UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FRANCISCO YURE SANTOS DO NASCIMENTO

HIPERSUPERFÍCIES DE ESPAÇOS HOMOGÊNEOS E DE GRUPOS DE LIE LORENTZIANOS E DEFORMAÇÕES DE MÉTRICAS KÄHLERIANAS

FORTALEZA
2017

FRANCISCO YURE SANTOS DO NASCIMENTO

HIPERSUPERFÍCIES DE ESPAÇOS HOMOGÊNEOS E DE GRUPOS DE LIE LORENTZIANOS E DEFORMAÇÕES DE MÉTRICAS KÄHLERIANAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto

FORTALEZA
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N195h Nascimento, Francisco Yure Santos do.
Hipersuperfícies de espaços homogêneos e de grupos de Lie lorentzianos e deformações de métricas kählerianas / Francisco Yure Santos do Nascimento. – 2017.
70 f. : il.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática , Fortaleza, 2017.
Orientação: Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto.

1. Espaços Homogêneos. 2. Grupos de Lie lorentzianos. 3. Métricas kählerianas. I. Título.
CDD 510

FRANCISCO YURE SANTOS DO NASCIMENTO

HIPERSUPERFÍCIES DE ESPAÇOS HOMOGÊNEOS E DE GRUPOS DE LIE LORENTZIANOS E DEFORMAÇÕES DE MÉTRICAS KÄHLERIANAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria.

Aprovada em: 28/11/2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Luís José Alías Linares
Universidad de Murcia (UM)

Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

Dedico este trabalho a meus pais Mirlene e Sigi, a minha esposa Emanuela e a minha grande amiga Luana.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por mais um objetivo alcançado.

Aos meus pais Mirlene e Sigi, pelo amor, carinho e apoio ao longo do tempo. Também agradeço a minha avó (Neide), meu avô (Xico) e meus irmãos Franzi e Amanda que são pessoas muito importantes na minha vida.

Agradeço especialmente à minha esposa Emanuela, pelo amor, compreensão, paciência e por estar comigo nos momentos difíceis ao longo desses anos.

Aos meus amigos e colegas da UFC: João Luiz, João Victor, Anderson, Nícolas, Roger, Rafael Alves, Itamar Sales, Rodrigo Matos e Elisafã. Agradeço também ao meu amigo e colega de trabalho Giannini Italino pelo incentivo.

Ao meu orientador Antonio Caminha, por aceitar me orientar, pela confiança depositada em mim, pelos conselhos, incentivo e pela amizade.

A Todos professores do Departamento de Matemática que participaram da minha formação e aos professores Abdênago Alves de Barros, Gregório Pacelli, Paulo Alexandre e Luís Alías por participarem da banca examinadora.

À Andrea e a Jessyca pela solicitude e eficiência.

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

”Os ignorantes, que acham que sabem tudo, privam-se de um dos maiores prazeres da vida: aprender.”
Provérbio popular

RESUMO

Este trabalho está dividido em duas partes. Na primeira parte, obtemos um teorema de rigidez para hipersuperfícies CMC completas de um espaço homogêneo riemanniano, com uma versão para hipersuperícies compactas e uma para não compactas. No caso de um grupo de Lie lorentziano G munido de uma métrica biinvariante, mostramos que as únicas hipersuperfícies espaciais compactas, imersas em G e CMC são as classes laterais de um subgrupo de Lie L de G. Mostramos também, que toda hipersuperfície espacial compacta que possui o operador de Weingarten A positivo semidefinido é totalmente geodésica. Na segunda parte, a partir de uma variedade kähleriana M que possui um campo conforme fechado, construímos uma família de métricas kählerianas para M e obtemos equações diferenciais ordinárias para encontrar exemplos de métricas Einstein e sólitons de Ricci no espaço euclidiano complexo e em um cone riemaniano gerado por uma variedade de Sasaki Einstein.

Palavras-chave: Espaços Homogêneos. Grupos de Lie Lorentzianos. Métricas Kählerianas.

ABSTRACT

This work is divided into two parts. In the first part, we obtain a rigidity theorem for complete CMC hypersurfaces in a Riemannian homogeneous space, with versions for compact and noncompact hypersurfaces. In the case of a Lorentzian Lie group G with a bi-invariant metric, we show that the only compact CMC spacelike hypersurfaces immersed in G are the lateral classes of a Lie subgroup L of G. We also show that every compact spacelike hypersurfaces of G having positive semi-definite Weingarten operator A are the totally geodesic ones. In the second part, from a Kählerian manifold M with a closed conformal vector field, we crafted a family of Kählerian metrics of M and get ordinary differential equations to find examples of Einstein metrics and Ricci solitons in the Euclidean complex space and in a Riemannian cone over a Sasaki Einstein manifold.

Keywords: Homogeneous Spaces. Lorentzian Lie Groups. Kählerian Metrics.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho está dividido em duas partes. Na primeira parte tratamos do estudo de hipersuperfícies de espaços homogêneos riemannianos e de grupos de Lie lorentzianos. A segunda parte trata da construção de métricas kählerianas em variedades kählerianas que possuem um campo conforme fechado.

No estudo de hipersuperfícies de espaços homogêneos, nosso objetivo é obter um resultado de rigidez para hipersuperfícies CMC pondo uma hipótese de limitação sobre $|A|^2$, onde A é o operador de Weingarten da hipersuperfície. Dados um espaço homogêneo $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ tal que $Ad(\mathbb{H})$ tem fecho compacto em $GL(\mathfrak{g})$ e uma hipersuperfície

$$\varphi : M \longrightarrow \mathbb{G}/\mathbb{H},$$

onde $\mathbb{G}$ e $\mathbb{H}$ são grupos de Lie. Denotando por $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de $\mathbb{G}$, construimos uma aplicação

$$\eta : M \longrightarrow \mathfrak{g},$$

que generaliza a aplicação de Gauss definida em (BITTENCOURT and RIPOLL, 2006). Vamos mostrar várias propriedades da aplicação η e caracterizar as hipersuperfícies de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ para as quais a aplicação η é constante. Para os resultados principais vamos considerar uma função $f : M \to \mathbb{R}$, dada por $f = \langle V, N\rangle$, onde V é um campo de Killing de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ e N é um campo normal unitário de M. Calculamos o laplaciano de f e nossas hipóteses nos permitirão concluir que a aplicação η é constante. Os resultados estão dividos nos casos em que M é compacta e no caso em que M é completa e não compacta. Para este último caso precisaremos adicionar uma hipótese de convergência no infinito da aplicação η.

Passando para o caso de um grupo de Lie lorentziano G que possue uma métrica biinvariante, vamos estudar hipersuperfícies espaciais

$$\varphi : M \longrightarrow G,$$

e obter dois resultados. O primeiro é mostrar que as únicas hipersuperfícies espaciais compactas, imersas em G e CMC, são os subgrupos L^n de G^{n+1} e suas clases laterais. E o segundo é mostrar que toda hipersuperfície espacial compacta (não necessariamente CMC) que possui o operador de Weingarten A positivo semidefinido é totalmente geodésica. Para este segundo resultado mostramos também uma versão para o caso em que M é completa não compacta. Para tal resultado, adicionamos uma hipótese de convergência no infinito da aplicação de Gauss de M .

Na segunda parte do trabalho, generalizamos um método utilizado em (CAMINHA, 2017) para construção de novas métricas kählerianas em variedades kählerianas que possuem um campo conforme fechado. Mais precisamente, dada uma variedade kähleriana (M, J, g) que possua um campo conforme fechado ξ e $\mu \in C^{\infty}(M)$ é uma função positiva que depende de $|\xi|^2 = g(\xi, \xi)$. Se μ' denota a derivada de μ com relação a $|\xi|^2$ e $\mu + \mu'|\xi|^2 > 0$, então a métrica $\tilde{g}$ dada por

$$\tilde{g} = \mu g + \mu'(\theta_{\xi}^2 + \theta_{J\xi}^2)$$

é uma métrica kähleriana de (M, J). Vamos obter algumas condições para que $\tilde{g}$ seja uma métrica riemanniana completa, calcular a curvatura seccional holomorfa e o tensor de Ricci dessa nova métrica. Ao final usamos a expressão do tensor de Ricci para obter EDO's que geram exemplos de métricas que são Einstein e sólitons de Ricci em $\mathbb{C}^n$ e em um cone $(0, +\infty) \times_t N$, onde N é uma variedade de Sasaki e Einstein. No Exemplo (5.19) encontramos o mesmo sóliton de Ricci de $\mathbb{C}^n$ já encontrado em (CAO, 1994).

2 Preliminares

Este capítulo tem como objetivo apresentar alguns conceitos básicos sobre grupos de Lie e espaços homogêneos, bem como apresentar alguns resultados que serão utilizados no restante do texto. Indicamos (CAMINHA, 2014) e (LEE, 2003) como referências gerais aos assuntos tratados aqui.

2.1 Grupos de Lie

Dado um grupo de Lie $\mathbb{G}$ com álgebra de lie $\mathfrak{g}$, denotamos, respectivamente, por L_g e R_g as translações à esquerda e à direita por um elemento $g \in \mathbb{G}$. A representação Adjunta de $\mathbb{G}$ é a aplicação $Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$, tal que $Ad_g = Ad(g) = d(L_g \circ R_{g^{-1}})_e$. A representação adjunta da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é a aplicação $ad : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, tal que

$$ad(X)(Y) = ad_X Y = [X, Y].$$

As representações adjuntas de $\mathbb{G}$ e $\mathfrak{g}$ são relacionadas pela igualdade $Ad_* = ad$, onde Ad_* denota a diferencial de Ad na identidade de $\mathbb{G}$. Portanto, para $X, Y \in \mathfrak{g}$, temos que

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Ad_{exp(tX)}(Y) = [X, Y], \tag{2.1}$$

onde $exp : \mathfrak{g} \to \mathbb{G}$, denota a aplicação exponencial do grupo de Lie $\mathbb{G}$.

Dizemos que um subespaço vetorial $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$ se $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{h}$; dizemos que esse subespaço $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ se $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, para quaisquer $X \in \mathfrak{h}$ e $Y \in \mathfrak{g}$. É mostrado no Capítulo 20 de (LEE, 2003) que, a cada subálgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, corresponde um único subgrupo de Lie conexo $\mathbb{H}$ de $\mathbb{G}$, cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{h}$. Também é mostrado lá que, para um subgrupo conexo $\mathbb{K}$ de $\mathbb{G}$, a sua álgebra de Lie $\mathfrak{K}$ é um ideal de $\mathbb{G}$ se, e somente se, $\mathbb{K}$ é um subgrupo normal de $\mathbb{G}$.

A seguir entraremos em alguns detalhes a respeito de álgebras de Lie que serão explorados mais a frente. Indicamos o Capítulo 1 de (KNAPP, 2002) como referência para tais detalhes.

Uma soma direta de álgebras de Lie $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{K}$ com colchetes $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{h}}$ e $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{K}}$, respectivamente, é uma álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{K}$ (soma direta de espaços vetoriais), onde o colchete de Lie de $\mathfrak{g}$ é definido, para $X = X_{\mathfrak{h}} + X_{\mathfrak{K}}$ e $Y = Y_{\mathfrak{h}} + Y_{\mathfrak{K}}$, como sendo

$$[X, Y]_{\mathfrak{g}} = [X_{\mathfrak{h}}, Y_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{h}} + [X_{\mathfrak{K}}, Y_{\mathfrak{K}}]_{\mathfrak{K}}.$$

De forma que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{K}]_{\mathfrak{g}} = 0$.

Dizemos que uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é simples se ela é não abeliana e não contém ideais próprios. Dizemos que uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é semisimples se $\mathfrak{g}$ é uma soma direta $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$, onde cada $\mathfrak{g}_i$ é uma álgebra simples. É fácil verificar que, para uma álgebra semisimples $\mathfrak{g}$, temos

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}. \tag{2.2}$$

Dizemos que um grupo de Lie $\mathbb{G}$ é simples, ou semisimples, se sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é simples, ou semisimples, respectivamente.

Pode-se definir também um produto semidireto de álgebras de Lie. Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{K}$, definimos uma derivação de $\mathfrak{K}$ como sendo um elemento $\rho \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{K})$ tal que

$$\rho[X, Y] = [\rho(X), Y] + [X, \rho(Y)],$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{K}$. O conjunto de todas as derivações de $\mathfrak{K}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{K})$, denotada por $\operatorname{Der}\mathfrak{K}$. Dado um homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{h} \to \operatorname{Der}\mathfrak{K}$, definimos o produto semidireto $\mathfrak{h} \times_\phi \mathfrak{K}$ como $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times \mathfrak{K}$ com colchete definido por

$$[(X_\mathfrak{h}, X_\mathfrak{K}), (Y_\mathfrak{h}, Y_\mathfrak{K})] = ([X_\mathfrak{h}, Y_\mathfrak{h}], \phi(X_\mathfrak{h})(Y_\mathfrak{K}) - \phi(Y_\mathfrak{h})(X_\mathfrak{K}) + [X_\mathfrak{K}, Y_\mathfrak{K}]).$$

Assim como para álgebras, podemos definir um produto semidireto de grupos de Lie. Dado um grupo de Lie $\mathbb{K}$, denotamos por $\operatorname{Aut}(\mathbb{K})$ o grupo dos automorfismos de $\mathbb{K}$ (aplicações que são difeomorfismos e isomorfismos do grupo $\mathbb{K}$). Dado um homomorfismo de grupos de Lie $\tau : \mathbb{H} \to \operatorname{Aut}(\mathbb{K})$, definimos o produto semidireto $\mathbb{H} \times_\tau \mathbb{K}$ como a variedade produto $\mathbb{H} \times \mathbb{K}$, munida com o produto

$$(h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2) = (h_1 k_1, k_1 \tau(h_1)(h_2)).$$

Com o produto acima $\mathbb{G} = \mathbb{H} \times_\tau \mathbb{K}$, torna-se um grupo de Lie, com elemento identidade (e, e) e inversão $(h, k)^{-1} = (h^{-1}, \tau(h^{-1})(k^{-1}))$. A Proposição 1.124 de (KNAPP, 2002) mostra que a álgebra de Lie de $\mathbb{H} \times_\tau \mathbb{K}$ é $\mathfrak{h} \times_{d\tau_e} \mathfrak{K}$.

Agora, trataremos da estrutura métrica de um grupo de Lie $\mathbb{G}$. Dizemos que uma métrica de $\mathbb{G}$ é invariante à esquerda se L_g é uma isometria de $\mathbb{G}$ para cada $g \in \mathbb{G}$. O conjunto das métricas invariantes à esquerda de $\mathbb{G}$ pode ser identificado com o conjunto dos produtos escalares de $\mathfrak{g}$. De fato, dado um produto escalar $\langle , \rangle_e$ em $T_e\mathbb{G} \simeq \mathfrak{g}$, definimos uma métrica invariante à esquerda $\langle , \rangle$ em $\mathbb{G}$ por

$$\langle v, w \rangle_g = \langle dL_{g^{-1}}(v), dL_{g^{-1}}(w) \rangle_e.$$

Uma métrica invariante à esquerda de $\mathbb{G}$ é dita ser biinvariante se ela também é invariante à direita, ou seja, se R_g é uma isometria de $\mathbb{G}$ para cada $g \in \mathbb{G}$.

A Proposição 11.9 de (O'NEILL, 1983) dá algumas caracterizações de métricas biinvariantes. A seguir, apresentamos duas delas.

Proposição 2.1. *Seja $\mathbb{G}$ um grupo de Lie munido de uma métrica biinvariante $\langle , \rangle$. Então:*

(*a*) *(identidade de Weyl) Para quaisquer* $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ *vale que*

$$\langle [X, Y], Z\rangle = \langle X, [Y, Z]\rangle. \tag{2.3}$$

(*b*) *Se* ∇ *é a conexão de Levi-Civita de* $\mathbb{G}$ *e* $X, Y \in \mathfrak{g}$*, temos*

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]. \tag{2.4}$$

Com o auxílio da proposição acima e da identidade de Jacobi, obtemos o tensor de curvatura R de um grupo de Lie $\mathbb{G}$ munido de uma métrica biinvariante. Para $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ o tensor de curvatura de $\mathbb{G}$ é dado por

$$R(X, Y)Z = -\frac{1}{4}\langle [X, Y], Z\rangle. \tag{2.5}$$

2.2 Submersões Riemannianas

Sejam M e B variedades riemannianas e $\pi : M \to B$ uma submersão. Para cada $q \in M$, temos $T_qM = \mathcal{V}_q \oplus \mathcal{H}_q$, onde $\mathcal{V}_q = \ker(d\pi_q)$ e $\mathcal{H}_q = \mathcal{V}_q^{\perp}$. Um vetor $v \in T_qM$ é dito vertical se pertence a $\mathcal{V}_q$, e horizontal se pertence a $\mathcal{H}_q$. Dizemos que a submersão π é uma submersão riemanniana se $d\pi_q : \mathcal{H}_q \to T_{\pi(q)}B$ for uma isometria linear para cada $q \in M$. Pode-se mostrar que, dado um campo X em B, existe um único campo horizontal $\overline{X}$ em M tal que $d\pi_p(\overline{X}_p) = X_{\pi(p)}$; esse campo é chamado de levantamento horizontal de X.

Dada uma submersão riemanniana $\pi : M \to B$, denotamos ambas as métricas de M e B por $\langle , \rangle$; também, denotamos por $\overline{\nabla}$,∇ as conexões de Levi-Civita de M e B, respectivamente. Dado um campo X em M, denotamos as componentes vertical e horizontal de X por X^v e X^h, respectivamente. Abaixo, temos um lema que será útil para fazer cálculos. Para uma demonstração, veja o Lema 4.3 de (CAMINHA, 2014).

Lema 2.2. *Se* X, Y *são campos em* B*, com levantamentos horizontais* $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathfrak{X}(M)$*, então:*

(*a*) $\langle \overline{X}, \overline{Y}\rangle = \langle X, Y\rangle \circ \pi$.

(*b*) $[\overline{X}, \overline{Y}]^h$ *é o levantamento horizontal de* $[X, Y]$.

(*c*) $(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^h$ *é o levantamento horizontal de* $\nabla_X Y$.

2.3 Espaços Homogêneos

Dados um grupo de Lie $\mathbb{G}$ e uma variedade diferenciável M, uma ação à esquerda de $\mathbb{G}$ em M é uma aplicação suave

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{G} \times M &\longrightarrow M \\ (g, p) &\longmapsto g \cdot p \end{aligned}$$

tal que $e \cdot p = p$ e $g \cdot (h \cdot p) = (gh) \cdot p$, para todos $g, h \in \mathbb{G}$ e $p \in M$. Denotamos por $\theta_g : M \longrightarrow M$ a aplicação dada por $\theta_g(p) = g \cdot p$. Segue que $\theta_e = Id_M$ e $\theta_g \theta_h = \theta_{gh}$; em particular, θ_g é um difeomorfismo de M, com inverso $\theta_{g^{-1}}$.
Analogamente, definimos uma ação à direita de $\mathbb{G}$ em M como uma aplicação suave

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{G} \times M &\longrightarrow M \\ (g, p) &\longmapsto p \cdot g \end{aligned}$$

tal que $p \cdot e = p$ e $(p \cdot h) \cdot g = p \cdot (gh)$, para todos $g, h \in \mathbb{G}$ e $p \in M$.

No que segue, por simplicidade, os conceitos e resultados referentes a ações serão restritos às ações à esquerda. No entanto, existem conceitos e resultados análogos referentes a ações à direita. Uma ação (à esquerda) $\theta : \mathbb{G} \times M \longrightarrow M$ dá origem a uma relação de equivalência $\sim$ em M, tal que

$$p \sim q \Leftrightarrow \exists\, g \in \mathbb{G};\ q = \theta_g(p).$$

A classe de equivalência de $p \in M$ em relação a $\sim$ é a órbita de p em relação à ação θ, a qual denotamos por $\mathbb{G} \cdot p$. O conjunto quociente $M/\mathbb{G}$, munido da topologia quociente, é o espaço quociente da ação; a aplicação quociente correspondente, $\pi : M \longrightarrow M/\mathbb{G}$, é contínua, aberta e associa a cada $p \in M$ sua órbita em $M/\mathbb{G}$.

Uma ação $\theta : \mathbb{G} \times M \longrightarrow M$ é livre se o único $g \in \mathbb{G}$ para o qual θ_g tem pontos fixos é $g = e$; própria, se a aplicação

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{G} \times M &\longrightarrow M \times M \\ (g, p) &\longmapsto (g \cdot p, p) \end{aligned}$$

for própria. O resultado a seguir revela a importância de ações livres e próprias de grupos de Lie sobre variedades diferenciáveis.

Teorema 2.3. *Se $\theta : \mathbb{G} \times M \longrightarrow M$ é uma ação livre e própria do grupo de Lie $\mathbb{G}$ sobre a variedade diferenciável M, então o espaço quociente $M/\mathbb{G}$ tem uma única estrutura de variedade diferenciável, de dimensão $dim M - dim \mathbb{G}$, tal que a aplicação quociente $\pi : M \to M/\mathbb{G}$ é uma submersão sobrejetiva.*

Demonstração. Veja o Teorema 9.16 de (LEE, 2003). □

Um caso particular importante do teorema acima é o da ação por translações à direita de um subgrupo fechado $\mathbb{H}$ de um grupo de Lie $\mathbb{G}$ sobre o próprio $\mathbb{G}$. Nesse caso, o espaço quociente $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ é o conjunto das classes laterais à esquerda de $\mathbb{H}$ em $\mathbb{G}$.

Dizemos que a ação θ é transitiva se $M/\mathbb{G}$ consistir de um único ponto, e nesse caso diremos que M é um $\mathbb{G}$-espaço homogêneo.

Teorema 2.4. *Se $\mathbb{G}$ é um grupo de Lie e $\mathbb{H}$ é um subgrupo de Lie fechado de $\mathbb{G}$, então o espaço quociente $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, das classes laterais à esquerda de $\mathbb{H}$ em $\mathbb{G}$, tem uma única estrutura de variedade diferenciável de dimensão $\dim M - \dim \mathbb{G}$, tal que a projeção canônica $\pi : \mathbb{G} \to \mathbb{G}/\mathbb{H}$ é uma submersão. Ademais, a aplicação*

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{G} \times \mathbb{G}/\mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{G}/\mathbb{H} \\ (a, g\mathbb{H}) &\longmapsto ag\mathbb{H} \end{aligned}$$

é uma ação que torna $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ um $\mathbb{G}$-espaço homogêneo.

Demonstração. Veja o Teorema 4.15 de (CAMINHA, 2014). $\square$

Dada uma ação $\theta : \mathbb{G} \times M \to M$ e um ponto $p \in M$, definimos o subgrupo de isotropia $E(p)$ de $p \in M$, por

$$E(p) = \{g \in \mathbb{G}; g \cdot p = p\}.$$

É imediato verificar que $E(p)$ é um subgrupo fechado de $\mathbb{G}$ e, portanto, é um subgrupo de Lie de $\mathbb{G}$ pelo Teorema 20.10 de (LEE, 2003). O resultado a seguir usa o Teorema 2.4 para caracterizar os $\mathbb{G}$-espaços homogêneos como os quocientes $\mathbb{G}/\mathbb{H}$.

Teorema 2.5. *Seja M um $\mathbb{G}$-espaço homogêneo. Se $p \in M$, então a aplicação $\phi : \mathbb{G}/E(p) \to M$, dada por $\phi(gE(p)) = g \cdot p$, está bem definida e é um difeomorfismo.*

Demonstração. Veja o Teorema 4.17 de (CAMINHA, 2014). $\square$

Agora, passamos a considerar métricas na variedade M para, a partir daí, obter métricas em $M/\mathbb{G}$. O resultado a seguir trata dessa situação.

Teorema 2.6. *Sejam M uma variedade riemanniana, $\mathbb{G}$ um grupo de Lie e $\theta : \mathbb{G} \times M \to M$ uma ação (à esquerda) livre e própria. Se $\theta_g : M \to M$ for uma isometria de M para todo $g \in \mathbb{G}$, então $M/\mathbb{G}$ admite uma única métrica riemanniana em relação à qual a projeção canônica $\pi : M \to M/\mathbb{G}$ é uma submersão riemanniana.*

Demonstração. Veja o Teorema 4.28 de (CAMINHA, 2014). $\square$

No caso da ação por translação à direita $\theta : \mathbb{H} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$, onde $\mathbb{H}$ é um subgrupo fechado de $\mathbb{G}$, vimos que o espaço quociente obtido é o conjunto das classes laterais à esquerda e o Teorema 2.4 nos diz que $\pi : \mathbb{G} \to \mathbb{G}/\mathbb{H}$ é uma submersão. O Teorema 2.6 aplicado a esse caso é apresentado a seguir.

Teorema 2.7. *Seja $\mathbb{G}$ um grupo de Lie munido de uma métrica invariante à esquerda. Se $\mathbb{H}$ é um subgrupo fechado de $\mathbb{G}$ e, para cada $h \in \mathbb{H}$, a translação à direita R_h é uma isometria, então:*

(*a*) *O espaço homogêneo $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ admite uma única métrica riemanniana em relação à qual a projeção canônica $\pi : \mathbb{G} \to \mathbb{G}/\mathbb{H}$ é uma submersão riemanniana.*

(*b*) *A ação à esquerda $\psi : \mathbb{G} \times \mathbb{G}/\mathbb{H} \to \mathbb{G}/\mathbb{H}$ é transitiva e tal que ψ_g é uma isometria de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, para todo $g \in \mathbb{G}$.*

Demonstração. O item (a) segue diretamente do Teorema 2.6. Para (b), observe que $\psi_g \circ \pi = \pi \circ L_g$ e que L_g leva campos horizontais em campos horizontais. Tomando X, Y campos em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, e sendo $\overline{X}, \overline{Y}$ seus respectivos levantamentos horizontais, temos que

$$\langle d\psi_g X, d\psi_g Y\rangle = \langle d\pi(dL_g\overline{X}), d\pi(dL_g\overline{Y})\rangle = \langle dL_g\overline{X}, dL_g\overline{Y}\rangle = \langle\overline{X}, \overline{Y}\rangle = \langle X, Y\rangle.$$

$\square$

Para obter uma métrica invariante à esquerda em um grupo de Lie $\mathbb{G}$, tal que R_h seja uma isometria para todo h em um subgrupo fechado $\mathbb{H}$ de $\mathbb{G}$, vamos supor que $Ad(\mathbb{H})$ tem fecho compacto em $GL(\mathfrak{g})$. O fecho $\overline{Ad(\mathbb{H})}$ é, então, um subgrupo compacto de $GL(\mathfrak{g})$. Nesse caso, dada uma métrica $\langle , \rangle$ em $\mathfrak{g}$, e uma forma de volume ω em $\overline{Ad(\mathbb{H})}$, invariante à direita, definimos uma outra métrica $\langle\langle , \rangle\rangle$ em $\mathfrak{g}$ por

$$\langle\langle V, W\rangle\rangle = \int_{\overline{Ad(\mathbb{H})}} \langle\phi(V), \phi(W)\rangle\omega_\phi.$$

Vamos mostar que $\langle\langle , \rangle\rangle$ é invariante por $\psi = Ad_k$, para cada $k \in \mathbb{H}$. Dados $V, W \in \mathfrak{g}$, seja $f : \overline{Ad(\mathbb{H})} \to \mathbb{R}$, definida por $f(\phi) = \langle\phi(V), \phi(W)\rangle$. Então, como a translação à direira R_ψ é um difeomorfismo positivo, temos

$$\begin{aligned}
\langle\langle V, W\rangle\rangle &= \int_{\overline{Ad(\mathbb{H})}} f\omega = \int_{\overline{Ad(\mathbb{H})}} (R_\psi)^*(f\omega) \\
&= \int_{\overline{Ad(\mathbb{H})}} (f \circ R_\psi)\omega = \int_{\overline{Ad(\mathbb{H})}} \langle\phi(\psi(V)), \phi(\psi(W))\rangle\omega_\phi \\
&= \langle\langle\psi(V), \psi(W)\rangle\rangle = \langle\langle Ad_k(V), Ad_k(W)\rangle\rangle.
\end{aligned}$$

Uma vez que $R_k = L_k \circ Ad_{k^{-1}}$, segue R_k é uma isometria de $\mathbb{G}$, para cada $k \in \mathbb{H}$.

Observe, então, que a restrição da métrica acima a $\mathbb{H}$ é biinvariante.

3 HIPERSUPERFÍCIES EM ESPAÇOS HOMOGÊNEOS RIEMANNIANOS

Considerando uma hipersuperfície $\varphi : M \to \mathbb{G}/\mathbb{H}$ em um espaço homogêneo riemanniano $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, em (BITTENCOURT and RIPOLL, 2006), foi definida uma aplicação de Gauss $\mathcal{N} : M \to \mathfrak{g}$ para o caso em que o grupo de Lie $\mathbb{G}$ possui uma métrica biinvariante, e foi obtida uma caracterização de hipersuperfícies CMC compactas cuja imagem dessa aplicação de Gauss está contida em um hemisfério fechado da esfera de $\mathfrak{g}$. Nesse capítulo, vamos definir uma aplicação $\eta : M \to \mathfrak{g}$ que generaliza a aplicação $\mathcal{N}$ para hipersuperfícies de um espaço homogêneo riemanniano $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, no caso em que o subgrupo $\mathbb{H}$ de $\mathbb{G}$ é tal que $Ad(\mathbb{H})$ tem fecho compacto em $GL(\mathfrak{g})$. Com o auxílio da aplicação η, vamos obter uma relação de rigidez para hipersuperfícies CMC completas de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ em relação ao tamanho de $|A|^2$, onde A é o operador de Weingarten de M.

3.1 A aplicação η de uma hipersuperfície de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$

Seja $\mathbb{G}$ é um grupo de Lie de dimensão $n + k + 1$, $n \geq 2$, $k \geq 0$, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e munido de uma métrica riemanniana $\langle , \rangle$, invariante à esquerda. Considere um subgrupo fechado $\mathbb{H}$ de $\mathbb{G}$, de dimensão k e com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$, tal que $Ad(\mathbb{H})$ tem fecho compacto em $GL(\mathfrak{g})$. De agora em diante, vamos considerar o espaço homogêneo $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, munido com a métrica riemanniana dada pelos Teoremas 2.6, 2.7 e discussão subsequente. Denotando tal métrica também por $\langle , \rangle$, vimos que a projeção canônica $\pi : \mathbb{G} \to \mathbb{G}/\mathbb{H}$ é uma submersão riemanniana, cujo espaço vertical em $T_g\mathbb{G}$ é $dL_g(\mathfrak{h})$. Denotaremos por $\overline{\nabla}$ e $\tilde{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de $\mathbb{G}$ e $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, respectivamente.
Seja τ_g a aplicação que representa a ação à esquerda de g sobre os elementos de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$. A aplicação τ_g é uma isometria de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ e temos que

$$\tau_g \circ \pi = \pi \circ L_g. \tag{3.1}$$

Para cada $V \in \mathfrak{g}$, associamos um campo $\xi(V)$ em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, definido por

$$\xi(V)(g\mathbb{H}) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tV)g\mathbb{H} = d\pi_g(dR_g)_e(V). \tag{3.2}$$

É imediato notar que $\xi(V)$ é um campo de Killing de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, com fluxo $\tau_{\exp(tV)}$. O resultado a seguir é essencialmente a Proposição 9.33 de (O'NEILL, 1983), escrita de maneira mais clara. Mostraremos que ξ é um anti-homomorfismo de $\mathfrak{g}$ na álgebra de Lie dos campos de Killing de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$.

Proposição 3.1. *Sejam $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ um espaço homogêneo, $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de $\mathbb{G}$ e ξ a aplicação definida por (3.2). Então,*

$$\xi([V, W]) = -[\xi(V), \xi(W)],$$

para quaisquer V e W em $\mathfrak{g}$.

Demonstração. Sejam $V, W \in \mathfrak{g}$ e $\alpha(t) = \exp(tV)$ o subgrupo a 1-parâmetro gerado por V. O fluxo do campo $\xi(-V)$ é $\tau_{\alpha(-t)}$ e o fluxo de V é $R_{\alpha(t)}$; logo, aplicando sucessivamente (3.2) e (3.1), obtemos

$$\begin{aligned}
[\xi(-V), \xi(W)](gH) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(d\tau_{\alpha(t)}(\xi(W)(\alpha(-t)gH)) - \xi(W)(gH)\right)\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(d\tau_{\alpha(t)}(d\pi_{\alpha(-t)g} dR_{\alpha(-t)g}(W)) - d\pi_g dR_g(W)\right)\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(d\pi_g dL_{\alpha(t)} dR_g dR_{\alpha(-t)}(W) - d\pi_g dR_g(W)\right)\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} d\pi_g dR_g \left(dL_{\alpha(t)} dR_{\alpha(-t)}(W) - W\right)\\
&= d\pi_g dR_g \left(\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(Ad_{\alpha(t)}(W) - W\right)\right)\\
&= d\pi_g dR_g([V, W])\\
&= \xi([V, W](gH).
\end{aligned}$$

□

Sejam $p \in \mathbb{G}/\mathbb{H}$ e $w \in T_p(\mathbb{G}/\mathbb{H})$. Considere o funcional linear sobre $\mathfrak{g}$, dado por $V \longmapsto \langle \xi(V)(p), w\rangle$, e seja ξ_w^* o único elemento de $\mathfrak{g}$ tal que, para cada $V \in \mathfrak{g}$,

$$\langle \xi(V)(p), w\rangle = \langle \xi_w^*, V\rangle.$$

Dado um campo de vetores W definido em $U \subset \mathbb{G}/\mathbb{H}$, definimos uma aplicação $\xi_W^* : U \to \mathfrak{g}$ por

$$\xi_W^*(p) = \xi_{W(p)}^*.$$

Considere, agora, uma hipersuperfície $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{G}/\mathbb{H}$, com campo normal unitário N globalmente definido[1]. Identificando $\varphi(p) \simeq p$, seja $\eta : M \longrightarrow \mathfrak{g}$ definida por

$$\eta = \xi_N^*. \tag{3.3}$$

Temos, para cada $V \in \mathfrak{g}$, que

$$\langle \xi(V)(p), N(p)\rangle = \langle V, \eta(p)\rangle. \tag{3.4}$$

Observe que aplicação η não se anula em nenhum ponto $p \in M$, uma vez que para cada $v \in T_p(\mathbb{G}/\mathbb{H})$ existe $V \in \mathfrak{g}$ tal que $\xi(V)(p) = v$ (cf. Proposição 9.33 e Corolário 9.38 de (O'NEILL, 1983)).

[1]Quando o espaço homogêneo $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ é orientável, a existência de um campo normal unitário globalmente definido sobre M é equivalente a orientabilidade de M. Vamos usar como hipótese a existência de tal campo, pois ela engloba também o caso em que o espaço homogêneo $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ não é orientável

No caso em que a métrica de $\mathbb{G}$ é biinvariante, a Proposição 3.1 de (BITTENCOURT and RIPOLL, 2006) assegura que a aplicação η é dada, para $p = g\mathbb{H}$, por

$$\eta(g\mathbb{H}) = dR_g^{-1}(d\pi_g)^{-1}(N(g\mathbb{H})), \tag{3.5}$$

onde $(d\pi_g)^{-1}$ é a inversa da aplicação $d\pi_g$ restrita ao espaço horizontal em g; a aplicação dada por (3.5) é a aplicação de Gauss de M, como definida em (BITTENCOURT and RIPOLL, 2006).

No exemplo a seguir, vamos calcular a aplicação η de uma hipersuperfície de um espaço homogêneo, a qual é, ela mesma, também um espaço homogêneo.

Exemplo 3.2. Sejam $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ um espaço homogêneo e $\mathbb{K}$ um subgrupo de Lie de $\mathbb{G}$ de codimensão l, $1 \leq l \leq k+1$, e álgebra de Lie $\mathfrak{K}$. Suponha que o subgrupo $\mathbb{L} = \mathbb{K} \cap \mathbb{H}$ seja conexo, e que $M = \mathbb{K}/\mathbb{L}$ tenha dimensão n, ou seja, que $\dim \mathbb{L} = k + 1 - l$.

Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : & M \longrightarrow \mathbb{G}/\mathbb{H} \\ & g\mathbb{L} \longmapsto g\mathbb{H} \end{aligned} . \tag{3.6}$$

É imediato verificar que φ está bem definida e é injetiva.

Denotando por $\pi_{\mathbb{K}}$ a projeção canônica de $\mathbb{K}$ sobre $\mathbb{K}/\mathbb{L} = M$, verificamos que $\varphi \circ \pi_{\mathbb{K}} = \pi|_{\mathbb{K}}$, de forma que

$$d\varphi_{e\mathbb{L}} \circ d(\pi_{\mathbb{K}})_e = d\pi_e|_{\mathfrak{K}}. \tag{3.7}$$

Seja $\mathfrak{h}^\perp$ o complemento ortogonal de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$, de sorte que $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{K}$ é o complemento ortogonal de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{K}$ em $\mathfrak{K}$. Veja que $d(\pi_{\mathbb{K}})_e|_{\mathfrak{h}_1}$ é uma isometria linear sobre $T_{e\mathbb{L}}M$. Agora, como $d\pi_e|_{\mathfrak{h}^\perp} : \mathfrak{h}^\perp \to T_{e\mathbb{H}}(\mathbb{G}/\mathbb{H})$ também é isometria linear, esse é o caso de $d\pi_e|_{\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{K}} = d\pi_e|_{\mathfrak{h}_1}$. Segue, pois, de (3.7) que $d\varphi_{e\mathbb{L}}$ é uma isometria linear de $T_{e\mathbb{L}}M$ sobre $d\pi_e(\mathfrak{h}_1)$.

Denotemos por θ_g e τ_g as aplicações que representam as ações do elemento $g \in \mathbb{K}$ sobre $\mathbb{K}/\mathbb{L}$ e $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, respectivamente. Veja que $\varphi \circ \theta_g(g'\mathbb{L}) = \tau_g \circ \varphi(g'\mathbb{L})$, para todos $g, g' \in \mathbb{K}$; logo,

$$d\varphi_{g\mathbb{L}} \circ d(\theta_g)_e = d(\tau_g)_{e\mathbb{H}} \circ d\varphi_{e\mathbb{L}},$$

e a discussão do parágrafo anterior garantem que $d\varphi_{g\mathbb{L}}$ é uma isometria linear sobre sua imagem. Portanto, φ é uma imersão isométrica.

Daqui em diante, identificaremos $M \simeq \varphi(M)$. Temos que $T_{g\mathbb{L}}M = d\pi_g(T_g\mathbb{K}) = dL_g(\mathfrak{K})$. Note também que

$$\dim(\mathfrak{K}^\perp \cap \mathfrak{h}^\perp) = \dim \mathfrak{h}^\perp - \dim(\mathfrak{K} \cap \mathfrak{h}^\perp) = (n+1) - (\dim(\mathfrak{K}) - k - 1 + l) = 1.$$

Sejam $\mathfrak{K}^\perp$ o complemento ortogonal de $\mathfrak{K}$ em $\mathfrak{g}$ e $X \in \mathfrak{K}^\perp \cap \mathfrak{h}^\perp$ unitário. Vamos mostrar que o campo $N(g\mathbb{L}) = d\pi_g(X)$ está bem definido, de modo a ser um campo normal unitário em M. Se $g_1\mathbb{L} = g_2\mathbb{L} \in M$, então $g_1 = g_2 h$, para algum $h \in \mathbb{L}$. Uma vez que $\pi \circ R_{h^{-1}} = \pi$, temos que

$$d\pi_{g_1}(X_{g_1}) = d(\pi \circ R_{h^{-1}})_{g_2 h}(X_{g_2 h}) = d\pi_{g_2}(dR_{h^{-1}}(X_{g_2 h})). \tag{3.8}$$

Para cada $h \in \mathbb{L}$, sabemos que R_h é uma isometria de $\mathbb{G}$ tal que $R_h(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$ e $R_h(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$. Assim, $dR_h(\mathfrak{K}^\perp \cap \mathfrak{h}^\perp) = \mathfrak{K}^\perp \cap \mathfrak{h}^\perp$, de sorte que $dR_h(X) = \pm X$. Uma vez que $\mathbb{L}$ é conexo e a aplicação $h \mapsto dR_h(X)$ é contínua, com $dR_e(X) = X$, então $dR_h(X) = X$ sobre $\mathbb{L}$. Portanto, (3.8) assegura a boa definição de N.

Para cada $V \in \mathfrak{g}$ e $g \in \mathbb{K}$, lembrando da identificação $g\mathbb{L} \simeq g\mathbb{H}$, temos de (3.4) e (3.2) que

$$\begin{aligned} \langle \eta(g\mathbb{H}), V \rangle &= \langle \xi(V)(g\mathbb{H}), N(g\mathbb{H}) \rangle \\ &= \langle d\pi_g dR_g(V), d\pi_g(X) \rangle \\ &= \langle dR_g(V), X_g \rangle \\ &= \langle Ad_{g^{-1}}(V), X \rangle \\ &= \langle (Ad_{g^{-1}})^*(X), V \rangle. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Então, neste caso a aplicação η é dada por

$$\eta(g\mathbb{H}) = (Ad_{g^{-1}})^*(X),$$

onde $(Ad_{g^{-1}})^*$ denota a aplicação adjunta de $Ad_{g^{-1}}$ com relação ao produto interno de $\mathfrak{g}$. Observe que $\langle Ad_{g^{-1}}(V), X \rangle = 0$ para $V \in \mathfrak{K} + \mathfrak{h}$, de forma que

$$\eta(g\mathbb{H}) = \langle Ad_{g^{-1}}(X), X \rangle X. \tag{3.10}$$

Agora, levando em conta que $M \simeq \varphi(M) = \pi(\mathbb{K})$, considere, para $\bar{g} \in \mathbb{G}$, a hipersuperfície $M_{\bar{g}} = \tau_{\bar{g}}(M) = \pi(\bar{g}\mathbb{K})$. Seja $\bar{\eta} = \xi^*_{\bar{N}}$, onde $\bar{N} = d\tau_{\bar{g}}(N)$ é o campo normal unitário de $M_{\bar{g}}$. Novamente por (3.4) e (3.2), temos que

$$\begin{aligned} \langle \overline{\eta}(\bar{g}g\mathbb{H}), V \rangle &= \langle \xi(V)(\bar{g}g\mathbb{H}), \bar{N}(\bar{g}g\mathbb{H}) \rangle \\ &= \langle d\pi_{\bar{g}g} dR_{\bar{g}g}(V), d\tau_{\bar{g}}(N(g\mathbb{H})) \rangle \\ &= \langle d\tau_{\bar{g}} d\pi_g dL_{\bar{g}}^{-1} dR_g dR_{\bar{g}}(V), d\tau_{\bar{g}}(N(g\mathbb{H})) \rangle \\ &= \langle \xi(Ad_{\bar{g}}^{-1}(V))(g\mathbb{H}), N(g\mathbb{H}) \rangle \\ &= \langle \eta(g\mathbb{H}), Ad_{\bar{g}}^{-1}(V) \rangle \\ &= \langle (Ad_{\bar{g}}^{-1})^*(\eta(g\mathbb{H})), V \rangle. \end{aligned}$$

Então,

$$\overline{\eta}(\bar{g}g\mathbb{H}) = (Ad_{\bar{g}}^{-1})^*(\eta(g\mathbb{H})). \tag{3.11}$$

Vamos supor, agora, que $\mathbb{K}$ é normal em $\mathbb{G}$. Seja $f : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(g) = \langle Ad_{g^{-1}}(X), X\rangle$. Para $w \in T_g\mathbb{K}$, seja $\alpha(t) = g\exp(tW)$, onde $W = dL_g^{-1}(w) \in \mathfrak{K}$. Temos que

$$\begin{aligned} w(f) &= \langle \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_{\alpha(t)^{-1}}(X), X\rangle \\ &= \langle \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_{\exp(-tW)} Ad_{g^{-1}}(X), X\rangle \\ &= \langle [Ad_{g^{-1}}(X), W], X\rangle = 0, \end{aligned}$$

onde utilizamos, na última igualdade, que $X \in \mathfrak{K}^{\perp}$, juntamente com o fato de $\mathfrak{K}$ ser um ideal de $\mathfrak{g}$. Assim, f é constante e igual a $f(e) = \langle X, X\rangle = 1$; a partir daí, (3.10) garante que η é constante e igual a X.

Por fim, vamos mostrar que M tem curvatura média constante em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$. Dado $p = \pi(x) \in M$, seja $(e_1, ..., e_n)$ uma base ortonormal de T_pM, e sejam $E_1, ..., E_n$ vetores no espaço horizontal em x, tais que $d\pi_x(E_i) = e_i$, para $1 \leq i \leq n$. Uma vez que $N(p) = d\pi_x(X)$ é normal a T_pM, segue que cada E_i pertence a $X^{\perp}$. Como o espaço horizontal em x é $dL_x(\mathfrak{h}^{\perp})$, segue que $E_i \in \mathfrak{K} \cap \mathfrak{h}^{\perp}$, para $1 \leq i \leq n$. Sejam $E_{n+1}, ..., E_{n+k}$ vetores ortonormais verticais em x, ou seja, em $dL_x(\mathfrak{h})$. Para cada $1 \leq i \leq n+k$, estendemos E_i a um campo invariante à esquerda em $\mathbb{G}$.

Vamos mostrar que $\overline{\nabla}_{E_i} E_i = 0$, para $n+1 \leq i \leq n+k$. De fato, dados $Y \in \mathfrak{h}$ e $Z \in \mathfrak{g}$, temos pela fórmula de Koszul que

$$\begin{aligned} 2\langle \overline{\nabla}_Y Y, Z\rangle &= -\langle Y, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [Z, Y]\rangle + \langle Z, [Y, Y]\rangle \\ &= 2\langle Y, [Z, Y]\rangle. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Dado $h \in \mathbb{H}$, sabemos que Ad_h é uma isometria linear de $\mathfrak{g}$ e que $Ad_h(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, logo, $Ad_h(\mathfrak{h}^{\perp}) = \mathfrak{h}^{\perp}$. Desse modo, temos que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^{\perp}] \subset \mathfrak{h}^{\perp}$. Daí, se $Z \in \mathfrak{h}^{\perp}$, então $\langle Y, [Z, Y]\rangle = 0$. Por outro lado, se $Z \in \mathfrak{h}$, então, como a métrica induzida sobre $\mathbb{H}$ é biinvariante, tem-se pela identidade de Weyl (2.3) que $\langle Y, [Z, Y]\rangle = -\langle [Y, Y], Z\rangle = 0$. Segue de (3.12) que $\overline{\nabla}_Y Y = 0$. Dessa forma, para $n+1 \leq i \leq n+k$, temos

$$\langle \overline{\nabla}_{E_i} X, E_i\rangle = -\langle X, \overline{\nabla}_{E_i} E_i\rangle = 0. \tag{3.13}$$

Por fim, denotemos por H a curvatura média de M na direção de N. Usando o item (c) do Lema 2.2, juntamente com (3.13) e a fórmula de Koszul, temos que

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \langle \tilde{\nabla}_{e_i} N, e_i\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{E_i} X, E_i\rangle \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n+k} \langle \overline{\nabla}_{E_i} X, E_i\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n+k} \langle E_i, [E_i, X]\rangle = -\frac{1}{n} tr(ad_X). \end{aligned}$$

No resultado a seguir, os dois primeiros itens formam uma generalização da Proposição 3.4 de (BITTENCOURT and RIPOLL, 2006), enquanto o terceiro item caracteriza as hipersuperfícies de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ que têm aplicação η constante.

Proposição 3.3. *Seja $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{G}/\mathbb{H}$ uma hipersuperfície conexa e completa, com campo normal unitário N. Se $\eta : M \to \mathfrak{g}$ é a aplicação definida como em (3.3), então:*

(*a*) *O subespaço $\mathfrak{K} = \eta(M)^{\perp} = \{V \in \mathfrak{g}; \langle \eta(p), V\rangle = 0,\ \forall\ p \in M\}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$.*

(*b*) *Se $\mathbb{K}$ é o subgrupo de Lie conexo de $\mathbb{G}$ com álgebra de Lie $\mathfrak{K}$, então M é invariante pela ação à esquerda de $\mathbb{K}$. Reciprocamente, se M é invariante pela ação à esquerda de um subgrupo $\tilde{\mathbb{K}}$ de $\mathbb{G}$, e $\tilde{\mathfrak{K}}$ é a álgebra de Lie de $\tilde{\mathbb{K}}$, então $\tilde{\mathfrak{K}} \subset \eta(M)^{\perp}$.*

(*c*) *Se η é constante, então $\mathfrak{K}$ é um ideal de codimensão 1 de $\mathfrak{g}$. Ademais, se $\mathbb{K}$ é o subgrupo de Lie conexo de $\mathbb{G}$ com álgebra de Lie $\mathfrak{K}$, então M é isométrica ao espaço homogêneo $\mathbb{K}/(\mathbb{K} \cap \mathbb{H})$.*

Demonstração. Note que, por (3.4), $V \in \mathfrak{K}$ se, e somente se, $\xi(V)$ é tangente a M.

(*a*) Tome V e W em $\mathfrak{K}$. Como $\xi(V)$ e $\xi(W)$ são tangentes a M, então $\xi([V, W]) = -[\xi(V), \xi(W)]$ também é tangente a M; assim, novamente por (3.4),

$$\langle [V, W], \eta(p)\rangle = \langle \xi([V, W])(p), N(p)\rangle = 0$$

para todo $p \in M$, de sorte que $[V, W] \in \mathfrak{K}$.

(*b*) Já que $\mathbb{K}$ é conexo, ele é gerado por uma vizinhança qualquer da identidade; portanto, é suficiente mostrar que M é invariante pela ação dos subgrupos a um-parâmetro $\alpha(t) = \exp(tV)$ com $V \in \mathfrak{K}$. Seja, pois, $V \in \mathfrak{K}$. A completude de M garante que o campo $\xi(V)$, como campo sobre M, é completo. Então, dado $p \in M$, a curva integral $t \mapsto \exp(tV)p$ de $\xi(V)$ partindo de p deve ser uma curva em M.

Reciprocamente, se M é invariante pela ação à esquerda de um subgrupo a um-parâmetro $\alpha(t) = \exp(tV)$ de $\mathbb{G}$ e $p \in M$, temos que $\exp(tV)p \in M$. Então, $\xi(V)$ é tangente a M e, assim, $V \in \eta(M)^{\perp}$.

(*c*) Por (3.11), podemos supor que $e\mathbb{H} \in M$; realmente, tomando $g \in \pi^{-1}(M)$, temos que $e\mathbb{H} \in \tau_{g^{-1}}(M)$, e (3.11) garante que a aplicação η de $\tau_{g^{-1}}(M)$ permanece constante. Suponha, pois, que $e\mathbb{H} \in M$ e $\eta(p) = X$ para todo $p \in M$, e seja $\widetilde{N}$ o levantamento horizontal de N. Como M é invariante por $\mathbb{K}$, a hipersuperfície $\pi^{-1}(M)$ de $\mathbb{G}$ também o é. Como $e \in \pi^{-1}(M)$, segue que $\mathbb{K} \subset \pi^{-1}(M)$. Vamos mostrar que $\pi(\mathbb{K}) = M$.

Sabemos que $\mathbb{K} \subset \pi^{-1}(M)$ e $\dim \mathbb{K} = \dim \pi^{-1}(M)$, logo, $\mathbb{K}$ é a componente conexa de $\pi^{-1}(M)$ que contém a identidade. Se $g \in \pi^{-1}(M)$, então, pela invariância à esquerda de $\pi^{-1}(M)$ por $\mathbb{K}$, temos que $R_g(\mathbb{K}) \subset \pi^{-1}(M)$. Como $\pi : \pi^{-1}(M) \to M$ é uma submersão e, portanto, uma aplicação aberta, os conjuntos $\pi(R_g(\mathbb{K}))$ são abertos em M

para cada $g \in \pi^{-1}(M)$. Dados g_1 e g_2 em $\pi^{-1}(M)$, $x \in \pi(R_{g_1}(\mathbb{K}))$ e $y \in \pi(R_{g_2}(\mathbb{K}))$, se existe $z \in \pi(R_{g_1}(\mathbb{K})) \cap \pi(R_{g_2}(\mathbb{K}))$ podemos tomar k_1 e k_2 em $\mathbb{K}$ tais que $k_1 x = z = k_2 y$ e, assim, $y = k_2^{-1} k_1 x \in \pi(R_{g_1}(\mathbb{K}))$ e $x = k_1^{-1} k_2 y \in \pi(R_{g_2}(\mathbb{K}))$. Conclui-se daí que os abertos $\pi(R_g(\mathbb{K}))$ com $g \in \pi^{-1}(M)$ são, dois a dois, iguais ou disjuntos. Uma vez que M é conexa e é igual a união de tais conjuntos abertos, devemos ter $M = \pi(R_g(\mathbb{K}))$ para qualquer $g \in \pi^{-1}(M)$. Em particular, para $g = e$, temos $M = \pi(\mathbb{K})$.

Como $\pi(\mathbb{K}) = M$, a ação de $\mathbb{K}$ em M é transitiva. Em relação a essa ação, o grupo de isotropia do ponto $e\mathbb{H} \in M$ é o grupo $\mathbb{K} \cap \mathbb{H}$, e assim temos que $M \simeq \mathbb{K}/(\mathbb{K} \cap \mathbb{H})$.

Resta mostrar que $\mathfrak{K}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$. Observe que o campo X é normal a $\mathbb{K}$, logo, é paralelo a $\widetilde{N}$; além disso, em e, vale que

$$\langle \eta(e\mathbb{H}), V \rangle = \langle d\pi_e(V), d\pi_e(\widetilde{N}) \rangle = \langle V, \widetilde{N}(e) \rangle,$$

para todo $V \in \mathfrak{g}$. Portanto, $\widetilde{N}(e) = X$ e, consequentemente, $N = d\pi(X)$. Segue daí que, para $g \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \langle X, X \rangle &= \langle X, X \rangle(g) \\ &= \langle \eta(g\mathbb{H}), X(g) \rangle \\ &= \langle d\pi_g dR_g(X), d\pi_g(X) \rangle \\ &= \langle dR_g(X), X(g) \rangle \\ &= \langle Ad_{g^{-1}}(X), X \rangle. \end{aligned}$$

Com isso, concluímos que $g \mapsto \langle Ad_{g^{-1}}(X), X \rangle$ é constante sobre $\mathbb{K}$. Agora, derivando este valor em e em relação a cada $V \in \mathfrak{K}$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= V \langle Ad_{g^{-1}}(X), X \rangle \\ &= \langle \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_{\exp(-tV)}(X), X \rangle \\ &= \langle [X, V], X \rangle. \end{aligned}$$

Segue que $[X, V] \in X^{\perp} = \mathfrak{K}$, e que $\mathfrak{K}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$. □

Observe que o item (c) acima, junto com o Exemplo (3.2), mostra que a subálgebra $\mathfrak{K} = X^{\perp}$ é um ideal se, e somente se, a aplicação η for constante. Observe ainda que para obter $M \simeq \mathbb{K}/(\mathbb{K} \cap H)$ não é necessário que $\eta = X$. De fato, basta que a aplicação η seja paralela ao vetor X, como pode-se ver no Exemplo 3.2 (cf. (3.10)). A seguir, fornecemos um critério para, no caso de η ser paralela a um tal vetor, saber se η é constante.

Proposição 3.4. *Sejam $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{G}/\mathbb{H}$ uma hipersuperfície conexa e completa, com campo normal unitário N, e $X \in \mathfrak{g}$ unitário. Suponha que a aplicação $\eta : M \to \mathfrak{g}$,* *definida como em (3.3), é paralela a X em cada ponto de M. Se $|\eta|$ é limitado, então η é constante sobre M.*

Demonstração. Como na proposição anterior vamos supor, por simplicidade, que $e\mathbb{H} \in M$ (como lá, tal suposição não destrói o fato de $|\eta|$ ser limitado), e assim $\pi(\mathbb{K}) = M$ e $N = d\pi(X)$. Por (3.10) é suficiente mostrar que $g \mapsto \langle Ad_{g^{-1}}(X), X\rangle$ é constante.

Seja $V \in \mathfrak{K}$ e $u_V(t) = \langle Ad_{\exp(tV)}(X), X\rangle$. Temos

$$\begin{aligned} u_V'(t) &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \langle Ad_{\exp((s+t)V)}(X), X\rangle \\ &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \langle Ad_{\exp(sV)} Ad_{\exp(tV)}(X), X\rangle \\ &= \langle [Ad_{\exp(tV)}(X), V], X\rangle \\ &= \langle Ad_{\exp(tV)}(X), X\rangle \langle [X,V], X\rangle \\ &= \langle [X,V], X\rangle u_V(t), \end{aligned}$$

onde, na penúltima igualdade, utilizamos o fato de que $X^{\perp} = \mathfrak{K}$, juntamente com a fórmula para expansão ortonormal de $Ad_{\exp(tV)}(X)$. A solução da equação acima com $u_V(0) = 1$ é $u_V(t) = e^{tC_V}$, onde $C_V = \langle [X,V], X\rangle$. Se $|\eta|$ é limitado, então $C_V = 0$ e $u_V = 1$, para todo $V \in \mathfrak{K}$. Como X é unitário, $Ad_{\exp(tV)}(X) = X$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $V \in \mathfrak{K}$. Por $\mathbb{K}$ ser conexo, todo elemento de $\mathbb{K}$ é um produto de elementos da forma $\exp(tV)$, com $t \in \mathbb{R}$ e $V \in \mathfrak{K}$. Segue daí que $\langle Ad_g(X), X\rangle = 1$ para todo $g \in \mathbb{K}$ e, portanto, η é constante igual a X. □

3.2 Resultados principais

Antes de enunciar nossos resultados principais a respeito de uma hipersuperfície $\varphi : M \to \mathbb{G}/\mathbb{H}$ com campo normal unitário N, vamos calcular o laplaciano da função $f_V : M \to \mathbb{R}$, dada por $f_V = \langle V, N\rangle$, onde V é um campo de Killing de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$. Esse é um cálculo clássico, aparecendo em várias referências, e apresentado aqui por completude.

Lema 3.5. *Sejam $\tilde{M}$ um espaço homogêneo e $\varphi : M \longrightarrow \tilde{M}$ uma hipersuperfície conexa com campo normal unitário N. Considere um campo de Killing V em $\tilde{M}$ e a função $f_V = \langle V, N\rangle$ definida sobre M. Temos que*

$$\Delta f_V = -n\langle \nabla H, V\rangle - (\widetilde{Ric}(N) + |A|^2) f_V,$$

onde Δ é o laplaciano de M, $\widetilde{Ric}$ o tensor de Ricci de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, H a curvadura média de M e A o operador de Weingarten com relação a N.

Demonstração. Para $Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\langle \nabla f_V, Y\rangle = Y\langle V, N\rangle = \langle \tilde{\nabla}_Y V, N\rangle + \langle V, \tilde{\nabla}_Y N\rangle$$

$$= -\langle (\tilde{\nabla}_N V)^\top, Y\rangle - \langle A(V^\top), Y\rangle.$$

Como V é um campo de Killing, temos $\langle \tilde{\nabla}_N V, N\rangle = 0$ e, daí,

$$\nabla f_V = -A(V^\top) - \tilde{\nabla}_N V. \tag{3.14}$$

Assim,

$$\Delta f = -\mathrm{div}_M(\tilde{\nabla}_N V) - \mathrm{div}_M(A(V^\top)).$$

Dado um ponto $p \in M$, seja $(e_1, ..., e_n)$ um referencial ortonormal definido numa vizinhança de p, geodésico em p e tal que $Ae_i(p) = \lambda_i e_i(p)$. Vamos calcular ambos os divergentes acima em p. Para o primeiro deles, temos em p

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_M(\tilde{\nabla}_N V) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{\nabla}_N V, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big(\langle \tilde{R}(e_i, N)V, e_i\rangle + \langle \tilde{\nabla}_N \tilde{\nabla}_{e_i} V, e_i\rangle + \langle \tilde{\nabla}_{[e_i,N]} V, e_i\rangle \Big) \\
&= \widetilde{\mathrm{Ric}}(N, V) + \sum_{i=1}^{n} \Big(N\langle \tilde{\nabla}_{e_i} V, e_i\rangle - \langle \tilde{\nabla}_{e_i} V, \tilde{\nabla}_N e_i\rangle - \langle \tilde{\nabla}_{e_i} V, -Ae_i - \tilde{\nabla}_N e_i\rangle \Big) \\
&= \widetilde{\mathrm{Ric}}(N, V),
\end{aligned}$$

onde, nas duas últimas igualdades acima, utilizamos a equação de Killing, juntamente com $Ae_i(p) = \lambda_i e_i(p)$. Para o segundo divergente, em p,

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_M(AV^\top) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \tilde{\nabla}_{e_i} A(V^\top), e_i\rangle = -\sum_{i=1}^{n} \langle \tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{\nabla}_{V^\top} N, e_i\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \Big(\langle \tilde{R}(e_i, V^\top)N, e_i\rangle + \langle \tilde{\nabla}_{V^\top} \tilde{\nabla}_{e_i} N, e_i\rangle + \langle \tilde{\nabla}_{[e_i,V^\top]} N, e_i\rangle \Big) \\
&= -\widetilde{\mathrm{Ric}}(V^\top, N) - \sum_{i=1}^{n} \Big(V^\top\langle \tilde{\nabla}_{e_i} N, e_i\rangle + \langle Ae_i, \tilde{\nabla}_{V^\top} e_i\rangle - \langle Ae_i, \tilde{\nabla}_{e_i} V^\top - \tilde{\nabla}_{V^\top} e_i\rangle \Big) \\
&= -\widetilde{\mathrm{Ric}}(V - f_V N, N) + V^\top(nH) + \sum_{i=1}^{n} \langle Ae_i, \tilde{\nabla}_{e_i}(V - f_V N)\rangle \\
&= -\widetilde{\mathrm{Ric}}(V, N) + f_V \widetilde{\mathrm{Ric}}(N) + V^\top(nH) + f_V |A|^2,
\end{aligned}$$

onde utilizamos a autoadjunção do operador de Weingarten na terceira igualdade, o fato do referencial ser geodésico em p na quarta igualdade e a equação de Killing na quinta igualdade. Daí, segue o resultado enunciado. □

Agora, usaremos o lema anterior para obter um resultado de rigidez para as hipersuperfícies do Exemplo 3.2, referente a hipersuperfícies CMC compactas.

Teorema 3.6. *Seja $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{G}/\mathbb{H}$ uma hipersuperfície com campo normal unitário N, conexa, compacta e CMC. Suponha que $|A|^2 \leq -\widetilde{Ric}(N)$. Então, $|A|^2 = -\widetilde{Ric}(N)$ e $\varphi(M)$ é isométrica a $\mathbb{K}/\mathbb{L}$, onde $\mathbb{K}$ é um subgrupo de Lie conexo de $\mathbb{G}$, gerado por um ideal $\mathfrak{K}$ de $\mathfrak{g}$, de codimensão 1, e $\mathbb{L} = \mathbb{K} \cap \mathbb{H}$.*

Demonstração. Sejam $(E_1, ..., E_{n+k+1})$ uma base ortonormal de $\mathfrak{g}$, $V_i = \xi(E_i)$ e $f_i = f_{V_i} = \langle V_i, N\rangle$, para $i = 1, ..., n+k+1$. Temos que

$$\langle \eta(p), E_j\rangle = \langle V_j(p), N(p)\rangle = f_j$$

e, dessa forma, η se escreve na base acima como

$$\eta = \sum_{i=1}^{n+k+1} f_i E_i.$$

Pelo Lema 3.5, obtemos

$$\Delta f_j = -(\widetilde{\mathrm{Ric}}(N) + |A|^2) f_j,$$

de modo que

$$\Delta f_j^2 = 2|\nabla f_j|^2 - 2(\widetilde{\mathrm{Ric}}(N) + |A|^2) f_j^2.$$

Nossa hipótese sobre o tamanho de $|A|^2$ garante que $\Delta f_j^2 \geq 0$ sobre M. Como M é compacta, segue do teorema de Hopf que cada função f_i é constante, e portanto η é constante. Se $\eta = X$, concluímos pela Proposição 3.3 que $\mathfrak{K} = X^\perp$ é um ideal de codimensão 1 que gera um subgrupo conexo $\mathbb{K}$, e M é isométrica ao espaço homogêneo $\mathbb{K}/(\mathbb{K} \cap \mathbb{H})$. □

Observe que nossa hipótese sobre o tamanho de $|A|^2$, não faz sentido para espaços homogêneos $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ com curvatura de Ricci não negativa. Pode-se considerar o caso em que a curvatura de Ricci troca de sinal em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, mas o caso mais interessante é quando a curvatura de Ricci é não positiva em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$.

Em relação ao caso de grupos de Lie $\mathbb{G}$ que admitem uma métrica invariante à esquerda de curvatura de Ricci não positiva, foi mostrado em (MIATELLO, 1986) a existência de tais métricas em certos produtos semidiretos. No caso de grupos simples foi mostrado em (MILNOR, 1976) que os grupos simples $SL(2, \mathbb{R})$ e o grupo $E(1, 1)$ das isometrias do espaço de Minkowski de dimensão 2 admitem uma tal métrica. Também foi mostrado em (MIATELLO, LEITE, and MIATELLO, 1984) e (LEITE, MIATELLO *et al.*, 1982) a existência de métricas de curvatura de Ricci estritamente negativa, respectivamente, em certos grupos simples complexos e nos grupos $SL(n, \mathbb{R})$ com $n \geq 3$. Tais observações dão sentido aos corolários a seguir.

Corolário 3.7. *Suponha que $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ é um espaço homogêneo tal que $\mathfrak{h}$ não está contido em nenhum ideal próprio de $\mathfrak{g}$. Então não pode existir uma hipersuperfície $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{G}/\mathbb{H}$ conexa, compacta, com campo normal unitário N e CMC tal que $|A|^2 \leq -\widetilde{Ric}(N)$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que exista tal hipersuperfície. Pelo teorema anterior, M seria isométrica a $\mathbb{K}/(\mathbb{K} \cap \mathbb{H})$, onde $\mathbb{K}$ é o subgrupo gerado por um ideal $\mathfrak{K}$ de codimensão 1. Mas, o fato de $\mathbb{K}/(\mathbb{K} \cap \mathbb{H})$ ser um espaço homogêneo de dimensão n, garante que a dimensão de $\mathbb{K} \cap \mathbb{H}$ é igual a dimensão de $\mathbb{H}$, e daí $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{K}$ contraría nossa hipótese. □

Corolário 3.8. *Seja $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{G}/\mathbb{H}$ uma hipersuperfície conexa, compacta, com campo normal unitário N e CMC. Se $\mathbb{G}$ é um grupo semisimples, então existe $p \in M$ tal que $|A|^2 > -\widetilde{Ric}(N)$ em p. Em particular, se $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ tem curvatura de Ricci não positiva e $\mathbb{G}$ é semisimples, então $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ não possui hipersuperfícies totalmente geodésicas compactas.*

Demonstração. Por contradição, se $|A|^2 \leq -\widetilde{\mathrm{Ric}}(N)$ em M, então $\mathfrak{g}$ conteria um ideal $\mathfrak{K}$ de codimensão 1. Nas notações da Proposição (3.3), temos $\mathfrak{K} = X^{\perp}$, para algum $X \in \mathfrak{g}$. A partir daí, um cálculo imediato garante que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset X^{\perp}$. Mas, se a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é semisimples, então $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ por (2.2). □

Corolário 3.9. *Seja $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{G}/\mathbb{H}$ uma hipersuperfície conexa, compacta, com campo normal unitário N e CMC. Se $\mathbb{H}$ é compacto e $\mathbb{G}$ não possui subgrupo normal compacto, então existe $p \in M$ tal que $|A|^2 > -\widetilde{Ric}(N)$ em p. Em particular, se $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ tem curvatura de Ricci não positiva, $\mathbb{H}$ é compacto e $\mathbb{G}$ não possui subgrupo normal compacto, então $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ não possui hipersuperfícies totalmente geodésicas compactas.*

Demonstração. Suponha que o resultado é falso. Pelo teorema anterior, existe um espaço homogêneo compacto $\mathbb{K}/\mathbb{L}$, onde $\mathbb{K}$ é um subgrupo normal de $\mathbb{G}$. Como vimos na demonstração do item (c) da Proposição 3.3, $\mathbb{K}$ é a componente conexa da identidade de $\pi^{-1}(M)$ que é um fechado de $\mathbb{G}$. Em particular, $\mathbb{K}$ é fechado em $\mathbb{G}$, de sorte que $\mathbb{L} = \mathbb{K} \cap \mathbb{H}$ é compacto. Mas daí, pelo Lema 11.18 de O'NEILL (1983), o subgrupo $\mathbb{K}$ deveria ser compacto, contradizendo nossas hipóteses. □

O Teorema 3.6 não é válido para hipersuperfícies CMC completas. A seguir exibimos um exemplo onde o teorema não vale no caso completo.

Exemplo 3.10. Vamos considerar o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$ como um grupo de Lie, dado pelo produto semidireto $\mathbb{R}_+^* \ltimes_\tau \mathbb{R}^n$, onde $\tau : \mathbb{R}_+^* \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$ é o homomorfismo dada por $\tau(t) = tId$. Dessa forma, o produto e a inversão em $\mathbb{H}^{n+1}$ são dados por

$$(t, v) \cdot (s, w) = (ts, tw + v), \quad (t, v)^{-1} = \left(\frac{1}{t}, -\frac{1}{t}v\right).$$

Um cálculo simples fornece $dL_{(t,v)}^{-1}(X, W) = (\frac{1}{t}X, \frac{1}{t}W)$ para $(t, v) \in \mathbb{H}^{n+1}$ e

X, W em sua álgebra de Lie. Tomando em $T_{(1,0)}\mathbb{H}^{n+1}$ o produto interno canônico de $\mathbb{R}^{n+1}$, a métrica invariante à esquerda obtida é exatamente a métrica do espaço hiperbólico.

Existem (cf. Capítulo 8 de (DO CARMO, 2011)) hipersuperfícies de $\mathbb{H}^{n+1}$, chamadas de hiperesferas, que são totalmente umbílicas e com curvatura média constante $H = \alpha$, com $0 < \alpha < 1$. Se A é o operador de Weingarten de uma tal hipersuperfície em relação ao campo normal unitário N, e Ric é a curvatura de Ricci de $\mathbb{H}^{n+1}$, temos que $|A|^2 = n\alpha^2 < n = -\mathrm{Ric}(N)$. Portanto, nesse caso a desigualdade $|A|^2 \leq -\mathrm{Ric}(N)$ não implica $|A|^2 = -\mathrm{Ric}(N)$.

Embora o Teorema 3.6 não seja válido para hipersuperfícies CMC completas, pode-se adicionar uma condição sobre a aplicação η para torná-lo verdadeiro. Para tanto, dada uma variedade riemanniana M, seja $d(p) = d(p, q)$ a distância riemanniana de M a partir de algum ponto q fixado. Dado $X \in \mathfrak{g}$ unitário, seja $\theta(p) = \theta(X, \eta(p))$ o ângulo entre X e $\eta(p)$. Se $\theta(p) \to 0$, quando $d(p) \to +\infty$, então $\langle \frac{\eta(p)}{|\eta(p)|}, X\rangle \to 1$ quando $d(p) \to +\infty$; se, além disso, η for limitada, então $\langle \eta(p), Y\rangle \to 0$, quando $d(p) \to +\infty$, para todo $Y \in X^{\perp}$.

Teorema 3.11. *Seja $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{G}/\mathbb{H}$ uma hipersuperfície conexa, completa, com campo normal unitário N e CMC. Suponha que η é limitada e que $\theta(X, \eta(p)) \to 0$ quando $d(p) \to +\infty$, para um certo $X \in \mathfrak{g}$ unitário. Se $|A|^2 \leq -\widetilde{Ric}(N)$, então $\varphi(M)$ é isométrica a $\mathbb{K}/\mathbb{L}$, onde $\mathbb{K}$ é um subgrupo de Lie conexo de $\mathbb{G}$, gerado por um ideal $\mathfrak{K}$ de $\mathfrak{g}$ de codimensão 1, e $\mathbb{L} = \mathbb{K} \cap \mathbb{H}$.*

Demonstração. Seja $(E_1, ..., E_{n+k+1})$ uma base ortonormal de $\mathfrak{g}$ tal que $E_1 = X$. Considere $V_i = \xi(E_i)$ e $f_i = f_{V_i} = \langle V_i, N\rangle$, para $i = 1, ..., n+k+1$. Como na prova do teorema anterior, temos

$$\eta = \sum_{i=1}^{n+k+1} f_i E_i.$$

Para $i = 2, ..., n+k+1$, a hipótese de convergência garante que $f_i^2(p) \to 0$ quando $d(p) \to +\infty$, de sorte que f_i^2 atinge seu máximo em algum ponto de M. Além disso,

$$\Delta f_i^2 = 2|\nabla f_i|^2 - 2(\widetilde{\mathrm{Ric}}(N) + |A|^2) f_j^2 \geq 0.$$

Portanto, f_i é sub-harmônica, e a versão clássica do princípio do máximo (cf. (GILBARG and TRUDINGER, 2001)) assegura que f_i^2 é constante, logo nula, para $i \geq 2$. Assim, a aplicação η é paralela a X e, pela Proposição 3.4, concluímos que η é constante igual a X. Segue da Proposição 3.3 que $\mathfrak{K} = X^{\perp}$ é um ideal de codimensão 1 que gera um subgrupo conexo $\mathbb{K}$ de $\mathbb{G}$, e M é isométrica ao espaço homogêneo $\mathbb{K}/(\mathbb{K} \cap \mathbb{H})$.

□

4 HIPERSUPERFÍCIES EM GRUPOS DE LIE LORENTZIANOS

Nesse capítulo, vamos considerar um grupo de Lie lorentziano G^{n+1} com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, e obter alguns resultados a respeito de uma hipersuperfície espacial $\varphi : M^n \to G^{n+1}$ orientada por um campo normal unitário tipo-tempo N. Os resultados que obteremos generalizam resultados de (ALÍAS and CAMINHA, 2017).

Sejam $\tilde{\nabla}$ e ∇ as conexões de Levi-Civita de G e M, respectivamente. Seja A, dado por $Av = -\tilde{\nabla}_v N$, o operador de Weingarten da imersão φ e H a curvatura média, dada por

$$H = -\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(A).$$

Para cada $X \in \mathfrak{g}$, vamos considerar a função $f_X : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_X = \langle X, N\rangle.$$

Como a métrica de G é biinvariante, cada $X \in \mathfrak{g}$ é um campo de Killing. Assim, podemos usar uma versão lorentziana do Lema 3.5 para calcular Δf_X.

Lema 4.1. *Seja G^{n+1} um grupo lorentziano e $\varphi : M^n \to G^{n+1}$ uma hipersuperfície espacial com campo normal unitário N. Seja $X \in \mathfrak{g}$ e $f_X = \langle X, N\rangle$ definida sobre M. Então,*

$$\nabla f_X = -AX^\top - \tilde{\nabla}_N X \tag{4.1}$$

e

$$\Delta f_X = n\langle \nabla H, X\rangle + (Ric_G(N) + |A|^2) f_X. \tag{4.2}$$

De maneira a obter nosso primeiro resultado, vamos mostrar que $\mathrm{Ric}_G(Y) \geq 0$ sempre que Y é tipo-tempo. De fato, se $Y \in \mathfrak{g}$ é tipo-tempo e $Z \in \mathfrak{g}$ é tipo-espaço, então

$$\langle Y, [Y, Z]\rangle = \langle [Y, Y], Z\rangle = 0,$$

mostra que $[Y, Z]$ é tipo-espaço, e portanto, para uma base ortonormal $(Y, Z_1, ..., Z_n)$ de $\mathfrak{g}$, vale que

$$\mathrm{Ric}_G(Y) = -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\langle [[Z_i, Y], Y], Z_i\rangle = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\langle [[Z_i, Y], [Z_i, Y]\rangle \geq 0.$$

Usaremos o fato de $\mathrm{Ric}_G(N) \geq 0$ e o Lema 4.1, para mostrar que as únicas hipersuperfícies espaciais compactas, imersas em G e CMC, são os subgrupos L^n de G e suas classes laterais.

Teorema 4.2. *Seja G^{n+1} um grupo lorentziano e $\varphi : M^n \to G^{n+1}$ uma hipersuperfície espacial conexa, compacta e CMC. Então, $\varphi(M) = gL$, para algum $g \in G$ e um subgrupo compacto L de G, de dimensão n. Além disso, $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{l}$ (soma direta de álgebras de Lie), onde $\mathfrak{l}$ é a álgebra de Lie de L e $\mathbb{R}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração. Uma vez que M é espacial, é orientada. Sendo N um campo normal unitário ao longo de M, existe um campo tipo-tempo $X \in \mathfrak{g}$ tal que $f_X = \langle X, N \rangle > 0$ ao longo de M. Assim,

$$\Delta f_X = (|A|^2 + \mathrm{Ric}_G(N)) f_X \geq 0.$$

Como M é compacta, segue do teorema de Hopf que $\Delta f_X = 0$, e portanto $|A|^2 + \mathrm{Ric}_G(N) = 0$. Como $\mathrm{Ric}_G(N) \geq 0$, temos $|A|^2 = \mathrm{Ric}_G(N) = 0$.

Dada uma base ortonormal $(X_1, ..., X_{n+1})$ de $\mathfrak{g}$, sejam $\varepsilon_j = \langle X_j, X_j \rangle$ e $f_j = f_{X_j}$, para $1 \leq j \leq n+1$. Voltando a (4.2), concluímos que cada f_j é constante, para $1 \leq j \leq n+1$, e portanto $N = \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon_i f_i X_i$ é a restrição a M de um campo invariante à esquerda $E \in \mathfrak{g}$. Seja $(E, E_1, ..., E_n)$ uma base ortonormal de $\mathfrak{g}$. Cada campo E_j é tangente a M, para $1 \leq j \leq n$, e temos que

$$\begin{aligned} \langle [E_i, E_j], E \rangle = \langle E_i, [E_j, E] \rangle &= 2 \langle E_i, \tilde{\nabla}_{E_j} N \rangle \\ &= -2 \langle E_i, A E_j \rangle = 0. \end{aligned}$$

Então, $(E_1, ..., E_n)$ gera uma subálgebra $\mathfrak{l}$ de $\mathfrak{g}$, e portanto $\varphi(M)$ é uma folha da folheação de G gerada por $(E_1, ..., E_n)$. Assim, $\varphi(M)$ deve ser alguma classe lateral gL, onde L é o subgrupo de Lie conexo gerado pela subálgebra $\mathfrak{l}$. Além disso, note que

$$\langle [E, E_i], E \rangle = -\langle E_i, [E, E] \rangle = 0,$$

e

$$\langle [E, E_i], E_j \rangle = \langle E, [E_i, E_j] \rangle = 0.$$

Portanto, $[E, E_i] = 0$, para $1 \leq i \leq n$, e dessa forma temos que $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{l}$, com $\mathbb{R}$ ideal de $\mathfrak{g}$. □

Como consequência imediata do resultado acima, temos o seguinte.

Corolário 4.3. *Seja G^{n+1} um grupo lorentziano semisimples. Então não existe hipersuperfície $\varphi : M^n \to G^{n+1}$, que seja espacial, compacta e CMC.*

Demonstração. Se $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de G, então $\mathfrak{g}$ é uma álgebra semisimples. Porém, álgebras semisimples não têm ideais abelianos, portanto não podem ser da forma $\mathbb{R}\oplus\mathfrak{l}$. $\square$

Agora, mostraremos outro resultado para hipersuperfícies espaciais compactas, mas sem pedir que a curvatura média seja constante.

Teorema 4.4. *Seja G^{n+1} um grupo lorentziano e $\varphi : M^n \to G^{n+1}$ uma hipersuperfície espacial, conexa e compacta. Se o operador de Weingarten A de φ for positivo semidefinido, então M é totalmente geodésica.*

Demonstração. Sejam $p \in M$ e $(e_1, ..., e_n)$ um referencial ortonormal definido numa de vizinhança de p em M. Se $X \in \mathfrak{g}$, temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{div}_M(X^\top) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} X^\top, e_i\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \tilde{\nabla}_{e_i} X + f_X N, e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \tilde{\nabla}_{e_i} X, e_i\rangle + f_X \sum_{i=1}^n \langle \tilde{\nabla}_{e_i} N, e_i\rangle \\ &= nHf_X, \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde usamos na última igualdade o fato de X ser um campo de Killing. Por (4.1),

$$\begin{aligned} \langle \nabla f_X, X^\top\rangle &= -\langle AX^\top + \tilde{\nabla}_N X, X^\top\rangle \\ &= -\langle AX^\top, X^\top\rangle - \langle \tilde{\nabla}_N X, X + f_X N\rangle \\ &= -\langle AX^\top, X^\top\rangle - \frac{1}{2} N\langle X, X\rangle - f_X \langle \tilde{\nabla}_N X, N\rangle \\ &= -\langle AX^\top, X^\top\rangle, \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde usamos na última igualdade o fato de $\langle X, X\rangle$ ser constante, e X ser um campo de Killing. Assim,

$$\begin{aligned} \mathrm{div}_M(f_X X^\top) &= f_X \mathrm{div}_M(X^\top) + \langle \nabla f_X, X^\top\rangle \\ &= nHf_X^2 - \langle AX^\top, X^\top\rangle. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Como $A \geq 0$, temos $H = -\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(A) \leq 0$ e $\langle AX^\top, X^\top\rangle \geq 0$. Logo, $\mathrm{div}_M(f_X X^\top) \leq 0$. Por outro lado, pelo teorema da divergência, a Integral de $\mathrm{div}_M(f_X X^\top)$ sobre M é nula. Logo, $\mathrm{div}_M(f_X X^\top) = 0$. Tomando $X \in \mathfrak{g}$ tipo-tempo e, voltando a (4.5), temos $H = 0$, e portanto $A = 0$. $\square$

O teorema acima não é válido se $\varphi : M^n \to G^{n+1}$ é completa não compacta. Pode-se citar como contra-exemplo o espaço hiperbólico, visto como hipersuperfície espacial do espaço de Lorentz. No entanto, podemos adicionar uma condição para que o resultado valha. Assim como fizemos no Teorema 3.11, dizemos que a aplicação de Gauss $\eta(p) = dL_p^{-1}(N_p)$ converge no infinito para $X \in \mathfrak{g}$, se $\eta(p) \to X$ quando $d(p) \to \infty$, onde $d(p)$ é a distância riemanniana, em M, de p a algum ponto fixado. Antes de enunciar a versão do Teorema 4.4 para o caso completo não compacto, precisamos do seguinte resultado.

Lema 4.5. *Sejam M uma variedade riemanniana completa, não compacta e orientável, e $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo de vetores sobre M. Suponha que exista uma função não-negativa $f \in C^\infty(M) \setminus \{0\}$ tal que $\langle \nabla f, X \rangle \geq 0$ e $\lim\limits_{d(x)\to\infty} f(x) = 0$, onde $d(x) = d(x, q)$ denota a distância riemanniana, em M, a partir de um ponto q. Se $divX \geq 0$, então:*

(*a*) $\langle \nabla f, X \rangle = 0$.

(*b*) *$divX = 0$ em $M \setminus f^{-1}(0)$.*

(*c*) *$divX = 0$ em M, se $f^{-1}(0)$ tem medida nula.*

Demonstração. Denotamos por m a medida de Lebesgue em M e $\mathcal{L}^1(M)$ o espaço das funções Lebesgue integráveis sobre M. Pela hipótese de convergência, sabemos que f é limitada superiormente. Sem perda de generalidade podemos supor que $\sup_M f = a > 1$. Mostraremos primeiramente que existem funções $\phi, \psi : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}_+$, tais que $\phi', \psi' > 0$ em $(0, a]$ e que satisfazem:

(1) $\phi \circ f = \phi(f) \in \mathcal{L}^1(M)$;

(2) a função $(\psi \circ f)|X| = \psi(f)|X|$ é limitada sobre M.

Para cada inteiro positivo k, considere o conjunto

$$A_k = \{x \in M; f(x) > \frac{1}{k}\}.$$

Observe que $A_k \subset A_{k+1}$, $0 < m(A_k) < \infty$ para $k \geq 1$, pois $\lim_{d(x)\to\infty} f(x) = 0$ e $M = f^{-1}(0) \cup \bigcup\limits_{k\geq 1} A_k$.

Para obter (1), defina $\phi(a) = \frac{1}{m(A_1)}$,

$$\phi\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2^k m(A_{k+1})}$$

e observe que, para $k \geq 1$,

$$\phi\left(\frac{1}{k+1}\right) < \phi\left(\frac{1}{k}\right) < \phi(a).$$

Agora, tome uma extensão de ϕ sobre $(0, a]$, de modo que, ϕ seja de classe C^1 e satisfaça

$$0 < \phi'(t) < 2\left(\frac{\phi(\frac{1}{k}) - \phi(\frac{1}{k+1})}{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}\right) \tag{4.6}$$

para todo t no intervalo $\left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$.

Estendemos ϕ sobre $[0, a]$ fazendo $\phi(0) = 0$. Vamos mostrar que ϕ é de classe

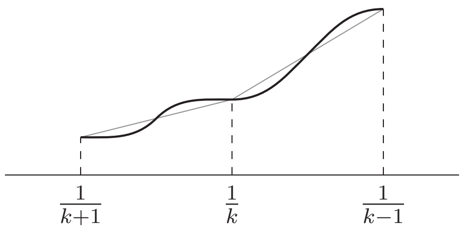

Figura 1: Extensão da função ϕ

C^1 em $[0,a]$. Para $0 < x < \frac{1}{j}$, existe $k \geq j$ tal que $\frac{1}{k+1} \leq x < \frac{1}{k}$. Temos

$$0 < \frac{\phi(x)}{x} < \frac{\phi(\frac{1}{k})}{\frac{1}{k+1}} = \frac{k+1}{2^k m(A_{k+1})} \xrightarrow{k} 0$$

e assim, $\phi'(0) = 0$. Por fim,

$$\frac{\phi(\frac{1}{k}) - \phi(\frac{1}{k+1})}{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}} = \frac{k(k+1)(2m(A_{k+2}) - m(A_{k+1}))}{2^{k+1} m(A_{k+2}) m(A_{k+1})} < \frac{k(k+1)}{2^k m(A_{k+1})} \xrightarrow{k} 0.$$

Então,(4.6) garante que $\lim_{x\to 0} \phi'(x) = 0 = \phi'(0)$, e portanto ϕ é de classe C^1 em $[0,a]$.

Como $\phi(f) = 0$ em $f^{-1}(0)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_M \phi(f) dM &= \int_{A_1} \phi(f) dM + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_{k+1}\setminus A_k} \phi(f) dM \\
&\leq (\sup_{A_1} \phi(f)) m(A_1) + \sum_{k=1}^{\infty} (\sup_{A_{k+1}\setminus A_k} \phi(f)) m(A_{k+1} \setminus A_k) \\
&< \phi(a) m(A_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \phi\left(\frac{1}{k}\right) m(A_{k+1}) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2.
\end{aligned}$$

Para mostrar (2), defina

$$s_k = \sup_{A_k} |X| + 1, \quad \psi(a) = \frac{1}{s_1} \text{ e } \psi\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2^k s_{k+1}}, \text{ para } k \geq 1.$$

Veja que

$$\psi\left(\frac{1}{k+1}\right) < \psi\left(\frac{1}{k}\right) < \psi(a) \text{ para } k \geq 1.$$

Como para ϕ, podemos estender ψ sobre $(0,a]$, de modo que ψ seja de classe C^1 e estritamente crescente. Por um argumento análogo ao caso da função ϕ, definindo $\psi(0) = 0$

temos ψ de classe C^1 em $[0, a]$. Então, dado $x \in M$, temos

$$(\psi(f)|X|)(x) < \frac{1}{2^k}, \text{ se } x \in A_{k+1} \setminus A_k, \text{ para } k \geq 1;$$
$$(\psi(f)|X|)(x) < 1, \text{ se } x \in A_1;$$
$$(\psi(f)|X|)(x) = 0, \text{ se } x \in f^{-1}(0).$$

Por fim, considere o campo $Y = \phi(f)\psi(f)X$ e note que $|Y| \in \mathcal{L}^1(M)$. Como

$$\operatorname{div}(Y) = \phi(f)\psi(f)\operatorname{div}(X) + (\phi'(f)\psi(f) + \phi(f)\psi'(f))\langle \nabla f, X\rangle \geq 0, \tag{4.7}$$

temos pela Proposição 2.1 de (CAMINHA, 2011) que $\operatorname{div}(Y) = 0$. Agora, uma vez que $(\phi'(f)\psi(f) + \phi(f)\psi'(f))(x) > 0$ para $x \notin f^{-1}(0)$, segue de (4.7) que $\langle \nabla f, X\rangle(x) = 0$ para um tal x. No caso em que $x \in f^{-1}(0)$, devemos ter $\nabla f(x) = 0$, uma vez que x é um ponto de mínimo de f, e assim $\langle \nabla f, X\rangle = 0$ sobre M. Portanto, (4.7) se reduz a $\phi(f)\psi(f)\operatorname{div}(X) = 0$, e $\operatorname{div}(X) = 0$ nos pontos onde f não se anula. Então, o conjunto aberto $U = \{p \in M; \operatorname{div}(X)(p) > 0\}$ está contido no conjunto $f^{-1}(0)$. Assim, se $f^{-1}(0)$ tem medida nula, então $\operatorname{div}(X) = 0$ sobre M. $\square$

Agora, como aplicação do lema anterior, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.6. *Seja G^{n+1} um grupo lorentziano e $\varphi : M^n \to G^{n+1}$ uma hipersuperfície espacial, conexa, completa e não compacta. Suponha que a aplicação de Gauss de M converge no infinito para $X \in \mathfrak{g}$. Se o operador de Weingarten A de M for positivo semidefinido, então M é totalmente geodésica.*

Demonstração. Seja η a aplicação de Gauss de M. Como $\eta(p)$ é tipo-tempo e unitário para todo $p \in M$, o vetor $X \in \mathfrak{g}$ é unitário e tipo-tempo. Vamos supor que $f_X < 0$, de modo que $f_X \leq -1$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz. Apliquemos o Lema 4.5 em M, para o campo $X^\top$ e para a função $f = -1 - f_X \geq 0$.

A convergência de η a X no infinito garante que $\lim_{d(x)\to\infty} f(x) = 0$. Por (4.3) e (4.4), temos que

$$\operatorname{div}_M(X^\top) = nHf_X \geq 0$$

e

$$\langle \nabla f, X^\top\rangle = -\langle \nabla f_X, X^\top\rangle = \langle AX^\top, X^\top\rangle \geq 0.$$

Seja $F = f^{-1}(0)$. Pelo Lema 4.5, temos que $\operatorname{div}_M(X^\top) = 0$ em F^c, e daí $H = 0$ em F^c. Se p é um ponto interior de F, então $N = X$ em uma vizinhança de p em M, e tomando um referencial ortonormal $(e_1, ..., e_n)$ em p, temos

$$H(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle\tilde{\nabla}_{e_i}X, e_i\rangle = 0.$$

Por continuidade, $H = 0$ na fronteira de F, e assim $H = 0$ sobre M. Como A é positivo semidefinido, isso garante $A = 0$. $\square$

5 Deformações de métricas kählerianas

Neste capítulo vamos construir métricas kählerianas em variedades kählerianas que possuem um campo conforme fechado e obter algumas propriedades dessas métricas. O método utilizado para construção de tais métricas é uma generalização do método utilizado em (CAMINHA, 2017). Para uma melhor compreensão do tema variedades kählerianas, indicamos o capítulo 5 de (CAMINHA, 2014) como referência.

5.1 Variedades kählerianas

Antes de definir o que é uma variedade kähleriana precisamos de algumas outras definições.

Dado um espaço vetorial real V, dizemos que um operador linear $J : V \to V$ é uma estrutura complexa em V se $J^2 = -Id$, onde Id denota o operador identidade.

Definição 5.1. Uma estrutura quasi-complexa J em uma variedade diferenciável M é um tensor $J : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ tal que J_p é uma estrutura complexa em T_pM, para todo $p \in M$.

Uma classe de variedades que possuem uma estrutura quasi-complexa natural são as variedades complexas, as quais definimos abaixo.

Definição 5.2. Uma variedade complexa M de dimensão (complexa) n é uma variedade diferenciável $2n$-dimensional (dimensão real), munida de um atlas formado por cartas $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$ satisfazendo a seguinte condição: sempre que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, a mudança de coordenadas

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

é uma função holomorfa de n variáveis complexas. Nesse caso, escrevendo $\varphi_\alpha(p) = (z_1(p), \ldots, z_n(p)) \in \mathbb{C}^n$, dizemos que $(z_1, \ldots, z_n)$ é um sistema de coordenadas complexas para M em U_α.

Se M é uma variedade complexa de dimensão (complexa) n e $(z_1, ..., z_n)$ é um sistema de coordenadas complexas para M definido em um aberto $U \subset M$, definimos um operador linear $J_p : T_pM \to T_pM$ por

$$J_p\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial y_k} \quad \text{e} \quad J_p\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_k},$$

onde $z_k = x_k + iy_k$. A Proposição 5.12 de (CAMINHA, 2014) garante que J independe das coordenadas complexas z_k e define uma estrutura quasi-complexa em M, chamada de estrutura quasi-complexa canônica de M.

Uma métrica riemanniana $g = \langle , \rangle$ em uma variedade complexa M munida de uma estrutura quasi-complexa J é dita hermitiana se

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle,$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Dizemos, então, que uma variedade hermitiana é uma variedade complexa M, munida de uma métrica hermitiana. Nesse caso, se ω é o 2-tensor covariante em M, dado para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ por

$$\omega(X, Y) = \langle JX, Y \rangle,$$

então ω é uma 2-forma diferenciável em M, denominada a forma kähleriana de M.

Definição 5.3. Se M é uma variedade complexa com estrutura quasi-complexa J, uma métrica kähleriana em M é uma métrica hermitiana g em M cuja forma kähleriana é fechada. Nesse caso, (M, J, g) é denominada uma variedade kähleriana.

No teorema a seguir (Teorema 5.31 de (CAMINHA, 2014)), exibimos uma caracterização das métricas kählerianas de uma variedade hermitiana M em termos da derivada covariante da estrutura quasi-complexa J de M.

Teorema 5.4. *Se M é uma variedade hermitiana com estrutura quasi-complexa J e conexão de Levi-Civita ∇, então M é kähleriana se, e só se, $\nabla J = 0$, ou seja,*

$$\nabla_X JY = J\nabla_X Y,$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Nos referimos a tal fato dizendo que J é um tensor paralelo.

Para concluir esta seção, exibimos o conceito de variedade de Sasaki. Uma variedade de Sasaki é uma variedade riemanniana $(M, g = \langle \cdot, \cdot \rangle, \nabla)$, para a qual o cone $\tilde{M} = (0, +\infty) \times_t M$ é uma variedade kähleriana; em particular, M tem dimensão ímpar, digamos $2n - 1$.

Aqui, $(0, +\infty) \times_t M$ denota o produto warped do intervalo $(0, +\infty)$ pela variedade riemanniana M e por meio da função warping $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dada por $f(t) = t$ para todo $t > 0$ (cf. Capítulo 7 de (O'NEILL, 1983)). Nesse caso, identificamos M com sua imagem isométrica $\{1\} \times M$ em $\tilde{M}$.

Denotemos por $\tilde{g}$ a métrica e por $\tilde{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\tilde{M}$. Se $\xi = t\partial_t$, então ξ é um campo conforme fechado em $\tilde{M}$, com fator conforme $\psi = 1$. Nas notações acima, se M é uma variedade de Sasaki e $\tilde{M}$ tem estrutura quasi-complexa J, é possível provar que $Z = J\xi$ é um campo de Killing unitário em M. Sendo $\theta \in \Omega^1(M)$ a $1-$forma em M metricamente dual a Z, também é possível provar que $d\theta$ coincide com a restrição a M da forma kähleriana de $\tilde{M}$, e

$$\eta = \theta \wedge \underbrace{(d\theta) \wedge \ldots \wedge (d\theta)}_{n-1} \in \Omega^{2n-1}(M)$$

é uma forma de contato em M, de sorte que M é uma variedade de contato.

5.2 Deformação de métricas kählerianas

Seja $(M^n, J, g = \langle , \rangle)$ uma variedade kähleriana de dimensão complexa n. Para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, denotamos por θ_X a $1-$forma metricamente dual a X, ou seja,

$$\theta_X(Y) = \langle X, Y \rangle,$$

para $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Denotaremos também por θ_X^2 o 2-tensor simétrico dado por

$$\theta_X^2(Y, Z) = \theta_X(Y)\theta_X(Z),$$

para $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Nosso objetivo é construir uma nova métrica kähleriana $\tilde{g}$ em (M, J), a partir da métrica kähleriana inicial g. Para isso, vamos precisar que exista em M um campo conforme fechado ξ. Recordemos que isso significa que existe uma função $\psi \in C^\infty(M)$ tal que

$$\nabla_X \xi = \psi X,$$

para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$. É simples mostrar que θ_ξ é uma $1-$forma fechada se ξ é um campo conforme fechado em M.

O resultado a seguir é parte do Lema 1 de (ROS and URBANO, 1998) e nos dá algumas propriedades de variedades que possuem um campo conforme fechado, as quais serão utilizadas daqui em diante. Por completude, apresentamos sua prova.

Lema 5.5. *Seja ξ um campo conforme fechado não trivial em uma variedade riemanniana $(M, \langle , \rangle)$ e ψ o fator de conformidade de ξ. Então:*

(a) Escrevendo $\hat{\xi} = \frac{\xi}{|\xi|}$ onde $\xi \neq 0$ e Ric para denotar o tensor de Ricci de M, os gradientes das funções $f = |\xi|^2$ e ψ são dados por

$$\nabla f = 2\psi\xi \tag{5.1}$$

e

$$\nabla\psi = -Ric(\hat{\xi})\xi, \quad onde\ \xi \neq 0. \tag{5.2}$$

(b) O tensor de curvatura R de M satisfaz a relação

$$|\xi|^2 R(X,Y)\xi = -\mathrm{Ric}(\xi)(\langle X,\xi\rangle Y - \langle Y,\xi\rangle X). \tag{5.3}$$

(c) Se $M' = \{p \in M; \xi(p) \neq 0\}$, a distribuição

$$\mathcal{D}(p) = \{v \in T_pM; \langle v,\xi\rangle = 0\}$$

define uma folheação em M', onde cada folha é uma hipersuperfície umbílica de $(M', \langle,\rangle)$.

Demonstração. Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, (5.1) segue de

$$\langle \nabla f, X\rangle = X\langle \xi,\xi\rangle = 2\langle \nabla_X \xi, \xi\rangle = \langle 2\psi\xi, X\rangle.$$

Para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\mathrm{Hess}(f)(X,Y) = 2\langle \nabla\psi, X\rangle\langle \xi, Y\rangle + 2\psi^2\langle X,Y\rangle.$$

Como $\mathrm{Hess}(f)$ e $\langle,\rangle$ são tensores simétricos, então $\langle \nabla\psi, X\rangle\langle\xi,\xi\rangle = \langle\nabla\psi,\xi\rangle\langle\xi,X\rangle$. Daí, se $\langle \xi, X\rangle = 0$, temos $|\xi|^2\langle\nabla\psi, X\rangle = 0$, e assim

$$|\xi|^2\nabla\psi = \langle\nabla\psi,\xi\rangle\xi.$$

Fazendo uso da última igualdade, temos

$$\begin{aligned} |\xi|^2 R(X,Y)\xi &= |\xi|^2(\nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_Y\nabla_X\xi - \nabla_{[X,Y]}\xi) \\ &= |\xi|^2(\nabla_X\psi Y - \nabla_Y\psi X - \psi[X,Y]) \\ &= \langle |\xi|^2\nabla\psi, X\rangle Y - \langle |\xi|^2\nabla\psi, Y\rangle X \\ &= \langle\nabla\psi,\xi\rangle(\langle X,\xi\rangle Y - \langle Y,\xi\rangle X). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Seja n a dimensão de M. Tomando um referencial ortonormal $(e_1,\ldots,e_n)$ numa vizinhança de um ponto $p \in M$, temos, nesse ponto,

$$|\xi|^2\mathrm{Ric}(\xi) = \frac{|\xi|^2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\langle R(e_i,\xi)\xi, e_i\rangle = -|\xi|^2\langle\nabla\psi,\xi\rangle. \tag{5.5}$$

Assim, onde $\xi \neq 0$, temos $\nabla\psi = \langle\nabla\psi,\hat{\xi}\rangle\hat{\xi} = -\mathrm{Ric}(\hat{\xi})\xi$. Para mostrar (5.3), basta substituir $\langle\nabla\psi,\xi\rangle = -\mathrm{Ric}(\xi)$ em (5.4) se $\xi \neq 0$ e ver que tal igualdade é óbvia se $\xi = 0$.

Para mostrar o item (c), sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M')$ tais que $\langle X,\xi\rangle = \langle Y,\xi\rangle = 0$.

Temos que

$$\begin{aligned}\langle [X,Y],\xi\rangle &= \langle \nabla_X Y - \nabla_Y X, \xi\rangle \\ &= X\langle Y,\xi\rangle - \langle Y, \nabla_X \xi\rangle - Y\langle X,\xi\rangle + \langle X, \nabla_Y \xi\rangle = 0.\end{aligned}$$

Isso mostra que a distribuição $\mathcal{D}$ é involutiva e, portanto, define uma folheação em M'. As folhas da folheação são umbílicas, uma vez que o campo $\hat{\xi}$ é normal e unitário sobre as folhas e satisfaz

$$\nabla_X \hat{\xi} = \frac{\psi}{|\xi|} X \tag{5.6}$$

se X é um campo tangente a uma das folhas. □

Como vimos acima, um campo conforme fechado ξ gera uma distribuição integrável $\xi(x)^{\perp}$, nos pontos $x \in M$, onde $\xi(x) \neq 0$, tal que as folhas dessa folheação são hipersuperfícies umbílicas de M. Pelo item (a) do lema anterior, vê-se que $|\xi|^2$ e ψ são constantes sobre as folhas de tal folheação. De fato, se $c = |\xi(x)|^2 > 0$, para algum $x \in M$, a hipersuperfície

$$(|\xi|^2)^{-1}(c) = \{p \in M; |\xi(p)|^2 = c\}$$

é a união das folhas dessa distribuição onde $|\xi|^2 = c$.

Diremos que uma função $\mu \in C^{\infty}(M)$ depende de $|\xi|^2$, se a restrição de μ ao conjunto $(|\xi|^2)^{-1}(c)$ é constante, para $c \geq 0$. Nesse caso, a função $\mu = \mu(|\xi|^2)$ pode ser considerada como uma função definida em $\mathbb{R}_+$, $t \mapsto \mu(t)$, com $t = |\xi|^2$. Daqui em diante, vamos denotar por μ' a derivada de uma tal função com relação a variável t.

Teorema 5.6. *Seja $(M, J, g = \langle \cdot,\cdot\rangle)$ uma variedade kähleriana com conexão de Levi-Civita ∇, e $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ um campo conforme fechado de M. Se $\mu = \mu(|\xi|^2)$ é uma função positiva que depende de $|\xi|^2$ e tal que $\mu > -\mu'|\xi|^2$, então o $2-$tensor simétrico*

$$\tilde{g} = \mu g + \mu'(\theta_{\xi}^2 + \theta_{J\xi}^2)$$

define uma outra métrica kähleriana sobre (M, J).

Demonstração. Para mostrar que $\tilde{g}$ é positivo definido, fixe $p \in M$. Se $\xi(p) = 0$, fica claro que $\tilde{g}$ é positivo definido em T_pM. Se $\xi(p) \neq 0$, seja $\hat{\xi} = \frac{\xi}{|\xi|}$ e

$$(e_1, Je_1, \ldots, e_{n-1}, Je_{n-1}, e_n = \hat{\xi}, Je_n = J\hat{\xi})$$

uma base ortonormal de T_pM. Veja que $\tilde{g}(e_i, e_i) = \tilde{g}(Je_i, Je_i) = \mu$, para $1 \leq i \leq n-1$, e $\tilde{g}(e_n, e_n) = \tilde{g}(Je_n, Je_n) = \mu + \mu'|\xi|^2$.

Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, já que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ é hermitiana, temos

$$\tilde{g}(JX, JY) = \mu\langle JX, JY\rangle + \mu'(\theta_{\xi}^2(X,Y) + \theta_{J\xi}^2(X,Y))$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu\langle X, Y\rangle + \mu'(\langle \xi, JX\rangle\langle \xi, JY\rangle + \langle J\xi, JX\rangle\langle J\xi, JY\rangle)\\
&= \mu\langle X, Y\rangle + \mu'(\langle J\xi, J^2X\rangle\langle J\xi, J^2Y\rangle + \langle \xi, X\rangle\langle \xi, Y\rangle)\\
&= \mu\langle X, Y\rangle + \mu'(\langle J\xi, X\rangle\langle J\xi, Y\rangle + \langle \xi, X\rangle\langle \xi, Y\rangle)\\
&= \tilde{g}(X, Y),
\end{aligned}
$$

de modo que $\tilde{g}$ também é uma métrica hermitiana em relação a J.
Agora, seja $\tilde{\omega}$ a forma kähleriana de $\tilde{g}$. Para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos que

$$
\begin{aligned}
\tilde{\omega}(X, Y) &= \tilde{g}(JX, Y) = \mu\langle JX, Y\rangle + \mu'(\theta_\xi^2(JX, Y) + \theta_{J\xi}^2(JX, Y))\\
&= \mu\omega(X, Y) + \mu'(\langle \xi, JX\rangle\langle \xi, Y\rangle + \langle J\xi, JX\rangle\langle J\xi, Y\rangle)\\
&= \mu\omega(X, Y) + \mu'(\langle J\xi, J^2X\rangle\langle \xi, Y\rangle + \langle \xi, X\rangle\langle J\xi, Y\rangle)\\
&= \mu\omega(X, Y) + \mu'(-\theta_{J\xi}(X)\theta_\xi(Y) + \theta_\xi(X)\theta_{J\xi}(Y))\\
&= \mu\omega(X, Y) + \mu'(\theta_\xi \wedge \theta_{J\xi})(X, Y).
\end{aligned}
$$

Dessa forma,

$$
\tilde{\omega} = \mu\omega + \mu'\theta_\xi \wedge \theta_{J\xi}. \tag{5.7}
$$

Uma vez que ω e θ_ξ são fechadas (a primeira destas por ser a forma kähleriana de uma variedade kähleriana e a segunda por ser metricamente equivalente a um campo conforme fechado), segue que

$$
d\tilde{\omega} = d\mu \wedge \omega + d\mu' \wedge \theta_\xi \wedge \theta_{J\xi} - \mu'\theta_\xi \wedge d\theta_{J\xi}. \tag{5.8}
$$

Seja ψ o fator de conformidade de ξ. Para $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos que

$$
\begin{aligned}
d\mu(X) &= X(\mu(|\xi|^2)) = \mu' X\langle \xi, \xi\rangle\\
&= 2\mu'\langle \nabla_X \xi, \xi\rangle = 2\mu'\langle \psi X, \xi\rangle\\
&= 2\psi\mu'\theta_\xi(X)
\end{aligned}
$$

e, do mesmo modo, $d\mu'(X) = 2\psi\mu''\theta_\xi(X)$. Assim,

$$
d\mu = 2\psi\mu'\theta_\xi \text{ e } d\mu' = 2\psi\mu''\theta_\xi. \tag{5.9}
$$

Usando a fórmula de Koszul e o fato de J ser paralelo, temos para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ que

$$
\begin{aligned}
d\theta_{J\xi}(X, Y) &= X(\theta_{J\xi}(Y)) - Y(\theta_{J\xi}(X)) - \theta_{J\xi}([X, Y])\\
&= X\langle J\xi, Y\rangle - Y\langle J\xi, X\rangle - \langle J\xi, [X, Y]\rangle\\
&= \langle \nabla_X J\xi, Y\rangle - \langle \nabla_Y J\xi, X\rangle\\
&= \langle J\nabla_X \xi, Y\rangle - \langle J\nabla_Y \xi, X\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle J(\psi X), Y\rangle - \langle J(\psi Y), X\rangle \\
&= 2\psi\langle JX, Y\rangle = 2\psi\omega(X,Y),
\end{aligned}
$$

ou seja, $d\theta_{J\xi} = 2\psi\omega$. Substituindo as expressões acima para $d\mu$, $d\mu'$ e $d\theta_{J\xi}$ em (5.8) e notando que $\theta_\xi \wedge \theta_\xi = 0$, tem-se

$$
d\tilde{\omega} = 2\psi\mu'\theta_\xi \wedge \omega + 2\psi\mu''\theta_\xi \wedge \theta_\xi \wedge \theta_{J\xi} - \mu'\theta_\xi \wedge (2\psi\omega) = 0.
$$

□

Nosso próximo resultado dá algumas condições sob as quais $(M, \tilde{g})$ é uma variedade riemanniana completa.

Proposição 5.7. *Sob as hipóteses do Teorema (5.6), suponha que $(M, g = \langle,\rangle)$ é completa. Então:*

(*a*) *Se $|\xi|^2$ tem um mínimo em M e $\mu' \geq 0$, então $(M, \tilde{g})$ é completa.*

(*b*) *Se $\mu' \leq 0$, e $f = \mu + \mu'|\xi|^2$ é tal que*

$$
\int_0^\infty \sqrt{f(\gamma(s))}ds = +\infty
$$

para qualquer curva $\gamma : [0, +\infty) \to M$ parametrizada pelo comprimento de arco de (M, g), então $(M, \tilde{g})$ é completa.

Demonstração. Uma curva $\gamma : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é chamada de curva divergente se, dado qualquer conjunto compacto $K \subset M$, existe t_0 tal que $\gamma(t) \notin K$ para $t > t_0$. Pelo lema da curva divergente (cf. exercício 7.5 de (DO CARMO, 2011)), se toda curva divergente tem comprimento infinito, então M é completa.

Sejam $\ell(\cdot)$ e $\tilde{\ell}(\cdot)$ os comprimentos de arco com respeito às métricas g e $\tilde{g}$, respectivamente. Se $\gamma : [0, +\infty) \to M$ é uma curva divergente em M, então $\ell(\gamma) = +\infty$, e assim podemos supor que $\gamma : [0, +\infty) \to M$ está parametrizada pelo comprimento de arco com respeito a g. Se sempre tivermos $\tilde{\ell}(\gamma) = +\infty$, então $(M, \tilde{g})$ será completa.

(*a*) Seja $p \in M$ um ponto onde o mínimo de $|\xi|^2$ é atingido e $c = \mu(p) > 0$. Se $\mu' \geq 0$, então μ como função de $|\xi|^2$ é uma função não decrescente, e assim $\mu \geq c$ sobre M. Logo,

$$
\begin{aligned}
\tilde{\ell}(\gamma) &= \int_0^\infty \sqrt{\tilde{g}(\gamma'(s), \gamma'(s))}ds \geq \int_0^\infty \sqrt{\mu(\gamma(s))g(\gamma'(s), \gamma'(s))}ds \\
&= \int_0^\infty \sqrt{\mu(\gamma(s))}ds = +\infty.
\end{aligned}
$$

(*b*) Se $\xi \neq 0$ e $\hat{\xi} = \frac{\xi}{|\xi|}$, temos

$$
1 = \langle \gamma', \gamma' \rangle \geq \langle \gamma', \hat{\xi} \rangle^2 + \langle \gamma', J\hat{\xi} \rangle^2 = \frac{1}{|\xi|^2}(\langle \gamma', \xi \rangle^2 + \langle \gamma', J\xi \rangle^2).
$$

Assim, se $\mu' \leq 0$, temos

$$\mu'(\langle \gamma', \xi \rangle^2 + \langle \gamma', J\xi \rangle^2) \geq \mu' |\xi|^2$$

em todos os pontos de M. Dessa forma, pela desigualdade anterior e nossa hipótese sobre $f = \mu + \mu' |\xi|^2$, temos

$$\begin{aligned} \tilde{\ell}(\gamma) &= \int_0^\infty \sqrt{\tilde{g}(\gamma'(s), \gamma'(s))} ds \\ &\geq \int_0^\infty \sqrt{\mu(\gamma(s)) g(\gamma'(s), \gamma'(s)) + \mu'(\gamma(s)) |\xi(\gamma(s))|^2} ds \\ &= \int_0^\infty \sqrt{f(\gamma(s))} ds = +\infty. \end{aligned}$$

□

Com a proposição acima, podemos encontrar uma grande quantidade de exemplos de métricas kählerianas completas. Por exemplo, em $\mathbb{C}^n$ com sua estrutura canônica de variedade kähleriana, temos o campo conforme fechado $\xi(p) = p$, cuja norma tem o mínimo atingido em $p = 0$. Assim, pelo item (a) da Proposição 5.7, basta tomar uma função positiva μ que dependa de $|\xi|^2$ e tal que $\mu' \geq 0$ para obter uma nova métrica kähleriana $\tilde{g}$, dada pelo Teorema 5.6, que é completa em $\mathbb{C}^n$.

A Proposição 5.7 trata de obter uma métrica kähleriana completa $\tilde{g}$ a partir de métrica kähleriana completa g. Agora, mostraremos um resultado para o caso em que a métrica inicial g não é necessariamente completa.

Proposição 5.8. *Sob as hipóteses do Teorema 5.6, suponha que o fator de conformidade ψ de ξ é limitado e que não se anula fora de um conjunto compacto de M e que $\mu' \geq 0$. Sejam $a = \inf_M |\xi|^2$ e $b = \sup_M |\xi|^2 \leq +\infty$. Se $|\xi|^2 : M \to [a, b)$ é própria e a função $F(t) = \int_a^t \sqrt{\mu'(s)} ds$ é tal que $\lim_{t \to b} F(t) = +\infty$, então $(M, \tilde{g})$ é completa.*

Demonstração. Mais uma vez vamos usar o lema da curva divergente. Como $\mu' \geq 0$, temos

$$\tilde{g}(v, v) = \mu g(v, v) + \mu'(\langle \xi, v \rangle^2 + \langle J\xi, v \rangle^2) \geq \mu'(\langle \xi, v \rangle)^2.$$

Sejam $\gamma : [0, +\infty) \to M$ uma curva divergente, $K \subset M$ um conjunto compacto tal que $\psi \neq 0$ sobre K^c e $t_0 > 0$ tal que $\gamma(t) \notin K$ para $t > t_0$. Se $\sup_M |\psi| = \alpha < +\infty$, então

$$\begin{aligned} \tilde{\ell}(\gamma_{|[0,t]}) &\geq \int_{t_0}^t \sqrt{\tilde{g}(\gamma'(s), \gamma'(s))} ds \geq \int_{t_0}^t |\sqrt{\mu'(\gamma(s))} \langle \xi(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle| ds \\ &= \int_{t_0}^t \frac{1}{|\psi(\gamma(s))|} \sqrt{\mu'(|\xi(\gamma(s))|^2)} \left| \langle \xi(\gamma(s)), \nabla_{\gamma'(s)} \xi \rangle \right| ds \\ &\geq \frac{1}{2\alpha} \left| \int_{t_0}^t \sqrt{\mu'(|\xi(\gamma(s))|^2)} \frac{d}{ds} |\xi(\gamma(s))|^2 ds \right| \\ &= \frac{1}{2\alpha} \left| F(|\xi(\gamma(t_0))|^2) - F(|\xi(\gamma(t))|^2) \right|. \end{aligned}$$

Seja k um inteiro. Uma vez que $|\xi|^2$ é própria, $|\xi|^2 < b$ e $\sup_M |\xi|^2 = b$, existe um compacto L_k de M tal que $|\xi|^2 > b - \frac{1}{k}$ em L_k^c. Como γ é divergente, existe $t_k > t_0$ tal que $\gamma(t) \in L_k^c$ para $t > t_k$. Pelo cálculo acima, temos

$$\tilde{\ell}(\gamma) = \lim_{k\to+\infty} \tilde{\ell}(\gamma_{|[0,t_k]}) \geq \frac{1}{2\alpha} \lim_{k\to+\infty} \left|F(|\xi(\gamma(t_0))|^2) - F(|\xi(\gamma(t_k))|^2)\right| = \infty.$$

$\square$

Exemplo 5.9. Sejam J a estrutura quasi-complexa canônica e $g = \langle , \rangle$ a métrica canônica em $\mathbb{C}^n$. Seja $\mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n;\ |z| < 1\}$. Como $\xi(p) = p$ é conforme e fechado e $\mu(|\xi|^2) = \frac{1}{1-|\xi|^2}$ é uma função positiva sobre $\mathbb{B}^n$ para a qual $\mu' = \mu^2 > 0$, então

$$\tilde{g} = \frac{1}{1-|\xi|^2}\langle \cdot, \cdot \rangle + \frac{1}{(1-|\xi|^2)^2}(\theta_\xi^2 + \theta_{J\xi}^2)$$

define uma métrica kähleriana em $\mathbb{B}^n$. A completude desta métrica é imediata a partir da proposição anterior, uma vez que $\sup_{\mathbb{B}^n} |\xi|^2 = 1$ e

$$\int_0^t \sqrt{\mu'(s)}ds = \int_0^t \frac{1}{1-s}ds = -\log(1-t).$$

A variedade kähleriana $(\mathbb{B}^n, J, \tilde{g})$ é o espaço hiperbólico complexo n-dimensional. Para isto basta utilizar a fórmula da curvatura seccional holomorfa, dada na Proposição 5.13 adiante, e mostrar que a curvatura seccional holomorfa é constante e negativa.

O próximo resultado relaciona a conexão de Levi-Civita de (M, g) com a de $(M, \tilde{g})$.

Proposição 5.10. *Seja (M, J, g) uma variedade kähleriana, $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ um campo conforme fechado e $\tilde{g}$ a métrica kähleriana sobre (M, J), dada pelo Teorema 5.6. Denotando por ∇ e $\tilde{\nabla}$, respectivamente, as conexões de Levi-Civita de g e $\tilde{g}$, para $X \in \mathfrak{X}(M)$, tem-se*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \psi\nu T(X, Y) + \psi\sigma V(X, Y) \tag{5.10}$$

onde ψ é o fator de conformidade de ξ, $\nu = \frac{\mu'}{\mu}$, $\sigma = \frac{\mu''\mu - 2(\mu')^2}{\mu(\mu+\mu'|\xi|^2)}$,

$$T(X, Y) = \langle \xi, X\rangle Y + \langle \xi, Y\rangle X + \langle J\xi, Y\rangle JX + \langle J\xi, X\rangle JY$$

e

$$V(X, Y) = (\langle \xi, X\rangle\langle \xi, Y\rangle - \langle J\xi, X\rangle\langle J\xi, Y\rangle)\xi + (\langle \xi, X\rangle\langle J\xi, Y\rangle + \langle J\xi, X\rangle\langle \xi, Y\rangle)J\xi.$$

Demonstração. Por um lado, temos, para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned} 2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= 2\mu\langle\tilde{\nabla}_X Y, Z\rangle + 2\mu'(\theta_\xi^2 + \theta_{J\xi}^2)(\tilde{\nabla}_X Y, Z) \\ &= 2\mu\langle\tilde{\nabla}_X Y, Z\rangle + 2\mu'(\langle\xi, \tilde{\nabla}_X Y\rangle\langle\xi, Z\rangle + \langle J\xi, \tilde{\nabla}_X Y\rangle\langle J\xi, Z\rangle\} \\ &= \langle 2\mu\tilde{\nabla}_X Y + 2\mu'\langle\tilde{\nabla}_X Y, \xi\rangle\xi + 2\mu'\langle\tilde{\nabla}_X Y, J\xi\rangle J\xi, Z\rangle. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Por outro lado, segue da fórmula de Koszul que

$$\begin{aligned} 2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= X(\tilde{g}(Y, Z)) + Y(\tilde{g}(Z, X)) - Z(\tilde{g}(X, Y)) \\ &\quad - \tilde{g}(X, [Y, Z]) + \tilde{g}(Y, [Z, X]) + \tilde{g}(Z, [X, Y]). \end{aligned} \tag{5.12}$$

Vamos calcular cada membro do lado direito da expressão acima.

$$\begin{aligned} X(\tilde{g}(Y, Z)) &= X(\mu)\langle Y, Z\rangle + \mu X\langle Y, Z\rangle + X(\mu')(\langle\xi, Y\rangle\langle\xi, Z\rangle + \langle J\xi, Y\rangle\langle J\xi, Z\rangle) \\ &\quad + \mu' X(\langle\xi, Y\rangle\langle\xi, Z\rangle + \langle J\xi, Y\rangle\langle J\xi, Z\rangle). \end{aligned}$$

Usando (5.9), e os fatos de ξ ser conforme fechado e J ser paralelo, temos que

$$\begin{aligned} X(\tilde{g}(Y, Z)) &= 2\psi\mu'\langle\xi, X\rangle\langle Y, Z\rangle + \mu X\langle Y, Z\rangle \\ &\quad + 2\psi\mu''\langle\xi, X\rangle(\langle\xi, Y\rangle\langle\xi, Z\rangle + \langle J\xi, Y\rangle\langle J\xi, Z\rangle) \\ &\quad + \mu'(\psi\langle X, Y\rangle\langle\xi, Z\rangle + \langle\xi, \nabla_X Y\rangle\langle\xi, Z\rangle) \\ &\quad + \mu'(\psi\langle\xi, Y\rangle\langle X, Z\rangle + \langle\xi, Y\rangle\langle\xi, \nabla_X Z\rangle) \\ &\quad + \mu'(\psi\langle JX, Y\rangle\langle J\xi, Z\rangle + \langle J\xi, \nabla_X Y\rangle\langle J\xi, Z\rangle) \\ &\quad + \mu'(\psi\langle J\xi, Y\rangle\langle JX, Z\rangle + \langle J\xi, Y\rangle\langle J\xi, \nabla_X Z\rangle). \end{aligned} \tag{5.13}$$

Também,

$$\tilde{g}([X, Y], Z) = \mu\langle[X, Y], Z\rangle + \mu'(\langle\xi, [X, Y]\rangle\langle\xi, Z\rangle + \langle J\xi, [X, Y]\rangle\langle J\xi, Z\rangle). \tag{5.14}$$

O cálculo dos termos restantes é análogo ao dos que foram feitos acima. Substituindo (5.13),(5.14) e as fórmulas análogas a estas em (5.12), temos

$$\begin{aligned} 2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= 2\psi\mu'(\langle\xi, X\rangle\langle Y, Z\rangle + \langle\xi, Y\rangle\langle X, Z\rangle - \langle\xi, Z\rangle\langle X, Y\rangle) \\ &\quad + \mu(X\langle Y, Z\rangle + Y\langle X, Z\rangle - Z\langle X, Y\rangle) \\ &\quad + 2\psi\mu''(\langle\xi, X\rangle\langle\xi, Y\rangle\langle\xi, Z\rangle + \langle\xi, X\rangle\langle J\xi, Y\rangle\langle J\xi, Z\rangle + \langle\xi, Y\rangle\langle\xi, X\rangle\langle\xi, Z\rangle) \\ &\quad + 2\psi\mu''(\langle\xi, Y\rangle\langle J\xi, X\rangle\langle J\xi, Z\rangle - \langle\xi, Z\rangle\langle\xi, X\rangle\langle\xi, Y\rangle - \langle\xi, Z\rangle\langle J\xi, X\rangle\langle J\xi, Y\rangle) \\ &\quad + \mu'(\psi\langle X, Y\rangle\langle\xi, Z\rangle + \langle\xi, \nabla_X Y\rangle\langle\xi, Z\rangle + \psi\langle\xi, Y\rangle\langle X, Z\rangle) \\ &\quad + \mu'(\langle\xi, Y\rangle\langle\xi, \nabla_X Z\rangle + \psi\langle JX, Y\rangle\langle J\xi, Z\rangle + \langle J\xi, \nabla_X Y\rangle\langle J\xi, Z\rangle) \\ &\quad + \mu'(\psi\langle J\xi, Y\rangle\langle JX, Z\rangle + \langle J\xi, Y\rangle\langle J\xi, \nabla_X Z\rangle + \psi\langle Y, X\rangle\langle\xi, Z\rangle) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\mu'(\langle\xi,\nabla_Y X\rangle\langle\xi,Z\rangle+\psi\langle\xi,X\rangle\langle Y,Z\rangle+\langle\xi,X\rangle\langle\xi,\nabla_Y Z\rangle)\\
&+\mu'(\psi\langle JY,X\rangle\langle J\xi,Z\rangle+\langle J\xi,\nabla_Y X\rangle\langle J\xi,Z\rangle+\psi\langle J\xi,X\rangle\langle JY,Z\rangle)\\
&+\mu'(\langle J\xi,X\rangle\langle J\xi,\nabla_Y Z\rangle-\psi\langle Z,Y\rangle\langle\xi,X\rangle-\langle\xi,\nabla_Z Y\rangle\langle\xi,X\rangle)\\
&-\mu'(\psi\langle\xi,Y\rangle\langle Z,X\rangle+\langle\xi,Y\rangle\langle\xi,\nabla_Z X\rangle+\psi\langle JZ,Y\rangle\langle J\xi,X\rangle)\\
&-\mu'(\langle J\xi,\nabla_Z Y\rangle\langle J\xi,X\rangle+\psi\langle J\xi,Y\rangle\langle JZ,X\rangle+\langle J\xi,Y\rangle\langle J\xi,\nabla_Z X\rangle)\\
&+\mu(\langle[X,Y],Z\rangle-\langle[Y,Z],X\rangle+\langle[Z,X],Y\rangle)\\
&+\mu'(\langle\xi,[X,Y]\rangle\langle\xi,Z\rangle+\langle J\xi,[X,Y]\rangle\langle J\xi,Z\rangle-\langle\xi,[Y,Z]\rangle\langle\xi,X\rangle)\\
&-\mu'(\langle J\xi,[Y,Z]\rangle\langle J\xi,X\rangle-(\langle\xi,[Z,X]\rangle\langle\xi,Y\rangle-\langle J\xi,[Z,X]\rangle\langle J\xi,Y\rangle).
\end{aligned}
$$

Após alguns cancelamentos, a expressão acima torna-se

$$
\begin{aligned}
2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y,Z)&=\mu(X\langle Y,Z\rangle+Y\langle X,Z\rangle-Z\langle X,Y\rangle)\\
&\quad+\mu(\langle[X,Y],Z\rangle-\langle[Y,Z],X\rangle+\langle[Z,X],Y\rangle)\\
&\quad+2\psi\mu'\langle\xi,X\rangle\langle Y,Z\rangle+2\psi\mu'\langle\xi,Y\rangle\langle X,Z\rangle\\
&\quad+2\psi\mu''(\langle\xi,X\rangle\langle\xi,Y\rangle\langle\xi,Z\rangle+\langle\xi,X\rangle\langle J\xi,Y\rangle\langle J\xi,Z\rangle)\\
&\quad+2\psi\mu''(\langle J\xi,X\rangle\langle\xi,Y\rangle\langle J\xi,Z\rangle-\langle J\xi,X\rangle\langle J\xi,Y\rangle\langle\xi,Z\rangle)\\
&\quad+\mu'(2\langle\xi,\nabla_X Y\rangle\langle\xi,Z\rangle+2\langle J\xi,\nabla_X Y\rangle\langle J\xi,Z\rangle)\\
&\quad+\mu'(2\psi\langle J\xi,Y\rangle\langle JX,Z\rangle+2\psi\langle J\xi,X\rangle\langle JY,Z\rangle),
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

e (5.15) pode ser escrita como

$$
\begin{aligned}
2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y,Z)&=\langle 2\mu\nabla_X Y+2\psi\mu'(\langle\xi,X\rangle Y+\langle\xi,Y\rangle X)\\
&\quad+2\psi\mu''(\langle\xi,X\rangle\langle\xi,Y\rangle\xi+\langle\xi,X\rangle\langle J\xi,Y\rangle J\xi)\\
&\quad+2\psi\mu''(\langle J\xi,X\rangle\langle\xi,Y\rangle J\xi-\langle J\xi,X\rangle\langle J\xi,Y\rangle\xi)\\
&\quad+2\mu'(\langle\nabla_X Y,\xi\rangle\xi+\langle\nabla_X Y,J\xi\rangle J\xi)\\
&\quad+2\mu'(\psi\langle J\xi,Y\rangle JX+\psi\langle J\xi,X\rangle JY),Z\rangle.
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

Igualando as expressões para $2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y,Z)$ em (5.11) e (5.16), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\mu(\tilde{\nabla}_X Y-\nabla_X Y)+\mu'\langle\tilde{\nabla}_X Y-\nabla_X Y,\xi\rangle\xi+\mu'\langle\tilde{\nabla}_X Y-\nabla_X Y,J\xi\rangle J\xi=\\
&\quad=\psi\mu'(\langle\xi,X\rangle Y+\langle\xi,Y\rangle X+\langle J\xi,Y\rangle JX+\langle J\xi,X\rangle JY)\\
&\qquad+\psi\mu''\left((\langle\xi,X\rangle\langle\xi,Y\rangle-\langle J\xi,X\rangle\langle J\xi,Y\rangle)\xi+(\langle\xi,X\rangle\langle J\xi,Y\rangle+\langle J\xi,X\rangle\langle\xi,Y\rangle)J\xi\right).
\end{aligned}
$$

Fazendo $W=\tilde{\nabla}_X Y-\nabla_X Y$ e denotando por $F(X,Y)$ o lado direito da expressão acima dividido por μ, obtemos

$$
W+\frac{\mu'}{\mu}\langle W,\xi\rangle\xi+\frac{\mu'}{\mu}\langle W,J\xi\rangle J\xi=F(X,Y). \tag{5.17}
$$

Tomando o produto interno de (5.17) com ξ e $J\xi$, respectivamente, tem-se

$$\begin{cases} \langle W,\xi\rangle(1+\frac{\mu'}{\mu}\langle\xi,\xi\rangle) = \langle F(X,Y),\xi\rangle \\ \langle W,J\xi\rangle(1+\frac{\mu'}{\mu}\langle\xi,\xi\rangle) = \langle F(X,Y),J\xi\rangle. \end{cases}$$

Segue daí que

$$W = F(X,Y) - \frac{u'}{u+u'|\xi|^2}\langle F(X,Y),\xi\rangle\xi - \frac{u'}{u+u'|\xi|^2}\langle F(X,Y),J\xi\rangle J\xi. \tag{5.18}$$

Temos também que

$$\begin{aligned} \langle F(X,Y),\xi\rangle &= \frac{\psi}{\mu}\mu'(\langle\xi,X\rangle\langle Y,\xi\rangle + \langle\xi,Y\rangle\langle X,\xi\rangle + \langle J\xi,Y\rangle\langle JX,\xi\rangle + \langle J\xi,X\rangle\langle JY,\xi\rangle) \\ &\quad + \frac{\psi}{\mu}\mu''(\langle\xi,X\rangle\langle\xi,Y\rangle|\xi|^2 - \langle J\xi,X\rangle\langle J\xi,Y\rangle|\xi|^2) \\ &= \frac{\psi}{\mu}(2\mu' + \mu''|\xi|^2)(\langle\xi,X\rangle\langle\xi,Y\rangle - \langle J\xi,X\rangle\langle J\xi,Y\rangle) \end{aligned}$$

e, similarmente,

$$\langle F(X,Y),J\xi\rangle = \frac{\psi}{\mu}(2\mu' + \mu''|\xi|^2)(\langle\xi,X\rangle\langle J\xi,Y\rangle + \langle\xi,Y\rangle\langle J\xi,X\rangle).$$

Por fim, substituindo as expressões de $F(X,Y)$, $\langle F(X,Y),\xi\rangle$ e $\langle F(X,Y),J\xi\rangle$ em (5.18), obtemos

$$\begin{aligned} W &= \psi\nu\{\langle\xi,X\rangle Y + \langle\xi,Y\rangle X + \langle J\xi,Y\rangle JX + \langle J\xi,X\rangle JY\} \\ &\quad + \psi\sigma\{(\langle\xi,X\rangle\langle\xi,Y\rangle - \langle J\xi,X\rangle\langle J\xi,Y\rangle)\xi + (\langle\xi,X\rangle\langle J\xi,Y\rangle + \langle J\xi,X\rangle\langle\xi,Y\rangle)J\xi\}, \end{aligned}$$

onde $\nu = \dfrac{\mu'}{\mu}$ e $\sigma = \dfrac{\mu''\mu - 2(\mu')^2}{\mu(\mu+\mu'|\xi|^2)}$. □

Mostraremos agora que as curvas integrais do campo $\hat{\xi} = \frac{\xi}{|\xi|}$, quando parametrizadas pelo comprimento de arco de $\tilde{g}$, são geodésicas de $(M,\tilde{g})$.

Corolário 5.11. *Nas notações e hipóteses da proposição anterior, se $\hat{\xi} = \frac{\xi}{|\xi|}$, então*

$$\tilde{\nabla}_{\alpha\hat{\xi}}\alpha\hat{\xi} = 0,$$

onde $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\mu+\mu'|\xi|^2}}$.

Demonstração. Pela proposição anterior, temos

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\alpha\hat{\xi}}\alpha\hat{\xi} &= \alpha^2\nabla_{\hat{\xi}}\hat{\xi} + 2\psi\alpha\alpha'|\xi|\hat{\xi} + 2\psi\nu\alpha^2|\xi|\hat{\xi} + \psi\sigma\alpha^2|\xi|^3\hat{\xi} \\ &= \psi|\xi|((\alpha^2)' + 2\nu\alpha^2 + \sigma|\xi|^2\alpha^2)\hat{\xi}. \end{aligned}$$

Observe que $2\nu + \sigma|\xi|^2 = \frac{2\mu' + \mu''|\xi|^2}{\mu + \mu'|\xi|^2}$. Tomando $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\mu + \mu'|\xi|^2}}$, obtemos

$$(\alpha^2)' = -\frac{2\mu' + \mu''|\xi|^2}{\mu + \mu'|\xi|^2}\alpha^2,$$

e o resultado segue. □

Nosso próximo resultado relaciona a curvatura seccional holomorfa da métrica $g = \langle , \rangle$ com a da métrica $\tilde{g}$. Antes, precisamos do seguinte lema devido a CAMINHA (2017).

Lema 5.12. *Se (M^n, J, g) é uma variedade kähleriana e $p \in M$, então existe uma vizinhança $U \subset M$ de p e um referencial hermitiano em U o qual é geodésico em p.*

Demonstração. Tome uma bola normal $U \subset M$ com centro p e uma base hermitiana $(e_1, J_p e_1, \ldots, e_n, J_p e_n)$ de T_pM. Estendendo tais vetores por transporte pararalelo ao longo dos raios geodésicos em U que partem de p, obtemos (cf. exercício 3.7 de DO CARMO (2011)) um referencial ortonormal $(e_1, e_1', \ldots, e_n, e_n')$ em U, que é geodésico em p. Afirmamos que $e_k' = Je_k$ em U, para $1 \leq k \leq n$. De fato, dado $q \in U$, tome a geodésica radial $\gamma : [0,1] \to U$, tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$; Segue do fato de J ser um tensor paralelo que

$$\frac{D}{dt} Je_k = \nabla_{\gamma'} Je_k = J\nabla_{\gamma'} e_k = 0,$$

de modo que Je_k é paralelo ao longo de γ. Mas, como $e_k'(p) = J_p e_k = (Je_k)(p)$, a unicidade do transporte paralelo implica que $e_k' = Je_k$ ao longo de γ, e assim $e_k' = Je_k$ em q. □

Proposição 5.13. *Sejam (M, J, g) uma variedade kähleriana, ξ um campo conforme fechado em (M, g) com fator de conformidade ψ e $\tilde{g}$ a métrica kähleriana de (M, J) dada pelo Teorema 5.6. Para $X \in T_pM$ unitário com relação a g, temos*

$$\begin{aligned}\tilde{K}(X) = {} & \frac{1}{\tilde{g}(X,X)^2}\{\mu K(X) + 3\mu' \mathrm{Ric}(\hat{\xi})\left(\langle X, \xi\rangle^2 + \langle X, J\xi\rangle^2\right) \\ & + \mu'' \mathrm{Ric}(\hat{\xi})\left(\langle X, \xi\rangle^2 + \langle X, J\xi\rangle^2\right)^2 \\ & - 2\psi^2 \sigma'(\mu + \mu'|\xi|^2)\left(\langle X, \xi\rangle^2 + \langle X, J\xi\rangle^2\right)^2\} \\ & + \frac{1}{\tilde{g}(X,X)}\{-4\psi^2(2\nu' - \nu^2)\left(\langle X, \xi\rangle^2 + \langle X, J\xi\rangle^2\right) - 4\psi^2\nu\},\end{aligned} \tag{5.19}$$

onde $K(X)$ e $\tilde{K}(X)$ denotam, respectivamente, as curvaturas seccionais holomorfas de (M, J, g) e $(M, J, \tilde{g})$ com respeito a X, $\mathrm{Ric}(\hat{\xi})$ denota a curvatura de Ricci de g na direção de $\hat{\xi}$ (tomado como 0 se $\xi(p) = 0$) e ψ denota o fator de conformidade de ξ.

Demonstração. Dado $X \in T_pM$ com $\langle X, X\rangle = 1$, estenda X a um campo suave numa vizinhança de p. Se $\tilde{R}$ denota o tensor de curvatura de $(M, \tilde{g})$, a curvatura seccional holomorfa de $(M,\tilde{g})$ com relação a X é dada por

$$\begin{aligned}\tilde{K}(X) &= \frac{\tilde{g}(\tilde{R}(X,JX)JX,X)}{\tilde{g}(X,X)\tilde{g}(JX,JX)-\tilde{g}(X,JX)^2}\\ &= \frac{1}{\tilde{g}(X,X)^2}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_{JX}JX-\tilde{\nabla}_{JX}\tilde{\nabla}_XJX-\tilde{\nabla}_{[X,JX]}JX,X)\\ &= \frac{1}{\tilde{g}(X,X)^2}\{X(\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{JX}JX,X))-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{JX}JX,\tilde{\nabla}_XX)-JX(\tilde{g}(\tilde{\nabla}_XJX,X))\\ &\qquad +\tilde{g}(\tilde{\nabla}_XJX,\tilde{\nabla}_{JX}X)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{[X,JX]}JX,X)\}.\end{aligned}$$

Lembrando que μ é uma função que depende $|\xi|^2$, temos

$$X(\mu)=2\psi\mu^2\langle X,\xi\rangle \text{ and } JX(\mu)=-2\psi\mu^2\langle X,J\xi\rangle. \tag{5.20}$$

Temos também, de (5.2) e para $\xi\neq 0$,

$$X(\psi)=\langle X,\nabla\psi\rangle=-\mathrm{Ric}(\hat{\xi})\langle X,\xi\rangle \tag{5.21}$$

e

$$JX(\psi)=-\mathrm{Ric}(\hat{\xi})\langle JX,\xi\rangle=\mathrm{Ric}(\hat{\xi})\langle X,J\xi\rangle. \tag{5.22}$$

Visando simplificar a notação, considere

$$\begin{aligned}&a=2\psi\nu\langle X,\xi\rangle,\ \ b=2\psi\nu\langle X,J\xi\rangle,\\ &c=\psi\sigma(\langle X,\xi\rangle^2-\langle X,J\xi\rangle^2) \text{ e } d=2\psi\sigma\langle X,\xi\rangle\langle X,J\xi\rangle.\end{aligned} \tag{5.23}$$

Segue de (5.10) que

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_XX &= \nabla_XX+2\psi\nu(\langle X,\xi\rangle X+\langle X,J\xi\rangle JX)\\ &\quad +\psi\sigma((\langle X,\xi\rangle^2-\langle X,J\xi\rangle^2)\xi+2\langle X,\xi\rangle\langle X,J\xi\rangle J\xi)\\ &= \nabla_XX+aX+bJX+c\xi+dJ\xi,\\ \tilde{\nabla}_XJX &= J\tilde{\nabla}_XX=J(\nabla_XX+aX+bJX+c\xi+dJ\xi)\\ &= \nabla_XJX+aJX-bX+cJ\xi-d\xi,\\ \tilde{\nabla}_{JX}X &= \nabla_{JX}X+2\psi\nu(-\langle X,J\xi\rangle X+\langle X,\xi\rangle JX)\\ &\quad +\psi\sigma(-2\langle X,\xi\rangle\langle X,J\xi\rangle\xi+(\langle X,\xi\rangle^2-\langle X,J\xi\rangle^2)J\xi)\\ &= \nabla_{JX}X-bX+aJX-d\xi+cJ\xi\\ \tilde{\nabla}_{JX}JX &= J\tilde{\nabla}_{JX}X=J(\nabla_{JX}X-bX+aJX-d\xi+cJ\xi)\\ &= \nabla_{JX}JX-aX-bJX-c\xi-dJ\xi.\end{aligned} \tag{5.24}$$

Para o que segue, observamos que, como o valor $\tilde{K}(X)$ em p só depende do valor de X em p, podemos assumir que $(\nabla_vX)(p)=0$ e $(\nabla_vJX)(p)=0$ para todo $v\in T_pM$

(para isso basta aplicar o Lema 5.12 para obter um referencial geodésico hermitiano $(e_1, Je_1, \ldots, e_n, Je_n)$ numa vizinhança de p, tal que $e_1(p) = X_p$). Desse modo, $[X, JX] = \tilde{\nabla}_X JX - \tilde{\nabla}_{JX} X = [X, JX] = 0$ em p, e assim a expressão de $\tilde{K}(X)$ torna-se

$$\begin{aligned}\tilde{K}(X) &= \frac{1}{\tilde{g}(X,X)^2}\{X(\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{JX} JX, X)) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{JX} JX, \tilde{\nabla}_X X) - JX(\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X JX, X)) \\ &\quad + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X JX, \tilde{\nabla}_{JX} X\}.\end{aligned}$$

Substituindo na expressão acima as fórmulas em (5.24), tem-se

$$\begin{aligned}\tilde{K}(X) &= \frac{1}{\tilde{g}(X,X)^2}\{X(\tilde{g}(\nabla_{JX} JX - aX - bJX - c\xi - dJ\xi, X)) \\ &\quad - \tilde{g}(\nabla_{JX} JX - aX - bJX - c\xi - dJ\xi, \nabla_X X + \alpha X + \beta JX + c\xi + dJ\xi) \\ &\quad - JX(\tilde{g}(\nabla_X JX - bX + aJX - d\xi + cJ\xi, X)) \\ &\quad + \tilde{g}(\nabla_X JX - bX + aJX - d\xi + cJ\xi, \nabla_{JX} X - bX + aJX - d\xi + cJ\xi)\} \\ &= \frac{1}{\tilde{g}(X,X)^2}\{\underbrace{X(\tilde{g}(\nabla_{JX} JX, X)) - JX(\tilde{g}(\nabla_X JX, X))}_{I}\} \\ &\quad + \frac{1}{\tilde{g}(X,X)^2}\{\underbrace{\tilde{g}(X,X)(-X(a) + 2(a^2+b^2) + JX(b))}_{II}\} \\ &\quad + \frac{1}{\tilde{g}(X,X)^2}\{\underbrace{-aX(\tilde{g}(X,X)) + bJX(\tilde{g}(X,X))}_{III}\} \\ &\quad + \frac{1}{\tilde{g}(X,X)^2}\{\underbrace{-X(c)\tilde{g}(\xi,X) - X(d)\tilde{g}(J\xi,X) - JX(c)\tilde{g}(J\xi,X) + JX(d)\tilde{g}(\xi,X)}_{IV}\} \\ &\quad + \frac{1}{\tilde{g}(X,X)^2}\{\underbrace{-cX(\tilde{g}(\xi,X)) - dX(\tilde{g}(J\xi,X)) - cJX(\tilde{g}(J\xi,X)) + dJX(\tilde{g}(\xi,X))}_{V}\} \\ &\quad + \frac{1}{\tilde{g}(X,X)^2}\{\underbrace{2(ac+bd)\tilde{g}(\xi,X) + 2(ad-bc)\tilde{g}(J\xi,X) + 2(c^2+d^2)\tilde{g}(\xi,\xi)}_{VI}\}.\end{aligned}$$

Vamos calcular separadamente cada um dos seis termos acima, substituindo a, b, c e d pelos seus valores em (5.23) quando necessário:

$$\begin{aligned}I &= X(\mu)\langle\nabla_{JX} JX, X\rangle + \mu X\langle\nabla_{JX} JX, X\rangle \\ &\quad + X(\mu')(\langle\nabla_{JX} JX, \xi\rangle\langle X, \xi\rangle + \langle\nabla_{JX} JX, J\xi\rangle\langle X, J\xi\rangle) \\ &\quad + \mu' X(\langle\nabla_{JX} JX, \xi\rangle\langle X, \xi\rangle + \langle\nabla_{JX} JX, J\xi\rangle\langle X, J\xi\rangle) \\ &\quad - JX(\mu)\langle\nabla_X JX, X\rangle - \mu JX\langle\nabla_X JX, X\rangle \\ &\quad - JX(\mu')(\langle\nabla_X JX, \xi\rangle\langle X, \xi\rangle + \langle\nabla_X JX, J\xi\rangle\langle X, J\xi\rangle) \\ &\quad - \mu' JX(\langle\nabla_X JX, \xi\rangle\langle X, \xi\rangle + \langle\nabla_X JX, J\xi\rangle\langle X, J\xi\rangle).\end{aligned}$$

Recordando que $\nabla_v X = \nabla_v JX = 0$ e $[X, JX] = 0$ no ponto p, nesse ponto tem-se

$$\begin{aligned}
I &= \mu\langle \nabla_X \nabla_{JX} JX, X\rangle + \mu'\langle \nabla_X \nabla_{JX} JX, \xi\rangle\langle X, \xi\rangle \\
&+ \mu'\langle \nabla_X \nabla_{JX} JX, J\xi\rangle\langle X, J\xi\rangle - \mu\langle \nabla_{JX} \nabla_X JX, X\rangle \\
&- \mu'\langle \nabla_{JX} \nabla_X JX, \xi\rangle\langle X, \xi\rangle - \mu'\langle \nabla_{JX} \nabla_X JX, J\xi\rangle\langle X, J\xi\rangle \\
&= \mu\langle R(X, JX)JX, X\rangle + \mu'\langle R(X, JX)JX, \xi\rangle\langle X, \xi\rangle \\
&+ \mu'\langle R(X, JX)JX, J\xi\rangle\langle X, J\xi\rangle \\
&= \mu K(X) + \mu'\langle R(X, JX)JX, \xi\rangle\langle X, \xi\rangle + \mu'\langle R(X, JX)JX, J\xi\rangle\langle X, J\xi\rangle.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Vamos supor que p é um ponto tal que $\xi(p) \neq 0$. Ao final da demonstração, consideramos o caso em que $\xi(p) = 0$. Utilizando (5.3), temos

$$I = \mu K(X) + \mu' \mathrm{Ric}(\hat{\xi}) \left(\langle X, \xi\rangle^2 + \langle X, J\xi\rangle^2\right). \tag{5.26}$$

Também,

$$\begin{aligned}
II &= \tilde{g}(X, X)\{-2X(\psi)\nu\langle X, \xi\rangle - 4\psi^2\nu'\langle X, \xi\rangle^2 - 2\psi^2\nu \\
&+ 2JX(\psi)\nu\langle JX, \xi\rangle - 4\psi^2\nu'\langle X, J\xi\rangle^2 - 2\psi^2\nu + 8\psi^2\nu^2(\langle X, \xi\rangle^2 + \langle X, J\xi\rangle^2)\}.
\end{aligned}$$

Então, por (5.21) e (5.22), temos

$$\begin{aligned}
II &= 2\nu \mathrm{Ric}(\hat{\xi}) \left(\langle X, \xi\rangle^2 + \langle X, J\xi\rangle^2\right) \tilde{g}(X, X) \\
&- 4\psi^2\{(\nu' - 2\nu^2) \left(\langle X, \xi\rangle^2 + \langle X, J\xi\rangle^2\right) + \nu)\}\tilde{g}(X, X).
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Para o cálculo de III, considere $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Sabendo que $Y(\mu) = 2\psi\mu'\langle Y, \xi\rangle$ e $Y(\mu') = 2\psi\mu''\langle Y, \xi\rangle$, e lembrando que $(\nabla_v X)(p) = 0$ para todo $v \in T_pM$. No ponto p, temos que

$$\begin{aligned}
Y(\tilde{g}(X, X) &= 2\psi\mu'\langle Y, \xi\rangle + 2\psi\mu''\langle Y, \xi\rangle \left(\langle X, \xi\rangle^2 + \langle X, J\xi\rangle^2\right) \\
&+ \mu'(2\psi\langle X, \xi\rangle\langle X, Y\rangle + 2\psi\langle X, J\xi\rangle\langle X, JY\rangle).
\end{aligned}$$

Substituindo Y na expressão acima respectivamente por X e JX e usando (5.23), obtemos

$$\begin{aligned}
III &= -a \left(\psi\mu'\langle X, \xi\rangle + 2\psi\mu''\langle X, \xi\rangle(\langle X, \xi\rangle^2 + \langle X, J\xi\rangle^2)\right) \\
&+ b \left(-4\psi\mu'\langle X, J\xi\rangle - 2\psi\mu''\langle X, J\xi\rangle(\langle X, \xi\rangle^2 + \langle X, J\xi\rangle^2)\right) \\
&= -8\psi^2\nu\mu' \left(\langle X, \xi\rangle^2 + \langle X, J\xi\rangle^2\right) - 4\psi^2\nu\mu'' \left(\langle X, \xi\rangle^2 + \langle X, J\xi\rangle^2\right)^2.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Para calcular o termo IV, usamos (5.23), (5.21) e (5.22) para calcular as derivadas no ponto p das funções c e d em relação a X e JX. Tem-se

$$\begin{aligned}
X(c) &= (-\sigma \mathrm{Ric}(\hat{\xi}) + 2\psi^2\sigma')\langle X,\xi\rangle(\langle X,\xi\rangle^2 - \langle X,J\xi\rangle^2) + 2\psi^2\sigma\langle X,\xi\rangle \\
X(d) &= (-2\sigma \mathrm{Ric}(\hat{\xi}) + 4\psi^2\sigma')\langle X,\xi\rangle^2\langle X,J\xi\rangle + 2\psi^2\sigma\langle X,J\xi\rangle \\
JX(c) &= (\sigma \mathrm{Ric}(\hat{\xi}) - 2\psi^2\sigma')\langle X,J\xi\rangle(\langle X,\xi\rangle^2 - \langle X,J\xi\rangle^2) + 2\psi^2\sigma\langle X,J\xi\rangle \\
JX(d) &= (2\sigma \mathrm{Ric}(\hat{\xi}) - 4\psi^2\sigma')\langle X,\xi\rangle\langle X,J\xi\rangle^2 - 2\psi^2\sigma\langle X,\xi\rangle.
\end{aligned}$$

Usando as expressões acima e as igualdades $\tilde{g}(X,\xi) = (\mu + \mu'|\xi|^2)\langle X,\xi\rangle$ e $\tilde{g}(X,J\xi) = (\mu + \mu'|\xi|^2)\langle X,J\xi\rangle$, temos

$$\begin{aligned}
IV &= (\sigma \mathrm{Ric}(\hat{\xi}) - 2\psi^2\sigma')(\mu + \mu'|\xi|^2)\left(\langle X,\xi\rangle^2 + \langle X,J\xi\rangle^2\right)^2 \\
&\quad - 4\psi^2\sigma(\mu + \mu'|\xi|^2)\left(\langle X,\xi\rangle^2 + \langle X,J\xi\rangle^2\right).
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Por fim, vamos ao cálculo do termo V. É fácil verificar, com o auxílio de (5.15), que

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X\xi, X) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{JX}\xi, JX) \;\text{ e }\; \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X\xi, JX) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{JX}\xi, X) = 0. \tag{5.30}$$

Utilizando (5.30), (5.24) e calculando no ponto p, temos que

$$\begin{aligned}
&- cX(\tilde{g}(\xi,X)) - cJX(\tilde{g}(J\xi,X)) = \\
&= -c(\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X\xi, X) + \tilde{g}(\xi, \tilde{\nabla}_X X) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{JX}\xi, JX) - \tilde{g}(\xi, \tilde{\nabla}_{JX}JX)) \\
&= -c(\tilde{g}(\xi, aX + bJx + c\xi + J\xi) - \tilde{g}(\xi, -aX - bJx - c\xi - dJ\xi)) \\
&= -2ac\tilde{g}(\xi,X) - 2bc\tilde{g}(\xi,JX) - 2c^2\tilde{g}(\xi,\xi)
\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
&- dX(\tilde{g}(J\xi,X)) + dJX(\tilde{g}(\xi,X)) = \\
&d(\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X\xi, JX) + \tilde{g}(\xi, \tilde{\nabla}_X JX) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{JX}\xi, X) + \tilde{g}(\xi, \tilde{\nabla}_{JX}X)) \\
&= d(\tilde{g}(\xi, aJX - bX + cJ\xi - d\xi) + \tilde{g}(\xi, -bX + aJX - d\xi + cJ\xi)) \\
&= 2ad\tilde{g}(\xi,JX) - 2b\tilde{g}(\xi,X) - 2d^2\tilde{g}(\xi,\xi).
\end{aligned}$$

Assim,

$$V = -2(ac + bd)\tilde{g}(\xi,X) + 2(ad - bc)\tilde{g}(\xi,JX) - 2(c^2 + d^2)\tilde{g}(\xi,\xi),$$

e dessa forma $V + VI = 0$.

Para obter $\tilde{K}(X)$, começamos somando a expressão dada em (5.28) como o segundo termo de (5.29), usando que $\sigma(\mu + \mu'|\xi|^2) = \mu'' - 2\nu\mu'$ e $\mu'(\langle X,\xi\rangle^2 + \langle X,J\xi\rangle^2) = \tilde{g}(X,X) - \mu$. Obtemos

$$\begin{aligned}
&- 8\psi^2\nu\mu'\left(\langle X,\xi\rangle^2 + \langle X,J\xi\rangle^2\right) - 4\psi^2\nu\mu''\left(\langle X,\xi\rangle^2 + \langle X,J\xi\rangle^2\right)^2 \\
&- 4\psi^2\sigma(\mu + \mu'|\xi|^2)\left(\langle X,\xi\rangle^2 + \langle X,J\xi\rangle^2\right) =
\end{aligned} \tag{5.31}$$

$$= -4\psi^2\frac{\mu''}{\mu}\left(\langle X,\xi\rangle^2+\langle X,J\xi\rangle^2\right)\tilde g(X,X).$$

Somando o primeiro termo de (5.27) como o primeiro termo de (5.29), obtem-se

$$\begin{aligned}&2\nu\mathrm{Ric}(\hat\xi)\left(\langle X,\xi\rangle^2+\langle X,J\xi\rangle^2\right)\tilde g(X,X)\\&\quad+(\sigma\mathrm{Ric}(\hat\xi)-2\psi^2\sigma')(\mu+\mu'|\xi|^2)\left(\langle X,\xi\rangle^2+\langle X,J\xi\rangle^2\right)^2\\&=\mu''\mathrm{Ric}(\hat\xi)\left(\langle X,\xi\rangle^2+\langle X,J\xi\rangle^2\right)^2+2\mu'\mathrm{Ric}(\hat\xi)\left(\langle X,\xi\rangle^2+\langle X,J\xi\rangle^2\right)\\&\quad-2\psi^2\sigma'(\mu+\mu'|\xi|^2)\left(\langle X,\xi\rangle^2+\langle X,J\xi\rangle^2\right)^2.\end{aligned}\tag{5.32}$$

Agora, somando o segundo termo de (5.27) e as expressões em (5.26),(5.31) e (5.32), temos

$$\begin{aligned}\tilde K(X)&=\frac{1}{\tilde g(X,X)^2}\{\mu K(X)+3\mu'\mathrm{Ric}(\hat\xi)\left(\langle X,\xi\rangle^2+\langle X,J\xi\rangle^2\right)\\&\quad+\mu''\mathrm{Ric}(\hat\xi)\left(\langle X,\xi\rangle^2+\langle X,J\xi\rangle^2\right)^2-4\psi^2\frac{\mu''}{\mu}\left(\langle X,\xi\rangle^2+\langle X,J\xi\rangle^2\right)\tilde g(X,X)\\&\quad-4\psi^2(\nu'-2\nu^2)\left(\langle X,\xi\rangle^2+\langle X,J\xi\rangle^2\right)\tilde g(X,X)-4\psi^2\nu\tilde g(X,X)\\&\quad-2\psi^2\sigma'(\mu+\mu'|\xi|^2)\left(\langle X,\xi\rangle^2+\langle X,J\xi\rangle^2\right)^2\}.\end{aligned}\tag{5.33}$$

Substituindo $\frac{\mu''}{\mu}=\nu'+\nu^2$ na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}\tilde K(X)&=\frac{1}{\tilde g(X,X)^2}\{\mu K(X)+3\mu'\mathrm{Ric}(\hat\xi)\left(\langle X,\xi\rangle^2+\langle X,J\xi\rangle^2\right)\\&\qquad+\mu''\mathrm{Ric}(\hat\xi)\left(\langle X,\xi\rangle^2+\langle X,J\xi\rangle^2\right)^2\\&\qquad-2\psi^2\sigma'(\mu+\mu'|\xi|^2)\left(\langle X,\xi\rangle^2+\langle X,J\xi\rangle^2\right)^2\}\\&\quad+\frac{1}{\tilde g(X,X)}\{-4\psi^2(2\nu'-\nu^2)\left(\langle X,\xi\rangle^2+\langle X,J\xi\rangle^2\right)-4\psi^2\nu\}.\end{aligned}\tag{5.34}$$

A última fórmula acima foi obtida em p, supondo $\xi(p)\neq 0$. Agora, suponha que $\xi(p)=0$. Se $p\in\overline{\{x\in M;\xi(x)\neq 0\}}$, então tomando uma sequência (p_n) com $\xi(p_n)\neq 0$ e convergindo para p, temos por continuidade que

$$\tilde K_p(X)=\lim_n\tilde K_{p_n}(X)=\frac{1}{\mu(p)}K_p(X)-4\frac{\psi^2(p)\nu(p)}{\mu(p)}.$$

Portanto, a fórmula (5.34) continua válida em p. Se $p\notin\overline{\{x\in M;\xi(x)\neq 0\}}$, então existe uma vizinhança U de p tal que $\xi(q)=0$ para todo $q\in U$, e nesse caso μ é constante em U. Assim, μ', ν, e σ se anulam em U e, portanto, $K_p(X)=\frac{1}{\mu(p)}K_p(X)$, e a fórmula (5.34) continua válida em p. $\square$

O nosso próximo resultado é calcular o tensor de Ricci de $(M,\tilde g)$.

Proposição 5.14. *Sejam (M,J,g) uma variedade kähleriana, ξ um campo conforme* *fechado em (M,g) com fator de conformidade ψ e $\tilde{g}$ a métrica kähleriana de (M,J), dada pelo Teorema* 5.6. *Para $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, temos*

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{Ric}}(X,Y) &= \mathrm{Ric}(X,Y)\\ &\quad - 2\psi^2\{((n+1)\nu+\sigma|\xi|^2)g + ((n+1)\nu+\sigma|\xi|^2)'(\theta_\xi^2+\theta_{J\xi}^2)\}(X,Y)\\ &\quad + \mathrm{Ric}(\hat{\xi})((n+1)\nu+\sigma|\xi|^2)(\theta_\xi^2+\theta_{J\xi}^2)(X,Y)\\ &\quad + (n-1)\mathrm{Ric}(\hat{\xi})\nu(\theta_\xi^2-\theta_{J\xi}^2)(X,Y),\end{aligned} \tag{5.35}$$

onde Ric *e* $\widetilde{\mathrm{Ric}}$ *denotam, respectivamente, os tensores de Ricci de (M,J,g) e $(M,J,\tilde{g})$,* $\mathrm{Ric}(\hat{\xi})$ *denota a curvatura de Ricci de g na direção de $\hat{\xi}$ (tomado como* 0 *se $\xi(p)=0$) e ψ denota o fator de conformidade de ξ.*

Demonstração. Dado um ponto $p\in M$ tal que $\xi(p)\neq 0$ tome um referencial geodésico $(e_1,...,e_{2n})$ em p , ortonormal segundo a métrica g e tal que $e_{2n-1}(p)=\hat{\xi}(p)$ e $e_{2n}(p)=J\hat{\xi}(p)$. Dados campos $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, uma vez que $\mathrm{Ric}(X,Y)$ só depende dos valores de X e Y em p, podemos tomar X e Y de forma que $\nabla_vX=\nabla_vY=0$ para todo $v\in T_pM$. Considere, agora, o referencial $(\tilde{e}_1,...,\tilde{e}_{2n})$ ortonormal segundo a métrica $\tilde{g}$, onde $\tilde{e}_i=\frac{e_i}{\sqrt{\mu}}$, para $1\leq i\leq 2n-2$, $\tilde{e}_{2n-1}=\frac{e_{2n-1}}{\sqrt{\mu+\mu'|\xi|^2}}$ e $\tilde{e}_{2n}=\frac{e_{2n}}{\sqrt{\mu+\mu'|\xi|^2}}$. Temos que

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{Ric}}(X,Y) &= \sum_{i=1}^{2n}\tilde{g}(\tilde{R}(\tilde{e}_i,X)Y,\tilde{e}_i)\\ &= \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{2n-2}\tilde{g}(\tilde{R}(e_i,X)Y,e_i) + \frac{1}{\mu+\mu'|\xi|^2}\sum_{i=2n-1}^{2n}\tilde{g}(\tilde{R}(e_i,X)Y,e_i).\end{aligned} \tag{5.36}$$

Para o primeiro somatório na segunda linha de (5.36) temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2n-2}\tilde{g}(\tilde{R}(e_i,X)Y,e_i) &= \sum_{i=1}^{2n-2}e_i\tilde{g}(\tilde{\nabla}_XY,e_i) - \sum_{i=1}^{2n-2}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_XY,\tilde{\nabla}_{e_i}e_i)\\ &\quad - \sum_{i=1}^{2n-2}X\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{e_i}Y,e_i) + \sum_{i=1}^{2n-2}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{e_i}Y,\tilde{\nabla}_Xe_i).\end{aligned} \tag{5.37}$$

Vamos calcular cada um dos somatórios do lado direito da igualdade em (5.37) utilizando (5.15). Temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2n-2}e_i\tilde{g}(\tilde{\nabla}_XY,e_i) &= \sum_{i=1}^{2n-2}\mu\langle\nabla_{e_i}\nabla_XY,e_i\rangle + 2\psi^2\mu'\sum_{i=1}^{2n-2}(\langle e_i,X\rangle\langle e_i,Y\rangle - \langle e_i,JX\rangle\langle e_i,JY\rangle)\\ &\quad + (2n-2)\psi^2\mu''(\langle\xi,X\rangle\langle\xi,Y\rangle - \langle J\xi,X\rangle\langle J\xi,Y\rangle)\\ &= \sum_{i=1}^{2n-2}\mu\langle\nabla_{e_i}\nabla_XY,e_i\rangle + (2n-2)\psi^2\mu''(\langle\xi,X\rangle\langle\xi,Y\rangle - \langle J\xi,X\rangle\langle J\xi,Y\rangle),\end{aligned}$$

onde utilizamos na última igualdade que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2n-2}(\langle e_i,X\rangle\langle e_i,Y\rangle-\langle e_i,JX\rangle\langle e_i,JY\rangle)&=\sum_{i=1}^{2n}(\langle e_i,X\rangle\langle e_i,Y\rangle-\langle e_i,JX\rangle\langle e_i,JY\rangle)\\&-(\langle\hat{\xi},X\rangle\langle\hat{\xi},Y\rangle-\langle\hat{\xi},JX\rangle\langle\hat{\xi},JY\rangle)-(\langle J\hat{\xi},X\rangle\langle J\hat{\xi},Y\rangle-\langle J\hat{\xi},JX\rangle\langle J\hat{\xi},JY\rangle)\\&=\langle X,Y\rangle-\langle JX,JY\rangle=0.\end{aligned}\tag{5.38}$$

Se T e V são os tensores dados na Proposição 5.10, então $T(e_i,e_i)=V(e_i,e_i)=0$, para $1\le i\le 2n-2$. Desse modo, por (5.10) temos

$$\sum_{i=1}^{2n-2}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_XY,\tilde{\nabla}_{e_i}e_i)=0.$$

Para o terceiro somatório de (5.37), temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2n-2}X\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{e_i}Y,e_i)&=\sum_{i=1}^{2n-2}\mu\langle\nabla_X\nabla_{e_i}Y,e_i\rangle+\psi^2\mu'\sum_{i=1}^{2n-2}(\langle e_i,X\rangle\langle e_i,Y\rangle+\langle e_i,JX\rangle\langle e_i,JY\rangle)\\&+(2n-2)\psi^2\mu'\langle X,Y\rangle+(2n-2)(-\mathrm{Ric}(\hat{\xi})\mu'+2\psi^2\mu'')\langle\xi,X\rangle\langle\xi,Y\rangle\\&=\sum_{i=1}^{2n-2}\mu\langle\nabla_X\nabla_{e_i}Y,e_i\rangle-2\psi^2\mu'(\langle\hat{\xi},X\rangle\langle\hat{\xi},Y\rangle+\langle J\hat{\xi},X\rangle\langle J\hat{\xi},Y\rangle)\\&+2n\psi^2\mu'\langle X,Y\rangle+(2n-2)(-\mathrm{Ric}(\hat{\xi})\mu'+2\psi^2\mu'')\langle\xi,X\rangle\langle\xi,Y\rangle,\end{aligned}$$

onde utilizamos na última igualdade, por um cálculo análogo a (5.38), que

$$\sum_{i=1}^{2n-2}(\langle e_i,X\rangle\langle e_i,Y\rangle+\langle e_i,JX\rangle\langle e_i,JY\rangle)=2\langle X,Y\rangle-2(\langle\hat{\xi},X\rangle\langle\hat{\xi},Y\rangle+\langle J\hat{\xi},X\rangle\langle J\hat{\xi},Y\rangle).$$

Para o quarto somatório de (5.37), temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2n-2}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{e_i}Y,\tilde{\nabla}_Xe_i)&=\psi^2\nu^2\sum_{i=1}^{2n-2}\tilde{g}(\langle\xi,Y\rangle e_i+\langle J\xi,Y\rangle Je_i,\langle\xi,X\rangle e_i+\langle J\xi,X\rangle Je_i)\\&=\psi^2\nu^2\sum_{i=1}^{2n-2}\langle\xi,X\rangle\langle\xi,Y\rangle\tilde{g}(e_i,e_i)+\langle J\xi,X\rangle\langle J\xi,Y\rangle\tilde{g}(Je_i,Je_i)\\&=(2n-2)\psi^2\nu^2\mu(\langle\xi,X\rangle\langle\xi,Y\rangle+\langle J\xi,X\rangle\langle J\xi,Y\rangle)\\&=(2n-2)\psi^2\nu\mu'(\langle\xi,X\rangle\langle\xi,Y\rangle+\langle J\xi,X\rangle\langle J\xi,Y\rangle).\end{aligned}$$

Juntando os termos de (5.37) calculados, segue que

$$\sum_{i=1}^{2n-2}\tilde{g}(\tilde{R}(e_i,X)Y,e_i)=\mu\sum_{i=1}^{2n-2}\langle R(e_i,X)Y,e_i\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&+ (2n-2)\psi^2(\nu\mu' - \mu'')(\langle \xi, X\rangle\langle \xi, Y\rangle + \langle J\xi, X\rangle\langle J\xi, Y\rangle)\\
&+ 2\psi^2\mu'(\langle \hat{\xi}, X\rangle\langle \hat{\xi}, Y\rangle + \langle J\hat{\xi}, X\rangle\langle J\hat{\xi}, Y\rangle)\\
&+ (2n-2)\mathrm{Ric}(\hat{\xi})\mu'\langle \xi, X\rangle\langle \xi, Y\rangle\\
&- 2n\psi^2\mu'\langle X, Y\rangle.
\end{aligned} \tag{5.39}
$$

Passemos, agora, ao cálculo do segundo somatório na segunda linha de (5.36). Sabendo que $e_{2n-1}(\mu') = \hat{\xi}(\mu') = 2\psi\mu''|\xi|$, $e_{2n-1}(\mu'') = \hat{\xi}(\mu'') = 2\psi\mu'''|\xi|$ e $e_{2n-1}(\psi) = \hat{\xi}(\psi) = -\mathrm{Ric}(\hat{\xi})|\xi|$, temos

$$
\begin{aligned}
e_{2n-1}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, e_{2n-1}) &= \mu\langle \nabla_{\hat{\xi}}\nabla_X Y, \hat{\xi}\rangle\\
&+ 2(2\psi^2\mu'' - \mathrm{Ric}(\hat{\xi})\mu')(\langle \xi, X\rangle\langle \xi, Y\rangle - \langle J\xi, X\rangle\langle J\xi, Y\rangle)\\
&+ 2\psi^2\mu'(\langle \hat{\xi}, X\rangle\langle \hat{\xi}, Y\rangle - \langle J\hat{\xi}, X\rangle\langle J\hat{\xi}, Y\rangle)\\
&+ (2\psi^2\mu''' - \mathrm{Ric}(\hat{\xi})\mu'')|\xi|^2(\langle \xi, X\rangle\langle \xi, Y\rangle - \langle J\xi, X\rangle\langle J\xi, Y\rangle)\\
&+ 3\psi^2\mu''(\langle \xi, X\rangle\langle \xi, Y\rangle - \langle J\xi, X\rangle\langle J\xi, Y\rangle)\\
&+ \mu'|\xi|^2\langle e_{2n-1}, \nabla_{e_{2n-1}}\nabla_X Y\rangle
\end{aligned} \tag{5.40}
$$

e

$$
\begin{aligned}
e_{2n}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, e_{2n-1}) &= \mu\langle \nabla_{J\hat{\xi}}\nabla_X Y, J\hat{\xi}\rangle\\
&+ 2\psi^2\mu'(-\langle \hat{\xi}, X\rangle\langle \hat{\xi}, Y\rangle + \langle J\hat{\xi}, X\rangle\langle J\hat{\xi}, Y\rangle)\\
&+ \psi^2\mu''(-\langle \xi, X\rangle\langle \xi, Y\rangle + \langle J\xi, X\rangle\langle J\xi, Y\rangle)\\
&+ \mu'|\xi|^2\langle e_{2n}, \nabla_{e_{2n}}\nabla_X Y\rangle.
\end{aligned} \tag{5.41}
$$

Note que os tensores T e V dados pela Proposição (5.10) têm a seguinte propriedade:

$$
T(Z, JW) = T(JZ, W) \quad \text{e} \quad V(Z, JW) = V(JZ, W), \tag{5.42}
$$

para quaisquer $Z, W \in \mathfrak{X}(M)$. Dessa forma, $T(e_{2n}, e_{2n}) = -T(e_{2n-1}, e_{2n-1})$ e $V(e_{2n}, e_{2n}) = -V(e_{2n-1}, e_{2n-1})$; assim, por (5.10), temos

$$
\sum_{i=2n-2}^{2n} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, \tilde{\nabla}_{e_i} e_i) = 0. \tag{5.43}
$$

$$
\begin{aligned}
X\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{e_{2n-1}} Y, e_{2n-1}) &= \mu\langle \nabla_X\nabla_{e_{2n-1}} Y, e_{2n-1}\rangle\\
&+ 2(2\psi^2\mu'' - \mathrm{Ric}(\hat{\xi})\mu')\langle \xi, X\rangle\langle \xi, Y\rangle\\
&+ \psi^2\mu'(\langle \hat{\xi}, X\rangle\langle \hat{\xi}, Y\rangle + \langle J\hat{\xi}, X\rangle\langle J\hat{\xi}, Y\rangle) + \psi^2\mu'\langle X, Y\rangle\\
&+ (2\psi^2\mu''' - \mathrm{Ric}(\hat{\xi})\mu'')|\xi|^2\langle \xi, X\rangle\langle \xi, Y\rangle\\
&+ 2\psi^2\mu''\langle \xi, X\rangle\langle \xi, Y\rangle + \psi^2\mu''|\xi|^2\langle X, Y\rangle\\
&+ \mu'|\xi|^2\langle e_{2n-1}, \nabla_X\nabla_{e_{2n-1}} Y\rangle
\end{aligned} \tag{5.44}
$$

e

$$\begin{aligned} X\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{e_{2n}}Y, e_{2n}) &= \mu\langle \nabla_X \nabla_{e_{2n}} Y, e_{2n}\rangle \\ &+ 2(2\psi^2\mu'' - \mathrm{Ric}(\hat{\xi})\mu')\langle \xi, X\rangle\langle \xi, Y\rangle \\ &+ \psi^2\mu'(\langle \hat{\xi}, X\rangle\langle \hat{\xi}, Y\rangle + \langle J\hat{\xi}, X\rangle\langle J\hat{\xi}, Y\rangle) + \psi^2\mu'\langle X, Y\rangle \\ &+ (2\psi^2\mu''' - \mathrm{Ric}(\hat{\xi})\mu'')|\xi|^2\langle \xi, X\rangle\langle \xi, Y\rangle \\ &+ 2\psi^2\mu''\langle \xi, X\rangle\langle \xi, Y\rangle + \psi^2\mu''|\xi|^2\langle X, Y\rangle \\ &+ \mu'|\xi|^2\langle e_{2n}, \nabla_X \nabla_{e_{2n}} Y\rangle. \end{aligned} \tag{5.45}$$

Por fim, usando (5.10), o paralelismo de J e (5.42), obtemos no ponto p

$$\tilde{\nabla}_{e_{2n-1}} JY = \tilde{\nabla}_{Je_{2n-1}} Y \quad \text{e} \quad \tilde{\nabla}_X Je_{2n-1} = \tilde{\nabla}_X e_{2n}.$$

Logo,

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{e_{2n-1}}Y, \tilde{\nabla}_X e_{2n-1}) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{e_{2n-1}}JY, \tilde{\nabla}_X Je_{2n-1}) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{e_{2n}}Y, \tilde{\nabla}_X e_{2n}). \tag{5.46}$$

Novamente usando (5.10), temos no ponto p,

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{e_{2n-1}}Y, \tilde{\nabla}_X e_{2n-1}) = \tilde{g}(Z, W),$$

onde

$$Z = \psi\nu(|\xi|Y + \langle \xi, Y\rangle\hat{\xi} + \langle J\xi, Y\rangle J\hat{\xi}) + \psi\sigma(|\xi|\langle \xi, Y\rangle\xi + |\xi|\langle J\xi, Y\rangle J\xi)$$

e

$$W = \psi\nu(\langle \xi, X\rangle\hat{\xi} + |\xi|X + \langle J\xi, X\rangle J\hat{\xi}) + \psi\sigma(|\xi|\langle \xi, X\rangle\xi + |\xi|\langle J\xi, X\rangle J\xi).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \tilde{g}(Z, W) &= \psi^2\nu^2\{\tilde{g}(Y, \xi)\langle \xi, X\rangle + \tilde{g}(X, Y)|\xi|^2 + \tilde{g}(Y, J\xi)\langle J\xi, X\rangle + \tilde{g}(\hat{\xi}, \hat{\xi})\langle \xi, X\rangle\langle \xi, Y\rangle \\ &\qquad + \tilde{g}(X, \xi)\langle \xi, Y\rangle + \tilde{g}(J\xi, X)\langle J\xi, Y\rangle + \tilde{g}(\hat{\xi}, \hat{\xi})\langle J\xi, X\rangle\langle J\xi, Y\rangle\} \\ &+ \psi^2\nu\sigma\{2\tilde{g}(\hat{\xi}, \hat{\xi})\langle \xi, X\rangle\langle \xi, Y\rangle + 2\tilde{g}(\hat{\xi}, \hat{\xi})\langle J\xi, X\rangle\langle J\xi, Y\rangle + \tilde{g}(X, \xi)\langle \xi, Y\rangle|\xi|^2 \\ &\qquad + \tilde{g}(J\xi, X)\langle J\xi, Y\rangle|\xi|^2 + \tilde{g}(Y, \xi)\langle \xi, X\rangle|\xi|^2 + \tilde{g}(J\xi, Y)\langle J\xi, X\rangle|\xi|^2\} \\ &+ \psi^2\sigma^2\{\tilde{g}(\xi, \xi)|\xi|^2(\langle \xi, X\rangle\langle \xi, Y\rangle + \langle J\xi, X\rangle\langle J\xi, Y\rangle)\}. \end{aligned}$$

Substituindo $\tilde{g}(Y, \xi) = \mu\langle X, \xi\rangle + \mu'|\xi|^2\langle Y, \xi\rangle$ e fazendo o mesmo para todos termos semelhantes, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{e_{2n}}Y, \tilde{\nabla}_X e_{2n}) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{e_{2n-1}}Y, \tilde{\nabla}_X e_{2n-1}) \\ &= \psi^2\nu^2\mu|\xi|^2\langle X, Y\rangle - \psi^2\nu^2\mu P(X, Y) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \psi^2(4\nu^2 + 4\nu\sigma|\xi|^2 + \sigma^2|\xi|^4)(\mu + \mu'|\xi|^2)P(X,Y) \qquad (5.47)\\
&= \psi^2\nu^2\mu|\xi|^2\langle X,Y\rangle - \psi^2\nu^2\mu P(X,Y)\\
&+ \psi^2\left(2\nu + \sigma|\xi|^2\right)^2(\mu + \mu'|\xi|^2)P(X,Y),
\end{aligned}
$$

onde a primeira igualdade segue de (5.46), e $P(X,Y) = \langle \xi, X\rangle\langle \xi, Y\rangle + \langle J\xi, X\rangle\langle J\xi, Y\rangle$.

Portanto, por (5.40), (5.41), (5.43), (5.44), (5.45) e (5.47), temos que o segundo somatório na segunda linha de (5.36) é dado por

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=2n-2}^{2n} \tilde{g}(\tilde{R}(e_i,X)Y,e_i) &= (\mu + \mu'|\xi|^2)\sum_{i=1}^{2n-2}\langle R(e_i,X)Y,e_i\rangle\\
&- 2\psi^2\mu'(\langle\hat{\xi},X\rangle\langle\hat{\xi},Y\rangle + \langle J\hat{\xi},X\rangle\langle J\hat{\xi},Y\rangle) - 2\psi^2\nu^2\mu P(X,Y)\\
&- 2\psi^2(3\mu'' + \mu'''|\xi|^2)P(X,Y)\\
&+ \mathrm{Ric}(\hat{\xi})(2\mu' + \mu''|\xi|^2)P(X,Y) \qquad (5.48)\\
&+ 2\psi^2\left(2\nu + \sigma|\xi|^2\right)^2(\mu + \mu'|\xi|^2)P(X,Y)\\
&+ 2\psi^2\nu^2\mu|\xi|^2\langle X,Y\rangle - 2\psi^2\mu'\langle X,Y\rangle - 2\psi^2\mu''|\xi|^2\langle X,Y\rangle.
\end{aligned}
$$

Por fim, vamos substituir (5.39) e (5.48) em (5.36) e obter $\widetilde{\mathrm{Ric}}(X,Y)$. Escrevendo o segundo e o último termos à direita da segunda igualdade em (5.39) respectivamente como

$$
\begin{aligned}
&(2n+2)\psi^2(\nu\mu' - \mu'')(\langle\xi,X\rangle\langle\xi,Y\rangle + \langle J\xi,X\rangle\langle J\xi,Y\rangle)\\
&- 4\psi^2(\nu\mu' - \mu'')(\langle\xi,X\rangle\langle\xi,Y\rangle + \langle J\xi,X\rangle\langle J\xi,Y\rangle)
\end{aligned}
$$

e

$$
-(2n+2)\psi^2\mu'\langle X,Y\rangle + 2\psi^2\mu'\langle X,Y\rangle,
$$

temos

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{Ric}}(X,Y) &= \mathrm{Ric}(X,Y)\\
&+ (2n+2)\psi^2\left(\frac{\nu\mu' - \mu''}{\mu}\right)P(X,Y) - (2n+2)\psi^2\frac{\mu'}{\mu}\langle X,Y\rangle\\
&+ \mathrm{Ric}(\hat{\xi})\left(\frac{2\mu' + \mu''|\xi|^2}{\mu + \mu'|\xi|^2}\right)P(X,Y)\\
&+ (2n-2)\mathrm{Ric}(\hat{\xi})\frac{\mu'}{\mu}\langle\xi,X\rangle\langle\xi,Y\rangle\\
&+ \underbrace{2\psi^2\left(\frac{\mu'}{\mu} - \frac{\mu'}{\mu + \mu'|\xi|^2} - \frac{\nu^2\mu|\xi|^2}{\mu + \mu'|\xi|^2}\right)\frac{1}{|\xi|^2}P(X,Y)}_{I} \qquad (5.49)\\
&- \underbrace{2\psi^2\left(2\frac{\nu\mu' - \mu''}{\mu} + \frac{3\mu'' + \mu'''|\xi|^2}{\mu + \mu'|\xi|^2} - \left(2\nu + \sigma|\xi|^2\right)^2\right)P(X,Y)}_{II}
\end{aligned}
$$

$$+ \underbrace{2\psi^2 \left(\frac{\mu'}{\mu} + \frac{\nu^2\mu|\xi|^2 - \mu' - \mu''|\xi|^2}{\mu + \mu'|\xi|^2} \right) \langle X, Y \rangle}_{III}.$$

Calculemos os termos I, II e III, dados acima:

$$\begin{aligned} I &= 2\psi^2 \left(\frac{(\mu')^2|\xi|^2}{\mu(\mu + \mu'|\xi|^2)} - \frac{\nu^2\mu|\xi|^2}{\mu + \mu'|\xi|^2} \right) \frac{1}{|\xi|^2} P(X, Y) \\ &= 2\psi^2 \left(\frac{\nu\mu' - \nu\mu'}{\mu + \mu'|\xi|^2} \right) P(X, Y) = 0. \end{aligned} \tag{5.50}$$

Para o cálculo de II, veja que

$$\frac{\nu\mu' - \mu''}{\mu} = \nu^2 - (\nu' + \nu^2) = -\nu', \quad 2\nu + \sigma|\xi|^2 = \frac{2\mu' + \mu''|\xi|^2}{\mu + \mu'|\xi|^2}$$

e

$$3\mu'' + \mu'''|\xi|^2 = (2\mu' + \mu''|\xi|^2)' = (\mu + \mu'|\xi|^2)''.$$

Daí,

$$\begin{aligned} II &= 2\psi^2 \left(-2\nu' + \left(\frac{(\mu + \mu'|\xi|^2)(\mu + \mu'|\xi|^2)'' - ((\mu + \mu'|\xi|^2)')^2}{(\mu + \mu'|\xi|^2)^2} \right) \right) \\ &= 2\psi^2 \left(-2\nu' + \left(\frac{(\mu + \mu'|\xi|^2)'}{(\mu + \mu'|\xi|^2)} \right)' \right) \\ &= 2\psi^2 \left(-2\nu + \frac{2\mu' + \mu''|\xi|^2}{(\mu + \mu'|\xi|^2)} \right)' \\ &= 2\psi^2(\sigma|\xi|^2)'. \end{aligned} \tag{5.51}$$

Por fim, temos

$$\begin{aligned} III &= \left(\frac{\mu'(\mu + \mu'|\xi|^2) + \nu^2\mu^2 - \mu'\mu - \mu''\mu|\xi|^2}{\mu(\mu + \mu'|\xi|^2)} \right) \langle X, Y \rangle \\ &= \frac{2(\mu')^2|\xi|^2 - \mu\mu''|\xi|^2}{\mu(\mu + \mu'|\xi|^2)} \langle X, Y \rangle \\ &= -\sigma|\xi|^2 \langle X, Y \rangle. \end{aligned} \tag{5.52}$$

Substituindo (5.50),(5.51) e (5.52) em (5.49) e lembrando que $\frac{\nu\mu' - \mu''}{\mu} = \nu^2 - (\nu' + \nu^2) = -\nu'$ e $P = \theta_\xi^2 + \theta_{J\xi}^2$, segue que

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{Ric}}(X, Y) &= \mathrm{Ric}(X, Y) \\ &\quad - 2\psi^2 \{((n+1)\nu + \sigma|\xi|^2)\langle X, Y \rangle + ((n+1)\nu + \sigma|\xi|^2)'(\theta_\xi^2 + \theta_{J\xi}^2)(X, Y)\} \\ &\quad + \mathrm{Ric}(\hat{\xi}) \left(\frac{2\mu' + \mu''|\xi|^2}{\mu + \mu'|\xi|^2} \right) (\theta_\xi^2 + \theta_{J\xi}^2)(X, Y) \end{aligned}$$

$$+ (2n-2)\mathrm{Ric}(\hat{\xi})\nu\theta_{\xi}^{2}(X,Y).$$

Observando finalmente que

$$\frac{2\mu' + \mu''|\xi|^2}{(\mu + \mu'|\xi|^2)} = 2\nu + \sigma|\xi|^2 = (n+1)\nu - (n-1)\nu + \sigma|\xi|^2, \tag{5.53}$$

a expressão acima torna-se

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{Ric}}(X,Y) &= \mathrm{Ric}(X,Y) \\ &\quad - 2\psi^2\{((n+1)\nu + \sigma|\xi|^2)\langle X,Y\rangle + ((n+1)\nu + \sigma|\xi|^2)'(\theta_{\xi}^2 + \theta_{J\xi}^2)(X,Y)\} \\ &\quad + \mathrm{Ric}(\hat{\xi})((n+1)\nu + \sigma|\xi|^2)(\theta_{\xi}^2 + \theta_{J\xi}^2)(X,Y) \\ &\quad + (n-1)\mathrm{Ric}(\hat{\xi})\nu(\theta_{\xi}^2 - \theta_{J\xi}^2)(X,Y). \end{aligned} \tag{5.54}$$

Lembramos que todo o cálculo foi feito para um ponto p tal que $\xi(p) \neq 0$, mas um argumento semelhante àquele do final da demonstração da Proposição 5.13 garante que a fórmula (5.54) é valida em qualquer ponto. □

5.3 Exemplos

Nosso objetivo agora é usar a expressão do tensor de Ricci de $(M, \tilde{g})$ para obter exemplos de variedades Einstein e sólitons de Ricci.

Uma métrica riemanniana g em uma variedade diferenciável M é denominada um sóliton de Ricci se existe um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que o tensor de Ricci da métrica g satisfaz a equação

$$\mathrm{Ric} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g,$$

onde $\mathcal{L}_X g$ denota a derivada de Lie de g com relação a X e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Vamos nos restringir ao caso de uma variedade kähleriana (M, J, g) com tensor de Ricci nulo e que possui um campo conforme fechado ξ com fator de conformidade $\psi = 1$. Tal situação, além de ocorrer em $\mathbb{C}^n$ com suas estruturas canônicas, também ocorre para um cone $M = (0, +\infty) \times_t N^{2n-1}$ com campo conforme fechado $\xi = t\partial_t$, onde N é uma variedade de Sasaki (cf. final da seção 5.1) com uma métrica Einstein. De fato, se g_N denota a métrica de N^{2n-1}, segue do Corolário 7.43 de (O'NEILL, 1983) que o tensor de Ricci de $M = (0, +\infty) \times_t N$ é dado por

$$\mathrm{Ric}(\xi, V) = 0$$

para todo $V \in \mathfrak{X}(M)$, e

$$\mathrm{Ric}(V, W) = \mathrm{Ric}_N(V, W) - (2n-2)g_N(V, W),$$

para $V, W \in \mathfrak{X}(N)$. Pela Proposição 1.2 de (SPARKS, 2011), se N é Sasaki, então

$$\mathrm{Ric}_N(J\xi, J\xi) = (2n-2)g_N(J\xi, J\xi).$$

Portanto, se g_N é Einstein o tensor de Ricci de M se anula.

Para encontrar métricas Einstein para as variedades kählerianas mencionadas acima, temos o seguinte.

Proposição 5.15. *Considere uma variedade kähleriana (M, J, g) com tensor de Ricci nulo e que possui um campo conforme fechado ξ com fator de conformidade $\psi = 1$. Seja $I \subset \mathbb{R}_+$ a imagem de $|\xi|^2 : M \to \mathbb{R}_+$, K uma constante real e $y : I \to \mathbb{R}$ uma função positiva com derivada positiva que satisfaz a equação diferencial ordinária*

$$(n-1)\left(\frac{y'}{y} - \frac{1}{t}\right) + \frac{y''}{y'} = \frac{K}{t}y. \tag{5.55}$$

Se $\tilde{g}$ é a métrica kähleriana de (M, J) dada pelo Teorema 5.6 com a função $\mu(t) = \frac{y(t)}{t}$, onde $t = |\xi|^2$, então $(M, \tilde{g})$ é uma variedade Einstein tal que $\widetilde{\mathrm{Ric}} = -2K\tilde{g}$.

Demonstração. Seja $(M, \tilde{g})$ uma variedade kähleriana obtida via Teorema 5.6 com função $\mu(t)$, onde $t = |\xi|^2$. Para o nosso caso, o tensor de Ricci $\widetilde{\mathrm{Ric}}$ de $\tilde{g}$ dado por (5.35), é

$$\widetilde{\mathrm{Ric}} = -2\{((n+1)\nu + \sigma|\xi|^2)g + ((n+1)\nu + \sigma|\xi|^2)'(\theta_\xi^2 + \theta_{J\xi}^2)\}. \tag{5.56}$$

Pela equação acima, $\widetilde{\mathrm{Ric}} = -2K\tilde{g}$ se, e só se, μ satisfaz

$$(n+1)\nu(t) + \sigma(t)t = K\mu(t). \tag{5.57}$$

Utilizando (5.53), a equação (5.57) torna-se

$$(n-1)\frac{\mu'}{\mu} + \frac{2\mu' + \mu''t}{(\mu + \mu't)} = K\mu.$$

Fazendo $y(t) = \mu(t)t$ e supondo $t > 0$, temos

$$y' = \mu + \mu't, \quad y'' = 2\mu' + \mu''t, \quad \frac{\mu'}{\mu} = \frac{\mu't}{\mu t} = \frac{\mu't + \mu}{\mu t} - \frac{1}{t} \ \text{ e } \ \mu = \frac{\mu t}{t};$$

assim, obtém-se a equação

$$(n-1)\frac{y'}{y} - (n-1)\frac{1}{t} + \frac{y''}{y'} = \frac{K}{t}y.$$

□

Agora, podemos obter alguns exemplos em que $(M, \tilde{g})$ é uma variedade Einstein.

Exemplo 5.16. Suponha que $K = 0$ na equação (5.55), então a equação pode ser escrita como

$$((n-1)\log(y) + \log(y'))' = ((n-1)\log(t))'.$$

Assim, $y^{n-1}y' = c_1 t^{n-1}$, onde c_1 é uma constante real, e daí

$$\left(\frac{1}{n}y^n\right)' = c_1 t^{n-1}$$

nos dá a solução geral $y(t) = (c_1 t^n + c_2)^{\frac{1}{n}}$. Então, a função μ que torna $(M, \tilde{g})$ uma variedade kähleriana com $\widetilde{\mathrm{Ric}} = 0$ é

$$\mu(t) = \frac{(c_1 t^n + c_2)^{\frac{1}{n}}}{t}, \tag{5.58}$$

onde as constantes c_1 e c_2 são escolhidas de modo que μ seja positiva. Como μ está definida apenas para $t > 0$, podemos escolher, por exemplo, $M = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

Exemplo 5.17. Para os casos $K > 0$ e $K < 0$, exibimos duas soluções particulares da equação (5.57). Para $K = n+1$,

$$\mu(t) = \frac{1}{1-t}$$

soluciona a equação e define a métrica do espaço hiperbólico complexo, dada no Exemplo 5.9. Para $K = -(n+1)$,

$$\mu(t) = \frac{1}{1+t}$$

soluciona a equação. Tal solução define, em $\mathbb{C}^n$, uma métrica não completa de curvatura seccional holomorfa constante e positiva. De fato, temos $\mu' = -\mu^2$, $\nu = -\mu$, $\sigma = 0$ e $2\nu' - \nu^2 = \mu^2$. Substituindo em (5.19), obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{K}(X) &= \frac{-4}{\tilde{g}(X,X)}((2\nu' - \nu^2)(\langle X, \xi\rangle^2 + \langle X, J\xi\rangle^2) + \nu) \\
&= \frac{4}{\tilde{g}(X,X)}(\mu - \mu^2(\langle X, \xi\rangle^2 + \langle X, J\xi\rangle^2) = 4.
\end{aligned}$$

Proposição 5.18. *Considere uma variedade kähleriana (M, J, g) com tensor de Ricci nulo e que possui um campo conforme fechado ξ com fator de conformidade $\psi = 1$. Seja $I \subset \mathbb{R}_+$ a imagem de $|\xi|^2 : M \to \mathbb{R}_+$, L e K constantes reais e $y : I \to \mathbb{R}$ uma função positiva e com derivada positiva, que satisfaz a equação diferencial ordinária*

$$(n-1)\left(\frac{y'}{y} - \frac{1}{t}\right) + \frac{y''}{y'} + Ly' = \frac{K}{t}y. \tag{5.59}$$

Se $\tilde{g}$ é a métrica kähleriana de (M, J) dada pelo Teorema 5.6 com a função $\mu(t) = \frac{y(t)}{t}$, onde $t = |\xi|^2$, então $(M, \tilde{g})$ é um sóliton de Ricci tal que $\widetilde{\mathrm{Ric}} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X\tilde{g} = -2K\tilde{g}$ para $X = -2L\xi$.

Demonstração. Primeiro devemos calcular $\mathcal{L}_\xi\tilde{g}$. Para este cálculo utilizamos (5.15) e obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi\tilde{g}(X,Y) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X\xi, Y) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y\xi, X) \\
&= \mu\langle\nabla_X\xi, Y\rangle + \mu\langle\nabla_Y\xi, X\rangle \\
&\quad + 2\psi\mu'(\langle\xi, X\rangle\langle\xi, Y\rangle + |\xi|^2\langle X, Y\rangle) \\
&\quad + 2\psi\mu''(\langle\xi, X\rangle\langle\xi, Y\rangle|\xi|^2 + \langle J\xi, X\rangle\langle J\xi, Y\rangle|\xi|^2) \\
&\quad + 2\psi\mu'(\langle\xi, X\rangle\langle\xi, Y\rangle + \langle J\xi, X\rangle\langle J\xi, Y\rangle) \\
&\quad + 2\psi\mu'(\langle J\xi, X\rangle\langle J\xi, Y\rangle) \\
&= 2\psi(\mu + \mu'|\xi|^2)\langle X, Y\rangle \\
&\quad + 2\psi(2\mu' + \mu''|\xi|^2)(\langle\xi, X\rangle\langle\xi, Y\rangle + \langle J\xi, X\rangle\langle J\xi, Y\rangle).
\end{aligned} \tag{5.60}$$

Assim, por (5.35), $\widetilde{\mathrm{Ric}} + \frac{1}{2}(-2L\mathcal{L}_\xi\tilde{g}) = -2K\tilde{g}$ se, e só se,

$$(n+1)\nu(t) + \sigma(t)t + L(u(t) + u'(t)t) = K\mu(t). \tag{5.61}$$

Utilizando novamente (5.53) e fazendo $y(t) = \mu(t)t$, como na demonstração da proposição anterior obtemos

$$(n-1)\frac{y'}{y} - (n-1)\frac{1}{t} + \frac{y''}{y'} + Ly' = \frac{K}{t}y.$$

□

O exemplo a seguir exibe um sóliton de Ricci completo $\tilde{g}$ em $\mathbb{C}^n$. Esse exemplo é o mesmo encontrado em (CAO, 1994), onde também foi mostrado que $\tilde{g}$ é uma métrica completa e de curvatura seccional positiva.

Exemplo 5.19. Suponha que $K = 0$ na equação (5.59); então, a equação pode ser escrita como

$$((n-1)\log(y) + \log(y') + Ly)' = ((n-1)\log(t))'.$$

Assim, $y^{n-1}e^{Ly}y' = c_1t^{n-1}$, onde c_1 é uma constante real. Tomando $L = 1$ e integrando a equação, obtemos

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k-1}\frac{(n-1)!}{k!}y^k\right)e^y = \frac{c_1}{n}t^n + \frac{c_2}{n}. \tag{5.62}$$

A função $F(y) = \left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k-1}\frac{n!}{k!}y^k\right)e^y$ é invertível, uma vez que $F' > 0$. Logo,

$$y(t) = F^{-1}(c_1t^n + c_2)$$

e

$$\mu(t) = \frac{F^{-1}(c_1 t^n + c_2)}{t}. \tag{5.63}$$

Tomando $c_2 = (-1)^{n-1}n!$ e $c_1 > 0$, temos que $F(0) = c_2$ e, assim, $y(0) = 0$. Tomando a derivada n vezes em relação a t em ambos os lados de (5.62), obtemos $y'(0) = (c_1)^{\frac{1}{n}}$. Dessa forma $\mu(t)$ também fica definida em $t = 0$ e, portanto, $\tilde{g}$ define uma métrica sobre $\mathbb{C}^n$. Para mostrar que $(\mathbb{C}^n, \tilde{g})$ é completo, observe que $y' = (1 + c_1 t)^{-1}$ para $n = 1$ e, para $n > 1$, existe $t_0 > 1$ tal que, para $t \geq t_0$,

$$y^{n-1}e^y = (n-1)\int_0^t y^{n-2}e^y dy + \int_0^t y^{n-1}e^y dy < n\int_0^t y^{n-1}e^y dy = c_1 t^n;$$

assim,

$$y' = \frac{c_1 t^{n-1}}{y^{n-1}e^y} > \frac{1}{t} \tag{5.64}$$

para $t \geq t_0$. Como $\mu + \mu' t = y'$, segue do Corolário (5.11) que, tomando $p \in \mathbb{C}^n$, $s = |\xi(p)|$ e $\gamma : [0, s] \to \mathbb{C}^n$ dada por $\gamma(t) = t\frac{p}{|p|}$, temos

$$\tilde{d}(0, p) = \int_0^s \sqrt{\mu(\gamma(t)) + \mu'(\gamma(t))t^2} dt = \int_0^s \sqrt{y'(t^2)} dt,$$

onde $\tilde{d}$ denota a distância riemanniana de $(M, \tilde{g})$. Como $y' > \frac{1}{c+t}$, para uma constante c e todo $t \geq t_0$, temos $\tilde{d}(0, p) \to +\infty$ quando $|p| \to +\infty$.

6 CONCLUSÃO

No capítulo 3 deste trabalho obtivemos um teorema de rigidez para hipersuperfícies CMC de um espaço homogêneo $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, mostrando que toda hipersuperfície $\varphi : M \to \mathbb{G}/\mathbb{H}$ com campo normal unitário N, compacta e CMC tal que $|A|^2 \leq -\mathrm{Ric}_{\mathbb{G}/\mathbb{H}}(N)$ é isométrica a um espaço homogêneo $\mathbb{K}/(\mathbb{K}\cap\mathbb{H})$. O método utilizado foi usar o cálculo de Δf_V, onde $f_V = \langle V, N\rangle$ e V é um campo de Killing de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, mostrando que essas funções são subharmônicas. No caso em que M é completa e não compacta foi imposta uma condição sobre o comportamento do campo N no infinito, o que possibilitou a utilização da versão clássica do princípio do máximo para funções subharmônicas. Uma questão que surge é saber se poderíamos aplicar outras versões de princípios do máximo no caso completo não compacto para obter um resultado análogo ao deste teorema. Uma segunda questão é saber se é possível tratar o caso de subvariedades de codimensão arbitrária de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$.

No capítulo 4 tratamos de estudar hipersuperfícies $\varphi : M \to \mathbb{G}$ espaciais de um grupo lorentziano G munido de uma métrica biinvariante. Obtivemos dois resultados para o caso em que M é compacta usando os teoremas de Hopf e da divergência. Foi obtido também um resultado para o caso em que M é completa e não compacta, utilizando um lema que dá uma condição para que um campo X, cujo divergente não troca de sinal, tenha, de fato, divergente nulo. Nesse ponto, esperamos aplicar esse lema de divergência em que outros contextos.

Por fim, no último capítulo, partindo de uma variedade kähleriana (M, J, g) que possui um campo conforme fechado ξ, construímos uma família de métricas kählerianas para (M, J). Procuramos, dentre estas métricas, exemplos de métricas Einstein e de sólitons de Ricci e obtivemos equações diferenciais ordinárias que não foram solucionadas em geral. Acreditamos que ainda haja várias possibilidades de aplicações para essa família de métricas.

REFERÊNCIAS

ALÍAS, L.J.; CAMINHA, A. On the scarcity of non-totally geodesic complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in a Lie group with bi-invariant Lorentzian metric. **Differential Geometry and its Applications**, v. 51, p. 49–64, 2017.

BITTENCOURT, F.; RIPOLL, J. Gauss map harmonicity and mean curvature of a hypersurface in a homogeneous manifold. **Pacific journal of mathematics**, v. 224, n. 1, p. 45–63, 2006.

CAMINHA, A. The geometry of closed conformal vector fields on Riemannian spaces. **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society**, v. 42, n. 2, p. 277–300, 2011.

CAMINHA, A. **Tópicos de Geometria Diferencial**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

CAMINHA, A. On the structure of complete kählerian manifolds furnished with closed conformal vector fields. **arXiv preprint arXiv:1409.5629**, 2017.

CAO, H.D. Existence of gradient Kähler-Ricci solitons. **Elliptic and Parabolic Methods in Geometry**, p. 1–16, 1994.

DO CARMO, M.P. **Geometria Riemanniana**. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

GILBARG, D.; TRUDINGER, N.S. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**, v. 224. Springer Science & Business Media, 2001.

KNAPP, A.W. **Lie Groups Beyond an Introduction**, v. 140. Springer Science & Business Media, 2002.

LEE, J.M. **Introduction to smooth manifolds**. Springer Verlag, 2003.

LEITE, M.L.; MIATELLO, I.D.; *et al.* Metrics of negative Ricci curvature on $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $n \geq 3$. **Journal of Differential Geometry**, v. 17, n. 4, p. 635–641, 1982.

MIATELLO, I.D. Metrics with non-positive Ricci curvature on semidirect products. **The Quarterly Journal of Mathematics**, v. 37, n. 3, p. 309–314, 1986.

MIATELLO, I.D.; LEITE, M.L.; MIATELLO, R.J. Negative Ricci curvature on complex simple Lie groups. **Geometriae Dedicata**, v. 17, n. 2, p. 207–218, 1984.

MILNOR, J. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups. **Advances in mathematics**, v. 21, n. 3, p. 293–329, 1976.

O'NEILL, B. **Semi-Riemannian geometry with applications to relativity**, v. 103.

Academic press, 1983.

ROS, A.; URBANO, F. Lagrangian submanifolds of Cn with conformal Maslov form and the Whitney sphere. **J. Math. Soc. Japan**, v. 50, n. 1, p. 203–226, 1998.

SPARKS, J. Sasaki-Einstein manifolds. **Surveys in Differential Geometry**, v. 16, p. 265–324, 2011.