UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ANTÔNIO GRANGEIRO FILHO

A MASSA E O CENTRO DE MASSA DE GRÁFICOS

FORTALEZA
2017

ANTÔNIO GRANGEIRO FILHO

A MASSA E O CENTRO DE MASSA DE GRÁFICOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria.

Orientador:
Prof. Dr. Frederico Vale Girão.

FORTALEZA
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F498m Filho, Antônio Grangeiro.
A massa e o centro de massa de gráficos / Antônio Grangeiro Filho. – 2018.
45 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática , Fortaleza, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Frederico Vale Girão.

1. Massa. 2. Centro de massa. 3. Gráficos assintoticamente planos. 4. Gráficos assintoticamente hiperbólicos. 5. Desigualdade da massa positiva. I. Título.

CDD 510

ANTÔNIO GRANGEIRO FILHO

A MASSA E O CENTRO DE MASSA DE GRÁFICOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria.

Aprovada em: 30/10/2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Frederico Vale Girão (Orientador).
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Levi Lopes de Lima.
Universidade Federal do Ceará - UFC.

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva.
Universidade Federal do Ceará - UFC.

Prof. Dr. Ezequiel Rodrigues Barbosa.
Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG

Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório.
Universidade Federal de Alagoas - UFAL

Dedico este trabalho à minha mãe, Dona Aldísia Nogueira da Silva, e ao meu pai, Seu Antônio Grangeiro da Silva, meus primeiros, últimos e melhores mestres, tutores e sustenedores, com os quais aprendi toda à vida as lições mais importantes, os quais me conduziram no caminho que eu não conhecia nem ao menos o início, transformado-me em professor, quando eles mal sabem ler, em pessoa de bem e de serventia para a sociedade.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, quero agradecer à minha mãe, Dona Maria Aldísia Nogueira da Silva e ao meu pai, Seu Antônio Grangeiro da Silva, por terem-me guiado no caminho que me conduziu até aqui, quando eu ainda não podia fazer por conta própria. Agradeço à sociedade brasileira, aos seus trabalhadores braçais e aos seus trabalhadores intelectuais, que com sua força e sua inteligência permitiram-me o progresso em meio à tenebrosa ignorância de nossa sociedade. Agradeço à espécie humana, a qual logrou acumular conhecimentos e riquezas, permitindo-me desfrutá-los. Creio fazer-se oportuno relembrar a frase de Isaac Newton: "Se eu vi mais longe é porque estava montado sobre ombros de gigantes". Sou eternamente grato a todos os povos, de todos os pontos da terra e de todas as épocas. Quero agradecer ao imenso apoio financeiro que a FUNCAP há concedido a mim ao longo do doutoramento, sem o qual haveria sido muito difícil minha estadia em Fortaleza. Agradeço imensamente à minha família, esposa e filhos, pela compreensão de minhas ausências, repetidas e prolongadas. Agradeço ao professor Frederico Vale Girão pelo tempo que há empenhado em ajudar-me no trabalho de tese, tornando possível a conclusão do curso de doutorado. Não poderia deixar de agradeçer às inestimáveis contribuições para meu aprendizado aportadas pelo amigo Alexandre. Quero agradecer também a amizade de pessoas como Fabrício, Edvalter, Valdir, Otávio, Macho Velho, Vovó, Aldeci, Tereza Cristina, Núbia e Eron, por estarem presentes quando eu os necessitava. Me lembrei que devo agradecer também ao professor Fábio Montenegro por suas palavras de apoio quando não tinha força suficiente para elevar a cabeça; e também ao professor Cibotaru, por ter ajudado-me desde o início nesta duradoura e dura jornada.

RESUMO

Neste trabalho, calculam-se as massas de gráficos assintoticamente planos e assintoticamente hiperbólicos como integrais de volume sobre as variedades. Isto é feito partindo-se da definição de massa via tensor de Einstein e aplicando-se o teorema da divergência. É apresentada uma expressão para o centro de massa de um gráfico assintoticamente plano. Faz-se presente neste trabalho a conjectura da massa positiva e a desigualdades de Penrose. Demonstra-se a veracidade destas para os casos particulares que estamos considerando. Para a demonstração da desigualdade de Penrose, calcula-se o termo de bordo da integral que expressa a massa e recorre-se a resultados conhecidos, como a desigualdade de Alexandrov-Fenchel. Toma-se por base os trabalhos realizados por Lam, para gráficos assintoticamente planos de codimensão um, por Mirandola-Vitório, para gráficos assintoticamente planos de codimensão arbitrária, e os trabalhos de Dahl-Gicquaud-Sakovich e de de Lima-Girão para gráficos hiperbólicos de codimensão um.

Palavras-chave: Massa. Centro de massa. Gráficos assintoticamente planos. Gráficos assintoticamente hiperbólicos. Desigualdade da massa positiva. Desigualdade de Penrose.

ABSTRACT

In this thesis, masses of asymptotically flat and asymptotically hyperbolic graphs are computed as volume integrals on the manifolds. This is done by using the mass definition via Einstein's tensor and applying the divergence theorem. A brief digression is made and an expression for the center of mass of an asymptotically flat graph is presented. The positive mass and Penrose inequalities are considered in this thesis. The validity of these inequalities are proved for the special cases we are considering. For the proof of the Penrose inequality, the boundary term of the integral that expresses the mass is computed and known results, like the Alexandrov-Fenchel inequality, are used. This thesis is supported on the works of Lam, for codimension one asymptotically flat graphs, of Mirandola-Vitório, for arbitrary codimension asymptotically flat graphs, and the works of Dahl-Gicquaud-Sakovich and de Lima-Girão for codimension one hyperbolic graphs.

Keywords: Mass, Center of mass, Asymptotically flat graphs, Asymptotically hyperbolic graphs, Positive mass inequality, Penrose inequality.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Calcularemos a massa de variedades gráficos assintoticamente planas e assintoticamente hiperbólicas como uma integral de volume sobre a variedade. Faremos isto partindo da definição de massa via tensor de Einstein e aplicando o teorema da divergência de Gauss. Apresentaremos uma expressão para o centro de massa de uma variedade assintoticamente plana. Faz-se presente em nosso trabalho a conjectura da massa positiva e a desigualdade de Penrose. A conjectura da massa positiva afirma que se uma variedade assintoticamente plana tem curvatura escalar não negativa então sua massa é não negativa. A desigualdade de Penrose afirma que se uma variedade assintoticamente plana, com curvatura escalar não negativa, tem uma fronteira interna mínima mais externa então sua massa deve ser maior ou igual a uma certa quantidade que depende da área da fronteira, a ser especificada posteriormente. Demonstraremos a veracidade destas afirmações para os casos que estamos estudando. Para ser mais preciso, apenas calcularemos as intregrais de bordo e recorreremos a resultados conhecidos para justificar a validade das afirmações. Tomaremos por base os trabalhos de LAM (2011), para variedade gráfico assintoticamente plana de codimensão um, de MIRANDOLA and VITÓRIO (2015), para variedade gráfico assintoticamente plana de codimensão arbitrária, de DAHL, GICQUAUD, and SAKOVICH (2013) e de DE LIMA and GIRÃO (2015), para variedade gráfico assintoticamente hiperbólica de codimensão um.

É oportuno recordar que temos duas definições de massa: a definição clássica de massa adm e a definição de massa via tensor de Einstein (ou via tensor de Ricci). São muito instrutivas as demonstrações da equivalência entre estas definições feitas em MIAO and TAM (2016), em 2015, e em HERZLICH (2016), também em 2015. Herzlich apresentou também, no mesmo artigo, a equivalência entre a definição clássica de massa e a definição via tensor de Einstein para variedades assintoticamente hiperbólicas. É oportuno ressaltar também que o teorema da massa positiva foi demonstrado sob certas condições por Schoen e Yau em 1979 e que a desigualdade de Penrose foi demonstrado por Huisken e Ilmanen em 1997 e por Bray em 1999. Em 1973, Penrose deu um argumento heurístico para justificar que a massa adm de um slice é no mínimo a massa do buraco negro contido no slice.

Este trabalho toma como base os trabalhos das pessoas citadas anteriormente e apresenta uma forma bastante elementar, mas eficaz, para o cálculo de massa e centro de massa de gráficos. O teorema da divergência de Gauss desempenha papel importante neste trabalho. No capítulo inicial são apresentados os conceitos necessários ao trabalho e os resultados que pretendo redemonstrar para massa de variedade gráfico assintoticamente plana e de variedade gráfico assintoticamente hiperbólica. No capítulo dois encontra-se o cálculo da massa adm de uma variedade gráfico assintoticamente plana de codimensão arbitrária, e em particular quando tem-se fibrado normal plano. Desmonstra-se neste capítulo o teorema da massa positiva. Calcula-se também a massa de uma variedade que tem uma fronteira interna e satisfaz certas condições. Usando-se resultados conhecidos demosntra-se a desigualdade de Penrose. No capítulo três faz-se tudo que foi feito no capítulo dois para uma variedade gráfico assintoticamente hiperbólica de codimensão um.

2 PRELIMINARES

Apresentaremos a seguir as definições de variedade assintoticamente plana, de função assintoticamente plana, de massa adm clássica, de massa adm via tensor de Einstein, de centro de massa de uma variedade assintoticamente plana, de variedade assintoticamente hiperbólica, de função assintoticamente hiperbólica, além das definições clássica e via tensor de Einstein da massa de uma variedade assintoticamente hiperbólica.

2.1 Variedade assintoticamente plana

Definição 2.1. *Uma variedade assintoticamente plana é uma variedade riemanniana completa (M,g) com curvatura escalar integrável tal que existe um difeomorfismo ϕ, chamado carta do infinito, do complementar de um compacto em M no complementar de uma bola fechada em $\mathbb{R}^n$, tal que, nestas coordenadas e para algum $\tau > \frac{n-2}{2}$ tem-se:*

$$|g_{ij}(x) - \delta_{ij}(x)| = O(|x|^{-\tau}),\ |\partial_k g_{ij}(x)| = O(|x|^{-\tau-1}),\ |\partial_k\partial_l g_{ij}(x)| = O(|x|^{-\tau-2}),$$

onde $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Dado que trataremos de variedades gráficos, temos que intimamente relacionado ao conceito de variedade assintoticamente plana está o de função assintoticamente plana. Definiremos uma função assintoticamente plana de modo que sua variedade gráfico seja assintoticamente plana. De modo mais preciso temos a definição seguinte.

Definição 2.2. *Uma função de classe C^2, $f = (f^1, f^2, ..., f^m) : \mathbb{R}^n \backslash \Omega \to \mathbb{R}^m$, $n \geq 3$, onde Ω é um subconjunto aberto limitado com bordo compacto suave, é dita assintoticamente plana se a curvatura escalar Scal de seu gráfico dotado da métrica ambiente do $\mathbb{R}^{n+m}$ é uma função integrável sobre o $\mathbb{R}^n$ e suas derivadas parciais satisfazem as seguintes condições de decaimento:*

$$|f_i^\alpha(x)| = O(|x|^{-\frac{\tau}{2}}), \quad |f_{ij}^\alpha(x)| = O(|x|^{-\frac{\tau}{2}-1}) \tag{2.1}$$

no infinito, para todo $\alpha = 1, \ldots, m$ e $i, j, k = 1, \ldots, n$, onde $\tau > (n-2)/2$.

Definição 2.3. *Seja (M^n, g) uma variedade assintoticamente plana e $\{x^i\}_{i=1}^n$ um sitema de coordenadas em $\mathbb{R}^n$; então sua massa adm clássica m é definida por:*

$$m \ = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} (g_{ij,j} - g_{jj,i})\, \nu_e^i \, dS_r \tag{2.2}$$

onde e é a métrica euclidiana, S_r esfera euclidiana de raio r, ν o campo normal unitário apontando para fora de S_r e ω_{n-1} a área da esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1}$. Observe-se também que há um somatório em i e j.

A princípio a definição depende da carta do infinito, contudo foi provado por CHRUŚCIEL (1986) e BARTINIK (1986) que este limite é indepemdente da escolha da carta do infinito.

Vamos dar a seguir uma definição de centro de massa de uma variedade assintoticamente plana. Existe mais de uma definição de centro de massa; a que daremos a seguir é devida a REGGE and TEITELBOIM (1974). Para que faça sentido a definição deles, a métrica da variedade assintoticamente plana deve satisfazer mais uma condição, dita condição de Regge-Teitelboim.

Definição 2.4. *Dizemos que uma variedade assintoticamente plana (M^n, g) satisfaz a condição de Regge-Teitelboim se*

$$g^I_{ij}(x) = O(|x|^{-\tau-1}) \quad e \quad |(\partial_k g_{ij})^I(x)| = O(|x|^{-\tau-2}), \;\; \tau > \frac{n-2}{2}, \tag{2.3}$$

onde $g^I_{ij}(x) = \frac{1}{2}(g_{ij}(x) - g_{ij}(-x))$ é a parte ímpar da métrica.

Podemos então estabelecer a definição de centro de massa de uma variedade assintoticamente plana.

Definição 2.5. *Seja (M^n, g) uma variedade assintoticamente plana que satisfaz à condição de Regge-Teitelboim e com massa adm não nula; definimos o centro de massa desta variedade, num sistema de coordenadas $\{x^i\}_{i=1}^n$ do $\mathbb{R}^n$, por $C = (C^1, C^2, \cdots, C^n)$, onde*

$$C^\alpha = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} \left[x^\alpha (g_{ij,j} - g_{jj,i})\nu^i_e - (g_{i\alpha}\nu^i_e - g_{ii}\nu^\alpha_e) \right] dS_r$$

$\forall \alpha = 1, 2, \ldots, n.$

Estabeleceremos a seguir as definições de massa e de centro de massa de uma variedade assintoticamente plana via tensor de Einstein.

Definição 2.6. *Sendo $X = x^i \partial_i$ o campo posição, definimos <u>a massa via tensor de Einstein</u> da variedade assintoticamente plana (M, g) por:*

$$m_E(g) \;=\; -\frac{1}{(n-1)(n-2)\omega_{n-1}} \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} \left(Ric^g - \frac{1}{2} Scal^g g \right)(X, \nu^g)\, dS_r^g. \tag{2.4}$$

Como já foi mencionado anteriormene, esta definição é equivalente à definição clássica de massa adm, e portanto usaremos doravante a mesma letra m para representá-las.

Definição 2.7. *Sendo $X^{(\alpha)} = r^2\partial_\alpha - 2x^\alpha x^i \partial_i$, $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$, que é um campo de Killing conforme, definimos* <u>*o centro de massa via tensor de Einstein*</u> *por $\mathbf{C}_E(g) = (c_E^1(g), \ldots, c_E^n(g))$, donde*

$$c_E^\alpha(g) \;=\; \frac{1}{2(n-1)(n-2)\omega_{n-1} m(g)} \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} \left(Ric^g - \frac{1}{2} Scal^g g \right)(X^{(\alpha)}, \nu^g)\, dS_r^g. \tag{2.5}$$

Uma demonstração da equivalência entre a definição anterior e a definição clássica pode ser encontrada em MIAO and TAM (2016).

2.2 Variedade assintoticamente hiperbólica

Há mais de uma definição de variedade assintoticamente hiperbólica. Em consonância com nosso trabalho, seguimos a adotada em DAHL, GICQUAUD, and SAKOVICH (2013), onde o hiperbólico $(\mathbb{H}^n, b)$ é tomado como sendo $\mathbb{H}^n = \mathbb{R}_+ \times \mathbf{S}^{n-1}$ munido da métrica $b = dr^2 + \sinh r\, h_{\mathbb{S}^{n-1}}$, onde $r(x)$ é a distância do ponto x à origem e $h_{\mathbf{S}^{n-1}}$ é a métrica canônica da esfera.

Definição 2.8. Variedade assintoticamente hiperbólica *é uma variedade riemanniana completa (M^n, g) para a qual existe um difeomorfismo $\Phi : M\backslash K \to \mathbb{H}^n\backslash B$, K compacto e B uma bola fechada, chamado carta do infinito, tal que:*
$\Phi_* g$ e b são uniformemente equivalentes e tomando $e = \Phi_* g - b$, tem-se

$$\int_{\mathbb{H}^n\backslash B} \left(|e|_b^2 + |{}^b\nabla e|_b^2 \right) \cosh r \, d\mu^b < \infty$$

e

$$\int_{\mathbb{H}^n\backslash B} |S^g + n(n-1)| \cosh r \, d\mu^b < \infty.$$

Intimamente relacionado ao conceito de variedade assintoticamente hiperbólica está o de função assintoticamente hiperbólica. A função $f : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ terá seu gráfico em

$\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ munido da métrica $\overline{b} = b + \cosh^2 r\, dt^2$. Nestas condições tem-se que $\mathbb{H}^{n+1}$ é um espaço hiperbólico $(n+1)$- dimensional e $\frac{\partial}{\partial t}$ é Killing. Estamos, portanto, considerando gráficos de Killing no espaço hiperbólico.

Definição 2.9. *Uma função $f : \mathbb{H}^n \to \mathbf{R}$ é dita assintoticamente hiperbólica se sua variedade gráfico é uma variedade assitoticamente hiperbólica com a métrica gráfico induzida de $\mathbb{H}^{n+1}$ e se $|e(x)| = \cosh^2 r\, |\nabla f(x)|^2 \to 0$ quando $x \to \infty$.*

O conceito de massa de uma variedade assintoticamente hiperbólica é bem distinto do conceito massa adm de uma variedade assintoticamente plana. Inicialmente definiremos o que é o funcional massa de uma variedade assintoticamente hiperbólica associado a uma carta do infinito. Este funcional age no núcleo do adjunto do linearizado da curvatura escalar na métrica b, denotado por $Ker(DScal^\star)_b$. De modo mais geral, temos a definição seguinte, encontrada nos trabalhos de HERZLICH (2016) e MICHEL (2011).

Definição 2.10. *Definimos o adjunto linearizado de um invariante polinomial da curvatura escalar e suas derivadas F em relação às métricas g e b da seguinte maneira:*

$$V(DF)_b(g-b) = \langle V, (DF)_b(g-b)\rangle = \langle (DF)_b^\star V, g-b\rangle + U(V,g,b)$$

Onde $U(V,g,b)$ é uma função que deve satisfazer a relação acima.

Na prática, ao calcularmos $\langle V, (DF)_b(g-b)\rangle$, encontramos duas partes, sendo uma $U(V,g,b)$ e a outra $\langle (DF)_b^\star V, g-b\rangle$. Observe que quando $V \in Ker(DScal^\star)_b$ tem-se $V(DF)_b(g-b) = U(V,g,b))$. Para o caso mais simples, quando $F = Scal$, temos

$$(DScal)_e^\star V = H_e V + \Delta_e V e,$$

mais particularmente, quando $V \equiv 1$, temos

$$\frac{1}{2(n-1)\omega_(n-1)} \lim_{r\to\infty} \int_{s_r} U(1,g,e)\, ds_e = m_g.$$

Mais resultados sobre os invariantes geométricos podem ser encontrados no trabalho de

MICHEL (2011).

Retomando o fio da meada, tem-se que $Ker(DScal^{\star})_b$ é constituido pelas funções V tais que $H_bV = Vb$, ou mais precisamente: este conjunto é gerado pelas funções $V : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$, $V^{(0)}(r,x) = \cosh r$ e $V^{(\alpha)}(r,x) = x^{(\alpha)} \sinh r, \alpha = 1, 2, \cdots, n$, onde $x^{(\alpha)}$ é a α- ésima coordenada da esfera unitária.

Redenotaremos o núcleo do adjunto do linearizado da curvatura escalar simplesmente por $\mathcal{N}$. Podemos definir em $\mathcal{N}$ uma métrica lorentziana η tal que $\eta(V_0, V_0) = 1$, $\eta(V_i, V_i) = -1$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$ e $\eta(V_i, V_j) = 0, \forall i \neq j$. Ademais, simbolizaremos por $\mathcal{N}^+$ o subconjunto das funções positivas de $\mathcal{N}$, ou seja, das funções V tais que $\eta(V, V) > 0$ e por $\mathcal{N}^1$ o conjunto das funções positivas unitárias de $\mathcal{N}$, ou seja, o subconjunto das funções V tais que $\eta(V, V) = 1$.

Definição 2.11. *Dada uma variedade assintoticamente hiperbólica (M, g) e uma carta do infinito Φ, definimos o funcional massa de M associado à carta do infinito Φ por $H_\Phi : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$,*

$$H_\Phi(V) = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \lim_{r \to \infty} \int_{S_r} \left[V\,(div^b e - d\,tr_b e) + tr_b(e) dV - e(\nabla^b V, \cdot) \right] (\nu_r^b)\, dS_r^b,$$

onde $e = \Phi_* g - b$, ν_r^b é o vetor unitário normal a S_r com sentido exterior na métrica b, $div^b e$ é o divergente de e na métrica b, $tr_b e$ o traço de e na métrica b e dV a diferencial de V.

Observação 2.1. *Dadas duas cartas do infinito numa mesma variedade assintoticamente hiperbólica M, Φ_1 e Φ_2, existe uma isometria A de $\mathbb{H}^n$ tal que seus funcionais massa estão relacionados da seguinte forma: $H_{\Phi_1}(V) = H_{\Phi_2}(V \circ A^{-1})$.*

Vamos agora definir massa para particulares variedades assintoticamente hiperbólicas.

Definição 2.12. *Se (M, g) é uma variedade assintoticamente hiperbólica tal que $H_\Phi(V) \geq 0$, $\forall V \in \mathcal{N}^+$ então definimos a massa de M, denotada por m, como sendo*

$$m = \inf_{V \in \mathcal{N}^1} H_\Phi(V).$$

Definição 2.13. *Dizemos que uma carta do infinito ϕ é balanceada se $m = H_\phi(\rho)$, $\rho = V^{(0)} = \cosh r$ e dizemos que o gráfico de uma função ou a própria função é balanceada se a carta natural for balanceada. A carta natural para um gráfico é dada por $\phi(x) = (x, f(x))$.*

Daremos em seguida a definição de massa de uma variedade hiperbólica via tensor de Einstein. Aliás, será um tensor de Einstein modificado, o qual denotaremos por $\widetilde{E}$, definido por:

$$\widetilde{E} \;=\; Ric - \frac{1}{2}Scal\, g - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)g \;=\; E - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)g.$$

Como vimos anteriormente, o funcional massa atua num espaço $(n{+}1)-$dimensional, e portanto, para sua definição via tensor de Einstein necessitamos de $n+1$ campos X.

Dito isto, temos a definição seguinte.

Definição 2.14. *Dada uma variedade assintoticamente hiperbólica (M, g), definimos o funcional massa de M, via tensor de Einstein, por $H_E : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$,*

$$H_E(V^{(i)}) \;=\; -\frac{1}{(n-1)(n-2)\omega_{n-1}} \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} \widetilde{E}(X^{(i)}, \nu^g)\, ds^g$$

onde os campos $X^{(i)}$, no modelo da bola de Poincaré, são dados por

$$X^{(0)} = r\partial_r \quad e \quad X^{(\alpha)} = r^2\partial_\alpha - 2x^\alpha x^j \partial_j,$$

para $\alpha = 1, \ldots, n$.

Podemos encontrar a equivalência entre a definição de funcional massa clássico e funcional massa via tensor de Einstein modificado de uma variedade assintoticamente hiperbólica em HERZLICH (2016).

2.3 Resultados conhecidos para massa adm de variedades gráficos

Apresentaremos a seguir alguns resultados conhecidos para o cálculo de massa de variedades gráficos assintoticamente planas e assintoticamente hiperbólicas, obtidos por LAM (2011), MIRANDOLA and VITÓRIO (2015) e DAHL, GICQUAUD, and SAKOVICH (2013).

Teorema 2.1. (LAM) *Sendo (M^n, g) uma variedade gráfico de uma função suave assintoticamente plana $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com a métrica induzida do $\mathbb{R}^{n+1}$, S sua curvatura escalar na métrica g, do gráfico, ∇f o gradiente de f na métrica plana, tem-se que sua massa* *adm m é dada por*

$$m = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_M \frac{S_g}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} dM$$

Teorema 2.2. LAM *Sendo (M^n, g) uma variedade gráfico de uma função suave assintoticamente plana $f : \mathbb{R}^n \backslash \Omega \to \mathbb{R}$, com Ω aberto, limitado e com fronteira suave $\Sigma = \partial\Omega$, tal que cada componente conexa de $f(\Sigma)$ está num conjunto de nível de f e $|\nabla f(x)| \to \infty$ quando $x \to \Sigma$, g a métrica induzida do $\mathbb{R}^{n+1}$, S sua curvatura escalar na métrica g, do gráfico, ∇f o gradiente de f na métrica plana, e H_0 a curvatura média de Σ como uma hipersuperfície de $(\mathbb{R}, \delta)$; tem-se que sua massa adm m é dada por*

$$m = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \left[\int_M \frac{R_g}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} dM + \int_\Sigma H_0 d\Sigma \right].$$

Corolário 2.1. (LAM) *Nas mesmas condições do teorema anterior e assumindo que cada componente conexa de Ω é convexa tem-se*

$$m \geq \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_M \frac{S_g}{\sqrt{\det g}} dM + \frac{1}{2} \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}$$

Em particular, se $S \geq 0$ então

$$m(g) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

Este resultado decorre da desigualdade de Alexandrov-Frenchel, a qual permite estabelecer a relação entre a integral da curvatu média e a área da hipersuperfície (veja LAM (2011)).

MIRANDOLA and VITÓRIO (2015) demonstraram os resultados seguintes.

Teorema 2.3. (Mirandola-Vitório) *Sendo (M^n, g) uma variedade gráfico de uma função suave assintoticamente plana $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ com a métrica induzida do $\mathbb{R}^{n+m}$, S a curvatura escalar de M^n e $S^\perp = \left\langle R^\perp(\nabla f^\alpha, \nabla f^\beta)\eta^\beta, \eta^\alpha \right\rangle$, onde $\eta^\gamma = -^\delta\nabla f^\gamma + e_{\gamma+n}, \gamma = 1, 2, \ldots, m$, e $R^\perp$ é o tensor curvatura normal da subvariedade $M \subset \mathbb{R}^{m+n}$, tem-se que sua massa adm m é dada por*

$$m = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_M \frac{1}{\sqrt{\det g}}(S + S^{\perp})dM.$$

Em particular, quando o fibrado normal é plano tem-se

$$m(g) = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_M \frac{1}{\sqrt{\det g}} S\, dM.$$

Teorema 2.4. (Mirandola-Vitório) *Seja (M^n, g) uma variedade gráfico de uma função contínua $f : \mathbb{R}^n \backslash \Omega \to \mathbb{R}^m$, com Ω aberto e limitado, assintoticamente plana em $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ e constante em cada componente conexa de $\Sigma = \partial\Omega$, com a métrica induzida do $\mathbb{R}^{n+m}$, S a curvatura escalar de M^n e $S^{\perp}$ como definido anteriormente, H a curvatura média de Σ como uma hipersuperfície do $\mathbb{R}^n$ e suponha também que M se estende C^2 até $\partial\Omega$ e que em cada componente conexa Σ' de Σ a variedade M é tangente ao cilindro $\Sigma' \times l$, onde l é uma reta de $\mathbb{R}^m$, e que $S^{\perp}$ é limitada numa vizinhança de Σ; então a massa adm m de M é dada por*

$$m = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \left(\int_M \frac{1}{\sqrt{\det g}}(S + S^{\perp})dM + \int_{\Sigma} H\, d\Sigma \right).$$

Teorema 2.5. (Mirandola-Vitório) *Sob as condições do teorema anterior e assumindo que M tem curvatura escalar não negativa e fibrado normal plano e que cada componente conexa de Ω é estrelada e possui curvatura média positiva, tem-se então o seguinte resultado:*

$$m(g) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}},$$

onde $|\Sigma|$ é a área total de $\partial\Omega$. E mais, a igualdade anterior ocorre somente se a curvatura escalar é nula e $\partial\Omega$ é uma esfera.

Vejamos a seguir os resultados obtidos por DAHL, GICQUAUD, and SAKOVICH (2013).

Teorema 2.6. *Seja $f : \mathbb{H}^n \backslash \Omega \to \mathbb{R}$, com Ω aberto, relativamente compacto e com bordo suave, uma função assintoticamente hiperbólica tal que f seja constante e $df \neq 0$ em $\partial\Omega$;*

então

$$H_\phi(V) = C_n \left(\int_{\mathbb{H}^n \backslash \Omega} \frac{V}{\sqrt{1 + V^2 |\nabla f|^2}} \left[S + n(n-1) \right] dv^g \ + \ \int_{\partial \Omega} \frac{V^2 |\nabla f|^2}{\sqrt{1 + V^2 |\nabla f|^2}} HV \, ds^b \right),$$

onde $C_n = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}}$, $V = \cosh r$, $\nabla f = {}^b\nabla f$ *e* H *é a curvatura média de* Σ *como hipersuperfície de* $\mathbb{H}$.
E quando $|\nabla f| \to \infty$ *tem-se*

$$H_\phi(V) = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \left(\int_{\mathbb{H}^n \backslash \Omega} \frac{V}{\sqrt{1 + V^2 |\nabla f|^2}} \left[S + n(n-1) \right] dv^g \ + \ \int_{\partial \Omega} HV \, ds^b \right).$$

Com o propósito de demosntrar a desigualdade de Penrose DE LIMA and GIRÃO (2015) demonstraram o resultado seguinte.

Teorema 2.7. (de Lima e Girão) *Se* $\Sigma \subset \mathbb{H}^n$ *é estrelada e tem curvatura média positiva, então*

$$\frac{1}{2(n-1)w_{n-1}} \int_\Sigma \rho H d\Sigma \geq \frac{1}{2} \left(\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} + \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n}{n-1}} \right),$$

onde $|\Sigma|$ *é a área de* Σ. *Mais ainda, a igualdade vale se e somente se* Σ *é uma esfera geodésica centrada na origem.*

Partindo do último teorema de DAHL, GICQUAUD, and SAKOVICH (2013) e usando o resultado anterior de DE LIMA and GIRÃO (2015) tem-se o resultado seguinte.

Teorema 2.8. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ *aberto, relativamente compacto e com bordo* Σ *suave, estrelado e com curvatura média positiva e* $f : \mathbb{H}^n \backslash \Omega \to \mathbb{R}$ *uma função assintoticamente hiperbólica balanceada tal que* f *seja constante em* Σ *e* $|df(x)| \to \infty$ *quando* $x \to \Sigma$, *e que o gráfico de* f *satisfaça* $S + n(n-1) > 0$ *então*

$$m \geq \frac{1}{2} \left(\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} + \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n}{n-1}} \right).$$

Demonstração. A demonstração é conseguência imediata dos dois últimos teoremas. $\square$

3 MASSA E CENTRO DE MASSA DE VARIEDADE GRÁFICO ASSINTOTICAMENTE PLANA

Para nosso propósito faz-se necessário reapresentar a definição de função assintoticamente plana.

Definição 3.1. *Uma função de classe* C^2, $f = (f^1, f^2, ..., f^m) : \mathbb{R}^n \backslash \Omega \to \mathbb{R}^m$, *onde* Ω *é um subconjunto limitado, é dita assintoticamente plana se a curvatura escalar* $Scal$ *de seu gráfico dotado da métrica ambiente do* $\mathbb{R}^{n+m}$ *é uma função integrável sobre o* $\mathbb{R}^n$ *e suas derivadas parciais satisfazem as seguintes condições de decaimento:*

$$|f^\alpha(x)| = O(|x|^{-\frac{\tau}{2}}) \qquad e \qquad |f^\alpha_{ij}(x)| = O(|x|^{-\frac{\tau}{2}-1}), \tag{3.1}$$

no infinito, para todo $\alpha = 1, \ldots, m$ *e* $i, j, k = 1, \ldots, n$, *onde* $\tau > (n-2)/2$.

Observe que dada a condição de decaimento de f, $g = \delta_{ij} + f^\alpha_i f^\alpha_j$ tem as condições de decaimento apropriadas para tornar M, o gráfico de f, uma variedade assintoticamente plana. Observe também que tomando $\widehat{f} = f \circ \Pi : M \to \mathbb{R}^m$, onde $\pi(x, f(x)) = x$, temos que $\nabla \widehat{f^\alpha} = g^{jk} f^\alpha_k \partial_j$, onde $\partial_j = F_*(e_j), F(x) = (x, f(x))$. Aqui também será cometido um abuso de notação, não pondo o chapeu na função f^α, o que confundirá com a própria f^α, e mais uma vez, por comodidade de escrita a utilizaremos.

O nosso propósito é passar de uma integral de superfície do tensor de Einstein a uma integral de volume, aplicando o teorema da divergência de Gauss, necessitando portanto calcular o divergente do campo $\vec{E}(X)$, onde $\vec{E}$ é o tensor definido por $E(V, W) = g(\vec{E}(V), W)$. Faremos então vários lemas envolvendo o divergente deste campo. Vejamos então o primeiro.

Lema 3.1. *Tem-se que* $div(\vec{E}(X)) = g^{ij} E(\nabla_{\partial_i} X, \partial_j)$

Demonstração. Fixado o campo X, podemos definir a 1-forma ω, por $\omega(Y) = \langle \vec{E}(X), Y \rangle$, de tal modo que $div(\vec{E}(X)) = div\omega$
Temos que:

$$\begin{aligned} div\omega = \nabla^j \omega_j = g^{ij} \nabla_{\partial_i} \omega_j = g^{ij} \partial_i \omega_j - g^{ij} \omega(\nabla_{\partial_i} \partial_j) = g^{ij} \partial_i E(X, \partial_j) - g^{ij} E(X, \nabla_{\partial_i}, \partial_j) \\ = g^{ij} \partial_i E(X, \partial_j) - g^{ij} E(\nabla_{\partial_i} X, \partial_j) - g^{ij} E(X, \nabla_{\partial_i} \partial_j) + g^{ij} E(\nabla_{\partial_i} X, \partial_j) \\ = (divE)(X) + g^{ij} E(\nabla_{\partial_i} X, \partial_j) = g^{ij} E(\nabla_{\partial_i} X, \partial_j), \end{aligned} \tag{3.2}$$

pois E tem divergência nula. $\square$

Lema 3.2. *Sendo (M^n, g) a variedade gráfico da função assintoticamente plana $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ com a métrica induzida do $\mathbb{R}^{n+m}$ e ∇ a conexão do ambiente $\mathbb{R}^{n+m}$, tem-se os seguintes resultados:*

i. $\partial_i = e_i + f_i^\alpha e_{\alpha+n}$ *e* $\eta_i^\alpha = -Df_i^\alpha + e_{\alpha+n}$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$ *e* $\alpha = 1, 2, \cdots, m$, *e* $Df_i^\alpha = {}^\delta\nabla f^\alpha$, *constituem um frame global para o fibrado tangente de M e para o fibrado normal de M, respectivamente.*

ii. $A^\alpha \partial_i = -(\nabla_{\partial_i} \eta^\alpha)^T = g^{kj} f_{ik}^\alpha \partial_j$. *Observe que o vetor η^α não está normalizado. O A^α é dito operador de forma com relação ao normal η^α.*

iii. $\phi_i = -\phi \Gamma_{li}^l$.

iv. $\Gamma_{ij}^k = (\nabla f^\alpha)^k f_{ij}^\alpha$.

v. $g^{ij} \nabla_{\partial_i} \phi X = \phi g^{ij} X_i + \phi [A^\alpha(x)]^j \nabla f^\alpha - \phi [A^\alpha(\nabla f^\alpha)]^j X$.

vi. $g^{ij} E(\nabla_{\partial_i} \phi X, \partial_j) = \phi g^{ij} X_i^k E_{ij} + \phi g([A^\alpha, \vec{E}](\nabla f^\alpha), X)$.

Demonstração. i. Sendo $M = \{(x, f(x)); f = (f^1, f^2, ..., f^m) : \mathbb{R}^n \backslash \Omega \to \mathbb{R}^m\}$ tem-se que $F : \mathbb{R}^n \backslash \Omega \to \mathbb{R}^{n+m}, F(x) = (x, f(x))$ é uma carta global e portanto $\partial_i = F_i = e_i + f_i^\alpha e_{\alpha+n}$, $\alpha = 1, 2, ..., m$ e $i = 1, 2, 3, ..., n$, constituem um frame do fibrado tangente TM, onde $f_i = e_i(f)$.

Sendo $\eta^\alpha = -{}^\delta\nabla f^\alpha + e_{\alpha+n}$, temos:

$$\begin{aligned} \langle \eta^\alpha, \partial_i \rangle &= \langle -{}^\delta\nabla f^\alpha + e_{\alpha+n}, e_i + f_i^\beta e_{\beta+n} \rangle \\ &= \langle -{}^\delta\nabla f^\alpha, e_i \rangle + \langle e_{\alpha+n}, f_i^\beta e_{\beta+n}, \rangle \\ &= -f_i^\alpha + f_i^\alpha \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Portanto os η^α constituem uma base para o fibrado normal $T^\perp M$, já que são independentes e ortogonais ao gráfico. Para simplificar a notação, doravante usaremos ${}^\delta\nabla f^\alpha = Df^\alpha$.

ii. Sendo $\{\partial_j\}_{j=1}$ um frame de TM e

$$\nabla_{\partial_i} \eta^\alpha = \partial_i \eta^\alpha = -Df_i^\alpha$$

temos:

$$\begin{aligned} A^\alpha(\partial_i) = A^j \partial_j \Rightarrow \langle A^\alpha(\partial_i), \partial_k \rangle \\ = A^j \langle \partial_j, \partial_k \rangle \\ = A^j g_{jk}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

e portanto:

$$\begin{aligned} A^j &= g^{jk}\langle A^\alpha(\partial_i), \partial_k\rangle \\ &= g^{jk}\langle -(\nabla_{\partial_i}\eta^\alpha)^T, \partial_k\rangle \\ &= \; g^{jk}\langle -\nabla_{\partial_i}\eta^\alpha, \partial_k\rangle \\ &= g^{jk}\langle Df_i^\alpha, e_k + f_k^\alpha e_{\alpha+n}\rangle \\ &= \; g^{jk} f_{ik}^\alpha. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Substituindo este último valor na equação inicial tem-se $A^\alpha\partial_i = g^{kj} f_{ik}^\alpha \partial_j$.

iii. - Como $\Gamma_{li}^l = \partial_i(ln\sqrt{g}) = -\partial_i ln\Phi = -\frac{\Phi_i}{\Phi}$, tem-se $\Phi_i = \Phi\Gamma_{li}^l$.

iv. Temos que

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2}g^{kl}(g_{lj,i} + g_{il,j} - g_{ij,l}) \\ &= \frac{1}{2}g^{kl}[(f_l^\alpha f_j^\alpha)_i + (f_i^\alpha f_l^\alpha)_j - (f_i^\alpha f_j^\alpha)_l] \\ &= \frac{1}{2}g^{kl}.2 f_l^\alpha f_{ij}^\alpha \; = \; (\nabla f^\alpha)^k f_{ij}^\alpha. \end{aligned} \tag{3.6}$$

v. Temos:

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_i}\phi X &= \nabla_{\partial_i}\phi X^k\partial_k = \phi X_i^k\partial_k + X^k\phi_i e_k + \phi X^k\Gamma_{ik}^l\partial_l \\ &= \phi X_i^k\partial_k - \phi X^k\Gamma_{li}^l\partial_k + \phi X^k\Gamma_{ik}^l\partial_l \\ &= \; \phi X_i^k\partial_k - \phi X^k(\nabla f^\alpha)^l f_{li}^\alpha\partial_k + \phi X^k(\nabla f^\alpha)^l f_{ik}^\alpha\partial_l. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Resulta então:

$$\begin{aligned} g^{ij}\nabla_{\partial_i}\phi X &= \phi g^{ij} X_i^k\partial_k - \phi X^k(\nabla f^\alpha)^l g^{ij} f_{li}^\alpha\partial_k + \phi X^k(\nabla f^\alpha)^l g^{ij} f_{ik}^\alpha\partial_l \\ &= \phi g^{ij} X_i^k\partial_k - \phi X^k(\nabla f^\alpha)^l(A^\alpha\partial_l)^j\partial_k + \phi X^k(\nabla f^\alpha)^l(A^\alpha\partial_k)^j\partial_l \\ &= \phi g^{ij} X_i - \phi[A^\alpha(\nabla f^\alpha)]^j X + \phi[A^\alpha(X)]\nabla f^\alpha. \end{aligned} \tag{3.8}$$

vi - Do item anterior tem-se:

$$\begin{aligned} g^{ij}E(\nabla_{\partial_i}\phi X, \partial_j) &= E(\phi g^{ij} X_i, \partial_j) - E(\phi[A^\alpha(\nabla f^\alpha)]^j X, \partial_j) + E(\phi[A^\alpha(X)]\nabla f^\alpha, \partial_j) \\ &= \phi g^{ij} X_i^k E_{kj} - \phi E(X, A^\alpha(\nabla f^\alpha)) + \phi E(\nabla f^\alpha, A^\alpha(X)) \\ &= \phi g^{ij} X_i^k E_{kj} - \phi g(X, \vec{E}(A^\alpha(\nabla f^\alpha))) + \phi g(\nabla f^\alpha, \vec{E}(A^\alpha(X))) \\ &= \phi g^{ij} X_i^k E_{kj} - \phi g(X, \vec{E}A^\alpha(\nabla f^\alpha)) + \phi g(A^\alpha\vec{(}\nabla f^\alpha), X) \\ &= \phi g^{ij} X_i^k E_{kj} + \phi g([A^\alpha, \vec{E}](\nabla f^\alpha), X). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Foi usado o fato que

$$E(X, A^\alpha(\nabla f^\alpha)) = g(X, \vec{E}(A^\alpha(\nabla f^\alpha))) = g(X, \vec{E}A^\alpha(\nabla f^\alpha))$$

e que, por abuso de notação, tomando $X = F_*(X)$, tem-se

$$\begin{aligned} g(\nabla f^\alpha, \vec{E}A^\alpha(X)) &= g((\vec{E}A^\alpha)^*(\nabla f^\alpha), X) \\ &= g((A^\alpha)^*\vec{E}^*(\nabla f^\alpha), X) \\ &= g(A^\alpha \vec{E}(\nabla f^\alpha), X). \end{aligned} \tag{3.10}$$

□

Lema 3.3. *Se X é o campo posição e M o gráfico de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ então:*

i. $g^{ij}E(\nabla_{\partial_i}\phi X, \partial_j) = \phi TrE + \phi g([A^\alpha, \vec{E}](\nabla f^\alpha, X))$.

ii. Se M tem fibrado normal plano então $g^{ij}E(\nabla_{\partial_i}\phi X, \partial_j) = \phi TrE$. Lembre-se que para codimensão 1 o fibrado normal é sempre plano.

Demonstração. i. Este resultado decorre imediatamente do lema anterior e da observação que se X é o campo posição então $X_i^k = \delta_i^k$.

ii. Para mostrar o resultado basta mostrar que $[A^\alpha, E] = 0$. Temos:
$A^\alpha(\partial_i) = g^{kj}f_{ik}^\alpha \partial_j$ e $B(\partial_i, \partial_j) = U^{\alpha\beta}f_{ij}^\alpha \eta^\beta$, onde $U_{\alpha\beta} = \langle \eta^\alpha, \eta^\beta \rangle$ e $U^{\alpha\beta}$ é sua inversa. Temos portanto que $\langle A^\alpha(\partial_i), \partial_l \rangle = g^{kj}f_{ik}^\alpha g_{jl} = f_{ik}^\alpha$. Partindo da equação de Gauss temos:

$$\begin{aligned} R_{ij} &= g^{kl}R_{ikjl} \\ &= g^{kl}\left(\langle B_{ij}, B_{kl}\rangle - \langle B_{il}, B_{kj}\rangle\right) \\ &= g^{kl}\left(U^{\alpha\beta}f_{ij}^\alpha\eta^\beta, U^{\gamma\delta}f_{kl}^\gamma\eta^\delta\rangle - \langle U^{\alpha\beta}f_{il}^\alpha\eta^\beta, U^{\gamma\delta}f_{ij}^\gamma\eta^\delta\rangle\right) \\ &= g^{kl}\left(U^{\alpha\beta}U^{\gamma\delta}f_{ij}^\alpha f_{kl}^\gamma U_{\beta\delta} - U^{\alpha\beta}U^{\gamma\delta}f_{il}^\alpha f_{ij}^\gamma U_{\beta\delta}\right) \\ &= g^{kl}\left(U^{\alpha\beta}f_{ij}^\alpha f_{kl}^\beta - U^{\alpha\beta}f_{il}^\alpha f_{ij}^\beta\right) \\ &= g^{kl}U^{\alpha\beta}\left(f_{ij}^\alpha f_{kl}^\beta - f_{il}^\alpha f_{ij}^\beta\right) \\ &= g^{kl}U^{\alpha\beta}\left(\langle A^\alpha(\partial_i), \partial_k\rangle\langle A^\beta(\partial_k), \partial_l\rangle - \langle A^\alpha(\partial_i), \partial_l\rangle\langle A^\beta(\partial_k), \partial_j\rangle\right). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Utilizando este resultado na expressão abaixo e considerando que o fibrado normal é plano, ou seja, que $A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha$, temos:

$$
\begin{aligned}
&\langle [\vec{E}, A^\gamma](V), W\rangle = E(A^\gamma(V), W) - E(A^\gamma(W), V)\\
&= Ric(A^\gamma(V), W) - \frac{1}{2}S\langle A^\gamma(V), W\rangle - Ric(A^\gamma(W), V) + \frac{1}{2}S\langle A^\gamma(w), v\rangle\\
&= Ric(A^\gamma(V), W) - Ric(A^\gamma(W), V)\rangle\\
&= g^{kl}U^{\alpha\beta}\left(\langle A^\alpha(A^\gamma(V)), W\rangle\langle A^\beta(\partial_k), \partial_l\rangle - \langle A^\alpha(A^\gamma(V)), \partial_l\rangle\langle A^\beta(\partial_k), W\rangle\right) -\\
&- g^{kl}U^{\alpha\beta}\left(\langle A^\alpha(A^\gamma(W)), V\rangle\langle A^\beta(\partial_k), \partial_l\rangle + \langle A^\alpha(A^\gamma(W)), \partial_l\rangle\langle A^\beta(\partial_k), V\rangle\right)\\
&= g^{kl}U^{\alpha\beta}\langle A^\alpha(A^\gamma(V)), W\rangle\langle A^\beta(\partial_k), \partial_l\rangle - g^{kl}U^{\alpha\beta}\langle A^\alpha(A^\gamma(V)), \partial_l\rangle\langle A^\beta(\partial_k), W\rangle -\\
&- g^{kl}U^{\alpha\beta}\langle V, A^\gamma(A^\alpha(W))\rangle\langle A^\beta(\partial_k), \partial_l\rangle + g^{kl}U^{\alpha\beta}\langle A^\alpha(A^\gamma(W)), \partial_l\rangle\langle A^\beta(\partial_k), V\rangle\\
&= -U^{\alpha\beta}[A^\alpha(A^\gamma(V))]^k\langle A^\beta(\partial_k), W\rangle + U^{\alpha\beta}[A^\alpha(A^\gamma(W))]^k\langle A^\beta(\partial_k), V\rangle\\
&= -U^{\alpha\beta}\langle A^\beta(A^\alpha(A^\gamma(V))), W\rangle + U^{\alpha\beta}\langle A^\beta(A^\alpha(A^\gamma(W))), V\rangle\\
&= -U^{\alpha\beta}\langle A^\beta(A^\alpha(A^\gamma(V))), W\rangle + U^{\alpha\beta}\langle W, A^\gamma(A^\alpha(A^\beta(V)))\rangle\\
&= 0.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

□

Teorema 3.1. *Se (M, g) é uma variedade gráfico assintoticamente plana da função $f = (f^1, f^2, ..., f^m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, de classe C^2, com fibrado normal plano então sua massa adm é dada por:*

$$
m = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_M \frac{S_g}{\sqrt{\det g}} dM, ,
$$

onde S é a curvatura escalar. Observe que para M com codimensão 1 tem-se $\det g = 1 + |^\delta \nabla f|^2$.

Demonstração. Temos pelo item (ii) do lema anterior que $g^{ij}E(\nabla_{\partial_i}\phi X, \partial_j) = \phi TrE =$

$\phi^{\frac{2-n}{2}}R$ e portanto:

$$\begin{aligned}
m &= -\frac{1}{(n-1)(n-2)\omega_{n-1}} \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} E\left(X,\nu\right)\left(X,\nu\right) dS_r^g \\
&= -\frac{1}{(n-1)(n-2)\omega_{n-1}} \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} E\left(\phi X,\nu\right)\left(X,\nu\right) dS_r^g \\
&= -\frac{1}{(n-1)(n-2)\omega_{n-1}} \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} g\left(\vec{E}(\phi X),\nu\right) dS_r^g \\
&= -\frac{1}{(n-1)(n-2)\omega_{n-1}} \lim_{r\to\infty} \int_{B_r} div(\vec{E}(\phi X))\, dv^g \\
&= -\frac{1}{(n-1)(n-2)\omega_{n-1}} \lim_{r\to\infty} \int_{B_r} g^{ij} E(\nabla_{\partial_i}\phi X, \partial_j)\, dv^g \\
&= -\frac{1}{(n-1)(n-2)\omega_{n-1}} \int_{M_r} \frac{2-n}{2}\phi S\, dv^g \\
&= \frac{1}{(n-1)\omega_{n-1}} \lim_{r\to\infty} \int_{B_r} \phi S\, dv^g \\
&= \frac{1}{(n-1)\omega_{n-1}} \int_M \frac{S}{\sqrt{\det g}} dv^g.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

□

Teorema 3.2. *Sendo (M^n, g) uma variedade gráfico de uma função suave assintoticamente plana $f : \mathbb{R}^n \backslash \Omega \to \mathbb{R}$, Ω aberto, limitado e com fronteira suave $\partial\Omega$, tal que cada componente conexa de $f(\partial\Omega)$ está num conjunto de nível de f e $|\nabla f(x)| \to \infty$ quando $x \to p \in \partial\Omega$, g a métrica induzida do $\mathbb{R}^{n+1}$, S sua curvatura escalar na métrica g, ∇f o gradiente de f na métrica plana, e H^δ a curvatura média de $\partial\Omega$ como subvariedade de $(\mathbb{R}\backslash\Omega, \delta)$; tem-se que sua massa adm m é dada por:*

$$m = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \left[\int_M \frac{S}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} dM + \int_{\partial\Omega} H^\delta ds_\delta \right].$$

Demonstração. Como $|\nabla f(x)| \to \infty$ quando $x \to p \in \partial\Omega$, a integral no bordo $\partial\Omega$ não está definida, pois ϕ e X não estão definidos aí, e por conseguinte não podemos aplicar diretamente o teorema da divergência envolvendo a fronteira $\partial\Omega$. Tomemos então o aberto limitado Ω_ε, o qual contém Ω e suas fronteiras distam ε entre si, apliquemos o teorema da divergência aí e depois façamos $\varepsilon \to 0$. Isto poderá ser feito se a integral de bordo converge quando $\varepsilon \to 0$, o que mostraremos ser verdadeiro. Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned} m &= -\frac{1}{(n-1)(n-2)\omega_{n-1}} \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} E(\widetilde{X}, \nu^g)\, dS_r^g \\ &= -\frac{1}{(n-1)(n-2)\omega_{n-1}} \left(\lim_{r\to\infty} \int_{S_r \bigcup \partial M_\varepsilon} E(\phi\widetilde{X}, \nu^g)\, dS_r^g - \int_{\partial M_\varepsilon} E(\phi\widetilde{X}, \nu^g)\, dS_r^g \right) \\ &= -\frac{1}{(n-1)(n-2)\omega_{n-1}} \left(\int_{M^n} g^{ij} E(\nabla_{\partial_i}\phi\widetilde{X}, \partial_j)\, dv^g - \lim_{\varepsilon\to\ 0} \int_{\partial M_\varepsilon} E(\phi\widetilde{X}, \nu^g)\, dS_r^g \right) \\ &= -\frac{1}{(n-1)(n-2)\omega_{n-1}} \left(\frac{-(n-2)}{2} \int_M \frac{S}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} dM - \lim_{\varepsilon\to\ 0} \int_{\partial M_\varepsilon} E(\phi\widetilde{X}, \nu^g)\, dS_r^g \right). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Calculemos agora o limite da integral. Verificaremos que o integrando converge quando $x \to p \in \partial\Omega$ e portanto o limite da integral será a integral deste limite na fronteira ∂M. Tomemos em ∂M_ε um frame ortonormal $\{\nu, v_2, \cdots, v_n\}$ e escrevamos $\widetilde{X}$ neste frame. Temos então:

$$\widetilde{X} = \langle \widetilde{X}, \nu\rangle \nu + \langle \widetilde{X}, v_2\rangle v_2 + \langle \widetilde{X}, v_3\rangle v_3 + \cdots + \langle \widetilde{X}, v_n\rangle v_n.$$

Portanto,

$$E(\phi\widetilde{X}, \nu) = \phi\langle \widetilde{X}, \nu\rangle E(\nu, \nu) + \phi\langle \widetilde{X}, v_2\rangle E(v_2, \nu) + \cdots + \phi\langle \widetilde{X}, v_n\rangle E(v_n, \nu). \tag{3.15}$$

Utilizaremos agora dois resultados muito úteis aos nossos cálculos: primeiro, sendo ν^g campo unitário conormal exterior da variedade gráfico e sendo esta variedade ortogonal a $\mathbb{R}^n$, na fronteira, tem-se que $\nu^g \to \pm e_{n+1}$; e segundo, presente em DE LIMA and GIRÃO (2015), no limite ν^g tornar-se um autovetor do operador de forma A, resultando portanto os seguintes resultados:

i. $\phi\langle \widetilde{X}, \nu\rangle = \phi\langle X + \langle X, \nabla f\rangle e_{n+1}, \nu\rangle = \phi\langle X, \nu\rangle + \langle X, \phi\langle e_{n+1}, \nu\rangle \nabla f\rangle \to \langle X, \eta\rangle$, onde η é o campo conormal interior do bordo visto como hipersuperfície de $\mathbb{R}^n$, pois ν torna-se perpendicular a X e $\phi\langle e_{n+1}, \nu\rangle \nabla f = \frac{\langle e_{n+1}, \nu\rangle \nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \to \eta$, pois $\langle e_{n+1}, \nu\rangle \to \pm 1$ e para função crescente ∇f aponta para fora da curva de nível e ν tende para $-e_{n+1}$; e para função decrescente ∇f aponta para dentro da curva de nível e ν converge para e_{n+1}.

ii. Sendo $E(\nu, \nu) = Ric(\nu, \nu) - \frac{1}{2} S g(\nu, \nu) = Ric(\nu, \nu) - \frac{1}{2} S$ e usando as seguintes expressões para o Ric e Scal, decorrentes da Equação de Gauss, e que podem ser encontradas em ALÍAS, DE LIRA, and MALACARNE (2006), temos:

$$Ric(\nu,\nu) = \overline{Ric}(\nu,\nu) - \langle \overline{R}(\nu,N)\nu,N\rangle + H\langle A\nu,\nu\rangle - \langle A\nu,A\nu\rangle$$

e

$$S = \overline{S} - 2Ric(N,N) + 2H_2,$$

e levando em consideração que estamos no espaço euclidiano R^{n+1}, temos:

$E(\nu,\nu) = H\langle A\nu,\nu\rangle - \langle A\nu,A\nu\rangle - H_2$. O H_2 é a soma do produto dois a dois dos autovalores do operador de forma A.

Tomando $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ os autovalores associados à base de autovetores de A, com λ_1 o autovalor associado a ν, tem-se, quando $\varepsilon \to 0$, que:

$$\begin{aligned} E(\nu,\nu) &\to H\lambda_1 - \lambda_1^2 - H_2 \\ &= \lambda_1^2 + \lambda_1[\lambda_2 + \cdots + \lambda_n] - \lambda_1^2 - \lambda_1[\lambda_2 + \cdots + \lambda_n] - \Sigma_{1\le i\le j}\lambda_i\lambda_j \\ &= -\Sigma_{1\le i\le j}\lambda_i\lambda_j \\ &= -H_2^\delta, \end{aligned} \tag{3.16}$$

sendo H_2^δ referente a $\partial\Omega$.

iii. Por último, observe que $\phi\langle \widetilde{X}, v_m\rangle E(v_m,\nu) \to 0, \forall m = 2,3,\cdots,n$, quando $\varepsilon \to 0$, pois $\phi \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$, e os outros dois fatores são limitados. Juntando os 3 resultados, tem-se quando $\varepsilon \to 0$:

$$E(\phi\widetilde{X},\nu) \to -\langle X,\eta\rangle H_2^\delta.$$

Portanto podemos tomar o limite, obtendo:

$$m = -\frac{1}{(n-1)(n-2)\omega_{n-1}}\left(\frac{-(n-2)}{2}\int_M \frac{S}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}dM + \int_{\partial M}\langle X,\eta\rangle H_2^\delta\, ds^g\right)$$

$$= -\frac{1}{(n-1)(n-2)\omega_{n-1}}\left(\frac{-(n-2)}{2}\int_M \frac{S}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}dM + \int_{\partial\Omega}\langle X,\eta\rangle H_2^\delta\, ds^\delta\right).$$

A mudança da região de integração e da métrica não afeta o cálculo por que a função é constante em cada componente conexa de Ω. Para finalizarmos a demonstração do teorema devemos usar a equação de Minkowski seguinte, encontrada também em ALÍAS, DE LIRA, and MALACARNE (2006): se M é uma hipersuperfície do $\mathbb{R}^n$ então

$\int_M \left(H^\delta + \langle X, \eta\rangle H_2^\delta\right) ds = 0$, onde η tem sentido interior à hipersuperfície M.

Aplicando a equação de Minkowski para a hipersuperfície Ω e lembrando que a expressão anterior está normalizada teremos:

$$-\frac{n-2}{2}\int_{\partial\Omega} H^\delta ds = \int_{\partial\Omega} \langle X, \eta\rangle H_2^\delta ds.$$

Substituindo esta equação na última equação da massa, tem-se:

$$m = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}}\left(\int_{M^n} \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} S\, dv^g \; + \int_{\partial\Omega} H^\delta ds_\delta\right).$$

□

Teorema 3.3. *Nas mesmas condições do teorema anterior e assumindo que cada componente conexa de Ω é convexa tem-se*

$$m(g) \geq \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}}\int_M \frac{S_g}{\sqrt{\det g}} dM + \frac{1}{2}\left(\frac{|\partial\Omega|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

Em particular, se $S \geq 0$ então

$$m(g) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{|\partial\Omega|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

Demonstração. A demonstração decorre imediatamente do teorema anterior e da desigualdade de Alexandrov-Frechel.

□

Apresentaremos a seguir um lema e um teorema sobre o centro de massa de uma variedade gráfico assintoticamente plana.

Lema 3.4. *Se M é uma variedade gráfico assintoticamente plana com fibrado normal plano, $X_\alpha = r^2\partial_\alpha - 2x^\alpha x^i\partial_i$ o campo de Killing relacionado ao centro de massa, ∂_α o push-foward de e_α e X o push-foward do campo posição via carta global definida por $F(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1, x_2, ..., x_n, f_1(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_m(x_1, x_2, ..., x_n))$ então*

$$g^{ij}E(\nabla_{\partial_i}\phi X_\alpha, \partial_j) = \phi g^{ij}X^k_{(\alpha)i}E_{kj} = 2\phi E(\partial_\alpha, \overline{X}^T) - 2\phi E(X, \overline{e_\alpha}^T) - 2\phi x^\alpha TrE,$$

onde $\overline{X}$ é a extensão natural do campo X e $\overline{e_\alpha}^T$ a projeção no gráfico da extensão natural do campo e_α.

Demonstração. Temos pelo Lema 3.3 que:

$$\begin{aligned} g^{ij}E(\nabla_{\partial_i}\phi X_\alpha, \partial_j) &= \phi g^{ij}X^k_{(\alpha)i}E_{kj} = \phi g^{ij}(2x^i\delta^{\alpha k} - 2x^k\delta^{\alpha i} - 2x^\alpha\delta^{ki})E(\partial_k, \partial_j) \\ &= 2\phi x^i g^{ij}E(\partial_\alpha, \partial_j) - 2\phi x^k g^{\alpha j}E(\partial_k, \partial_j) - 2x^\alpha g^{ij}E(\partial_i, \partial_j) \\ &= 2\phi E(\partial_\alpha, x^i g^{ij}\partial_j) - 2\phi E(x^k\partial_k, g^{\alpha j}\partial_j) - 2x^\alpha TrE \\ &= 2\phi E(\partial_\alpha, x^i\overline{e_i}^T) - 2\phi E(x^k\partial_k, \overline{e_\alpha}^T) - 2x^\alpha TrE \\ &= 2\phi E(\partial_\alpha, \overline{X}^T) - 2\phi E(X, \overline{e_\alpha}^T) - 2x^\alpha TrE. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Usamos o fato $\nabla x^k = \overline{e_k}^T$ ou seja $g^{kj}\partial_j = \overline{e_k}^T$. □

Como consequência imediata do lema anterior temos o teorema seguinte.

Teorema 3.4. *Se (M, g) é uma variedade gráfico assintoticamente plana da função $f = (f^1, f^2, ..., f^m) : \mathbb{R}^n\backslash\Omega \to \mathbb{R}^m$ com fibrado normal plano, então o centro de massa é dado por $C = (C^1, C^2, \cdots, C^n)$, onde*

$$C^\alpha = \frac{1}{(n-1)(n-2)\omega_{n-1}m}\lim_{r\to\infty}\int_{S_r}\left[\phi E(\partial_\alpha, \overline{X}^T) - \phi E(X, \overline{e_\alpha}^T) - x^\alpha TrE\right]\,dS^g_r$$

$\forall\alpha = 1, 2, \cdots, n$.

4 CÁLCULO DE MASSA DE VARIEDADE GRÁFICO ASSINTOTICAMENTE HIPERBÓLICA

Dada uma base $\{e_i\}_{i=0}^{n}$ de $\mathbb{H}^n$, com métrica b, acrescentando à esta base o vetor $e_{n+1} = \frac{d}{dt}$ temos uma base $\{e_i\}_{i=0}^{n+1}$ para $\mathbb{H}^{n+1}$, com a métrica $\overline{b} = b + \rho^2 dt^2$, b a métrica de $\mathbb{H}^n$. É interessante observar que os cálculos que faremos a seguir não dependem de qual modelo hiperbólico estamos tomando. Podemos ter em mente dois modelos para o $\mathbb{H}^n$: o $\mathbb{R}_+ \times S^{n-1}$ com métrica $b = dr^2 + \sinh^2 r\, h_{S^{n-1}}$, onde $h_{S^{n-1}}$ é a métrica da esfera, e neste caso tem-se $\rho = \cosh r$; e a bola unitária aberta do $\mathbb{R}^n$ com a métrica $b = u^2 \sigma_{\mathbb{R}^n}$, onde $u = \frac{2}{1-|X|^2}$ e $\sigma_{\mathbb{R}^n}$ é a métrica canônica do $\mathbb{R}^n$, e neste caso tem-se $\rho = \frac{1+|X|^2}{1-|X|^2}$.

Nos cálculos seguintes será usada a seguinte notação:

$$\nabla = {}^b\nabla, \quad \overline{\nabla} = {}^{\overline{b}}\nabla, \quad \widetilde{\nabla} = {}^g\nabla, \quad \phi = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2|\nabla f|^2}}.$$

Para o cálculo da massa é usado o campo $X ={}^b \nabla\rho$. No modelo da bola este campo é dado por $X = x^i e_i$, o qual será adotado nos lemas seguintes.

Lema 4.1. *Para o gráfico da função assintoticamente hiperbólica $f : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ e os campos $X = x^i e_i$, $\widetilde{X} = x^i \partial_i$ e X^T, a projeção no gráfico de f da extensão natural do campo X, temos:*

i. *Os campos $\partial_i = e_i + f_i e_{n+1}, i = 1, \cdots, n$ constituem um frame do fibrado tangente ao gráfico.*
ii. *O campo unitário $N = -\phi\rho\nabla f + \phi e_0$, onde $e_0 = \rho^{-1} e_{n+1}$, é perpendicular ao gráfico.*
iii. $\langle X, N\rangle_{\overline{b}} = -\phi\rho\langle X, \nabla f\rangle_b$.
iv. $\phi = \langle N, e_0\rangle_{\overline{b}}$.
v. $\widetilde{X} = x^i\partial_i = X - \phi^{-1}\langle X, N\rangle e_0$, *onde* $X = x^i e_i$.
vi. $\widetilde{\nabla} f = \phi^2\nabla f + \phi^2|\nabla f|^2 e_{n+1}$.
vii. $e_{n+1}^T = \rho^2\widetilde{\nabla} f$.
viii. $X^T = X - \phi^2\rho^2\langle X, \nabla f\rangle\nabla f + \phi^2\langle X, \nabla f\rangle e_{n+1}$.
ix. $X^T = \widetilde{\nabla}\rho$.
x. $X^T = \widetilde{X} - \rho^2\langle X, \nabla f\rangle\widetilde{\nabla} f$.

Demonstração. i. Dada a carta $F : \mathbb{H}^n \to M^n$, $F(x^1, x^2, \cdots, x^n) = (x^1, x^2, \cdots, x^n, f(x^1, x^2, \cdots, x^n))$, onde $f : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ é uma função assintoticamente hiperbólica, tem-se $F_\star e_i = e_i + f_i e_{n+1}$, e portanto constituem um frame para o fibrado tangente de M^n.

ii. Basta observar que

$$\begin{aligned}\langle N, \partial_i\rangle &= \langle -\phi\rho\nabla f + \phi e_0, e_i + f_i e_{n+1}\rangle\\ &= -\phi\rho\langle\nabla f, e_i\rangle + \phi\rho^{-1} f_i\langle e_{n+1}, e_{n+1}\rangle\\ &= -\phi\rho f_i + \phi\rho f_i\\ &= 0,\end{aligned}\tag{4.1}$$

e que

$$\begin{aligned}\langle N, N\rangle &= \langle -\phi\rho\nabla f + \phi e_0,\ -\phi\rho\nabla f + \phi e_0,\rangle\\ &= \phi^2\rho^2\langle\nabla f, \nabla f,\rangle + \phi^2\langle e_0, e_0\rangle\\ &= \phi^2\rho^2|\nabla f|^2 + \phi^2\\ &= \phi^2\left(\rho^2|\nabla f|^2 + 1\right)\\ &= 1.\end{aligned}\tag{4.2}$$

iii. Observe que $\langle X, N\rangle = \langle X, -\phi\rho\nabla f + \phi e_0\rangle = -\phi\rho\langle X, \nabla f\rangle$.

iv. Observe que $\langle N, e_0\rangle = \langle -\phi\rho\nabla f + \phi e_0, e_0\rangle = \phi\langle e_0, e_0\rangle = \phi$.

v. Observe que $\widetilde{X} = x^i\partial_i = x_i(e_i + f_i e_{n+1}) = x^i e_i + x^i f_i e_{n+1} = X + \langle X, \nabla f\rangle e_{n+1} = X - \phi^{-1}\rho^{-1}\langle X, N\rangle e_{n+1} = X - \phi^{-1}\langle X, N\rangle e_0$. A penúltima igualdade decorre de iii.

vi. Temos $\widetilde{\nabla} f = g^{ij} f_i\partial_i = g^{ij} f_i(e_i + f_i e_{n+1}) = \phi^2\nabla f + \phi^2|\nabla f|^2 e_{n+1}$.

vii.

$$\begin{aligned}e_{n+1}^T &= e_{n+1} - \langle e_{n+1}, N\rangle N\\ &= e_{n+1} - \langle e_{n+1}, -\phi\rho\nabla f + \phi\rho^{-1} e_{n+1}\rangle N\\ &= e_{n+1} - \phi\rho(-\phi\rho\nabla f + \phi\rho^{-1} e_{n+1})\\ &= e_{n+1} + \phi^2\rho^2\nabla f - \phi^2 e_{n+1})\\ &= \phi^2\rho^2\nabla f + (1 - \phi^2) e_{n+1})\\ &= \phi^2\rho^2\nabla f + \phi^2\rho^2|\nabla f|^2 e_{n+1})\\ &= \rho^2(\phi^2\nabla f + \phi^2|\nabla f|^2 e_{n+1})\\ &= \rho^2\widetilde{\nabla} f,\end{aligned}\tag{4.3}$$

pelo item anterior.

viii.

$$\begin{aligned} X^T &= X - \langle X, N\rangle N \\ &= X + \phi\rho\langle X, \nabla f\rangle N \\ &= X + \phi\rho\langle X, \nabla f\rangle(-\phi\rho\nabla f + \phi e_0) \\ &= X - \phi^2\rho^2\langle X, \nabla f\rangle\nabla f + \phi^2\langle X, \nabla f\rangle e_{n+1}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

ix.

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla} f &= g^{ij}\rho_i\partial_j = g^{ij}\rho_i(e_j + f_j e_{n+1}) \\ &= g^{ij}\rho_i e_j + g^{ij}\rho_i f_j e_{n+1} \\ &= b^{ij}\rho_i e_j - \phi^2\rho^2 f^i\rho_i f^j e_j + \phi^2\rho_i f^i e_{n+1} \\ &= \nabla\rho - \phi^2\rho^2\langle\nabla f, \nabla\rho\rangle\nabla f + \phi^2\langle\nabla f, \nabla\rho\rangle e_{n+1} \\ &= X - \phi^2\rho^2\langle\nabla f, X\rangle\nabla f + \phi^2\langle\nabla f, X\rangle e_{n+1} \\ &= X^T. \end{aligned} \tag{4.5}$$

x. Sendo $\widetilde{X} = X + \langle X, \nabla f\rangle e_{n+1}$ e $X^T = X - \phi^2\rho^2\langle X, \nabla f\rangle\nabla f + \phi^2\langle X, \nabla f\rangle e_{n+1}$, temos:

$$\begin{aligned} X^T - \widetilde{X} &= -\phi^2\rho^2\langle X, \nabla f\rangle\nabla f + \phi^2\langle X, \nabla f\rangle e_{n+1} - \langle X, \nabla f\rangle e_{n+1} \\ &= -\phi^2\rho^2\langle X, \nabla f\rangle\nabla f + (\phi^2 - 1)\langle X, \nabla f\rangle e_{n+1} \\ &= -\phi^2\rho^2\langle X, \nabla f\rangle\nabla f - \phi^2\rho^2|\nabla f|^2\langle X, \nabla f\rangle e_{n+1} \\ &= -\rho^2\langle X, \nabla f\rangle(\phi^2\nabla f + \rho^2|\nabla f|^2 e_{n+1}) \\ &= -\rho^2\langle X, \nabla f\rangle\widetilde{\nabla} f, \end{aligned} \tag{4.6}$$

de onde resulta $X^T = \widetilde{X} - \rho^2\langle X, \nabla f\rangle\widetilde{\nabla} f.$

□

Temos mais um lema importante.

Lema 4.2. *Sendo $\overline{\Gamma}$ o simbolo de Christoffel do ambiente $\mathbb{H}^{n+1}$, temos:*

$$\begin{cases} \overline{\Gamma}^{n+1}_{(n+1)(n+1)} = 0 \\ \overline{\Gamma}^{i}_{(n+1)(n+1)} = -\rho\rho^i \\ \overline{\Gamma}^{n+1}_{i(n+1)} = \rho^{-1}\rho_i \\ \overline{\Gamma}^{j}_{i(n+1)} = 0 \\ \overline{\Gamma}^{n+1}_{ij} = 0 \\ \overline{\Gamma}^{k}_{ij} = \Gamma^k_{ij}, \end{cases} \tag{4.7}$$

$\forall\, i, j, k = 1, 2, \cdots, n.$

Demonstração. Usando a relação $\overline{\Gamma}_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\overline{b}^{km}\left(\overline{b}_{mj,i} + \overline{b}_{im,j} - \overline{b}_{ij,m}\right), \forall\, i = 1, 2, \cdots, n+1$ e tendo em mente que $\overline{b} = b + \rho^2 dt^2$, o resultado de cada item é imediato.

□

Temos a seguir mais um importante lema.

Lema 4.3. *Para $X = x^i e_i$, $\widetilde{X} = x^i \partial_i$, X^T, a projeção sobre o gráfico da extensão natural do campo X e e_0^T, a projeção do campo e_0 sobre o gráfico, temos:*

i. $\overline{\nabla}_{\partial_i} e_0 = -f_i X$.

ii. $\overline{\nabla}_{\partial_i} X = \rho e_i + |X|^2 e_0$.

iii. $\widetilde{\nabla}_{\partial_i} \phi \widetilde{X} = \langle \partial_i, A(X^T)\rangle e_0^T - \langle \partial_i, A(e_0^T)\rangle X^T + \phi\rho\partial_i$.

iv. $\widetilde{\nabla}_{\partial_i} \phi \widetilde{X} = \rho\langle \partial_i, A(\widetilde{X})\rangle \widetilde{\nabla} f - \rho\langle \partial_i, A(\widetilde{\nabla} f)\rangle \widetilde{X} + \phi\rho\partial_i$.

Demonstração. i.

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{\partial_i} e_0 &= \overline{\nabla}_{e_i} e_0 + f_i \overline{\nabla}_{e_{n+1}} e_0 \\
&= \overline{\nabla}_{e_i} \rho^{-1} e_{n+1} + f_i \overline{\nabla}_{e_{n+1}} \rho^{-1} e_{n+1} \\
&= \rho^{-2}\rho_i e_{n+1} + \rho^{-1}\overline{\nabla}_{e_i} e_{n+1} + f_i \rho^{-1} \overline{\nabla}_{e_{n+1}} e_{n+1} \\
&= \rho^{-2}\rho^i e_{n+1} + \rho^i \rho^{-1} \rho_{-1} e_i e_{n+1} + f_i \rho^{-1}(-\rho\rho^k e_k) \\
&= -f_i \rho^k e_k \\
&= -f_i \nabla\rho \\
&= -f_i X.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

ii.

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{\partial_i} X &= \overline{\nabla}_{e_i} X + f_i \overline{\nabla}_{e_{n+1}} X \\
&= \nabla_{e_i} X + f_i \overline{\nabla}_{e_{n+1}} x^k e_k \\
&= \rho e_i + f_i x^k \overline{\nabla}_{e_{n+1}} e_k, \\
&= \rho e_i + f_i x^k \rho^{-1} \rho_k e_{n+1} \\
&= \rho e_i + \rho^{-1} f_i \langle X, \nabla\rho\rangle e_{n+1} \\
&= \rho e_i + |x|^2 f_i e_0.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Da segunda para a terceira igualdade foi usado o fato que o campo X satisfaz $\nabla_{e_i} X = \rho e_i$.

iii. Temos: $\widetilde{\nabla}_{\partial_i} \phi \widetilde{X} = \left(\overline{\nabla}_{\partial_i} \phi \widetilde{X}\right)^T$, onde

$$
\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{\partial_i}\phi\widetilde{X} &= \overline{\nabla}_{\partial_i}\phi\left(X-\phi^{-1}\langle X,N\rangle e_0\right)\\
&= \partial_i(\phi)X+\phi\overline{\nabla}_{\partial_i}X-\partial_i\langle X,N\rangle e_0-\langle X,N\rangle\overline{\nabla}_{\partial_i}e_0\\
&= \partial_i\langle N,e_0\rangle X+\phi\overline{\nabla}_{\partial_i}X-\langle\overline{\nabla}_{\partial_i}X,N\rangle e_0-\langle X,\overline{\nabla}_{\partial_i}N\rangle e_0-\langle X,N\rangle\overline{\nabla}_{\partial_i}e_0\\
&= \langle\overline{\nabla}_{\partial_i}N,e_0\rangle X+\langle N,\overline{\nabla}_{\partial_i}e_0\rangle X+\phi\overline{\nabla}_{\partial_i}X-\langle\overline{\nabla}_{\partial_i}X,N\rangle e_0-\langle X,\overline{\nabla}_{\partial_i}N\rangle e_0-\langle X,N\rangle\overline{\nabla}_{\partial_i}e_0\\
&= \langle -A(\partial_i),e_0\rangle X+\underline{\langle N,-f_iX\rangle X}+\phi\rho e_i+\rho|X|^2f_ie_0-\langle\rho e_i+|X|_i^2e_0,N\rangle e_0+\\
&\qquad +\langle X,A(\partial_i)N\rangle e_0-\underline{\langle X,N\rangle(-f_iX)}\\
&= -\langle A(\partial_i),e_0\rangle X+\phi\rho e_i+\rho|X|^2f_ie_0-\langle\rho e_i+|X|^2f_ie_0,-\rho\phi\nabla f+\phi e_0\rangle e_0+\\
&\qquad +\langle X,A(\partial_i)\rangle e_0\\
&= -\langle A(\partial_i),e_0\rangle X+\phi\rho e_i+\underline{\rho|X|^2f_ie_0}+\rho\phi^2\langle e_i,\nabla f\rangle e_0-\underline{\rho|X|^2f_i\langle e_0,e_0\rangle e_0}+\\
&\quad +\langle X,A(\partial_i)\rangle e_0\\
&= -\langle A(\partial_i),e_0\rangle X+\phi\rho e_i+\rho\phi^2f_ie_0+\langle X,A(\partial_i)\rangle e_0\\
&= -\langle A(\partial_i),e_0\rangle X+\phi\rho(e_i+\phi f_ie_0)+\langle X,A(\partial_i)\rangle e_0\\
&= -\langle\partial_i,A(e_0^T)\rangle X+\langle A(X^T),\partial_i\rangle e_0+\phi\rho\partial_i.
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Tomando a parte tangente do campo anterior temos o resultado,

$$\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\phi\widetilde{X}=\langle\partial_i,A(X^T)\rangle e_0^T-\langle\partial_i,A(e_0^T)\rangle X^T+\phi\rho\partial_i.$$

iv. Tomando $X^T=\widetilde{X}-\rho^2\langle X,\nabla f\rangle\widetilde{\nabla}f$ e $e_0^T=\rho\widetilde{\nabla}f$, e substituindo na expressão do item anterior temos:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\phi\widetilde{X} &= \langle\partial_i,A\left(\widetilde{X}-\rho^2\langle X,\nabla f\rangle\widetilde{\nabla}f\right)\rangle\rho\widetilde{\nabla}f-\langle\partial_i,A(\rho\widetilde{\nabla}f)\rangle\left(\widetilde{X}-\rho^2\langle X,\nabla f\rangle\widetilde{\nabla}f\right)+\phi\rho\partial_i\\
&= \langle\partial_i,A(\widetilde{X})-\rho^2\langle X,\nabla f\rangle A(\widetilde{\nabla}f)\rangle\rho\widetilde{\nabla}f-\langle\partial_i,A(\rho\widetilde{\nabla}f)\rangle\widetilde{X}-\\
&\quad -\rho^2\langle\partial_i,A(\rho\widetilde{\nabla}f)\rangle\langle X,\nabla f\rangle\widetilde{\nabla}f+\phi\rho\partial_i\\
&= \rho\langle\partial_i,A(\widetilde{X})\rangle\widetilde{\nabla}f-\underline{\rho^3\langle X,\nabla f\rangle\langle\partial_i,A(\widetilde{\nabla}f)\rangle\widetilde{\nabla}f}-\rho\langle\partial_i,A(\widetilde{\nabla}f)\rangle\widetilde{X}-\\
&\quad -\underline{\rho^3\langle\partial_i,A(\widetilde{\nabla}f)\rangle\langle X,\nabla f\rangle\widetilde{\nabla}f}+\phi\rho\partial_i\\
&= \rho\langle\partial_i,A(\widetilde{X})\rangle\widetilde{\nabla}f-\rho\langle\partial_i,A(\widetilde{\nabla}f)\rangle\widetilde{X}+\phi\rho\partial_i.
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

□

Temos um último lema.

Lema 4.4.

i. $g^{ij}\widetilde{E}(\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\phi\widetilde{X},\partial_j)=\phi\mathrm{tr}\widetilde{E}+\rho\langle[A,\vec{\widetilde{E}}](\widetilde{\nabla}f),\widetilde{X}\rangle.$

ii. $g^{ij}\widetilde{E}(\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\phi\widetilde{X},\partial_j) = \phi\mathrm{tr}\widetilde{E}$.

Demonstração. i. Sendo $\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\phi\widetilde{X} = \rho\langle\partial_i, A(\widetilde{X})\rangle\widetilde{\nabla}f - \rho\langle\partial_i, A(\widetilde{\nabla}f)\rangle\widetilde{X} + \phi\rho\partial_i$, temos:

$$\begin{aligned}
g^{ij}\widetilde{E}(\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\phi\widetilde{X},\partial_j) &= g^{ij}\widetilde{E}(\rho\langle\partial_i, A(\widetilde{X})\rangle\widetilde{\nabla}f,\partial_j) - g^{ij}\widetilde{E}(\rho\langle\partial_i, A(\widetilde{\nabla}f)\rangle\widetilde{X},\partial_j) + g^{ij}\widetilde{E}(\phi\rho\partial_i,\partial_j)\\
&= \rho\widetilde{E}(\widetilde{\nabla}f, g^{ij}\langle\partial_i, A(\widetilde{X})\rangle\partial_j) - \rho\widetilde{E}(\widetilde{X}, g^{ij}\langle\partial_i, A(\widetilde{\nabla}f)\rangle\partial_j) + \phi\rho g^{ij}\widetilde{E}(\partial_i,\partial_j)\\
&= \rho\widetilde{E}(\widetilde{\nabla}f, A(\widetilde{X})) - \rho E(\widetilde{X}, A(\widetilde{\nabla}f)) + \phi\rho\mathrm{tr}\widetilde{E}\\
&= \rho\langle\vec{\widetilde{E}}(\widetilde{\nabla}f), A(\widetilde{X})\rangle - \rho\langle\widetilde{X}, \vec{\widetilde{E}}(A(\widetilde{\nabla}f))\rangle + \phi\rho\mathrm{tr}\widetilde{E}\\
&= \rho\langle A(\vec{\widetilde{E}}(\widetilde{\nabla}f)) - \vec{\widetilde{E}}(A(\widetilde{\nabla}f)), \widetilde{X}\rangle + \phi\rho\mathrm{tr}\widetilde{E}\\
&= \rho\langle[\vec{\widetilde{E}}, A](\widetilde{\nabla}f), \widetilde{X}\rangle + \phi\rho\mathrm{tr}\widetilde{E}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

ii. Para demonstrar este item basta demonstrar que o colchete é nulo e usar o item anterior. Temos

$$\begin{aligned}
&\widetilde{E}(V, AW) - \widetilde{E}(W, AV) =\\
&= Ric(V, AW) - \frac{1}{2}Scal^g g(V, AW) - \frac{(n-1)(n-2)}{2}g(V, AW) -\\
&- \left(Ric(W, AV) - \frac{1}{2}Scal^g g(W, AV) - \frac{(n-1)(n-2)}{2}g(W, AV)\right)\\
&= Ric(V, AW) - Ric(W, AV)\\
&= \overline{Ric}(V, AW) - \langle\overline{R}(V, N)AW, N\rangle + \underbrace{H\langle AV, AW\rangle} - \underline{\langle AV, AAW\rangle} -\\
&- \left(\overline{Ric}(W, AV) - \langle\overline{R}(W, N)AV, N\rangle + \underbrace{H\langle AW, AV\rangle} - \underline{\langle AW, AAV\rangle}\right)\\
&= \overline{Ric}(V, AW) - \langle\overline{R}(V, N)AW, N\rangle - \overline{Ric}(W, AV) + \langle\overline{R}(W, N)AV, N\rangle\\
&= \overline{Ric}(V, AW) + \left[\overline{b}(V, AW)\overline{b}(N, N) - \overline{b}(V, N)\overline{b}(N, AW)\right] -\\
&- \overline{Ric}(W, AV) - \left[\overline{b}(V, AW)\overline{b}(N, N) - \overline{b}(V, N)\overline{b}(N, AW)\right]\\
&= \overline{Ric}(V, AW) + \overline{b}(V, AW)\overline{b}(N, N) -\\
&- \overline{Ric}(W, AV) - \overline{b}(V, AW)\overline{b}(N, N)\\
&= \overline{Ric}(V, AW) - \overline{Ric}(W, AV).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Para continuar a demonstração usaremos dois importantes resultados, decorrentes da equação de Gauss (veja por exemplo ALÍAS, DE LIRA, and MALACARNE (2006)). São eles:

$$Ric(V, W) = \overline{Ric}(V, W) - \langle\overline{R}(V, N)W, N\rangle + H\langle AV, W\rangle - \langle AV, AW\rangle$$

e

$$\overline{R}_{ikjl} = (-1)[\overline{b}_{ij}\overline{b}_{kl} - \overline{b}_{il}\overline{b}_{jk}].$$

Temos então:

$$\begin{aligned}
\widetilde{E}(V,AW) - \widetilde{E}(W,AV) &= V^i(AW)^j\overline{Ric}(e^i,e^j) - W^i(AV)^j\overline{Ric}(e^i,e^j) \\
&= \left[V^i(AW)^j - W^i(AV)^j\right]\overline{Ric}(e^i,e^j) \\
&= \left[V^i(AW)^j - W^i(AV)^j\right]\overline{b}^{kl}\overline{R}_{ikjl}) \\
&= -\left[V^i(AW)^j - W^i(AV)^j\right]\overline{b}^{kl}\left[\overline{b}_{ij}\overline{b}_{kl} - \overline{b}_{il}\overline{b}_{jk}\right] \\
&= -\left[V^i(AW)^j - W^i(AV)^j\right]\left[\overline{b}_{ij}(n+1) - \overline{b}_{ij}\right] \\
&= -n\left[V^i(AW)^j - W^i(AV)^j\right]\overline{b}_{ij} \\
&= -n\left[\overline{b}(V,AW) - \overline{b}(W,AV)\right] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

□

Podemos agora enunciar os resultados principais.

Teorema 4.1. *Sendo (M^n, g) uma variedade gráfico de uma função suave assintoticamente hiperbólica balanceada $f : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$, com a métrica induzida do $\mathbb{H}^{n+1}$, S sua curvatura escalar na métrica do gráfico, ∇f o gradiente de f na métrica de $\mathbb{H}^n$, $\rho = \cosh r$, tem-se que sua massa é dada por:*

$$m(\rho) = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{M^n} \frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2|\nabla f|^2}} \left[S + n(n-1)\right] dv^g$$

Demonstração. A demonstração é resultado imediato da definição de massa via tensor de Einstein e do lema anterior, bastando observar que $\widetilde{E}$ é um campo simétrico e de divergência nula, com $\mathrm{tr}\widetilde{E} = -\frac{n-2}{2}(S + n(n-1))$.

□

Teorema 4.2. *Sendo (M^n, g) uma variedade gráfico de uma função suave assintoticamente hiperbólica $f : \mathbb{H}^n \backslash \Omega \to \mathbb{R}$, com Ω aberto e limitado e com fronteira suave $\partial\Omega$, tal que cada componente conexa de $f(\partial\Omega)$ está num conjunto de nível de f e $|\nabla f(x)| \to \infty$ quando $x \to \partial\Omega$, g a métrica do gráfico induzida do $\mathbb{H}^{n+1}$, S sua curvatura escalar na métrica do g, ∇f o gradiente de f na métrica de b, H^b a curvatura média de $\partial\Omega$ como* *subvariedade de* $(\mathbb{H}^n, b)$, $\rho = \cosh r$; *tem-se que seu funcional massa aplicado em* ρ *é dada por:*

$$m(\rho) = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \left(\int_{M^n} \frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2|\nabla f|^2}} \left[S + n(n-1)\right] dv^g + \int_{\partial\Omega} \rho H^b ds_b \right).$$

Demonstração. Como $|\nabla f(x)| \to \infty$ quando $x \to p \in \partial\Omega$, a integral no bordo $\partial\Omega$ não está definida, pois ϕ e X não estão definidos aí, e por conseguinte não podemos aplicar diretamente o teorema da divergência envolvendo a fronteira $\partial\Omega$. Tomemos então o aberto limitado Ω_ε, o qual contém Ω e suas fronteiras distam ε entre si, apliquemos o teorema da divergência aí e depois façamos $\varepsilon \to 0$. Isto poderá ser feito se a integral de bordo converge quando $\varepsilon \to 0$, o que mostraremos ser verdadeiro. Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned}
m(\rho) &= -\frac{1}{(n-1)(n-2)\omega_{n-1}} \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} \widetilde{E}(\widetilde{X}, \nu^g)\, dS_r^g \\
&= -\frac{1}{(n-1)(n-2)\omega_{n-1}} \left(\lim_{r\to\infty} \int_{S_r \bigcup \partial M_\varepsilon} \widetilde{E}(\phi\widetilde{X}, \nu^g)\, ds^g - \int_{\partial M_\varepsilon} \widetilde{E}(\phi\widetilde{X}, \nu^g)\, ds^g \right) \\
&= -\frac{1}{(n-1)(n-2)\omega_{n-1}} \left(\int_{M^n} g^{ij} \widetilde{E}(\nabla_{\partial_i}\phi\widetilde{X}, \partial_j)\, dv^g - \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial M_\varepsilon} \widetilde{E}(\phi\widetilde{X}, \nu^g)\, ds^g \right) \\
&= -\frac{1}{(n-1)(n-2)\omega_{n-1}} \frac{-(n-2)}{2} \int_M \frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2|\nabla f|^2}} [S + n(n-1)] dM + \\
&+ \frac{1}{(n-1)(n-2)\omega_{n-1}} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial M_\varepsilon} \widetilde{E}(\phi\widetilde{X}, \nu^g)\, ds^g \\
&= \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_M \frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2|\nabla f|^2}} [S + n(n-1)] dM \\
&+ \frac{1}{(n-1)(n-2)\omega_{n-1}} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial M_\varepsilon} \widetilde{E}(\phi\widetilde{X}, \nu^g)\, ds^g.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Calculemos agora o limite da integral. Verificaremos que o integrando converge quando $x \to p \in \partial\Omega$ e portanto o limite da integral será a integral deste limite na fronteira ∂M. Tomemos em ∂M_ε um frame ortonormal $\{\nu, v_2, \cdots, v_n\}$ e escrevamos $\widetilde{X}$ neste frame. Temos então:

$$\widetilde{X} = \langle \widetilde{X}, \nu\rangle \nu + \langle \widetilde{X}, v_2\rangle v_2 + \langle \widetilde{X}, v_3\rangle v_3 + \cdots + \langle \widetilde{X}, v_n\rangle v_n.$$

Portanto,

$$\widetilde{E}(\phi\widetilde{X},\nu) = \phi\langle\widetilde{X},\nu\rangle\widetilde{E}(\nu,\nu) + \phi\langle\widetilde{X},v_2\rangle\widetilde{E}(v_2,\nu) + \cdots + \phi\langle\widetilde{X},v_n\rangle\widetilde{E}(v_n,\nu). \tag{4.16}$$

Utilizaremos agora dois resultados muito úteis aos nossos cálculos: primeiro, sendo ν^g o conormal exterior da variedade gráfico e sendo esta variedade ortogonal a $\mathbb{H}^n$, na fronteira, tem-se que $\nu^g \to \pm e_{n+1}$; e segundo, no limite, ν^g torna-se um autovetor do operador de forma A, resultando portanto os seguintes resultados:

i. Temos

$$\phi\langle\widetilde{X},\nu\rangle = \phi\langle X + \langle X,\nabla f\rangle e_{n+1},\nu\rangle = \phi\langle X,\nu\rangle + \langle X,\phi\langle e_{n+1},\nu\rangle\nabla f\rangle \to \langle X,\eta\rangle,$$

onde η é o campo conormal interior do bordo visto como hipersuperfície de $\mathbb{H}^n$, pois ν torna-se perpendicular a X e $\phi\langle e_{n+1},\nu\rangle\nabla f = \frac{\langle e_{n+1},\nu\rangle\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \to \eta$, pois $\langle e_{n+1},\nu\rangle \to \pm 1$ e para função crescente ∇f aponta para fora da curva de nível e ν tende para $-e_{n+1}$; e para função decrescente ∇f aponta para dentro da curva de nível e ν converge para e_{n+1}.

ii. Temos que

$$\begin{aligned}\widetilde{E}(\nu,\nu) &= Ric(\nu,\nu) - \frac{1}{2}Sg(\nu,\nu) - \frac{(n-1)(n-2)}{2}g(\nu,\nu)\\ &= Ric(\nu,\nu) - \frac{1}{2}S - \frac{(n-1)(n-2)}{2}\end{aligned} \tag{4.17}$$

Usando as expressões (que podem ser encontradas em ALÍAS, DE LIRA, and MALACARNE (2006))

$$Ric(\nu,\nu) = \overline{Ric}(\nu,\nu) - \langle\overline{R}(\nu,N)\nu,N\rangle + H\langle A\nu,\nu\rangle - \langle A\nu,A\nu\rangle$$

$$S = \overline{S} - 2Ric(N,N) + 2H_2,$$

resulta

$$\begin{aligned}
\widetilde{E}(\nu,\nu) &= \overline{Ric}(\nu,\nu) - \langle\overline{R}(\nu,N)\nu,N\rangle + H\langle A\nu,\nu\rangle - \langle A\nu,A\nu\rangle - \\
&- \frac{1}{2}(\overline{S} - 2Ric(N,N) + 2H_2) - \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\
&= \overline{Ric}(\nu,\nu) - \langle\overline{R}(\nu,N)\nu,N\rangle + -\frac{1}{2}(\overline{S} - 2Ric(N,N)) - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \\
&+ H\langle A\nu,\nu\rangle - \langle A\nu,A\nu\rangle - H_2.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Já mostramos no último lema que

$$\overline{Ric}(V,W) = -n\overline{b}(V,W)$$

e portanto

$$\overline{Ric}(\nu,\nu) = -n,$$

$$\overline{Ric}(N,N) = -n,$$

$$\overline{S} = \overline{b}^{ij}\overline{Ric}_{ij} = -n\overline{b}^{ij}\overline{b}_{ij} = -n(n+1),$$

$$\langle\overline{R}(\nu,N)\nu,N\rangle = -(\overline{b}(\nu,\nu)\overline{b}(N,N) - \overline{b}(\nu,N)\overline{b}(N,\nu)) = -(1\cdot 1 - 0\cdot 0) = -1.$$

Observe que:

$$\begin{aligned}
&\overline{Ric}(\nu,\nu) - \langle\overline{R}(\nu,N)\nu,N\rangle + -\frac{1}{2}(\overline{S} - 2Ric(N,N)) - \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\
&= -n + 1 - \frac{1}{2}(-n(n+1) + 2n) - \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\
&= \frac{1}{2}[-2(n-1) + n(n-1) - (n-1)(n-2)] \\
&= \frac{1}{2}[(n-1)(n-2) - (n-1)(n-2)] \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{4.19}$$

e portanto:

$$\widetilde{E}(\nu,\nu) = H\langle A\nu,\nu\rangle - \langle A\nu, A\nu\rangle - H_2.$$

Tomando $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ autovalores associados à base de autovetores de A, sendo λ_1 o autovalor associado a ν; tem-se portanto, quando $\varepsilon \to 0$, que:

$$\begin{aligned}
\widetilde{E}(\nu,\nu) &\to H\lambda_1 - \lambda_1^2 - H_2 \\
&= \lambda_1^2 + \lambda_1[\lambda_2 + \cdots + \lambda_n] - \lambda_1^2 - \lambda_1[\lambda_2 + \cdots + \lambda_n] - \Sigma_{2\leq i\leq j}\lambda_i\lambda_j \\
&= -\Sigma_{2\leq i\leq j}\lambda_i\lambda_j \\
&= -H_2^b,
\end{aligned} \tag{4.20}$$

onde H_2^b é a curvatura escalar de $\partial\Omega$ como subvariedade de $(\mathbb{H}^n, b)$.

iii. Por último observe que quando $\varepsilon \to 0$ tem-se

$$\phi\langle\widetilde{X}, v_m\rangle\widetilde{E}(v_m,\nu) \to 0, \forall m = 2, 3, \cdots, n,$$

pois $\phi \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$, e os outros dois fatores são limitados.

Juntando os 3 resultados, quando $\varepsilon \to 0$, temos:

$$\widetilde{E}(\phi\widetilde{X},\nu) \to -\langle X,\eta\rangle H_2^b.$$

Portanto podemos tomar o limite, obtendo:

$$m(\rho) = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}}\left(\int_{M^n}\frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2|\nabla f|^2}}\left[S + n(n-1)\right]\,dv^g\; + \int_{\partial\Omega} -\langle X,\eta\rangle H_2^b ds_g\right)$$

Observe que a métrica g do elemento de integração da integral à direita pode ser substituida pela métrica b, posto que a função f é constante no bordo. Para finalizar o teorema devemos usar a seguinte equação de Minkowski: se M é uma hipersuperfície compacta do $\mathbb{H}^n$ então:

$\int_M \left(\rho H^b + \langle X,\eta\rangle H_2^b\right) ds = 0$, onde η aponta para o interior de M.

Aplicando a equação de Minkowski à hipersuperfície Ω e lembrando que H e H_2 estão normalizadas, teremos:

$$-\frac{n-2}{2}\int_{\partial\Omega}\rho H^b ds = \int_{\partial\Omega}\langle X,\eta\rangle H_2^b ds.$$

Substituindo esta expressão na expressão da massa, tem-se:

$$m(\rho) = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \left(\int_M \frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2|\nabla f|^2}} [S + n(n-1)] dM + \int_{\partial\Omega} \rho H^b \, ds^b \right).$$

□

Teorema 4.3. *Sendo* (M^n, g) *uma variedade gráfico de uma função suave assintoticamente hiperbólica* $f : \mathbb{H}^n \backslash \Omega \to \mathbb{R}$, *com* Ω *aberto e limitado e com fronteira suave* $\partial\Omega$, *estrelada e com curvatura média positiva, tal que cada componente conexa de* $f(\partial\Omega)$ *está num conjunto de nível de* f *e* $|\nabla f(x)| \to \infty$ *quando* $x \to \partial\Omega$, g *a métrica do gráfico induzida do* $\mathbb{H}^{n+1}$, S *sua curvatura escalar na métrica do* g, *satisfazendo* $S + \frac{n(n-1)}{2} \geq 0$, ∇f *o gradiente de* f *na métrica de* b, H^b *a curvatura média de* $\partial\Omega$ *como subvariedade de* $(\mathbb{H}^n, b)$, $\rho = \cosh r$; *tem-se então a seguinte desigualdade de Penrose:*

$$m \geq \frac{1}{2} \left(\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} + \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n}{n-1}} \right),$$

onde $\Sigma = \partial\Omega$.

Demonstração. A demonstração é conseguência imediata do teorema anterior e do Teorema 2.8 . □

5 CONCLUSÃO

O trabalho reapresentou vários resultados conhecidos para a conjectura da massa positiva e para a desigualdade de Penrose para gráficos assintoticamente planos e assintoticamente hiperbólicos, partindo de definições via tensor de Einstein. Foi apresentada também uma expressão para o centro de massa de um gráfico assintoticamente plano. Dado que usamos apenas o fato de E ser simétrico, ter divergência nula e comutar com o operador de forma, resultados semelhantes podem ser obtidos para as massas de Chern-Gauss-Bonnet.

REFERÊNCIAS

ALÍAS, Luis J.; DE LIRA, Jorge H. S.; MALACARNE, J. Miguel. Constant higher-order mean curvature hypersurfaces in Riemannian spaces. ***J. Inst. Math. Jussieu***, v. 5, n. 4, p. 527–562, 2006. URL `http://dx.doi.org/10.1017/S1474748006000077`.

BARTINIK, Robert. The mass of an asymptotically flat manifold. ***Comm. Pure Appl. Math.***, v. 39, n. 5, p. 661–693, 1986. URL `https://doi.org/10.1002/cpa.3160390505`.

CHRUŚCIEL, Piotr. Boundary conditions at spatial infinity from a Hamiltonian point of view. *Topological properties and global structure of space-time (Erice, 1985)*, **Plenum, New York**, v. 138 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys.*, p. 49–59. 1986.

DAHL, Mattias; GICQUAUD, Romain; SAKOVICH, Anna. Penrose type inequalities for asymptotically hyperbolic graphs. ***Ann. Henri Poincaré***, v. 14, n. 5, p. 1135–1168, 2013. URL `http://dx.doi.org/10.1007/s00023-012-0218-4`.

DE LIMA, Levi Lopes; GIRÃO, Frederico. Positive mass and Penrose type inequalities for asymptotically hyperbolic hypersurfaces. ***Gen. Relativity Gravitation***, v. 47, n. 3, p. Art. 23, 20, 2015. URL `http://dx.doi.org/10.1007/s10714-015-1870-z`.

HERZLICH, Marc. Computing asymptotic invariants with the Ricci tensor on asymptotically flat and asymptotically hyperbolic manifolds. ***Ann. Henri Poincaré***, v. 17, n. 12, p. 3605–3617, 2016. URL `http://dx.doi.org/10.1007/s00023-016-0494-5`.

LAM, Mau-Kwong George. *The Graph Cases of the Riemannian Positive Mass and Penrose Inequalities in All Dimensions.* **ProQuest LLC, Ann Arbor, MI**, 2011, 88 p. URL `http://gateway.proquest.com/openurl?url_ver=Z39.88-2004&rft_val_fmt=info:ofi/fmt:kev:mtx:dissertation&res_dat=xri:pqdiss&rft_dat=xri:pqdiss:3454195`. Thesis (Ph.D.)–Duke University.

MIAO, Pengzi; TAM, Luen-Fai. Evaluation of the ADM mass and center of mass via the Ricci tensor. ***Proc. Amer. Math. Soc.***, v. 144, n. 2, p. 753–761, 2016. URL `http://dx.doi.org/10.1090/proc12726`.

MICHEL, B. Geometric invariance of mass-like asymptotic invariants. ***J. Math. Phys.***, v. 52, n. 5, p. 052504, 14, 2011. URL `http://dx.doi.org/10.1063/1.3579137`.

MIRANDOLA, H.; VITÓRIO, F. The positive mass theorem and Penrose inequality for graphical manifolds. ***Comm. Anal. Geom.***, v. 23, n. 2, p. 273–292, 2015. URL `http://dx.doi.org/10.4310/CAG.2015.v23.n2.a2`.

REGGE, Tullio; TEITELBOIM, Claudio. Role of surface integrals in the Hamiltonian formulation of general relativity. ***Ann. Physics***, v. 88, p. 286–318, 1974. URL `https://doi.org/10.1016/0003-4916(74)90404-7`.