



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

JÚLIO CÉSAR BRASIL DE ARAÚJO

ASPECTOS DE GRAVITAÇÃO EM  
CENÁRIOS DE BRANAS ESPESSAS EM  
SEIS DIMENSÕES

FORTALEZA - CE  
FEVEREIRO 2017

JÚLIO CÉSAR BRASIL DE ARAÚJO

# Aspectos de Gravitação em Cenários de Branas Espessas em Seis Dimensões

Tese apresentada ao programa de pós-graduação em Física da Universidade Federal do Ceará como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida

Fortaleza - CE

Fevereiro 2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- A689a Araújo, Júlio César Brasil de.  
Aspectos de gravitação em cenários de branas espessas em seis dimensões / Júlio César Brasil de Araújo. – 2017.  
67 f. : il.
- Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2017.  
Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.
1. Mundos-brana. 2. Modelo Gherghetta-Shaposhnikov. 3. Localização de gravidade. 4. Conifold resolvido. 5. Correção da lei de Newton. I. Título.

CDD 530

---

JÚLIO CÉSAR BRASIL DE ARAÚJO

ASPECTOS DE GRAVITAÇÃO EM CENÁRIOS DE BRANAS ESPESAS EM  
SEIS DIMENSOES

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Física. Área de concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em: 22/02/2017.

BANCA EXAMINADORA

---

Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Dr. Davi Monteiro Dantas  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Dr. Diego Frankin de Souza Veras Santana  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Dr. Márcio André de Melo Gomes  
Instituto Federal do Ceará (IFCE)

---

Dr. José Euclides Gomes da Silva  
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

# RESUMO

A hipótese de dimensões extras mudou a forma como entendemos o Universo através do conceito de mundos-brana (hipersuperfícies) inserido em um espaço-tempo de dimensão maior (bulk). O conceito de mundo-brana surgiu em teorias de cordas e em modelos de unificação produzindo interessantes explicações para fenômenos fundamentais em física de altas energias, por exemplo, o problema da hierarquia, a origem da matéria escura, o pequeno valor da constante cosmológica e a aceleração cósmica.

Na primeira proposta desta tese, analisamos um mundo-brana estático e com simetria cilíndrica em seis dimensões como uma extensão de um modelo do tipo-corda. Através de uma função suave não-fatorizável, conseguimos correções próximo a brana. Modificando os valores da constante cosmológica do bulk, obtivemos modificações na fonte. A solução é definida tanto no interior quanto no exterior do defeito tipo-corda e satisfaz todas as condições de energia. Um modo gravitacional de massa-nula suavizado é localizado na brana, no qual tem seu máximo deslocado da origem. Em contraste com o modelo de corda-fina, as soluções massivas apresentam grande amplitude próximo a brana. Além disso, por meio da análise do potencial quântico análogo, mostramos que apenas as ondas do tipo- $s$  dos modos gravitacionais de Kaluza-Klein são aceitáveis.

Na segunda proposta deste trabalho derivamos uma expressão para a correção da lei de Newton da gravidade devido aos estados gravitacionais de Kaluza-Klein em um cenário de mundo-brana geral tipo-corda espessa em seis dimensões. Para analisarmos as correções da lei de Newton, estudamos as flutuações gravitacionais em uma 3-brana localizada em um conifold resolvido transverso e utilizamos métodos numéricos para obtermos o espectro de massa e as correspondentes autofunções. Além disso, o modo gravitacional de massa-nula é localizado na brana, recuperando, desta forma, a gravidade usual. Finalmente, para o conifold singular descobrimos que o sétimo autoestado é um modo ressonante em vez do primeiro autoestado. Tal estado excitado contribui fortemente para a correção do potencial Newtoniano.

Palavras-Chave: Mundos-brana, Modelo Gherghetta-Shaposhnikov, Localização de Gravidade, Conifold Resolvido, Correção da Lei de Newton.

# ABSTRACT

The braneworld hypothesis has changed the way we understand the Universe introducing the idea that it may be thought as a hypersurface embedded in a higher dimensional bulk space-time. The braneworld concept emerged from string theory and unification models and yields good explanations to several fundamental phenomena in High Energy Physics such as the hierarchy problem, the dark matter origem, the small value of the cosmological constant and the cosmic acceleration.

In the first proposal of this thesis we analyze a static and axisymmetric braneworld in six dimensional as a string-like model extension. For a subtle warp fancement, this scenario provides near brane corrections. By varying the bulk cosmological constant, we obtain a source which passes through different phases. The solution is defined both for the interior and for the exterior of the string and satisfies all the energy conditions. A smoothed gravitational massless mode is localized on the brane, of which the core is displaced from the origin. In contrast to the thin-string model, the massive solutions have a high amplitude near the brane. furthermore, by means of an analog quantum potential analysis, we show that only s-wave gravitational Kaluza-Klein modes are permissible.

In the second proposal of this work we derive an expression for the correction in the Newton's law of gravitation due to the gravitational Kaluza-Klein states in a general thick string-like braneworld scenario in six dimensions. In order to analyze corrections to Newton's law study the gravity fluctuations in a 3-brane placed in a transverse resolved conifold and use suitable numerical methods to attain the massive spectrum and the corresponding eigenfunctions. Moreover, gravitational massless mode is localized on the brane recovering  $4 - D$  gravity. Finally, for the singular conifold, we found that a non-fermi eigenstate is a resonant mode. Such excited state is the largest contributor to corrections in the Newtonian potential.

Keywords: Braneworlds, Gherghetta-Shaposhnikov model, Gravity localization, Resolved Conifold, Newton's law correction.

*Dedico este trabalho ao meu amigo,  
Nemésio Helder (in memoriam).*





*“Há fundamentos para um otimismo cauteloso sobre podermos estar agora próximos do final da busca das leis últimas da natureza.”*

*Professor Stephen W. Hawking*

*“Napoleão e outros grandes vultos de sua época foram construtores de impérios. Mas há outra categoria de homens, que atua em outro sentido: não são construtores de impérios, mas construtores de universo. Suas mãos não se mancham com sangue de outros homens. Ptolomeu construiu um universo que durou 1400 anos. Newton, da mesma forma, construiu um universo que durou 300 anos. Einstein construiu um universo, e não posso prever quanto tempo irá durar.”*

*George Bernard Shaw*

*escritor irlandês (1856 – 1950)*

# Sumário

## Lista de Figuras

## Lista de Tabelas

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
1.1	A teoria quântica de campos . . . . .	8
1.2	Interação eletromagnética . . . . .	8
1.3	Interação eletrofraca . . . . .	9
1.4	Interação nuclear forte . . . . .	10
1.5	Interação gravitacional . . . . .	10
1.6	Modelo Kaluza-Klein . . . . .	12
1.7	Cordas . . . . .	13
1.8	Mundos-brana . . . . .	14
1.9	A hierarquia de gauge . . . . .	14
1.10	Cenário de Arkani-Hamed-Dimopoulos-Dvali (ADD) . . . . .	15
1.11	Modelo Randall-Sundrum tipo-1 (RS-1) . . . . .	15
1.12	Modelo Randall-Sundrum tipo-2 (RS-2) . . . . .	17
1.13	Composição da Tese . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Modelo Gherghetta-Shaposhnikov</b>	<b>20</b>
2.1	Equações de Einstein para o campo gravitacional em seis dimensões no modelo GS . . . . .	21
2.2	Localização de gravidade no modelo GS . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Mundo-Brana tipo Corda Espessa Suave em Seis Dimensões</b>	<b>27</b>
3.1	Geometria tipo corda suave e estendida . . . . .	27
3.2	Propriedades físicas . . . . .	32
3.3	Localização de gravidade . . . . .	35
3.3.1	Modos não-massivos gravitacionais . . . . .	36
3.3.2	Modos massivos gravitacionais . . . . .	36
3.3.3	Potencial quântico análogo . . . . .	38

<b>4</b>	<b>Correção do Potencial Newtoniano em Modelo de Brana Espessa 6-Dimensional e Geometria Conifold</b>	<b>41</b>
4.1	Geometria conifold . . . . .	41
4.2	Geometria e propriedades físicas no bulk . . . . .	47
4.3	Flutuações gravitacionais . . . . .	49
4.4	Correção do potencial Newtoniano . . . . .	51
4.5	Análise numérica . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>60</b>
5.1	Mundo-Brana tipo corda espessa suave em seis dimensões . . . . .	60
5.2	Correção do potencial Newtoniano em modelo de brana espessa 6-dimensional	61
5.3	Perspectivas . . . . .	62
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>63</b>

# Lista de Figuras

1.1	Modelo RS-1 . . . . .	16
2.1	Modelo tipo-corda fina . . . . .	21
3.1	Função warp para alguns valores de $c$ . O fator de warp para corda fina (sub-gráfico) dado pela Eq. (3.10) é definido somente para o exterior da corda. . . . .	31
3.2	Componente métrica angular para diferentes valores de $c$ . O sub-gráfico refere-se a componente métrica angular para o modelo de corda fina (3.10) para $R_0 = 1, 0$ . . . . .	32
3.3	Escalar de curvatura no bulk. . . . .	33
3.4	Componentes do tensor momento-energia para $c = 1, 0$ . . . . .	34
3.5	Componentes do tensor momento energia para $c = 4, 0$ . . . . .	34
3.6	Modo-zero gravitacional . . . . .	37
3.7	Solução numérica da equação (3.37) para $m = 44, 10$ . Representamos o sub-gráfico dos modos massivos do modelo GS para os mesmos valores de massa (3.44), onde $C_1 = C_2 = 0, 2$ . . . . .	38
3.8	Solução numérica da equação (3.37) para $m = 22, 82$ . Representamos o sub-gráfico dos modos massivos do modelo GS para os mesmos valores de massa (3.44), onde $C_1 = C_2 = 0, 01$ . . . . .	39
3.9	Função potencial para $l = 0$ . . . . .	40
3.10	Função potencial para $l = 2$ . . . . .	40
4.1	Substituição da ponta do cone por uma esfera de raio $a$ (parâmetro de resolução). . . . .	42
4.2	Transformação $u(\rho, a)$ . Observamos que para $a = 0$ temos uma reta com coeficiente angular igual a 1. Para $a \neq 0$ essas funções são aproximadamente retas com coeficientes angulares menores. Há uma diminuição brusca do coeficiente para pequenos valores de $a$ , o qual retorna ao coeficiente angular 1 para grandes valores do parâmetro de resolução. . . . .	44

4.3	$R(r)$ para o modelo CR. Verificamos que o parâmetro $a$ regula tanto a amplitude como a espessura da região que antecede o espaço puramente $AdS_6$ do GS. Porém, há saturação na forma desta curvatura para grandes valores do parâmetro de resolução, a forma exposta para $a = 10$ se mantém para valores maiores. . . . .	45
4.4	$t_M(\rho)$ para o modelo CR com $c = 0.5$ . Observamos que a condição de energia dominante $t_0 \geq t_i$ é atendida no caso onde $a = 0$ (figura da esquerda). Na figura da direita $a = 5$ a densidade de energia e a pressão angular se igualam. . . . .	46
4.5	Fator de warp $\sigma(\rho)$ e componente métrica angular $\gamma(\rho)$ para $c = 1, 0$ . . . .	49
4.6	Densidade de Energia $t_0(\rho)$ para diferentes valores de $a$ . . . . .	50
4.7	Modo-zero gravitacional para o conifold resolvido. O caso GS está representado no gráfico. . . . .	53
4.8	Diagrama de Feynman em tree-level para dois bósons escalares interagindo via troca de grávitons. . . . .	54
4.9	Espectro gravitacional de Kaluza-Klein para diferentes valores do parâmetro de resolução $a$ . . . . .	56
4.10	Potencial quântico análogo para os grávitons no cenário de mundo-brana tipo-conifold resolvido. Representamos o caso tipo-corda fina $U_{GS}(z)$ . . . .	57
4.11	Funções de onda do gráviton normalizadas para o cenário de mundo-brana tipo-conifold ( $a = 0$ ). O sétimo autoestado possui perfil ressonante. . . .	58
4.12	Funções de onda do gráviton normalizadas para o cenário de mundo-brana tipo-conifold ( $a \neq 0$ ). . . . .	59

# Lista de Tabelas

1.1	Relação entre as interações fundamentais. Q.C.D. - Cromodinâmica Quântica, a interação forte é atrativa e constante para o interior hadrônico e decai exponencialmente para o exterior. Q.E.D. - Eletrodinâmica Quântica e $m_b$ são os valores das massas dos bósons $W$ 's ou $Z^0$ . . . . .	12
4.1	Fatores de warp para as geometrias estudadas nesta tese. . . . .	47

# LISTA DE TRABALHOS PUBLICADOS

- J. C. B. Araújo, J. E. G. Silva, D. F. S. Veras and C. A. S. Almeida, “A smoothed string-like braneworld in six dimensions,” *Eur. Phys. J. C* **75**, 127 (2015).

## Trabalhos submetidos:

- J. C. B. Araujo, D. F. S. Veras, D. M. Dantas and C. A. S. Almeida, “Graviton KK resonant mode in the correction of the Newton’s law from 6D braneworlds,” arXiv:1610.08124 [hep-th].

# Capítulo 1

## Introdução

Na última década, os modelos de dimensões extras tornaram-se um dos principais alicerces que sustentam o extraordinário e descomunal edifício teórico de conhecimentos da física de altas energias. Em particular, o modelo Randall-Sundrum (RS) trouxe a incrível ideia de dimensões extras infinitas através da geometria não-fatorizável (warped) [1].

A hipótese de dimensões extras mudou a forma como entendemos o Universo através do conceito de mundos-brana (hipersuperfícies) inserido em um espaço-tempo de dimensão maior (bulk). O conceito de mundo-brana surgiu em teorias de cordas [2] e em modelos de unificação [3] produzindo interessantes explicações para fenômenos fundamentais em física de altas energias, por exemplo, o problema da hierarquia [4, 5], a origem da matéria escura [6], o pequeno valor da constante cosmológica [7] e a aceleração cósmica [8]. No entanto, a vertente de pesquisas mais promissoras considerando cenários de dimensões extras, encontra-se presente em modelos que tem como propósito unificar as quatro interações fundamentais da natureza em um único corpo teórico e auto consistente. O mais forte candidato a teoria de campo unificado é a teoria das supercordas. Esta teoria tem como propriedade principal o de substituir a particularidade pontual das partículas elementares (elétrons, quarks, fótons, bósons massivos vetoriais, glúons, grávitons, neutrinos ...) por estruturas unidimensionais chamadas de cordas. Nesta teoria a cada modo de vibração da corda corresponderia a uma partícula elementar.

Contudo, para que a teoria das supercordas tenha coerência, é necessária a existência, além do tempo, de seis dimensões espaciais extras mais às três dimensões espaciais conhecidas. Quando acopladas, as supercordas formariam estruturas bidimensionais, as branas.

Faremos agora um breve resumo de alguns dos principais desenvolvimentos teóricos da física de altas energias do século passado. Em seguida, apresentaremos nossa proposta de tese.



## 1.1 A teoria quântica de campos

Um dos grandes sucessos da ciência física do século XX foi aclarar, até um certo limite, a realidade subjacente da natureza através de quatro interações fundamentais (reducionismo): a interação eletromagnética, a interação gravitacional, a interação nuclear fraca e a interação nuclear forte. As interações nucleares (fraca e forte) e eletromagnética podem ser elucidadas através da Teoria Quântica de Campos (TQC), pois, estas interações podem ser compreendidas de forma quântica e relativística. A gravitação encontra-se fora dos domínios da TQC, uma vez que, ainda não foi possível quantizá-la de forma totalmente satisfatória.

A TQC constitui de um formalismo matemático consistente que reúne dois dos principais sustentáculos da física: a mecânica quântica e a relatividade restrita, servindo de fundamentação teórica para a física das partículas elementares.

Uma das principais razões que motivaram o desenvolvimento da TQC foi a necessidade de encontrar uma teoria que harmonizasse a mecânica quântica e a teoria da relatividade especial, assim como, uma teoria que previsse a variação do número de partículas (criação e destruição de partículas).

A TQC surgiu no final da década de 1920 como aplicação das regras de quantização de Heisenberg ao campo de radiação [9]. O fóton surge como resultado do processo de quantização do campo de radiação. Dessa forma, uma vez que há criação de partículas no processo de quantização de campos, podemos imaginar que são os campos, e não as partículas, as entidades fundamentais da natureza. Em TQC as interações são descritas por produtos de campos no mesmo ponto do espaço-tempo (localidade). A imposição da localidade constitui a forma mais simples de compatibilizar a estrutura das interações com a teoria da relatividade restrita ou especial. Entretanto, produtos de campos calculados no mesmo ponto não estão bem definidos. Os métodos perturbativos da teoria manifestam o surgimento de integrais divergentes.

A solução para o problema dos infinitos nos cálculos perturbativos da teoria veio com a descoberta da renormalização. As cargas e as massas das partículas são, em geral, modificadas pela interação. O elétron, por exemplo, está sempre rodeado por uma nuvem de fótons devido ao campo eletromagnético que ele próprio produz. Dessa forma ele está constantemente interagindo, emitindo e absorvendo fótons, modificando dessa forma a sua auto-energia [9]. O fóton emitido pelo elétron consegue polarizar o vácuo, produzindo pares partículas/anti-partículas que blindam parcialmente o elétron, modificando a sua carga efetiva. A carga observável deve incorporar o efeito da polarização do vácuo.

## 1.2 Interação eletromagnética

Em linguagem da TQC a interação eletromagnética é compreendida a luz da eletrodinâmica quântica (Q.E.D. - *Quantum Electrodynamics*), que se constitui na teoria científica mais bem testada da física. A eletrodinâmica quântica descreve de forma bas-

tante precisa como partículas portadoras de carga elétrica interagem mediante a troca de fótons virtuais. A eletrodinâmica quântica (teoria de gauge abeliana) é descrita pelo grupo  $U(1)$ . O campo de gauge  $A_\mu$  (campo eletromagnético) media a interação entre partículas de spin  $1/2$  (elétrons e pósitrons, por exemplo). Podemos representar este tipo de interação mediante a densidade lagrangeana dada por:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D^\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

onde  $\psi$  e seu adjunto  $\bar{\psi}$  são os campos que representam partículas eletricamente carregadas, especificamente, elétrons e pósitrons,  $\gamma^\mu$  as matrizes de Dirac,  $F^{\mu\nu}$  o campo eletromagnético calculado por:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (1.2)$$

e  $D_\mu$  é a derivada covariante de gauge dada por:

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu. \quad (1.3)$$

Mediante a derivada covariante de gauge conseguimos obter o termo de interação da teoria  $\bar{\psi}\gamma^\mu eA_\mu\psi$  (vértice de interação). Richard Feynmann, Sin-Itiro Tomonaga e Julian Schwinger foram os principais físicos que desenvolveram a eletrodinâmica quântica. Pelas suas descobertas eles receberam o prêmio Nobel de Física em 1965.

### 1.3 Interação eletrofraca

No final do século XIX, o físico e matemático escocês James Clerk Maxwell descobriu que os fenômenos da eletricidade e os fenômenos do magnetismo, são manifestações distintas de um só tipo de interação: a interação eletromagnética. Glashow, Salam e Weinberg desvendaram o capítulo seguinte nessa história de unificação de teorias físicas. A teoria da interação nuclear fraca (responsável pelo decaimento radioativo), à qual estão sujeitas todas as partículas, foi formulada por analogia com a teoria da eletrodinâmica quântica. As partículas de calibre (gauge) da teoria são os  $W^+$ ,  $W^-$  e  $Z^0$ , que, ao contrário dos fótons, possuem massa ou energia de repouso diferente de zero. Partículas mediadoras de interação (partículas de gauge) massivas decaem rapidamente e podem ser analisadas com base no potencial de curto alcance de Yukawa [10]

$$V(r) = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-m_\phi r}}{r}, \quad (1.4)$$

onde  $g$  é a constante de acoplamento. Portanto as partículas de gauge  $W^+$ ,  $W^-$  e  $Z^0$  são todas de curto alcance. Se tomarmos o limite  $m \rightarrow 0$  no potencial de Yukawa, temos:

$$V(r) = -\frac{g^2}{4\pi r}, \quad (1.5)$$

que é exatamente um potencial de longo alcance (podendo ser Coulombiano ou Newtoniano dependendo do valor de  $g$ ).

O modelo foi tão bem sucedido que Glashow, Salam e Weinberg mostraram que a interação eletromagnética e a interação nuclear fraca são, na verdade, partes de uma mesma interação: a interação eletrofraca. Este modelo levou a previsões bem detalhadas das partículas de gauge da teoria. As previsões de suas massas foram as seguintes: as partículas  $W$ 's possuem massas da ordem de  $80,6 GeV/c^2$  e a partícula  $Z^0$  da ordem de  $91,2 GeV/c^2$ . O grupo de simetria da teoria é o grupo de calibre  $SU(2) \otimes U(1)$ . Por suas contribuições a física de altas energias, Glashow, Salam e Weinberg foram laureados com o prêmio Nobel de Física em 1979.

## 1.4 Interação nuclear forte

A interação nuclear forte, isto é, a força que mantém os quarks unidos para formar os hádrons, são mediadas pelas partículas de gauge chamadas de glúons e, similarmente aos fótons, não possuem energia de repouso. A interação que age entre os quarks é chamada de cor e a teoria associada, por analogia com a eletrodinâmica quântica (Q.E.D.), recebeu o nome de cromodinâmica quântica (Q.C.D. - *Quantum Chromodynamics*). Ela é uma teoria que descreve a interação entre quarks e glúons. Proposta primeiramente nos anos 70 por Politzer, Wilczek e Gross, matematicamente, a Q.C.D. é uma teoria de calibre não abeliana, dotada de um grupo de simetria chamado  $SU(3)$  (grupo de matrizes complexas  $3 \times 3$  unitárias e com determinante 1). As teorias que reúnem em um só corpo teórico as três teorias quânticas de campo são conhecidas como grandes teorias da unificação (G.U.T. - *Grand Unified Theory*). Por seus trabalhos Politzer, Wilczek e Gross foram agraciados com o prêmio Nobel de Física em 2004.

## 1.5 Interação gravitacional

Neste trabalho de tese iremos estudar o comportamento do campo gravitacional em cenários de branas espessas. A gravitação é a mais fraca interação conhecida até o presente momento no Universo. Para termos ideia, entre duas partículas de mesma massa e mesma carga, a força gravitacional é aproximadamente da ordem de  $10^{-40}$  vezes mais fraca que a força eletromagnética. Embora mais fraca do que todas as forças conhecidas, a gravidade é universal, ou seja, acopla-se a tudo. Uma outra propriedade da gravitação é que ela é somente atrativa. Não existe repulsão gravitacional. Até o presente momento a teoria que

melhor descreve a gravitação é a Relatividade Geral (RG), que possui como postulado fundamental, o princípio de equivalência. De forma geral, este princípio estabelece que:

1. O movimento de uma partícula-teste em um campo gravitacional é independente de sua massa ou composição;
2. Não há experimentos locais que possam fazer a distinção entre um movimento em queda livre, sem rotação, em um campo gravitacional uniforme, do movimento no espaço na ausência de um campo gravitacional;
3. Um referencial linearmente acelerado, relativamente a um referencial inercial é localmente idêntico a um referencial em repouso em um campo gravitacional.

Com base nas leis de Newton, para uma partícula imersa em um campo gravitacional constante (localmente uniforme), temos:

$$m_i \mathbf{a} = m_g \mathbf{g}, \quad (1.6)$$

onde  $m_i$  e  $m_g$  são respectivamente, as massas inercial e gravitacional da partícula. Com extrema precisão podemos escrever  $m_i = m_g = m$ , o que nos leva a afirmar que  $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ . Um outro postulado base em RG é o princípio da covariância geral. Este princípio afirma que uma equação é válida em RG si:

1. Esta equação é válida na ausência da gravidade, isto é, concorda com a relatividade restrita quando  $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ ;
2. A equação é invariante por uma transformação geral de coordenadas  $x \rightarrow x'$  (invariância por difeomorfismo).

Um conteúdo incomensuravelmente importante em RG consiste de um assunto de natureza dinâmica, que correlaciona à curvatura da geometria do espaço-tempo ao conteúdo de matéria-energia. Representando a curvatura do espaço-tempo pelo tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  e o conteúdo de matéria-energia pelo tensor momento-energia  $T_{\mu\nu}$ , escreve-se:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.7)$$

que constitui na equação de campo de Einstein para a gravitação. Na equação acima  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein,  $g_{\mu\nu}$  é o tensor métrico e  $R$  é o escalar de Ricci.

Para resolvermos as equações de Einstein seguiremos a notação usual da Teoria da Relatividade Geral. Pode-se definir uma quantidade fundamental para deslocamentos paralelos em uma determinada variedade [11], a conexão afim

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\beta}(\partial_{\nu}g_{\mu\beta} + \partial_{\mu}g_{\nu\beta} - \partial_{\beta}g_{\mu\nu}), \quad (1.8)$$

também conhecida como símbolos de Christoffel. O escalar de curvatura é calculado da seguinte forma:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (1.9)$$

Calculamos o tensor de Ricci mediante a seguinte expressão:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\beta\lambda}^\lambda. \quad (1.10)$$

Até o surgimento da teoria da relatividade de Einstein, parecia completamente fora de propósito que o Universo tivesse mais de três dimensões [9]. Na teoria da relatividade restrita, o espaço, antes pensado tridimensionalmente, tem agora que ser tratado quadridimensionalmente com três dimensões espaciais e uma dimensão temporal formando uma estrutura denominada de *continuum* de espaço-tempo 4-dimensional. A geometria deixa de ser Euclidiana passando a ser chamada de geometria Minkowskiana (devido ao matemático alemão Hermann Minkowski). Nessa geometria, o tempo passa a ser concebido como uma quarta dimensão, o que foi fundamental para a construção da nova teoria da gravitação. Na Relatividade Geral considerada por muitos como a maior realização intelectual humana, a geometria deixa de ser Minkowskiana para ser Riemanniana (devido ao matemático alemão Riemann). Nesta teoria, a gravitação passou a ser pensada como consequência da deformação da geometria do *continuum* espaço-tempo 4-dimensional e não mais como uma força física.

A seguir, a tabela 1.1 mostra um resumo comparativo entre as intensidades das três interações estudadas pela TQC (corpo de conhecimentos fortemente concatenados que fornecem a fundamentação teórica para o Modelo Padrão da física das partículas elementares) com a Gravitação, bem como os nomes dos seus mediadores, as teorias que as descrevem e seus decaimentos com a distância. Como observamos nesta tabela, existe uma relação inversa entre intensidade e o domínio das forças.

Interação	Mediador	Teoria	$\propto r$	Magnitude
Forte	Glúons	Q.C.D.	variável	$10^{38}$
Eletromagnética	Fótons	Q.E.D.	$1/r^2$	$10^{36}$
Fraca	Bósons W e Z	Teoria Eletrofraca	$e^{-m_b r}/r$	$10^{25}$
Gravitacional	Gráviton	Relatividade Geral	$1/r^2$	1

Tabela 1.1: Relação entre as interações fundamentais. Q.C.D. - Cromodinâmica Quântica, a interação forte é atrativa e constante para o interior hadrônico e decai exponencialmente para o exterior. Q.E.D. - Eletrodinâmica Quântica e  $m_b$  são os valores das massas dos bósons  $W$ 's ou  $Z^0$ .

## 1.6 Modelo Kaluza-Klein

Einstein dedicou boa parte dos seus esforços nos últimos anos de vida, à procura de uma teoria do campo unificado. Para alcançar esse objetivo, precisava geometrizar o eletromagnetismo [12], obtendo, assim, uma teoria unificada das interações da física. Foi então que no início da década de vinte do século passado, Theodor Kaluza e Oscar Klein demonstraram que se o espaço-tempo postulado por Einstein e Minkowski for acrescido

de uma quinta dimensão espacial, então, usando as equações de campo de Einstein da RG, mostra-se que o campo eletromagnético pode ser visto como possuindo natureza geométrica [13]. Para explicarmos o fato de não termos observado nenhuma dimensão espacial adicional, Kaluza e Klein revelaram que a dimensão espacial extra deveria ser extremamente pequena e circular de raio aproximadamente igual ao comprimento de Planck, ou seja, da ordem de  $10^{-35} m$ . Na terminologia matemática diz-se que essas dimensões são compactas. Em seguida o modelo de Kaluza-Klein (KK) foi estendido para  $D$  dimensões [14], onde a métrica  $D$ -dimensional tem a seguinte forma:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\mu)dx^\mu dx^\nu - \gamma_{ab}dx^a dx^b. \quad (1.11)$$

Aqui  $g_{\mu\nu}$  é a métrica do mundo 4-dimensional e  $\gamma_{ab}$  é a métrica associada com  $D - 4$  dimensões extras compactas. A compactificação das dimensões extras não são observadas para energias  $E < M$ , onde  $M$  é a massa de Planck que é da ordem de  $10^{19} GeV/c^2$ . Para os estados 4-dimensionais de massa ( $\sim M$ ) manifesta-se a existência de uma torre infinita de estados.

## 1.7 Cordas

Um dos grandes objetivos da física de altas energias consiste em descobrir uma “teoria final”, da qual todo o resto possa ser derivado. Os físicos estão a procura de uma teoria que inclua tanto a gravitação quanto a teoria quântica de campos em um único corpo teórico, pois só assim poderíamos, descobrir a realidade subjacente da Natureza, ou seja, chegar em uma teoria mais completa do Universo.

A “teoria final” estaria localizada na ponta do reducionismo científico, traria a explicação última de todos os conceitos físicos, em outras palavras, seria a mais fundamental das teorias sobre a Natureza.

O interesse maior na teoria das cordas é dirigido pela enorme esperança que ela possa quantizar a gravidade e obter todos os estados reais de configuração das partículas a partir da vibração de filamentos unidimensionais de energia. Para cada partícula elementar do Universo existe um padrão de vibração particular das cordas. Embora não esteja completamente consolidada, a teoria mostra sinais promissores de plausibilidade [9].

O movimento da corda cria uma superfície bidimensional chamada de folha mundo. Essa superfície possui uma métrica  $g_{ab}$  induzida pela métrica do espaço-tempo  $\eta_{\mu\nu}$ :

$$g_{ab} = \eta_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu, \quad (1.12)$$

onde  $a, b = 0, 1$ . Uma corda bosônica se propagando num espaço-tempo de Minkowski pode ser descrita pela ação de Nambu-Goto,

$$S = -T \int dA. \quad (1.13)$$

Como  $dA = d\tau d\sigma$ , temos:

$$S = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-g}, \quad (1.14)$$

que nos fornece a área da folha mundo deixada pela corda. Temos que  $T$  é a tensão da corda e  $g = \det g_{ab}$  é o determinante da métrica induzida.

Um aspecto bastante interessante da teoria das cordas é que ela prediz o número de dimensões que o Universo deve possuir. A teoria permite calcular o número de dimensões espaço-temporais a partir dos seus princípios fundamentais. A teoria das cordas bosônicas possui 26 dimensões, enquanto a teoria das supercordas envolve 10 ou 11 dimensões. Este problema é resolvido usando a compactificação das dimensões extras.

## 1.8 Mundos-brana

Outra possibilidade é que nós estejamos presos em um subespaço com  $(3 + 1)$  - dimensões em um Universo com dimensões mais altas. Esta teoria envolve objetos chamados de branas. As branas são objetos estendidos que surgem na teoria das cordas. Dessa forma uma 1-brana é uma corda, uma 2-brana é uma membrana, uma 3-brana possui três dimensões estendidas e assim por diante. De forma geral uma  $p$ -brana possui  $p$  dimensões estendidas. A possibilidade de estarmos vivendo em uma 3-brana constitui um dos grandes resultados da teoria das cordas.

Em alguns cenários de mundos-brana todos os campos do modelo padrão são derivados de padrões vibratórios de cordas abertas, de modo que esses campos estão presos na 3-brana. Porém os grávitons derivam de padrões vibratórios de cordas fechadas. Dessa forma os grávitons não estão estritamente confinados pelas branas, podendo deslocar-se pelas dimensões extras. Uma outra forma de abordarmos esta questão, é lembrarmos que de acordo com a RG, a gravidade é uma manifestação do próprio espaço-tempo, podendo assim “vazar” para fora da 3-brana. Com isso, poderíamos então, explicar o fato da gravitação mostrar-se tão fraca na 3-brana.

## 1.9 A hierarquia de gauge

O problema da hierarquia das interações fundamentais consiste basicamente de uma diferença quantitativa entre as escalas eletrofraca e de Planck.

$$\frac{M_{Planck}}{M_{eletrofraca}} \sim 10^{16} \quad (1.15)$$

baseadas nas medidas das constantes de acoplamento. Este problema pode ser pensado de duas maneiras:

1. Por que a interação gravitacional é várias ordens de grandeza inferior se comparada com as demais interações fundamentais da natureza?

2. Por que existe um vazio de  $10^{16} GeV$  entre as escalas eletrofraca e de Planck (deserto de partículas)?

Uma das possibilidades para explicarmos tais divergências entre estas escalas consiste em adotarmos o conceito de mundo-brana.

## 1.10 Cenário de Arkani-Hamed-Dimopoulos-Dvali (ADD)

O conceito de dimensões extras compactas de raio microscópico foi inicialmente confrontado pelas ideias de Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali [3] sobre a vantagem de considerar dimensões extras compactas de raio macroscópico [15]. O modelo tem como principal propósito solucionar o problema da hierarquia de gauge. O modelo ADD considera  $M_{eletrofraca}$  como a escala fundamental do modelo, de tal forma que a escala de massa de Planck  $M_{Planck}$  deve ser gerada a partir da escala de massa eletrofraca. Observamos que este cenário contém apenas uma brana que simula o nosso Universo 4-dimensional, admitindo-se a existência de  $d$ -dimensões extras compactas. Vamos agora mostrar a dependência de  $M_{Planck}$  em  $D = 4$  com a geometria das dimensões extras. O modelo ADD considera que a geometria do espaço é fatorizável da seguinte forma:

$$ds_d^2 = ds_4^2 - ds_{d-4}^2. \quad (1.16)$$

A métrica desse espaço-tempo  $d$ -dimensional foi separada em duas partes, uma que constitui a métrica do Universo 4-dimensional e a outra métrica um espaço de dimensões extras.

Um importante resultado do modelo ADD é do acoplamento gravitacional 4-dimensional dado por:

$$M_{Planck}^2 = M_{Planck(4+n)}^{n+2} R^n. \quad (1.17)$$

Se fizermos  $M_{Planck(4+n)}^{n+2} \sim M_{eletrofraca}$ , onde  $M_{eletrofraca} = 1 TeV$  e sabendo que  $M_{Planck}$  é da ordem de  $10^{16} TeV$  e se escolhermos  $n = 1$ , encontramos um valor de  $R \sim 10^{13} cm$ , o que deve ser descartado para não haver nenhuma discordância entre o modelo e o que é observado na gravitação Newtoniana para esta distância. No entanto, se escolhermos um valor de  $n = 2$ ,  $R$  assume um valor da ordem de milímetros, um resultado razoável do ponto de vista fenomenológico. Portanto, o referido modelo consegue estabelecer uma relação de hierarquia entre  $M_{Planck}$  e  $M_{eletrofraca}$  usando a geometria do espaço-tempo.

## 1.11 Modelo Randall-Sundrum tipo-1 (RS-1)

Em 1999, L. Randall e R. Sundrum [5] propuseram um cenário alternativo ao ADD [3]. O primeiro modelo conhecido como RS-1 [5] é construído com um bulk de curvatura constante em cinco dimensões em um espaço-tempo do tipo Anti-de Sitter, ou simples-



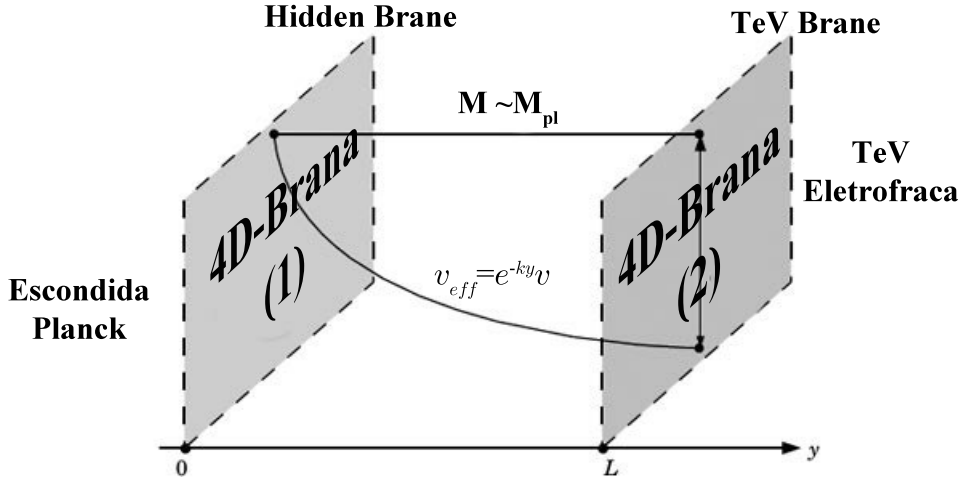


Figura 1.1: Modelo RS-1

mente  $AdS_5$ . A figura 1.1 mostra o modelo RS-1 com suas duas branas paralelas. Este tipo de espaço foi introduzido originalmente em 1917 por W. de Sitter apresentando novas soluções para as equações de Einstein pela adição da constante cosmológica  $\Lambda$  nas equações de campo de vácuo ( $T_{\mu\nu} = 0$ ).

O modelo RS-1 apresenta uma solução bem mais simples em relação as teorias que modelam o nosso Universo em uma brana mergulhada em dimensões mais altas, e podemos citar como aspectos mais importantes do modelo:

1. existência de apenas uma dimensão extra não microscópica compactificada, uma variedade de simetria  $Z_2$  na qual pontos opostos com respeito a quinta dimensão podem ser identificados;
2. existência de duas membranas localizadas em pontos diametralmente opostos dessa variedade;
3. a geometria do volume multidimensional não é mais considerada plana. Em vez disso adota-se uma geometria 5-dimensional ( $4 + 1$ ) Anti-de Sitter ( $AdS_5$ );
4. uma hierarquia exponencial gerada pela métrica determina a escala de massa eletrofraca a partir da escala de Planck

$$m \equiv e^{-kr_c\pi} m_0. \quad (1.18)$$

A métrica utilizada no modelo não é fatorizável (warped) e a parte 4-dimensional é multiplicada por um fator de “warp”, que é função da dimensão extra,

$$ds^2 = e^{-2\sigma(\phi)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2 \quad (1.19)$$

onde  $x^\mu$  são as coordenadas em quatro dimensões  $-\pi \leq \phi \leq \pi$  é a coordenada da dimensão extra que é compacta.

Iremos agora apresentar o outro cenário, Randall-Sundrum tipo-2 (RS-2), obtido via aplicação do limite  $r_c \rightarrow \infty$  resultando em uma 3-brana com dimensão extra estendida.

## 1.12 Modelo Randall-Sundrum tipo-2 (RS-2)

A configuração de duas branas no cenário RS-1 [5] pode ser alterada introduzindo a ideia de uma dimensão extra infinita. No cenário RS-2 [1] o uso de uma métrica não-fatorizável com uma dimensão extra infinita foi o ponto chave utilizado como uma alternativa a essa compactificação. A métrica do modelo RS-2 é dada por:

$$ds^2 = e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (1.20)$$

Para localizarmos a gravidade na brana, devemos primeiramente efetuar uma perturbação na métrica de fundo de  $h_{\mu\nu}$  para, em seguida, separarmos as variáveis. A equação de movimento que encontramos depois deste processo é a seguinte:

$$\left[ \frac{-m^2}{2} e^{2k|y|} - \frac{1}{2} \partial_y^2 - 2k\delta(y) + 2k^2 \right] \psi(y) = 0. \quad (1.21)$$

Com uso desta última equação verificamos que o modo não-massivo para o gráviton é localizado na 3-brana.

O outro ponto importante é que, mesmo com  $r_c \rightarrow \infty$  a relação entre as escalas de Planck na brana e no bulk são bem definidas, tornando o modelo RS-2 útil na solução do problema da hierarquia.

Uma das principais constatações do modelo RS-2 surge na correção para o potencial gravitacional Newtoniano entre duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$  na brana

$$V(r) = G_N \frac{m_1 m_2}{r} \left( 1 + \frac{1}{r^2 k^2} \right). \quad (1.22)$$

Esta expressão tem grande valor do ponto de vista fenomenológico, uma vez que, ela nos dá uma noção de como o potencial Newtoniano pode ser modificado devido a interação de grávitons massivos com a brana. No último capítulo iremos obter correções para o potencial Newtoniano em uma geometria 6-dimensional do tipo conifold resolvido.

## 1.13 Composição da Tese

No segundo capítulo desta Tese, analisaremos o modelo Gherghetta-Shaposhnikov (GS) [14] que constitui no modelo-base de nossa pesquisa. Com base no modelo GS conseguimos realizar modificações satisfatórias em modelos de branas tipo-corda fina para cenários de branas tipo-corda espessa em seis dimensões. Este modelo, ao contrário do cenário RS, apresenta duas dimensões extras, possibilitando desta forma um espaço curvo em torno do defeito tipo corda. O modelo GS trata de um estudo sistemático de localização de gravidade em uma geometria não-fatorizável em seis dimensões, onde o nosso Universo observável é representado por uma 4-brana e as outras duas dimensões são dimensões extras, sendo uma delas compacta. A topologia do modelo GS é do tipo corda. Podemos

citar alguns exemplos de defeitos topológicos em cenários de mundos-brana. Em  $5D$ , (modelo RS, por exemplo) temos as paredes de domínio, cuja métrica é dada por [5]:

$$ds^2 = e^{-2\sigma(\phi)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2. \quad (1.23)$$

Em  $6D$ , temos (por exemplo: o modelo GS) a topologia tipo-corda, cujo intervalo entre dois pontos no espaço-tempo é dado por [14]:

$$ds_6^2 = e^{-cr}g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dr^2 - R_0^2 e^{-cr} d\theta^2. \quad (1.24)$$

Para cenários 7-dimensionais, temos como topologia os monopolos magnéticos. O modelo Roessl-Shaposhnikov pode ser citado como exemplo. A métrica deste modelo pode ser calculada a partir da seguinte expressão [16]:

$$ds^2 = M^2(\rho)g_{\mu\nu}^{(4)}dx^\mu dx^\nu + d\rho^2 + L^2(\rho)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1.25)$$

Voltando para o modelo GS, resolveremos as equações de Einstein e, em seguida, mostraremos que o referido modelo exibe uma constante cosmológica negativa. A fim de encontrarmos as equações de movimento para o gráviton, realizaremos primeiro uma perturbação na métrica de fundo e, posteriormente, faremos uma separação de variáveis para obtermos uma equação para o espectro de massa com o objetivo de efetuarmos a localização de gravidade. Por fim, estudaremos as correções para o potencial Newtoniano devido a presença dos modos massivos gravitacionais. Observaremos neste modelo, que as condições de regularidade não são satisfeitas na origem. Contudo, alguns físicos incorporaram um comportamento cônico próximo a origem e estudaram suas consequências [17, 18, 19, 20], enquanto outros tentaram suavizar este comportamento [21, 22, 23, 24].

No capítulo seguinte, exibiremos uma extensão suave do modelo GS. Mostraremos que usando um fator de warp suave, a métrica satisfaz todas as condições de regularidade. Analisaremos as propriedades geométricas e físicas deste modelo e as soluções produzidas no interior e no exterior do defeito tipo corda, permitindo correções para o modelo GS próximas da brana. Veremos que o núcleo da brana é deslocado da origem. Por meio de análise numérica encontraremos correções suaves próximo a brana para os modos massivos Kaluza-Klein (KK). Além disso, verificaremos que o potencial quântico análogo depende fortemente dos valores da constante cosmológica no bulk.

No último capítulo do nosso trabalho de pesquisa, exporemos detalhes da geometria conifold resolvido em seis dimensões. Veremos que esta geometria suaviza um defeito tipo-corda fina, transformando-a em um modelo tipo-corda espessa. Esta geometria servirá de cenário para localizarmos gravidade e efetuarmos correções no potencial Newtoniano. Em seguida, estudaremos a localização de gravidade numa 3-brana posicionada em um conifold resolvido warped transverso. Derivaremos uma expressão geral para a correção do potencial Newtoniano devido aos estados KK gravitacionais em um cenário de mundo brana tipo corda espessa. Além disso, usaremos uma abordagem numérica para obtermos

o espectro gravitacional e suas correspondentes autofunções. A partir das auto-soluções, analisaremos a influência dos parâmetros do modelo na correção do potencial Newtoniano.

# Capítulo 2

## Modelo Gherghetta-Shaposhnikov

Neste capítulo estudaremos o modelo Gherghetta-Shaposhnikov (GS) [14], que servirá de protótipo para analisarmos posteriormente cenários de branas do tipo corda espessa, bem como efetuarmos correções na lei de Newton em uma geometria 6-dimensional do tipo conifold. Este modelo ao contrário do cenário Randall-Sundrum [1, 5] (que possui uma dimensão extra), apresenta co-dimensão 2. O modelo GS trata de um estudo sistemático de localização de gravidade em uma geometria não-fatorizável em seis dimensões, onde o nosso universo observável é representado por uma brana 4-dimensional e as outras duas são dimensões extras, sendo uma delas compacta, exibindo um exemplo onde ocorre localização de gravidade. Desde então tem se argumentado que para observarmos o comportamento usual da gravidade em quatro dimensões, tais dimensões devam estar compactificadas e a localização da gravidade mostra-se como uma alternativa a essa compactificação. De forma similar ao modelo RS, no cenário GS encontra-se um modo-zero normalizável para o gráviton, e observamos uma violação da lei de Newton devido a presença de modos gravitacionais no bulk, contribuindo dessa forma, em uma correção da ordem  $\frac{1}{r^3}$  no potencial newtoniano [14]. A hierarquia entre a escala de Planck 4-dimensional e a escala de Planck 6-dimensional pode ser obtida de maneira semelhante ao modelo ADD. Partiremos da ação de Einstein-Hilbert para o campo gravitacional com constante cosmológica  $\Lambda$ . Em seguida, com a escolha de uma geometria de fundo não-fatorizável com  $D = 6$  encontraremos as equações de campo de Einstein. Uma vez encontrada as equações de movimento para o campo gravitacional, escreveremos as equações de movimento para as flutuações da métrica. Por fim, faremos a localização do modo não-massivo gravitacional, relacionaremos as escalas gravitacionais de massas, retornaremos às equações de Einstein para verificarmos o sinal da constante cosmológica, analisaremos os defeitos tipo corda e, em seguida, estudaremos a localização dos modos massivos para o gráviton, bem como a correção para o potencial Newtoniano.

Em cenários de branas 6-dimensionais podemos localizar todos os campos do modelo padrão com a vantagem (em relação aos modelos em  $5D$ ) de localizarmos o campo de calibre  $A_\mu$  sem a necessidade de introduzirmos um campo escalar auxiliar (dilatón).

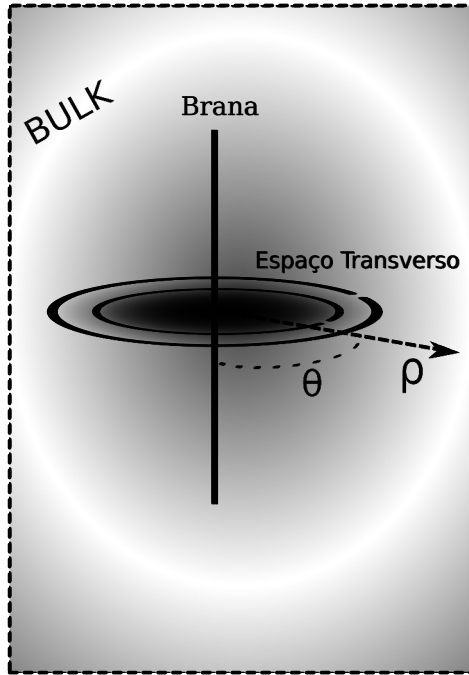


Figura 2.1: Modelo tipo-corda fina

## 2.1 Equações de Einstein para o campo gravitacional em seis dimensões no modelo GS

No modelo GS estudaremos a localização de gravidade em uma 3-brana com estrutura específica (defeito do tipo corda local) em um espaço-tempo seis dimensional com constante cosmológica negativa. Inicialmente tomemos a ação de Einstein-Hilbert para o campo gravitacional com constante cosmológica  $\Lambda$ :

$$S_g = \int_{\mathcal{M}_6} \left( \frac{1}{2\kappa_6} R - \Lambda + \mathcal{L}_m \right) \sqrt{-g} d^6x, \quad (2.1)$$

onde  $\kappa_6 = 8\pi/M_6^4$ ,  $M_6^4$  é a massa de Planck no bulk,  $g$  é o determinante da métrica em todo o espaço-tempo e  $R$  é o escalar de Ricci. O modelo GS apresenta o seguinte ansatz para a métrica de fundo:

$$ds_6^2 = \sigma(\rho)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - d\rho^2 - \gamma(\rho)d\theta^2, \quad (2.2)$$

onde  $\rho$  e  $\theta$  pertencem respectivamente aos seguintes intervalos  $\rho \in [0, \infty)$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Essa métrica nos mostra que as dimensões extras possuem simetria cilíndrica ou axial em relação a brana e por isso ela é chamada tipo corda. A figura 2.1 exibi uma representação do modelo tipo-corda fina.

Aplicando o princípio variacional na a ação acima encontramos as equações de campo de Einstein em  $D = 6$ :

$$R_{AB} - \frac{R}{2}g_{AB} = -\kappa_6(\Lambda g_{AB} + T_{AB}). \quad (2.3)$$

Calculando os símbolos de Christoffel e em seguida o tensor de curvatura de Ricci, encontramos o escalar de curvatura dado por:

$$R = \frac{1}{\sigma} \tilde{R} + \frac{4\sigma''}{\sigma} - \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 + \frac{2\sigma' \gamma'}{\sigma \gamma} + \frac{\gamma''}{\gamma} + \left( \frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2, \quad (2.4)$$

onde  $\tilde{R}$  é o escalar de curvatura na brana. O modelo GS assume que as componentes não-nulas do tensor momento-energia são dadas por:

$$T_\nu^\mu = t_0(\rho) \delta_\nu^\mu, \quad (2.5)$$

$$T_\rho^\rho = t_\rho(\rho), \quad (2.6)$$

$$T_\theta^\theta = t_\theta(\rho), \quad (2.7)$$

onde as funções de fonte  $f_0$ ,  $f_\rho$  e  $f_\theta$  dependem unicamente da coordenada radial  $\rho$ . Assumiremos também que as soluções são invariantes de Poincaré em  $D = 4$ . Usando o ansatz métrico de simetria cilíndrica e o tensor momento-energia  $T_{AB}$ , encontramos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\frac{3}{2} \frac{\sigma''}{\sigma} - \frac{1}{4} \left( \frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 + \frac{3}{4} \frac{\sigma' \gamma'}{\sigma \gamma} + \frac{1}{2} \frac{\gamma''}{\gamma} = -\frac{1}{M_6^4} [\Lambda + f_0(\rho)] + \frac{1}{M_p^2} \frac{2\Lambda_{phys}}{\sigma}, \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{4} \left( \frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{\sigma' \gamma'}{\sigma \gamma} = -\frac{1}{M_6^4} [\Lambda + f_\rho(\rho)] + \frac{1}{M_p^2} \frac{2\Lambda_{phys}}{\sigma}, \quad (2.9)$$

$$2 \frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 = -\frac{1}{M_6^4} [\Lambda + f_\theta(\rho)] + \frac{1}{M_p^2} \frac{2\Lambda_{phys}}{\sigma}, \quad (2.10)$$

onde  $\sigma' = \partial\sigma/\partial r$ ,  $\gamma' = \partial\gamma/\partial\gamma$  e  $\Lambda_{phys}$  representa a constante cosmológica física 4-dimensional. A equação de Einstein na brana é dada por:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \frac{1}{M_p^2} (\Lambda_{phys} g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}). \quad (2.11)$$

Na origem, exigiremos que nossa solução atenda as condições de contorno:

$$\sigma(0) = 1, \quad \sigma'(0) = 0, \quad (2.12)$$

$$\gamma(0) = 0, \quad (\sqrt{\gamma(0)})' = 1, \quad (2.13)$$

onde  $'$  indica a derivada  $\partial_\rho$ .

No modelo GS temos os seguintes fatores de “warp”:

$$\sigma(r) = e^{-c\rho} \quad , \quad \gamma(\rho) = R_0^2 \sigma(\rho). \quad (2.14)$$

Como podemos verificar estes fatores de “warp” atendem apenas a primeira condição de contorno. Com esta solução, a métrica do espaço-tempo poderá ser escrita da seguinte

forma:

$$ds_6^2 = e^{-c\rho} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - d\rho^2 - R_0^2 e^{-c\rho} d\theta^2, \quad (2.15)$$

sendo  $R_0$  uma escala de comprimento arbitrária. O escalar de Ricci é calculado da seguinte forma:

$$R = \tilde{R}e^{c\rho} + \frac{15}{2}c^2 \quad (2.16)$$

Considerando soluções de vácuo, temos  $\tilde{R} = 0$ , ou seja, a brana é Minkowskiana o que implica que o escalar de curvatura no bulk é constante e igual a  $15/2c^2$ . Portanto, podemos também afirmar que a fonte desta geometria na brana é nula

$$T_\nu^\mu = f_0(\rho)\delta_\nu^\mu = 0. \quad (2.17)$$

Substituindo as equações (2.12) em (2.8), (2.9) e (2.10), encontramos um sistema de três equações algébricas:

$$\frac{5}{2}c^2 = -\frac{1}{M_6^4}[\Lambda + f_0(\rho)] + \frac{1}{M_p^2} \frac{2\Lambda_{phys}}{\sigma}, \quad (2.18)$$

$$\frac{5}{2}c^2 = -\frac{1}{M_6^4}[\Lambda + f_\rho(\rho)] + \frac{1}{M_p^2} \frac{2\Lambda_{phys}}{\sigma}, \quad (2.19)$$

$$\frac{5}{2}c^2 = -\frac{1}{M_6^4}[\Lambda + f_\theta(\rho)] + \frac{1}{M_p^2} \frac{2\Lambda_{phys}}{\sigma}. \quad (2.20)$$

Restringiremos ao caso em que a constante cosmológica 4-dimensional é nula ( $\Lambda_{phys} = 0$ ). Considerando soluções de vácuo  $T_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu f_0(\rho) = 0$ , e observando que as duas outras condições também devem ser satisfeitas:

$$T_\rho^\rho = f_\rho(\rho) = 0, \quad (2.21)$$

$$T_\theta^\theta = f_\theta(\rho) = 0, \quad (2.22)$$

chegamos ao seguinte resultado:

$$c = \sqrt{\frac{2(-\Lambda)}{5 M_6^4}}. \quad (2.23)$$

Claramente, a solução com exponencial negativa requer uma constante cosmológica negativa, o que nos leva a concluir que a geometria do espaço-tempo do modelo GS, é do tipo  $AdS_6$ , uma vez que, nesse cenário, o escalar de curvatura é constante.

## 2.2 Localização de gravidade no modelo GS

Iremos agora estudar localização de gravidade em uma 3-brana considerando uma geometria 6-dimensional. Em [25], encontramos também um exemplo de localização de gravidade em uma geometria 6-dimensional. Partiremos agora das equações de movimento para as flutuações da métrica linearizadas. Nos concentraremos unicamente na localização



dos modos de spin-2 e não consideraremos os modos escalares, os quais são necessários ao estudo do encurvamento da brana. Para as flutuações da forma

$$h_{\mu\nu} = \Phi(z)h_{\mu\nu}(x), \quad (2.24)$$

onde  $z = (\rho, \theta)$  e  $\partial^2 h_{\mu\nu}(x) = m_0^2 h_{\mu\nu}(x)$ , nós podemos separar as variáveis usando a seguinte definição:

$$\Phi(z) = \sum_{lm} \phi_m(\rho) e^{il\theta}. \quad (2.25)$$

Os modos radiais satisfazem a seguinte equação:

$$-\frac{e^{3\rho/2}}{R_0} \partial_\rho [\sigma^2 \sqrt{\gamma} \partial_\rho \phi_m] = m^2 \phi_m, \quad (2.26)$$

onde  $m_0^2 = m^2 + l^2/R_0^2$  dizem respeito às contribuições do momento angular orbital  $l$ . São impostas as seguintes condições de contorno para a função  $\phi_m$  (espera-se que no contorno do espaço o campo tenha a mesma simetria que na origem):

$$\phi'_m(0) = \phi'_m(\infty) = 0. \quad (2.27)$$

onde os modos  $\phi_m$  satisfazem a seguinte condição de ortonormalidade:

$$\int_0^\infty e^{-c\rho} R_0 e^{-c\rho/2} \phi_m^* \phi_n d\rho = \delta_{mn}. \quad (2.28)$$

Usando a solução específica (2.12) na equação (2.24) e separando as variáveis, encontramos a seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2}{d\rho^2} \phi_m(\rho) - \frac{5c}{2} \frac{d}{d\rho} \phi_m(\rho) + m^2 e^{c\rho} \phi_m(\rho) = 0, \quad (2.29)$$

Quando  $m = 0$  nós verificamos claramente que  $\phi_0(\rho) = \text{constante}$  é uma solução. O modo-zero satisfaz a seguinte condição de orto-normalização:

$$R_0 \int_0^\infty e^{-3c\rho/2} \phi_m^* \phi_n d\rho = \delta_{mn}. \quad (2.30)$$

A função de onda no espaço plano pode ser definida da seguinte forma:

$$\psi_m = e^{-3c\rho/4} \phi_m. \quad (2.31)$$

Para o modo-zero, a função de onda é então obtida através da equação abaixo

$$\psi_0(\rho) = \sqrt{\frac{3c}{2R_0}} e^{-3c\rho/4}, \quad (2.32)$$

com isso mostramos que o modo-zero gravitacional é localizado próximo a origem ( $\rho = 0$ )

e normalizável. A expressão geral da massa de Planck na brana  $M_p$  em termos da massa de Planck no bulk  $M_6$ , é

$$M_p^2 = 2\pi M_6^4 R_0 \int_0^\infty e^{-3c\rho/2}. \quad (2.33)$$

Como a integral acima converge, isso implica, que o volume do espaço transversal é finito. Analisaremos agora como os modos massivos do gráviton modificam o potencial gravitacional Newtoniano na 3-brana. Para calcularmos essa contribuição temos que necessariamente obter a função de onda para os modos massivos na origem. Os autovalores dos modos massivos podem ser obtidos impondo as condições de contorno (2.25) sobre as soluções da equação diferencial (2.27). As soluções de (2.27) para os modos massivos são dadas por:

$$\phi_m(\rho) = e^{(5/4)c\rho} \left[ C_1 J_{5/2} \left( \frac{2m}{c} e^{(c/2)\rho} \right) + C_2 Y_{5/2} \left( \frac{2m}{c} e^{(c/2)\rho} \right) \right], \quad (2.34)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes arbitrárias e  $J_{5/2}$  e  $Y_{5/2}$  são as funções de Bessel que podem ser expressas em termos de funções mais elementares. No limite  $\rho \rightarrow \infty$ , as soluções para os modos massivos crescem exponencialmente. Uma forma de controlar este tipo de comportamento é o de introduzir uma distância radial finita de corte  $\rho_{max}$ . Impondo as condições de contorno (2.25) para  $\rho = \rho_{max}$  encontramos um espectro discreto de massa, onde para um inteiro  $n$  suficientemente grande encontramos

$$m_n \simeq c \left( n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} e^{-(c/2)\rho_{max}}. \quad (2.35)$$

Com este espectro discreto de massa verificamos que o módulo quadrado da autofunção calculada na origem é dada por:

$$\phi_{m_n}^2(0) = \frac{4}{cR_0} m_n^2 e^{-(c/2)\rho_{max}}. \quad (2.36)$$

Sobre uma 3-brana o potencial gravitacional entre duas massas pontuais  $m_1$  e  $m_2$  devido a contribuição dos modos discretos massivos é dado por:

$$\Delta V(r) \simeq G_N \frac{m_1 m_2}{r} \sum_n e^{-m_n r} \frac{8}{3c^2} m_n^2 e^{-(c/2)\rho_{max}}, \quad (2.37)$$

onde  $G_N$  é a constante de Newton. No limite em que  $r_{max} \rightarrow \infty$ , o espectro discreto se converte para uma integral. A contribuição para o potencial gravitacional Newtoniano será dado por:

$$\Delta V(r) \simeq \frac{16G_N}{3\pi c^3} \frac{m_1 m_2}{r} \int_0^\infty dm m^2 e^{-mr} = \frac{32G_N}{3\pi c^3} \frac{m_1 m_2}{r^4}. \quad (2.38)$$

Percebemos que a correção no potencial Newtoniano para o conjunto de estados contínuos no bulk decrescem com  $1/r^3$ .

No último capítulo deste trabalho iremos obter uma correção para o potencial gravitacional Newtoniano entre duas partículas massivas  $M_1$  e  $M_2$  na 3-brana devido as contribuições massivas de Kaluza-Klein em uma geometria do tipo conifold.

# Capítulo 3

## Mundo-Brana tipo Corda Espessa Suave em Seis Dimensões

Neste capítulo apresentaremos uma extensão suave do modelo GS. Mostraremos que usando um fator de warp suave, a métrica satisfaz todas as condições de regularidade. Analisaremos as propriedades geométricas e físicas deste modelo e as soluções produzidas no interior e no exterior do defeito tipo corda, permitindo correções para o modelo GS próximas da brana. Veremos que o núcleo da brana é deslocado da origem. Por meio de análise numérica encontraremos correções suaves próximo a brana para os modos massivos Kaluza-Klein (KK). Além disso, verificaremos que o potencial quântico análogo depende fortemente dos valores da constante cosmológica no bulk.

### 3.1 Geometria tipo corda suave e estendida

Nesta seção revisaremos as principais propriedades de modelos de brana tipo corda para em seguida propormos uma solução mais completa.

Uma brana tipo-corda  $\mathcal{M}_3$  é uma variedade Lorentziana com simetria cilíndrica sobre uma variedade  $\mathcal{M}_2$  ( $\mathcal{M}_2$  é uma variedade Riemanniana 2-dimensional). Definindo um sistema de coordenadas radial gaussiana  $\rho \in [0, \infty)$ , e uma coordenada angular  $\theta \in [0, 2\pi]$ , um ansatz bem conhecido de um mundo-brana não-fatorizável  $\mathcal{M}_6 = \mathcal{M}_p \times \mathcal{M}_2$  é dado por [14, 25, 26, 27, 28, 29, 30]

$$\begin{aligned} ds^2 &= G_{AB}(x^\zeta, \rho, \theta) dx^A dx^B \\ &= \sigma(\rho) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + d\rho^2 + \gamma(\rho) d\theta^2, \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde  $\sigma$ , é chamada de função warp,  $x^\zeta$  são as coordenadas sobre a brana,  $(\rho, \theta)$  são as coordenadas da variedade transversa e  $\gamma$  é um fator angular.

A ação para o campo gravitacional é definido como

$$S_g = \int_{\mathcal{M}_6} \left( \frac{1}{2\kappa_6} R - \Lambda + \mathcal{L}_m \right) \sqrt{-g} d^6x, \tag{3.2}$$

onde  $\kappa_6 = 8\pi/M_6^4$ ,  $M_6^4$  é a massa de Planck 6-dimensional no bulk,  $\mathcal{L}_m$  é o Lagrangiano de matéria para fonte da geometria,  $R$  é o escalar de Ricci e  $g$  é o determinante da métrica em todo o espaço-tempo. Note que nessa convenção, a constante cosmológica  $\Lambda$  no bulk tem dimensão  $[\Lambda] = L^{-6} = M^6$ .

Consideraremos um ansatz com simetria cilíndrica para o tensor momento-energia [14, 25]:

$$T_\nu^\mu = t_0(\rho)\delta_\nu^\mu, \quad (3.3)$$

$$T_\rho^\rho = t_\rho(\rho), \quad (3.4)$$

$$T_\theta^\theta = t_\theta(\rho), \quad (3.5)$$

onde

$$T_{AB} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial g^{AB}}. \quad (3.6)$$

Partindo da ação (3.2), obtemos as equações de Einstein

$$R_{AB} - \frac{R}{2}g_{AB} = -\kappa_6(\Lambda g_{AB} + T_{AB}). \quad (3.7)$$

Para assegurarmos uma 3-brana suave em  $\rho = 0$ , adotaremos as seguintes condições usuais de regularidade [31, 32, 33, 34],

$$\sigma(0) = 1, \quad \sigma'(0) = 0, \quad (3.8)$$

$$\gamma(0) = 0, \quad (\sqrt{\gamma(0)})' = 1, \quad (3.9)$$

onde  $'$  indica a derivada  $\partial_\rho$ .

Faremos agora um breve resumo das principais propriedades do modelo GS [14, 35]. Vimos no capítulo anterior que o fator de warp e a componente métrica angular são dadas por:

$$\sigma(\rho) = e^{-c\rho} \quad \text{e} \quad \gamma(\rho) = R_0^2\sigma(\rho), \quad (3.10)$$

onde  $c \in \mathbb{R}$  é uma constante cuja dimensão é  $[c] = L^{-1}$  e  $R_0$  é uma escala de comprimento arbitrária. O ansatz (3.10) somente satisfaz a primeira condição de regularidade.

Como discutido anteriormente no modelo GS, as equações de Einstein no vácuo com constante cosmológica, [14] fornece,

$$R = 3\kappa_6\Lambda. \quad (3.11)$$

O escalar de curvatura para o ansatz (3.8) é

$$R = -\frac{15}{2}c^2, \quad (3.12)$$

que fornece uma relação bem conhecida [14, 25]

$$c^2 = -\frac{2}{5}\kappa_6\Lambda. \quad (3.13)$$

Como resultado, a equação acima determina que o espaço-tempo no bulk é assintoticamente  $AdS_6$ . Com efeito, efetuaremos uma transformação de coordenadas

$$z = z(\rho) = \frac{2}{c}\frac{\rho}{c} \quad (3.14)$$

e  $x_4 = x_4(\theta) = R_0\theta$ , a métrica pode ser transformada na forma conforme

$$ds^2 = \left(\frac{a}{z}\right)^2 (dz^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 - dt^2), \quad (3.15)$$

onde  $a = \frac{2}{c}$  é conhecido como raio  $AdS$ . A equação (3.15) é a métrica  $AdS_6$  em um sistema de coordenadas conforme [36, 37]. Tomando  $\rho \rightarrow \infty \Rightarrow z \rightarrow \infty$ , observamos que a geometria se reduz a um ponto no infinito. Além disso, por meio da transformação

$$w = w(z) = \frac{a^2}{z}, \quad (3.16)$$

a métrica (3.15) possa a ser escrita como

$$ds^2 = \left(\frac{w}{a}\right)^2 (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 - dt^2) + \left(\frac{a}{w}\right)^2 dw^2. \quad (3.17)$$

É digno de nota mencionarmos que a equação (3.17) é utilizada em correspondência  $AdS - CFT$  [27, 38].

Para  $w = 0$  a equação acima nos fornece um limite assintótico conhecido como horizonte  $AdS$ . O comportamento decrescente do fator de warp produz um regime assintoticamente cônico. Ponton e Poppitz [27] propuseram que é possível suavizar este horizonte incorporando o modelo GS em uma correspondência AdS-CFT. Entretanto, vale a pena notar que, uma vez que o escalar de Ricci é uma constante em todo espaço-tempo, a singularidade no horizonte não constitui em uma singularidade essencial. A existência de uma aparente singularidade no horizonte não impede que o modelo GS seja uma geometria do tipo corda. De fato, como mostrado por Israel, a solução geral para geometrias do tipo corda é dada por uma variedade do tipo Kasner.

$$ds_4^2 = d\rho^2 + \left(\frac{\rho}{\xi}\right)^{2a_1} dz^2 + \chi^2 \left(\frac{\rho}{\xi}\right)^{2a_2} d\phi^2 - \left(\frac{\rho}{\xi}\right)^{2a_3} dt^2, \quad (3.18)$$

onde  $a_1 = a_2 = a_3 = a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = 1$  e  $\chi, \xi \in \mathbb{R}$  [39]. A constante  $\chi$  mede o deficit angular onde  $\xi$  fornece a correta dimensão de massa para a métrica. Para  $a_1 = a_3 = 0$  e  $a_2 = 1$  obtemos a corda de Vilenkin [40, 41, 42]. Por outro lado, para  $a_1 = a_3 = \frac{2}{3}$  e  $a_2 = -\frac{1}{3}$  obtemos as chamadas soluções de Melvin [43]. Outras soluções tipo-corda

singular foram encontradas para uma corda global por Cohen e Kaplan [44] e Gregory [45] em quatro dimensões. Em seis dimensões, Cohen e Kaplan [28] propuseram uma solução tipo corda cuja singularidade longe da brana é responsável pela compactificação. Gregory encontrou uma brana tipo corda sem singularidades que possui o mesmo comportamento do modelo GS [29]. Além disso, um mundo-brana suave que assintoticamente converge para o modelo GS foi obtido por Giovannini *et al* [35]. Neste modelo, a fonte é dada por um vórtice local e Abelian.

Os fatores métricos (3.10) podem ser considerados como uma solução exterior de uma brana tipo corda de largura  $\epsilon$ . Para  $\epsilon \rightarrow 0$ , a brana é infinitamente fina. Uma estranha propriedade de branas tipo corda fina é que elas não satisfazem a condição de energia dominante, o que torna esse modelo bastante exótico [46]. A fim de superar essas questões, alguns autores derivaram numericamente a geometria a partir de um vórtice Abelian [35] e em uma aproximação supersimétrica [47]. Neste trabalho, propomos uma extensão da solução do modelo tipo corda fina e investigaremos as modificações geométricas e físicas neste novo cenário.

Consideraremos o seguinte fator de warp [48]:

$$\sigma(\rho) = e^{-(c\rho - \tanh c\rho)}. \quad (3.19)$$

É importante mencionarmos duas características importantes desta função warp. Primeiro, comporta-se assintoticamente como o modelo GS,  $\sigma(\rho) \approx e^{-c\rho}$  para  $\rho$  grande [14, 25, 26, 28, 29, 35, 46]. Segundo, contrariamente aos modelos de corda fina [14, 25] a função warp (3.19) satisfaz todas as condições de regularidade. Essa última característica é devido a adição do termo  $\tanh c\rho$  que suaviza o fator de warp próximo a origem [48]. A função warp tem a forma sino e está esboçado na figura 3.1. Isto concorda com a solução numérica gerada por um vórtice Abelian [35]. Portanto, essa função warp fornece correções próximo a brana em modelos do tipo corda fina [14, 25, 26, 49].

Para a componente métrica angular, escolhemos o seguinte ansatz:

$$\gamma(\rho) = \sigma(\rho)\beta(\rho), \quad (3.20)$$

onde  $\beta(\rho) = \rho^2$ . Note que todas as condições de regularidade agora estão satisfeitas. A componente métrica angular (3.20) está representada na figura 3.2, onde mostramos que a função exibi um comportamento suave próximo a origem. Além disso, tanto a função warp quanto a componente métrica angular são funções em forma de sino. Estas características são ausentes no modelo GS [14]. Entretanto, soluções numéricas para o modelo de vórtice Abelian em seis dimensões compartilham características semelhantes [35].

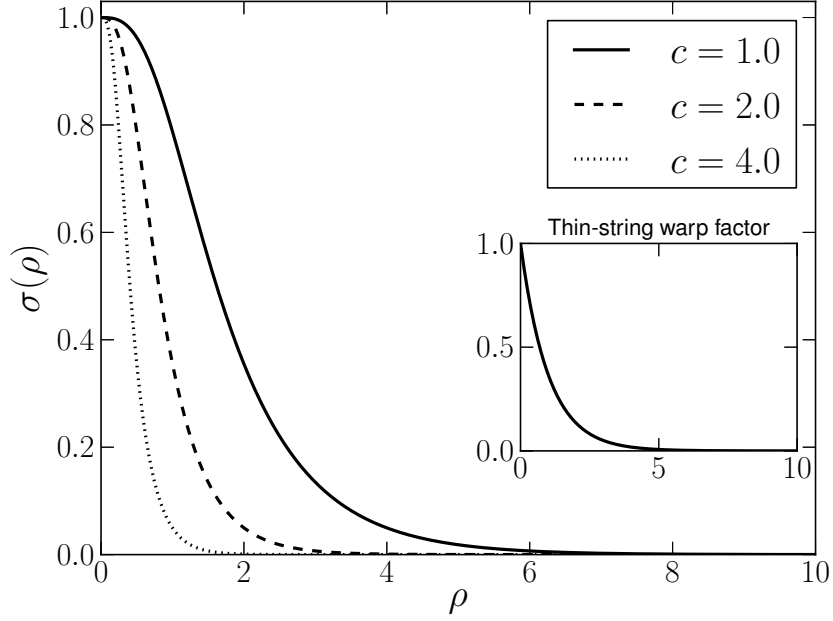


Figura 3.1: Função warp para alguns valores de  $c$ . O fator de warp para corda fina (sub-gráfico) dado pela Eq. (3.10) é definido somente para o exterior da corda.

O escalar de curvatura na variedade  $\mathcal{M}_6$  é calculado pela seguinte expressão:

$$R = c^2 \left( 10 \tanh(c\rho) \operatorname{sech}^2(c\rho) - \frac{15}{2} \tanh^4(c\rho) \right) + 6c \frac{\tanh^2(c\rho)}{\rho}, \quad (3.21)$$

cujo comportamento está representado na figura 3.3. A curvatura apresenta um comportamento suave em todo o bulk e se aproxima assintoticamente para um espaço-tempo  $AdS_6$ . De fato, considerando uma mudança de variável

$$z = z(\rho) = \int^\rho \sigma^{-\frac{1}{2}}(\rho') d\rho', \quad (3.22)$$

a métrica torna-se

$$ds_6^2 = \sigma(z) (dz^2 + \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \beta(z) d\theta^2). \quad (3.23)$$

Para grandes valores de  $\rho$ , a coordenada  $z$  comporta-se como  $z \approx \frac{2}{c} e^{\frac{c}{2}\rho}$ . Em seguida, a métrica string-cigar assume a forma

$$ds_6^2 \approx \left(\frac{a}{z}\right)^2 \left[ dz^2 + \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \left(\frac{2}{c} \ln \frac{c}{2} z\right)^2 d\theta^2 \right]. \quad (3.24)$$



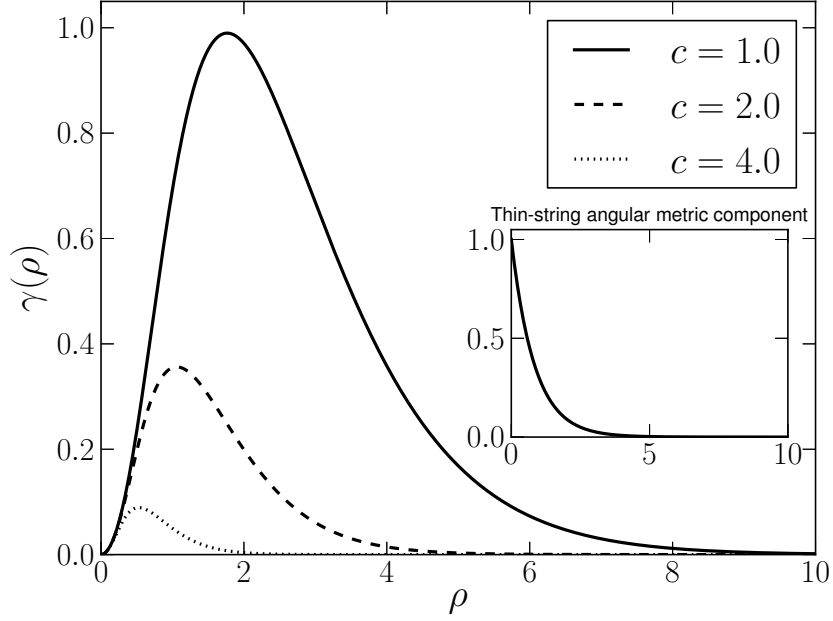


Figura 3.2: Componente métrica angular para diferentes valores de  $c$ . O sub-gráfico refere-se a componente métrica angular para o modelo de corda fina (3.10) para  $R_0 = 1, 0$ .

Definindo a coordenada  $x_4 = \left(\frac{2}{c} \ln \frac{c}{2} z\right) \theta$ , a métrica (3.24) é modificada para

$$\begin{aligned}
 ds_6^2 \approx & \left(\frac{a}{z}\right)^2 \left[ \left(1 - \left(\frac{\theta}{z}\right)^2\right) dz^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \right. \\
 & \left. - dx_4^2 - \frac{4\theta}{z} dz \otimes d\theta - dt^2 \right]. \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

Portanto, a métrica (3.25) recupera assintoticamente a forma conforme da variedade  $AdS_6$ . Isto nos garante afirmar que  $(\mathcal{M}_6, ds_6^2)$  é uma extensão do modelo tipo-corda próximo e distante do defeito.

## 3.2 Propriedades físicas

Nesta seção, estudaremos as componentes do tensor momento-energia atribuindo valores para constante cosmológica.

Usando o ansatz métrico, a equação de Einstein (3.7), encontramos as componentes do tensor momento-energia

$$t_\theta(\rho) = \frac{5c^2}{\kappa_6} \left[ \text{sech}^2 c\rho \left(1 + \frac{4}{5} \tanh c\rho\right) - \frac{\text{sech}^4 c\rho}{2} \right], \tag{3.26}$$

$$t_\rho(\rho) = \frac{5c^2}{\kappa_6} \left( \text{sech}^2 c\rho + \frac{2 \tanh^2 c\rho}{5 c\rho} - \frac{\text{sech}^4 c\rho}{2} \right), \tag{3.27}$$

$$t_0(\rho) = t_\theta(\rho) + \frac{5c \tanh^2 c\rho}{2\kappa_6 \rho}. \tag{3.28}$$

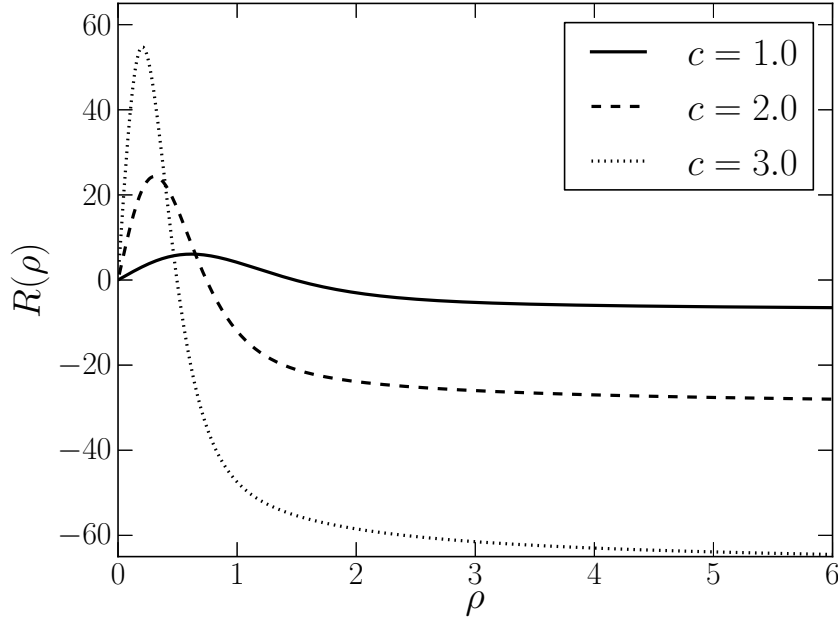


Figura 3.3: Escalar de curvatura no bulk.

Para grandes valores de  $\rho$ , as componentes do tensor momento-energia se anulam e a solução de vácuo das equações de Einstein produzem uma relação entre  $c$  e  $\Lambda$  dada pela equação (3.13). Esta equação mostra-nos que assintoticamente o bulk é um espaço-tempo  $AdS_6$ . Além disso, variando  $c$ , podemos estudar como a fonte e os campos modificam-se para diferentes valores da constante cosmológica.

As componentes do tensor momento-energia estão graficamente representadas nas figuras 3.4 e 3.5 para  $\kappa_6 = 1$ . Podemos ver que, para  $i = \rho, \theta$

$$t_0(\rho) + t_i(\rho) \geq 0,$$

$$t_0(\rho) \geq 0 \quad (\text{condição energia fraca}), \quad (3.29)$$

$$t_0(\rho) + \sum_i t_i(\rho) \geq 0 \quad (\text{condição de energia forte}), \quad (3.30)$$

e

$$t_0(\rho) \geq |t_i(\rho)| \quad (\text{condição de energia dominante}). \quad (3.31)$$

Apenas os casos  $c = 1,0$  e  $c = 4,0$  estão presentes. Contudo, é fácil provar que as condições (3.29), (3.30) e (3.31) são satisfeitas para todos os valores (positivos) de  $c$ . Uma vez que as funções hiperbólicas nas equações (3.26), (3.27) e (3.28) são limitadas de 0 a 1, todos os termos destas equações são positivos. Além disso, o termo  $sech^4(c\rho)$  é bastante pequeno, o que prova diretamente as condições de energia fraca e forte. O termo  $\frac{5c}{2\kappa_6} \frac{\tanh^2(c\rho)}{c\rho}$  na equação (3.28) prova que a condição de energia dominante (3.31) é satisfeita. Em primeiro lugar, da equação (3.28) é obvio que  $t_0(\rho) \geq t_\theta(\rho)$ . Se escrevermos

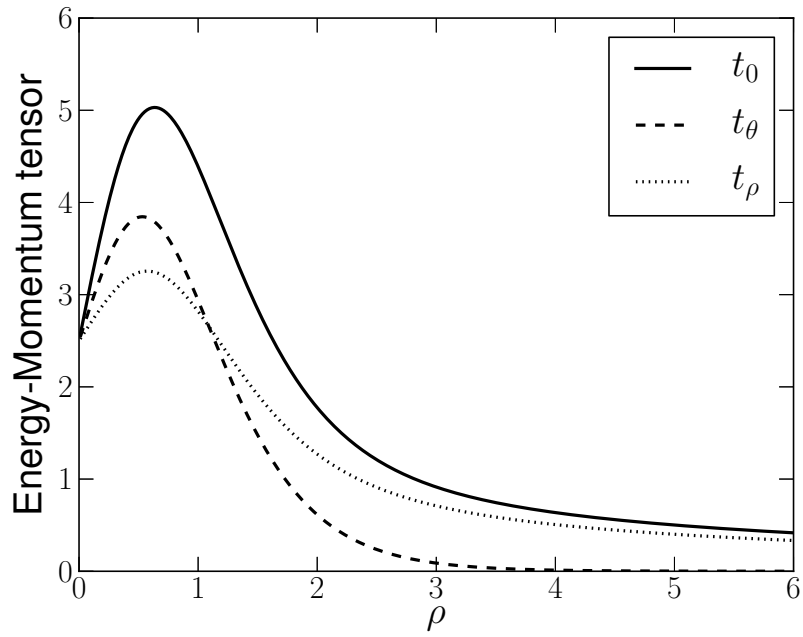


Figura 3.4: Componentes do tensor momento-energia para  $c = 1, 0$

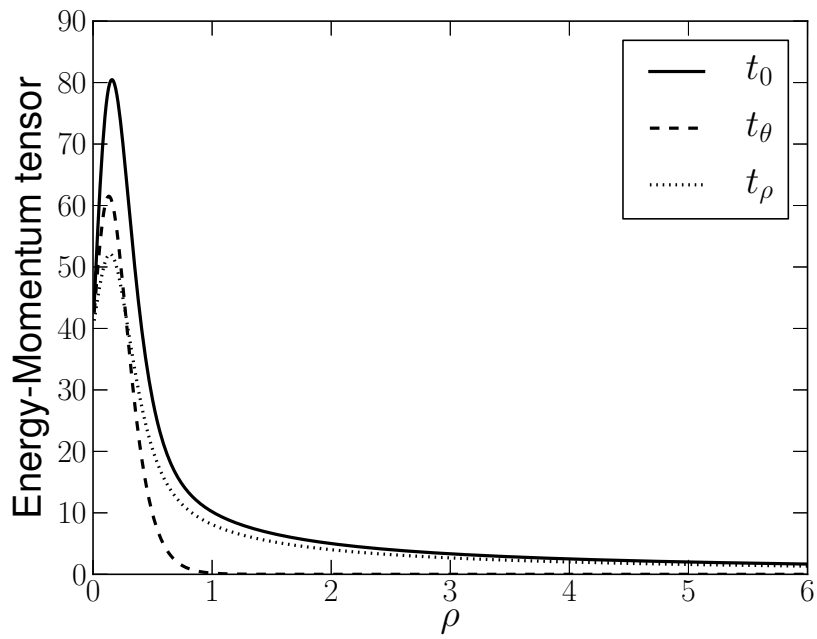


Figura 3.5: Componentes do tensor momento energia para  $c = 4, 0$

explicitamente as expressões (3.26), (3.27) e (3.28) na inequação  $t_0(\rho) \geq t_\rho(\rho)$ , somos levados a

$$\frac{4}{5} \operatorname{sech}^2(c\rho) \tanh(c\rho) \geq -\frac{1}{10} \frac{\tanh^2(c\rho)}{c\rho}, \quad (3.32)$$

que é satisfeita, porque o lado esquerdo é sempre positivo.

É importante notarmos que as correções próximas da brana, fornecidas pelos ansatz (3.19) e (3.20), desloca da origem o núcleo da fonte. Resultados similares foram obtidos por Giovannini et al. [35] numericamente e para o modelo string-cigar [48]. Além disso, a largura da brana é definida como  $\epsilon \approx \bar{\rho} - \rho_{\max}$ , onde  $\bar{\rho}$  e  $\rho_{\max}$  são as posições da metade do máximo e do mínimo de  $t_0$ , respectivamente, que tende para zero quando  $c \rightarrow \infty$ . Portanto, o modelo GS pode ser visto como um limite desta versão suave para  $c \rightarrow \infty$ .

### 3.3 Localização de gravidade

Estudaremos agora a localização de gravidade sobre uma 3-brana imerso nesta geometria 6-dimensional. Consideraremos uma pequena perturbação  $h_{\mu\nu}$  na métrica de fundo da seguinte forma:

$$ds_6^2 = \sigma(\rho, c)(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu + d\rho^2 + \gamma(\rho, c)d\theta^2. \quad (3.33)$$

Impondo o gauge transversal de traço nulo  $\nabla^\mu h_{\mu\nu} = 0$ , a linearização das equações de Einstein produzem a seguinte equação para a perturbação gravitacional [14, 50],

$$\partial_A(\sqrt{-g_6}g^{AB}\partial_B h_{\mu\nu}) = 0. \quad (3.34)$$

Podemos separar as variáveis usando a decomposição de Kaluza-Klein [14]

$$h_{\mu\nu}(x^\zeta, \rho, \theta) = \tilde{h}_{\mu\nu}(x^\zeta) \sum_{m,l=0}^{\infty} \phi_{m,l}(\rho)^{il\theta}, \quad (3.35)$$

onde  $l$  é um número inteiro e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , e impomos a seguinte condição de massa,

$$\square_4 \tilde{h}_{\mu\nu}(x^\zeta) = m^2 \tilde{h}_{\mu\nu}(x^\zeta), \quad (3.36)$$

os modos radiais satisfazem a equação de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\rho^2} \phi(\rho) + \left( \frac{1}{\rho} - \frac{5}{2} c \tanh^2(c\rho) \right) \frac{d}{d\rho} \phi(\rho) + \\ + M^2(\rho) e^{c\rho - \tanh c\rho} \phi(\rho) = 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

O fator  $M^2(\rho) = \left( m^2 - \frac{l^2}{\rho^2} \right)$  é o termo de massa efetiva que contém contribuições do momento angular orbital  $l$  e se comporta como uma massa dependente da posição. Note que temos um espectro KK degenerado, como no modelo GS [14]. Entretanto, para

$\lim_{\rho \rightarrow \infty} M^2(\rho) = m^2$ , a degenerescência é quebrada para grandes distâncias.

Devido a simetria axial, impomos as condições de contorno de Neumann sobre  $\phi_m$  [14, 48].

$$\phi'_m(0) = \phi'_m(\infty) = 0. \quad (3.38)$$

Além disso, estes modos satisfazem a seguinte condição de ortonormalidade:

$$\int_0^\infty \sigma(\rho) \sqrt{\gamma(\rho)} \phi_m^* \phi_n d\rho = \delta_{mn}. \quad (3.39)$$

### 3.3.1 Modos não-massivos gravitacionais

Para  $M^2(\rho) = 0$  (modos gravitacionais sem massa), uma solução para a equação (3.37) satisfazendo as condições de contorno (3.38) é uma constante  $\phi(\rho) = \phi_0$ . Contudo, da relação de ortonormalidade (3.39), obtemos uma função para o modo-zero  $\psi_0$  [14, 48, 50],

$$\psi_0(\rho) = \phi_0 \sigma(\rho) \beta^{\frac{1}{4}}(\rho), \quad (3.40)$$

onde  $\phi_0$  desempenha o papel de uma constante de normalização dada por:

$$\phi_0^2 = \frac{1}{\int_0^\infty \sigma^{\frac{7}{2}}(\rho) \beta(\rho) d\rho}. \quad (3.41)$$

Na próxima seção, vamos mostrar que  $\psi_0$  é de fato os modos não-massivos gravitacionais com o uso da abordagem de Schrödinger.

A análise gráfica dos modos de massa nula, mostrado na figura 3.6, fornece-nos novos resultados. Diferentemente dos modelos de corda fina, o máximo de  $\psi_0$  é deslocado da origem. Este resultado concorda com o fato de que o núcleo da brana não está posicionado em  $\rho = 0$ . Como discutido na seção anterior, o núcleo da brana se aproxima da origem na medida em que  $c$  aumenta de valor. Esse comportamento reflete diretamente a solução do modo-zero. Este efeito é devido a correção suave próximo da origem induzida pelo fator  $\beta$ . Este modo acompanha o comportamento do tensor momento-energia. A medida que os valores de  $c$  crescem, o máximo do modo-zero tende a coincidir com o máximo da densidade de energia. Portanto, nosso modelo suavizado fornece correções próximo da brana para os modos gravitacionais não-massivos, suaviza o modo-zero na fronteira do núcleo da brana, e recupera o comportamento exponencial do modelo de corda fina para grandes distâncias.

### 3.3.2 Modos massivos gravitacionais

As soluções da equação (3.37) para  $M^2(\rho) \neq 0$ , são chamadas de modos massivos, difíceis de serem calculadas analiticamente. Antes de tratarmos o problema numericamente dois diferentes limites serão abordados.

Primeiramente, analisaremos os modos gravitacionais próximo da brana ( $\rho \rightarrow 0$ ).

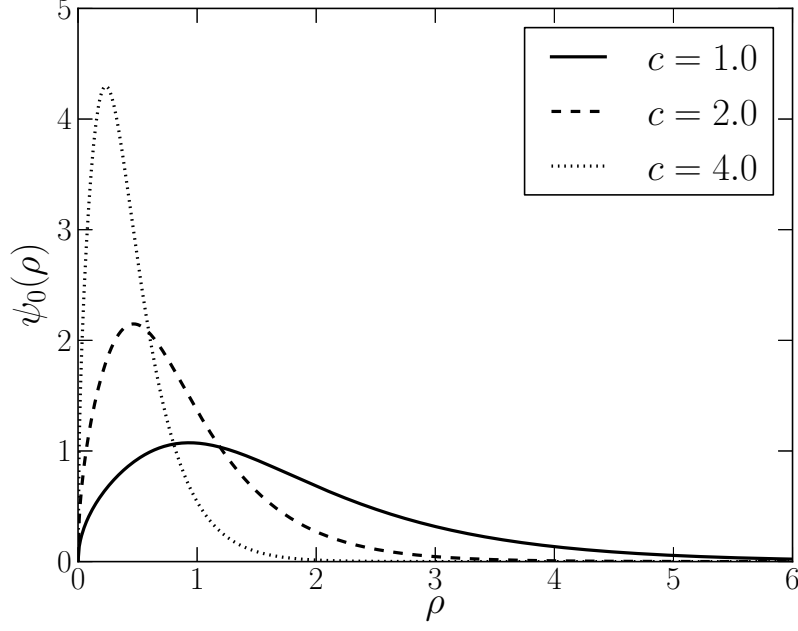


Figura 3.6: Modo-zero gravitacional

Nesse limite, a equação diferencial (3.37) é reduzida a uma equação de Bessel.

$$\frac{d^2}{d\rho^2}\phi(\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\phi(\rho) + M^2(\rho)\phi(\rho) = 0, \quad (3.42)$$

cujas soluções satisfazem as condições de contorno (3.38) e são dadas pelas funções de Bessel de primeiro tipo  $J_l(m\rho)$ . Além disso, a condição de contorno (3.38), exclui a solução  $l = 1$ ; portanto ondas- $p$  não são permitidas.

Assintoticamente ( $\rho \rightarrow \infty$ ), a equação (3.37) torna-se

$$\frac{d^2}{d\rho^2}\phi(\rho) - \frac{5c}{2}\frac{d}{d\rho}\phi(\rho) + m'^2 e^{c\rho}\phi(\rho) = 0, \quad (3.43)$$

com uma massa não-degenerada e redimensionada  $m' = m/\sqrt{e}$ . Esta equação é exatamente a mesma encontrada no modelo GS, cuja solução é dada por [14]:

$$\begin{aligned} \phi_{m'}(\rho) = e^{(5/4)c\rho} & \left[ C_1 J_{5/2} \left( \frac{2m'}{c} e^{(c/2)\rho} \right) + \right. \\ & \left. + C_2 Y_{5/2} \left( \frac{2m'}{c} e^{(c/2)\rho} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde  $C_1$  and  $C_2$  são constantes arbitrárias e  $Y$  é a função de Bessel de segundo tipo.

Para obter uma solução de domínio completo, integramos a equação (3.37) numericamente. Para tanto, utilizaremos o método da matriz [51, 52] com erro de truncamento de segunda ordem para o domínio  $\rho \in [0, 6]$ . Representamos graficamente nas figuras 3.7 e 3.8 as soluções numéricas para  $c = 1, 0$ , comparando com a solução analítica do modelo GS (3.44). Próximo da origem, as soluções comportam-se como uma função de

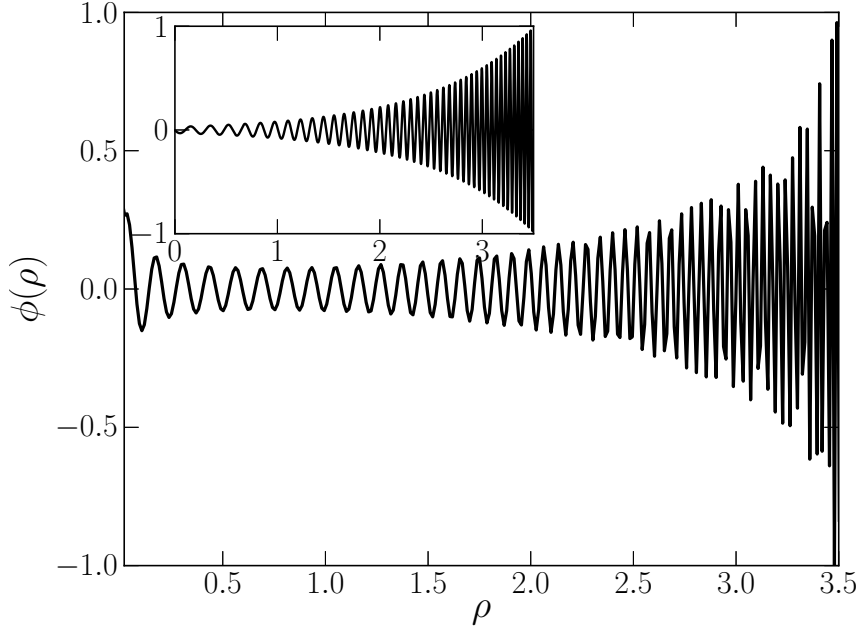


Figura 3.7: Solução numérica da equação (3.37) para  $m = 44, 10$ . Representamos o sub-gráfico dos modos massivos do modelo GS para os mesmos valores de massa (3.44), onde  $C_1 = C_2 = 0, 2$

Bessel, enquanto que longe da brana, comportam-se como os modos massivos do modelo GS. A principal vantagem da abordagem numérica consiste em obtermos uma solução de domínio completo. Em contraste com o modelo de corda fina, as soluções massivas não são nulas próximas da brana, apresentando ao contrário, elevada amplitude.

### 3.3.3 Potencial quântico análogo

Uma outra forma de estudarmos os modos massivos consiste em transformarmos a equação (3.37) em uma equação tipo Schrödinger. Esse formalismo fornece informações sobre os estados massivos que interagem com a brana. Primeiro, realizaremos uma mudança na variável independente, dada pela equação (3.22), que fornece uma métrica plana conforme [48, 50]. Em seguida, escrevemos  $\phi(z)$  como

$$\phi_m(z) = \frac{1}{\sigma(z)\beta^{\frac{1}{4}}(z)}\psi_m(z), \quad (3.45)$$

transformando a equação (3.37) numa equação tipo Schrödinger para a função  $\psi_m(z)$

$$-\ddot{\psi}_m(z) + U(z)\psi_m(z) = m^2\psi_m(z), \quad (3.46)$$

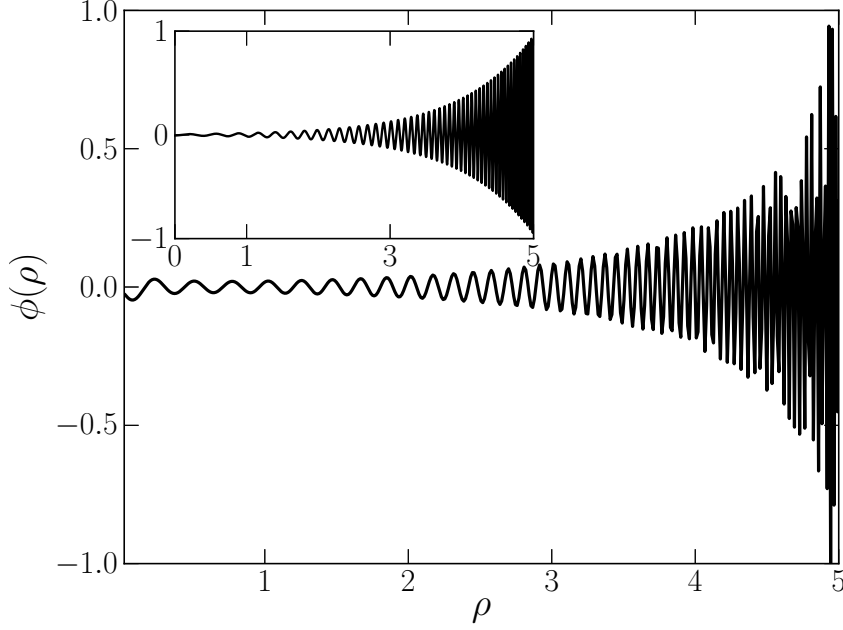


Figura 3.8: Solução numérica da equação (3.37) para  $m = 22, 82$ . Representamos o sub-gráfico dos modos massivos do modelo GS para os mesmos valores de massa (3.44), onde  $C_1 = C_2 = 0, 01$ .

onde os pontos representam derivadas com respeito a coordenada  $z$ . A função potencial assume a seguinte forma:

$$U(z) = \frac{\ddot{\sigma}}{\sigma} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\sigma} \dot{\beta}}{\sigma \beta} - \frac{3}{16} \left( \frac{\dot{\beta}}{\beta} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{\ddot{\beta}}{\beta} + \frac{l^2}{\beta}. \quad (3.47)$$

Da equação (3.45), concluímos que os modos não massivos definidos na equação (4.39) satisfazem a equação de Schrödinger análoga para  $m = 0$ . O potencial pode ser reescrito na coordenada  $\rho$  como:

$$\begin{aligned} \bar{U}(\rho; c, l) = e^{-(c\rho - \tanh c\rho)} & \left( -2c^2 \tanh(c\rho) \operatorname{sech}^2(c\rho) \right. \\ & + \frac{3}{2} c^2 \tanh^4(c\rho) - \frac{5c \tanh^2(c\rho)}{4\rho} - \frac{1}{4\rho^2} \\ & \left. + \frac{l^2 e^{(c\rho - \tanh c\rho)}}{\rho^2} \right). \end{aligned} \quad (3.48)$$

As figuras 3.9 e 3.10 representam os gráficos da função potencial  $\bar{U}(\rho)$  calculada pela equação (3.48). Para  $l = 0$  temos um poço de potencial próximo da origem, mostrando a possibilidade de estados ligados onde os modos massivos gravitacionais podem interagir com a brana através de estados ressonantes [53, 54, 55]. A medida que  $c$  cresce, uma barreira de potencial é formada além da origem. Por outro lado, para  $l > 1$ , o gráfico mostra uma barreira de potencial infinita impedindo a existência de qualquer estado ligado. Portanto, grávitons massivos com momento angular  $l > 1$  não interagem com a



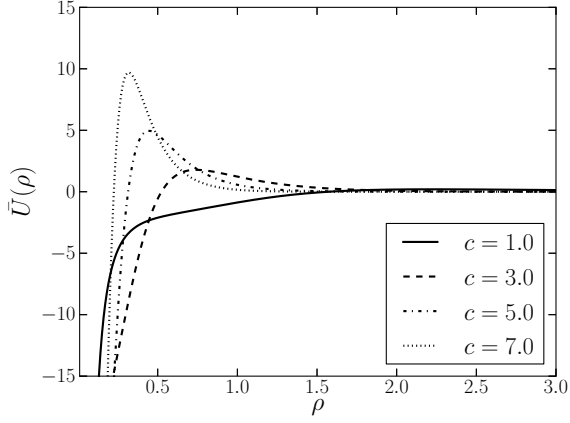


Figura 3.9: Função potencial para  $l = 0$

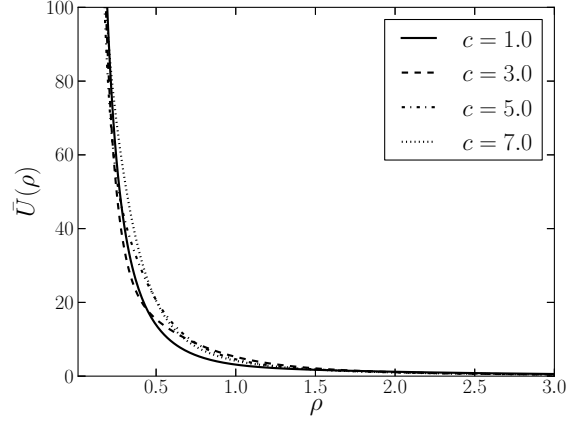


Figura 3.10: Função potencial para  $l = 2$

brana, enquanto que, para  $l = 0$ , estados ressonantes (estados massivos gravitacionais quasi-localizados altamente acoplados à brana [56, 57]) são permitidos. As consequências destas interações podem ser detectados fenomenologicamente como uma correção no potencial Newtoniano [14, 56, 57]. Isto é esperado uma vez que temos um espectro não massivo degenerado dado pela equação (3.37) e o gráviton 4-dimensional é identificado por ondas do tipo  $s$  ( $l = 0$ ).

É importante notar a partir da solução de modo-zero que as condições de contorno de Neumann são satisfeitas em torno da posição do núcleo da brana. Além disso, para  $\rho \rightarrow 0$ ,  $\psi'_0 \rightarrow \infty$ , concordando com o poço de potencial infinito (ver figura 3.9).

# Capítulo 4

## Correção do Potencial Newtoniano em Modelo de Brana Espessa 6-Dimensional e Geometria Conifold

Neste capítulo, estudaremos a localização de gravidade numa 3-brana posicionada em um conifold resolvido warped transverso. Derivaremos uma expressão geral para a correção do potencial Newtoniano devido aos estados KK gravitacionais em um cenário de mundo brana tipo corda espessa. Além disso, usaremos uma abordagem numérica para obtermos o espectro gravitacional e suas correspondentes autofunções. A partir das auto-soluções, poderemos analisar a influência dos parâmetros do modelo na correção do potencial Newtoniano. Iniciaremos este capítulo fazendo uma revisão de algumas das principais propriedades da geometria do conifold.

### 4.1 Geometria conifold

Nesta seção, mostraremos detalhes da geometria conifold resolvido em seis dimensões. Veremos que esta geometria suaviza um defeito tipo-corda fina, transformando-a em um modelo tipo-corda espessa. Utilizaremos uma 2-seção do conifold resolvido para construirmos o nosso bulk. Esta geometria servirá de cenário para localizarmos gravidade e efetuarmos correções no potencial Newtoniano.

Variedades do tipo conifold são estudadas em teorias de cordas, pois se assemelham a uma variedade de Calabi-Yau [58]. Esta geometria é bastante utilizada em correspondência AdS-CFT e Princípio Holográfico. A variedade é definida pela quádrlica [50, 58, 59]

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0, \tag{4.1}$$

esta equação define um cone sobre uma variedade 5-dimensional. Utilizaremos uma dimensão radial extra  $\rho: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ . A nossa métrica sobre este espaço compacto  $X^5$

é dado por:

$$ds_6^2 = d\rho^2 + \rho^2 ds^2(X^5), \quad (4.2)$$

para  $\rho = 0$ , a métrica acima possui uma “singularidade nua” [58]. Para tratarmos o nosso espaço como uma variedade de Einstein, devemos realizar a seguinte compactificação do espaço  $X^5$  [50, 58].

$$X^5 = SU(2) \times SU(2)/U(1) = T^{1,1}. \quad (4.3)$$

Fazendo com que a métrica passe a ser escrita da seguinte forma:

$$ds_6^2 = d\rho^2 + \frac{\rho^2}{9} (d\psi + \cos\theta_1 d\phi_1 + \cos\theta_2 d\phi_2)^2 + \frac{\rho^2}{6} (d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1 d\phi_1^2 + d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2 d\phi_2^2) \quad (4.4)$$

Uma versão suave desse conifold, é chamado de conifold resolvido que utiliza o fator  $\left(\frac{\rho^2+6a^2}{\rho^2+9a^2}\right)$  como parâmetro de suavização [50, 58, 59].

$$ds_6^2 = \left(\frac{\rho^2+6a^2}{\rho^2+9a^2}\right) d\rho^2 + \frac{\rho^2}{9} \left(\frac{\rho^2+6a^2}{\rho^2+9a^2}\right) (d\psi + \cos\theta_1 d\phi_1 + \cos\theta_2 d\phi_2)^2 + \frac{\rho^2}{6} (d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1 d\phi_1^2) + \left(\frac{\rho^2+6a^2}{6}\right) (d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2 d\phi_2^2), \quad (4.5)$$

onde  $a \in R$  é um parâmetro cuja dimensão é  $[a] = L$ . Observe que o parâmetro  $a$  remove a singularidade cônica

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{\rho^2 + 6a^2}{\rho^2 + 9a^2}\right) \neq \infty. \quad e \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} ds_6^2 = a^2 (d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2 d\phi_2^2), \quad (4.6)$$

este resultado, em termos da topologia, significa a mudança da ponta do cone por uma esfera de raio  $a$ . Por esta razão o parâmetro  $a$  é chamado de parâmetro de resolução (figura 4.1).

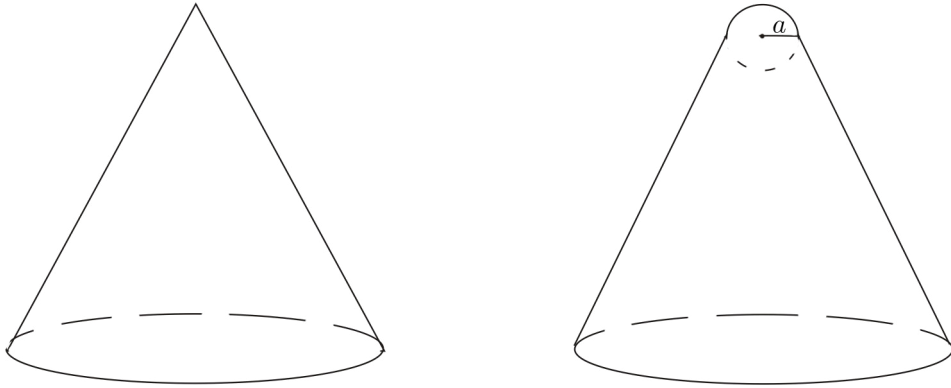


Figura 4.1: Substituição da ponta do cone por uma esfera de raio  $a$  (parâmetro de resolução).

Fixando os termos angulares  $\psi, \phi_1, \theta_2, \phi_2$  da métrica, teremos uma seção bidimensional

em  $\rho$  e  $\theta$ , do conifold resolvido, dada por:

$$ds_2^2 = \left( \frac{\rho^2 + 6a^2}{\rho^2 + 9a^2} \right) d\rho^2 + \left( \frac{\rho^2 + 6a^2}{6} \right) d\theta^2. \quad (4.7)$$

Agora vamos fazer uma mudança de variáveis para escrever a métrica na forma Gaussiana:

$$ds^2 = du^2 + \beta(u, a) d\theta^2. \quad (4.8)$$

Definindo  $du$  da seguinte forma:

$$du = \sqrt{\frac{(\rho^2 + 6a^2)}{u^2 + 9a^2}} d\rho, \quad (4.9)$$

obtemos uma mudança suave de variável  $u: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  dada por:

$$u_a = \int^u \sqrt{\frac{(\rho^2 + 6a^2)}{u^2 + 9a^2}} d\rho'. \quad (4.10)$$

Logo, a mudança de variável passa a ter a seguinte forma:

$$u_a(\rho) = \begin{cases} \rho, & a = 0 \\ -i\sqrt{6}aE\left(\arcsin\left(\frac{i\rho}{3a}\right), \frac{2}{3}\right), & a \neq 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

onde  $E$  representa a integral elíptica de segunda espécie.

O gráfico desta transformação  $u_a(r)$  está presente na figura 4.2 onde verificamos que para todos os valores do parâmetro de resolução temos  $u(\rho = 0, a) = 0$ .

Para o conifold resolvido definimos os fatores de warped da seguinte forma:

$$\sigma(\rho) = e^{-(c\rho - \tanh c\rho)} \quad , \quad \gamma(\rho) = \frac{1}{6} (u^2(\rho, a) + 6a^2) e^{-(c\rho - \tanh c\rho)} \quad , \quad (4.12)$$

com  $\beta(\rho, a) = \frac{1}{6} (u^2(\rho, a) + 6a^2)$ .

A partir dos valores de  $\sigma'/\sigma$  e  $\beta'/\beta$  detalhados abaixo:

$$u'(r) = \sqrt{\frac{u^2 + 9a^2}{u^2 + 6a^2}}, \quad u'' = \frac{3a^2 u}{u^2 + 6a^2}, \quad (4.13)$$

$$\beta' = \frac{1}{3} u'(r) u(r) = \frac{u \sqrt{u^2 + 9a^2}}{3 \sqrt{u^2 + 6a^2}} \quad (4.14)$$

$$\frac{\beta'(r)}{\beta(r)} = 2u \frac{\sqrt{u^2 + 9a^2}}{(u^2 + 6a^2)^{3/2}}, \quad (4.15)$$

$$\beta'' = \frac{1}{3} (u'' u + u'^2) = \frac{1}{3} \left( \frac{u^2(3a^2 + 1) + 9a^2}{u^2 + 6a^2} \right) \quad (4.16)$$

$$\frac{\beta''(r)}{\beta(r)} = 2 \frac{u^2(3a^2 + 1) + 9a^2}{(u^2 + 6a^2)^2} \quad (4.17)$$

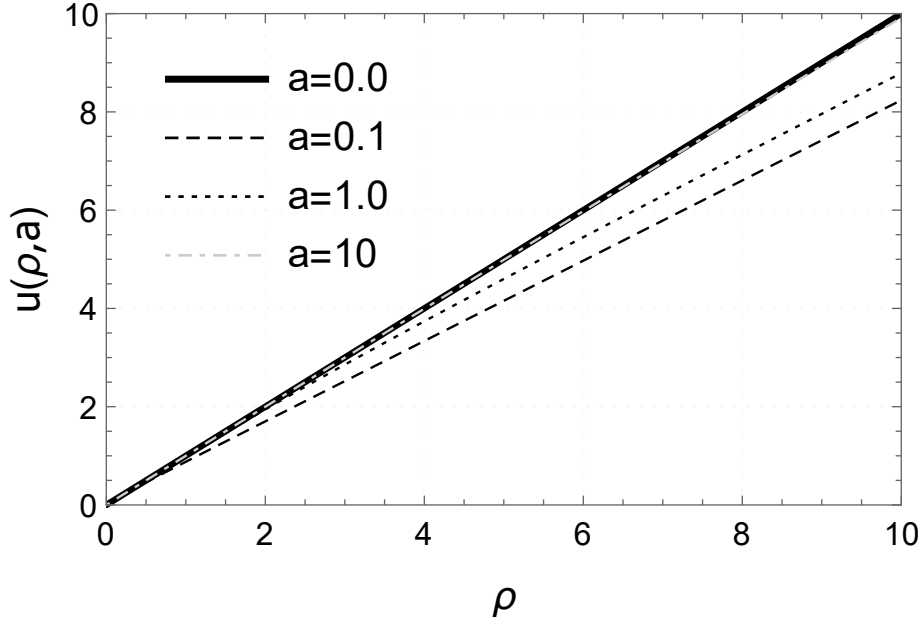


Figura 4.2: Transformação  $u(\rho, a)$ . Observamos que para  $a = 0$  temos uma reta com coeficiente angular igual a 1. Para  $a \neq 0$  essas funções são aproximadamente retas com coeficientes angulares menores. Há uma diminuição brusca do coeficiente para pequenos valores de  $a$ , o qual retorna ao coeficiente angular 1 para grandes valores do parâmetro de resolução.

observamos que as seguintes condições de regularidade

$$\sigma(\rho)|_{\rho=0} = cte, \quad \sigma'(\rho)|_{\rho=0} = 0, \quad (4.18)$$

$$\gamma(\rho)|_{\rho=0} = 0, \quad \left(\sqrt{\gamma(\rho)}\right)' \Big|_{\rho=0} = 1. \quad (4.19)$$

são obedecidas para o fator  $\sigma(\rho)$ . Porém, as condições referentes ao  $\gamma(\rho)$  das equação (4.12) valem apenas para o caso não regular  $a = 0$ . Com base na equação (4.11) verificamos que  $u(0, a) = 0$ .

$$\gamma(0, a) = \frac{u_a^2(0) + a^2}{6} = \frac{a^2}{6}, \quad (4.20a)$$

$$\left(\sqrt{\gamma(\rho, a)}\right)' \Big|_{\rho=0} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\beta'}{\beta} + \frac{\sigma'}{\sigma} \right] \sqrt{\beta\sigma} \Big|_{\rho=0} = \frac{1}{\sqrt{6}} u_a(0) \frac{\sqrt{u_a^2(0) + 9a^2}}{u_a^2(0) + 6a^2},$$

$$\left(\sqrt{\gamma(\rho, a=0)}\right)' \Big|_{\rho=0} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \left(\sqrt{\gamma(\rho, a \neq 0)}\right)' \Big|_{\rho=0} = 0 \quad (4.20b)$$

A curvatura para o conifold é dada por [50]

$$R(\rho, a) = -5c^2 \left[ \frac{1}{2} \tanh^4(cr) + \operatorname{sech}^4(cr) - 2(\tanh(cr) + 1)\operatorname{sech}^2(cr) + 1 \right] - \left[ -6c \tanh^2(cr) u \frac{\sqrt{u^2 + 9a^2}}{\sqrt{(u^2 + 6a^2)^3}} + 2 \frac{u^2(3a^2 + 1) + 9a^2}{(u^2 + 6a^2)^2} - 2u^2 \frac{u^2 + 9a^2}{(u^2 + 6a^2)^3} \right]. \quad (4.21)$$

O gráfico desta expressão está na figura 4.3, onde verificamos que longe da origem o espaço-tempo converge para o  $AdS_6$  do GS.

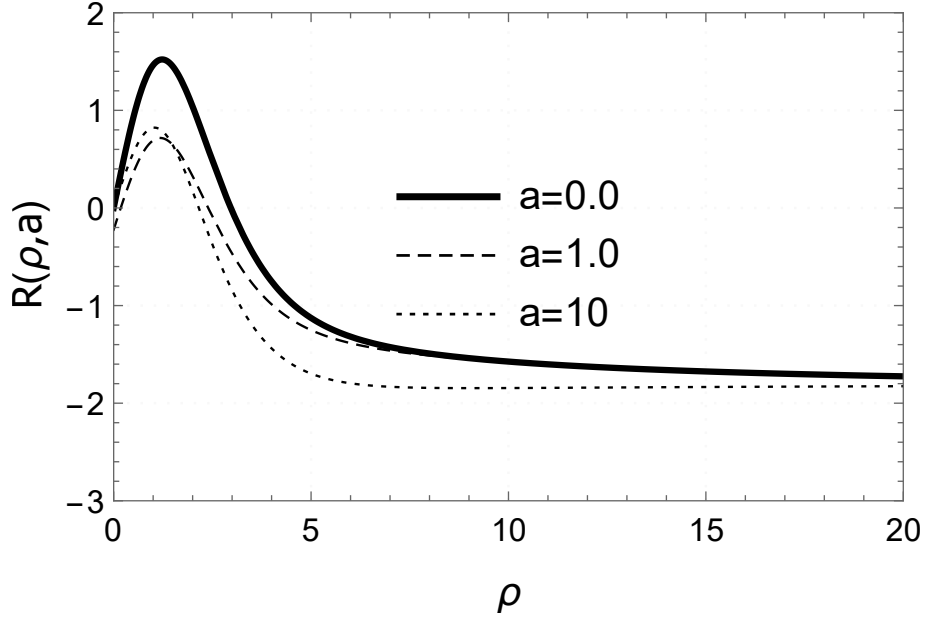


Figura 4.3:  $R(r)$  para o modelo CR. Verificamos que o parâmetro  $a$  regula tanto a amplitude como a espessura da região que antecede o espaço puramente  $AdS_6$  do GS. Porém, há saturação na forma desta curvatura para grandes valores do parâmetro de resolução, a forma exposta para  $a = 10$  se mantém para valores maiores.

Enquanto a curvatura do espaço transversal desta variedade  $\mathcal{M}_2$  é dada por:

$$R_{\mathcal{M}_2} = -2u^2 \left[ \frac{(3a^2 + 1) + 9a^2}{(u^2 + 6a^2)^2} - \frac{u^2 + 9a^2}{(u^2 + 6a^2)^3} \right], \quad (4.22)$$

para o caso onde  $a = 0$  obtemos que a curvatura do espaço transversal é sempre nula. Para  $a \neq 0$  este valor é negativo na origem e cresce com  $\rho$  até atingir o valor constante nulo.

O tensor momento-energia é descrito nas referências [14, 60], utilizamos  $\Lambda = -\frac{5}{2} \frac{c^2}{\kappa_6}$ :

Para  $a = 0$  temos os seguintes tensores:

$$t_0(\rho) = -\frac{c^2}{\kappa_6} \left[ 5\text{sech}^2(c\rho) + 4 \tanh(c\rho)\text{sech}^2(c\rho) - \frac{5}{2}\text{sech}^4(c\rho) + \frac{5 \tanh^2(c\rho)}{2c\rho} \right], \quad (4.23a)$$

$$t_\rho(\rho) = -\frac{c^2}{\kappa_6} \left[ 5\text{sech}^2(c\rho) + 2 \tanh(c\rho)\text{sech}^2(c\rho) - \frac{5}{2}\text{sech}^4(c\rho) + \frac{2}{c\rho} \tanh^2(c\rho) \right], \quad (4.23b)$$

$$t_\theta(\rho) = -\frac{c^2}{\kappa_6} \left[ 5\text{sech}^2(c\rho) + 4 \tanh(c\rho)\text{sech}^2(c\rho) - \frac{5}{2}\text{sech}^4(c\rho) \right], \quad (4.23c)$$

Para  $a \neq 0$  temos o mesmo  $t_\theta$  (uma vez que a componente angular do tensor momento depende apenas de  $\sigma$ ), mas  $t_0$  e  $t_\rho$  serão calculados por:

$$t_0(\rho) = -\frac{c^2}{\kappa_6} \left[ 5\text{sech}^2(c\rho) + 4 \tanh(c\rho)\text{sech}^2(c\rho) - \frac{5}{2}\text{sech}^4(c\rho) + \frac{5u \tanh^2(c\rho)}{2c^2(u^2 + 6a^2)} \sqrt{\frac{\rho^2 + 9a^2}{\rho^2 + 6a^2}} + \frac{3u a^2}{c^2(u^2 + 6a^2)} \frac{\rho}{(\rho^2 + 6a^2)^{3/2}(\rho^2 + 9a^2)^{1/2}} \right], \quad (4.24a)$$

$$t_\rho(\rho) = -\frac{c^2}{\kappa_6} \left[ 5\text{sech}^2(c\rho) + 2 \tanh(c\rho)\text{sech}^2(c\rho) - \frac{5}{2}\text{sech}^4(c\rho) + \frac{2u \tanh^2(c\rho)}{u^2 + 6a^2} \sqrt{\frac{\rho^2 + 9a^2}{\rho^2 + 6a^2}} \right], \quad (4.24b)$$

aqui  $t_0 > t_i$  apenas para  $a = 0$ , para valores grandes do parâmetro de resolução temos a igualdade  $t_0 = t_\theta$  como podemos observar na figura 4.4.

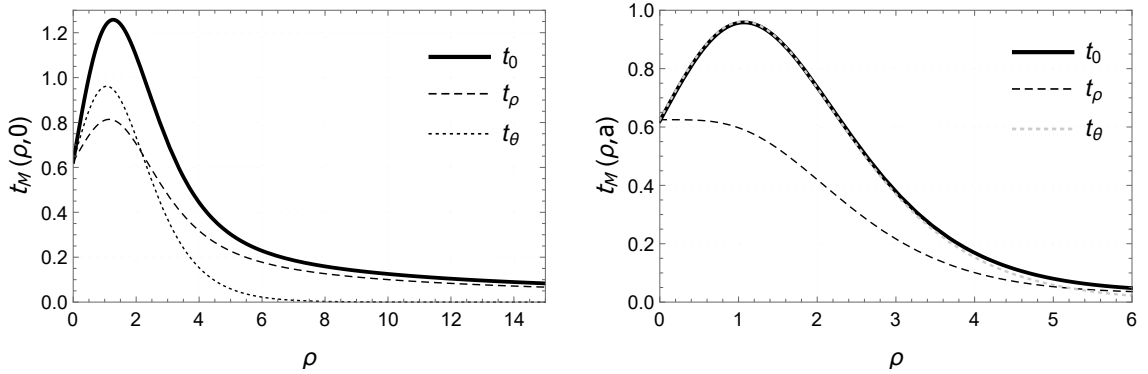


Figura 4.4:  $t_M(\rho)$  para o modelo CR com  $c = 0.5$ . Observamos que a condição de energia dominante  $t_0 \geq t_i$  é atendida no caso onde  $a = 0$  (figura da esquerda). Na figura da direita  $a = 5$  a densidade de energia e a pressão angular se igualam.

Observamos para o caso não resolvido ( $a = 0$ ) as condições de regularidade e de energia dominante são atendidas, porém a métrica apresenta singularidade cônica. Para o caso resolvido ( $a \neq 0$ ), onde não há singularidade cônica, apenas as duas condições de regularidade são atendidas e nem todas as condições de energia são atendidas e  $t_0 \sim t_\theta$ . Além disso, a característica que atende a condição de regularidade  $\gamma(0) = 0$  pode promover algumas grandezas singulares na localização de campos bosônicos.

Uma vez que apresentamos todas as geometrias que foram trabalhadas nesta Tese iremos agora exibir uma tabela comparativa entre os fatores de warp de cada geometria.

-	GS	GS Est.	Conifold ( $a = 0$ )	Conifold ( $a \neq 0$ )
$\sigma(\rho)$	$e^{-c\rho}$	$e^{-(c\rho - \tanh c\rho)}$	$e^{-(c\rho - \tanh c\rho)}$	$e^{-(c\rho - \tanh c\rho)}$
$\gamma(\rho)$	$R_0 e^{-c\rho}$	$\rho^2 e^{-(c\rho - \tanh c\rho)}$	$\frac{\rho^2}{6} e^{-(c\rho - \tanh c\rho)}$	$\left(\frac{u^2(\rho) + 6a^2}{6}\right) e^{-(c\rho - \tanh c\rho)}$

Tabela 4.1: Fatores de warp para as geometrias estudadas nesta tese.

## 4.2 Geometria e propriedades físicas no bulk

Nesta seção, revisaremos as principais propriedades geométricas e físicas do conifold resolvido (CR) em modelos de mundo-brana. Partiremos da ação de Einstein-Hilbert no bulk 6-dimensional com constante cosmológica  $\Lambda$  [25]:

$$S_6 = \int_{\mathcal{M}_6} \left( \frac{1}{2\kappa_6} R - \Lambda + \mathcal{L}_m \right) \sqrt{-g} d^6x . \quad (4.25)$$

como foi definido  $\kappa_6 = 8\pi G_N = 8\pi/M_6^4$ ,  $G_N$  é a constante gravitacional e  $M_6$  é a massa de Planck no bulk 6-dimensional. Além disso,  $\mathcal{L}_m$  é o Lagrangiano de matéria para fonte da geometria. A dimensão da constante cosmológica segue a mesma convenção dada no capítulo anterior. Como sabemos, a partir desta ação, conseguimos obter as equações de Einstein em seis dimensões

$$R_{AB} - \frac{R}{2} g_{AB} = -\kappa_6 (\Lambda g_{AB} + T_{AB}) . \quad (4.26)$$

Agora, consideraremos uma métrica warped cilíndrica e estática entre uma 3-brana  $\mathcal{M}_4$  e o espaço transversal dada por [14]

$$ds_6^2 = \sigma(\rho) \eta_{\mu\nu}(x^\zeta) dx^\mu dx^\nu + d\rho^2 + \gamma(\rho) d\theta^2 , \quad (4.27)$$

onde  $\sigma(\rho)$  é o fator de warp,  $x^\zeta$  são as coordenadas sobre a brana e  $(\rho, \theta)$  são as coordenadas da variedade transversal. A métrica tem simetria axial, tal que  $r \in [0, \infty)$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$ . A função  $\gamma(\rho)$  é a componente métrica angular com dimensão de  $L^2$ . Além disso, para a métrica de Minkowski adotaremos a seguinte assinatura  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +)$

Um ansatz com simetria cilíndrica para o tensor momento-energia pode ser definido como  $T_N^M = T_M \delta_N^M$  [14, 25], que juntamente com ansatz métrico dada pela equação (4.27), nos conduz para a equação da densidade de energia [14, 25, 48]

$$t_0(r) = -\frac{1}{\kappa_6} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{\sigma'}{\sigma} \right)' + \frac{3}{2} \left( \frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma'}{\gamma} \right)' - \frac{1}{4} \left( \frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 + \frac{3}{4} \frac{\sigma' \gamma'}{\sigma \gamma} \right] - \Lambda . \quad (4.28)$$



A fim de obtermos uma geometria regular livre de singularidades, precisamos impor novamente as seguintes condições de regularidade na origem [34, 46]

$$\sigma(\rho)|_{\rho=0} = cte, \quad \sigma'(\rho)|_{\rho=0} = 0, \quad (4.29)$$

$$\gamma(\rho)|_{\rho=0} = 0, \quad \left(\sqrt{\gamma(\rho)}\right)' \Big|_{\rho=0} = 1. \quad (4.30)$$

No modelo tipo-corda fina Gherghetta-Shaposhnikov (GS), as soluções do fator de warp para o exterior do núcleo da brana são obtidas da seguinte forma [14]:

$$\sigma(\rho) = e^{-c\rho}, \quad \gamma(\rho) = R_0^2 \sigma(\rho). \quad (4.31)$$

O parâmetro  $c^2 = -\frac{2}{5}\kappa_6\Lambda$  pode ser obtido através da solução de vácuo da equação (4.28). Como observado no segundo capítulo apenas a primeira das condições de regularidade é satisfeita. Além disso, o escalar de curvatura fornece um espaço-tempo  $AdS_6$  em todo o bulk onde  $R = -\frac{15}{2}c^2$  [14].

No modelo de mundo-brana do tipo conifold resolvido, ao invés de utilizarmos um disco, é escolhida uma 2-seção do conifold resolvido como uma variedade transversa [50, 61, 62]. São considerados os seguintes fatores de warp:

$$\sigma(\rho) = e^{-(c\rho - \tanh c\rho)}, \quad \gamma(\rho) = \left(\frac{u(\rho, a)^2 + 6a^2}{6}\right) \sigma(\rho), \quad (4.32)$$

onde  $a$  é o parâmetro de resolução e a função  $u$  tem a forma dada pela equação (4.11).

A figura 4.5 é a representação gráfica dos fatores de warp  $\sigma(\rho)$  e  $\gamma(\rho)$  para  $c = 1, 0$  e com diferentes valores para  $a$ . O caso para corda fina também está representado na figura 4.5. A função de warp  $\sigma(\rho)$  foi proposto pela primeira vez em modelos de mundos brana do tipo string-cigar [48]. Note que assintoticamente ele recupera o comportamento exponencial do modelo de corda fina. Além disso, a função warp deste modelo satisfaz todas as condições de regularidade na origem. Por esse motivo, cenários que apresentam funções de warp deste tipo efetuam correções próximas da brana para modelos do tipo-corda fina [48, 63].

O ansatz angular dado pela equação (4.32) apresenta características importantes na origem. Note que  $\gamma(0) = a^2$ , este parâmetro de resolução remove a singularidade cônica na origem [48]. Além disso, para  $\rho = 0$ , a geometria  $ds_6^2 = \sigma(\rho)\eta_{\mu\nu}(x^\zeta)dx^\mu dx^\nu + d\rho^2 + \gamma(\rho)d\theta^2$  recai na métrica dada pela seguinte equação  $ds_5^2 = \eta_{\mu\nu}(x^\zeta)dx^\mu dx^\nu + a^2d\theta^2$ . Portanto, o fluxo geométrico do conifold resolvido, através do parâmetro de resolução, conduz a redução dimensional  $\mathcal{M}_6 \rightarrow \mathcal{M}_5$ . A redução dimensional tipo-corda  $\mathcal{M}_6 \rightarrow \mathcal{M}_4$  é obtida para  $a = 0$ . Tais características são de fundamental importância na localização de campos de  $spin - 1$  e  $spin - 1/2$  [60, 64].

Representamos graficamente a densidade de energia (figura 4.6) para diferentes valores de  $a$ . Observe que o máximo do tensor momento-energia é deslocado da origem. Tal característica é frequentemente observada em modelos de mundos-brana de tipo-corda espessa

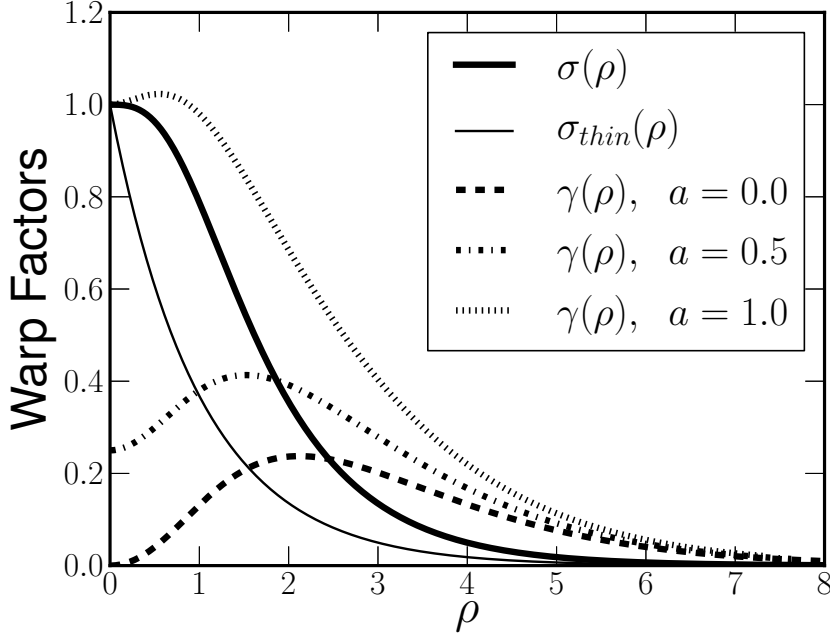


Figura 4.5: Fator de warp  $\sigma(\rho)$  e componente métrica angular  $\gamma(\rho)$  para  $c = 1, 0$ .

[63, 65, 66]. O deslocamento do máximo do tensor momento-energia tem importância fundamental na análise dos modos massivos para os campos gravitacionais [67], calibre [68], férmions [69, 70] e elko exótico [71]. Observando a figura 4.6 notamos que a posição do máximo da densidade de energia apresenta grandes variações em função do parâmetro de resolução. Apesar desta característica particular, o parâmetro de resolução tem grande importância no espectro massivo, o qual tem influência direta na correção do potencial gravitacional como discutiremos em detalhes na seção de resultados numéricos.

### 4.3 Flutuações gravitacionais

Estudaremos agora as flutuações gravitacionais sobre uma 3-brana inserida em um conifold resolvido transversal (RC). Recentemente demonstrou-se que os campos escalar, de calibre e fermiônico podem ser localizados em modelos de mundos brana [60, 64, 72]. Além disso, o estudo da localização de gravidade é bastante relevante, uma vez que, havendo soluções adequadas para os seus modos massivos, nos proporciona importantes implicações fenomenológicas [1, 56]. Esta análise será realizada na seção referente as correções na lei de Newton.

Antes de tudo, consideraremos uma pequena perturbação  $h_{\mu\nu}$  na métrica de fundo, da seguinte forma:

$$ds_6^2 = \sigma(\rho; c)(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu + d\rho^2 + \gamma(\rho; c, a)d\theta^2. \quad (4.33)$$

Impondo o calibre de traço nulo transversal  $\nabla^\mu h_{\mu\nu} = 0$ , a linearização das equações de

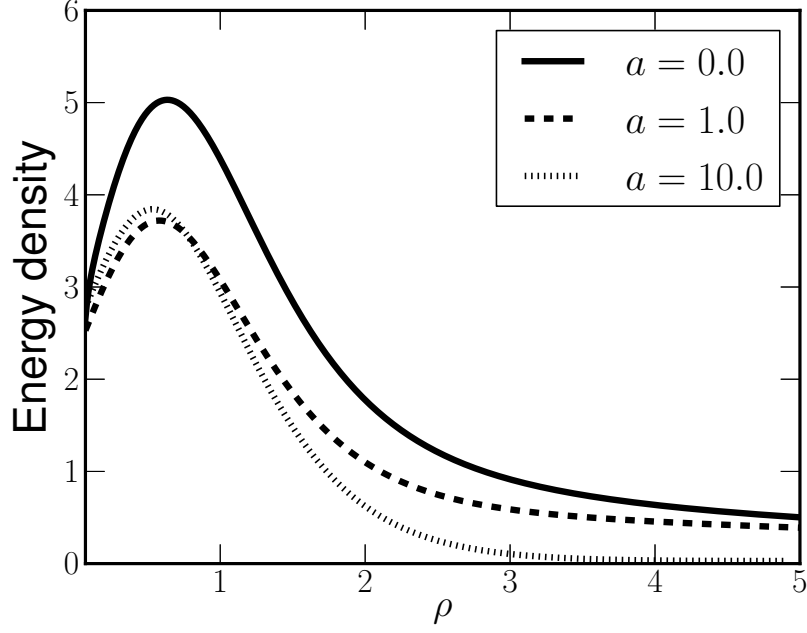


Figura 4.6: Densidade de Energia  $t_0(\rho)$  para diferentes valores de  $a$ .

Einstein produzem as seguintes equações para perturbação gravitacional [14, 65, 66].

$$\partial_A(\sqrt{-g_6} g^{AB} \partial_B h_{\mu\nu}) = 0 . \quad (4.34)$$

Usando a decomposição de Kaluza-Klein, obtemos:

$$h_{\mu\nu}(x^\zeta, \rho, \theta) = \tilde{h}_{\mu\nu}(x^\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(\rho) e^{in\theta} , \quad (4.35)$$

onde  $n$  e  $l$  são números inteiros, e impondo a condição de massa  $\square_4 \tilde{h}_{\mu\nu}(x^\zeta) = m_n^2 \tilde{h}_{\mu\nu}(x^\zeta)$ , os modos radiais podem ser calculados pela seguinte equação:

$$\phi''(\rho) + \left( 2\frac{\sigma'}{\sigma} + \frac{1}{2} \frac{\gamma'}{\gamma} \right) \phi'(\rho) + M^2(\rho) \sigma(\rho) \phi(\rho) = 0 , \quad (4.36)$$

onde  $'$  indica a derivada  $\partial_\rho$ . O fator  $M^2(\rho) = \left( m^2 - \frac{\sigma(\rho)}{\gamma(\rho)} l^2 \right)$  é o termo de massa efetiva que contém contribuições do momentum angular orbital  $l$ .

Devido a simetria axial, e com o propósito de garantirmos o operador diferencial auto-adjunto na equação (4.34), adotaremos as seguintes condições de contorno sobre  $\phi_m$  [14, 25, 63, 66].

$$\phi'_n(0) = \phi'_n(\infty) = 0 . \quad (4.37)$$

Além disso, estes modos satisfazem a seguinte condição de ortonormalidade:

$$\int_0^\infty \sigma(\rho) \sqrt{\gamma(\rho)} [ \phi_{n_1}^*(\rho) \phi_{n_2}(\rho) ] d\rho = \delta_{n_1 n_2} . \quad (4.38)$$

Para  $M^2(\rho) = 0$  (modo não-massivo gravitacional), a solução para a equação (4.36) que satisfaz as condições de contorno (4.37) é uma constante  $\phi = \phi_0$  [14]. Portanto, a partir da condição de ortonormalidade (4.38), obtemos:

$$\phi_0 = \left( \int_0^\infty \sigma(\rho) \sqrt{\gamma(\rho)} d\rho \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.39)$$

Observamos que, para ambos modelos RS e GS, os fatores de warp decrescem exponencialmente, as soluções constantes são finitas e, portanto, o modo zero é localizado. A solução analítica para os modos não-massivos do modelo GS, é dada por:  $\phi_0 = \sqrt{\frac{3c}{2R_0}}$ .

Para  $M^2(\rho) \neq 0$  (modo massivo), a equação diferencial (4.36), com os fatores de warp dados pela equação (4.32), torna-se:

$$\phi''(\rho) - \left( \frac{5}{2}c \tanh^2(c\rho) - \frac{1}{2} \frac{u(u^2 + 9a^2)^{\frac{1}{2}}}{(u^2 + 6a^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \phi'(\rho) + \left( m^2 - \frac{\sigma(\rho)}{\gamma(\rho)} l^2 \right) e^{(c\rho - \tanh c\rho)} \phi(\rho) = 0. \quad (4.40)$$

No limite  $\rho \rightarrow \infty$ , temos

$$\phi''(\rho) - \frac{5}{2}c \phi'(\rho) + m^2 e^{c\rho} \phi(\rho) = 0, \quad (4.41)$$

comprovando que esta equação apresenta forma semelhante a encontrado no modelo GS [14] para uma massa reescalada  $m^2 \rightarrow m^2/e$ . Portanto, o comportamento tipo-corda fina é recuperado assintoticamente, como esperado em modelos de mundos-brana tipo-corda [63, 66].

Observamos que os autovalores de momento angular  $l$  induzem uma degenerescência no espectro de massa. Daqui em diante abordaremos soluções do tipo ondas- $s$ . Para modelos do tipo-corda fina a solução analítica para ondas- $s$  é dada pela seguinte expressão [14]:

$$\phi_m(\rho) = e^{(5/4)c\rho} \left[ C_1 J_{5/2} \left( \frac{2m}{c} e^{\frac{c\rho}{2}} \right) + C_2 Y_{5/2} \left( \frac{2m}{c} e^{\frac{c\rho}{2}} \right) \right], \quad (4.42)$$

que diverge. Portanto, também não há estados massivos vinculados em modelos de mundos-brana do tipo conifold resolvido.

## 4.4 Correção do potencial Newtoniano

O estudo sobre as correções do potencial Newtoniano nos proporciona uma abordagem alternativa para tratarmos os modos gravitacionais massivos. Este procedimento nos fornece estudos de implicações fenomenológicas em cenários de mundos-brana via correções na lei de Newton [1, 56]. Nesta seção obteremos uma expressão geral em cenários de branas espessas para calcularmos correções no potencial Newtoniano.

A transformação de coordenadas

$$z(\rho) = \int_0^\rho \sigma^{-\frac{1}{2}}(\rho') d\rho', \quad (4.43)$$

fornece uma métrica plana conforme dada por

$$ds_6^2 = \sigma(z)(\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2 + \beta(z)d\theta^2), \quad (4.44)$$

onde  $\beta(z) = \gamma(z)/\sigma(z)$ . Fazendo uma mudança na variável dependente, obtemos as seguintes equações:

$$\phi_n(z) = K(z)\Psi_n(z), \quad K(z) = \sigma^{-1}(z)\beta^{-\frac{1}{4}}(z). \quad (4.45)$$

Agora transformando a equação (4.36) em uma equação tipo-Schrödinger para a função  $\Psi_n(z)$ , temos

$$-\ddot{\Psi}_n(z) + U(z)\Psi_n(z) = m_n^2 \Psi_n(z), \quad (4.46)$$

onde os pontos sobre a função  $\Psi_n(z)$  representam derivadas com respeito a coordenada  $z$ . O potencial quântico análogo  $U(z)$  assume a seguinte forma:

$$U(z) = \mathcal{W}^2(z) + \dot{\mathcal{W}}(z), \quad \mathcal{W}(z) = \left( \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} + \frac{1}{4} \frac{\dot{\beta}}{\beta} \right). \quad (4.47)$$

Observe que a expressão (4.46) preserva a equação da mecânica quântica supersimétrica análoga da seguinte forma:

$$\left[ \frac{d}{dz} + \mathcal{W}(z) \right] \left[ -\frac{d}{dz} + \mathcal{W}(z) \right] \Psi(z) = \mathcal{Q}\mathcal{Q}^\dagger \Psi(z) = m^2 \Psi_m(z). \quad (4.48)$$

Desta forma asseguramos a estabilidade espectral e garantimos ausência de modos taquiônicos.

Com as mudanças de variáveis mencionadas acima, as condições de contorno tornam-se

$$\frac{\dot{\Psi}(0)}{\Psi(0)} = -\frac{\dot{K}(0)}{K(0)}, \quad \frac{\dot{\Psi}(\infty)}{\Psi(\infty)} = -\frac{\dot{K}(\infty)}{K(\infty)}. \quad (4.49)$$

A condição de ortogonalidade passa a ser:

$$\int_0^\infty \Psi_{m_i}^*(z)\Psi_{m_j}(z)dz = \delta_{ij}. \quad (4.50)$$

É importante mencionarmos que o modo-zero gravitacional deve reproduzir a gravidade 4-dimensional na brana [1, 56]. Portanto, a solução da equação (4.46) para  $m = 0$  é

$$\Psi_0(z) = C\sigma(z)\beta^{\frac{1}{4}}(z), \quad (4.51)$$

onde  $C$  é a constante de normalização. Para o modelo GS, o modo zero é analiticamente calculado como

$$\Psi_0(z) = \sqrt{\frac{24}{c^3}} \left( z + \frac{2}{c} \right)^{-2}. \quad (4.52)$$

É importante mencionarmos também que o modo-zero gravitacional é não singular e normalizável para todos os valores do parâmetro de resolução, como mostrado na figura 4.7. Além disso, a solução de massa nula compartilha perfil semelhante com a densidade de energia devido ao valor máximo do núcleo de energia da brana ser deslocado da origem para pequenos valores do parâmetro  $a$  de resolução. Esta propriedade também foi observada em modelos de mundos-brana string-cigar [66, 67] e vórtice abeliano [65]. Observamos que para grandes valores do parâmetro de resolução  $a$ , o modo-zero gravitacional tem seu pico na origem. Isto está de acordo com os seguintes modelos [14, 70, 73]. Este aspecto do parâmetro de resolução exerce influência considerável na correção do potencial Newtoniano.

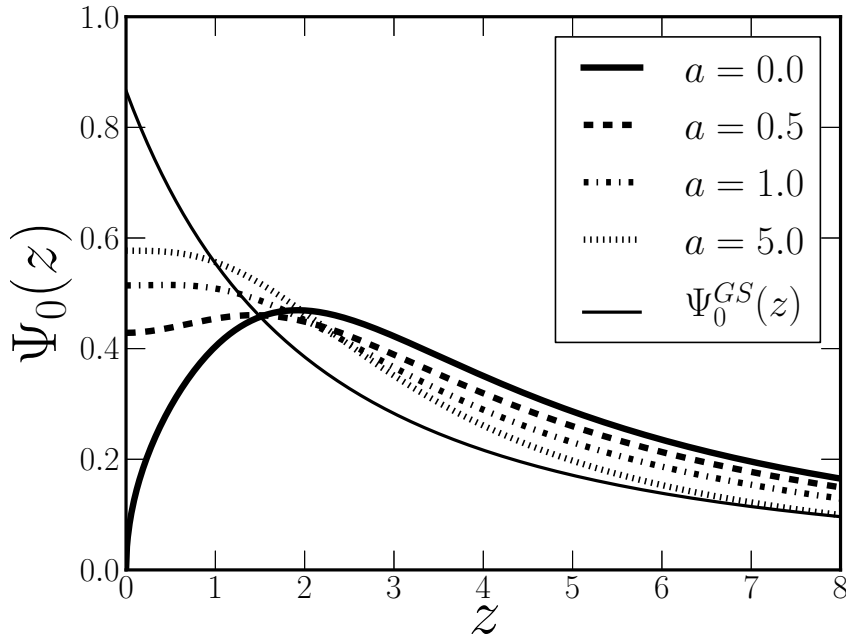


Figura 4.7: Modo-zero gravitacional para o conifold resolvido. O caso GS está representado no gráfico.

Além disso, para  $m \neq 0$ , as soluções para equação (4.46) no cenário GS são dadas por:

$$\Psi_m(z) = \sqrt{z + \frac{2}{c}} \left[ C_1 J_{\frac{5}{2}} \left( mz + \frac{2m}{c} \right) + C_2 Y_{\frac{5}{2}} \left( mz + \frac{2m}{c} \right) \right], \quad (4.53)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes.

Verificaremos agora se as interações gravitacionais mediadas pelos modos Kaluza-Klein estão em conformidade com as leis da gravidade em quatro dimensões. Para este propósito, vamos considerar um acoplamento mínimo matéria-gravidade com o objetivo de encon-

trarmos valores para a constante de acoplamento. Visando este objetivo iremos usar a aproximação de campo fraco para determinar as modificações no termo cinético do gráviton e no vértice de interação matéria-gravidade com a finalidade de obtermos desvios na lei de Newton da gravidade por meio do espalhamento entre dois bósons escalares  $\Phi$  trocando grávitons.

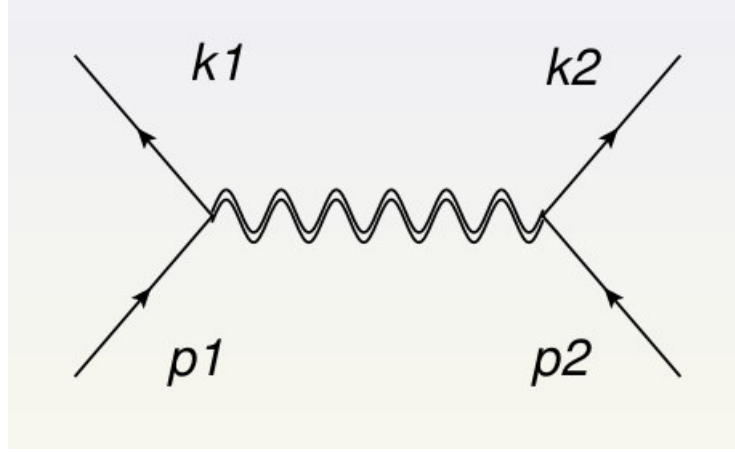


Figura 4.8: Diagrama de Feynman em tree-level para dois bósons escalares interagindo via troca de grávitons.

Para realizarmos a aproximação de campo fraco, primeiramente reescreveremos a métrica na forma conforme (consulte a equação (4.55)).

Determinaremos agora as modificações sobre o vértice de interação no setor de matéria

$$S_M = \int d^4x dy d\theta \sqrt{-g} \mathcal{L}_M(\Phi, g_{AB}). \quad (4.54)$$

Realizando a aproximação de campo fraco, obtemos:

$$ds_6^2 = \sigma(z)[(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu + dz^2 + \beta(z)d\theta^2], \quad (4.55)$$

Expandindo  $\mathcal{L}_M$  em série de Taylor, temos:

$$\mathcal{L}_M(\Phi, g_{AB}) = \mathcal{L}_M(\Phi, \eta_{\mu\nu}) + h_{\mu\nu} \left. \frac{\delta \mathcal{L}_M(\Phi, g_{AB})}{\delta g_{AB}} \right|_{g=\eta} + O(h^2) \dots \quad (4.56)$$

Com base na definição do tensor momento-energia (3.6), podemos escrever a densidade tensorial da seguinte forma:

$$\mathcal{T}^{AB} = g^{AB} \mathcal{L}_M - 2 \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g_{AB}}. \quad (4.57)$$

Vamos impor agora as condições de fixação de calibre:

$$h_{\mu 5} = 0, \quad (4.58)$$

$$h_{\mu 6} = 0, \quad (4.59)$$

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0 \quad (4.60)$$

e

$$h^\mu{}_\mu = h = 0. \quad (4.61)$$

Agora para calcularmos o potencial gravitacional entre duas partículas com massas  $M_1$  e  $M_2$  na brana, tomaremos a decomposição de Kaluza-Klein da seguinte forma:

$$h_{\mu\nu}(x^\zeta, z, \theta) = \frac{1}{M_{Pl}^2} K(z) \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{h}_{\mu\nu}^{(n)}(x^\zeta) \Psi_n(z) e^{i\ell\theta}. \quad (4.62)$$

Por conseguinte, temos o Lagrangiano

$$\mathcal{L}_{\mathcal{M}}(\Phi, g'_{MN}) = \mathcal{L}_{\mathcal{M}}(\Phi, g_{MN}) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z) \tilde{h}_{\mu\nu}^{(n)}(x^\zeta) \mathcal{T}^{\mu\nu}(x^\zeta), \quad (4.63)$$

onde a expressão das constantes de acoplamento matéria-gravidade são dadas por:

$$a_n(z) = \frac{1}{2M_{Pl}^2} \frac{\Psi_n(z) e^{i\ell\theta}}{\sigma(z) \beta^{\frac{1}{4}}(z)}. \quad (4.64)$$

Podemos agora calcular o potencial estático gerado pela troca do modo-zero e pelos estados massivos KK. Neste caso o potencial de Yukawa pode ser calculado pela seguinte expressão

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n(z = \bar{z}) \right|^2 \frac{e^{-m_n r}}{r}, \quad (4.65)$$

onde  $\bar{z}$  é a posição do máximo da densidade de energia na coordenada  $z$ . Consequentemente, na 3-brana, o potencial gravitacional entre duas massas pontuais,  $M_1$  e  $M_2$ , receberá uma contribuição tipo-Yukawa dos modos massivos discretos calculado pela seguinte equação

$$V(r) \sim G_N \frac{M_1 M_2}{r} + G_N \frac{M_1 M_2}{r} \sum_{n>0}^{\infty} \frac{\Psi_n^2(\bar{z})}{\sigma^2(\bar{z}) \beta^{\frac{1}{2}}(\bar{z})} e^{-m_n r}, \quad (4.66)$$

Portanto, obtivemos uma expressão geral para o cálculo do potencial gravitacional. Para analisarmos os efeitos dos modos Kaluza-Klein gravitacionais no cenário de conifold resolvido para a lei de Newton da gravidade, precisamos calcular o espectro de massa e as correspondentes autofunções usando métodos numéricos apropriados.

## 4.5 Análise numérica

Nas seções anteriores apresentamos as principais características do modelo de mundo-brana tipo-conifold resolvido onde efetuamos um estudo de localização de gravidade neste cenário. Além disso, encontramos uma expressão geral para a correção do potencial



gravitacional Newtoniano. Agora podemos calcular a correção para este cenário. Note que as principais quantidades da equação (4.66) são as massas  $m_n$  e as funções de onda  $\Psi_n(z)$ . As quantidades  $\Psi_n(z)$  são as auto-soluções para os problemas de autovalores (4.40) e (4.46). Contudo, devido a forma da equação (4.40), tais quantidades não podem ser obtidas analiticamente. Portanto, utilizamos um método numérico adequado para resolvermos este problema.

Utilizamos o método da matriz [52] baseado no esquema de diferenças finitas com erro de truncamento de segunda ordem para solucionarmos um problema de Sturm-Liouville (4.40). O método matricial é uma técnica numérica utilizada para aproximar as primeiras autofunções e autovalores em problemas de Sturm-Liouville. De fato, em modelos de mundo-brana, apenas as massas de valores pequenos são fisicamente interessantes, favorecendo o uso dos métodos das diferenças finitas. Esta técnica foi utilizada no contexto de mundo-brana para obter o espectro massivo em cinco [74] e seis dimensões [67, 68, 69].

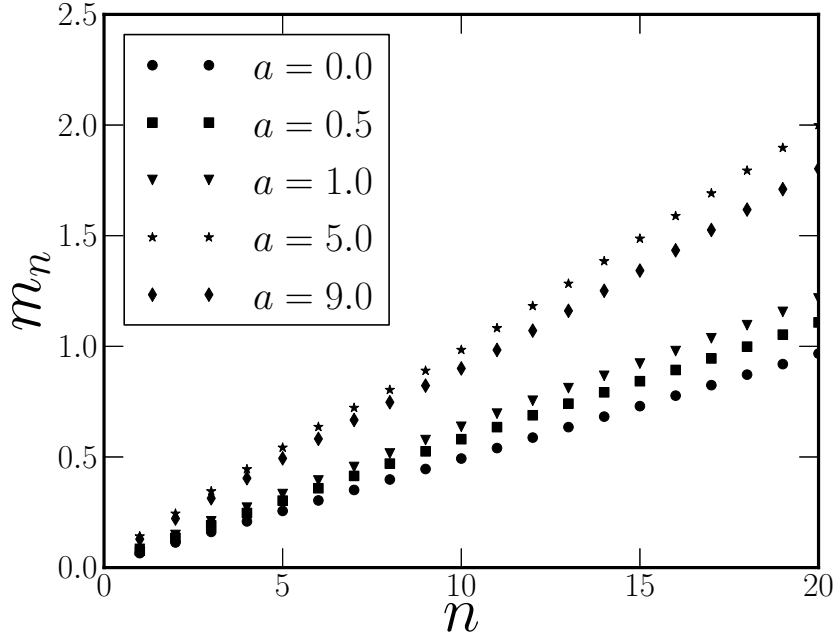


Figura 4.9: Espectro gravitacional de Kaluza-Klein para diferentes valores do parâmetro de resolução  $a$ .

Estudamos os efeitos da torre de Kaluza-Klein em termos do parâmetro de resolução  $a$ . Este parâmetro está relacionado com o fluxo geométrico  $c$  que atua como uma escala de energia [67, 68, 69]. Então, resolvemos a equação (4.40) para diferentes valores do parâmetro de resolução  $a$  e mantemos  $c = 1, 0$  fixo. Discretizamos o domínio  $\rho \in [0, 0, 8, 0]$  com  $N = 1600$  subdivisões, para que tenhamos um passo constante de valor  $h = 0, 005$ .

Traçamos os vinte primeiros autovalores de massa na figura 4.9. O espectro é real e cresce monotonicamente como esperado. Note que, como o parâmetro de resolução cresce, o espectro aumenta em magnitude e o espaçamento entre as massas aumenta. Observamos ainda que as massas excedem o limite  $m = 1, 0$  para altos valores de  $a$  caindo

no regime transplanckiano (lembre que  $m_n \ll c = 1.0$  [1, 14, 25, 56]). Assim, o parâmetro de resolução deve assumir valores moderados para termos estados fisicamente aceitáveis.

Com os autovalores de massa, podemos resolver a equação tipo-Schrödinger (4.46). Este procedimento foi utilizado no modelo de brana híbrida [74]. Uma vez que a transformação de coordenadas  $z(\rho)$  não possui expressão analítica para o fator de warp (equação (4.32)), uma aproximação numérica é necessária para a construção do potencial quântico análogo. Após a quadratura numérica da função  $z(\rho)$ , conseguimos calcular as funções  $\sigma(z)$  e  $\beta(z)$  usando interpolação de spline cúbico. Com isso, possibilitamos uma aproximação numérica para  $U(z)$ .

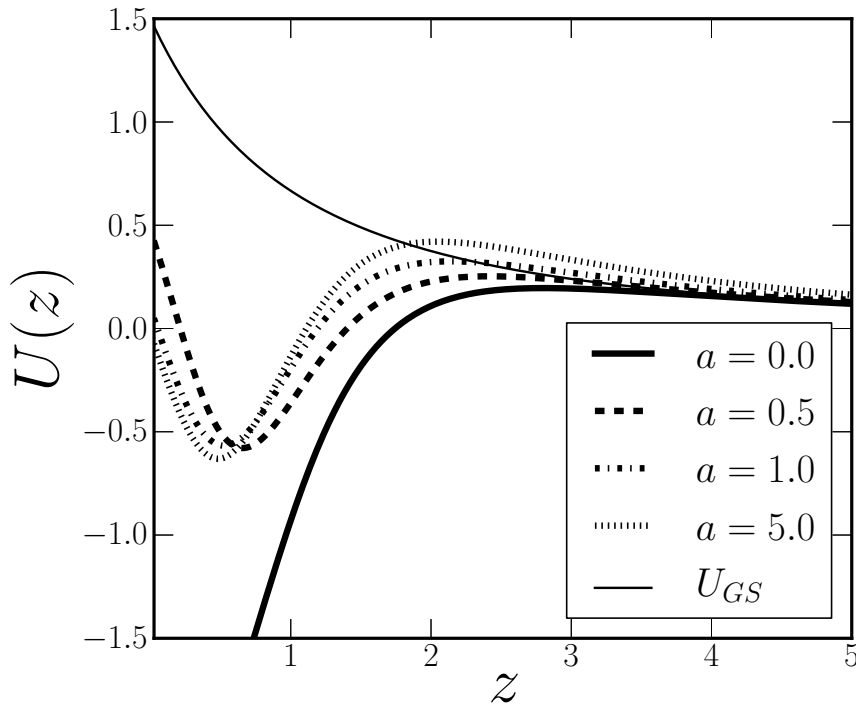


Figura 4.10: Potencial quântico análogo para os grávitons no cenário de mundo-brana tipo-conifold resolvido. Representamos o caso tipo-corda fina  $U_{GS}(z)$ .

Representamos o potencial quântico  $U(z)$  para o conifold resolvido na figura 4.10 com diferentes valores de  $a$  e para  $c = 1, 0$ . Representamos na figura 4.10 o caso tipo-corda fina. Para a nova coordenada  $z$ , o domínio de  $z \in [0, 65]$ . Note que o parâmetro de resolução remove a singularidade na origem para o modelo CR (conifold resolvido). Tal característica também foi verificada para o campo escalar e para o campo de matéria [60, 64, 72]. Para  $a = 0$ , o potencial quântico análogo apresenta uma singularidade na origem. Comportamento semelhante encontramos em modelos string-cigar [66]. Além disso, a profundidade do poço potencial e a altura da barreira são suavizadas pelo parâmetro de resolução  $a$  ( $a = 0$ ), não modificando-se para  $a > 1.0$ .

Analisamos como o parâmetro de resolução afeta fenomenologicamente a gravidade no cenário de mundo-brana tipo-conifold resolvido. Resolvemos a equação tipo-Schrödinger usando o método de Numerov [75] com os autovalores de massa obtidos anteriormente

como soluções da equação de Sturm-Liouville (4.36). Representamos nas figuras 4.11 e 4.12 as soluções numéricas para  $a = 0$  e  $a = 0,5$ , respectivamente, para diferentes autovalores de massa. Um resultado notável diz respeito a função de onda  $\Psi_7$  para o conifold singular ( $a = 0$ ), que possui perfil ressonante (funções de onda massivas possuem grande amplitude próximo a brana [76, 77]). A massa deste estado particular é  $m_7 = 0,351145$ , que está de acordo com o limite de massa ressonante  $m^2 < \max(U)$  [56, 57]. No presente caso,  $\sqrt{\max(U)} = 0.444009$ . É importante mencionar que os estados de ressonância gravitônico também podem ser encontrados em outros cenários de mundos-brana tipo-corda espessa com singularidade cônica, por exemplo no modelo string-cigar [67]. Entretanto, o caso resolvido não apresenta modos ressonantes. Resolvemos as equações radiais para vários valores de  $a$ .

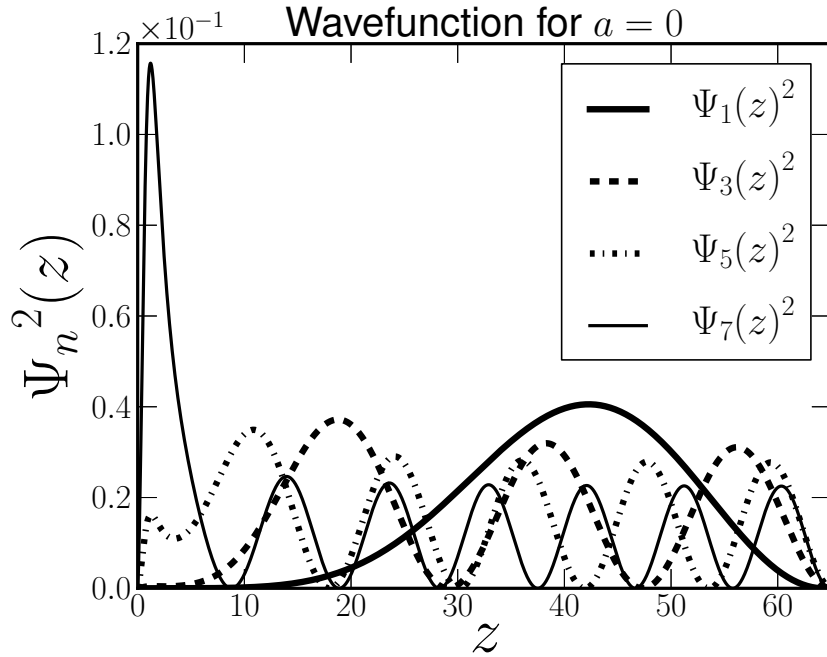


Figura 4.11: Funções de onda do gráviton normalizadas para o cenário de mundo-brana tipo-conifold ( $a = 0$ ). O sétimo autoestado possui perfil ressonante.

As principais quantidades que contribuem para as correções do potencial gravitacional Newtoniano são as massas de Kaluza-Klein exponencialmente suprimidas e as correspondentes autofunções. Curiosamente, na referência [78], um modelo de mundo-brana assimétrico 5-dimensional expõe um estado ressonante que efetua uma forte contribuição para a correção na lei de Newton. Por outro lado, nos modelos de brana simétrica, o primeiro autoestado contribui muito para esta correção [56, 74].

A partir dos resultados acima, somos levados a compreender a partir da equação (4.66) que para  $n = 7$  (autoestado ressonante) é o termo majoritário da soma. Para expressar mais claramente este comportamento na correção do potencial Newtoniano, calculamos a partir da equação (4.66) todas as vinte auto-soluções  $\{m_n, \Psi_n(\bar{z})\}$ . É importante mencionarmos que a posição do máximo da função de onda ressonante  $\bar{z}$  e a posição do máximo da densidade de energia na coordenada  $z$  são demasiado próximas. Assim, a troca de

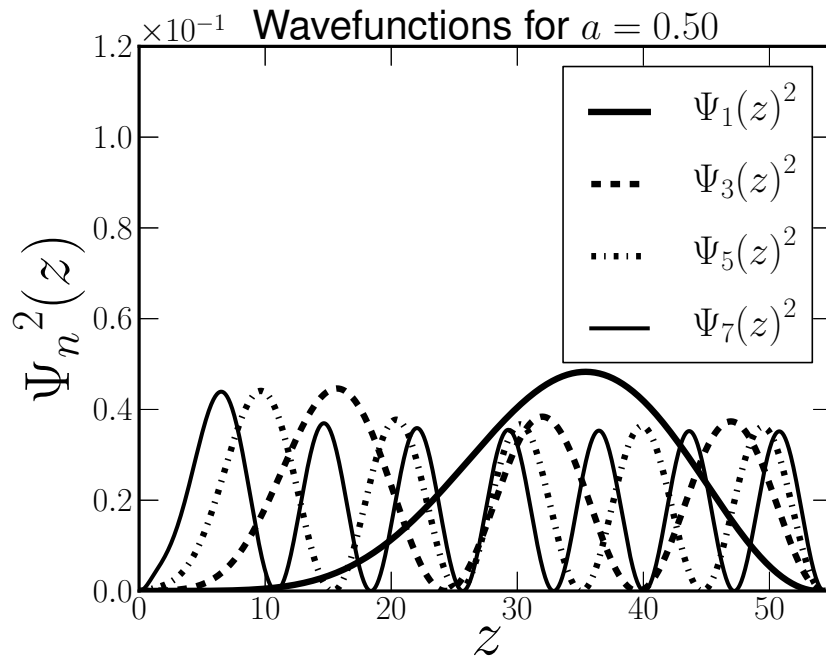


Figura 4.12: Funções de onda do gráviton normalizadas para o cenário de mundo-brana tipo-conifold ( $a \neq 0$ ).

grávitons está sendo calculada próxima do ponto onde a energia da brana possui valor máximo. Mostramos este resultado na figura 4.10. Observe que a força gravitacional entre duas massas pontuais é ligeiramente aumentada para curtas distâncias.

Portanto, a obtenção do desvio da lei de Newton poderia, em princípio, ser obtido na próxima geração de aceleradores de partículas. Uma vez comprovado experimentalmente a existência de uma correção do potencial Newtoniano em tais aceleradores, estes instrumentos científicos, serviriam de portais para acessarmos o hiperespaço.

# Capítulo 5

## Conclusões

Neste trabalho propusemos dois modelos diferentes capazes de suportar a localização do campo gravitacional. Para o modelo apresentado no capítulo quatro conseguimos obter uma expressão que fornece uma correção para o potencial Newtoniano em uma geometria do tipo conifold. A seguir, uma recapitulação dos principais resultados obtidos neste trabalho juntamente com as possibilidades de trabalhos futuros.

### 5.1 Mundo-Brana tipo corda espessa suave em seis dimensões

Neste capítulo estudamos as propriedades físicas e geométricas de um mundo-brana 6-dimensional tipo-corda espessa considerando uma dependência quadrática na coordenada radial da dimensão extra. Propomos uma função “warp” suave que concorda com o modelo tipo-corda fina para pontos do espaço-tempo distantes da brana, produzindo, além disso, correções próximas da brana. A geometria do modelo possui simetria axial em torno da origem, apresentando curvatura bem comportada. Além disso, verificamos que a fonte desta geometria satisfaz todas as condições de energia, cuja densidade de energia apresenta valor máximo deslocado da origem.

Realizamos a localização do campo gravitacional neste cenário. O modo gravitacional de massa nula é localizado e, diferentemente dos modelos de corda fina, temos um máximo deslocado da origem, que para grandes valores da constante cosmológica tende a coincidir com o valor máximo da densidade de energia. Verificamos que o deslocamento do núcleo da brana é devido a existência de uma correção suave nas proximidades da brana. Além disso, para grandes valores da constante cosmológica, o modelo é suavemente reduzido para um modelo tipo-corda fina para pontos além da origem. Em seguida, estudamos os modos massivos gravitacionais. Primeiramente, analisamos a equação dos modos massivos gravitacionais para o regime assintótico e mostramos que as soluções próximas da brana são expressas em termos das funções de Bessel de primeiro tipo para valores de números quânticos de momento angular  $l \neq 1$ . Longe da brana, recuperamos o modelo GS sem estados degenerados. Vimos que as soluções numéricas para os modos massivos revela-

ram que, em contraste com o modelo de corda fina, as soluções massivas possuem uma amplitude considerável próximo a brana, indicando a possibilidade de estados massivos gravitacionais interagindo com o defeito. Este resultado foi corroborado pela aproximação de Schrödinger, onde estudamos o potencial quântico análogo. Desse formalismo provamos que os modos não-massivos devem satisfazer a equação tipo-Schrödinger para  $m = 0$ . Além disso, concluímos que os estados massivos podem interagir com a brana somente para  $l = 0$ , que se refere aos gravitons 4-dimensionais.

## 5.2 Correção do potencial Newtoniano em modelo de brana espessa 6-dimensional

Neste capítulo estudamos flutuações de gravidade em uma brana localizada em um conifold resolvido (CR) não-fatorizável transverso. O modelo CR é um cenário de mundo-brana tipo-corda espessa, cujo espaço transverso é uma 2-seção de um conifold resolvido. Tal modelo de brana aprisiona os campos escalar [72], gauge [60] e fermiônico [64]. Neste capítulo mostramos que o mundo-brana CR também aprisiona campo gravitacional. O modelo CR tem um parâmetro  $a$ , chamado parâmetro de resolução, que remove a singularidade cônica. Este parâmetro apresenta forte influência nas propriedades físicas e geométricas do modelo [60, 64, 72]. Em vista disso, estudamos os efeitos do parâmetro de resolução do modelo CR com implicações fenomenológicas via pequenos desvios no potencial Newtoniano. Derivamos uma expressão geral para a correção no potencial gravitacional entre duas partículas massivas devido aos estados gravitacionais de Kaluza-Klein (KK) em um modelo de mundo-brana tipo-corda espessa. A correção apresenta um termo de massa exponencialmente suprimido.

Os modos não-massivos, responsáveis por reproduzir a gravidade em quatro dimensões, estão presos na brana sendo não-singular e normalizável para todos os valores do parâmetro de resolução. Além disso, o modo não-massivo é deslocado da origem compartilhando perfil semelhante com a densidade de energia da brana.

Usando métodos numéricos, obtivemos as soluções massivas KK para o gráviton. O espectro é real e cresce monotonamente, como esperado. Contudo, como o parâmetro de resolução aumenta, o espectro cresce em magnitude de modo que para grandes valores de  $a$ , as massas atingem o regime transplankiano. Assim, o parâmetro de resolução deve assumir valores moderados para que possam ser considerados estados fisicamente aceitáveis. Calculamos também o potencial quântico análogo. Vimos que o parâmetro de resolução remove a singularidade do potencial na origem. Entretanto, para valores elevados de  $a$  o poço de potencial não apresenta mudanças significativas.

Resolvemos numericamente a equação tipo-Schrödinger para o potencial quântico análogo usando os autovalores de massa para vários valores do parâmetro de resolução. Para  $a = 0$  (conifold singular) encontramos um modo ressonante que é o sétimo autoestado. Porém, para  $a \neq 0$  (conifold resolvido), não encontramos estados ressonantes.

Uma vez que o valor do máximo da função de onda é uma quantidade que é utilizada para calcular a correção do potencial gravitacional, os estados ressonantes são os que mais contribuem para essa correção. Um resultado importante é que o sétimo autoestado é o responsável pela correção do potencial Newtoniano em vez do primeiro autoestado.

Apresentamos resultados para uma escala de energia fixa com valor de massa  $m \ll c = 1.0$ , de modo que o parâmetro de resolução  $a$  deve preferencialmente ser menor do que 1.0 para termos estados fisicamente aceitáveis. Resultados semelhantes foram obtidos para diferentes valores de  $c$ .

### 5.3 Perspectivas

Motivados por estes resultados, apresentaremos aqui algumas perspectivas de trabalhos futuros:

1. Estudar consequências fenomenológicas do modelo CR dentro do contexto da entropia configuracional [79];
2. Investigar correções da lei de Coulomb [80] em cenários de branas tipo-corda espessa em seis dimensões;
3. Pesquisar soluções cosmológicas em modelos de branas tipo-corda espessa em seis dimensões.

# Referências Bibliográficas

- [1] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999).
- [2] P. Horava and E. Witten, Nucl. Phys. B **460**, 506 (1996).
- [3] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, Phys. Lett. B **429**, 263 (1998).
- [4] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and J. March-Russel, Phys. Rev. D **63**, 064020 (2001).
- [5] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999).
- [6] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali and N. Kaloper, J. High Energy Phys. 012 (2000) 010.
- [7] J. W. Chen, M. A. Luty and E. Pontón, J. High Energy Phys. 09 (2000) 012.
- [8] J. Khoury, B. A. Ovrut, P. J. Steinhardt and N. Turok, Phys. Rev. D **64**, 123522 (2001).
- [9] Nunes, Luciana Angelica da Silva. Visão supersimétrica de Modelos Topológicos e Branas em  $D = 4$  e  $D = 5$ . 2008.138p. Tese de doutorado (Tese em Física) - Departamento de Pós-Graduação em Física, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.
- [10] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [11] Weinberg, Steven. Gravitation and Cosmology: principles and applications of the general theory of relativity. John Wiley e Sons, Inc. New York-London-Sydney-Toronto, 1972.
- [12] Mak, M.K. and Harko, T., Cosmological particle production in five-dimensional Kaluza-Klein theory, Class. Quant. Grav. 16, 4085-4099 (1999).
- [13] Duff, M.J., Kaluza-Klein theory in perspective, hep-th/9410046, arXiv, NI-94-015, CTP-TAMU-22-94, C94-09-19.6 (1994).
- [14] T. Gherghetta and M. E. Shaposhnikov, Phys. Rev. Lett. **85**, 240 (2000).



- [15] Tahim, M. O., Aspectos Clássicos de Gravitação Topológica e Dimensões Extras, Universidade Federal do Ceará - Departamento de Física (DF/UFC), Doutorado em Física (2008).
- [16] E. Roessl and M. Shaposhnikov, Phys. Rev. Lett. D **66**, 084008 (2002).
- [17] A. Kehagias, Phys. Lett. B **600**, 133 (2004).
- [18] J. Garriga and M. Porrati, JHEP **0408**, 028 (2004).
- [19] M. Gogberashvili, P. Midodashvili and D. Singleton, JHEP **0708**, 033 (2007).
- [20] E. Papantonopoulos and A. Papazoglou, JCAP **0507**, 004 (2005).
- [21] P. Bostock, R. Gregory, I. Navarro and J. Santiago, Phys. Rev. Lett. **92**, 221601 (2004).
- [22] J. M. Cline, J. Descheneau, M. Giovannini and J. Vinet, JHEP **0306**, 048 (2003).
- [23] E. Papantonopoulos, A. Papazoglou and V. Zamarias, Nucl. Phys. B **797**, 520 (2008).
- [24] E. Papantonopoulos, A. Papazoglou and V. Zamarias, JHEP **0703**, 002 (2007).
- [25] I. Oda, Phys. Lett. B **496**, 113 (2000).
- [26] I. Olasagasti and A. Vilenkin, Phys. Rev. D **62**, 044014 (2000).
- [27] E. Ponton and E. Poppitz, JHEP **0102**, 042 (2001).
- [28] A. G. Cohen and D. B. Kaplan, Phys. Lett. B **470**, 52 (1999).
- [29] R. Gregory, Phys. Rev. Lett. **84**, 2564 (2000).
- [30] R. Gregory, Phys. Rev. Lett. **59**, 740 (1987).
- [31] G. Kofinas, Phys. Lett. B **633**, 141 (2006).
- [32] S. Kanno and J. Soda, JCAP **0407**, 002 (2004).
- [33] I. Navarro, JCAP **0309**, 004 (2003).
- [34] I. Navarro and J. Santiago, JHEP **0502**, 007 (2005).
- [35] M. Giovannini, H. Meyer and M. E. Shaposhnikov, Nucl. Phys. B **619**, 615 (2001).
- [36] E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 253
- [37] K. Becker, M. Becker, J. Schwarz, String Theory and M-Theory, a modern Introduction, Cambridge University Press (2007).

- [38] J. M. Maldacena, Int. J. Theor. Phys. **38** (1999) 1113 [Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231]
- [39] W. Israel, Phys.Rev.D, 15 (1974).
- [40] A. Vilenkin, Phys. Rev. Lett. 46 , 17 1169 (1981).
- [41] J . Gott III, Astrophys. J., 288 422 (1985).
- [42] W. A. Hiscock, Phys. Rev. D **31**, 3288 (1985).
- [43] M. Christensen, A. L. Larsen, Y. Verbin, Phys.Rev.D, 60 (1999).
- [44] A. G. Cohen and D. B. Kaplan, Phys. Lett. B **215**, 67 (1988).
- [45] R. Gregory, Phys. Lett. B **215**, 663 (1988).
- [46] P. Tinyakov and K. Zuleta, Phys. Rev. D **64**, 025022 (2001).
- [47] B. de Carlos and J. M. Moreno, JHEP **0311**, 040 (2003).
- [48] J. E. G. Silva, V. Santos and C. A. S. Almeida, Class. Quant. Grav. **30**, 025005 (2013).
- [49] Y. X. Liu, L. Zhao and Y. S. Duan, JHEP **0704**, 097 (2007).
- [50] J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, Phys. Rev. D **84**, 085027 (2011).
- [51] Pierluigi Amodio and Giuseppina Settanni, J. Numer. Anal. Indust. Appl. Math vol.6 no. 1-2, 2011, pp.1-13.
- [52] P. Amodio and G. Settanni, J. Numer. Anal. Indust. Appl. Math. **6**, 1 (2011).
- [53] Martin Gremm, Phys. Lett. B **478**, 434-438 (2000).
- [54] W. T. Cruz, L. S. J. Sousa, R. V. Maluf, C. A. S. Almeida, Phys. Lett. B **730**, 314-319 (2014).
- [55] C. A. S. Almeida, M. M. Ferreira Jr., A. R. Gomes and R. Casana, Phys. Rev. D **79**, 125022 (2009).
- [56] C. Csaki, J. Erlich, T. J. Hollowood and Y. Shirman, Nucl. Phys. B **581**, 309 (2000).
- [57] C. Csaki, J. Erlich, and T. J. Hollowood, Phys. Rev. Lett. **84**, 5932 (2000).
- [58] I. R. Klebanov and A. Murugan, Gauge/Gravity Duality and Warped Resolved Conifold.
- [59] Dantas, Davi Monteiro. Localização de modos fermiônicos em uma geometria de seis dimensões do tipo Conifold. 80p.: Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Fortaleza, 2012.

- [60] F. W. V. Costa, J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, *Phys. Rev. D* **87**, 125010 (2013).
- [61] P. Candelas and X. C de la Ossa, *Nucl. Phys. B* **342**, 246 (1990).
- [62] L. A. P. Zayas and A. A. Tseytlin, *J. High Energy Phys.* 11 (2000) 028.
- [63] J. C. B. Araújo, J. E. G. Silva, D. F. S. Veras and C. A. S. Almeida, *Eur. Phys. J. C* **75**, 127 (2015).
- [64] D. M. Dantas, J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, *Phys. Lett. B* **725**, 425 (2013).
- [65] M. Giovannini, H. Meyer and M. E. Shaposhnikov, *Nucl. Phys. B* **619**, 615 (2001).
- [66] J. E. G. Silva, V. Santos and C. A. S. Almeida, *Class. Quant. Grav.* **30**, 025005 (2013).
- [67] D. F. S. Veras, J. E. G. Silva, W. T. Cruz and C. A. S. Almeida, *Phys. Rev. D* **91**, 065031 (2015)
- [68] F. W. V. Costa, J. E. G. Silva, D. F. S. Veras and C. A. S. Almeida, *Phys. Lett. B* **747**, 517 (2015).
- [69] D. M. Dantas, D. F. S. Veras, J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, *Phys. Rev. D* **92**, 104007 (2015).
- [70] L. J. S. Sousa, C. A. S. Silva, D. M. Dantas and C. A. S. Almeida, *Phys. Lett. B* **731**, 64 (2014).
- [71] D. M. Dantas, R. da Rocha and C. A. S. Almeida, arXiv:1512.07888 [hep-th].
- [72] J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, *Phys. Rev. D* **84**, 085027 (2011).
- [73] R. S. Torrealba, *Gen. Rel. Grav.* **42**, 1831 (2010).
- [74] D. F. S. Veras, W. T. Cruz, R. V. Maluf and C. A. S. Almeida, *Phys. Lett. B* **754**, 201 (2016).
- [75] B. V. Numerov, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **84**, 592 (1924);  
B. V. Numerov, *Astron. Nachr.* **230**, 359 (1927).
- [76] C. A. S. Almeida, M. M. Ferreira, Jr., A. R. Gomes and R. Casana, *Phys. Rev. D* **79**, 125022 (2009).
- [77] Y. Liu, J. Yang, Z. Zhao, C. Fu, and Y. Duan, *Phys. Rev. D* **80**, 065019 (2009).
- [78] G. Gabadadze, L. Grisa and Y. Shang, *J. High Energy Phys.* 08 (2016) 033;  
A. Araujo, R. Guerrero and R. O. Rodriguez, *Phys. Rev. D* **83**, 124049 (2011).

- [79] R. A. C. Correa, D. M. Dantas, C. A. S. Almeida and R. da Rocha, Phys. Lett. B **755**, 358 (2016);  
R. A. C. Correa, D. M. Dantas, C. A. S. Almeida and P. H. R. S. Moraes, arXiv:1607.01710 [hep-th].
- [80] H. Guo, A. Herrera-Aguilar, Y. X. Liu, D. Malagon-Morejon and R. R. Mora-Luna, Phys. Rev. D **87**, 095011 (2013);  
R. Cartas-Fuentevilla, A. Escalante, G. Germán, A. Herrera-Aguilar and R. R. Mora-Luna, J. Cosmol. Astropart. Phys. 05 (2016) 026.