



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**  
**MESTRADO ACADÊMICO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**ADRIANO RODRIGUES DE PAULA**

**CONTROLE TOLERANTE A FALHAS APLICADO AO MODELO DE UM ROBÔ**  
**MÓVEL COM RESTRIÇÕES NÃO HOLONÔMICAS**

**FORTALEZA**

**2017**

ADRIANO RODRIGUES DE PAULA

CONTROLE TOLERANTE A FALHAS APLICADO AO MODELO DE UM ROBÔ MÓVEL  
COM RESTRIÇÕES NÃO HOLONÔMICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Engenharia Elétrica

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira

Co-Orientador: Prof. Dr. Bismark Claude Torrico

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

P346c Paula, Adriano Rodrigues de.  
Controle Tolerante a Falhas Aplicado ao Modelo de um Robô Móvel com Restrições Não Holonômicas /  
Adriano Rodrigues de Paula. – 2017.  
95 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia Elétrica, Fortaleza, 2017.

Orientação: Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira.

Coorientação: Prof. Dr. Bismark Claire Torrico.

1. Controle Tolerante a Falhas. 2. Inequações Matriciais Lineares. 3. Linear com Parâmetros Variantes. 4.  
Filtro de Kalman Recursivo. 5. Atuadores e Sensores Virtuais. I. Título.

CDD 621.3

---

ADRIANO RODRIGUES DE PAULA

CONTROLE TOLERANTE A FALHAS APLICADO AO MODELO DE UM ROBÔ MÓVEL  
COM RESTRIÇÕES NÃO HOLONÔMICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Engenharia Elétrica

Aprovada em: 31 de Julho de 2017

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Bismark Claire Torrico (Co-Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Walter Barra Júnior  
Universidade Federal do Pará (UFPA)

---

Prof. Dr. Wilkley Bezerra Correia  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À minha família.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira por me orientar e por toda confiança depositada em mim durante o meu mestrado.

Ao Prof. Dr. Bismark Claire Torrico, por me coorientar e me introduzir aos estudos do Controle.

Aos meus pais, irmãos e primos, os quais divido meu convívio diário e me ajudam a me manter firme nos estudos.

A todos os meus amigos da faculdade, pela partilha de conhecimento, experiências acadêmicas, bons momentos de descontração e pela fé depositada em mim.

A todos os meus professores de pós-graduação, pela partilha voluntária de seus conhecimentos possibilitando meu engradecimento acadêmico e pessoal.

E à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo investimento na minha pesquisa.

“A grandeza não consiste em receber honras, mas em merecê-las.”

(Aristóteles)

## RESUMO

Este trabalho apresenta o estudo teórico e as simulações de uma estratégia de Controle Tolerante a Falhas (FTC, do inglês *Fault Tolerant Control*) baseada em modelo para um robô móvel com restrições não holonômicas. Essa estratégia de controle é capaz de manter a operação do sistema em malha fechada mesmo sob a influência de falhas nos atuadores e sensores. As falhas são desvios do funcionamento adequado do componente e são classificadas como multiplicativas ou aditivas. O sistema de controle consiste em um controlador com ganho projetado por Inequações Matriciais Lineares (LMI, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) aplicado para o seguimento das referências de velocidade linear e angular do modelo de um robô móvel sobre duas rodas ativas. A dinâmica do robô é descrita por um modelo do tipo Linear com Parâmetros Variantes (LPV), para o qual um observador LPV também é projetado por LMI para o fechamento da malha de controle. A técnica FTC utilizada é capaz de identificar e isolar múltiplas falhas, simultâneas ou não, nos atuadores e sensores do sistema. O processo de identificação de falhas utiliza um Filtro de Kalman Recursivo para estimar a magnitude da falha em cada componente da planta, sendo ele um atuador ou um sensor. A correção das falhas é realizada por meio de atuadores e sensores virtuais LPV, dispensando assim a necessidade de reprojeter o controlador. O resultados de simulação computacionais validam a teoria apresentada pela técnica FTC evidenciando as vantagens e as desvantagens da sua aplicação.

**Palavras-chave:** Controle Tolerante a Falhas. Inequações Matriciais Lineares. Linear com Parâmetros Variantes. Filtro de Kalman Recursivo. Atuadores Virtuais. Sensores Virtuais.



## ABSTRACT

This work presents the theory and simulation of a model-based Fault Tolerant Control (FTC) strategy for a mobile robot with nonholonomic constraints. The control system consists of a controller whose gain is designed by Linear Matrix Inequalities (LMI) applied to track the robot's linear and angular velocity references. The model used for the robot is Linear Parameter-Varying (LPV) where an LPV observer is also designed by LMI for feedback control purpose. The presented FTC technique is capable of identifying and isolate either multiple faults, simultaneous or non-simultaneous, at the actuators or sensors. The fault identification process applies a Recursive Kalman Filter for each plant component, whether it is an actuator or sensor, in order to identify and isolate the fault. These faults are predicted in a state-space model and introduced in an additive or multiplicative way. LPV virtual actuators and sensors act in the fault correction, which spares the need of the real-time redesign of the controller. Simulation results showcase and validate the presented theory for the FTC strategy including discussion of the pros and cons of its application.

**Keywords:** Fault Tolerant Control. Linear Matrix Inequalities. Linear Parameter-varying. Recursive Kalman Filter. Virtual Actuators. Virtual Sensors.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	– Diagrama de blocos da representação em espaço de estados do modelo LPV. O bloco $z^{-1}$ representa o operador atraso. . . . .	32
Figura 2	– Diagrama de blocos em espaço de estados do modelo LPV adicionado de falhas nos sensores e atuadores. . . . .	33
Figura 3	– Representação gráfica do bloco estimador utilizado para estimação das falhas aditivas e multiplicativas em ambos atuadores. . . . .	39
Figura 4	– Representação gráfica do bloco estimador utilizado para estimação das multiplicativas do $i$ -ésimo sensor. . . . .	40
Figura 5	– Representação completa da malha de controle tolerante a falhas com a presença de atuadores e sensores virtuais. . . . .	42
Figura 6	– Diagrama de blocos do atuador virtual LPV. Esse diagrama de blocos resume a formulação apresentada na seção 3.2 e substitui o componente “Atuadores virtuais” presente na Figura 5. . . . .	44
Figura 7	– Diagrama de blocos do sensor virtual LPV. Esse diagrama de blocos resume a formulação apresentada na seção 3.3 e substitui o componente “Sensores virtuais” presente na Figura 5. . . . .	46
Figura 8	– Diagrama de blocos do controlador Linear com Parâmetros Variantes (LPV) com seguimento à referência e ação de controle em avanço. . . . .	48
Figura 9	– Diagrama de blocos do observador LPV. O bloco $z^{-1}$ representa o operador atraso no tempo discreto. . . . .	48
Figura 10	– Diagrama de blocos geral da estratégia Controle Tolerante a Falhas, traduzido de <i>Fault Tolerant Control</i> (FTC) aplicada ao modelo LPV. . . . .	54
Figura 11	– Figura ilustrativa da vista superior da estrutura física do robô móvel com restrições não holonômicas. . . . .	56
Figura 12	– Diagrama de corpo livre das atuações dos vetores de força e pseudoforça que influenciam a dinâmica de movimentação do robô móvel com restrições não holonômicas. . . . .	57
Figura 13	– Diagrama ilustrativo de corpo livre das componentes de torque e pseudotorque que influenciam a dinâmica de movimentação do robô móvel com restrições não holonômicas. . . . .	58

Figura 14 – Mapa de polos do projeto do controlador. Os polos estão contidos em $\mathcal{D}_K$ , atendendo às condições do projeto. . . . .	63
Figura 15 – Mapa de polos do projeto do observador. . . . .	65
Figura 16 – Mapa de polos do sistema em malha fechada para o projeto do atuador virtual 1. . . . .	67
Figura 17 – Mapa de polos do sistema em malha fechada para o projeto do atuador virtual 2. . . . .	68
Figura 18 – Mapa de polos do sistema em malha fechada para o projeto do sensor virtual 1 e esboço da região $\mathcal{D}_{va}^1$ . . . . .	69
Figura 19 – Mapa de polos do sistema em malha fechada para o projeto do sensor virtual 2. . . . .	70
Figura 20 – Exemplo da interpretação ilustrativa de um número binário por médias aritméticas, onde BMS aponta para o <i>bit</i> mais significativo. O número exemplificado é o 11, e sua representação binária é $1011_b$ . . . . .	71
Figura 21 – Seguimento às referências com mudanças de ponto de operação. Velocidade linear: $1m/s \rightarrow 1.25m/s$ aos $4.5s$ . Velocidade angular: $0.4rad/s \rightarrow -0.4rad/s$ – Ensaio sem falhas. . . . .	74
Figura 22 – Estimação das falhas por filtros de Kalman – Ensaio sem falhas. . . . .	75
Figura 23 – Trajetória do robô – Ensaio sem falhas. . . . .	76
Figura 24 – Seguimento às referências com mudança de ponto de operação – Ensaio com falha aditiva em ambos atuadores. Magnitudes: $f_{u1} = 0.5N \cdot m$ em 1.5 segundo e $f_{u2} = 1N \cdot m$ aos 3 segundos. . . . .	77
Figura 25 – Estimação das falhas por filtros de Kalman – Ensaio com falhas aditivas em ambos os atuadores. Falha aditiva $f_{u1} = 0.5N \cdot m$ na marca de 1.5 segundo e falha aditiva $f_{u2} = 1n \cdot m$ aos 3 segundos. . . . .	78
Figura 26 – Trajetória do robô – Ensaio com falhas aditivas nos atuadores. . . . .	79
Figura 27 – Seguimento às referências com mudança de ponto de operação – Ensaio com falhas multiplicativas parciais em ambos atuadores. Magnitude: $\phi_1 = 0.6$ na marca de 1.5 segundo e $\phi_2 = 0.3$ aos 3 segundos. . . . .	80
Figura 28 – Estimação das falhas por filtros de Kalman – Ensaio com falhas multiplicativas parciais em ambos os atuadores. Falha parcial $\phi_1 = 0.6$ na marca de 1.5 segundo e falha parcial $\phi_2 = 0.3$ aos 3 segundos. . . . .	81
Figura 29 – Trajetória do robô – Ensaio com falhas multiplicativas nos atuadores. . . . .	82
Figura 30 – Seguimento às referências com mudança de ponto de operação – Ensaio com falha crítica no atuador 1. Magnitude $\phi_1 = 0$ na marca de 1.5 segundo. . . . .	83

Figura 31 – Estimação das falhas por filtros de Kalman – Ensaio com falha crítica no atuador 1. Falha crítica $\phi_1 = 0$ na marca de 1.5 segundo. . . . .	84
Figura 32 – Trajetória do robô – Ensaio com falha crítica no atuador. . . . .	85
Figura 33 – Seguimento às referências com mudança de ponto de operação – Ensaio com falhas multiplicativas parciais em ambos sensores. Magnitude: $\gamma_1 = 0.8$ na marca de 1.5 segundo e $\gamma_2 = 0.2$ aos 3 segundos. . . . .	86
Figura 34 – Estimação das falhas por filtros de Kalman – Ensaio com falhas multiplicativas parciais em ambos os sensores. Falha multiplicativa parcial $\gamma_1 = 0.8$ na marca de 1.5 segundo e falha multiplicativa parcial $\gamma_2 = 0.2$ aos 3 segundos. . . . .	87
Figura 35 – Trajetória do robô – Ensaio com falhas multiplicativas parciais nos sensores. . . . .	88
Figura 36 – Seguimento às referências com mudança de ponto de operação – Ensaio com falhas críticas em ambos sensores. Magnitude: $\gamma_1 = 0$ na marca de 1.5 segundo e $\gamma_2 = 0$ aos 3 segundos. . . . .	89
Figura 37 – Estimação das falhas por filtros de Kalman – Ensaio com falhas críticas em ambos os sensores. Falha crítica $\gamma_1 = 0$ na marca de 1.5 segundo e falha aditiva $\gamma_2 = 0$ aos 3 segundos. . . . .	90
Figura 38 – Trajetória do robô – Ensaio com falhas críticas nos sensores. . . . .	91

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Quadro com os parâmetros do modelo do robô. . . . .	60
--	----

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BMS	<i>Bit</i> Mais Significativo
FDI	Diagnóstico de falhas, traduzido de <i>Fault Detection and Isolation</i>
FTC	Controle Tolerante a Falhas, traduzido de <i>Fault Tolerant Control</i>
LMI	Inequações Matriciais Lineares, traduzido de <i>Linear Matrix Inequalities</i>
LPV	Linear com Parâmetros Variantes
LTI	Linear Invariante no Tempo, traduzido de <i>Linear Time-invariant</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$k$	Instante de tempo discreto
$j$	Contador de subíndices
$i$	Contador de subíndices
$l$	Contador de subíndices
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$x(k)$	Vetor de estados no instante $k$
$u(k)$	Vetor de sinais no instante $k$
$y(k)$	Vetor de saídas no instante $k$
$x_f(k)$	Vetor de estados no instante $k$ na presença de falhas
$x_i(k), x_j(k)$	Representação do $i$ -ésimo ou $j$ -ésimo elemento do vetor $x_f(k)$
$u_f(k)$	Vetor de sinais de controle no instante $k$ na presença de falhas na calculada pelo atuador virtual
$u_l(k)$	Representação do $l$ -ésimo elemento do vetor $u_f(k)$
$u_c(k)$	Saída de controle calculada pelo controlador nominal na malha que contém o atuador virtual no instante $k$
$u_r(k)$	Vetor de entradas de controle em avanço no instante $k$
$y_f(k)$	Vetor de saídas no instante $k$ na presença de falhas
$y_i(k)$	Representação do $i$ -ésimo elemento do vetor $y_f(k)$
$v_k$	Vetor de parâmetros variantes no tempo no instante $k$ . Também representado por $v(k)$
$v(k)$	Vetor de parâmetros variantes no tempo no instante $k$ . Também representado por $v_k$
$p_k$	Variáveis aferidas durante a operação da planta para formar parâmetros variantes no tempo. Também representado por $p(k)$

$p(k)$	Variáveis aferidas durante a operação da planta para formar parâmetros variantes no tempo. Também representado por $p_k$
$\Theta$	Politopo convexo. Região que é resultante da interseção de um conjunto de semi-espacos
$A(\mathbf{v}_k)$	Matriz dinâmica dos estados
$a_{ij}(\mathbf{v}_k)$	Elemento da $i$ -ésima linha e $j$ -ésima coluna da matriz $A(\mathbf{v}_k)$
$B(\mathbf{v}_k)$	Matriz dinâmica das entradas de controle
$b_{ij}(\mathbf{v}_k)$	Elemento da $i$ -ésima linha e $j$ -ésima coluna da matriz $B(\mathbf{v}_k)$
$B_f(\mathbf{v}_k, \Phi_k)$	Matriz dinâmica das entradas de controle no modelo com falhas dada por $B(\mathbf{v}_k)diag(\phi_1(k), \dots, \phi_{n_u}(k))$ , $\phi_i \in \mathbb{R}$
$B^*(\mathbf{v}_k)$	Modelo da matriz $B(\mathbf{v}_k)$ para o caso de falha crítica em algum atuador.
$C(\mathbf{v}_k)$	Matriz de transformação de estados para saídas
$c_{ij}(\mathbf{v}_k)$	Elemento da $i$ -ésima linha e $j$ -ésima coluna da matriz $C(\mathbf{v}_k)$
$C_f(\mathbf{v}_k, \Gamma_k)$	Matriz de transformação de estados para saídas no modelo com falhas dada por $C(\mathbf{v}_k)diag(\gamma_1(k), \dots, \gamma_{n_x}(k))$ , $\gamma_i \in \mathbb{R}$ .
$C^*(\mathbf{v}_k)$	Modelo da matriz $C(\mathbf{v}_k)$ para o caso de falha crítica em algum sensor.
$z^{-1}$	Atraso de transporte equivalente a uma amostra no tempo discreto
$\Sigma$	Somatório
$f_u(k)$	Vetor responsável pela modelagem de natureza aditiva das falhas nos atuadores no instante $k$
$f_{ul}(k)$	Representação do $l$ -ésimo elemento do vetor $f_u(k)$
$\hat{f}_u(k)$	Estimação do vetor $f_u(k)$ no instante $k$
$\hat{f}_{ui}(k)$	Representação do $l$ -ésimo elemento do vetor $\hat{f}_u(k)$
$f_y(k)$	Vetor responsável pela modelagem de natureza aditiva das falhas nos sensores no instante $k$
$v_i$	Variável auxiliar resultado do produto entre a falha aditiva no $i$ -ésimo atuador e sua respectiva falha multiplicativa
$\kappa_i$	Representação do $i$ -ésimo peso de combinação linear no método de combinação linear da forma regressora



$\Phi_k$	Matriz diagonal responsável pela modelagem de natureza multiplicativa das falhas nos atuadores no instante $k$
$\hat{\Phi}_k$	Estimação da matriz $\Phi_k$ no instante $k$
$\phi_i(k), \phi_l(k)$	Representação do $i$ -ésimo ou $l$ -ésimo elemento da diagonal principal de $\Phi_k$
$\hat{\phi}_i(k)$	Representação do $i$ -ésimo elemento da diagonal principal de $\Phi_k$ estimado
$\Gamma_k$	Matriz diagonal responsável pela modelagem de natureza multiplicativa das falhas nos sensores no instante $k$
$\hat{\Gamma}_k$	Estimação da matriz $\Gamma_k$ no instante $k$
$\gamma_i(k), \gamma_l(k)$	Representação do $i$ -ésimo ou $l$ -ésimo elemento da diagonal principal de $\Gamma_k$
$Z(k)$	Vetor de saídas da forma regressora no instante $k$
$z(k)$	Saída escalar da forma regressora no instante $k$
$Z_a(k)$	Vetor de saídas da forma regressora no instante $k$ para o caso de estimação de falhas no atuador
$Z_{ai}(k)$	Representação do $i$ -ésimo elemento do vetor $Z_a(k)$
$Z_s(k)$	Vetor de saídas da forma regressora no instante $k$ para o caso de estimação de falhas no sensor
$\Psi(k)$	Matriz de regressores no instante $k$
$\Psi_a(k)$	Matriz de regressores no instante $k$ para o caso de estimação de falhas no atuador
$\Psi_{ai}(k)$	Representação da $i$ -ésima coluna da matriz $\Psi_a(k)$
$\Psi_s(k)$	Matriz de regressores no instante $k$ para o caso de estimação de falhas no sensor
$\theta(k)$	Vetor de parâmetros no instante $k$
$\hat{\theta}(k)$	Vetor de parâmetros $\theta(k)$ estimado pelo filtro de Kalman no instante $k$
$\theta_a(k)$	Vetor de parâmetros no instante $k$ para o caso de estimação de falhas no atuador
$\hat{\theta}_a(k)$	Estimação do vetor $\theta_a(k)$ no instante $k$
$\theta_s(k)$	Vetor de parâmetros no instante $k$ para o caso de estimação de falhas no sensor

$\Xi(k)$	Ganho do filtro de Kalman no instante $k$
$P(k)$	Matriz definida positiva do filtro de Kalman no instante $k$
$e(k)$	Erro de estimação do filtro de Kalman no instante $k$
$R_1(k)$	Matriz de covariância do vetor $\zeta(k)$ dada por $E\zeta^2(k)$ no instante $k$
$R_2(k)$	Matriz de covariância do vetor $\xi(k)$ dada por $E\xi^2(k)$ no instante $k$
$r_2(k)$	Correlação para o caso em que $\xi(k)$ é escalar dada por $\xi^2(k)$ no instante $k$
<b>I</b>	Matriz identidade com as devidas dimensões
$\zeta(k)$	Vetor de ruído branco gaussiano referente à estimação dos estados pelo filtro de Kalman no instante $k$
$\xi(k)$	Vetor de ruído branco gaussiano referente à estimação das saídas pelo filtro de Kalman no instante $k$
$M_{va}(\mathbf{v}_k, \Phi_k)$	Ganho do atuador virtual no instante $k$
$N_{va}(\mathbf{v}_k, \Phi_k)$	Matriz auxiliar do atuador virtual no instante $k$
$x_{va}(k)$	Vetor de estados do atuador virtual calculado no instante $k$
$M_{vs}(\mathbf{v}_k, \Phi_k)$	Ganho do sensor virtual no instante $k$
$N_{vs}(\mathbf{v}_k, \Phi_k)$	Matriz auxiliar do sensor virtual no instante $k$
$x_{vs}(k)$	Vetor de estados do sensor virtual calculado no instante $k$
$K(\mathbf{v}_k)$	Ganho do controlador LPV no instante $k$
$L(\mathbf{v}_k)$	Ganho do observador LPV no instante $k$
$\mathcal{D}$	Subconjunto do plano complexo alvo para agrupamento de polos definido por $f_{\mathcal{D}}(\eta) < 0$
$\eta$	Representação genérica de um número complexo
$\bar{\eta}$	Representação genérica do conjugado de um número complexo
$f_{\mathcal{D}}(\eta)$	Função de definição de $\mathcal{D}$ em função de $\eta$
$\delta$	Matriz auxiliar simétrica componente de $\eta$
$\lambda$	Matriz auxiliar componente de $\eta$
$M_{\mathcal{D}}(A, X)$	Função de definição de $\mathcal{D}$ em função das matrizes $A$ e $X$
$A$	Matriz dinâmica condicionada à $\mathcal{D}$ -estabilidade.

$X$	Matriz simétrica calculada por LMI. Quando definida positiva garante a $\mathcal{D}$ -estabilidade de $A$
$r$	Raio do disco $\mathcal{D}$ , sendo $\mathcal{D}$ escolhido como uma região circular
$q$	Centro geométrico de $\mathcal{D}$ na coordenada $(-q, 0)$ , sendo $\mathcal{D}$ escolhido como uma região circular
$\mathcal{D}_K$	Subconjunto circular do plano complexo onde são agrupados os polos do controlador LPV
$\mathcal{D}_L$	Subconjunto circular do plano complexo onde são agrupados os polos do observador LPV
$\mathcal{D}_{va}$	Subconjunto circular do plano complexo onde são agrupados os polos do atuador virtual LPV
$\mathcal{D}_{vs}$	Subconjunto circular do plano complexo onde são agrupados os polos do sensor virtual LPV
$r_K$	Raio do disco $\mathcal{D}_K$
$r_L$	Raio do disco $\mathcal{D}_L$
$r_{va}$	Raio do disco $\mathcal{D}_{va}$
$r_{vs}$	Raio do disco $\mathcal{D}_{vs}$
$q_K$	Centro do disco $\mathcal{D}_K$ na coordenada $(-q_K, 0)$
$q_L$	Centro do disco $\mathcal{D}_L$ na coordenada $(-q_L, 0)$
$q_{va}$	Centro do disco $\mathcal{D}_{va}$ na coordenada $(-q_{va}, 0)$
$q_{vs}$	Centro do disco $\mathcal{D}_{vs}$ na coordenada $(-q_{vs}, 0)$
$X_K$	Matriz simétrica positiva solução da LMI que agrupa os polos do controlador
$X_L$	Matriz simétrica positiva solução da LMI que agrupa os polos do observador
$X_{va}$	Matriz simétrica positiva solução da LMI que agrupa os polos do atuador virtual
$X_{vs}$	Matriz simétrica positiva solução da LMI que agrupa os polos do sensor virtual
$\Gamma_K$	Matriz auxiliar solução da LMI que agrupa os polos do controlador
$\Gamma_L$	Matriz auxiliar solução da LMI que agrupa os polos do observador

$\Gamma_{va}$	Matriz auxiliar solução da LMI que agrupa os polos do atuador virtual
$\Gamma_{vs}$	Matriz auxiliar solução da LMI que agrupa os polos do sensor virtual
$A_j$	Componente invariável da matriz $A(v_k)$ correspondente ao $j$ -ésimo vértice do politopo $\Theta$
$B_j$	Componente invariável da matriz $B(v_k)$ correspondente ao $j$ -ésimo vértice do politopo $\Theta$
$C_j$	Componente invariável da matriz $C(v_k)$ correspondente ao $j$ -ésimo vértice do politopo $\Theta$
$K_j$	Componente invariável da matriz $K(v_k)$ correspondente ao $j$ -ésimo vértice do politopo $\Theta$
$L_j$	Componente invariável da matriz $L(v_k)$ correspondente ao $j$ -ésimo vértice do politopo $\Theta$
$B_j^*$	Componente invariável da matriz $B^*(v_k)$ correspondente ao $j$ -ésimo vértice do politopo $\Theta$
$C_j^*$	Componente invariável da matriz $C^*(v_k)$ correspondente ao $j$ -ésimo vértice do politopo $\Theta$
$M_{va,j}$	Componente invariável da matriz $M_{va}(v_k)$ correspondente ao $j$ -ésimo vértice do politopo $\Theta$
$M_{vs,j}$	Componente invariável da matriz $M_{vs}(v_k)$ correspondente ao $j$ -ésimo vértice do politopo $\Theta$
$\alpha(v_k)$	Vetor de ponderação que relaciona as representações dos $N$ vértices do politopo e a matriz LPV no instante $k$
$\alpha_j(v_k)$	Representação do $j$ -ésimo elemento de $\alpha(v_k)$
$N$	Número de vértices do politopo $\Theta$
$m$	Massa do robô [kg]
$D$	Raio da carcaça cilíndrica do robô [m]
$x_c$	Componente do eixo $\vec{x}$ relativo à coordenada do centro de inércia
$y_c$	Componente do eixo $\vec{y}$ relativo à coordenada do centro de inércia
$d$	Distância entre o centro geométrico do robô e seu respectivo centro de inércia

$r_d$	Roda direita do robô
$r_e$	Roda esquerda do robô
$\vec{x}$	Vetor base do sistema de coordenadas de duas dimensões onde o robô é modelado perpendicular aos vetor $\vec{y}$
$\vec{y}$	Vetor base do sistema de coordenadas de duas dimensões onde o robô é modelado perpendicular aos vetor $\vec{x}$
$L$	Distância entre os eixos das rodas móveis do robô
$v$	Velocidade linear do robô
$\dot{v}$	Varição da velocidade linear do robô no tempo. Aceleração
$\omega$	Velocidade angular do robô
$\dot{\omega}$	Varição de velocidade angular do robô. Aceleração angular
$\omega_d$	Velocidade angular da roda direita do robô
$\omega_e$	Velocidade angular da roda esquerda do robô
$R$	Raio das rodas móveis do robô
$F_d$	Força aplicada pela roda direita do robô
$F_e$	Força aplicada pela roda esquerda do robô
$\tau_d$	Torque aplicada pela roda direita do robô
$\tau_e$	Torque aplicada pela roda esquerda do robô
$F_r$	Força de reação resultante da aceleração do robô e sua massa
$F_p$	Força/pseudoforça centrífuga atuante sob o robô durante um giro ao redor do próprio eixo
$F$	Termo genérico para representa força
$T_d$	Torque lateral gerado pela roda direita do robô
$T_e$	Torque lateral gerado pela roda esquerda do robô
$I_c$	Inércia do corpo cilíndrico do robô
$I_p$	Inércia do ponto excêntrico do robô
$I_T$	Inércia total do robô dada por $I_c + I_p$
$T_i$	Torque de reação resultante da inércia do robô e sua aceleração angular

$T_c$

Torque/pseudotorque de Coriolis resultante da combinação entre o movimento linear e angular do robô

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>24</b>
<b>1.1</b>	<b>Terminologias e definição de falhas</b>	<b>25</b>
<b>1.2</b>	<b>Trabalhos relacionados</b>	<b>26</b>
<b>1.3</b>	<b>Objetivos</b>	<b>28</b>
<b>1.4</b>	<b>Organização do trabalho</b>	<b>29</b>
<b>2</b>	<b>ESTIMAÇÃO DAS FALHAS</b>	<b>31</b>
<b>2.1</b>	<b>Modelo LPV em Espaço de Estados</b>	<b>31</b>
<b>2.2</b>	<b>Definição de falhas no sensor e atuador em sistemas LPV</b>	<b>32</b>
<b>2.3</b>	<b>Estimação das falhas no atuador</b>	<b>33</b>
<b>2.4</b>	<b>Estimação das falhas nos sensores</b>	<b>36</b>
<b>2.5</b>	<b>Filtro de Kalman recursivo</b>	<b>37</b>
<b>2.6</b>	<b>Conclusões do capítulo</b>	<b>40</b>
<b>3</b>	<b>ATUADORES E SENSORES VIRTUAIS LPV</b>	<b>41</b>
<b>3.1</b>	<b>Introdução aos elementos virtuais</b>	<b>41</b>
<b>3.2</b>	<b>Atuador virtual LPV</b>	<b>41</b>
<b>3.3</b>	<b>Sensor virtual LPV</b>	<b>44</b>
<b>3.4</b>	<b>Conclusões do capítulo</b>	<b>45</b>
<b>4</b>	<b>PROJETO FTC</b>	<b>47</b>
<b>4.1</b>	<b>Equações LPV do controlador e do observador</b>	<b>47</b>
<b>4.2</b>	<b>Alocação de polos por LMI</b>	<b>48</b>
<b>4.3</b>	<b>O projeto do ganho do controlador LPV por LMI</b>	<b>50</b>
<b>4.4</b>	<b>O projeto do ganho do observador LPV por LMI</b>	<b>51</b>
<b>4.5</b>	<b>O projeto dos ganhos do atuador virtual e do sensor virtual LPV por LMI</b>	<b>51</b>
<b>4.6</b>	<b>Cálculo dos ganhos dos elementos LPV</b>	<b>52</b>
<b>4.7</b>	<b>Malha FTC</b>	<b>53</b>
<b>4.8</b>	<b>Conclusões do capítulo</b>	<b>53</b>
<b>5</b>	<b>ROBÔ MÓVEL DE RESTRIÇÕES NÃO HOLONÔMICAS</b>	<b>55</b>
<b>5.1</b>	<b>Modelagem matemática em espaço de estados não linear</b>	<b>55</b>
<b>5.2</b>	<b>Modelo baseado em politopo</b>	<b>59</b>
<b>5.3</b>	<b>Conclusões do capítulo</b>	<b>61</b>

<b>6</b>	<b>APLICAÇÃO DA TÉCNICA FTC NO MODELO DO ROBÔ . . . . .</b>	<b>62</b>
<b>6.1</b>	<b>Ganho do controlador LPV e ação em avanço . . . . .</b>	<b>62</b>
<b>6.2</b>	<b>Ganho do observador LPV . . . . .</b>	<b>64</b>
<b>6.3</b>	<b>Ganho do atuador LPV e do sensor LPV . . . . .</b>	<b>65</b>
<b>6.4</b>	<b>Cálculo do vetor de pesos <math>\alpha(v_k)</math> . . . . .</b>	<b>70</b>
<b>6.5</b>	<b>Conclusões do capítulo . . . . .</b>	<b>72</b>
<b>7</b>	<b>RESULTADOS DA TÉCNICA FTC . . . . .</b>	<b>73</b>
<b>7.1</b>	<b>Ensaio sem falhas . . . . .</b>	<b>73</b>
<b>7.2</b>	<b>Ensaio com falha aditiva nos atuadores . . . . .</b>	<b>76</b>
<b>7.3</b>	<b>Ensaio com falha multiplicativa parcial nos atuadores . . . . .</b>	<b>79</b>
<b>7.4</b>	<b>Ensaio com falha multiplicativa total (ou falha crítica) no atuador . . . . .</b>	<b>81</b>
<b>7.5</b>	<b>Ensaio com falha multiplicativa parcial no sensor . . . . .</b>	<b>84</b>
<b>7.6</b>	<b>Ensaio com falha multiplicativa total (falha crítica) nos sensores . . . . .</b>	<b>87</b>
<b>7.7</b>	<b>Conclusões do capítulo . . . . .</b>	<b>90</b>
<b>8</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>92</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>93</b>
	<b>ANEXOS . . . . .</b>	<b>95</b>



## 1 INTRODUÇÃO

A Teoria de Controle é útil para o domínio do usuário sobre sistemas dinâmicos, térmicos, elétricos ou de diversas outras naturezas. Muitos critérios podem ser estabelecidos pelo projetista para que o sistema opere de maneira satisfatória para o seu problema. O projetista pode escolher precisamente como tais sistemas devem operar, estabelecendo faixas de operação, velocidade de reação, robustez a perturbações, dentre outros critérios. Os estudos provenientes dessa teoria são capazes de representar o sistema em questão (conhecidos dentro do ramo também como *planta*) por meio de modelagem matemática, e com base nessa informação, pode-se adicionar um elemento (controlador) responsável pelo ajuste do funcionamento do sistema, como explicado didaticamente de forma introdutória em Ogata (2011).

Existem duas formas diferentes de aplicar a Teoria de Controle convencional levando em consideração a natureza do controlador: por meio de técnicas de controle de tempo contínuo, como as citadas em Astrom e Hagglund (1995), ou por técnicas de controle de tempo discreto, como as que se fazem presentes em Ogata (1995). As técnicas de controle de tempo discreto estão cada vez mais populares devido à queda dos preços relacionados à tecnologia dos microcontroladores. No ramo da robótica móvel, no qual esse trabalho se contextualiza, o controle de tempo discreto é mais popular por ter sua implementação mais robusta, por dar mais autonomia ao projetista para configurar e reconfigurar o controlador. Nesta dissertação serão utilizadas técnicas de controle discreto para o projeto do controlador.

O primeiro passo para o projeto de um controlador é formular o problema e decidir qual tipo de técnica de controle será utilizada e, na maioria das vezes, o controle será feito em malha fechada, exigindo a presença de um ou mais sensores para aferição do seguimento de referência. Também deve-se saber a complexidade do controlador: se será linear ou não linear, multivariável ou não, variante no tempo ou não, etc. Logo, após escolher a estratégia de controle, deve-se obter um modelo adequado da planta a ser controlada. Para essa tarefa, diversas modelagens matemáticas são possíveis e a abordagem escolhida pode interferir no desempenho do controlador quando aplicado à planta real. Assim, com o modelo finalmente obtido e a técnica já estabelecida pelo projetista, é dado início ao projeto do controlador.

Os projetos de controladores em malha fechada precisam, muitas vezes, passar por aprimoramentos para que se tornem mais robustos a condições mais específicas, tais como falhas nos sensores ou atuadores. Essas falhas podem tornar a resposta da planta insatisfatória para os critérios de projeto ou até mesmo causar a instabilidade do sistema. Para tornar o controlador

robusto a essas falhas utilizam-se técnicas de FTC.

## 1.1 Terminologias e definição de falhas

A terminologia utilizada para descrever condições adversas à operação do sistema como falhas, faltas, mau funcionamento, erros e defeitos não é única, porém, na literatura internacional, tenta-se estabelecer um conceito, como afirmado em Isermann e Ballé (1997). Quanto à literatura em português, essa distinção também não é clara e traduções formais não são consolidadas. Um artigo virtual de Leite (2006) tenta adaptar as terminologias em inglês para o português. Entretanto, a definição ainda é vaga e pouco reconhecida.

Visto que as definições ainda não foram estabelecidas, este trabalho busca introduzir suas próprias definições ao leitor de acordo com uma tradução livre a partir de Isermann (2006).

Falhas (*fault*): Desvio não permitido de pelo menos uma característica do sistema em relação ao aceitável, usual ou condição padrão.

- É um estado do sistema;
- Tipos: falha de projeto, falha de montagem, falha de fabricação, falha por uso indevido, falha de *hardware*, falha de *software*, etc.;
- Podem não alterar o funcionamento correto do sistema;
- Podem iniciar uma falta ou um mau funcionamento;
- Se desenvolvem de maneira abrupta (aspecto de degrau) ou gradativa (curva suave).

Faltas (*failure*): Interrupção permanente da habilidade de um sistema de executar uma dada função sob condições de operação especificadas.

- É um evento do sistema;
- Resultado de uma ou mais falhas;
- Tipos: simples, múltiplas, aleatórias, determinísticas, sistemáticas, etc.
- Causa prejuízos ao sistema.

Mau funcionamento (*malfunction*): Irregularidade intermitente na realização ideal de uma função pelo sistema.

- Interrupção temporária;
- É um evento do sistema;
- Resulta de uma ou mais falhas;
- Aumenta com o tempo a medida que o mau funcionamento prejudica o sistema.

Fica então definido que a falha é responsável pelas faltas e pelo mau funcionamento do sistema tornando assim o termo "falha" consistente o suficiente para ser aplicado em casos passíveis de falta ou mau funcionamento.

As três adversidades citadas são alvos de correção das técnicas FTC e pode se manifestar no atuadores e sensores. Nos atuadores, as falhas podem ser causadas pela perda de potência, pelo travamento de uma peça, por falta de regulagem, por fornecimento inadequado de energia, etc. Nos sensores as falhas se originam, por exemplo, pela perda de calibragem, por defeitos adquiridos pelo mecanismo físico, por condições adversas que podem ocasionar um desvio de leitura.

## 1.2 Trabalhos relacionados

O Controle Tolerante a Falhas é capaz de identificar e isolar as falhas que podem ocorrer em sensores ou atuadores. A identificação da falha pode ser feita por métodos que abordam desde a redundância de sinais, que compara os sinais de diferentes componentes redundantes no sistema como em Feng e Patton (2013), até métodos matemáticos mais robustos, como em Terra *et al.* (2001) que faz uso de redes neurais artificiais.

A instalação de um sensor ou de um atuador redundante é, muitas vezes, inviável pelo alto custo do material, pela dificuldade de instalação ou até mesmo por ser estatisticamente possível que mais de um componente apresente algum tipo de falha simultaneamente. A presença de atuadores redundantes também garante mais graus de liberdade para o controlador e permite a aplicação de técnicas tolerantes a falhas baseadas na implementação de atuadores redundantes como na tese de Sousa (2014).

As estratégias FTC são divididas em dois grupos distintos (PATTON, 1997): métodos passivos e métodos ativos. Essa divisão perdura até os tempos atuais.

Os métodos passivos fazem uso de técnicas de controle robusto para garantir que a operação em malha fechada seja insensível a certas falhas sem obter informações em tempo real a respeito da falha. Um exemplo disto seria a aplicação de uma ação integral com o intuito de rejeitar algumas falhas no atuador. O projeto do controlador deve ser escolhido com cuidado para garantir uma tolerância limitada a falhas em malha fechada. Os métodos ativos se acomodam em tempo real às falhas, em contraste ao método passivo, tentando antecipar as falhas em projeto. Dentre os métodos ativos citados em Patton (1997), o mais popular é o baseado em modelo. A aplicação ideal da estratégia baseada em modelo depende da obtenção de um modelo quase

perfeito no qual o comportamento do sistema pode ser precisamente representado. É apontada a desvantagem do método de sinalização de falhas no momento o qual julga-se que o sistema está sob a influência de alguma falha quando, na verdade, existem apenas diferenças notáveis entre o modelo e a planta real. Essa afirmação infere que quanto mais próximo o modelo do sistema real, mais confiável a identificação das falhas e a técnica FTC se tornam.

Algumas estratégias FTC para falhas em atuadores e sensores se baseiam em modelos linearizados e podem ser aplicadas com sucesso em plantas reais cuja dinâmica não é modificada drasticamente com a mudança suave do ponto de operação, como a técnica aplicada em Noura *et al.* (2000). Essa técnica não é capaz de ser aplicada em sistemas onde existem não linearidades expressivas que comprometam a linearização em torno de um ponto de operação, como em um sistema de tanques com vasos comunicantes, por exemplo.

As técnicas baseadas em modelo possuem um elemento comum chamado diagnóstico de falhas. O diagnóstico de falhas consiste em três tarefas básicas (DING, 2008):

- Detecção da falha: a ocorrência de alguma falha em alguma unidade do processo foi detectada, o que ocasiona um comportamento indesejado ou intolerável no sistema como um todo;
- Isolação da falha: ato de localizar e classificar diferentes tipos de falha;
- Análise e identificação da falha: determina tipo, magnitude e causa da falha.

O Diagnóstico de falhas, traduzido de *Fault Detection and Isolation* (FDI), pode ser realizado por meio da geração de sinais residuais provenientes de manipulações matemáticas dos espaços de paridade como em Noura *et al.* (2000). Esses resíduos trazem informações suficientes para realizar o FDI.

O trabalho de Chen *et al.* (2016) traz uma formulação que estima as falhas com o auxílio de um estimador LPV  $H_-|H_\infty$  aplicando o método a um modelo não linear de alta fidelidade de uma aeronave. O objetivo desse artigo é interligar a teoria de diagnóstico de falhas baseada em modelo com a aplicação industrial. A simulação utilizada nessa pesquisa considerava a presença de incerteza nos dados aerodinâmicos e erros de medição de forma a aproximar as simulações das condições de uma aeronave real.

Outra forma difundida de realizar o FDI é por meio da estimação das falhas, como é o caso do trabalho de Rodrigues *et al.* (2007) e Rotondo *et al.* (2016) que demonstram técnicas de estimação de falhas capazes de lidar com a presença de falhas em múltiplos atuadores.

O artigo de Kanev *et al.* (2001), por exemplo, apresenta um modelo de falhas no

qual um filtro de Kalman recursivo é aplicado com o objetivo de estimar coeficientes indicadores das falhas, obtendo-se assim informações qualitativas e quantitativas.

A correção de falhas em malha fechada em atuadores pode ser executada com o auxílio de um atuador virtual que rejeita as falhas fazendo a planta operar normalmente sem haver a necessidade de reprojeter o controlador nominal durante a correção da falha. Como observa-se no trabalho de COSTA *et al.* (2015), o atuador virtual apenas redireciona os sinais de controle efetuando a reestruturação do sistema e contornando os efeitos das falhas.

O artigo de Rotondo *et al.* (2014) também apresenta a introdução de atuadores virtuais com a adição de sensores virtuais no sistema de forma a evitar o reprojeto em tempo real do controlador. Esses elementos virtuais mascaram as falhas nos atuadores e sensores do ponto de vista do controlador de modo que a ação de controle nominal se mantenha a mesma ainda que na presença de falhas.

Esse trabalho se propõe a apresentar contribuições para uma técnica FTC baseada em modelo que dispense a necessidade do reprojeto em tempo real do controlador, como no artigo de Rotondo *et al.* (2014). A dissertação, entretanto, apresenta contribuições no âmbito do algoritmo de otimização utilizado e na aplicação do método na robótica. A estratégia FTC adotada é capaz de ser aplicada a um modelo de robô de restrições não holonômicas trabalhando com um modelo LPV.

Um robô móvel de restrições não holonômicas é útil para aplicações industriais e diversas estratégias de controle já foram propostas para esse sistema, como em Sousa *et al.* (2016), no qual usam-se *encoders* para fechar a malha de controle ou em Lima *et al.* (2016), onde é proposto um seguimento de trajetória através de sensores laser. Esses dois trabalhos apresentam um controlador em avanço para o controle de posição e um controlador PI para o controle da malha interna de velocidade dos motores. Em Lobo (2016) é apresentado um controlador adaptativo para a malha de posição e um controlador proporcional para a malha de velocidade dos motores, com utilização de *encoders*. Ao invés de aprimorar ainda mais a malha externa com controle de posição, esta dissertação se propõe a dar mais atenção à malha interna, com controle de velocidade, do robô contribuindo por meio de um controlador FTC.

### 1.3 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é apresentar um estudo de caso dentro da área FTC obtendo-se resultados de sua aplicação em um modelo LPV de um robô móvel sobre duas

rodas com restrições não holonômicas.

Como objetivos específicos podem ser listados:

- Implementação de algoritmos de detecção, isolamento e estimação de falhas;
- Validação de uma simulação computacional para a aplicação de testes de estratégias FTC;
- Modelagem de um robô móvel sobre duas rodas com restrições não holonômicas para o controle de velocidades linear e angular;
- Contribuições para a área de estudos FTC, que ainda está em desenvolvimento pela comunidade científica internacional necessitando da contribuição de novos pesquisadores;
- Tornar mais próxima a aplicação um controlador tolerante a falhas em sistemas reais no laboratório de pesquisa o qual esse trabalho foi realizado;
- Apresentação da técnica para a comunidade acadêmica local, demonstrando o potencial dessa área de estudos.

#### **1.4 Organização do trabalho**

Esse trabalho é organizado de acordo com o seguinte conteúdo:

- Capítulo 1 – Introdução. O primeiro capítulo traz a contextualização explanativa referente ao conteúdo do trabalho. Se fazem presentes alguns trabalhos relacionados que motivaram a escrita dessa dissertação;
- Capítulo 2 – Estimação das falhas. O segundo capítulo apresenta o método de estimação das falhas utilizado pela estratégia proposta;
- Capítulo 3 – Atuadores e sensores virtuais. O terceiro capítulo detalha o conceito de atuadores e sensores virtuais além de apresentar suas estruturas;
- Capítulo 4 – Projeto FTC. O quarto capítulo apresenta os detalhes gerais do projeto dos elementos de controle juntamente com a visão geral do sistema em malha fechada;
- Capítulo 5 – Robô móvel de restrições não holonômicas. O quinto capítulo especifica matematicamente o modelo ao qual a técnica de controle FTC será aplicada;
- Capítulo 6 – Aplicação da técnica FTC no robô. O sexto capítulo apresenta de forma didática como a aplicação generalizada apresentada no quarto capítulo

pode ser realizada num sistema específico, no caso, o robô modelado no quinto capítulo;

- Capítulo 7 – Resultados da técnica FTC. O sétimo capítulo apresenta os dados obtidos por simulação bem como os comentários pertinentes a cada cenário simulado;
- Capítulo 8 – Conclusão. O oitavo e último capítulo informa as principais observações referentes à estratégia proposta, as particularidades observadas, suas vantagens e desvantagens.

## 2 ESTIMAÇÃO DAS FALHAS

Este capítulo apresenta o modelo das falhas utilizado neste trabalho, descrevendo a presença de falhas via representação em espaço de estados. Falhas em atuadores podem ser modeladas como operações matemáticas tais como subtração ou multiplicação em casos de travamento de algum mecanismo ou perda de potência, por exemplo. Uma falha em um sensor, como a perda de calibragem ou condição adversa para a efetuação de leitura, por exemplo, também podem ser modelada por meio de adição ou multiplicação.

Assim, genericamente, são consideradas as origens das falhas como de natureza aditiva ou multiplicativa nos atuadores e sensores. A técnica FDI apresentada é capaz de detectar e isolar múltiplas falhas simultâneas no sistema. Utilizam-se filtros de Kalman recursivos para a realização dessa tarefa.

### 2.1 Modelo LPV em Espaço de Estados

A principal característica de sistemas LPV é que as equações dinâmicas do sistema apresentam uma dependência explícita com parâmetros exógenos não estacionários. Se esses parâmetros, que caracterizam o ponto de operação atual do sistema, podem ser medidos (ou estimados) em tempo real, então um modelo LPV pode ser formulado para aproximar sistemas não lineares por sistemas lineares em uma faixa de operação (NOGUEIRA *et al.*, 2015). Dessa forma, destaca-se a importância da formulação LPV apresentada nesse trabalho para o controle de sistemas não lineares.

A representação básica do modelo em espaço de estados em tempo discreto de um sistema LPV, como o apresentado na Figura 1, é dada de acordo com o seguinte conjunto de equações (ROTONDO *et al.*, 2014):

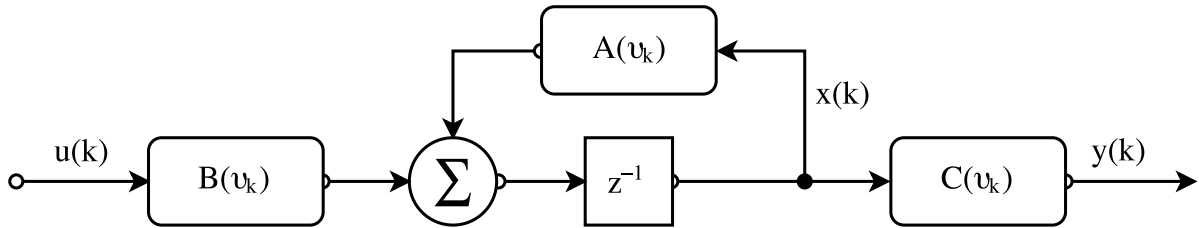
$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(v_k)x(k) + B(v_k)u(k), \\ y(k) &= C(v_k)x(k), \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde  $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$  representa o vetor de estados,  $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$  é o vetor de sinais de controle e  $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$  é o vetor de saídas. Por parte das matrizes:  $A(v_k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  é a matriz dinâmica do estados,  $B(v_k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$  é a matriz da dinâmica das entradas de controle e  $C(v_k) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$  é a matriz de relação entre estados e saídas. Todas as matrizes presentes em (2.1) são com parâmetros variantes no tempo (LPV) e são funções de  $v(k) := v_k \in \mathbb{R}^{n_v}$ , um vetor de parâmetros variantes no tempo que está associado ao ponto de operação atual do sistema. Esse vetor  $v_k$  é



função de variáveis  $p_k := p(k)$ , aferidas durante a operação da planta e podem ser estimadas por meio de alguma função  $v_k = f(p_k)$ . O vetor  $v_k$  deve ser obtido em tempo real, pois o mesmo varia de acordo com o ponto de operação da planta, segundo um politopo <sup>1</sup> convexo  $\Theta$  estabelecido durante a modelagem LPV da planta <sup>2</sup>.

Figura 1 – Diagrama de blocos da representação em espaço de estados do modelo LPV. O bloco  $z^{-1}$  representa o operador atraso.



Fonte – o autor

## 2.2 Definição de falhas no sensor e atuador em sistemas LPV

Considerando o sistema LPV descrito em (2.1), as falhas nos sensores e atuadores podem ser representadas em um modelo de espaço de estados, como ilustrado na Figura 2, da seguinte forma:

$$x_f(k+1) = A(v_k)x_f(k) + B_f(v_k, \Phi_k)(u_f(k) + f_u(k)), \quad (2.2a)$$

$$y_f(k) = C_f(v_k, \Gamma_k)x_f(k) + f_y(k), \quad (2.2b)$$

onde as falhas aditivas nos atuadores e sensores são modeladas pelos vetores  $f_u(k)$  e  $f_y(k)$ , respectivamente. As falhas aditivas são da mesma unidade de grandeza da ação de controle ou da leitura do sensor e são ocasionadas por um desvio constante da operação nominal do atuador ou do sensor. As falhas multiplicativas dos atuadores e sensores são representadas respectivamente por  $\Phi_k$  e  $\Gamma_k$ .  $\Phi_k$  é uma matriz diagonal de elementos  $\phi_1(k), \dots, \phi_{n_u}(k)$  e  $\Gamma_k$  possui elementos diagonais  $\gamma_1, \dots, \gamma_{n_x}$ . Dessa forma, as matrizes  $B_f(v_k, \Phi_k)$  e  $C_f(v_k, \Gamma_k)$  são também representadas por:

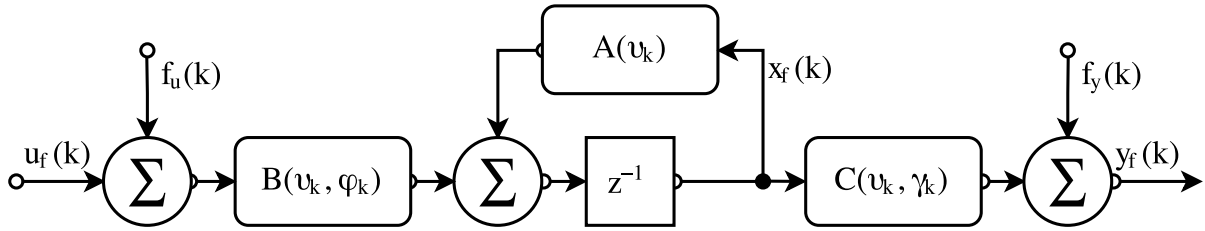
$$B_f(v_k, \Phi_k) = B(v_k) \text{diag}(\phi_1(k), \dots, \phi_{n_u}(k)), \quad \phi_i \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

$$C_f(v_k, \Gamma_k) = C(v_k) \text{diag}(\gamma_1(k), \dots, \gamma_{n_x}(k)), \quad \gamma_i \in \mathbb{R}.$$

<sup>1</sup>O politopo é uma forma geométrica que descreve uma região de operação definida em um espaço que tenha  $v_k$  como vetores de base. Uma definição completa pode ser encontrada em Briat (2015).

<sup>2</sup>Conferir o Capítulo 5 para mais detalhes sobre a modelagem LPV utilizada nesse trabalho.

Figura 2 – Diagrama de blocos em espaço de estados do modelo LPV adicionado de falhas nos sensores e atuadores.



Fonte – o autor

As matrizes em (2.3) são ponderadas pelas falhas multiplicativas, nas quais seus elementos representam a eficácia dos respectivos componentes. Dessa forma, para  $\phi_i = 1$  tem-se que o  $i$ -ésimo atuador está operando normalmente enquanto  $\phi_i = 0.5$  afirma que a ação do  $i$ -ésimo atuador caiu para 50% do seu valor nominal e  $\phi_i = 0$  revela uma completa perda da ação de controle proveniente do  $i$ -ésimo atuador. De forma análoga opera  $\gamma_l$  no ponto de vista do  $l$ -ésimo sensor.

As variáveis  $f_u(k)$ ,  $f_y(k)$ ,  $\Phi_k$  e  $\Gamma_k$  utilizadas para modelar as falhas possuem suas amplitudes desconhecidas e seus valores estimados  $\hat{f}_u(k)$ ,  $\hat{f}_y(k)$ ,  $\hat{\Phi}_k$  e  $\hat{\Gamma}_k$  devem ser calculados. Esses valores estimados são úteis na estratégia FTC para a detecção, isolamento e correção das falhas.

### 2.3 Estimação das falhas no atuador

Expandindo-se a equação de estados (2.2a) do modelo proposto, é possível obter a seguinte representação:

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^{n_x} a_{ij}(v_k)x_j(k) + \sum_{l=1}^{n_u} b_{il}(v_k)\phi_l(k)(u_l(k) + f_{ul}(k)), \quad (2.4)$$

onde  $i \in \mathbb{Z} = \{1, \dots, n_x\}$ . Mantendo-se somente os elementos relacionados com as falhas do lado direito da equação, obtém-se:

$$x_i(k+1) - \sum_{j=1}^{n_x} a_{ij}(v_k)x_j(k) = \sum_{l=1}^{n_u} b_{il}(v_k)u_l(k)\phi_l(k) + \sum_{l=1}^{n_u} b_{il}(v_k)\phi_l(k)f_{ul}(k). \quad (2.5)$$

Para realizar a estimação linear para as falhas no atuador se faz necessário reescrever a equação de estados presente em (2.2a) na sua forma regressora.

$$Z_a(k) = \Psi_a^T(k)\theta_a(k), \quad (2.6)$$

onde  $Z_a(k)$  é o vetor de saídas da regressão,  $\Psi_a(k)$  a matriz de regressores e  $\theta_a(k)$  o vetor de parâmetros. Dentre esses, apenas  $\theta_a(k)$  é desconhecido e o mesmo deve ser estimado por meio de algum algoritmo de otimização<sup>3</sup>. Os elementos  $Z_a(k)$  e  $\Psi_a(k)$  devem ser conhecidos e suas expressões são oriundas de manipulações matemáticas do modelo.

A equação (2.5) é suficiente para reconhecer a forma regressora de cada estado. Os elementos da forma regressora podem ser expressos como:

$$Z_{ai}(k) = x_i(k+1) - \sum_{j=1}^{n_x} a_{ij}(\mathbf{v}_k)x_j(k), \quad (2.7a)$$

$$\Psi_{ai}(k) = \begin{bmatrix} b_{i1}(\mathbf{v}_k)u_{n1}(k) \\ \vdots \\ b_{in_u}(\mathbf{v}_k)u_{n_u}(k) \\ b_{i1}(\mathbf{v}_k) \\ \vdots \\ b_{in_u}(\mathbf{v}_k) \end{bmatrix}, \quad (2.7b)$$

$$\theta_a(k) = [\phi_1 \quad \cdots \quad \phi_{n_u} \quad \mathbf{v}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_{n_u}]^T, \quad (2.7c)$$

$$\mathbf{v}_i = \phi_i f_{ui}, \quad (2.7d)$$

onde  $Z_{ai}(k)$  representa o  $i$ -ésimo elemento do vetor  $Z_a(k)$  e  $\mathbf{v}_i$  é uma variável auxiliar que revela que o  $i$ -ésimo atuador possui uma interdependência multiplicativa entre suas falhas aditiva e multiplicativa.

Os atuadores da planta estudada influenciam múltiplos estados ao mesmo tempo, logo a formulação das equações deve ser feita considerando todos os estados simultaneamente. Essa influência pode ser levada em consideração condensando o elemento  $Z_{ai}$  de um vetor  $Z_a$ , equações (2.8a) a (2.8c), ou considerando-se uma combinação linear qualquer de  $Z_{ai}$ , equações (2.9a) a (2.9c).

Forma regressora para o método de condensação:

$$Z_a(k) = x(k+1) - A(\mathbf{v}_k)x(k), \quad (2.8a)$$

$$\Psi_a(k) = \begin{bmatrix} B(\mathbf{v}_k)diag(u(k)) & B(\mathbf{v}_k) \end{bmatrix}^T, \quad (2.8b)$$

$$\theta_a(k) = [\phi_1 \quad \cdots \quad \phi_{n_u} \quad \mathbf{v}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_{n_u}]^T, \quad (2.8c)$$

$$\mathbf{v}_i = \phi_i f_{ui}. \quad (2.8d)$$

---

<sup>3</sup>Conferir a seção 2.5 para mais detalhes sobre o algoritmo de identificação utilizado nesse trabalho

Forma regressora para o método de combinação linear:

$$Z_a(k) = \sum_{i=1}^n \kappa_i x_i(k+1) - \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_x} \kappa_i a_{ij}(v_k) x_j(k), \quad (2.9a)$$

$$\Psi_a(k) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \kappa_i b_{i1}(v_k) u_{n1}(k) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \kappa_i b_{in_u}(v_k) u_{n_u}(k) \\ \sum_{i=1}^n \kappa_i b_{i1}(v_k) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \kappa_i b_{in_u}(v_k) \end{bmatrix}, \quad (2.9b)$$

$$\theta_a(k) = [\phi_1 \quad \cdots \quad \phi_{n_u} \quad v_1 \quad \cdots \quad v_{n_u}]^T, \quad (2.9c)$$

$$v_i = \phi_i f_{ui}. \quad (2.9d)$$

Observa-se pelas equações (2.7c), (2.8c) e (2.9c) que a expressão do vetor  $\theta$  permanece inalterada. As falhas estão todas presentes no mesmo, porém a expressão da falha aditiva está comprometida pela influência da falha multiplicativa correspondente. Essa influência é contornada fazendo-se:

$$\theta_a(k) = [\phi_1 \quad \cdots \quad \phi_{n_u} \quad v_1 \quad \cdots \quad v_{n_u}]^T, \quad (2.10)$$

$$f_{ui} = v_i / \phi_i, \quad (2.11)$$

onde fica explícita a interdependência entre a estimação da falha aditiva em consideração à falha multiplicativa presente no termo  $v_i$ .

A interdependência entre falhas aditivas e multiplicativas deve ser levada em consideração para identificações em casos de falha crítica<sup>4</sup> em um atuador. Caso  $\hat{\phi}_i(k) \approx 0$ , o valor de  $\hat{f}_{ui}(k)$  deve ser forçado a zero para evitar erro de divisão por zero no seu registrador, como pode ser observado na equação (2.11).

Deve-se escolher, por último, qual a forma regressora é a mais adequada para o caso no qual a estimação deverá ser aplicada. Este trabalho fará uso da forma regressora encontrada pelo método da condensação, pelo fato de sua estrutura ser matricial e de simples implementação em programas matemáticos de estrutura matricial. A estimação do vetor de parâmetros no instante  $k$ ,  $\hat{\theta}_a(k)$ , deve retornar um erro mínimo de estimação definido pela função de custo do método. O método de minimização utilizado nessa dissertação é abordado na seção 2.5.

<sup>4</sup>Falha crítica: quando um sensor ou atuador é inutilizado. Isso equivale a uma falha multiplicativa próxima ou igual a zero.

## 2.4 Estimação das falhas nos sensores

Para o caso das falhas nos sensores, as falhas aditivas e multiplicativas são indistinguíveis entre si, pois não existe nenhuma dinâmica ou filtro entre o sinal de distúrbio da falha e a leitura do sensor. É possível observar que uma falha aditiva pode ser representada como uma falha multiplicativa:

$$y_f(k) = x_f(k) + f_y(k), \quad (2.12)$$

onde  $f_y(k)$  e  $x_f(k)$  são números reais, logo é possível escrever:

$$f_y(k) = \sigma x_f(k), \quad (2.13)$$

onde  $\sigma$  também é um número real.

A equação (2.12) pode então ser reescrita como:

$$y_f(k) = x_f(k) + \sigma x_f(k), \quad (2.14)$$

$$y_f(k) = (1 + \sigma)x_f(k). \quad (2.15)$$

Esse desenvolvimento algébrico afirma que a representação em uma falha multiplicativa  $\gamma(k)$ , tal que  $\gamma(k) = 1 + \sigma$ , é então equivalente à falha aditiva  $\sigma$ .

Dessa forma, apenas existe a necessidade de modelar uma das duas características de falhas nos sensores e escolheu-se arbitrariamente modelar a falha multiplicativa. Assim, o modelo apresentado na equação (2.2b) pode ser simplificado de acordo com a seguinte representação:

$$y_f(k) = C_f(\mathbf{v}_k, \Gamma_k)x_f(k). \quad (2.16)$$

Toma-se a equação (2.16) como base para encontrar a forma regressora e a mesma é reescrita como:

$$y_i(k) = \sum_{j=1}^{n_x} c_{ij}(\mathbf{v}_k)x_j(k)\gamma_j(k), \quad (2.17)$$

onde  $i \in \mathbb{Z} = \{1, \dots, ny\}$ .

A estratégia de identificação de falhas descrita neste trabalho exige uma estimação das falhas que afetam os sensores. Uma manipulação do modelo (2.16) deve ser apresentada de maneira que a forma regressora da função das falhas seja explicitada como:

$$Z_s(k) = \Psi_s^T(k)\theta_s(k). \quad (2.18)$$

Deve-se observar que a expressão (2.17) pode ser reescrita na forma regressora como:

$$Z_s(k) = y_i(k), \quad (2.19a)$$

$$\Psi_s(k) = \left[ c_{i1}(\mathbf{v}_k)x_1(k) \quad \cdots \quad c_{ij}(\mathbf{v}_k)x_j(k) \right]^T, \quad (2.19b)$$

$$\theta_s(k) = \left[ \gamma_1(k) \quad \cdots \quad \gamma_j(k) \right]^T. \quad (2.19c)$$

Essa formulação leva em consideração que as saídas são combinações lineares dos estados ou que a leitura dos sensores possuem algum tipo de correlação. A maioria dos sistemas, entretanto, possuem sensores independentes entre si e a relação entre estados e saídas é simplesmente determinada por uma relação proporcional constante. Essa afirmação é interpretada pelo modelo por meio da matriz  $C$  sendo uma matriz diagonal. Nesse caso, a forma regressora pode ser encontrada sensor por sensor simplificando a implementação numérica:

$$y_i(k) = c_{ij}(\mathbf{v}_k)x_l(k)\gamma_j(k). \quad (2.20)$$

Sua forma regressora torna-se simplesmente:

$$Z_s(k) = y_i(k), \quad (2.21a)$$

$$\Psi_s(k) = c_{ij}(\mathbf{v}_k)x_j(k), \quad (2.21b)$$

$$\theta_s(k) = \gamma_j(k). \quad (2.21c)$$

Tendo essa forma regressora final, deve-se aplicar algum método de estimação para obter-se o valor estimado para a falha multiplicativa no instante  $k$  para o  $j$ -ésimo sensor,  $\hat{\theta}_s(k)$ , que equivale a encontrar diretamente  $\hat{\gamma}_j(k)$ , como observado pela equação (2.21c).

O método de minimização utilizado nessa dissertação é apresentado a seguir na seção 2.5.

## 2.5 Filtro de Kalman recursivo

O filtro de Kalman recursivo é aplicável à solução de problemas de sistemas adaptativos (sistemas os quais seus parâmetros mudam em função de alguma variável ambiente). A validação da aplicação desse filtro em sistemas adaptativos se faz presente em Kalman e Bucy (1961), bem como a comprovação de que as variações dos parâmetros desses sistemas não afetam a estrutura de um filtro ótimo. O problema de estimação de falhas pode ser entendido como um problema de sistema adaptativo e passível da aplicação de um filtro de Kalman recursivo.

A topologia do filtro de Kalman padrão, onde a saída do filtro depende apenas do estado inicial, é descrita por Ljung (1999) como:

$$\begin{cases} x(k+1) = F(k)x(k) + \zeta(k), & (2.22) \\ y(k) = H(k)x(k) + \xi(k). & (2.23) \end{cases}$$

onde  $F(k)$  é a matriz dinâmica dos estados,  $H(k)$  é a matriz de transformação de estados para saídas,  $\zeta(k)$  e  $\xi(k)$  são vetores de ruído branco gaussiano.

O modelos recursivos de regressão linear utilizados nas seções 2.3 e 2.4 para auxiliar a estimação das falhas nos atuadores e sensores podem ser dados como (LJUNG, 1999):

$$\theta(k+1) = \theta(k) + \zeta(k), \quad (2.24)$$

$$Z(k) = \Psi^T(k)\theta(k) + \xi(k). \quad (2.25)$$

Adaptando-se os elementos presentes nas equações (2.22) e (2.23) para as formas regressivas das equações (2.24) e (2.25), pode-se afirmar, por comparação, que:  $x(k) \equiv \theta(k)$ ,  $y(k) \equiv Z(k)$ ,  $F(k) \equiv \mathbf{I}$  e  $H(k) \equiv \Psi^T(k)$ .

O algoritmo recursivo a ser aplicado e demonstrado em (KALMAN *et al.*, 1960) e suas expressões são:

$$\Xi(k) = P(k-1)\Psi(k) [R_2(k) + \Psi^T(k)P(k-1)\Psi(k)]^{-1}, \quad (2.26a)$$

$$e(k) = Z(k) - \Psi^T(k)\hat{\theta}(k-1), \quad (2.26b)$$

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \Xi(k)e(k), \quad (2.26c)$$

$$P(k) = (\mathbf{I} - \Xi(k)\Psi(k)^T)P(k-1) + R_1(k), \quad (2.26d)$$

onde  $R_1(k) = \zeta(k)\zeta(k)^T$ ,  $R_2 = \xi(k)\xi(k)^T$ ,  $e(k)$  é o erro de estimação e  $P(k)$  é uma matriz positiva definida cujo estado inicial  $P(0)$ <sup>5</sup> é definido pelo usuário e normalmente é uma matriz identidade com as devidas dimensões.

Quando o alvo da estimação é um escalar  $z(k)$  ao invés de um vetor  $Z(k)$ , a matriz de regressores  $\Psi(k)$  passa a ser um vetor  $\psi(k)$  e a matriz  $R_2(k)$  torna-se um escalar  $r_2(k)$ . Essas afirmações colaboram para a otimização do custo computacional além da resiliência numérica

---

<sup>5</sup>Para garantir a convergência, a estimação pode ser habilitada ou desabilitada em função do erro de estimação. Recomenda-se reestabelecer as condições iniciais de  $P$  sempre que a estimação for reabilitada.

do algoritmo por tornar possível a não utilização de inversão de matrizes no algoritmo. A simplificação é dada pelo lema de inversão de matrizes (ASTROM; WITTENMARK, 2008) e a expressão final após a possível simplificação é (LJUNG, 1999):

$$\Xi(k) = \frac{P(k-1)\psi(k)}{r_2(k) + \psi^T(k)P(k-1)\psi(k)}, \quad (2.27a)$$

$$e(k) = z(k) - \psi^T(k)\hat{\theta}(k-1), \quad (2.27b)$$

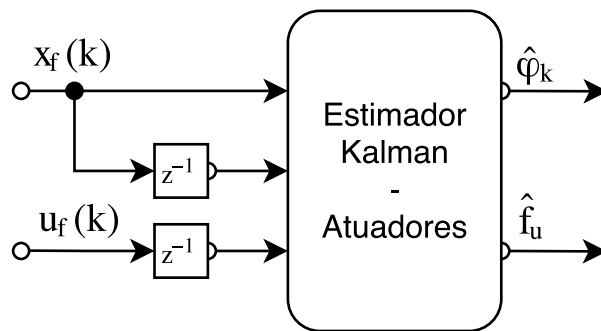
$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \Xi(k)e(k), \quad (2.27c)$$

$$P(k) = P(k-1) - \frac{P(k-1)\psi(k)\psi^T(k)P(k-1)}{r_2(k) + \psi^T(k)P(k-1)\psi(k)} + R_1(k). \quad (2.27d)$$

Esses estimadores devem ser implementados em tempo real em conjunto com a operação da planta.

Para estimar as falhas nos atuadores um bloco com um estimador recursivo de Kalman (Figura 3) deve ser capaz de montar a forma regressora adequada, tal como apresentado na seção 2.3. Esse filtro de Kalman retornará o vetor de valores estimados  $\hat{f}_u(k)$ , relacionados com as falhas aditivas nos atuadores  $f_u(k)$ , e o vetor de valores estimados  $\hat{\phi}_i(k)$ , que juntos compõem a diagonal principal da matriz  $\hat{\Phi}_k$ , relacionada com as falhas multiplicativas nos atuadores  $\Phi_k$ .

Figura 3 – Representação gráfica do bloco estimador utilizado para estimação das falhas aditivas e multiplicativas em ambos atuadores.

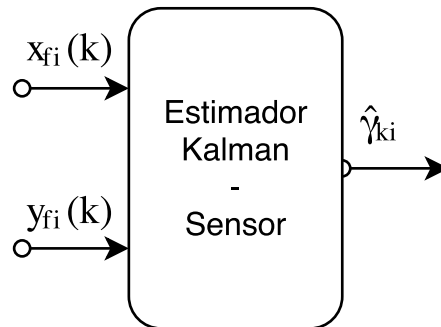


Fonte – o autor

O método sugerido apresenta que as falhas nos sensores podem ser estimadas por um bloco (Figura 4) que deve ser programado para montar a forma regressora que melhor se ajuste ao seu problema à escolha do projetista, como explicado na seção 2.4. Esse bloco de filtro de Kalman é responsável por calcular o vetor de valores estimados  $\gamma_i$ , que juntos formam a diagonal principal da matriz  $\hat{\Gamma}_k$ , relacionada com as falhas multiplicativas nos sensores  $\Gamma_k$ .



Figura 4 – Representação gráfica do bloco estimador utilizado para estimação das multiplicativas do  $i$ -ésimo sensor.



Fonte – o autor

## 2.6 Conclusões do capítulo

Este capítulo introduz os conceitos para a formulação do problema de estimação de falhas nos atuadores e sensores do sistema. É importante complementar que o conhecimento aqui introduzido é fundamental para a aplicação do atuador virtual e do sensor virtual vistos no próximo capítulo. Cada um desses componentes virtuais faz uso dos valores estimados das falhas aditivas e multiplicativas em sua estrutura como meio de repor o sinal real das falhas.

### 3 ATUADORES E SENSORES VIRTUAIS LPV

Este capítulo aborda em detalhes o conceito de elementos virtuais. É visto que esses elementos são projetados para poupar o controlador de um possível reprojetado em tempo real. São apresentadas também as topologias de atuadores e sensores virtuais em sua representação matemática e em diagrama de blocos para a melhor interpretação do leitor.

#### 3.1 Introdução aos elementos virtuais

Em um sistema de controle tradicional, a condição de falha na planta pode modificar a resposta do sistema em malha fechada, pois o controlador pode não ter sido projetado para responder adequadamente à dinâmica da planta durante uma falha. Um controlador capaz de controlar um planta não linear em diversos pontos de operação pode ser projetado por Inequações Matriciais Lineares, traduzido de *Linear Matrix Inequalities* (LMI) e esse projeto demanda um esforço computacional considerável e seu reprojetado em tempo real durante a operação em malha fechada pode ser evitado com a introdução de atuadores e sensores virtuais LPVs.

A adição de atuadores e sensores virtuais à malha fechada, conforme a Figura 5, mascara as falhas da planta para o ponto de vista do controlador. Esses componentes são atualizados em tempo real. A principal função deles é reconfigurar a planta faltosa de modo que o controlador mantenha sua ação de controle igual a antes da falha ocorrer, dispensando um reprojetado do controlador.

Assim a correção das falhas dos atuadores reais ocorrem nos atuadores virtuais por meio da reconstrução do sinal de controle levando em consideração a estimação das falhas. De forma semelhante, o sensor virtual recupera a leitura incoerente que algum sensor tenha acusado por meio da reconstrução do sinal de saída levando em consideração a estimação da falha no respectivo sensor.

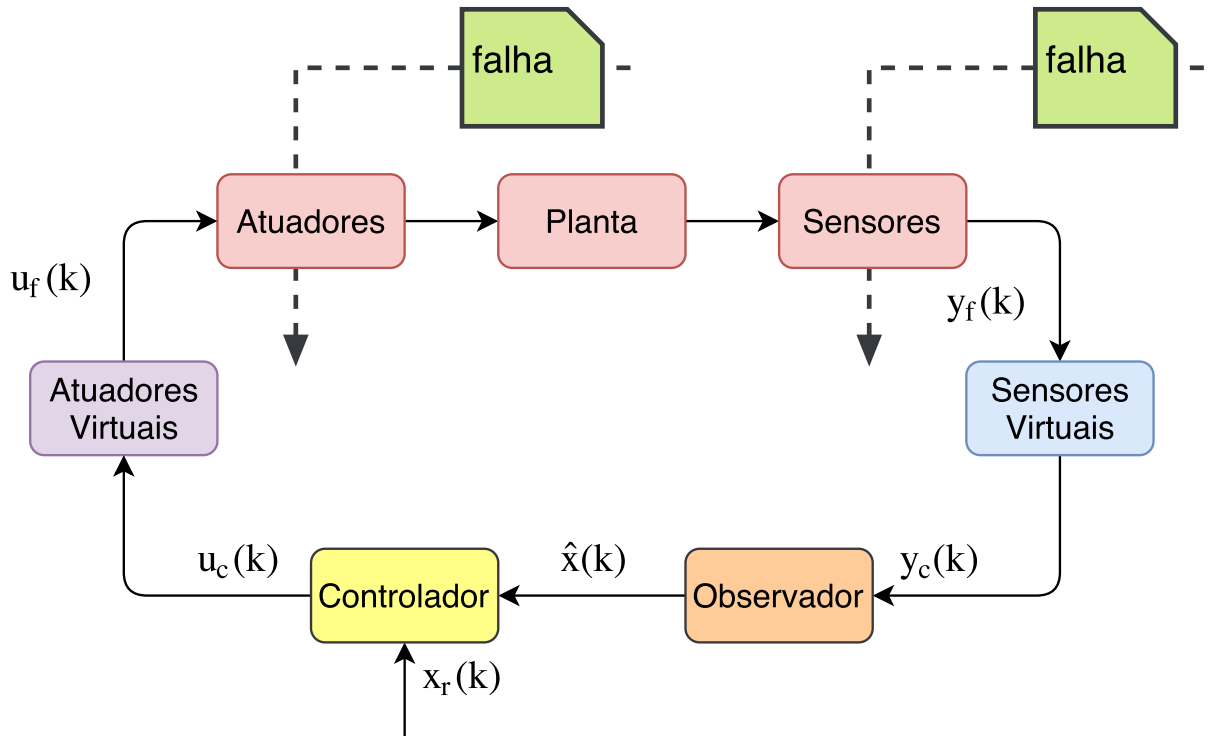
#### 3.2 Atuador virtual LPV

A estrutura do atuador virtual LPV depende de se a seguinte condição de posto é satisfeita ou não:

$$\text{posto}(B_f(v_k, \Phi_k)) = \text{posto}(B_f(v_k)) \neq 0 \quad \forall v_k \in \Theta. \quad (3.1)$$

Se a condição de posto é satisfeita, as falhas podem ser toleradas por meio de uma

Figura 5 – Representação completa da malha de controle tolerante a falhas com a presença de atuadores e sensores virtuais.



Fonte – o autor

simples redistribuição dos sinais de controle (ROTONDO *et al.*, 2014). Esse cenário é possível quando os atuadores possuem falhas parciais e o efeito de um atuador faltoso pode ser reescrito como uma combinação linear dos atuadores não faltosos. Nesses casos, a reconfiguração do atuador virtual é dada como:

$$u_f(k) = N_{va}(v_k, \Phi_k)u_c(k) - f_u(k), \quad (3.2)$$

onde  $u_c(k)$  é a saída de controle fornecida pelo controlador nominal,  $u_f(k)$  é a saída de controle modificada pelo atuador virtual e a matriz  $N_{va}(v_k, \Phi_k)$  é dada por:

$$N_{va}(v_k, \Phi_k) = B_f(v_k, \Phi_k)^\dagger B(v_k), \quad (3.3)$$

onde  $B_f(v_k, \Phi_k)^\dagger$  é a pseudo-inversa de  $B_f(v_k, \Phi_k)$ .

Por outro lado, nos casos em que a condição (3.1) não é satisfeita, uma redistribuição das ações de controle não é suficiente para repor o sinal de controle. Isso ocorre quando o número de atuadores operantes é menor que a quantidade de graus de liberdade exigidos para controlar o sistema. A tolerância a falhas deve ser alcançada pela adição de uma parcela dinâmica ao atuador virtual através da introdução de um estado  $x_{va}(k)$  pertencente à estrutura do atuador virtual e sua equação de estados correspondente. Cada um desses casos em que um atuador é completamente

perdido (sofre uma falha crítica) é descrito como um valor particular da matriz  $B^*(\mathbf{v}_k)$ , obtida como:

$$B^*(\mathbf{v}_k) = B_f(\mathbf{v}_k, \Phi_k)N_{va}(\mathbf{v}_k, \Phi_k). \quad (3.4)$$

A matriz  $B^*(\mathbf{v}_k)$  não depende de  $\Phi_k$ , pois a matriz  $N_{va}(\mathbf{v}_k, \Phi_k)$  cancela o efeito das falhas multiplicativas de  $B_f(\mathbf{v}_k, \Phi_k)$  por conta das propriedades básicas da pseudo-inversa que influenciam termos multiplicativos presente em (3.3).

Logo, quando a condição de posto (3.1) não é satisfeita e a simples redistribuição não é suficiente:

$$u_f(k) = N_{va}(\mathbf{v}_k, \Phi_k)[u_c(k) - M_{va}(\mathbf{v}_k)x_{va}(k)] - f_u(k), \quad (3.5)$$

onde a matriz  $M_{va}(\mathbf{v}_k) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$  é o ganho do atuador virtual LPV <sup>1</sup> e  $x_{va}(k)$  é o vetor de estados calculado por:

$$x_{va}(k+1) = [A(\mathbf{v}_k) + B^*(\mathbf{v}_k)M_{va}(\mathbf{v}_k)]x_{va}(k) + [B(\mathbf{v}_k) - B^*(\mathbf{v}_k)]u_c(k). \quad (3.6)$$

Observa-se que a equação (3.2) é um caso particular da expressão (3.5). De fato, quando a condição de posto (3.1) é satisfeita  $N_{va}(\mathbf{v}_k, \Phi_k)$  é uma matriz diagonal de elementos  $\phi_i^{-1}$  e em (3.4) encontra-se que  $B^*(\mathbf{v}_k) = B(\mathbf{v}_k)$ , anulando-se assim o efeito de  $u_c(k)$  no estado  $x_{va}(k)$  em (3.6). Com  $x_{va}(0) = 0$  encontra-se que  $x_{va}(k) = 0$  e a equação (3.5) é simplificada para (3.2).

É importante lembrar que os valores das falhas aditivas,  $f_u(k)$ , e das falhas multiplicativas,  $\Phi_k$ , são desconhecidos e por isso devem ser usados os valores estimados pelo filtro de Kalman,  $\hat{f}_u(k)$  e  $\hat{\Phi}_k$ , respectivamente. Dessa forma, a formulação final do atuador virtual que será aplicada na malha de controle tolerante a falhas é dada por:

$$B^*(\mathbf{v}_k) = B_f(\mathbf{v}_k, \hat{\Phi}_k)N_{va}(\mathbf{v}_k, \hat{\Phi}_k), \quad (3.7)$$

$$x_{va}(k+1) = [A(\mathbf{v}_k) + B^*(\mathbf{v}_k)M_{va}(\mathbf{v}_k)]x_{va}(k) + [B(\mathbf{v}_k) - B^*(\mathbf{v}_k)]u_c(k), \quad (3.8)$$

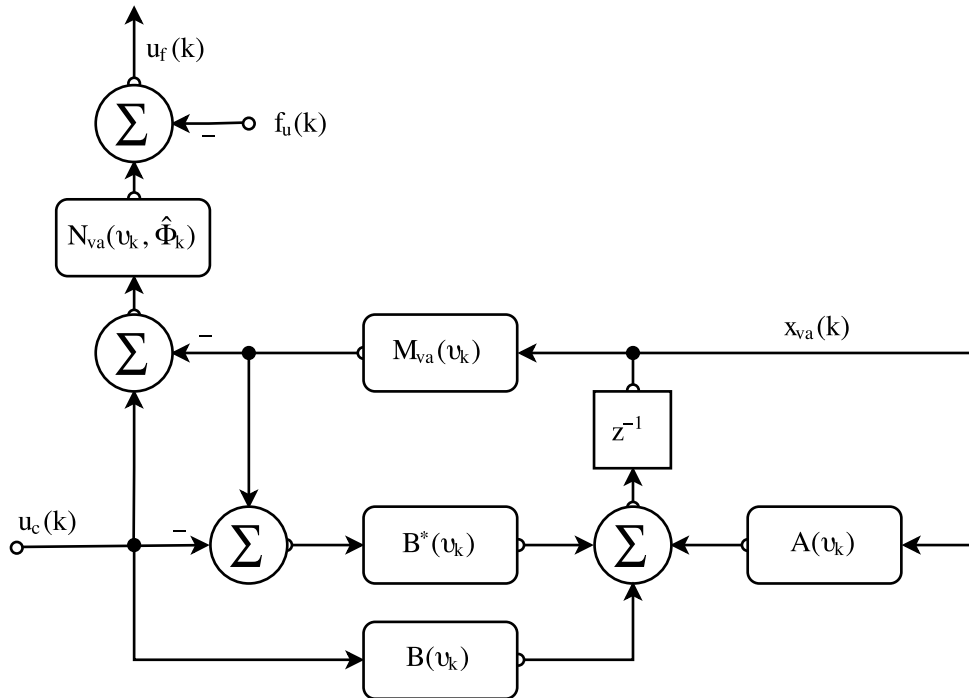
$$u_f(k) = N_{va}(\mathbf{v}_k, \hat{\Phi}_k)[u_c(k) - M_{va}(\mathbf{v}_k)x_{va}(k)] - f_u(k). \quad (3.9)$$

A operação do atuador virtual LPV, que tem sido abordada em termos de expressões matemáticas nessa seção, pode ser resumida para uma melhor compreensão do leitor em uma configuração de diagrama de blocos, como visto na Figura 6.

---

<sup>1</sup>O projeto do ganho do atuador virtual encontra-se na seção 4.5.

Figura 6 – Diagrama de blocos do atuador virtual LPV. Esse diagrama de blocos resume a formulação apresentada na seção 3.2 e substitui o componente “Atuadores virtuais” presente na Figura 5.



Fonte – o autor

### 3.3 Sensor virtual LPV

De forma semelhante ao atuador virtual, a estrutura do sensor virtual também depende de uma condição de posto:

$$\text{posto}(C_f(\mathbf{v}_k, \Gamma_k)) = \text{posto}(C(\mathbf{v}_k)) \neq 0 \quad \forall \mathbf{v}_k \in \Theta. \quad (3.10)$$

Se a condição de posto (3.10) for satisfeita, o sinal do sensor falho pode ser reconstruído diretamente de  $y_f(k)$ . Esse cenário ocorre quando existem apenas faltas parciais ou quando a leitura de um sensor pode ser verificada pela combinação linear das leituras dos outros sensores. Nesse caso, a estrutura de reconfiguração do sensor virtual consiste em:

$$y_c(k) = N_{vs}(\mathbf{v}_k, \Gamma_k)[y_f(k) + C_f(\mathbf{v}_k, \Gamma_k)x_{va}(k) - f_y(k)], \quad (3.11)$$

onde  $y_c(k)$  equivale, aproximadamente, à saída nominal da planta. A matriz  $N_{vs}(\mathbf{v}_k)$  é dada por:

$$N_{vs}(\mathbf{v}_k, \Gamma_k) = C(\mathbf{v}_k)C_f(\mathbf{v}_k, \Gamma_k)^\dagger, \quad (3.12)$$

onde  $C_f(\mathbf{v}_k, \Gamma_k)^\dagger$  é a pseudo-inversa de  $C_f(\mathbf{v}_k, \Gamma_k)$ .

Caso (3.10) não seja satisfeita, a redistribuição das leituras dos demais sensores não é suficiente para consertar a falha e uma parcela dinâmica deve ser adicionada à estrutura do sensor virtual por meio de um vetor de estados  $x_{vs}(k)$  e sua equação de estados correspondente. Uma matriz  $C^*(\mathbf{v})$  é definida como:

$$C^*(\mathbf{v}_k) = N_{vs}(\mathbf{v}_k, \Gamma_k)C_f(\mathbf{v}_k, \Gamma_k). \quad (3.13)$$

Observa-se que a matriz  $C^*(\mathbf{v}_k)$  não depende de  $\Gamma_k$ , pois a influência da falha multiplicativa existente em  $N_{vs}(\mathbf{v}_k, \Gamma_k)$  é inversa à influência presente em  $C_f(\mathbf{v}_k, \Gamma_k)$ , por conta da pseudo inversa em (3.12), cancelando-se entre si durante a multiplicação.

Após adicionar a parcela dinâmica à estrutura do sensor virtual, sua expressão torna-se:

$$y_c(k) = N_{vs}(\mathbf{v}_k, \Gamma_k)[y_f(k) + C_f(\mathbf{v}_k, \Gamma_k)x_{vs}(k) - f_y(k)] + [C(\mathbf{v}_k) - C^*(\mathbf{v}_k)]x_{vs}(k), \quad (3.14)$$

onde o vetor de estados  $x_{vs}$  do sensor virtual é calculado por:

$$x_{vs}(k+1) = [A(\mathbf{v}_k) + M_{vs}(\mathbf{v}_k)C^*(\mathbf{v}_k)]x_{vs}(k) + B(\mathbf{v}_k)u_c(k) - M_{vs}(\mathbf{v}_k)N_{vs}(\mathbf{v}_k, \Gamma_k)[y_f(k) + C_f(\mathbf{v}_k, \Gamma_k)x_{vs}(k) - f_y(k)], \quad (3.15)$$

sendo a matriz  $M_{vs}(\mathbf{v}_k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$  o ganho do sensor virtual LPV <sup>2</sup>.

Comparando-se a equação (3.11) com (3.14) e (3.15), é possível notar que o modelo estático é um caso particular da forma dinâmica do sensor virtual. Quando a condição de posto (3.10) é satisfeita, o valor de  $C^*(\mathbf{v}_k)$  calculado em (3.13) assume o mesmo valor de  $C(\mathbf{v}_k)$ , de forma que o vetor de estado  $x_{vs}(k)$  não possui componente em  $y_c(k)$ .

A operação do atuador virtual LPV pode ser resumida em uma configuração de diagrama de blocos, como visto na Figura 7.

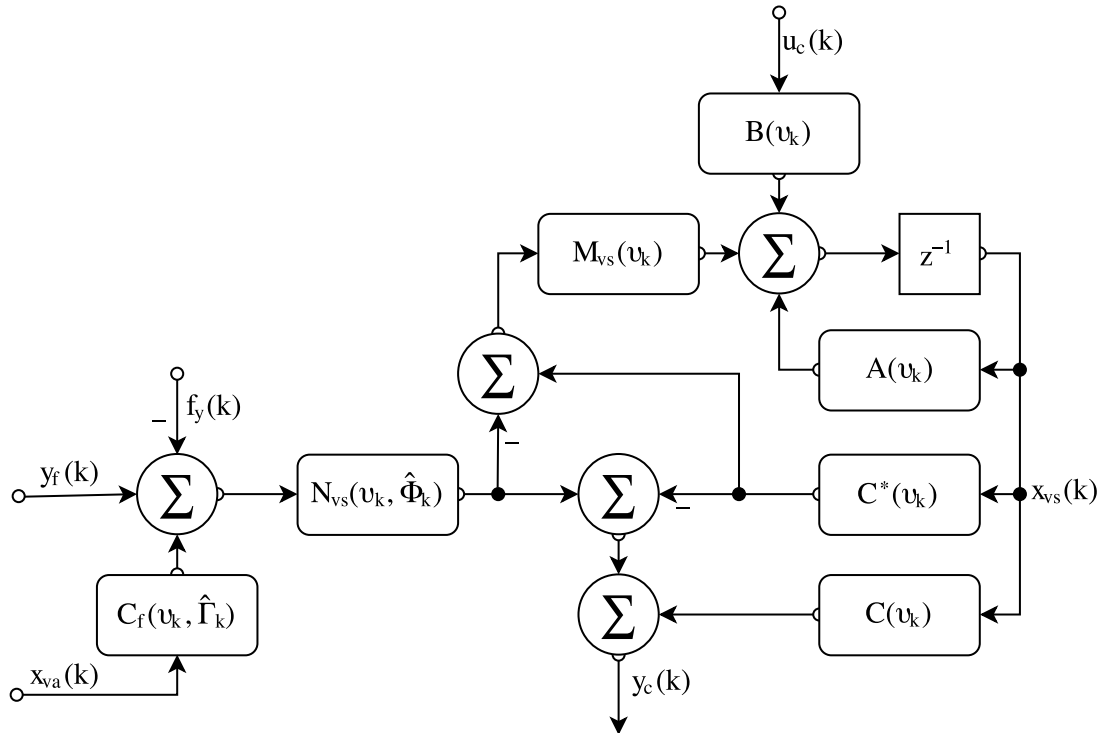
### 3.4 Conclusões do capítulo

Este capítulo introduz de forma genérica a aplicação dos atuadores e sensores virtuais LPVs na estratégia de controle tolerante a falhas utilizada neste trabalho. É importante ter o conhecimento do conceito genérico desses elementos para o melhor entendimento de sua aplicação específica que é apresentada mais a diante no texto.

---

<sup>2</sup>O projeto do ganho  $M_{vs}(\mathbf{v}_k)$  encontra-se na seção 4.5.

Figura 7 – Diagrama de blocos do sensor virtual LPV. Esse diagrama de blocos resume a formulação apresentada na seção 3.3 e substitui o componente “Sensores virtuais” presente na Figura 5.



Fonte – o autor

É observado também que esses componentes virtuais são LPV e possuem ganho que devem ser calculados, tal como o controlador e o observador. O próximo capítulo trata do método utilizado para calcular o ganho desses elementos LPVs da malha de controle.

## 4 PROJETO FTC

Este capítulo aborda em termos gerais o projeto por LMIs do controlador, do ganho do atuador virtual e do sensor virtual. Além da junção de todos esses componentes em malha fechada. Sabendo-se que a planta a ser controlada é modelada por um sistema LPV, escolhe-se uma estratégia de controle na qual os ganhos dos elementos em malha fechada são calculados por meio de LMIs. Vários ganhos para cada componente são calculados, onde cada ganho corresponde a um vértice do polítopo  $\Theta$  que delimita a região de operação preestabelecida da planta.

### 4.1 Equações LPV do controlador e do observador

Toma-se o dado modelo LPV (ROTONDO *et al.*, 2014):

$$x_f(k+1) = A_f(v_k)x_f(k) + B_f(v_k, \Phi_k)(u_f(k) + f_u(k)), \quad (4.1a)$$

$$y_f(k) = C_f(v_k, \Gamma_k)x_f(k), \quad (4.1b)$$

onde a falha aditiva dos sensores,  $f_y(k)$ , já foi desprezada em comparação com (2.2b), como explicado na seção 2.4.

Esse sistema pode ser controlado por realimentação de estados com seguimento de referência de acordo com a Figura 8. O controlador calcula o erro de seguimento à referência tomando como base os estados estimados pelo observador LPV. A lei de controle pode ser escrita como sendo:

$$u_c(k) = u_r(k) + K(v_k)[\hat{x}_f(k) - x_r(k)], \quad (4.2)$$

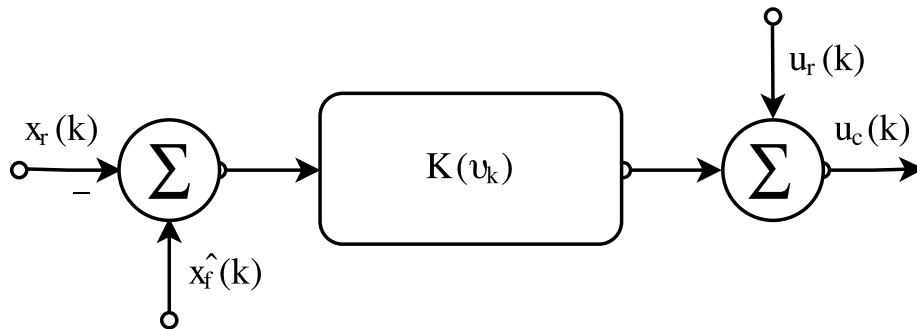
onde a matriz  $K(v_k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$  é o ganho do controlador LPV,  $u_r(k)$  é um vetor de entradas de controle em avanço calculadas de acordo com Franklin *et al.* (1998) para garantir o seguimento de referência do sistema em malha fechada por meio de um ganho de pré-alimentação,  $x_r(k)$  é o vetor de referência a ser seguido pelos estados e  $\hat{x}_f(k)$  é o vetor de estados estimados pelo observador LPV. A estrutura do observador LPV pode ser verificada pela Figura 9 e sua equação é dada por:

$$\hat{x}_f(k+1) = A(v_k)\hat{x}_f(k) + B(v_k)u_c(k) + L(v_k)[C(v_k)\hat{x}_f(k) - y_c(k)], \quad (4.3)$$

onde a matriz  $L(v_k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$  é o ganho do observador LPV.

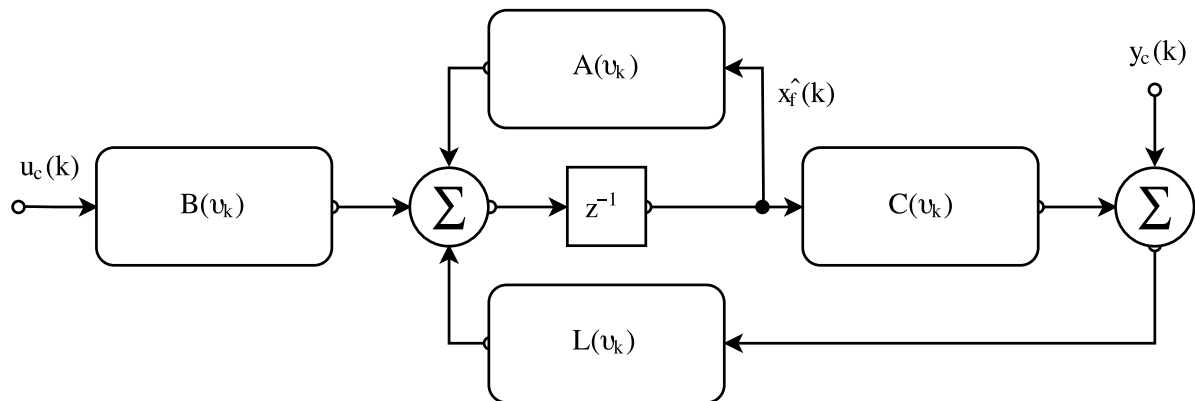


Figura 8 – Diagrama de blocos do controlador LPV com seguimento à referência e ação de controle em avanço.



Fonte – o autor

Figura 9 – Diagrama de blocos do observador LPV. O bloco  $z^{-1}$  representa o operador atraso no tempo discreto.



Fonte – o autor

## 4.2 Alocação de polos por LMI

Essa seção descreve uma técnica de projeto de controle por  $\mathcal{D}$ -alocação robusta via LMI para alocação de polos com restrições. O conceito de LMIs e suas aplicações em sistemas de controle são apresentadas de forma didática em Boyd *et al.* (1994). Para o projeto de  $\mathcal{D}$ -alocação robusta as restrições são feitas com base no agrupamento dos polos em malha fechada em uma dada região do plano complexo (CHILALI; GAHINET, 1996). Os trabalhos publicados por Rosinová e Holič (2014), Kuo e Lee (2004), (COSTA *et al.*, 2012) e Assunção *et al.* (2007) apresentam os conceitos fundamentais de  $\mathcal{D}$ -alocação de polos por LMI.

Espera-se que, pelo agrupamento dos polos em determinada região, o funcionamento em malha fechada possua uma dinâmica dentro dos padrões especificados para atingir um transiente satisfatório. Um subconjunto  $\mathcal{D}$  do plano complexo é chamado região LMI se existir

uma matriz simétrica  $\delta \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e uma matriz  $\lambda \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tais que:

$$\mathcal{D} = \{\eta \in \mathbb{C} : f_{\mathcal{D}}(\eta) < 0\}, \quad (4.4)$$

com:

$$f_{\mathcal{D}}(\eta) := \delta + \eta\lambda + \bar{\eta}\lambda^T, \quad (4.5)$$

onde a função  $f_{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

A localização dos polos em dada a região LMI podem ser definidas em termos de um bloco matricial  $m \times m$ :

$$M_{\mathcal{D}}(A, X) := \delta \otimes X + \lambda \otimes (AX) + \lambda^T \otimes (AX)^T, \quad (4.6)$$

onde o operador  $\otimes$  é o produto de Kronecker. A matriz  $A$  é dita  $\mathcal{D}$ -estável se existir uma matriz  $X$  simétrica tal que:

$$M_{\mathcal{D}}(A, X) < 0, \quad X > 0. \quad (4.7)$$

Em linhas gerais, para um sistema Linear Invariante no Tempo, traduzido de *Linear Time-invariant* (LTI), ser dito  $\mathcal{D}$ -estável, ele precisa ser estável e todos os polos devem pertencer à região delimitada por  $\mathcal{D}$ .

Para o caso de um disco de raio  $r$  e centro nas coordenadas  $(-q, 0)$  como uma região LMI, a função característica é dada como:

$$f_{\mathcal{D}}(\eta) = \begin{bmatrix} -r & q + \eta \\ q + \bar{\eta} & -r \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Pela definição (4.6), a equação da reta para um sistema matricial é:

$$M_{\mathcal{D}}(A, X) = \begin{bmatrix} -rX & qX + AX \\ qX + XA^T & -rX \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

No caso, a equação (4.7) é lida como:

$$\begin{bmatrix} -rX & qX + AX \\ qX + XA^T & -rX \end{bmatrix} < 0, \quad X > 0. \quad (4.10)$$

Os polos de um sistema LPV podem ser definidos como os polos de um sistema LTI obtidos em pontos de operação específicos, fixando  $v(k)$ , presentes em todos os valores possíveis de  $v \in \Theta$ .

A  $\mathcal{D}$ -estabilidade quadrática de um sistema LPV  $x(k+1) = A(v_k)x(k)$  existe se existir uma matriz simétrica positiva  $X = X^T > 0$  tal que  $\forall v_k \in \Theta$ :

$$\begin{bmatrix} -rX & qX + A(v_k)X \\ qX + XA^T(v_k) & -rX \end{bmatrix} < 0. \quad (4.11)$$

A LMI (4.11) garante o cumprimento do critério de estabilidade do sistema LPV ao mesmo tempo que garante que a região circular onde a aplicação de polos deve ser aplicada é respeitada.

### 4.3 O projeto do ganho do controlador LPV por LMI

Deseja-se que a matriz de estados do sistema em malha fechada  $A(v_k) + B(v_k)K(v_k)$  tenha seus polos dentro de uma região circular  $\mathcal{D}_K$  de raio  $r_K$  e centro na coordenada  $(-q_K, 0)$ . Esse conjunto  $\mathcal{D}_K$  é escolhido de acordo com a área do plano complexo onde os polos alocados implicam a operação desejada para a planta em malha fechada. A LMI (4.11) é reescrita para  $X_K = X_K^T > 0$  como:

$$\begin{bmatrix} -r_K X_K & q_K X_K + (A + BK)X_K \\ q_K X_K + X_K(A + BK)^T & -r_K X_K \end{bmatrix} < 0, \quad (4.12)$$

onde os termos que revelam a dependência das matrizes  $v_K$  são desprezados em nesse tópico por simplificação de escrita.

Entretanto, existe a multiplicação entre de dois elementos desconhecidos totalizando um termo  $K(v_k)X_K$  presente nas LMIs. Isso deve ser simplificado definindo-se  $\Gamma_K(v_k) := K(v_k)X_K$ . Por fim, a forma final das LMIs utilizadas para o projeto do controlador seguem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} -r_K X_K & q_K X_K + AX_K + B\Gamma_K \\ (q_K X_K + AX_K + B\Gamma_K)^T & -r_K X_K \end{bmatrix} < 0. \quad (4.13)$$

Após a solução da inequação (4.13), os valores de calculados de  $X_K$  e  $\Gamma_K(v_k)$  são utilizados para encontrar o ganho LPV do controlador por meio da identidade:

$$K(v_k) = \Gamma_K(v_k)X_K^{-1}. \quad (4.14)$$

O ganho do controlador LPV deve ser aplicado de acordo com a estratégia baseada na operação da planta baseada em uma estrutura politópica definida pelo politopo  $\Theta$  que será apresentado na seção 4.6.

#### 4.4 O projeto do ganho do observador LPV por LMI

Os polos do observador são alocados de acordo com a matriz  $A(v_L) + L(v_L)C(v_L)$ . O mesmo efeito é obtido por meio da sua transposta  $A^T(v_L) + C^T(v_L)L^T(v_L)$ , que possui propriedades matemáticas úteis para a solução de LMI por meio do posicionamento do ganho do observador como uma multiplicação matricial pela direita, como será observado durante essa seção. Os polos do observador LPV devem permanecer dentro de um disco  $\mathcal{D}_l$ , no plano complexo, de raio  $r_L$  e centralizado em  $(-q_L, 0)$ . Esses polos devem ser mais rápidos do que os polos do controlador, para garantir uma convergência dos estados estimados rápida o suficiente para não comprometer o erro de retroalimentação. Essa velocidade também possui um limite superior, pois um observador rápido demais é susceptível a ruídos. A LMI presente em (4.11) sob a perspectiva do observador é lida para  $X_L = X_L^T > 0$  como:

$$\begin{bmatrix} -r_L X_L & q_L X_L + (A^T + C^T L^T) X_L \\ q_L X_L + X_L (A^T + C^T L^T)^T & -r_L X_L \end{bmatrix} < 0, \quad (4.15)$$

onde os termos que revelam a dependência das matrizes em  $v_K$  são desprezados nesse tópico por simplificação.

O termo  $L^T(v_k)X_L$  presente nas LMIs demanda uma simplificação por meio de uma variável auxiliar, definindo-se  $\Gamma_L(v_k) := L^T(v_k)X_L$ . As LMIs finalmente utilizadas para o projeto de alicação de polos do observador LPV são:

$$\begin{bmatrix} -r_L X_L & q_L X_L + A^T X_L + C^T \Gamma_L \\ (q_L X_L + A^T X_L + C^T \Gamma_L)^T & -r_L X_L \end{bmatrix} < 0. \quad (4.16)$$

O ganho  $L(v_k)$  do observador é função das soluções  $X_L$  e  $\Gamma_L(v_k)$  da inequação (4.16):

$$L(v_k) = \Gamma_L^T(v_k) X_L^{-1}. \quad (4.17)$$

O ganho do observador para dado ponto de operação será calculado com base identificação do ponto de operação como descrito na seção 4.6.

#### 4.5 O projeto dos ganhos do atuador virtual e do sensor virtual LPV por LMI

Os polos do atuador virtual LPV são alocados no disco  $\mathcal{D}_{va}$  pertencente ao plano complexo de raio  $r_{va}$  e centro na coordenada  $(-q_{va}, 0)$ . Os mesmos são descritos pela matriz

$A(\mathbf{v}_k) + B^*(\mathbf{v}_k)M_{va}(\mathbf{v}_k)$ . Os polos do sensor virtual LPV alocados pelo projeto de  $A^T(\mathbf{v}_k) + C^{*T}(\mathbf{v}_k)M_{vs}^T(\mathbf{v}_k)$  devem estar na região circular do plano complexo  $\mathfrak{D}_{vs}$  de raio  $r_{vs}$  e centralizado em  $(-q_{vs}, 0)$ .

A partir desse ponto, o caminho para encontrar as LMIs do atuador virtual e do sensor virtual é semelhante ao do controlador LPV e do observador LPV, respectivamente, das seções 4.3 e 4.4:

$$\begin{bmatrix} -r_{va}X_{va} & q_{va}X_{va} + AX_{va} + B\Gamma_{va} \\ (q_{va}X_{va} + AX_{va} + B\Gamma_{va})^T & -r_{va}X_{va} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.18)$$

$$\begin{bmatrix} -r_{vs}X_{vs} & q_{vs}X_{vs} + A^T X_{vs} + C^T \Gamma_{vs} \\ (q_{vs}X_{vs} + A^T X_{vs} + C^T \Gamma_{vs})^T & -r_{vs}X_{vs} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.19)$$

onde os termos que revelam a dependência das matrizes em  $\mathbf{v}_k$  são desprezados em nesse tópico por simplificação. As soluções dos problemas de projeto são condicionadas de forma que  $X_{va} = X_{va}^T > 0$  e  $X_{vs} = X_{vs}^T > 0$ .

Os polos do atuador virtual costumam ser projetados para ter a mesma velocidade dos polos do controlador (ROTONDO *et al.*, 2014). Da mesma forma que o observador LPV, o sensor virtual deve ser projetado para ser mais rápido que o controlador ou que o atuador virtual e sua velocidade desejada costuma ser aproximadamente a mesma do observador.

#### 4.6 Cálculo dos ganhos dos elementos LPV

Calcular o ganho de componentes LPV por inequações escritas em função de  $\mathbf{v}_k$  é considerado um grande obstáculo, pois infinitas restrições se fazem necessárias para contemplar todos os pontos de operação possíveis (ROTONDO *et al.*, 2014). Para contornar esse problema fual, pode-se fazer uma aproximação politópica do sistema limitando-o a uma quantidade  $N$  finita de restrições.

Uma das metodologias mais comuns para aplicar a ideia de politopo em um sistema LPV é o Método da Caixa Delimitadora (SUN; POSTLETHWAITE, 1998), e sua representação matemática é dada de acordo com a equação (4.20):

$$\begin{bmatrix} A(\mathbf{v}_k) & B(\mathbf{v}_k) & C(\mathbf{v}_k) \\ K(\mathbf{v}_k) & B^*(\mathbf{v}_k) & C^*(\mathbf{v}_k) \\ L(\mathbf{v}_k) & M_{va}(\mathbf{v}_k) & M_{vs}(\mathbf{v}_k) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^N \alpha_j(\mathbf{v}_k) \begin{bmatrix} A_j & B_j & C_j \\ K_j & B_j^* & C_j^* \\ L_j & M_{va,j} & M_{vs,j} \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

A partir dessa similaridade os modelos LPV são substituídos pelos  $j$ -ésimos pontos de um politopo de  $N$  vértices. Por exemplo, a inequação do ganho do controlador LPV (4.13) passa a ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} -r_K X_{K,j} & q_K X_{K,j} + A_j X_{K,j} + B_j \Gamma_{K,j} \\ (q_K X_{K,j} + A_j X_{K,j} + B_j \Gamma_{K,j})^T & -r_K X_{K,j} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.21)$$

onde  $j \in \mathbb{N} = \{1, \dots, N\}$ .

Devem ser encontradas para cada valor de  $j$  as soluções para  $X_{K,j}$  e  $\Gamma_{K,j}$  por meio da solução das LMIs (4.21). O ganho do controlador calculado para o  $j$ -ésimo vértice, de acordo com (4.14), será dado de acordo com a identidade  $K_j = \Gamma_{K,j} X_{K,j}^{-1}$ . Cada uma das  $N$  soluções das LMIs devem ser calculadas anteriormente ao funcionamento do sistema em posse do modelo. O mesmo procedimento deve ser realizado para o observador, para o atuador virtual e para o sensor virtual. Os valores do vetor  $\alpha(v_k)$  que devem ser obtidos em tempo real de acordo com o ponto de operação atual da planta <sup>1</sup>.

#### 4.7 Malha FTC

O diagrama completo para a estratégia de controle proposta é dada de acordo com a Figura 10. A prova de que esses elementos podem ser projetados separadamente e aplicados em conjunto encontra-se no artigo de (ROTONDO *et al.*, 2014).

Os parâmetros estimados  $\hat{f}_u(k)$  e  $\hat{\phi}(k)$  são obtidos pelo estimador por filtro de kalman mostrado na Figura 3; os parâmetros  $\hat{\gamma}(k)$  são estimados pelos estimadores mostrados na Figura 4. Vale ressaltar que na seção 2.4 foi dito que a falha aditiva na leitura do sensor  $f_y(k)$  é desnecessária no modelo e que apenas falta multiplicativa  $\gamma(k)$  é considerada suficiente para o modelo de falhas.

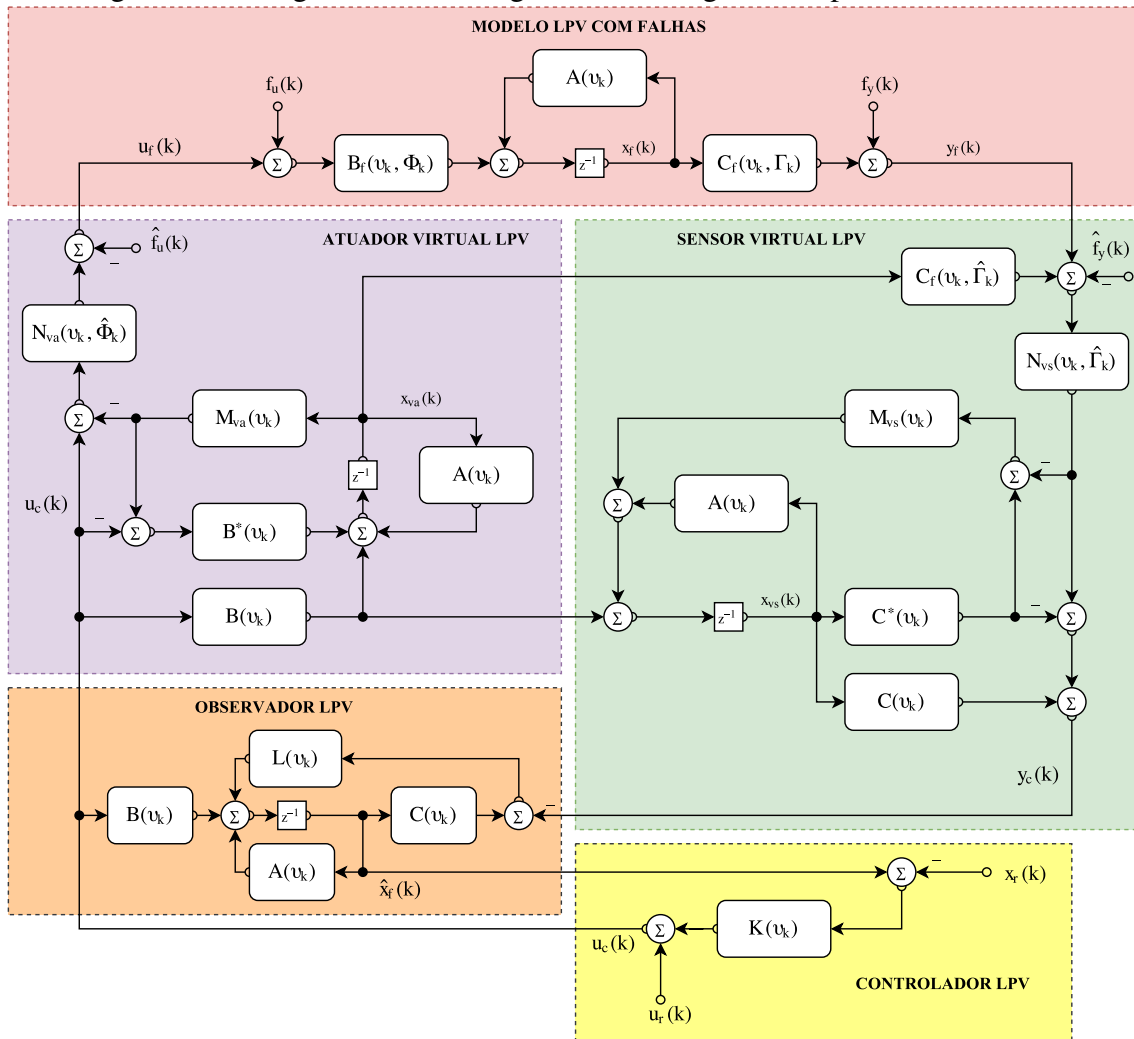
#### 4.8 Conclusões do capítulo

Este capítulo conclui a forma genérica de como são calculados os ganhos dos componentes LPVs com auxílio de LMIs, apresentando as formulações e as ferramentas matemáticas necessárias para o mesmo.

É importante ter o conhecimento fundamental do projeto para tornar possível a compreensão da aplicação específica do método que é abordada no Capítulo 6.

<sup>1</sup>A função  $\alpha(v_k)$  será abordada com mais detalhes na seção 6.4.

Figura 10 – Diagrama de blocos geral da estratégia FTC aplicada ao modelo LPV.



Fonte – o autor

Também é introduzida neste capítulo a estrutura completa em diagrama de blocos do sistema em malha fechada de modo a facilitar a compreensão do leitor a respeito da formulação matemática apresentada ao longo desta dissertação.

## 5 ROBÔ MÓVEL DE RESTRIÇÕES NÃO HOLONÔMICAS

Este capítulo aborda a modelagem matemática baseada em princípios físicos de um robô móvel de restrições não holonômicas. Ao final do capítulo obtém-se um modelo LPV em espaço de estados considerando-se as variáveis velocidade linear e velocidade angular os espaços e as saídas do sistema. As entradas da planta são os torques gerados pelos motores (atuadores) acoplados às rodas do robô.

Os trabalhos de Lobo (2016), Mohareri *et al.* (2012), Fierro e Lewis (1998) e Dierks e Jagannathan (2007) apresentaram a formulação básica necessária para a interpretação física e modelagem do robô móvel sobre rodas com restrições não holonômicas. Entretanto, como essa dissertação se concentra no modelo para o controle das velocidades linear e angular e não no controle especificamente de sua trajetória, serão explicitadas nesse capítulo as condições as quais o modelo está exposto e as expressões físicas necessárias para a representação do robô real num modelo matemático em função de suas velocidades linear e angular apenas.

### 5.1 Modelagem matemática em espaço de estados não linear

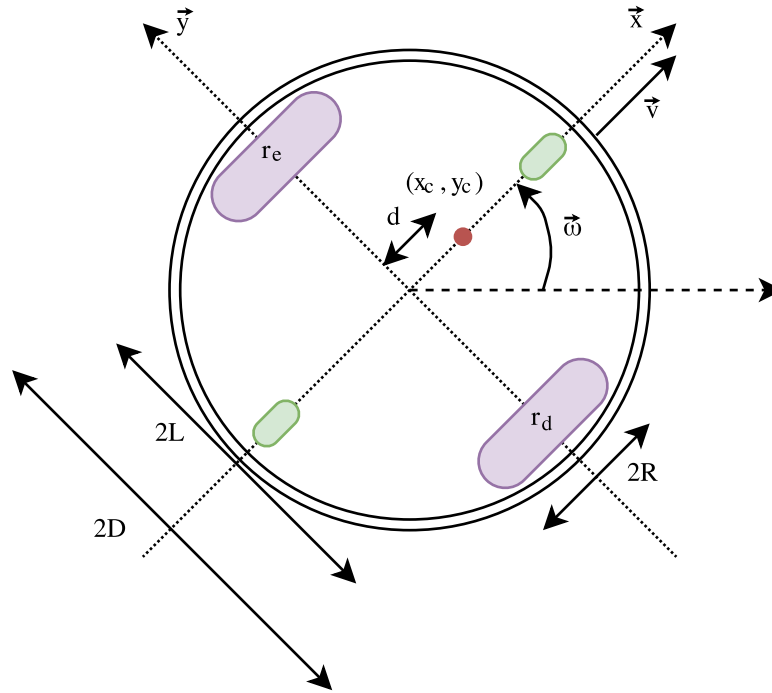
Um robô de massa  $m$  a ser modelado apresenta uma configuração espacial descrita pela Figura 11. A carcaça do robô é considerada cilíndrica, de raio  $D$  e maciça, porém sua massa não é considerada uniformemente distribuída. O centro de inércia é considerado deslocado consideravelmente para frente no ponto  $(x_c, y_c)$  a uma distância  $d$  do centro espacial geométrico do robô. O modelo possui duas rodas de raio  $R$  acopladas a eixos de motores de corrente contínua (roda esquerda,  $r_e$ ; roda direita  $r_d$ ), chamadas rodas móveis, e duas rodas passivas, as quais servem apenas para facilitar o deslocamento do robô e garantir o equilíbrio. O motor da roda direita fornece um torque  $\tau_d$  enquanto o da roda esquerda um torque  $\tau_e$ . Observa-se que as restrições não holonômicas presentes no modelo ocorrem devido às limitações de movimentação das rodas. As mesmas não permitem que o robô movimente-se lateralmente pelo eixo  $\vec{y}$ , coincidente ao eixo das rodas. A distância entre os eixos das rodas móveis é dada por  $2L$ .

Não serão considerados o atrito superficial na carcaça do robô nem a influência da gravidade na movimentação, pois a superfície sobre a qual o robô andarรก será considerada plana. A perda de aderência nas rodas também será considerada desprezível.

O módulo das velocidades linear  $v$  e angular  $\omega$  podem ser encontrados em função



Figura 11 – Figura ilustrativa da vista superior da estrutura física do robô móvel com restrições não holonômicas.



Fonte – o autor

das velocidades angulares das rodas direita e esquerda como segue:

$$v(t) = R \left( \frac{\omega_d(t) + \omega_e(t)}{2} \right), \quad (5.1)$$

$$\omega(t) = \frac{R}{L} \left( \frac{\omega_d(t) - \omega_e(t)}{2} \right), \quad (5.2)$$

nessa seção, a dependência das variáveis no tempo será omitida por simplicidade.

Estudando-se as componentes de força num diagrama de corpo livre (Figura 12) do modelo observam-se várias componentes de força aplicadas ao corpo do robô. Existe a componente de força apontando para frente, sentido considerado positivo, gerada pela roda direita ( $F_d = \frac{\tau_d}{R}$ ). A roda esquerda também gera uma componente de força positiva de intensidade  $F_e = \frac{\tau_e}{R}$ . A massa do robô também gera uma força de resistência ao movimento, sentido negativo, com módulo igual a  $F_r = m\dot{v}$ , onde  $\dot{v} = \frac{\delta v}{\delta t}$  equivalente à derivada da velocidade linear no tempo, ou simplesmente a aceleração linear do robô.

Além das forças reais, uma pseudoforça também é levada em consideração. Essa pseudoforça provém do momento angular que o robô possui e a mesma atua sobre o centro de inércia do robô como uma força centrífuga apontando para frente conforme mostra a Figura 12. Sua magnitude é dada por  $F_p = m d \omega^2$ .

Sabe-se que a soma de todas as forças atuantes sobre um corpo deve ter resultante nula, logo:

$$\sum F = 0, \quad (5.3)$$

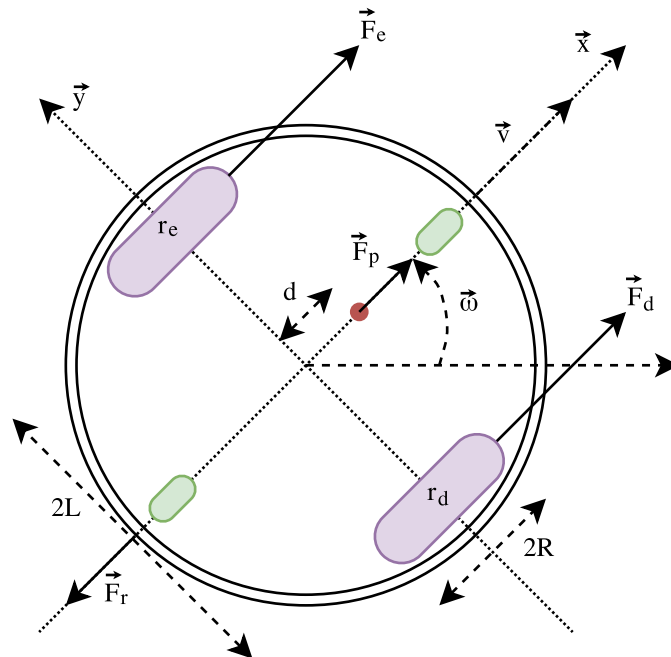
$$F_d + F_e - F_r + F_p = 0, \quad (5.4)$$

$$\frac{\tau_d}{R} + \frac{\tau_e}{R} - m\dot{v} + md\omega^2 = 0. \quad (5.5)$$

Refazendo-se o diagrama de corpo livre, pode-se estudar as componentes de torque sobre o eixo vertical do modelo de acordo com a Figura 13. Considerando-se o sentido anti-horário como sendo o sentido positivo observa-se que a roda direita gera um torque no sentido positivo de módulo  $T_d = \frac{\tau_d}{R}L$ . A roda esquerda fornece uma componente de torque negativa de magnitude  $T_e = \frac{\tau_e}{R}L$ . A inércia do corpo cilíndrico dada por  $I_c = \frac{mD^2}{2}$  adicionada à inércia do ponto excêntrico ao eixo girante dada por  $I_p = md^2$  totaliza uma inércia  $I_T = I_c + I_p$ . Essa inércia  $I_T$  gera uma de resistência à aplicação do torque, magnitude negativa, definida por  $T_i = I_T \dot{\omega}$ , onde  $\dot{\omega} = \frac{\delta\omega}{\delta t}$  representando a derivada no tempo da velocidade angular, ou simplesmente a aceleração angular do robô.

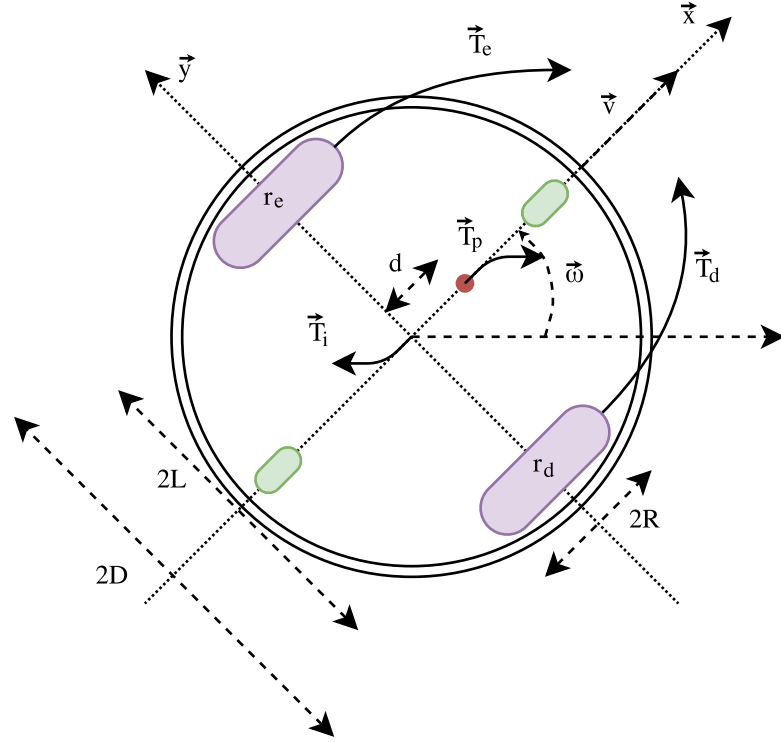
Além dessas componentes reais de torque, existe uma componente considerável de pseudotorque (torque de Coriolis) resultante da combinação entre movimento linear e rotacional

Figura 12 – Diagrama de corpo livre das atuações dos vetores de força e pseudoforça que influenciam a dinâmica de movimentação do robô móvel com restrições não holonômicas.



no mesmo corpo (SIDEK; SARKAR, 2008), vide Figura 13. Essa componente é resistente, logo seu módulo é negativo, e sua magnitude é dada por  $T_c = 2md\omega v$ .

Figura 13 – Diagrama ilustrativo de corpo livre das componentes de torque e pseudotorque que influenciam a dinâmica de movimentação do robô móvel com restrições não holonômicas.



Fonte – o autor

A soma de todos os torques deve ser nula, logo:

$$\sum \tau = 0, \quad (5.6)$$

$$T_d - T_e - T_i - T_c = 0, \quad (5.7)$$

$$\frac{\tau_d}{R}L - \frac{\tau_e}{R}L - I_T \dot{\omega} - 2md\omega v = 0. \quad (5.8)$$

Pode-se interpretar os torques dos motores como as entradas da planta. As equações (5.5) e (5.8) são então reescritas como:

$$m\dot{u} - md\omega^2 = \frac{\tau_d}{R} + \frac{\tau_e}{R}, \quad (5.9)$$

$$I_T \dot{\omega} + 2md\omega v = \frac{\tau_d}{R}L - \frac{\tau_e}{R}L. \quad (5.10)$$

Com as equações (5.9) e (5.10) obtém-se uma representação do modelo por compo-

mentes matriciais:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -md\omega \\ 2md\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ L & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_d \\ \tau_e \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Essa forma matricial pode facilmente ser adaptada para uma representação não linear em espaço de estados da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -d\omega \\ \frac{2md\omega}{I_T} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} + \frac{1}{R} \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ \frac{L}{I_T} & -\frac{L}{I_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_d \\ \tau_e \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

A equação (5.12) será considerada como sendo a representação final para o modelo em espaço de estados não linear. Essa representação tem sua importância na aplicação da estratégia de controle LPV sugerido, uma vez que os cálculos de controlador digital se baseiam basicamente numa representação em espaço de estados da planta.

## 5.2 Modelo baseado em politopo

Deve ser criado para essa planta uma interpretação de sua operação de acordo com o espaço politópico para que o projeto do controlador LPV possa ser realizado. Esse espaço é mapeado de acordo com uma variável de ajuste nomeada genericamente de  $v(t)$ . A equação (5.12) deve ser interpretada como:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{bmatrix} = A(v(t)) \begin{bmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + B(p(t)) \begin{bmatrix} \tau_d(t) \\ \tau_e(t) \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

Observa-se na equação (5.12) que existe uma não linearidade provinda da dependência da matriz de estados do próprio estado  $\omega$ . Logo, escolheu-se a variável de ajuste do sistema politópico como sendo  $v(t) = \omega(t)$ . A topologia em (5.13) segue o seguinte formato:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}(\omega(t)) \\ a_{21}(\omega(t)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \tau_d(t) \\ \tau_e(t) \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Se faz necessária a discretização da expressão (5.14) para o projeto de um controlador discreto. A discretização pelo método indicado em (CHEN, 1998) com um tempo de amostragem  $T_s$  resulta em:

$$\begin{bmatrix} v(k+1) \\ \omega(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -d\omega(k)T_s \\ \frac{2md\omega(k)T_s}{I_T} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix} + \frac{T_s}{R} \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ \frac{L}{I_T} & -\frac{L}{I_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_d(k) \\ \tau_e(k) \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Quadro 1 – Quadro com os parâmetros do modelo do robô.

Icôgnita	valor [unidade]
$T_s$	0.01 [s]
$R$	0.07 [m]
$D$	0.25 [m]
$L$	0.15 [m]
$d$	0.10 [m]
$m$	30.0 [kg]
$I_T$	$\approx 1.24$ [kg · m <sup>2</sup> ]

Fonte – elaborado pelo autor.

O Quadro 1 traz consigo os parâmetros adotados que caracterizam o modelo do robô móvel. Atribuindo-se esses valores à equação (5.15), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} v(k+1) \\ \omega(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.001\omega(k) \\ 0.04848\omega(k) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.00476 & 0.00476 \\ 0.01732 & -0.01732 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_d(k) \\ \tau_e(k) \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

A variável de ajuste é então delimitada dentro dos limites escolhidos:

$$-128^\circ/s \leq \omega \leq 128^\circ/s, \quad (5.17)$$

em radianos, unidade padrão, esses valores correspondem a  $\pm 2.234^{rad}/s$ , aproximadamente. A região de não linearidade é associada, nesse caso, a apenas uma variável, limitando a operação em uma faixa unidimensional, que caracteriza um politopo de apenas dois vértices.

A aproximação politópica consiste em aplicar os valores extremos definidos na expressão (5.15). Adotando-se os parâmetros do robô de acordo com o Quadro 1 para a aproximação politópica, obtém-se que:

$$A(-128^\circ/s) = A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -0.0022 \\ 0.1083 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.18)$$

$$A(128^\circ/s) = A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.0022 \\ -0.1083 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0048 & 0.0048 \\ 0.0173 & -0.0173 \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

A saída é genericamente dada por:

$$y(k) = C(\omega(k)) \begin{bmatrix} v(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

Para o sistema dado, a saída é simplesmente uma leitura dos estados sua dinâmica não depende de  $\omega(k)$  e a equação de saída é descrita como:

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

logo a matriz  $C(\omega(k))$  é uma matriz identidade:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

### 5.3 Conclusões do capítulo

A modelagem em espaço de estados LPV de um robô móvel sobre duas rodas com restrições não holonômicas é apresentada como produto final deste capítulo. O modelo obtido é referente à necessidade de controlar as velocidades linear e angular do robô.

As matrizes  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B$  e  $C$  desse modelo são importantes para os projetos dos componentes LPV da malha de controle do sistema apresentados no Capítulo 4. Os resultados apresentados no Capítulo 7 fazem uso desse modelo e dos valores aqui atribuídos.

## 6 APLICAÇÃO DA TÉCNICA FTC NO MODELO DO ROBÔ

Neste capítulo, a técnica LPV descrita em termos gerais no Capítulo 4 é exemplificada por meio da aplicação da mesma no controle de velocidade linear e angular de um robô com restrições não holonômicas descrito no Capítulo 5. São especificados os critérios de projeto, os cálculos e os ganhos de cada componente projetado.

### 6.1 Ganho do controlador LPV e ação em avanço

Esse projeto inicia-se com os cálculos das componentes dos ganhos dos controlador LPV nominal e do observador LPV nominal. Seguem-se as seguintes etapas:

- Cálculo do ganho do controlador  $K(v(k))$ . Projetado para ser  $\mathfrak{D}_K$ -estável por meio da definição de uma região circular  $\mathfrak{D}_K$  com raio  $r_K$  e centralizada em  $(-q_K, 0)$ . A LMI é descrita de acordo com (4.13). É aplicado o conceito de caixa delimitadora descrito por (4.20) de acordo com o exemplo dado na inequação (4.21). As matrizes necessárias são  $A_1$ ,  $A_2$  e  $B$ , encontradas em (5.18), (5.19) e (5.20), respectivamente;
- De forma semelhante faz-se o cálculo do ganho do observador  $L(v(k))$ . Projetado para ser  $\mathfrak{D}_L$ -estável por meio da definição de uma região circular  $\mathfrak{D}_L$  com raio  $r_L$  e centralizada em  $(-q_L, 0)$ . A LMI é descrita em (4.16). Aplica-se o conceito da caixa delimitadora descrito por (4.20) utilizando-se as matrizes que são  $A_1$ ,  $A_2$  e  $C$ , encontradas em (5.18), (5.19) e (5.23), respectivamente.

Para o controlador as especificações da regiões LMI circular  $\mathfrak{D}_K$  são:

$$r_K = 0.01, \quad (6.1)$$

$$q_K = -0.96, \quad (6.2)$$

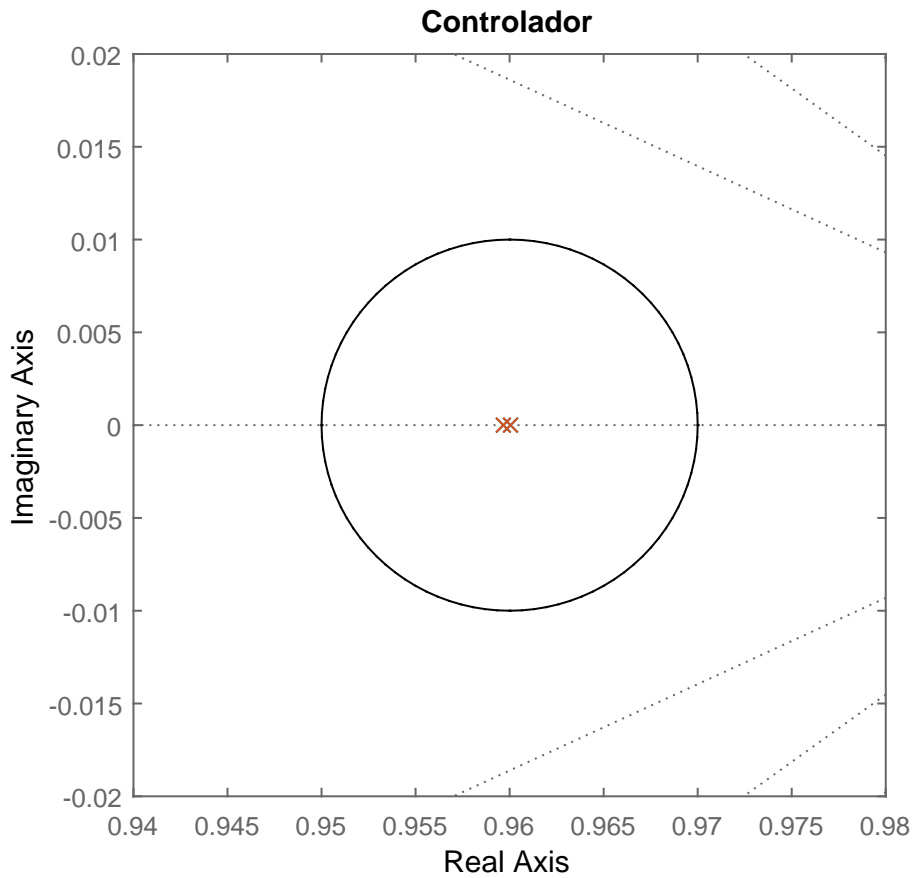
que refletem em um tempo de assentamento de aproximadamente 0.75 segundos.

Dadas as especificações (6.1) e (6.2), encontram-se as componentes de  $K(v(k))$ :

$$K_1 = \begin{bmatrix} -7.3276 & -0.9204 \\ -1.0724 & 1.3896 \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -1.0724 & -1.3896 \\ -7.3276 & 0.9204 \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Figura 14 – Mapa de polos do projeto do controlador. Os polos estão contidos em  $\mathcal{D}_K$ , atendendo às condições do projeto.



Fonte – o autor

Observa-se na Figura 14 que os polos do controlador estão alocados dentro de um círculo de raio 0.01 centralizado em 0.96 do eixo real do plano complexo. Esta figura acusa que os polos estão alocados de acordo com as especificações de projeto.

O ganho da ação de controle em avanço é calculado de acordo com o ponto de operação da planta levando em consideração a equação (5.16). Considera-se que  $v(k+1) = v(k)$  e  $\omega(k+1) = \omega(k)$  em regime permanente e que esses valores equivalem aos valores de referência  $v_r(k)$  e  $\omega_r(k)$ , respectivamente.

Encontram-se os valores para  $\tau_d(k)$  e  $\tau_e(k)$  correspondentes às componentes que devem ser compensadas pela ação de controle em avanço  $u_{r1}(k)$  e  $u_{r2}(k)$ , respectivamente, desenvolvendo-se (5.16):

$$v_r(k) = v_r(k) - 0.01\omega_r^2(k) - 0.0476u_{r1}(k) - 0.0476u_{r2}(k) \quad (6.5)$$

$$\omega_r(k) = 0.4848v_r(k)\omega_r(k) + \omega_r(k) - 0.1732u_{r1}(k) + 0.1732u_{r2}(k). \quad (6.6)$$



Isolando-se os termos de torque em (6.5) e (6.6) e montando-se um sistema de equações:

$$0.0476u_{r1}(k) + 0.0476u_{r2}(k) = -0.01\omega_r^2(k) \quad (6.7)$$

$$0.1732u_{r1}(k) - 0.1732u_{r2}(k) = 0.4848v_r(k)\omega_r(k). \quad (6.8)$$

Resolvendo-se o sistema de equações composto pelas equações (6.7) e (6.8) em função de  $u_{r1}(k)$  e  $u_{r2}(k)$ :

$$u_{r1}(k) = 1.4v_r(k)\omega_r(k) - 0.105\omega_r^2(k) \quad (6.9)$$

$$u_{r2}(k) = -1.4v_r(k)\omega_r(k) - 0.105\omega_r^2(k). \quad (6.10)$$

Assim, a ação de controle por avanço é função apenas dos valores no instante de tempo  $k$  das entradas de referência de velocidades linear e angular atribuídas ao sistema pelo operador do robô.

## 6.2 Ganho do observador LPV

Para o projeto do observador, escolheu-se uma região  $\mathfrak{D}_L$  a qual contempla polos mais rápidos e suas especificações são:

$$r_L = 0.01, \quad (6.11)$$

$$q_L = -0.885, \quad (6.12)$$

que refletem em um tempo de assentamento para os estados estimados de aproximadamente 0.25 segundos.

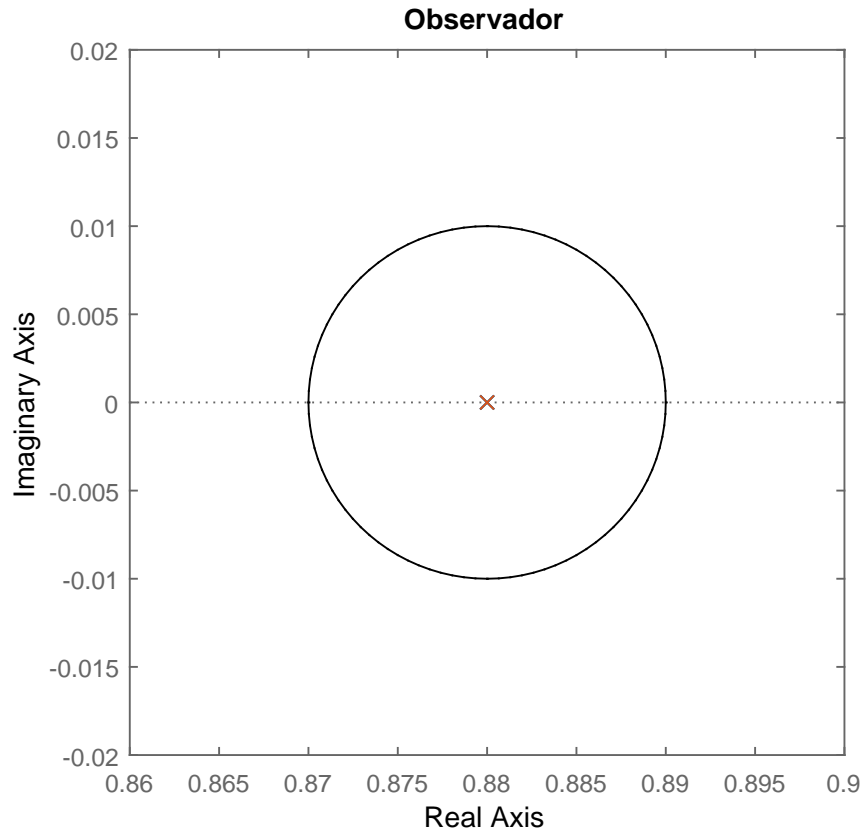
Dadas as especificações (6.11) e (6.12), obtêm-se os valores das componentes de  $L(v(k))$ :

$$L_1 = \begin{bmatrix} -0.1200 & 0.0022 \\ -0.1083 & -0.1200 \end{bmatrix}, \quad (6.13)$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} -0.1200 & -0.0022 \\ 0.1083 & -0.1200 \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

Essas componentes que compõem o ganho do observador garantem que os polos estarão dentro da região  $\mathfrak{D}_L$  conforme mostrado na Figura 15.

Figura 15 – Mapa de polos do projeto do observador.



Fonte – o autor

### 6.3 Ganho do atuador LPV e do sensor LPV

Para o projeto dos ganhos do atuador virtual LPV se faz necessário o conhecimento das matrizes  $B_1^*$  e  $B_2^*$  que, de acordo com (3.4), são dadas por:

$$B_1^* = \begin{bmatrix} -0.0409 & 0.0476 \\ 0.1488 & -0.1732 \end{bmatrix}, \quad (6.15)$$

$$B_2^* = \begin{bmatrix} 0.0476 & -0.0409 \\ 0.1732 & -0.1488 \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

O cálculo das componentes de ganho do sensor virtual LPV exige o conhecimento das matrizes  $C_1^*$  e  $C_2^*$  que, de acordo com (3.13), são dadas por:

$$C_1^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.17)$$

$$C_2^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

O projeto das componentes dos ganhos do atuador virtual LPV e do sensor virtual LPV é feito de acordo com as seguintes etapas:

- Cálculo do primeiro ganho do atuador virtual  $M_{va}^1(v(k))$ . Projetado para ser  $\mathcal{D}_{va}^1$ -estável por meio da definição de uma região circular  $\mathcal{D}_{va}^1$  com raio  $r_{va}^1$  e centralizada em  $(-q_{va}^1, 0)$ . Esse ganho é utilizado para o caso de falta total no primeiro atuador. Resolve-se a LMI (4.18) com o auxílio do método da caixa delimitadora (4.20), utilizando-se as matrizes  $A_1$ ,  $A_2$  e  $B_1^*$ , encontradas em (5.18), (5.19) e (6.15), respectivamente;
- Cálculo do segundo ganho do atuador virtual  $M_{va}^2(v(k))$ . Projetado para ser  $\mathcal{D}_{va}^2$ -estável por meio da definição de uma região circular  $\mathcal{D}_{va}^2$  com raio  $r_{va}^2$  e centralizada em  $(-q_{va}^2, 0)$ . Esse ganho é utilizado para o caso de falta total no segundo atuador. Resolve-se novamente a LMI (4.18) com o auxílio do método da caixa delimitadora (4.20), agora utilizando-se as matrizes  $A_1$ ,  $A_2$  e  $B_2^*$ , encontradas em (5.18), (5.19) e (6.16), respectivamente;
- Cálculo do primeiro ganho do sensor virtual  $M_{vs}^1(v(k))$ . Projetado para ser  $\mathcal{D}_{vs}^1$ -estável por meio da definição de uma região circular  $\mathcal{D}_{vs}^1$  com raio  $r_{vs}^1$  e centralizada em  $(-q_{vs}^1, 0)$ . Esse ganho é utilizado para o caso de falta total no primeiro sensor. Resolve-se a LMI (4.19) com o auxílio do método da caixa delimitadora (4.20), utilizando-se as matrizes  $A_1$ ,  $A_2$  e  $C_1^*$ , encontradas em (5.18), (5.19) e (6.17), respectivamente;
- Cálculo do segundo ganho do sensor virtual  $M_{vs}^2(v(k))$ . Projetado para ser  $\mathcal{D}_{vs}^2$ -estável por meio da definição de uma região circular  $\mathcal{D}_{vs}^2$  com raio  $r_{vs}^2$  e centralizada em  $(-q_{vs}^2, 0)$ . Esse ganho é utilizado para o caso de falta total no segundo sensor. Resolve-se a LMI (4.19) com o auxílio do método da caixa delimitadora (4.20), agora utilizando-se as matrizes  $A_1$ ,  $A_2$  e  $C_2^*$ , encontradas em (5.18), (5.19) e (6.18), respectivamente.

As especificações das regiões LMI  $\mathcal{D}_{va}^1$  e  $\mathcal{D}_{va}^2$  para esse projeto são escolhidas como:

$$r_{va}^1 = r_{va}^2 = 0.01, \quad (6.19)$$

$$q_{va}^1 = q_{va}^2 = -0.96, \quad (6.20)$$

que refletem em um tempo de assentamento para os estados do atuador virtual de aproximada-

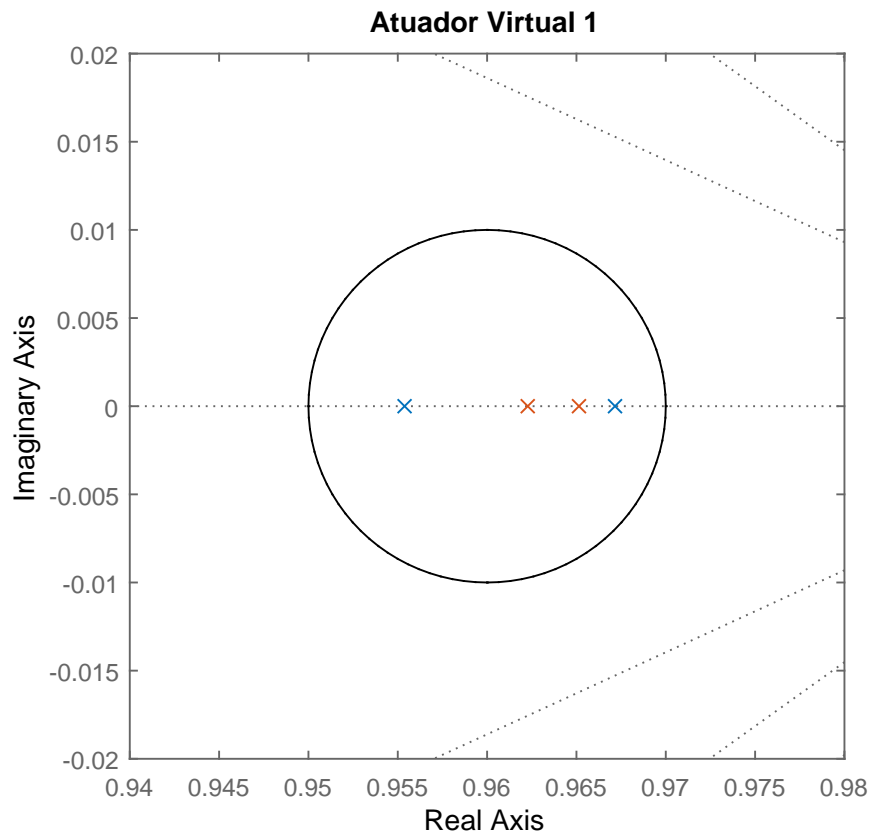
mente 0.75 segundos. Obtêm-se os valores das componentes de  $M_{va}^1(v(k))$ :

$$M_{va1}^1 = \begin{bmatrix} 22.7528 & 1.0885 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.21)$$

$$M_{va2}^1 = \begin{bmatrix} 7.0680 & -2.9344 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

A região onde os polos do atuador virtual 1 foram agrupados satisfazendo as condições de projeto pode ser verificada na Figura 16

Figura 16 – Mapa de polos do sistema em malha fechada para o projeto do atuador virtual 1.



Fonte – o autor

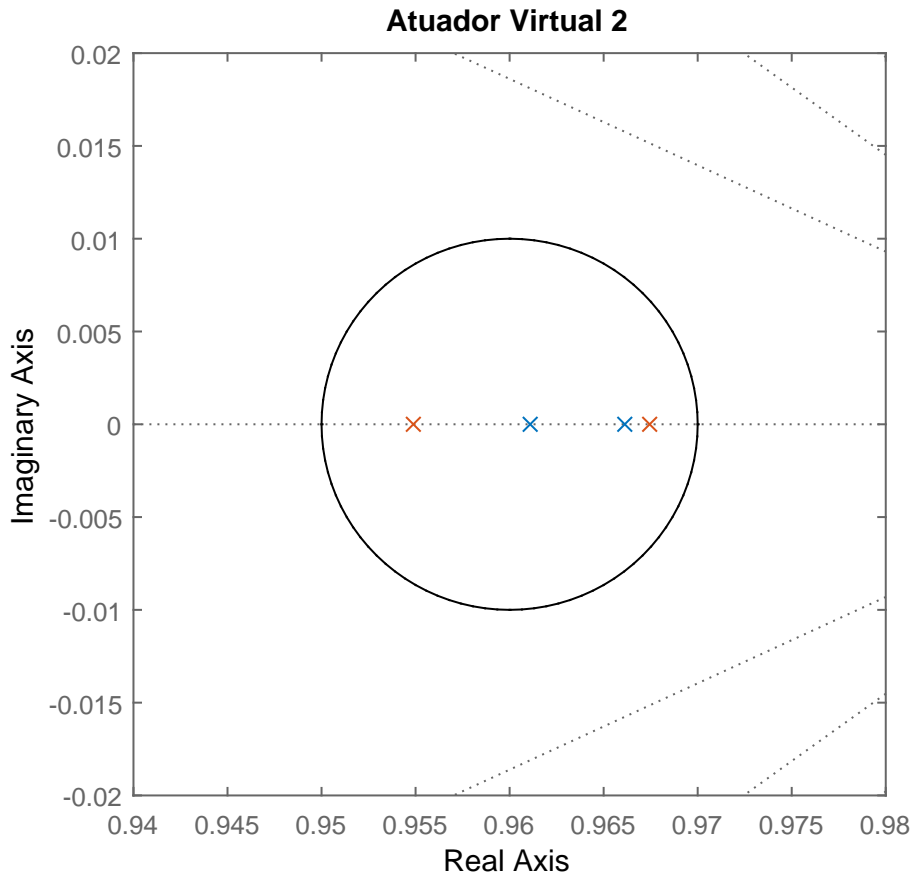
Os valores das componentes de  $M_{va}^2(v(k))$  também são calculados e seus valores encontrados são:

$$M_{va1}^2 = \begin{bmatrix} -6.0741 & -2.5218 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.23)$$

$$M_{va2}^2 = \begin{bmatrix} -19.5534 & 0.9355 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.24)$$

A Figura 17 comprova que os polos foram alocados respeitando os limites da região LMI especificada para o atuador virtual 2.

Figura 17 – Mapa de polos do sistema em malha fechada para o projeto do atuador virtual 2.



Fonte – o autor

As regiões LMI  $\mathcal{D}_{vs}^1$  e  $\mathcal{D}_{vs}^2$  para o agrupamento dos polos do sensor virtual são especificadas como segue:

$$r_{vs}^1 = r_{vs}^2 = 0.02, \quad (6.25)$$

$$q_{vs}^1 = q_{vs}^2 = -0.905, \quad (6.26)$$

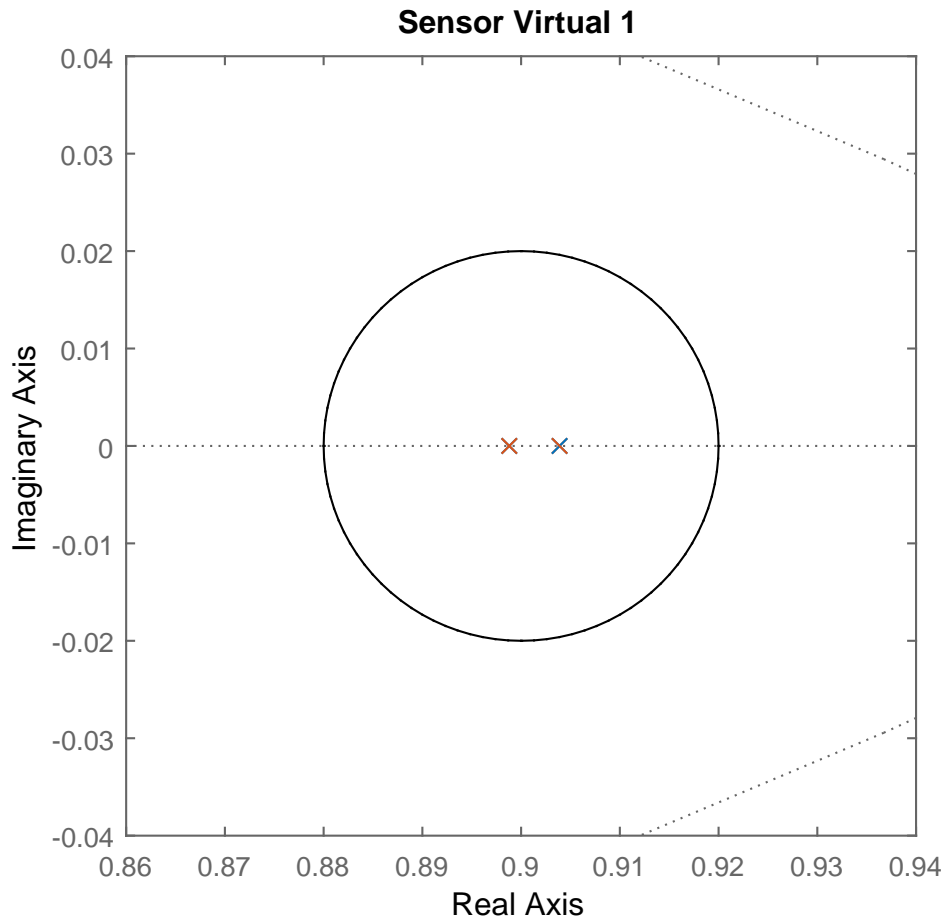
que refletem em um tempo de assentamento para os estados do sensor virtual de aproximadamente 0.30 segundos. Os valores das componentes de  $M_{vs}^1(v(k))$  são:

$$M_{vs1}^1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.0876 \\ 0 & -0.1973 \end{bmatrix}, \quad (6.27)$$

$$M_{vs2}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.0876 \\ 0 & -0.1973 \end{bmatrix}. \quad (6.28)$$

A Figura 18 ilustra o posicionamento dos polos do sensor virtual 1. O posicionamento dos polos está obedecendo os critérios de alocação estando os mesmos localizados dentro do círculo  $\mathcal{D}_{va}^1$  no plano complexo.

Figura 18 – Mapa de polos do sistema em malha fechada para o projeto do sensor virtual 1 e esboço da região  $\mathcal{D}_{va}^1$ .



Fonte – o autor

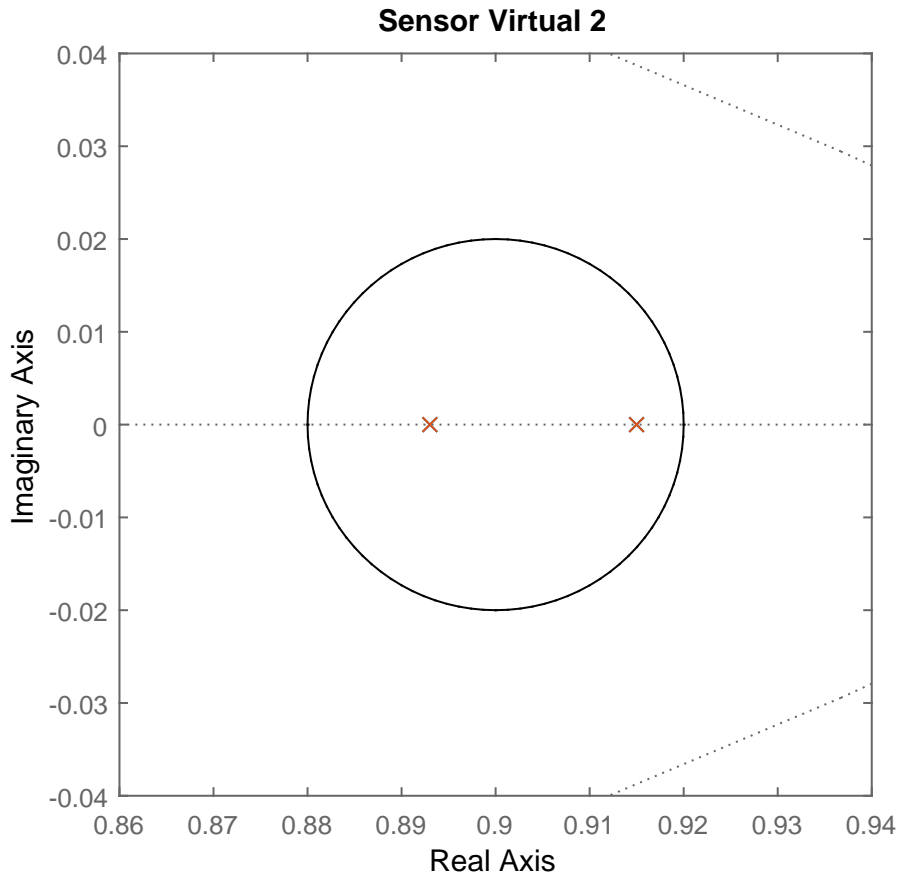
Os valores das componentes do sensor virtual 2,  $M_{vs}^2(v(k))$ , são:

$$M_{vs1}^2 = \begin{bmatrix} -0.1920 & 0 \\ 4.0259 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.29)$$

$$M_{vs2}^2 = \begin{bmatrix} -0.1920 & 0 \\ -4.0259 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

Pode ser observado na Figura 19 que os polos estão alocados corretamente dentro da região LMI especificada em projeto.

Figura 19 – Mapa de polos do sistema em malha fechada para o projeto do sensor virtual 2.



Fonte – o autor

#### 6.4 Cálculo do vetor de pesos $\alpha(v_k)$

O vetor  $\alpha(v_k)$  tem seus elementos variando de acordo com o ponto de operação da planta e calculado em tempo real. Sabe-se que o ponto de operação da planta varia dependendo diretamente de  $\omega(k)$ , logo  $\alpha(\omega(k)) := \alpha(v_k)$ . Esse vetor deve ser utilizado para obter-se o ganho LPV para um ponto de operação em específico com o auxílio do método da caixa delimitadora (4.20).

Para dado ganho  $G(\omega(k))$ , tem-se que:

$$G(\omega(k)) = \frac{G(\omega_1) + G(\omega_2)}{2}, \text{ para } \omega(k) = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \quad (6.31)$$

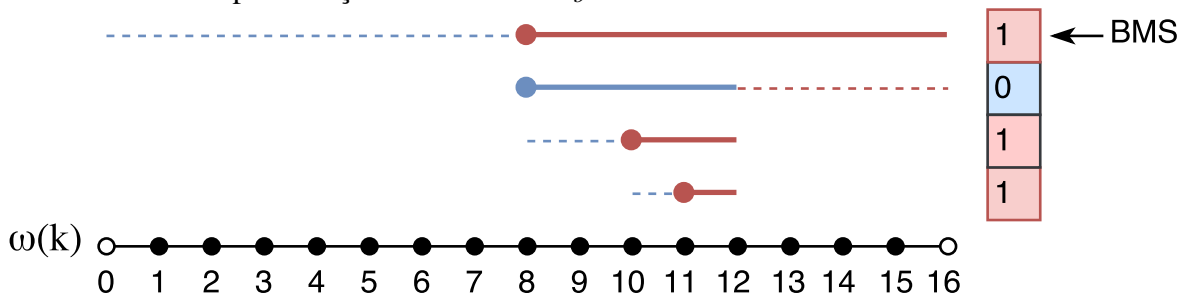
De acordo com a inequação (5.17), os limites da variável de ajuste são definidos numericamente entre  $\pm 128$ . Assim, adotou-se de um artifício matemático para obter o ganho referente a qualquer valor inteiro de  $\omega(k)$  por meio de médias aritméticas oriundas do par  $\{G(-128), G(128)\}$ . Esse artifício utiliza, por comodidade, o valor de  $\omega$  em graus por segundo

e consiste em seguir as seguintes etapas:

1. Obtém-se o valor de  $G(0)$  por meio da identidade  $G(0) = \frac{G(128)+G(-128)}{2}$ ;
2. Caso  $\omega(k) > 0$ :  $\Delta = G(128)$ , caso contrário:  $\Delta = G(-128)$ , onde  $\Delta$  é uma variável auxiliar;
3. Obtém-se o valor em binário do módulo de  $\omega(k)$ , tendo-se  $b = \text{binario}(\omega(k))$ , onde  $b$  é uma variável auxiliar;
4. Com a representação em binário de  $\omega(k)$  é possível aplicar o conceito ilustrado na Figura 20 para realizarem-se médias aritméticas com os valores de  $G$  de forma a encontrar  $G(\omega(k))$ .

Na Figura 20, descreve-se um algoritmo do qual começa-se observando o *Bit Mais Significativo* (BMS). Sempre que houver o número 1 no registrador de *bit*, entende-se que o valor final estará compreendido na metade à direita do centro do segmento de reta (indicado em vermelho). Quando houver um 0 no registrador, o valor final estará na metade à esquerda do centro (caso azul). Verificando-se do *bit* mais significativo para o menos significativo, observa-se que o valor final sempre estará à esquerda do último segmento de reta, onde o lado esquerdo das mesmas são sempre indicadas com um ponto.

Figura 20 – Exemplo da interpretação ilustrativa de um número binário por médias aritméticas, onde BMS aponta para o *bit* mais significativo. O número exemplificado é o 11, e sua representação binária é  $1011_b$ .



Fonte – o autor

Em termos de médias aritméticas, descreve-se o exemplo de acordo com:

$$m_1 = \frac{\omega|_{16} + \omega|_0}{2} = 8, \quad (6.32)$$

$$m_2 = \frac{m_1 + \omega|_{16}}{2} = 12, \quad (6.33)$$

$$m_3 = \frac{m_1 + m_2}{2} = 10, \quad (6.34)$$

$$\omega|_{11} = \frac{m_2 + m_3}{2} = 11, \quad (6.35)$$



logo, para  $G(11)$ , a analogia é feita da seguinte forma:

$$\delta_1 = \frac{G(16) + G(0)}{2}, \quad (6.36)$$

$$\delta_2 = \frac{\delta_1 + G(16)}{2}, \quad (6.37)$$

$$\delta_3 = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}, \quad (6.38)$$

$$G(11) = \frac{\delta_2 + \delta_3}{2}. \quad (6.39)$$

Essas operações de médias aritméticas são capazes de identificar com 1<sup>o</sup> de precisão qualquer  $G(\omega(k))$  dado o ponto de operação  $\omega(k)$  e os valores de  $G(128)$  e  $G(-128)$ . Dada essa afirmação, sabe-se que é possível reescrever a equação (6.39) na forma  $\alpha_1(\omega(k))G(16) + \alpha_2(\omega(k))G(0)$ , porém, encontrar os valores exatos para o vetor  $\alpha(\omega(k))$  é desnecessário, uma vez que já tem-se o algoritmo para encontrar diretamente  $G(\omega(k))$  e assim o objetivo já é atingido.

## 6.5 Conclusões do capítulo

Este capítulo aplica a metodologia do controle tolerante a falhas estudada nesse trabalho ao modelo de um robô móvel sobre rodas com restrições não holonômicas, dadas as condições de projeto.

As alocações dos polos são executadas de acordo com a proposição teórica genérica estabelecida no Capítulo 4 e as restrições são respeitadas como afirma a teoria.

Os valores calculados para os componentes LPVs são atribuídos aos ensaios em simulações. A descrição dos ensaios e os resultados dessas simulações se fazem presentes no próximo capítulo.

## 7 RESULTADOS DA TÉCNICA FTC

Este capítulo traz os resultados de simulação obtidos para a alocação de polos por agrupamento para o controlador LPV, observador LPV, atuador virtual LPV e sensor virtual LPV. Também apresenta os resultados para os ensaios em simulação da técnica de Controle Tolerante a Falhas demonstrando-se vários cenários de falha e discutindo-se as respostas obtidas pelo modelo.

O objetivo desses ensaios é validar a técnica FTC, demonstrando que o FDI é realizado adequadamente bem como a tolerância a falhas. Com esse objetivo, a maioria dos ensaios são realizados desacoplando as falhas aditivas e multiplicativas entre si, para facilitar a análise do funcionamento dos componentes do sistema separadamente. Dessa forma, o significado físico das falhas e como elas devem ser interpretadas sob o ponto de vista de um robô móvel pode se tornar desafiante devido à especificidade dos ensaios em torno de apenas uma operação matemática (adição ou multiplicação).

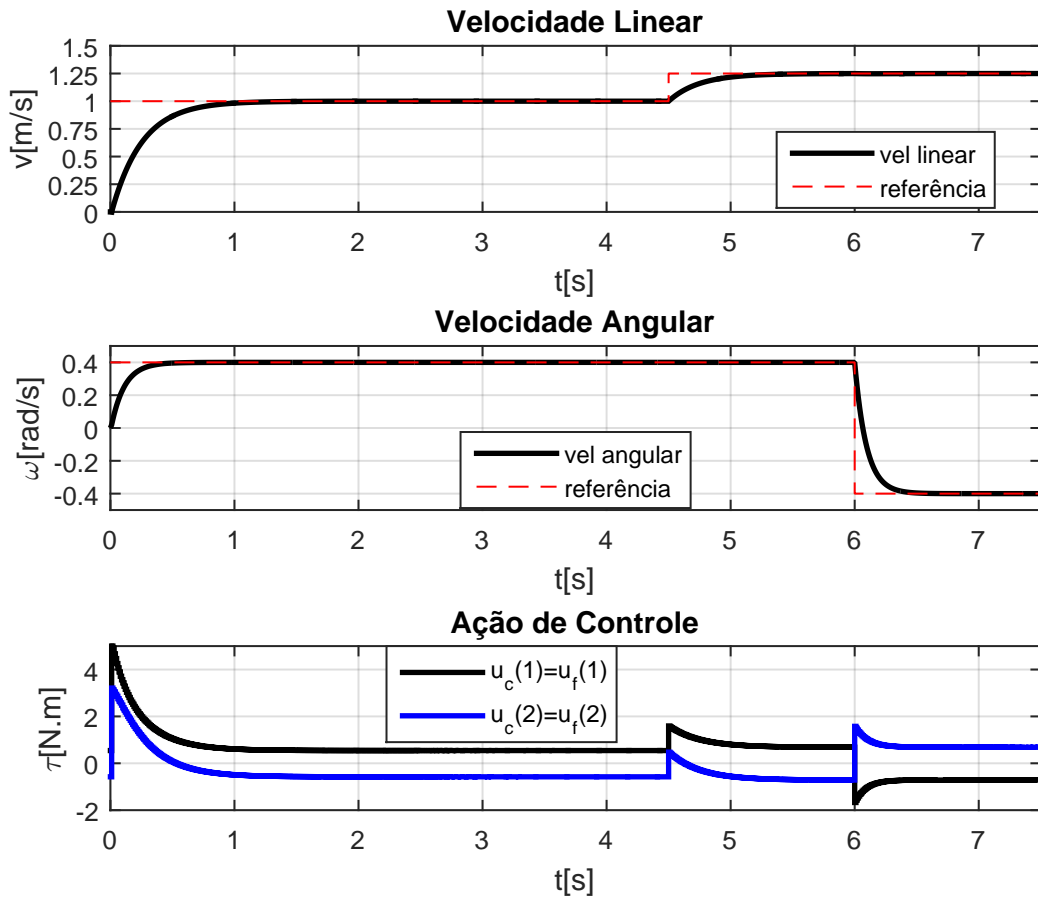
Logo, sugere-se ao leitor que interprete a falha aditiva em um atuador como alguma condição adversa que interfira do torque de um motor por meio de uma componente constante de torque, tal como o travamento de algum rolamento que cause uma resistência constante por atrito. Uma falha multiplicativa no atuador pode ser interpretada, por exemplo, como a perda de alguma fase do motor ou pela queda do desempenho da bateria que alimenta o mesmo, visto que essas duas condições podem ser modeladas resumidamente por meio de multiplicações. As falhas multiplicativas nos sensores podem ser interpretadas como uma perda de calibragem dos sensores de velocidade ou desvios na referência de fundo de escala de algum leitor analógico que faça a conexão entre os sensores e o microcontrolador.

### 7.1 Ensaio sem falhas

Observa-se na Figura 21 que o seguimento de referência é realizado satisfatoriamente com erro de regime permanente nulo. O estado de velocidade linear  $v(k)$  demora cerca de 0.75 segundo para atingir o regime, enquanto o estado de velocidade angular  $\omega(k)$  leva menos de meio segundo para atingir o regime.

Após a primeira mudança de ponto de operação aos 4.5 segundos, na elevação da velocidade linear de  $1m/s$  para  $1.25m/s$ , o sistema de controle LPV mantém corretamente o desempenho do seguimento à referência do modelo atingindo o regime permanente em cerca

Figura 21 – Seguimento às referências com mudanças de ponto de operação. Velocidade linear:  $1m/s \rightarrow 1.25m/s$  aos 4.5s. Velocidade angular:  $0.4rad/s \rightarrow -0.4rad/s$  – Ensaio sem falhas.



Fonte – o autor

de meio segundo. Aumentar a velocidade linear não provocou nenhuma perturbação visível na curva de seguimento à referência de velocidade angular.

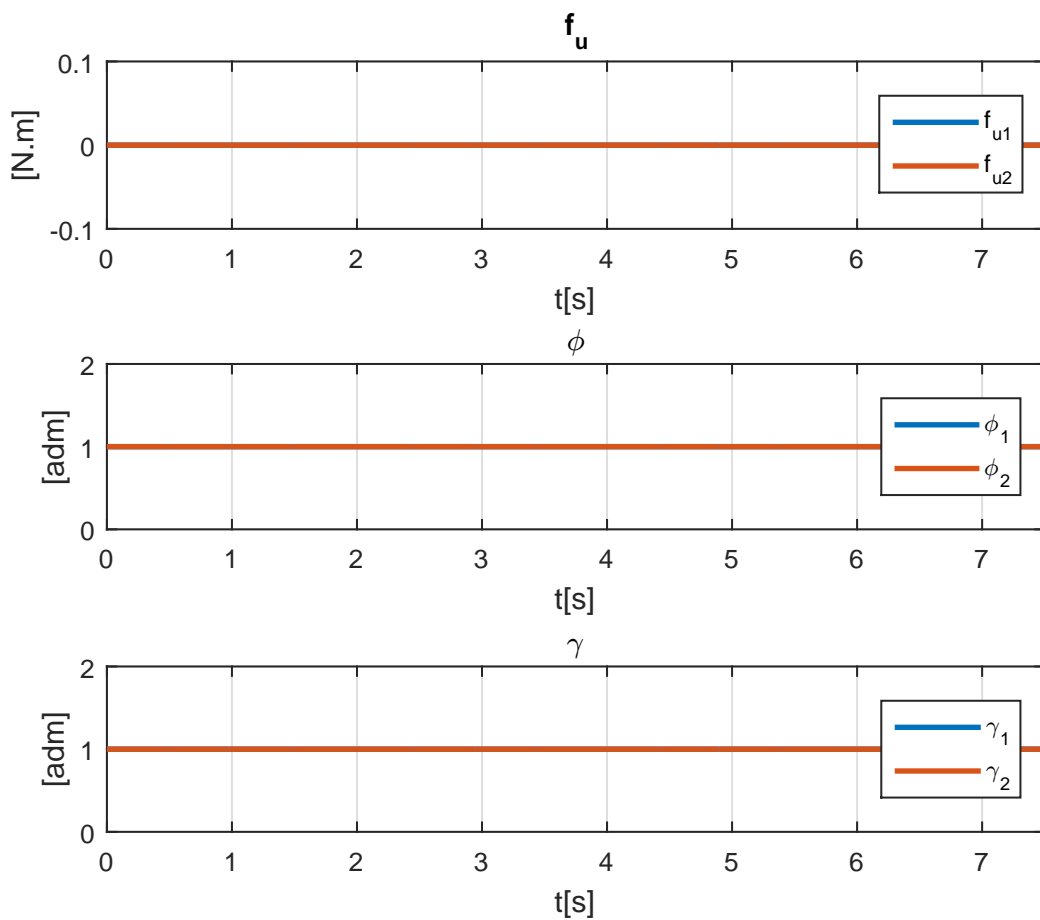
A segunda mudança de operação ocorre com a alteração da referência de velocidade angular, indo de  $0.4rad/s$  para  $-0.4rad/s$ . O sistema respondeu rapidamente garantindo que o estado de velocidade angular atingisse o regime em cerca de 0.1 segundo. Essa variação não ocasionou mudanças visíveis na velocidade linear do robô.

Nessa condição de operação, descrita como operação normal e sem falhas, a ação de controle do controlador nominal  $u_c(k)$  não é alterada pelo atuador virtual mantendo-se a ação de controle efetiva  $u_f(k)$  equivalente a  $u_c(k)$ . A leitura do sensor  $y_f(k)$  também não é alterada pelo sensor virtual de forma que  $y_f(k)$  é equivalente à leitura do sensor virtual,  $y_c(k)$ .

A estimação dos erros pode ser verificada pela Figura 22. O valor das falhas aditivas nos atuadores contidas no vetor  $f_u(k)$  permaneceram em zero durante todo o ensaio. A falhas

multiplicativas ilustradas pelas curvas  $\phi_1$  e  $\phi_2$  mantêm-se com valor unitário afirmando que não há falhas multiplicativas nos atuadores. As falhas multiplicativas nos sensores, curvas  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , permaneceram estacionárias sob valor unitário indicando que os sensores estão funcionando normalmente sem influência de falhas. O estimador, então, revela corretamente que nenhuma falha foi detectada.

Figura 22 – Estimação das falhas por filtros de Kalman – Ensaio sem falhas.

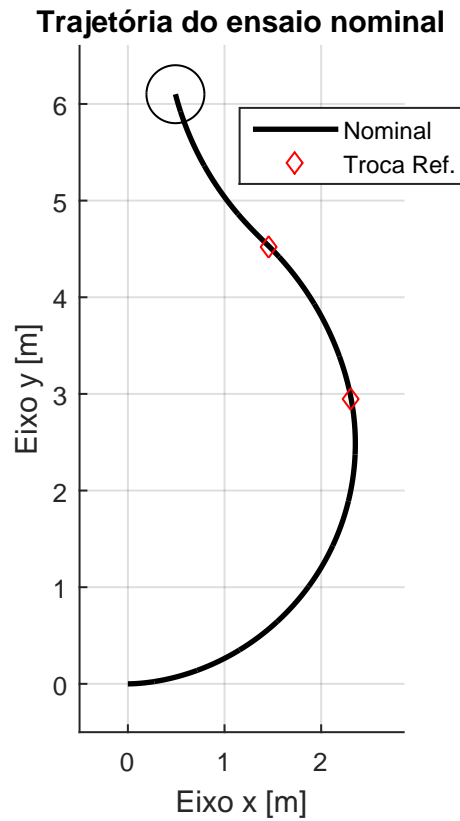


Fonte – o autor

A trajetória desenvolvida pelo robô durante esse ensaio em operação nominal sem falhas é ilustrado pela Figura 23. Ao atingir o regime no seguimento às referências, é notável que o robô executa uma trajetória circular no sentido anti-horário. O aumento da velocidade linear influencia pouco a trajetória devido à breve influência que a mesma exerceu isoladamente no sistema, porém, a mudança no sentido da velocidade angular faz com que o robô trace uma trajetória no sentido horário em contrapartida com seu comportamento anterior. Vale lembrar que as trajetórias são mostradas como uma ferramenta extra para a análise do comportamento do

robô na presença das falhas e não como objetivo final de controle, pois o controle estabelecido é o de velocidade e não o de trajetórias.

Figura 23 – Trajetória do robô – Ensaio sem falhas.



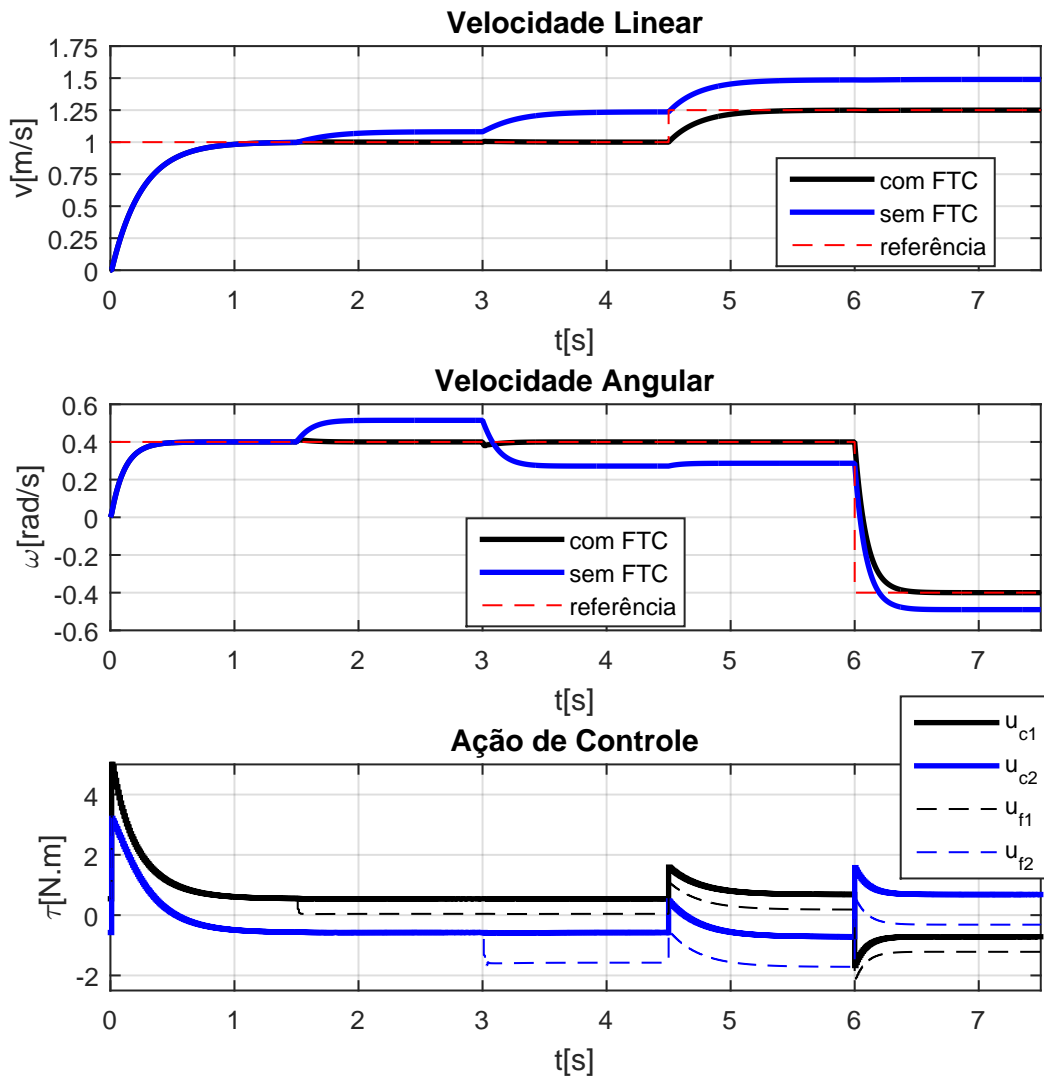
## 7.2 Ensaio com falha aditiva nos atuadores

Duas falhas aditivas do tipo degrau foram inseridas neste ensaio. Uma falha  $f_{u1} = 0.5N \cdot m$  na marca de 1.5 segundo e uma falha no segundo atuador de magnitude  $f_{u2} = 1N \cdot m$  aos 3 segundos.

A Figura 24 ilustra o seguimento à referência durante esse ensaio. As curvas que demonstram o comportamento do sistema sem a aplicação da técnica FTC expõem a expressividade das falhas. O sistema perde a capacidade de seguir simultaneamente as referências de velocidade linear e angular. A respeito da curva com o controle tolerante a falhas, observa-se que o estado de velocidade linear sofre leve interferência das falhas apenas durante o instante em que das falhas simuladas são adicionadas e o estado de velocidade angular sofre perturbações mais acentuadas, porém rapidamente contornadas. O método FTC proposto corrige rapidamente

a falha fazendo com que o seguimento à referência seja novamente respeitado após as falhas. A mudança do ponto de operação segue sem prejudicar a resposta do sistema em malha fechada mesmo após as falhas.

Figura 24 – Seguimento às referências com mudança de ponto de operação – Ensaio com falha aditiva em ambos atuadores. Magnitudes:  $f_{u1} = 0.5N \cdot m$  em 1.5 segundo e  $f_{u2} = 1N \cdot m$  aos 3 segundos.

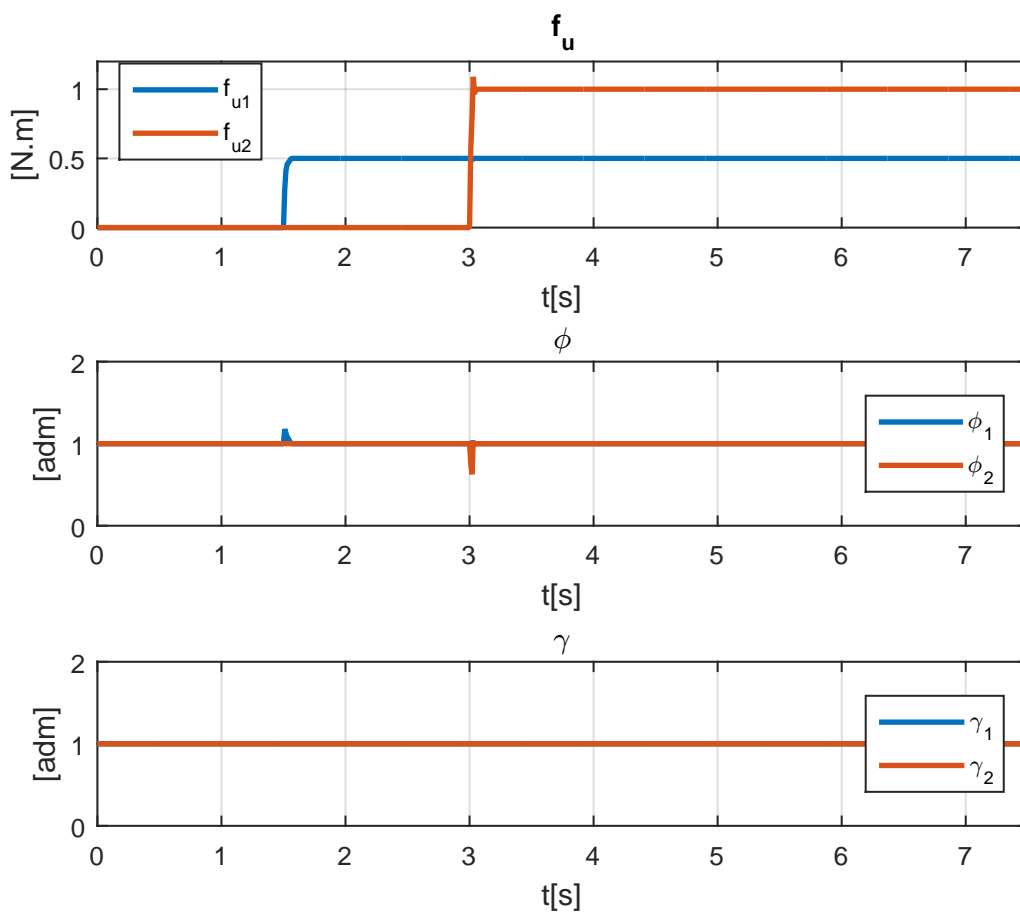


Fonte – o autor

Observa-se ainda na Figura 24 que a ação de controle do controlador nominal  $u_c(k)$  permanece praticamente inalterada após a adição da falha no atuador na marca de 1.5 segundo e também aos 3 segundos. As curvas pontilhadas mostram a ação de controle efetiva  $u_f(k)$ , na saída do atuador virtual, e revelam que o atuador virtual agiu para a correção das falhas como previsto, mascarando-as sob o ponto de vista do controlador nominal.

A falhas são estimadas rapidamente pelos filtros de Kalman, como pode ser observado pelas curvas mostradas na Figura 25. Devido à interdependência entre as falhas aditivas e multiplicativas, observam-se leves modificações nas curvas referentes à estimação das falhas multiplicativas no momento em que se fazem presentes as falhas de característica aditiva. Essa interdependência é rapidamente identificada e é reconhecida pelos estimadores que a natureza da falha simulada é puramente aditiva.

Figura 25 – Estimação das falhas por filtros de Kalman – Ensaio com falhas aditivas em ambos os atuadores. Falha aditiva  $f_{u1} = 0.5N \cdot m$  na marca de 1.5 segundo e falha aditiva  $f_{u2} = 1n \cdot m$  aos 3 segundos.

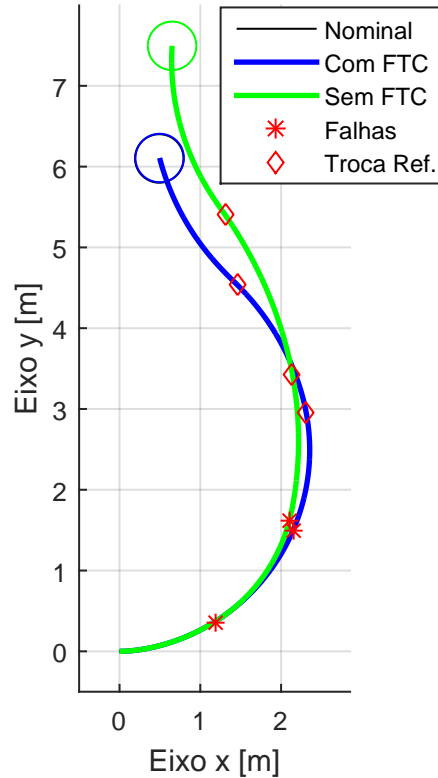


Fonte – o autor

Observa-se a Figura 26 a fim de estudar o impacto dessas falhas na trajetória do robô. A ausência da estratégia FTC no controle de velocidades linear e angular compromete a trajetória realizada pelo robô móvel ocasionando uma diferença significativa entre as curvas. Entretanto, a presença do controlador FTC mantém a trajetória do robô semelhante à operação sem falhas, ocasionando uma sobreposição das curvas, o que torna imperceptível qualquer desvio na trajetória.

Figura 26 – Trajetória do robô – Ensaio com falhas aditivas nos atuadores.

### Trajecória do ensaio com falha aditiva nos atuadores



Fonte – o autor

### 7.3 Ensaio com falha multiplicativa parcial nos atuadores

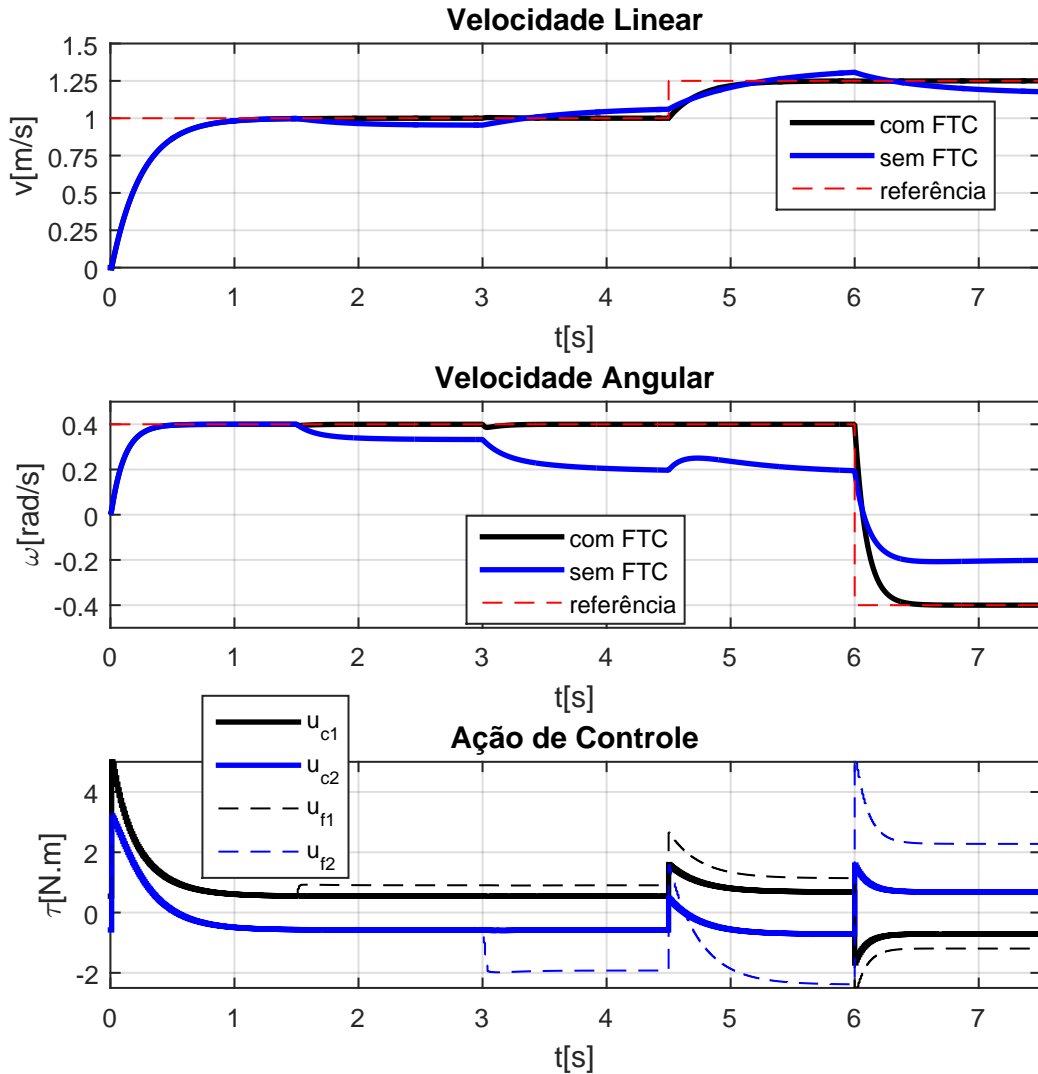
Duas falhas multiplicativas parciais do tipo degrau, uma em cada atuador, foram adicionadas ao sistema para validar a estratégia FTC. Uma falha  $\phi_1 = 0.6$  foi adicionada na marca de 1.5 segundo e uma outra falha  $\phi_2 = 0.3$  aos 3 segundos.

O seguimento à referência do sistema durante esse ensaio pode ser verificado na Figura 27 e a mesma demonstra que o controlador FTC é capaz de controlar o modelo apesar das falhas aplicadas apresentando perturbações praticamente imperceptíveis. O sistema continua sendo devidamente controlado após a mudança do ponto de operação e não foi observada queda de desempenho do controlador. É possível também observar que a ausência da estratégia FTC compromete o comportamento do sistema prejudicando tanto a dinâmica do sistema quanto o seguimento às referências.

Ainda na Figura 27 é possível observar o comportamento do atuador virtual que assume a mudança de sua saída de controle  $u_f(k)$  em prol de manter a ação de controle do controlador nominal  $u_c(k)$  inalterada durante a inclusão das falhas. Isso pode ser observado na marca de 1.5 segundo e também aos 3 segundos.



Figura 27 – Seguimento às referências com mudança de ponto de operação – Ensaio com falhas multiplicativas parciais em ambos atuadores. Magnitude:  $\phi_1 = 0.6$  na marca de 1.5 segundo e  $\phi_2 = 0.3$  aos 3 segundos.

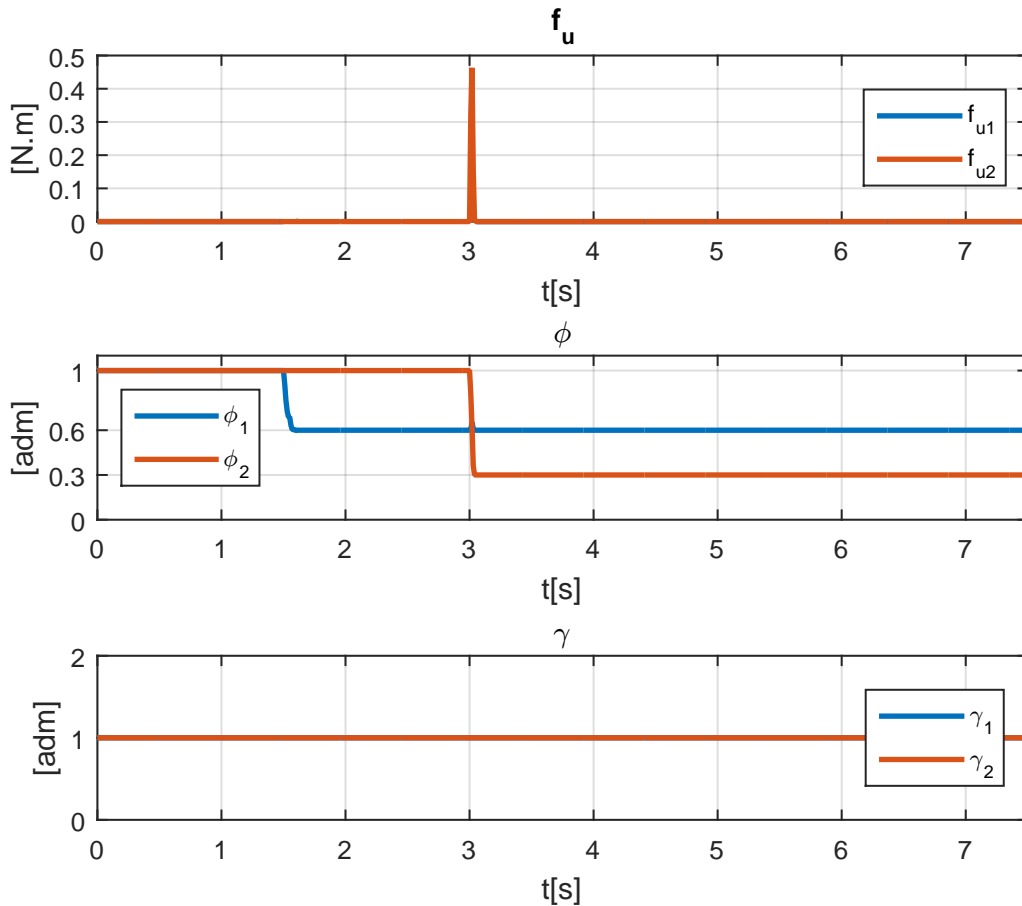


Fonte – o autor

As falhas multiplicativas são rapidamente detectadas e observa-se uma breve influência sobre a estimação das falhas aditivas (vide Figura 28), porém a essa influência não compromete a estimação correta das falhas.

Para o ensaio com falhas multiplicativas nos atuadores, faz-se novamente a interpretação da influência das falhas na trajetória do robô ilustrada na Figura 29. Durante a ausência da estratégia FTC é possível observar que a curvatura da trajetória é descaracterizada principalmente pelo seguimentos indevido da referência de velocidade angular, como observado em

Figura 28 – Estimação das falhas por filtros de Kalman – Ensaio com falhas multiplicativas parciais em ambos os atuadores. Falha parcial  $\phi_1 = 0.6$  na marca de 1.5 segundo e falha parcial  $\phi_2 = 0.3$  aos 3 segundos.



Fonte – o autor

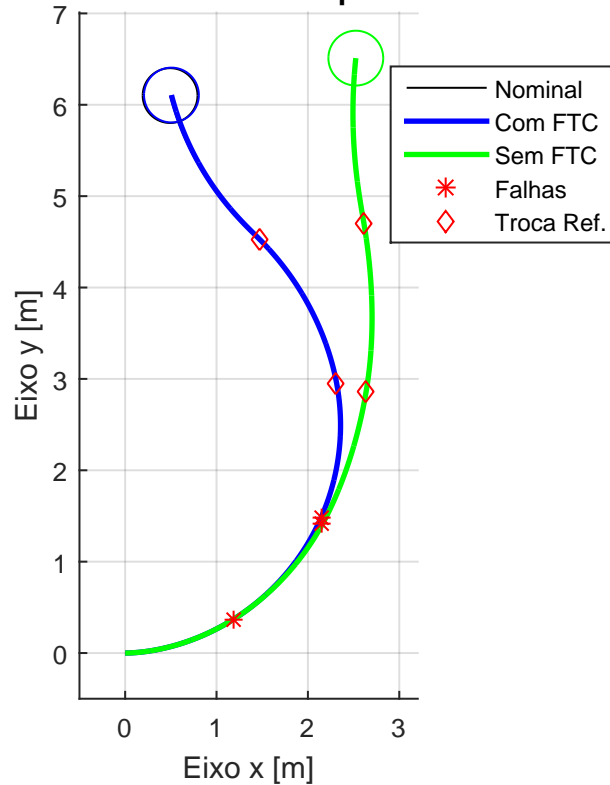
conjunto com a Figura 27. Neste ensaio, a presença do controlador FTC apresenta nenhum desvio perceptível em comparação à trajetória nominal mesmo na presença das falhas. Nenhum distúrbio causados pela rejeição das falhas é visualizado na trajetória.

#### 7.4 Ensaio com falha multiplicativa total (ou falha crítica) no atuador

Este ensaio aplica uma falha crítica em um atuador do robô, no caso o atuador 1 referente à roda direita. Uma falha crítica equivale à inutilização do componente, logo o motor perde completamente sua função de fornecer torque para a roda acoplada em seu eixo. O motor encontra-se rodando livremente sem oferecer resistência ao movimento na ocasião de uma falha crítica. Em contraste com os demais ensaios, este dura 10 segundos, a fim de assegurar que as

Figura 29 – Trajetória do robô – Ensaio com falhas multiplicativas nos atuadores.

### Trajétória do ensaio com falha multiplicativa nos atuadores

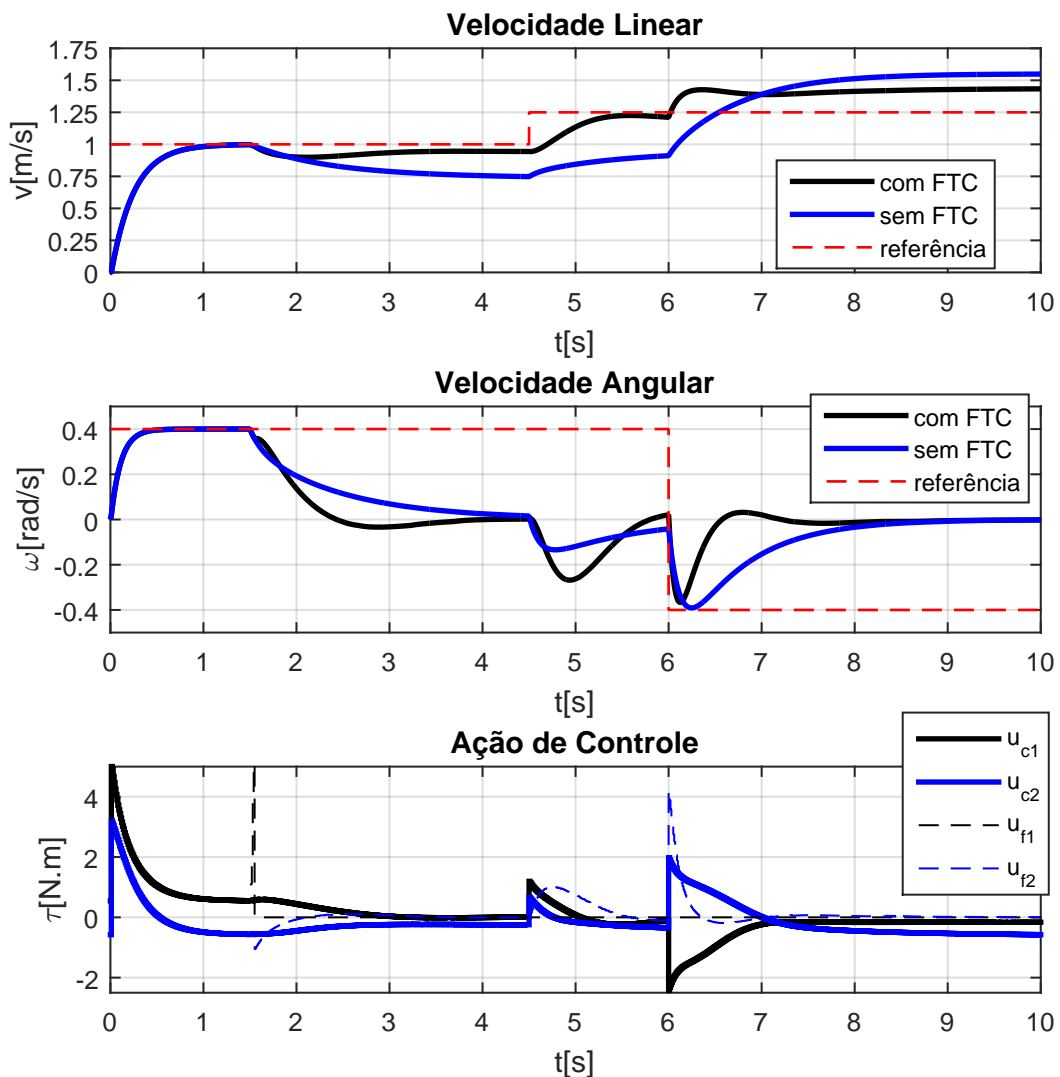


curvas atinjam os finais de seus transitórios.

Observa-se na Figura 30 que o seguimento à referência não é possível, estando a técnica FTC sendo aplicada ou não. Isso é esperado, pois ao perder um sinal de controle, perde-se também um grau de liberdade de controle tornando possível o controle parcial de apenas uma saída independente. Entretanto, a presença da estratégia FTC também não contornou a presença da falha, embora tenha apresentado melhoras no seguimento à referência no estado de velocidade linear. Verifica-se também que, após os 8 segundos, o estado de velocidade linear com FTC apresenta um erro em regime menor do que estando a técnica ausente. Conclui-se que o controle FTC contribuiu para minimizar o efeito da falha apresentando uma condição estável, porém perdendo a referência da velocidade linear.

A respeito da ação de controle ilustrada na Figura 30 é possível observar que a ação de controle do controlador nominal sofreu alterações significativas durante a presença da falha na marca de 1.5 segundo, o que indica que o atuador virtual não mascarou a falha perfeitamente. O sistema segue estável até o final de sua operação oferecendo um esforço de controle maior com a presença do FTC. A carência da operação desejada pelo atuador virtual ocasionou em um seguimento inadequado às referências.

Figura 30 – Seguimento às referências com mudança de ponto de operação – Ensaio com falha crítica no atuador 1. Magnitude  $\phi_1 = 0$  na marca de 1.5 segundo.

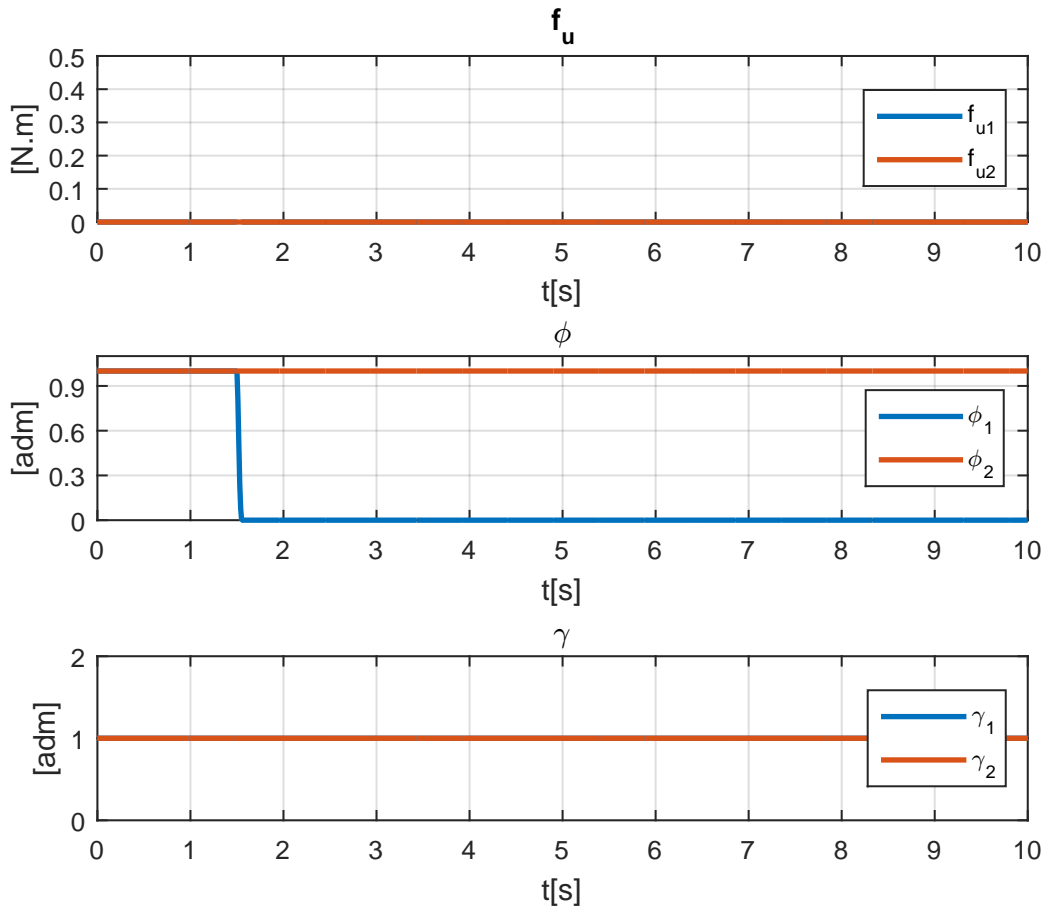


Fonte – o autor

A estimação, entretanto, foi feita com sucesso de forma rápida e eficiente, como mostra a Figura 31. A informação de uma falha completa em um dos atuadores foi adquirida com sucesso e recomenda-se que essa informação seja utilizada de alguma forma para garantir que o sistema não entre em operação instável ou insatisfatória, como tentar aplicar limites nas variáveis de controle ou simplesmente forçar o desligamento do sistema.

As trajetórias traçadas pelo robô móvel durante a presença de uma falha crítica em um motor, atuador do sistema, são representadas na Figura 32 em conjunto com a trajetória nominal. Essas trajetórias esclarecem que o comportamento do robô pode ser considerado insatisfatório independente da aplicação ou não da técnica FTC. Porém as falhas foram detectadas

Figura 31 – Estimação das falhas por filtros de Kalman – Ensaio com falha crítica no atuador 1. Falha crítica  $\phi_1 = 0$  na marca de 1.5 segundo.



Fonte – o autor

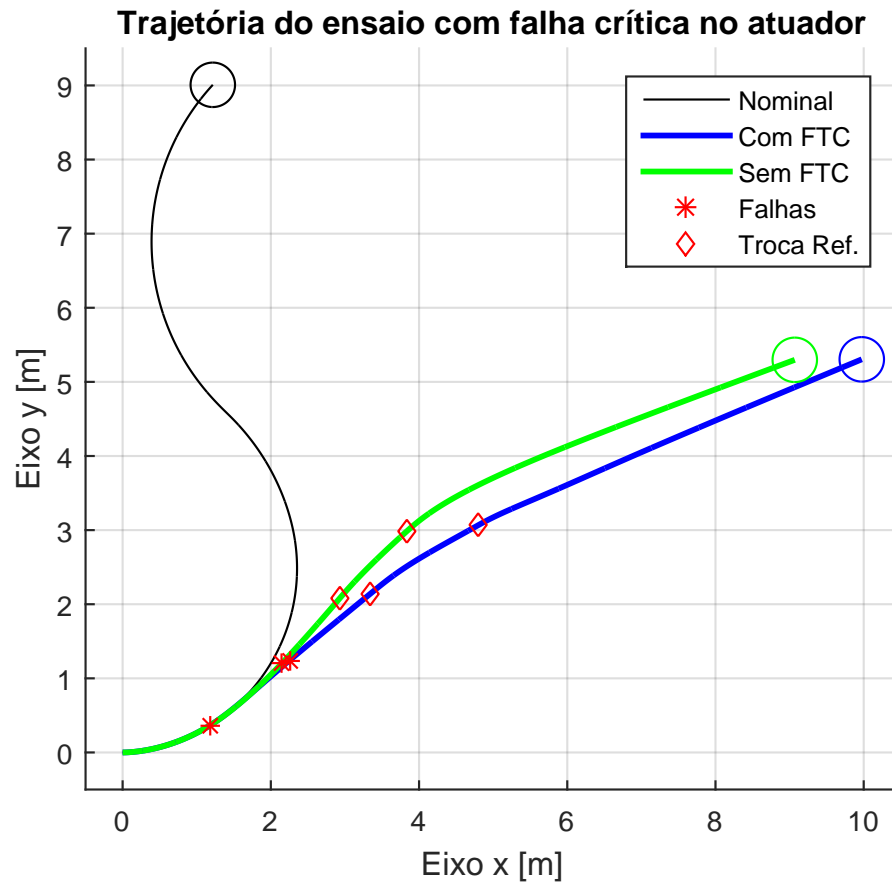
adequadamente, o que torna possível a aplicação de alguma outra estratégia que impeça o robô de operar tão distante do funcionamento adequado ou em direção à instabilidade, como o desligamento forçado dos motores.

### 7.5 Ensaio com falha multiplicativa parcial no sensor

Neste ensaio foram aplicadas uma falha parcial  $\gamma_1 = 0.8$  na marca de 1.5 segundo e uma falha parcial  $\phi_2 = 0.2$  aos 3 segundos.

A Figura 33 ilustra o seguimento à referência do sistema na presença das falhas multiplicativas nos sensores. Observa-se que, na presença da estratégia FTC, as perturbações causadas pelas falhas são tão imperceptíveis no estado de velocidade linear e quanto no estado de velocidade angular. A técnica FTC despreza com sucesso as falhas multiplicativas nos sensores,

Figura 32 – Trajetória do robô – Ensaio com falha crítica no atuador.



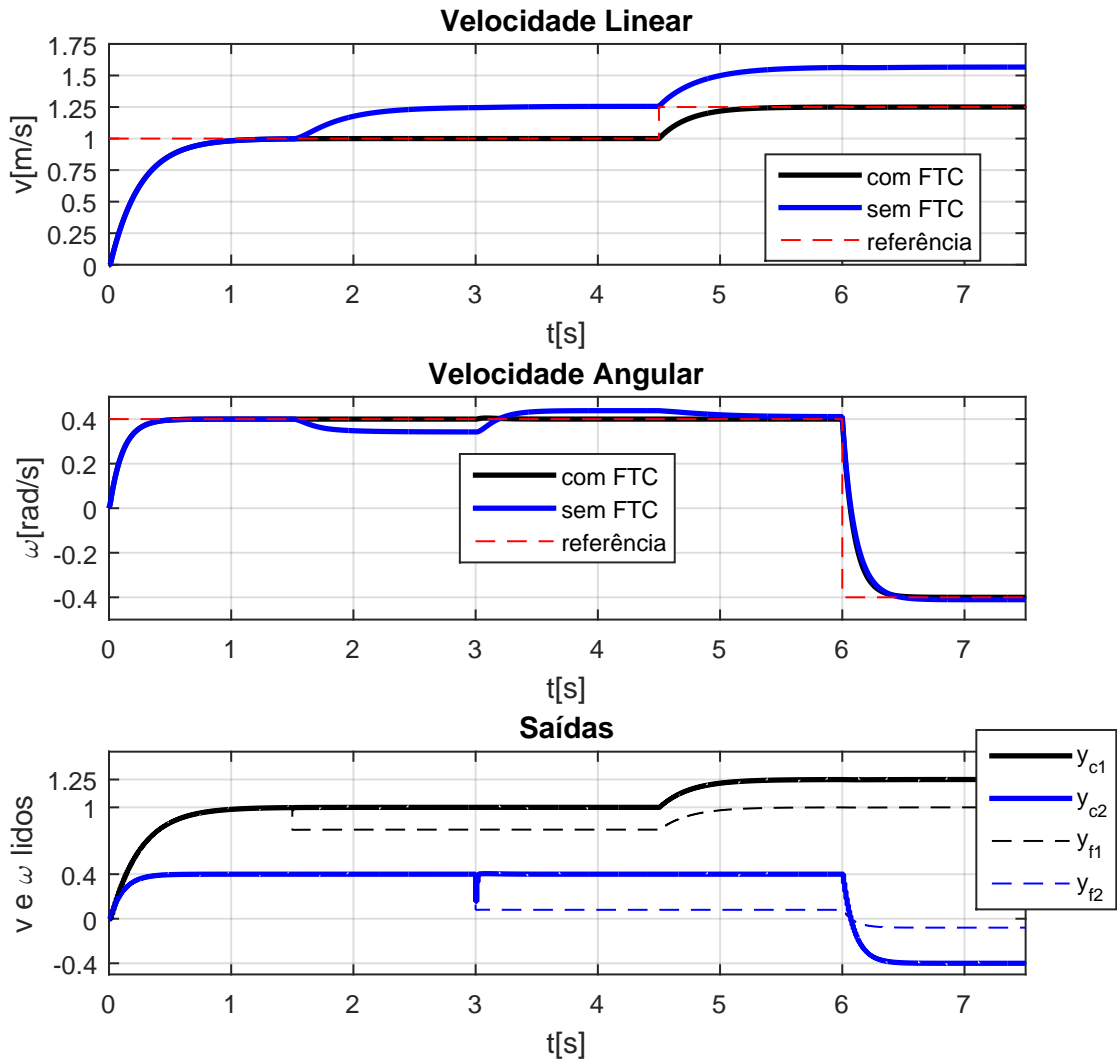
Fonte – o autor

agindo como previsto pelo estudo teórico. A ausência da tolerância às falhas demonstra maior impacto no estado da velocidade angular ocasionando um erro estacionário ao seguimento à referência devido à característica de constante da falha simulada.

Analisando-se as saídas do sistema ilustradas na Figura 33 é possível observar que as leituras dos sensores,  $y_c(k)$ , são compensadas pelos sensores virtuais nos instantes 1.5 segundo e 3 segundos gerando as leituras do sensor virtual virtual,  $y_c(k)$ . Lembrando que o sensor virtual é o componente responsável por entregar os valores de leitura corrigidos para o observador de modo que as mesmas não sofram desvios significativos na presença de alguma falha nos sensores. Logo, o sensor virtual atua adequadamente ocultando a falha sob o ponto de vista do sistema nominal.

A estimação das falhas pelo banco de estimadores Kalman para este ensaio, ilustrada pela Figura 34, revela que a estimação das falhas multiplicativas parciais é realizada com rapidez e objetividade pelo estimador de Kalman. Essa eficiência certamente colabora positivamente para o bom desempenho do controlador, visto que o funcionamento adequado do sistema como

Figura 33 – Seguimento às referências com mudança de ponto de operação – Ensaio com falhas multiplicativas parciais em ambos sensores. Magnitude:  $\gamma_1 = 0.8$  na marca de 1.5 segundo e  $\gamma_2 = 0.2$  aos 3 segundos.

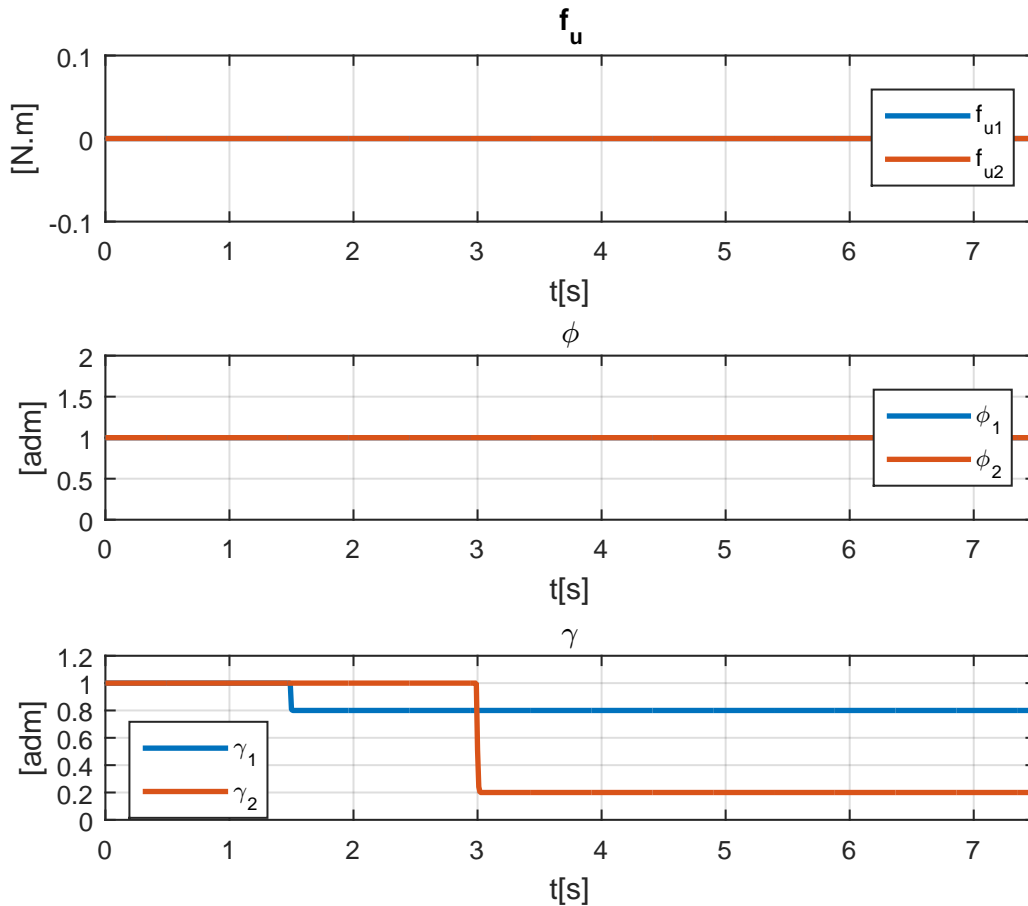


Fonte – o autor

um todo é bastante sensível às falhas nos sensores.

A influência das falhas em relação às trajetórias do robô controlado com FTC ou não é exibida na Figura 35. Nela é possível observar que a trajetória realizada pelo robô em operação nominal é praticamente idêntica à trajetória do robô controlado por FTC na presença das falhas parciais. Dessa forma, as falhas nos sensores são toleradas com sucesso pela técnica. Quando a técnica FTC não é aplicada, a discrepância entre o resultado final entre as trajetórias é nítido levando o robô a executar um caminho diferente do nominal.

Figura 34 – Estimação das falhas por filtros de Kalman – Ensaio com falhas multiplicativas parciais em ambos os sensores. Falha multiplicativa parcial  $\gamma_1 = 0.8$  na marca de 1.5 segundo e falha multiplicativa parcial  $\gamma_2 = 0.2$  aos 3 segundos.



Fonte – o autor

## 7.6 Ensaio com falha multiplicativa total (falha crítica) nos sensores

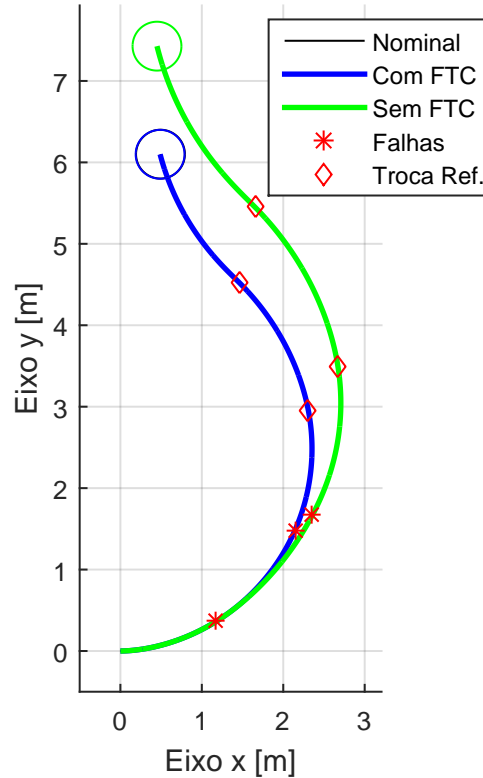
Duas falhas críticas foram aplicadas neste ensaio. A primeira na marca de 1.5 segundo no sensor 1 e a segunda aos 3 segundos no sensor 2. Uma falha crítica em um sensor deve ser interpretada como a perda de capacidade dos sensores de retornar valores lidos, estando o mesmo oferecendo apenas leituras de valor nulo para o controlador.

Falhas críticas em um sensor de velocidade linear pode ocorrer pelo mau funcionamento do *encoder* ocasionado pelo defeito do emissor de luz que ocasione o seu desligamento ou até mesmo pela obstrução da luz entre o emissor o receptor do *encoder* por algum corpo estranho interno ao sensor. Da mesma forma, se a velocidade for aferida por sensores de distância, se o mesmo permanecer bloqueado pontualmente por algum corpo estranho ou não obter sucesso ao



Figura 35 – Trajetória do robô – Ensaio com falhas multiplicativas parciais nos sensores.

### Trajétória do ensaio com falha multiplicativa nos sensores



Fonte – o autor

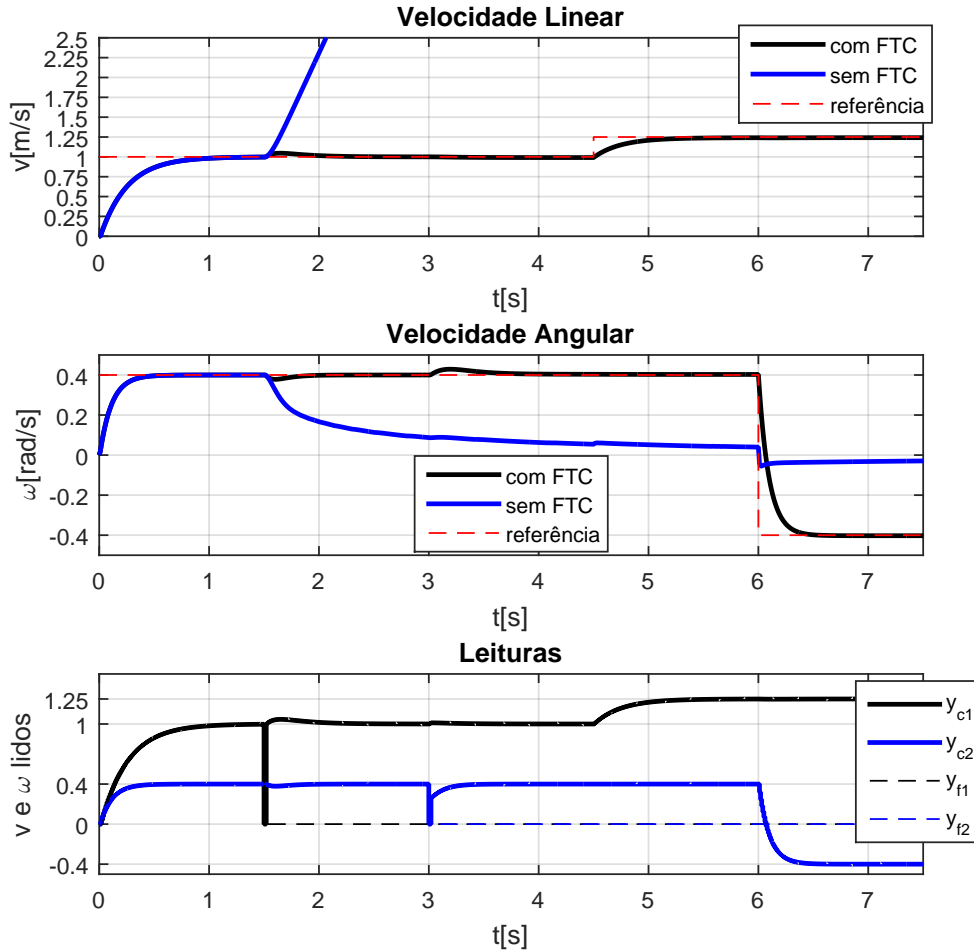
detectar superfícies, valores nulos ou impraticáveis, que comumente são atribuídos a zero, serão lidos pelo mesmo caracterizando uma falha crítica.

Quanto ao sensor de velocidade angular, uma falha crítica pode ser caracterizada pelo descalibre do sensor. Esses sensores podem ser sensíveis à rotação em torno de um eixo em específico e o deslocamento inesperado do encaixe desse sensor pode coincidir de não obter mais a componente de velocidade angular do eixo para o qual foi instalado forçando o mesmo a retornar apenas leituras nulas.

Observa-se na Figura 36 que a ausência da técnica FTC causa uma instabilidade no sistema levando os estados a valores infinitos. A respeito do caso tolerante a falhas, embora exista um distúrbio no seguimento do referênci no momento da falha, a técnica FTC sugerida contorna esse inconveniente mesmo após a mudança de ponto de operação, validando a superioridade da técnica para o caso estudado.

A função do sensor virtual foi executada adequadamente como observado nas leituras dos sinais de controle ilustradas na Figura 36. Enquanto as leituras dos sensores reais,  $y_c(k)$ , eram afetadas pela falha e permanecendo em valor nulo, as leituras dos sensores virtuais,  $y_f(k)$ , retornavam ao valor correto após a identificação da falha crítica. Dessa forma o sensor virtual

Figura 36 – Seguimento às referências com mudança de ponto de operação – Ensaio com falhas críticas em ambos sensores. Magnitude:  $\gamma_1 = 0$  na marca de 1.5 segundo e  $\gamma_2 = 0$  aos 3 segundos.



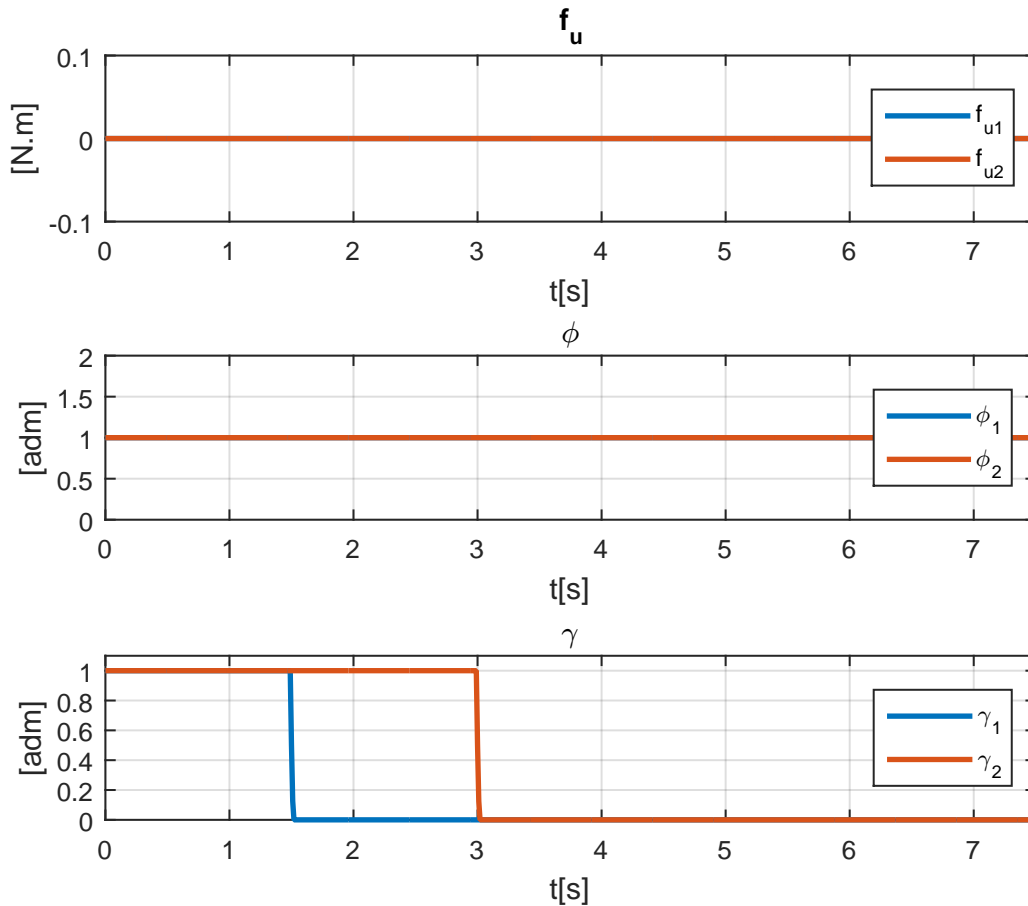
Fonte – o autor

mascara é capaz de mascarar falhas críticas simultâneas em ambos os sensores sob o ponto de vista do sistema nominal.

Na Figura 37 observa-se que as falhas críticas são rapidamente identificadas para ambos os sensores.

Observam-se pela Figura 38 as trajetórias do robô simuladas pelo ensaio de falhas críticas nos sensores. Sem o auxílio da técnica FTC e com a leitura inutilizada dos sensores, o robô não consegue manter sua trajetória compatível com o sistema nominal levando o mesmo a entrar em uma condição de instabilidade, como observado mais precisamente pela Figura 36. Porém, com o controlador FTC, o sensor virtual retoma o controle da situação possibilitando a retomada à trajetória de forma semelhante à condição nominal.

Figura 37 – Estimação das falhas por filtros de Kalman – Ensaio com falhas críticas em ambos os sensores. Falha crítica  $\gamma_1 = 0$  na marca de 1.5 segundo e falha aditiva  $\gamma_2 = 0$  aos 3 segundos.



Fonte – o autor

## 7.7 Conclusões do capítulo

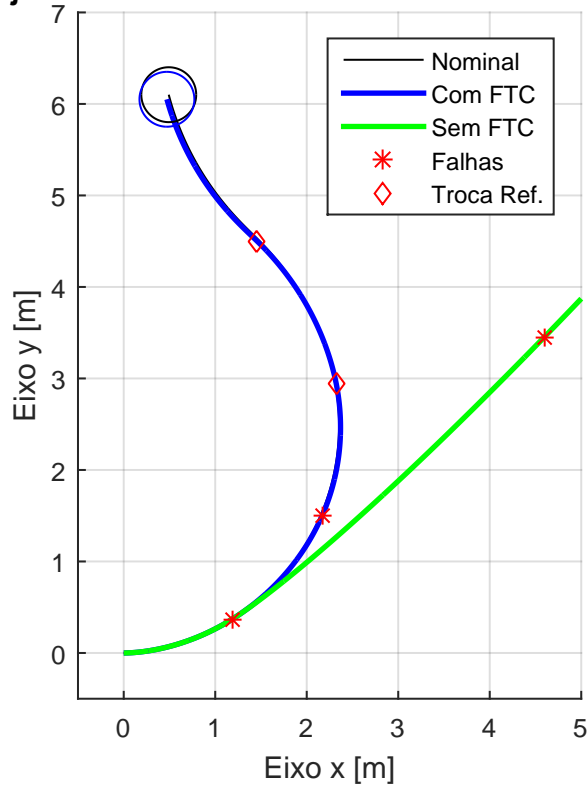
Este capítulo apresenta os ensaios que revelam que a estratégia FTC oferece de fato tolerância à falhas validando sua aplicação.

A técnica FTC se comportou de forma superior em todos os cenários de falhas, inclusive quando houve uma falha crítica em um atuador e ambos os controladores testados perderam um grau de liberdade. Entretanto, nesse caso mais extremo de falha crítica no atuador, o bloco de estimação identificou e isolou corretamente a falha possibilitando a aplicação de alguma solução alternativa para contornar uma possível operação inadequada, como o desligamento forçado do sistema, por exemplo.

Um leve desvio na trajetória também foi observado por parte do controle FTC no

Figura 38 – Trajetória do robô – Ensaio com falhas críticas nos sensores.

**Trajétória do ensaio com falha crítica nos sensores**



Fonte – o autor

caso de falha crítica nos sensores, porém o mesmo tornou possível que o sistema se mantivesse estável mesmo perdendo ambos os sensores.

Nos demais casos os atuadores e sensores virtuais operaram conforme de acordo com o previsto garantindo a operação adequada do sistema de controle de forma semelhante ao caso de operação normal.

Os gráficos de trajetória fornecem mais detalhes em relação à operação do robô oferecendo informações a respeito dos efeitos colaterais consequentes da presença das falhas ou da estratégia FTC.

Vale ratificar que o objetivo dos resultados é obter o controle das velocidades linear e angular e não da trajetória. Os gráficos de trajetória servem apenas como um parâmetro a mais de estudo do desempenho dos controladores. As informações compartilhadas pelos gráficos de trajetórias são úteis também para a aplicação de uma malha externa para controle de trajetória, que não é o objetivo deste trabalho.

## 8 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou uma técnica de Controle Tolerante a Falhas (FTC) baseada em modelo capaz de operar dentro das especificações de projeto mesmo na presença das falhas. O método proposto apresentou uma técnica de diagnóstico de falhas rápido e eficiente baseado na estimação de falhas por meio de filtros de kalman recursivos.

O modelo Linear com Parâmetros Variantes (LPV) do robô foi eficiente e representativo. Sua estrutura politópica foi útil para o projeto dos demais elementos do sistema em malha fechada, que foram estruturados LPV para garantir o paralelismo entre modelo e projeto.

O controlador LPV e o observador LPV projetados com o auxílio de soluções de Inequações Matriciais Lineares (LMIs) obtiveram resultados satisfatórios e as condições de projeto foram atendidas.

O atuador virtual LPV e o sensor virtual LPV desempenharam bem o papel deles de possibilitar que um controlador, sem a necessidade de reprojeto em tempo real, fosse suficiente para manter a operação adequada da planta para diferentes casos de falha incluindo os casos de falha crítica nos sensores e alguns casos de falha crítica nos atuadores. Foram identificados casos de falhas críticas nos atuadores que levam a uma condição insatisfatória de operação mesmo na presença do atuador virtual. Porém, essa condição já era esperada, uma vez que perde-se um grau de liberdade importante para o controle de todas as saídas.

Em todos os casos de falha verificados, validou-se claramente a superioridade do método proposto sobre um método mais simples que desconsidera as possibilidade de falta.

Conclui-se que a estratégia FTC é válida e que, em ambiente de simulação, foi capaz de possibilitar que o sistema opere de acordo com as condições de projeto mesmo em cenários de falta nos atuadores ou sensores. Essa técnica se limita ao ambiente de simulações e sua aplicação prática depende de um modelo ideal capaz de reproduzir fielmente o comportamento do sistema real.

Como trabalho futuro, sugerem-se adaptações no modelo de descrição de falhas para garantir a robustez relativa às incertezas paramétricas e não estruturadas que não são contempladas nesse trabalho. Espera-se que essa robustez torne possível a aplicação prática do controle FTC para sistemas LPV.

## REFERÊNCIAS

- ASSUNÇÃO, E.; ANDREA, C. Q.; TEIXEIRA, M. C. M. Alocação de zeros aplicada a sistemas de controle via lmi. **Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica**, SciELO Brasil, v. 18, n. 1, p. 55–66, 2007.
- ASTROM, K. J.; HAGGLUND, T. **PID Controllers: Theory, Design, and Tuning**. 2. ed. [S.l.]: Instrument Society of America, Research Triangle Park, NC, 1995.
- ASTROM, K. J.; WITTENMARK, B. **Adaptive Control**. [S.l.]: Dover Publications, INC, 2008. v. 2.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. [S.l.]: SIAM, 1994.
- BRIAT, C. **Linear Parameter-varying and Time-delay Systems: Analysis, observation, filtering & control**. [S.l.]: Springer, 2015. v. 3.
- CHEN, C.-T. **Linear System Theory and Design**. 3rd. ed. New York, NY, USA: Oxford University Press, Inc., 1998. ISBN 0195117778.
- CHEN, L.; PATTON, R.; GOUPIL, P. Application of model-based l<sub>p</sub>v actuator fault estimation for an industrial benchmark. **Control Engineering Practice**, v. 56, p. 60 – 74, 2016. ISSN 0967-0661. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0967066116301666>>.
- CHILALI, M.; GAHINET, P.  $h_{\infty}$  design with pole placement constraints an lmi approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 41, n. 3, p. 358–367, 1996.
- COSTA, M.; PINTO, V.; CAMPOS, J.; NASCIMENTO, J. Controle por d-alocação robusta via lmi aplicado em sistemas de geração eólica. **Anais do Simpósio Brasileiro de Sistemas Elétricos**, 2012.
- COSTA, T. V. da; OLIVEIRA-LOPES, L. C.; FILETI, A. M. F.; SILVA, F. V. da. Controle tolerante a falhas baseado em atuadores virtuais com horizonte móvel. **Blucher Chemical Engineering Proceedings**, v. 1, n. 2, p. 11254 – 11261, 2015. ISSN 2359-1757. Disponível em: <[www.proceedings.blucher.com.br/article-details/control-tolerante-a-falhas-baseado-em-atuadores-virtuais-com-horizonte-mvel-18048](http://www.proceedings.blucher.com.br/article-details/control-tolerante-a-falhas-baseado-em-atuadores-virtuais-com-horizonte-mvel-18048)>.
- DIERKS, T.; JAGANNATHAN, S. Control of nonholonomic mobile robot formations: Backstepping kinematics into dynamics. In: **2007 IEEE International Conference on Control Applications**. [S.l.: s.n.], 2007. p. 94–99. ISSN 1085-1992.
- DING, S. **Model-based Fault Diagnosis Techniques: Design Schemes, Algorithms, and Tools**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008.
- FENG, X.; PATTON, R. A model-based predictive control for ftc for wind turbine wind speed sensor fault. In: **IEEE. 2013 Conference on Control and Fault-Tolerant Systems (SysTol)**. [S.l.], 2013. p. 504–509. ISSN 2162-1195.
- FIERRO, R.; LEWIS, F. L. Control of a nonholonomic mobile robot using neural networks. **IEEE Transactions on Neural Networks**, v. 9, n. 4, p. 589–600, Jul 1998. ISSN 1045-9227.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; WORKMAN, M. L. **Digital Control of Dynamic Systems**. [S.l.]: Addison-wesley Menlo Park, CA, 1998. v. 3.

ISERMANN, R. **Fault-diagnosis Systems: An Introduction from Fault Detection to Fault Tolerance**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006.

ISERMANN, R.; BALLÉ, P. Trends in the application of model-based fault detection and diagnosis of technical processes. **Control Engineering Practice**, v. 5, n. 5, p. 709 – 719, 1997. ISSN 0967-0661. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0967066197000531>>.

KALMAN, R. E.; BUCY, R. S. New results in linear filtering and prediction theory. **Journal of basic engineering**, v. 83, n. 1, p. 95–108, 1961.

KALMAN, R. E. *et al.* A new approach to linear filtering and prediction problems. **Journal of basic Engineering**, v. 82, n. 1, p. 35–45, 1960.

KANEV, S.; VERHAEGEN, M.; NIJSSE, G. A method for the design of fault-tolerant systems in case of sensor and actuator faults. In: . Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2001. p. 837–842. ISBN 9783952417362. Disponível em: <<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84947461074&partnerID=40&md5=b406b3cce91296a1cf13c46fc50d76b4>>.

KUO, C.-H.; LEE, L. Robust d-admissibility in generalized lmi regions for descriptor systems. In: **2004 5th Asian Control Conference (IEEE Cat. No.04EX904)**. [S.l.: s.n.], 2004. v. 2, p. 1058–1065 Vol.2.

LEITE, J. C. S. do P. **Erro, Defeito: Falta, Falha**. 2006. Disponível em: <<https://jcspl.net/2006/08/page/2/>>. Acesso em: jun. 2017.

LIMA, T. A.; FORTE, M. D. do N.; NOGUEIRA, F. G.; TORRICO, B. C.; PAULA, A. R. de. Trajectory tracking control of a mobile robot using lidar sensor for position and orientation estimation. In: IEEE. **2016 12th IEEE International Conference on Industry Applications (INDUSCON)**. [S.l.], 2016. p. 1–6.

LJUNG, L. **System identification**. [S.l.]: Wiley Online Library, 1999. v. 2.

LOBO, T. D. **Controle Adaptativo Auto-ajustável para Controle de Trajetórias de um Robô Móvel com Rodas**. Tese (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, 2016.

MOHARERI, O.; DHAOUADI, R.; RAD, A. Indirect adaptive tracking control of a nonholonomic mobile robot via neural networks. **Neurocomputing**, v. 88, p. 54–66, 2012. ISSN 09252312. Disponível em: <<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84860231485,doi=10.1016%2fj.neucom.2011.06.035&partnerID=40&md5=5cb497666284c49534f391b164ce24ee>>.

NOGUEIRA, F. G.; BARRA, W.; COSTA, C. T. da; BARREIROS, J. A.; LANA, J. J. de. Design and experimental tests of an lqv power system stabilizer on a 10kva small-scale generating unit. **IFAC-PapersOnLine**, v. 48, n. 26, p. 236 – 241, 2015. ISSN 2405-8963. 1st IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems LPVS 2015. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896315024015>>.

NOURA, H.; SAUTER, D.; HAMELIN, F.; THEILLIOL, D. Fault-tolerant control in dynamic systems: application to a winding machine. **IEEE Control Systems**, v. 20, n. 1, p. 33–49, Feb 2000. ISSN 1066-033X.

OGATA, K. **Discrete-time Control Systems (2nd Ed.)**. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1995. ISBN 0-13-034281-5.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2011. ISBN 9788576058106.

PATTON, R. J. Fault-tolerant control: the 1997 situation. **IFAC Proceedings Volumes**, Elsevier, v. 30, n. 18, p. 1029–1051, 1997.

RODRIGUES, M.; THEILLIOL, D.; ABERKANE, S.; SAUTER, D. Fault tolerant control design for polytopic lpv systems. **International Journal of Applied Mathematics and Computer Science**, v. 17, n. 1, p. 27–37, 2007.

ROSINOVÁ, D.; HOLIČ, I. Lmi approximation of pole-region for discrete-time linear dynamic systems. In: **Proceedings of the 2014 15th International Carpathian Control Conference (ICCC)**. [S.l.: s.n.], 2014. p. 497–502.

ROTONDO, D.; LÓPEZ-ESTRADA, F.-R.; NEJJARI, F.; PONSART, J.-C.; THEILLIOL, D.; PUIG, V. Actuator multiplicative fault estimation in discrete-time lpv systems using switched observers. **Journal of the Franklin Institute**, v. 353, n. 13, p. 3176 – 3191, 2016. ISSN 0016-0032. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0016003216301867>>.

ROTONDO, D.; NEJJARI, F.; PUIG, V. A virtual actuator and sensor approach for fault tolerant control of lpv systems. **Journal of Process Control**, v. 24, n. 3, p. 203 – 222, 2014. ISSN 0959-1524. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0959152413002710>>.

SIDEK, N.; SARKAR, N. Dynamic modeling and control of nonholonomic mobile robot with lateral slip. In: IEEE. **Third International Conference on Systems (icons 2008)**. [S.l.], 2008. p. 35–40.

SOUSA, N. G. **Desenvolvimento de Sistemas de Controle Tolerante a Falhas por Alocação de Controle**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 11 2014.

SOUSA, R. L. S.; FORTE, M. D. do N.; NOGUEIRA, F. G.; TORRICO, B. C. Trajectory tracking control of a nonholonomic mobile robot with differential drive. In: IEEE. **2016 IEEE Biennial Congress of Argentina (ARGENCON)**. [S.l.], 2016. p. 1–6.

SUN, X. D.; POSTLETHWAITE, I. Affine lpv modelling and its use in gain-scheduled helicopter control. In: **International Conference on Control**. [S.l.]: IET, 1998. v. 2, p. 1504–1509. ISSN 0537-9989.

TERRA, M. H.; BERGERMAN, M.; TINÓS, R.; SIQUEIRA, A. A. Controle tolerante a falhas de robôs manipuladores. **SBA Controle & Automação**, v. 12, n. 2, 2001.