalente por solução analítica de Navier, e a solução por analogia de grelha para diversas rigidezes à torção.

#### 7.1.1 Validação do modelo de grelha

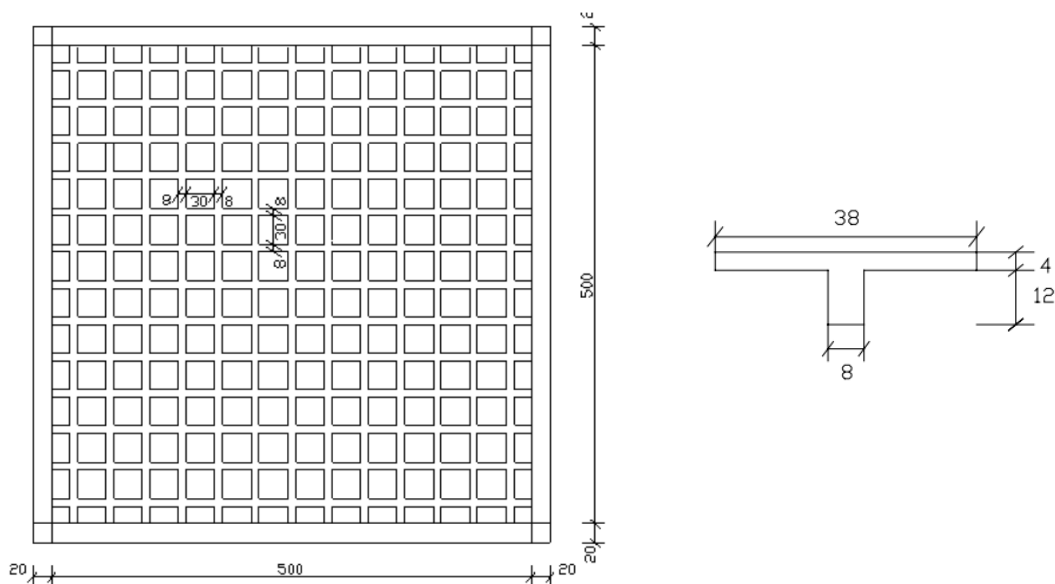
Para validar a geração de malha e o modelo de análise, foram escolhidos dois exemplos utilizados por Stramandinoli (2003). No primeiro, trata-se de uma laje quadrada de 5,20 por 5,20 m e, um segundo, uma laje retangular de 4,00 por 8,00 m. A rigidez à torção para ambos os exemplos foi mantida em 1% da rigidez total da seção calculada por Kennedy & Bali (1979), assim como feito nos exemplos originais.

### 7.1.1.1 Exemplo 1

Laje quadrada de 5,20 por 5,20 metros com nervuras nas duas direções (Figura 18). Neste exemplo será adotada distância entre eixos de nervuras de 30 cm, com largura de nervura de 8 cm. A capa possui espessura de 4 cm e altura de nervura de 12 cm. O concreto utilizado deverá ter resistência à compressão aos 28 dias de 20 MPa. As ações atuantes são de peso próprio, revestimento e sobrecarga de utilização:

- Peso próprio: 2,13 kN/m<sup>2</sup>;
- Revestimento: 1,00 kN/m<sup>2</sup>;
- Sobrecarga de utilização: 2,00 kN/m<sup>2</sup>;
- Total de ações: 5,13 kN/m<sup>2</sup>.

Figura 18 - Exemplo 1.



Fonte: (STRAMANDINOLI, 2003)

Os resultados de comparação entre os modelos de Stramandinoli (2003) e desenvolvido neste trabalho são apresentadas na Tabela 5, sendo apresentada as diferenças percentuais entre os esforços e deslocamentos obtidos.

Tabela 5 - Exemplo 1.

	Momento ( $M_x = M_y$ ) (kNm/m)	Flecha (cm)
Stramandinoli (2003)	10,68	1,06
Modelo desenvolvido	10,64	1,05
Diferença (%)	-0,330	-1,027

(Fonte: elaborado pelo autor)

A diferença entre as análises manteve-se próximo de 1% para flecha e 0,5% para os momentos fletores, o que significa uma boa fidelidade do modelo frente à literatura estudada. Um dos prováveis motivos para tal diferença deve-se à consideração de uma inércia um pouco diferente nos bordos da laje, onde se admitiu a consideração da viga de bordo de mesma altura da laje como parte resistente, diferente de Stramandinoli (2003).

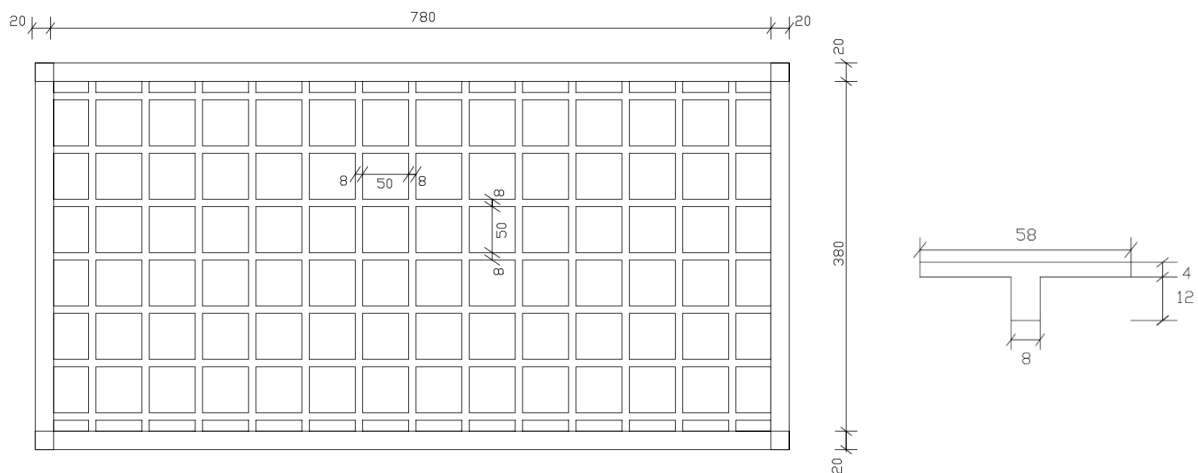
### 7.1.1.2 Exemplo 2

Laje quadrada de 4,00 por 8,00 metros com nervuras nas duas direções (Figura 19). Neste exemplo será adotada distância entre eixos de nervuras de 58 cm, com largura de nervura de 8 cm. A capa possui espessura de 4 cm e altura de nervura de 12 cm. O concreto utilizado deverá ter resistência à compressão aos 28 dias de 20 MPa. As ações atuantes são de peso próprio, revestimento e sobrecarga de utilização:

- Peso próprio: 1,77 kN/m<sup>2</sup>;
- Revestimento: 1,00 kN/m<sup>2</sup>;
- Sobrecarga de utilização: 2,00 kN/m<sup>2</sup>;
- Total de ações: 4,77 kN/m<sup>2</sup>.

Os resultados de comparação entre os modelos de Stramandinoli (2003) e desenvolvido neste trabalho são apresentadas na Tabela 6, sendo apresentada as diferenças percentuais entre os esforços e deslocamentos obtidos.

Figura 19 - Exemplo 2.



Fonte: (STRAMANDINOLI, 2003)

Tabela 6 - Exemplo 2.

	(M <sub>x</sub> ) (kNm/m)	(M <sub>y</sub> ) (kNm/m)	Flecha (cm)
Stramandinoli (2003)	10,827	3,017	0,83
Modelo desenvolvido	11,275	3,233	0,86
Diferença (%)	+4,137	+7,159	+3,614

(Fonte: elaborado pelo autor)

Os resultados apresentados mostraram uma variação mais significativa na obtenção de esforços e flecha, sendo observado um aumento percentual de momentos fletores de 4% e 7%, respectivamente, para os momentos nas direções mais e menos solicitadas. A flecha apresentou um aumento percentual próximo de 3%. Admitindo divergências entre os modelos de representação da malha, considerou-se que os resultados são válidos.

Avaliando os resultados, percebe-se que para lajes quadradas, os modelos aqui desenvolvidos se comportaram de modo semelhante à literatura escolhida, contudo quando aplicado para modelos de lajes retangulares percebeu-se uma maior divergência, principalmente na obtenção de esforços. Contudo, por não se conhecer a fundo o modelo de representação de Stramandinoli (2003), pode-se afirmar que variações de até 10% podem ser consideradas aceitáveis para aplicação neste trabalho. Dessa forma, admite-se como válido o modelo desenvolvido.

### 7.1.2 Laje Maciça

Para que seja possível observar o comportamento da técnica de modelagem por analogia de grelha em comparação com a solução analítica de Navier na situação em que esta solução é exata, considera-se alguns casos particulares de lajes quadradas e retangulares.

Foram escolhidas uma laje quadrada, de 5,00 por 5,00 m, e uma laje retangular de 5,00 por 10,00 m, simulando a prática de projeto de sua utilização, recomendada para vãos não superiores a 5 m. Aplica-se uma espessura de 10 cm em todos os casos, com carregamento uniformemente distribuído de 5,0 kN/m<sup>2</sup> em toda a laje, com concreto de resistência característica de 25 MPa.

Sabe-se que, devido a grelha ser constituída por elementos de barra, a representação do comportamento bidimensional das lajes fica prejudicada independente do refinamento da malha aplicada. Para corroborar essa realidade no modelo, aplica-se a análise da grelha com 100% de rigidez à torção.

Segundo o item 14.6.6.2 da ABNT NBR 6118:2014, para modelagem dos edifícios por grelha, pode-se reduzir a rigidez à torção das vigas por fissuração, utilizando-se 15% da rigidez elástica. Contudo, a prática de projeto estimula a utilização de valores ainda menores, uma vez que, em geral, lajes não são armadas para resistir a esforços de torção. Dessa forma, avalia-se, dois casos na modelagem por analogia de grelha, um considerando 15% de rigidez à torção e outro com 1%.

A Tabela 7 resume as análises realizadas:

Tabela 7 – Casos de lajes maciças analisadas.

Caso	Dimensões	Modelo de análise
1	5,00 × 5,00 m	Teoria Clássica de Placas
		Analogia de Grelha com 100% de rigidez à torção
		Analogia de Grelha com 15% de rigidez à torção
		Analogia de Grelha com 1% de rigidez à torção
2	5,00 × 10,00 m	Teoria Clássica de Placas
		Analogia de Grelha com 100% de rigidez à torção
		Analogia de Grelha com 15% de rigidez à torção
		Analogia de Grelha com 1% de rigidez à torção

(Fonte: elaborado pelo autor)

O cálculo da inércia à flexão dos elementos de barra é feito considerando-se uma faixa de largura  $b$ , a qual é dada pela soma da metade dos espaços entre os elementos vizinhos, e altura  $h$  (espessura da laje). Dessa forma, a inércia à flexão do elemento de grelha é dada por:

$$I_f = b \frac{h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \quad (59)$$

Onde:

- $b$  Largura da seção considerada;
- $h$  Espessura da laje;
- $\nu$  Poisson.

A inércia à torção no estágio I é o dobro da inércia à flexão.

Para se investigar qual a dimensão da barra da grelha deve ser empregada, foram realizadas análises com diversos tamanhos de barra. Foram utilizadas barras com 20 cm, 30 cm, 40 cm, 50 cm, 60 cm, 80 cm e 100 cm. Na definição das inércias à flexão e torção das barras, existem dois tipos de barras a considerar. Para barras que se encontram nos bordos da laje foram

discretizadas com larguras de faixa de metade do tamanho do elemento adotado, já para barras no interior da laje, foram consideradas com o tamanho integral. O carregamento foi aplicado pontualmente, com cargas proporcionais às áreas de influência de cada nó.

### 7.1.2.1 Caso 1

Inicialmente, foram obtidos os esforços e deslocamentos obtidos pela Teoria Clássica de Placas, utilizando-se a solução analítica de Navier para o correspondente tipo de carregamento. Destaca-se que, por se tratar de uma laje maciça, a solução analítica de Navier gera uma resposta exata para o modelo. O resultado é apresentado na Tabela 8:

Tabela 8 – Solução de Navier para Caso 1

	(M <sub>x</sub> = M <sub>y</sub> ) (Nm/m)	(V <sub>x</sub> = V <sub>y</sub> ) (N/m)	Flecha (cm)
Solução Exata	5565,42	7667,87	0,6058

(Fonte: elaborado pelo autor)

Utilizando-se de 100% de inércia à torção das barras da grelha é feita a análise para diferentes tamanhos de barra. A Tabela 9 apresenta o resultado das análises.

Tabela 9 – Grelha com 100% de rigidez à torção para o Caso 1

Tamanho do elemento (cm)	(M <sub>x</sub> = M <sub>y</sub> ) (Nm/m)	(V <sub>x</sub> = V <sub>y</sub> ) (N/m)	Flecha (cm)
20	4961,61	8532,15	0,641
30	4941,16	8800,73	0,632
40	4932,20	9072,42	0,623
50	4994,76	9250,92	0,620
60	4941,57	9624,48	0,605
80	4970,41	10184,18	0,588
100	5821,56	10575,50	0,685

(Fonte: elaborado pelo autor)

Os resultados mostram que mesmo para malhas mais refinadas, ou seja, de menor tamanho de elementos, a resposta obtida para esforços não converge para a solução exata. Observa-se que em algum ponto do refinamento de malha, o deslocamento calculado por analogia de grelha é semelhante ao obtido pela solução exata, no entanto, esse fato não permite afirmar que tal tamanho de elemento é ideal para o seu cálculo, sendo uma casualidade.

A avaliação do refinamento leva à conclusão que não há necessidade de um refinamento excessivo para obtenção de esforços e/ou deslocamentos, uma vez que menores tamanhos de elemento demandam mais esforço numérico. No entanto, elementos muito grandes, como de 100 cm, não devem ser utilizados, uma vez que geram esforços e deslocamentos bastante destoantes das outras malhas avaliadas.

Dessa forma, adota-se o elemento de 50 cm para análise da grelha para a consideração de 100%, 15% e 1% de rigidez à torção. A Tabela 10 apresenta os resultados das análises.

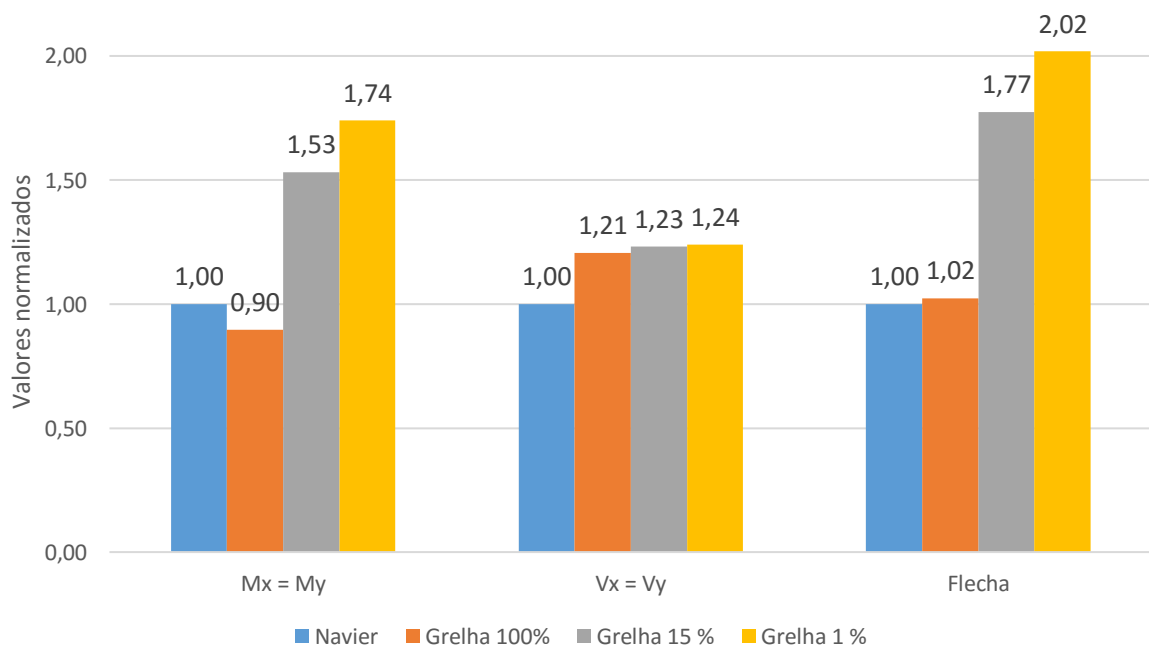
Tabela 10 – Grelha com 100%, 15% e 1% de rigidez à torção para o Caso 1

Tamanho do elemento (cm)	Rigidez à torção (%)	(Mx = My) (Nm/m)	(Vx = Vy) (N/m)	Flecha (cm)
50	100	4994,76	9250,92	0,620
	15	8527,16	9450,56	1,074
	1	9680,98	9505,40	1,222

(Fonte: elaborado pelo autor)

A Figura 20 apresenta graficamente as diferenças percentuais entre os modelos de análise para esforços e deslocamentos. Os valores estão normalizados segundo os valores obtidos pela solução analítica de Navier.

Figura 20 - Esforços e deslocamento normalizados para o Caso 1



Fonte: elaborado pelo autor.



Esses resultados mostram o impacto que a consideração da torção tem sobre o modelo de análise. Observa-se que para a consideração de 15% de rigidez à torção da laje há um aumento de 53% para momentos, 23% para cortante e 77% para flecha em relação a solução analítica de Navier. Esse aumento torna-se ainda mais significativo quando da consideração de 1% de rigidez. Esse comportamento do modelo deve-se à redistribuição de esforços na laje.

### 7.1.2.2 Caso 2

A metodologia aplicada no Caso 1 foi replicada neste estudo de caso, onde são avaliadas o comportamento das lajes retangulares. Da mesma forma, analisa-se a laje pela Teoria Clássica de Placas, onde a solução analítica obtida é exata para o modelo. O resultado é apresentado na Tabela 11:

Tabela 11 – Solução de Navier para Caso 2

	(Mx) (Nm/m)	(My) (Nm/m)	(Vx) (N/m)	(Vy) (N/m)	Flecha (cm)
Solução Exata	12556,35	4721,182	10970,51	7609,81	1,511

(Fonte: elaborado pelo autor)

Aplicando-se ainda elementos de 50 cm, analisa-se a laje considerando 100%, 15% e 1% de rigidez à torção. A Tabela 12 apresenta os resultados das análises.

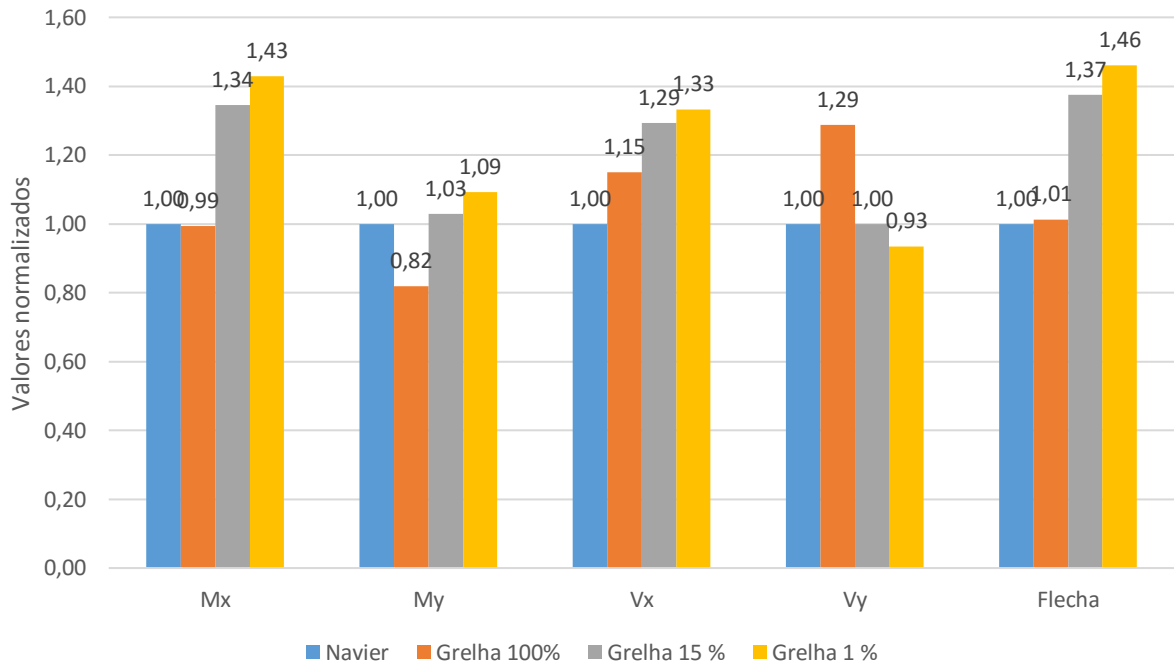
Tabela 12 – Grelha com 100%, 15% e 1% de rigidez à torção para o Caso 2

Tamanho do elemento (cm)	Rigidez à torção (%)	(Mx) (Nm/m)	(My) (Nm/m)	(Vx) (N/m)	(Vy) (N/m)	Flecha (cm)
50	100	12485,10	3869,08	12612,56	9791,56	1,530
	15	16886,48	4855,56	14192,26	7600,04	2,077
	1	17935,78	5154,62	14625,06	7109,50	2,207

(Fonte: elaborado pelo autor)

A Figura 21 apresenta graficamente as diferenças percentuais entre os modelos de análise para esforços e deslocamentos. Os valores estão normalizados segundo os valores obtidos pela solução analítica de Navier.

Figura 21 - Esforços e deslocamento normalizados para o Caso 2.



Fonte: elaborado pelo autor.

Semelhante ao que ocorreu no Caso 1, houve um impacto considerável nos esforços e deslocamentos pela menor rigidez à torção. Nota-se que por se tratar de uma laje retangular, a direção mais solicitada, correspondente aos esforços de  $M_x$  e  $V_x$ , respectivamente, momento e cortante, foi mais afetada. Para a direção menos solicitada houve pouca interferência. Na situação de 15% de rigidez à torção houve um aumento de 34% para o momento, 29% para cortante e 37% para deslocamento. Para a situação de 1% de rigidez houve aumento ainda mais significativo.

Esses resultados parecem indicar que à medida que a laje se aproxima daquelas com relação entre o vão maior e o vão menor superior a 2, a resposta pelo modelo de analogia de grelha e o modelo de Teoria Clássica de Placas torna-se cada vez mais próxima. Isso é plausível, pois o comportamento passa a ser quase o de viga, sendo, portanto, bem menos significativa o comportamento bidimensional da placa.

### 7.1.3 Laje Nervurada

As lajes nervuradas bidirecionais, aquelas em que há nervuras nas duas direções ortogonais, podem ser calculadas para efeito de obtenção de esforços solicitantes como lajes

maciças, como afirmado pela ABNT NBR 6118:2014 no item 14.7.7. No entanto, uma vez que se trabalha com o modelo de laje maciça equivalente para cálculo de esforços da laje nervurada, a solução de Navier para a Teoria Clássica deixa de representar a solução exata. Dessa forma, para o cálculo do deslocamento da laje deve ser adotada metodologia mais adequada, como o modelo de analogia de grelha.

Foram escolhidas uma laje quadrada, de 7,00 por 7,00 m, e uma laje retangular de 7,00 por 14,00 m, simulando a prática de projeto de sua utilização, recomendada para vãos superiores a 6 m. Foi utilizada uma distância entre eixos de nervuras de 80 cm, espessura de capa de 10 cm, altura de nervura de 10 cm e largura de nervura de 12 cm. O carregamento foi mantido igual ao do Caso 1, uniformemente distribuído de 5,0 kN/m<sup>2</sup> em toda a laje, com concreto com resistência característica de 25 MPa.

Diferente do que acontece com as lajes maciças, onde os esforços de torção são prioritariamente resistidos pela própria laje sem necessidade de armadura para combatê-los, as lajes nervuradas apresentam uma considerável perda de resistência a esforços de torção devido à fissuração das nervuras. Dessa forma, a modelagem da laje nervurada por analogia de grelha dá maior representatividade ao modelo para fins de cálculo de deslocamento.

Nesse contexto, a consideração da redução da rigidez à torção das barras da grelha tende a apresentar melhor comportamento da laje nervurada para deslocamentos. Desse modo, são analisados casos em que há consideração de 15% e 1% de rigidez à torção.

A Tabela 13 resume as análises realizadas:

Tabela 13 – Casos de laje nervuradas analisadas

Caso	Dimensões	Modelo de análise
3	7,00 × 7,00 m	Laje Maciça Equivalente (Teoria Clássica de Placas)
		Analogia de Grelha com 100% de rigidez à torção
		Analogia de Grelha com 15% de rigidez à torção
		Analogia de Grelha com 1% de rigidez à torção
4	7,00 × 14,00 m	Laje Maciça Equivalente (Teoria Clássica de Placas)
		Analogia de Grelha com 100% de rigidez à torção
		Analogia de Grelha com 15% de rigidez à torção
		Analogia de Grelha com 1% de rigidez à torção

(Fonte: elaborado pelo autor)

### 7.1.3.1 Caso 3

Inicialmente, utilizando-se do modelo da laje maciça equivalente para laje nervurada, de forma que possa se aplicar a Teoria Clássica de Placas e, conseqüentemente, a solução analítica de Navier, obtém-se os esforços e deslocamentos da laje nervurada. Ressalta-se que a solução obtida por essa metodologia não levará à solução exata para a laje nervurada, uma vez que o modelo representa apenas lajes maciças. O resultado é apresentado na Tabela 14:

Tabela 14 – Solução de Navier para Caso 3.

	(M <sub>x</sub> = M <sub>y</sub> ) (Nm/m)	(V <sub>x</sub> = V <sub>y</sub> ) (N/m)	Flecha (cm)
Solução analítica de Navier (Não exata)	10908,23	10735,02	0,857

(Fonte: elaborado pelo autor)

Para aplicação do modelo de analogia de grelha, deve-se destacar que diferente do modelo para lajes maciças, o tamanho do elemento na análise de lajes nervuradas está condicionado ao posicionamento das nervuras, o que permite melhor representação da estrutura real. Dessa forma, o tamanho do elemento foi de 80 cm.

Foram analisadas as situações da grelha considerando 100%, 15% e 1% de rigidez à torção. A Tabela 15 apresenta os resultados das análises.

Tabela 15 – Grelha com 100%, 15% e 1% de rigidez à torção para o Caso 3.

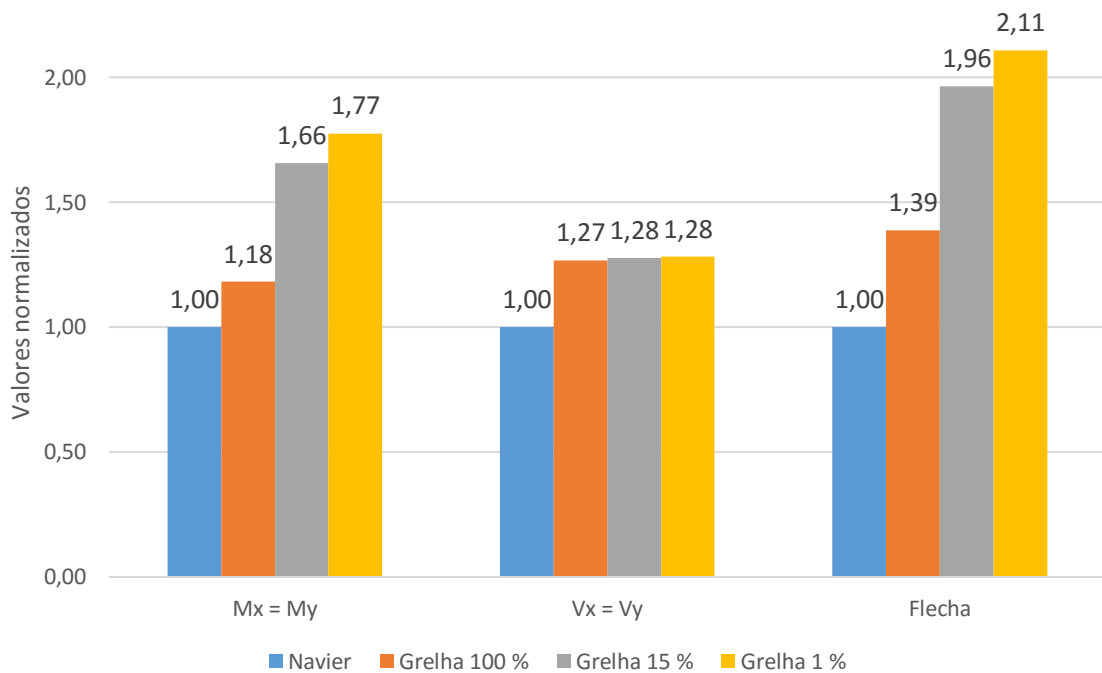
Tamanho do elemento (cm)	Rigidez à torção (%)	(M <sub>x</sub> = M <sub>y</sub> ) (Nm/m)	(V <sub>x</sub> = V <sub>y</sub> ) (N/m)	Flecha (cm)
80	100	12893,50	13604,63	1,189
	15	17806,00	13258,02	1,408
	1	18801,00	13292,70	1,488

(Fonte: elaborado pelo autor)

Observa-se que para as situações em que há 15% de rigidez à torção e 1%, os esforços e deslocamentos são bastante próximos, mostrando que pode haver pouca diferença no dimensionamento e verificação de flecha de um projeto real se aplicadas quaisquer dessas duas rigidezes à torção.

A Figura 22 apresenta graficamente as diferenças percentuais entre os modelos de análise para esforços e deslocamentos. Os valores estão normalizados segundo os valores obtidos pela solução analítica de Navier.

Figura 22 - Esforços e deslocamento normalizados para o Caso 3.



Fonte: elaborado pelo autor.

Mostra-se com os esses resultados, que apesar de ABNT NBR 6118:2014 permitir o cálculo de lajes nervuradas para fins de obtenção de esforços como lajes maciças, há uma grande diferença entre os esforços de flexão dos modelos, com aumentos de 66% e 77% em relação ao modelo de laje equivalente, respectivamente para os modelos considerando 15% e 1% de rigidez à torção. Sabe-se que o deslocamento obtido pelo modelo de analogia de grelha é mais representativo, uma vez que as nervuras participam pouco para a resistência à torção. Isso mostra a solução obtida pela solução analítica está bastante defasada em relação ao modelo de analogia de grelha.

#### 7.1.3.2 Caso 4

A metodologia aplicada no Caso 3 foi replicada neste estudo de caso, onde são avaliadas o comportamento das lajes retangulares. Da mesma forma, analisa-se a laje pela

Teoria Clássica de Placas, onde a solução analítica obtida não representa a solução exata para o modelo de laje nervurada. O resultado é apresentado na Tabela 16:

Tabela 16 – Solução de Navier para Caso 4

	(Mx) (Nm/m)	(My) (Nm/m)	(Vx) (N/m)	(Vy) (N/m)	Flecha (cm)
Solução analítica de Navier (Não exata)	24610,45	9253,52	15358,72	10653,74	2,138

(Fonte: elaborado pelo autor)

Analisa-se a laje considerando 100%, 15% e 1% de rigidez á torção. A Tabela 17 apresenta os resultados das análises.

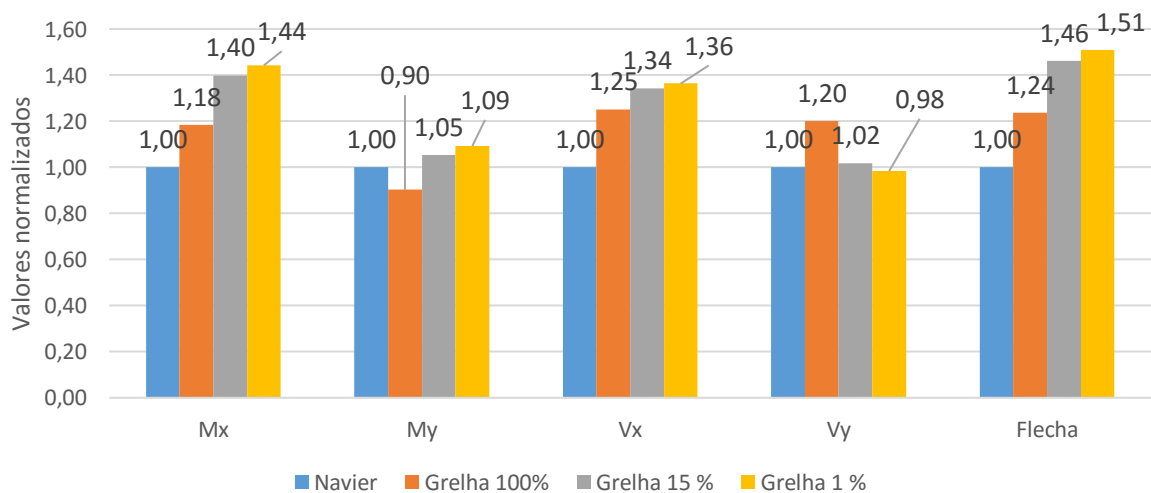
Tabela 17 – Grelha com 100%, 15% e 1% de rigidez à torção para o Caso 4

Tamanho do elemento (cm)	Rigidez à torção (%)	(Mx) (Nm/m)	(My) (Nm/m)	(Vx) (N/m)	(Vy) (N/m)	Flecha (cm)
80	100	29145,13	8351,61	19217,38	12792,38	2,643
	15	34432,38	9760,28	20629,25	10843,10	3,127
	1	35500,00	10106,48	20936,88	10476,84	3,224

(Fonte: elaborado pelo autor)

A Figura 23 apresenta graficamente as diferenças percentuais entre os modelos de análise para esforços e deslocamentos. Os valores estão normalizados segundo os valores obtidos pela solução analítica de Navier.

Figura 23 - Esforços e deslocamento normalizados para o Caso 4.



Fonte: elaborado pelo autor.

Os resultados permitem visualizar que para lajes nervuradas, a consideração de 15% ou 1% de rigidez à torção leva a resultados bastante próximos, mostrando que a adoção de quaisquer desses dois modelos chegar-se-á a um dimensionamento e deslocamento com pouca divergência. A aplicação de 100% de rigidez à torção levou a resultados ainda superiores, com aumento de 18% para momento na direção mais solicitada e aumento de 24% para a flecha. Desse modo, é costume de a prática de projeto utilizar 1% de rigidez, uma vez que se está a favor da segurança.

## 7.2 Aplicação da otimização

Para avaliar o impacto nas soluções ótimas dos diferentes modelos de análise no modelo de otimização, foram escolhidos exemplos de lajes nervuradas quadradas e retangulares. São avaliadas as diferenças nas variáveis de projeto, funções objetivo e restrições ativas. Serão utilizados dois modelos de análise nesse estudo, o modelo de laje maciça equivalente aplicando a solução analítica de Navier e o modelo de analogia de grelha.

Muitas das considerações adotadas pela solução analítica de Navier são melhor adequadas para lajes maciças, e uma vez que o foco deste trabalho seja o estudo de lajes nervuradas, tais considerações podem gerar aproximações não condizentes com o comportamento real da estrutura. Desse modo, o modelo de analogia de grelha apresenta-se como um método aproximado para a solução de lajes nervuradas devido sua liberdade de representação da estrutura.

Foram escolhidos casos de lajes quadradas e retangulares para otimização. Para as lajes quadradas foram adotadas as dimensões de 7,00 por 7,00 m e 8,00 por 8,00 m. Para as lajes retangulares foram adotadas as dimensões de 7,00 por 14,00 m e 8,00 por 16,00 m.

Para aplicação da otimização em tais lajes, foram utilizados dois modelos de análise, sendo o modelo de laje maciça equivalente utilizando a Teoria Clássica de Placas e o modelo de analogia de grelha. Assim para cada caso será avaliado o comportamento das variáveis, funções objetivo e restrições ativas, observando as principais diferenças entre os métodos.

Na seção 7.1.3 foi discutido o impacto da consideração da rigidez à torção das nervuradas de forma reduzida, onde foi possível observar que a adoção de 15% ou 1% de rigidez à torção geram soluções bastante próximas. Dessa forma, todos os exemplos otimizados pelo modelo de analogia de grelha utilizaram o valor de 1% de rigidez à torção, seguindo recomendação da ABNT NBR 6118:2014 e estando-se a favor da segurança.

A Tabela 18 apresenta de forma resumida os casos otimizados:

Tabela 18 – Casos de lajes nervuradas otimizados.

Caso	Dimensões	Modelo de análise
5	7,00 × 7,00 m	Laje Maciça Equivalente (TCP) Analogia de Grelha com 1 % de rigidez à torção
6	8,00 × 8,00 m	Laje Maciça Equivalente (TCP) Analogia de Grelha com 1 % de rigidez à torção
7	7,00 × 14,00 m	Laje Maciça Equivalente (TCP) Analogia de Grelha com 1 % de rigidez à torção
8	8,00 × 16,00 m	Laje Maciça Equivalente (TCP) Analogia de Grelha com 1 % de rigidez à torção

(Fonte: elaborado pelo autor)

### 7.2.1 Parâmetros do modelo de otimização

O problema de otimização possui uma série de dados previamente definidos que devem ser inseridos ao modelo computacional antes de iniciado o processo, dentre os quais citam-se: custos unitários de concreto, aço e mão de obra, tipos de carregamento e magnitudes de suas ações. Para utilização do algoritmo genético, devem ser definidos os parâmetros de tamanho de população, número de gerações, taxa de cruzamento e probabilidade de mutação.

#### 7.2.1.1 Custos

Abaixo estão dispostos os custos dos materiais e mão de obra unitários utilizados para obtenção da função custo do problema. Os valores de custo dos materiais foram extraídos do Sistema Nacional de Pesquisa de Custos e Índices da Construção Civil (SINAPI) para o estado do Ceará, referente ao mês de setembro de 2017.

- Custo unitário de concreto: dependente de sua resistência característica à compressão ( $f_{ck}$ ). Valores obtidos da tabela de insumos SINAPI (2017) (Ver Tabela 19).
- Custo unitário de aço: dependente do diâmetro nominal da barra de aço. Valores obtidos da tabela de insumos SINAPI (2017) (Ver Tabela 20).
- Custo unitário de mão de obra para laje nervurada: R\$ 610/m<sup>3</sup> de concreto (valor obtido do mercado da construção civil, disponibilizado por empresa em exercício no ramo).



Tabela 19 - Custo unitário de concreto por resistência.

Resistência à compressão ( $f_{ck}$ ) (Mpa)	Custo Unitário (R\$/m <sup>3</sup> )
20	265,47
25	275,77
30	288,01
35	330,31
40	313,69
45	402,00
50	476,77

(Fonte: SINAPI, 2017)

Tabela 20 – Custo unitário de aço por diâmetro nominal.

Diâmetro nominal (mm)	Custo Unitário (R\$/kg)
6,3	3,54
8,0	3,98
10,0	3,38
12,5	3,22
16,0	3,22
20,0	3,01
25,0	3,48

(Fonte: SINAPI, 2017)

### 7.2.1.2 Carregamentos

Foram considerados carregamentos permanentes diretos e variáveis diretos (carga acidental). Na parcela permanente, são contempladas cargas de peso próprio, paredes e revestimento. Na parcela variável, observando a ABNT NBR 6120:1980, adotou-se uma carga acidental relativa à utilização em edifícios residenciais. (Ver Tabela 21)

Tabela 21 - Carregamentos

Ações permanentes		Ações variáveis	
Carga de Peso Próprio	$P_0^1$ N/m <sup>2</sup>	Carga acidental	2000 N/m <sup>2</sup>
Carga de Parede	1000 N/m <sup>2</sup>		
Carga de Revestimento	500 N/m <sup>2</sup>		

(Fonte: elaborado pelo autor)

<sup>1</sup>  $P_0$ : A carga de peso próprio não possui valor pré-definido, uma vez que as dimensões da seção transversal são as próprias variáveis do problema de otimização, de modo que cada solução pode ter um valor diferente para peso próprio.

### 7.2.1.3 Espaço amostral de variáveis

O problema é de natureza discreta, assim cada variável pode assumir apenas alguns valores especificados. Para tanto, deve-se impor o limite inferior, o limite superior e o passo. Constrói-se, portanto, o espaço amostral de cada variável.

$$x_{i+1} = x_{inicial} + i \cdot \delta \quad i = \{0,1,2, \dots, j\} \quad (60)$$

Onde:

$x_{inicial}$  Limite inferior da variável

$\delta$  Passo adotado

Assim o espaço amostral para cada variável é apresentado Tabela 22:

Tabela 22 - Espaço amostral de variáveis.

Variável [unidade]	Limite Superior	Limite Inferior	Passo ( $\delta$ )
$b_f$ [m]	0,90	0,65	0,01
$b_w$ [m]	0,125	0,120	0,005
$h_t$ [m]	0,40	0	0,01
$h_f$ [m]	0,15	0,10	0,01
$f_{ck}$ [MPa]	50	20	5
$\phi_x^l$ [mm]	[6,3 8,0 10,0 12,5 16,0 20,0 25,0]		
$\phi_y^l$ [mm]			
$\phi^m$ [mm]	[3,4 3,8 4,2 4,6 5,0 5,6 6,0 7,1 8,0 9,0 10,0]		

(Fonte: elaborado pelo autor)

### 7.2.1.4 Parâmetros do Algoritmo Genético

Devido ao tempo de processamento da otimização ser muito dependente do modelo de análise utilizado, foram adotados diferentes valores de número de indivíduos, número de gerações, taxa de cruzamento e probabilidade de mutação para melhor representar o espaço de busca. Uma vez que o número de indivíduos e gerações aplicadas à otimização utilizando analogia de grelha foi bastante reduzido, a probabilidade de mutação foi aumentada em relação ao modelo da laje maciça equivalente.

A Tabela 23 apresenta os valores dos parâmetros adotados neste trabalho:

Tabela 23 – Parâmetros do algoritmo genético.

Modelo de análise	Número de indivíduos	Número de Gerações	Taxa de Cruzamento	Probabilidade de Mutação
Laje Maciça Equivalente (TCP)	100	600	0,90	0,10
Analogia de Grelha	25	100	0,90	0,20

(Fonte: elaborado pelo autor)

O software BIOS, em sua última versão, possui a capacidade de aplicar a otimização com a técnica de paralelismo, onde cada núcleo de processamento é responsável pela avaliação de um indivíduo simultaneamente aos demais, sendo utilizados 4 núcleos neste trabalho. Isso representou redução significativa no tempo de execução.

### 7.2.2 Caso 5

São apresentadas na Tabela 24 os valores da variáveis e função objetivo para solução ótima obtida pelos dois modelos de análise para a laje de 7,00 por 7,00 m:

Tabela 24 – Solução ótima para o Caso 5.

Variável	Laje Maciça Equivalente (TCP)	Analogia de Grelha
$b_f$ [m]	0,85	0,75
$b_w$ [m]	0,120	0,120
$h_t$ [m]	0,20	0,28
$h_f$ [m]	0,10	0,10
$f_{ck}$ [MPa]	30	30
$\phi_x^l$ [mm]	20,0	20,0
$\phi_y^l$ [mm]	20,0	20,0
$\phi^m$ [mm]	3,80	3,80
Função custo [R\$/m <sup>2</sup> ]	182,58	213,05

(Fonte: elaborado pelo autor)

A diferença entre as soluções ótimas obtidas pelas dois modelos de análise se resume à alteração de apenas duas das variáveis,  $b_f$  e  $h_t$ . O entre eixos de nervura diminuiu de 85 cm para 75 cm e a altura total da laje aumentou de 20 cm para 28 cm. As demais variáveis mantiveram-se inalteradas. O efeito de aumento de altura é esperado devido à necessidade de maior braço de alavanca para geração de maior momento resistente na seção, uma vez que a analogia de grelha gera momentos cerca de 70% (vide seção 7.1.3.1). Pode-se dizer que a distância entre eixos de nervura responde a tal comportamento da mesma forma, aumentando a taxa de armadura na seção T considerada.

A função custo foi bastante impactada pela análise por analogia de grelha, apresentando solução 16,68% mais cara que a obtida pela TCP. Pode-se perceber que o maior custo é devido principalmente ao aumento de consumo de concreto, uma vez que as bitolas consideradas nas duas direções se mantiveram constantes.

A Tabela 25 apresenta os valores das restrições relativas ao Estado Limite Último (ELU) e de Serviço (ELS) para as duas soluções, uma vez que as restrições de ELU se mostraram quase-ativas.

Tabela 25 – Restrições ativas para o Caso 5.

Restrições		Laje Maciça Equivalente (TCP)	Analogia de Grelha
ELU	Flexão (direção x)	-0,0438	-0,0068
	Flexão (direção y)	-0,1708	-0,0932
	Cortante (direção x)	-0,0112	-0,0370
	Cortante (direção y)	-0,0803	-0,0835
ELS	Flecha	-0,2472	-0,3596

(Fonte: elaborado pelo autor)

Para ambas as soluções, percebe-se que há um comportamento bastante semelhante das restrições. A solução ótima por TCP mostra que a restrição relativa ao cortante na direção x mostrou-se ativa, enquanto para a solução ótima obtida por analogia de grelha foi a de flexão na direção y. As restrições de flexão para as direções x e y são diferentes devido à consideração de alturas úteis diferentes, devido à presença de armaduras se cruzando.

Nota-se ainda que a restrição de flecha em ambas as soluções não é limitante ao modelo, sendo ainda menos violada no modelo por analogia de grelha. Esse efeito advém da maior inércia da seção, uma vez que os esforços de flexão obtidos por grelha demandaram maior altura útil.

### 7.2.3 Caso 6

São apresentadas na Tabela 26 os valores da variáveis e função objetivo para solução ótima obtida pelos dois modelos de análise para a laje de 8,00 por 8,00 m:

Tabela 26 – Solução ótima para o Caso 6.

Variável	Laje Maciça Equivalente (TCP)	Analogia de Grelha
$b_f$ [m]	0,78	0,86
$b_w$ [m]	0,120	0,120
$h_t$ [m]	0,23	0,29
$h_f$ [m]	0,10	0,10
$f_{ck}$ [MPa]	30	35
$\phi_x^l$ [mm]	20,0	25,0
$\phi_y^l$ [mm]	20,0	25,0
$\phi^m$ [mm]	3,80	3,80
Função custo [R\$/m <sup>2</sup> ]	195,72	222,90

(Fonte: elaborado pelo autor)

Diferente do que ocorreu no Caso 5, em que a variável  $b_f$  sofreu uma diminuição, observa-se um aumento do entre eixos de nervura de 78 cm para 86 cm, mostrando que não há um padrão de variação pré-estabelecido para essa variável. Contudo, deve-se notar que a variável  $h_t$  sofre uma variação positiva nos dois casos, devido a maior necessidade de momento resistente. A resistência do concreto foi elevada e o adotou-se uma bitola de maior diâmetro. É provável que se o modelo tivesse mantido o mesmo diâmetro de bitola, haveria maior demanda de altura útil e, conseqüentemente, maior consumo de concreto, gerando uma solução ainda mais cara.

A função custo foi, assim como no caso anterior, impactada pela análise por analogia de grelha, apresentando uma solução 13,88% mais cara que a obtida pela TCP. Nesse exemplo percebe-se que tanto o custo de aço quanto o de concreto foram aumentados, buscando-se a melhor combinação dos dois materiais. Apesar de ser utilizado um concreto de preço unitário 14% maior, mostra-se que alteração para o modelo de um concreto mais resistente foi benéfica.

A Tabela 27 apresenta os valores das restrições relativas ao Estado Limite Último (ELU) e de Serviço (ELS) para as duas soluções, uma vez que tais restrições se mostraram ativas e quase-ativas.

Tabela 27 – Restrições ativas para o Caso 6.

	Restrições	Laje Maciça Equivalente (TCP)	Analogia de Grelha
ELU	Flexão (direção x)	-0,0240	-0,0659
	Flexão (direção y)	-0,1324	-0,1646
	Cortante (direção x)	-0,0256	-0,0307
	Cortante (direção y)	-0,0844	-0,0780
ELS	Flecha	-0,0990	-0,1726

(Fonte: elaborado pelo autor)

A solução ótima por TCP mostra que a restrição relativa à flexão na direção x mostrou-se ativa, enquanto para a solução obtida por analogia de grelha foi a de cortante na direção x. Nota-se, assim como observado no Caso 5, que a restrição de flecha em ambas as soluções não é limitante ao modelo, sendo ainda menos violada no modelo por analogia de grelha, devido à maior inércia à flexão da seção. Contudo, percebe-se uma possível tendência do modelo, de uma crescente violação da flecha, indicando que para vãos maiores que 8 m, tal restrição pode se tornar ativa.

#### 7.2.4 Caso 7

São apresentadas na Tabela 28 os valores da variáveis e função objetivo para solução ótima obtida pelos dois modelos de análise para a laje de 7,00 por 14,00 m. Por motivo de orientação, destaca-se que o menor vão se encontra sobre o eixo x e o maior sobre o eixo y. Dessa forma, a armadura designada por  $\phi_x^l$  resistirá aos menores esforços, enquanto a armadura designada por  $\phi_y^l$  resistirá aos maiores esforços.

Tabela 28 – Solução ótima para o Caso 7.

Variável	Laje Maciça Equivalente (TCP)	Analogia de Grelha
$b_f$ [m]	0,89	0,85
$b_w$ [m]	0,120	0,120
$h_t$ [m]	0,28	0,33
$h_f$ [m]	0,10	0,10
$f_{ck}$ [MPa]	35	35
$\phi_x^l$ [mm]	16,0	16,0
$\phi_y^l$ [mm]	25,0	25,0
$\phi^m$ [mm]	3,80	3,80
Função custo [R\$/m <sup>2</sup> ]	226,03	241,51

(Fonte: elaborado pelo autor)

Assim como percebido na análise de esforços e deslocamentos no item 7.1.3.2, no qual são analisadas lajes retangulares, percebe-se que o impacto das diferentes análises é menos significativo que para lajes quadradas. A variável  $b_f$  sofre uma diminuição de 89 cm para 85 cm e a altura total da laje,  $h_t$ , aumenta de 28 cm para 33 cm. Os restantes das variáveis se mantiveram constantes.

A função custo sofreu um aumento de 6,84%. Tal variação é motivada pela variação da seção de concreto, dado que os diâmetros de armadura se mantiveram constantes.

A Tabela 29 apresenta os valores das restrições relativas ao Estado Limite Último (ELU) e de Serviço (ELS) para as duas soluções, uma vez que tais restrições se mostraram ativas e quase-ativas.

Tabela 29 – Restrições ativas para o Caso 7.

	Restrições	Laje Maciça Equivalente (TCP)	Analogia de Grelha
ELU	Flexão (direção x)	-0,1050	-0,0404
	Flexão (direção y)	-0,0987	-0,0188
	Cortante (direção x)	-0,1206	-0,1071
	Cortante (direção y)	-0,0655	-0,0080
ELS	Flecha	-0,1166	-0,0983

(Fonte: elaborado pelo autor)

Para ambas as soluções ótimas, observa-se que a restrição ativa foi comum, sendo a de verificação ao cortante na direção  $y$ . No entanto, nota-se que muitas das restrições quase-ativas podem estar em seus limites, uma vez que as variáveis são discretas. Portanto, não se pode afirmar que a verificação de esforço cortante seja limitante para os casos de lajes retangulares de forma geral, sendo necessário melhor estudo sobre as demais restrições.

### 7.2.5 Caso 8

São apresentadas na Tabela 30 os valores da variáveis e função objetivo para solução ótima obtida pelos dois modelos de análise para a laje de 8,00 por 16,00 m.

Tabela 30 – Solução ótima para o Caso 8.

Variável	Laje Maciça Equivalente (TCP)	Analogia de Grelha
$b_f$ [m]	0,74	0,67
$b_w$ [m]	0,120	0,120
$h_t$ [m]	0,33	0,42
$h_f$ [m]	0,10	0,10
$f_{ck}$ [MPa]	40	40
$\phi_x^l$ [mm]	16,0	16,0
$\phi_y^l$ [mm]	25,0	25,0
$\phi^m$ [mm]	4,20	4,20
Função custo [R\$/m <sup>2</sup> ]	271,45	320,66

(Fonte: elaborado pelo autor)

As variáveis  $b_f$  e  $h_t$  foram as únicas que sofreram alteração. Houve diminuição do valor entre eixos de nervura de 74 cm para 67 cm e aumento da altura de laje de 33 para 42 cm. Um fato curioso neste exemplo é o grande aumento da altura da laje, o que não foi observado no Caso 7 de geometria semelhante. Isso pode ser explicado pela limitação de espaço de busca de diâmetros de armadura longitudinal na direção  $y$ . Tendo em vista que o modelo já utiliza a maior bitola disponível, o modelo necessitou buscar alturas ainda maiores para ganho de momento resistente.



Dentre todos os casos estudados, esse apresentou aumento bastante significativo na função objetivo, cerca de 18,12%. Assim como outros casos, essa variação é devido ao maior consumo de concreto por demanda de altura da laje. Percebe-se que a variável que representa a altura total da laje chegou a valores que na prática de projeto poderia inviabilizar a solução obtida. Dessa forma, mostra-se que outros tipos de estrutura poderiam ser adotados para diminuir tal altura total, como a aplicação de protensão.

A Tabela 31 apresenta os valores das restrições relativas ao Estado Limite Último (ELU) e de Serviço (ELS) para as duas soluções, uma vez que tais restrições se mostraram ativas e quase-ativas.

Tabela 31 – Restrições ativas para o Caso 8.

	Restrições	Laje Maciça Equivalente (TCP)	Analogia de Grelha
ELU	Flexão (direção x)	-0,2863	-0,2824
	Flexão (direção y)	-0,0443	-0,0145
	Cortante (direção x)	-0,3837	-0,4118
	Cortante (direção y)	-0,0351	-0,0041
ELS	Flecha	-0,0379	-0,1408

(Fonte: elaborado pelo autor)

A restrição de esforço cortante na direção y, direção mais solicitada nesse modelo, mostrou-se ativa para ambas as soluções. Percebe-se que para a direção x, direção menos solicitada, há pouca violação das restrições. No entanto, vale destacar que devido o problema ser discreto, essa folga pode não representar um espaço viável para utilização pelo modelo de otimização.

## 8 CONCLUSÕES

Diversos pontos foram abordados neste trabalho, dentre os quais destaca-se a otimização de lajes nervuradas por meio de métodos analíticos e numéricos. Foi possível observar o grande impacto e as consequências que um método de análise estrutural mais representativo, tal como o modelo de analogia de grelha, pode gerar no comportamento do modelo de otimização. Foram ainda observadas as principais diferenças entre os modelos de análise quanto à presença de esforços de torção.

O problema de otimização está representado pela busca do menor custo de produção de uma laje nervurada simplesmente apoiada submetida a carregamento uniformemente distribuído. Para tanto, variáveis relativas ao padrão de forma plástica e as propriedades dos materiais são aplicadas ao problema, tendo como restrições, os requisitos normativos provenientes da ABNT NBR 6118:2014, além da consideração de requisitos de incêndio devido a ABNT NBR 15575:2013.

Pode-se dividir os resultados deste trabalho em duas principais frentes, uma destacando-se as conclusões acerca do que foi observado sobre a análise de lajes nervuradas por modelo analítico e numérico, e outra relacionada com o impacto dessas diferentes análises no modelo de otimização.

Ao explorar os modelos de análises disponíveis, observou-se que a consideração dos efeitos da torção na laje nervurada foi uma das principais fontes de diferença entre os modelos analítico e numérico. Tendo em vista que o modelo de laje maciça equivalente utiliza a Teoria Clássica de Placas para obtenção de esforços e deslocamentos, está se incorporando uma rigidez à torção para a laje nervurada, a qual não condiz com a realidade, devido à pouca resistência das nervuras a tal esforço.

Dessa forma, observou-se que modelos de analogia de grelha que utilizam apenas parcela da rigidez à torção das lajes nervuradas são a melhor alternativa. Segundo norma, indica-se a utilização de 15% de rigidez à torção. No entanto, os resultados dos Casos 3 e 4, mostram que a consideração de 1% não gera grandes diferenças, além de se estar a favor da segurança. Observou-se que as diferenças entre os modelos de análise foram mais sentidas para cálculo da flecha, em que o modelo de analogia de grelha gerou valores 100% maiores que o modelo de laje maciça equivalente. Os esforços têm comportamento semelhante, sendo gerados momentos de flexão cerca de 70% superiores à solução analítica.

Para se verificar o impacto dos modelos de análise no modelo de otimização, foram otimizados 4 casos de lajes quadradas e retangulares. Os resultados mostraram que não existe

um padrão de variação das variáveis, de modo que a variável de espaçamento entre eixos de nervura e altura total da laje foram as mais impactadas, devido à maior demanda de momento resistente.

Semelhante às variáveis, a função custo não apresenta padrão de variação específico, sempre sofrendo aumento quando aplicada análise numérica frente à solução analítica. Essa variação foi mais perceptível nas lajes quadradas, Casos 5 e 6, no valor de 16,68% e 13,88%, respectivamente. Para lajes retangulares, Casos 7 e 8, houve aumento de 6,84% e 18,12%, respectivamente.

Os resultados mostram um comportamento curioso do ponto de vista de comportamento do modelo de otimização quando submetidos aos diferentes modelos de análise. Os modelos numéricos geram esforços e deslocamentos bastante superiores aos obtidos pela solução analítica, no entanto, o efeito desses aumentos não são repassados para a função objetivo de maneira proporcional. Ou seja, mesmo com aumentos de momentos fletores na ordem de 70% e 100% para deslocamentos, as funções custo sofreram aumentos que não ultrapassaram os 20%. Isso mostra que não há uma relação de proporcionalidade bem definida entre esforços, deslocamentos e função objetivo.

Nesse contexto, mostrou-se a importância de um modelo mais representativo de análise no modelo de otimização de lajes nervuradas simplesmente apoiadas, em destaque para a aplicação do modelo de analogia de grelha. Uma perspectiva de trabalho futuro, seria a expansão deste modelo de otimização para o estudo de um pavimento de lajes, onde se considera a interação entre os elementos de apoio e as lajes, tais como na interface viga-laje e viga-pilar.

## REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, A. T. D.; PINHEIRO, L. M. Viabilidade Econômica de Alternativas Estruturais de Concreto Armado para Edifícios. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, São Paulo - SP, 2002. 1-19.

ALBUQUERQUE, A. T.; DEBS, M. K. E.; MELO, A. M. C. An Application of Genetic Algorithm (GA) Based Design Support System (DSS) for Precast Concrete Parking Building. **Concrete: 21st Century Superhero - 2009 FIB Symposium**, Londres, 2009. 1-8.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-08) and Commentary**. U.S.A.: [s.n.], 1999.

ARAÚJO, J. M. D. **Curso de Concreto Armado**. 4. ed. Rio Grande: Dunas, v. 1, 2014.

ARORA, J. S. **Introduction to Optimum Design**. New York: McGraw-Hill, 2012.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 6120: Cargas para o cálculo de estruturas de edificações**. ABNT. Rio de Janeiro - RJ. 1980.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 14432: Exigências de resistência ao fogo de elementos construtivos de edificações - Procedimento**. ABNT. Rio de Janeiro. 2001.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 15200: Projeto de estruturas de concreto em situação de incêndio - Procedimento**. ABNT. Rio de Janeiro. 2012.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 15575: Desempenho de edificações habitacionais**. ABNT. Rio de Janeiro - RJ. 2013.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 6118: Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimento**. ABNT. Rio de Janeiro - RJ, p. 238. 2014.

BARBIRATO, C. B. C. **Contribuições à análise de pavimento de edifícios em laje nervurada**. Dissertação (mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos. 1997.

BASTOS, P. S. D. S. **Estruturas de Concreto Armado**. Universidade Estadual Paulista. Bauru - SP. 2014.

BRITISH STANDARDS INSTITUTION. **Structural use of Concrete: code of practice for design and construction**. London, 1997.

CARVALHO, R. C.; FILHO, J. R. D. F. **Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado**. 4ª. ed. São Carlos: Edufscar, v. 1I, 2015.

CARVALHO, R. C.; PINHEIRO, L. M. **Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado**. 1ª. ed. São Paulo - SP: Pini Ltda., v. 2, 2009.

CASTILHO, V. C. **Otimização de componentes de concreto pré-moldado protendidos mediante algoritmos genéticos (Doutorado)**. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos - SP. 2002.

CASTRO, L. M. S. Modelação de Lajes com Elementos de Grelha, 1998. 38.

COELHO, E. L.; SOUZA, R. M.; GRECO, M. Estudo Comparativo entre Sistemas Estruturais com Lajes Maciças, Nervuradas e Lajes Lisas. **Associação Brasileira de Métodos Computacionais em Engenharia**, São João Del Rei - MG, 26 a 28 maio 2010.

COLIN, E. C. **Pesquisa Operacional: 170 aplicações em estratégia, finanças, logística, produção, marketing e vendas**. Rio de Janeiro - RJ: LTC, 2007.

COOK, R. D. et al. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. [S.l.]: Hamilton Printing Company, 2001.

CUNHA JR., B. F. R.; LIMA, E. C.; OLIVEIRA, J. C. A. O. Estudo Comparativo de Cálculo de Lajes Analogira de grelha x Tabela de Czerny. **Universidade Católica de Goiás**, 2003. 6.

GALEB, A. C.; ATIAH, Z. F. Optimum design of reinforced concrete waffle slabs. **International Journal of Civil and Structural Engineering**, Basrah, 2011. 862-880.

GOLDBERG, D. E. **Genetic Algorithms in search, optimization and machine learning**. U.S.A.: Addison-Wesley Publishing Company.

HOLLAND, J. H. **Adaptation in Natural and Artificial Systems**. 2ª. ed. Cambridge, MA: MIT Press, 1975/1992.

KENNEDY, J. B.; BALI, S. K. Rigities of concrete waffle-type slab structure. **Canadian journal of Civil Engineering**, março 1978.

KENNEDY, J.; EBERHART, R. Particle Swarm Optimization. **Purdue School o Engineering and Tecnology**, Indianapolis, 1995.

KOSKISTO, O. J.; ELLINGWOOD, B. R. Reliability-based optimization of plant precast concrete structures. **Journal of Structural Engineering**, v. 123, p. 298-308, March 1997.

KOUMOUSIS, V. K.; ARSENIS, S. J. Genetic Algorithm in optimal detailed design of reinforced concrete members. **Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering**, v. 13, p. 43-52, 1998.

LEONHARDT, F. **Construções de Concreto**. Rio de Janeiro: [s.n.], v. 3, 1978.

LIMA, M. L. R. **Otimização topológica e paramétrica de vigas de concreto armado utilizando algoritmos genéticos**. São Paulo: [s.n.], 2011.

LOPES, A. F. D. O.; BONO, G. F. F.; BONO, G. Análise numérica comparativa entre lajes maciças e nervuradas com diferentes tipos de materiais de enchimento. **Mecânica Computacional**, Mendoza, 20 Noviembre 2013. 3483-3495.

MICHALEWICZ, Z. **Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs**. 3<sup>a</sup>. ed. New York: Springer, 1996.

MOTA, J. P. A. S.; MELO, A. M. C. D. Projeto ótimo de lajes nervuradas: considerações de situação de incêndio. **XXVI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**, Rio de Janeiro, Novembro 2015.

MOTA, J. P. A. S.; MELO, A. M. C. D. Otimização de pavimentos de lajes nervuradas: efeitos dos requisitos de desempenho. **Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia**, Brasília - DF, Novembro 2016.

ROCHA, I. B. C.; PARENTE JR., E.; MELO, A. M. C. A hybrid shared/distributed memory parallel genetic algorithm for optimization of laminate composites. **Composite Structures**, v. 107, p. 288-297.

SAHAB, M. G.; ASHOUR, A. F.; TOROPOV, V. V. Cost optimisation of reinforced concrete flat slab buildings. **Elsevier**, Tehran, v. 27, p. 313-322, December 2004a.

SAHAB, M. G.; ASHOUR, A. F.; TOROPOV, V. V. A hybrid genetic algorithm for reinforced concrete slab buildings. **Elsevier**, Tehran, v. 83, p. 551-559, December 2004b.

SANTOS, F. B. B. Implementação Eficiente de Busca em Plataforma Paralela. **XXII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação**, Florianópolis, 2002.

SARAMAGO, S. P.; JÚNIOR, V. S. Introdução às Técnicas de Otimização em Engenharia, Uberlândia, 2008. Disponível em:  
<<http://www.seer.ufu.br/index.php/horizontecientifico/article/viewFile/4050/3015>>. Acesso em: 2017.

SARMA, K. C.; ADELI, H. Cost Optimization of Concrete Structures. **Jornal of Structural Engineering**, p. 570-578, May 1998.

SILVA, E. E. D. Otimização de Estruturas de Concreto Armado Utilizando Algoritmos Genéticos. (**Mestrado**), São Paulo, 2001. 131.

SPOHR, V. H. **Análise Comparativa: Sistemas Estruturais Convencionais e Estruturas de Lajes Nervuradas**. Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria - RS, p. 108. 2008.

STRAMANDINOLI, J. S. B. **Contribuições à análise de lajes nervuradas por analogia de grelha**. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis. 2003.

VANDERPLAATS, G. N. **Numerical Optimization Techniques for Engineering Design - with Applications**. Colorado Springs: Vanderplatts Research & Development, 1999.

WERNER, B. V.; VARGAS, A. Análise Comparativa entre Diferentes Métodos de Cálculo para o dimensionamento de Lajes Maciças Bidirecionais. **Universidade do Extremo Sul Catarinense**, Fevereiro 2013.