UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JOSÉ ILHANO DA SILVA PEREIRA

HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS DE $\mathbb{R}^4$ COM CURVATURA DE GAUSS-KRONECKER NULA

FORTALEZA
2017

JOSÉ ILHANO DA SILVA PEREIRA

HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS DE $\mathbb{R}^4$ COM CURVATURA DE GAUSS-KRONECKER NULA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientadora: Profa. Dra. Fernanda Ester Camillo Camargo

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P492h Pereira, José Ilhano da Silva.
Hipersuperfícies Mínimas do espaço euclidiano de dimensão 4 com curvatura de Gauss-Kronecker nula / José Ilhano da Silva Pereira. – 2017.
45 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2017.
Orientação: Profa. Dra. Fernanda Ester Camillo Camargo.

1. Hipersuperfícies Mínimas. 2. Curvatura de Gauss-Kronecker. 3. Curvatura Escalar. I. Título.
CDD 510

JOSÉ ILHANO DA SILVA PEREIRA

HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS DE $\mathbb{R}^4$ COM CURVATURA DE GAUSS-KRONECKER NULA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria.

Aprovado em: 25/ 08/ 2017.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Fernanda Ester Camillo Camargo (Orientadora)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

À Profa. Dra. Fernanda Ester Camillo Camargo, pela excelente orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros e Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos colegas da turma de mestrado, em particular Damiana, pelas reflexões, críticas e sugestões.

À minha família pelo apoio e confiança sempre presentes.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo estudar as hipersuperfícies mínimas em $\mathbb{R}^4$, com curvatura de Gauss-Kronecker indenticamente zero. Como resultado principal provamos que se $f : M^3 \to \mathbb{R}^4$ é uma hipersuperfípicie mínima com curvatura de Gauss-Kronecker identicamente zero, segunda forma fundamental não se anulando em nenhum ponto e curvatura escalar limitada inferiormente, então $f(M^3)$ se decompõe como um produto euclideano do tipo $\mathcal{L}^2 \times \mathbb{R}$, onde $\mathcal{L}^2$ é uma superfície mínima de $\mathbb{R}^3$ com curvatura Gaussiana limitada inferiormente. Finalmente, apresentamos um resultado sobre a curvatura de Gauss-Kronecker de f sem nenhuma hipótese sobre a curvatura escalar.

Palavras-chave: Hipersuperfícies mínimas. Curvatura de gauss-kronecker. Curvatura escalar.

ABSTRACT

This work does study the complete minimal hypersurfaces in the Euclidean space $\mathbb{R}^4$, with Gauss-Kronecker curvature identically zero. Our main result is to prove that if $f : M^3 \to \mathbb{R}^4$ is a complete minimal hypersurface with Gauss-Kronecker curvature identically zero, nowhere vanishing second fundamental form and scalar curvature bounded from below, then $f(M^3)$ splits as a Euclidean product $L^2 \times \mathbb{R}$, where L^2 is a complete minimal surface in $\mathbb{R}^3$ with Gaussian curvature bounded from below. Moreover, we show a result about the Gauss-Kronecker curvature of f, without any assuption on the scalar curvature.

Keywords: Minimal hypersurface. Gauss-Kronecker curvature. Scalar curvature.

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	9
2	**PRELIMINARES**	11
2.1	**Tensores**	11
2.2	**Equações de estrutura**	12
2.3	**Operadores diferenciais**	22
2.4	**Lugar dos pontos mínimos (Cut Locus)**	25
2.5	**Decomposição de de Rham**	25
3	**FUNÇÃO DISTÂNCIA E CURVATURA RICCI**	27
4	**HIPERSUPERFÍCIES EM $\mathbb{R}^4$**	32
5	**RESULTADOS PRINCIPAIS**	38
	REFERÊNCIAS	43

1 INTRODUÇÃO

O estudo de rigidez de hipersuperfícies M^n no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ é um tópico bastante pesquisado em Geometria. Um resultado clássico, obtido por Beez-Killing (KOBAYASHI (1996) pág. 46), afirma que uma hipersuperfície M^n em $\mathbb{R}^{n+1}$ é rígida se o posto da sua aplicação de Gauss é no mínimo 3. Para o caso do posto ser no mínimo 2, é apresentado, em (DAJCZER and GROMOLL (1985)), um método chamado "Parametrização de Gauss". Esse método tem como estratégia dar uma parametrização para hipersuperfícies com segunda forma fundamental de nulidade constante. Isso é feito invertendo, sob determinadas condições, sua aplicação de Gauss. Dajczer e Gromoll, no mesmo artigo, mostram condições sobre tais hipersuperfícies a fim de garantir que a rigidez de hipersuperfícies mínimas faça sentido sob hipóteses globais. Entre outros resultados, Dajczer e Gromoll (DAJCZER and GROMOLL (1985)) provaram o seguinte resultado de rigidez global:

Teorema. *Se M^n $(n \geq 4)$ é uma variedade Riemanniana completa que não possui $\mathbb{R}^{n-3}$ como um fator, então toda imersão mínima $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é rígida como uma subvariedade de $\mathbb{R}^{n+p}$, para todo $p \geq 1$.*

Para a prova desse teorema foi estabelecido um critério para hipersuperfícies completas M^n em $\mathbb{R}^{n+1}$ decomporem-se como um produto $M^n = L^3 \times \mathbb{R}^{n-3}$. No entanto, o caso da dimensão $n = 3$ é deixado em aberto. Nosso objetivo nesse trabalho é avaliar o caso $n = 3$, estudando hipersuperfícies completas mínimas em $\mathbb{R}^4$ com curvatura de Gauss-Kronecker identicamente nula.

Um modo de construir hipersuperfícies completas mínimas em $\mathbb{R}^4$, com curvatura de Gauss-Kronecker identicamente nula, é erguendo cilindros a partir de superfícies mínimas completas de $\mathbb{R}^3$. Para isso, sejam $h : M^2 \to \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ uma superfície mínima completa, $k_1 = \lambda$ e $k_2 = -\lambda$ as curvaturas principais de h e $a \in \mathbb{R}^4$ um vetor normal unitário normal a $\mathbb{R}^3$. Então o cilindro $f : M^3 = M^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ definido por $f(p,t) = h(p) + at$ é uma hipersuperfície mínima completa em $\mathbb{R}^4$, com curvaturas principais $k_1 = \lambda, k_2 = 0$ e $k_3 = -\lambda$. A curvatura escalar de M^3 é duas vezes a curvatura Gaussiana de M^2.

Agora observe que, ao tomarmos um cilindro erguido a partir do helicóide em $\mathbb{R}^3$, isso nos dá uma hypersuperfície mínima completa em $\mathbb{R}^4$ não totalmente geodésica, com curvatura de Gauss-Kronecker identicamente nula, três curvaturas principais distintas e curvatura escalar limitada inferiormente. No entanto, podemos obter superfícies mínimas completas em $\mathbb{R}^3$ com curvatura Gaussiana não limitada inferiormente. Os cilindros erguidos dessas superfícies nos dão hypersuperfícies mínimas completas em $\mathbb{R}^4$ com curvatura de Gauss-Kronecker identicamente nula e curvatura escalar não limitada inferiormente. No entanto, até onde sabemos, os cilindros são os únicos exemplos de hypersuperfícies mínimas completas em $\mathbb{R}^4$ com curvatura de Gauss-Kronecker identicamente nula. Isso então nos leva a seguinte pergunta:

Pergunta. *É verdade que toda hipersuperfície mínima completa com curvatura de Gauss-Kronecker nula em $\mathbb{R}^4$ é um cilindro sobre uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$?*

Daremos aqui uma resposta parcial a essa pergunta sob hipóteses adcionais na curvatura escalar. O que queremos provar é o seguinte:

Teorema. *Seja M^3 uma variedade Riemanniana orientada, completa e $f : M^3 \to \mathbb{R}^4$ uma imersão isométrica mínima com curvatura de Gauss-Kronecker identicamente zero e segunda forma fundamental não se anulando em nenhum ponto de M. Se a curvatura escalar de M^3 é limitada inferiormente, então $f(M^3)$ se decompõe como o produto Euclidiano $L^2 \times \mathbb{R}$, onde L^2 é uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^3$, com curvatura Gaussiana limitada inferiormente.*

Em (CHENG (2004)) é apresentada a prova de que em hipersuperfícies mínimas completas em $\mathbb{R}^4$ com curvatura escalar limitada inferiormente e curvatura de Gauss-Kronecker constante, a curvatura de Gauss-Kronecker é identicamente nula. Ainda em (CHENG (2004)), Cheng também dá um exemplo de hipersuperfícies mínimas completas em $\mathbb{R}^4$ com curvatura de Gauss-Kronecker identicamente nula que é, de fato, uma hipersuperfície em forma de cone sobre o toro de Clifford em S^3 e certamente não é completa.

Neste trabalho, consideramos hipersuperfícies mínimas completas em $\mathbb{R}^4$ com curvatura de Gauss-Kronecker constante e mostramos que a curvatura de Gauss-Kronecker é identicamente nula. Como principal ferramenta para a demonstração desse resultado, usaremos o Teorema das Curvaturas Principais (SMITH and XAVIER (1987)). Nosso segundo resultado é o seguinte:

Teorema 1.1. *Seja M^3 uma variedade Riemanniana orientada, completa e $f : M^3 \to \mathbb{R}^4$ uma imersão isométrica mínima com curvatura de Gauss-Kronecker constante. Então a curvatura de Gauss-Kronecker é identicamente zero.*

2 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos os conceitos, ferramentas, definições e notações fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

2.1 Tensores

Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita e V^* o espaço vetorial de todas as funções $\mathbb{R}$-lineares de V em $\mathbb{R}$. Definimos um tensor do tipo (r, s) $(r \geq 0, s \geq 0)$ sobre V como uma aplicação $\mathbb{R}$-multilinear $T : (V^*)^r \times V^s \to \mathbb{R}$, isto é, uma função $\mathbb{R}$-linear em cada entrada.

A partir deste conceito, definimos campo tensorial sobre uma variedade diferenciável M, n-dimensional, sob as seguintes notações:

1. M^n denota uma variedade n-dimensional;
2. T_pM^n representa o espaço tangente à variedade M^n no ponto p, para $p \in M^n$;
3. $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos vetoriais diferenciáveis sobre M^n;
4. $X(p)$ denota um vetor tangente em T_pM, ou o valor de um campo X em p;
5. $C^\infty(M)$ representa o conjunto das funções diferenciáveis definidas de M^n em $\mathbb{R}$;
6. $\mathfrak{X}^*(M)$ o conjunto das 1-formas diferenciais sobre M^n.

Um elemento $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ é tal que, dado $p \in M^n$, $\theta_p \in (T_p^*M)$, e se $X \in \mathfrak{X}(M)$ temos a função $\theta(X) : M \to \mathbb{R}$ definida por $\theta(X)(p) = \theta_p(X(p))$.

Definição 2.1. *Um campo tensorial diferenciável do tipo (r, s) sobre uma variedade diferenciável M^n é uma aplicação $C^\infty(M)$-linear*

$$T : (\mathfrak{X}^*(M))^r \times (\mathfrak{X}(M))^s \to C^\infty(M)$$

que induz, para cada ponto p de M, uma aplicação $\mathbb{R}$-multilinear

$$T_p : (T_p^*M)^r \times (T_pM)^s \to \mathbb{R}$$

tal que, para quaisquer $\omega_1, \ldots, \omega_r \in \mathfrak{X}^*(M)$ e $X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$, a função

$$T(\omega_1, \ldots, \omega_r, X_1, \ldots, X_s) : M \to \mathbb{R}$$

definida por

$$T(\omega_1, \ldots, \omega_r, X_1, \ldots, X_s)(p) = T_p(\omega_1(p), \ldots, \omega_r(p), X_1(p), \ldots, X_s(p))$$

é diferenciável.

Dado um (0,2)-tensor covariante T diferenciável definido em M^n, podemos representar T, por

$$T = \sum_{i,j} T_{ij}\, \omega_i \otimes \omega_j, \tag{1}$$

onde, $T_{ij} = T(e_i, e_j)$ definem as componentes de T no referencial $\{e_1, \ldots, e_n\}$ para M^n.

Sendo T diferenciável, suas funções componentes também são funções diferenciáveis e assim, faz sentido falar em dT_{ij}.

Definição 2.2. *Seja T um (0,2)-tensor covariante em M^n. A diferencial covariante ∇T de T é um (0,3)-tensor definido da seguinte maneira: as componentes $T_{ijk} = (\nabla T)(e_i, e_j, e_k)$, para $i, j, k = 1, \ldots, n$, chamadas de derivadas covariantes de T_{ij}, são dadas por:*

$$\sum_k T_{ijk}\omega_k \;=\; d(T_{ij}) + \sum_k T_{kj}\omega_{ki} + \sum_k T_{ik}\omega_{kj}. \tag{2}$$

A partir daí, podemos definir a segunda diferencial covariante de T como sendo o (0,4)-tensor $\nabla(\nabla T)$, com componentes $T_{ijkl} = \nabla(\nabla T)(e_i, e_j, e_k, e_l)$, chamadas de segundas derivadas covariantes de T_{ij} e dadas por

$$\sum_l T_{ijkl}\omega_l \;=\; d(T_{ijk}) + \sum_l T_{ljk}\omega_{li} + \sum_l T_{ilk}\omega_{lj} + \sum_l T_{ijl}\omega_{lk}. \tag{3}$$

Podemos, de forma similar, dar essa definição acima para uma aplicação $\Phi : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ tal que $\Phi = \sum_{i,j} \Phi_{ij}\omega_i \otimes \omega_j e_{n+1}$. As derivadas covariantes de Φ_{ij} são dadas por:

$$\sum_k \Phi_{ijk}\omega_k = d(\Phi_{ij}) + \sum_k \Phi_{kj}\omega_{ki} + \sum_k \Phi_{ik}\omega_{kj}; \tag{4}$$

$$\sum_l \Phi_{ijkl}\omega_l \;=\; d(\Phi_{ijk}) + \sum_l \Phi_{ljk}\omega_{li} + \sum_l \Phi_{ilk}\omega_{lj} + \sum_l \Phi_{ijl}\omega_{lk}. \tag{5}$$

2.2 Equações de estrutura

Um dos conceitos e construções mais importante aqui é o das Equações de Estrutura, elas fazem parte do *Método do Referencial Móvel*, que é mais explicado e aprofundado em (DO CARMO (1976)). Ao longo dessa seção faremos a construção das equações para as chamadas *formas espaciais* de dimensão 4.

Usaremos a notação $\mathbb{Q}^4(c)$, para represetar as formas espaciais de dimensão 4, o qual é uma variedade Riemanianna conexa, completa com curvatura seccional constante c. Os resultados apresentados são válidos para todos os valores de c, mas nas afirmações e provas usaremos $c = 0$ ou $c = \pm 1$, donde $\mathbb{Q}^4(c)$ é a esfera unitária $\mathbb{S}^4$, se $c > 0$, $\mathbb{Q}^4(c)$ é o espaço Euclideano $\mathbb{R}^4$, se $c = 0$, e $\mathbb{Q}^4(c)$ é o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^4$ de curvatura seccional constante -1, se $c < 0$.

Lema 2.1 (Cartan)**.** *Sejam M^k uma variedade diferenciável e $\omega_1, \ldots, \omega_r$ 1-formas linearmente independentes sobre um aberto $U \subset M$. Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ são 1-formas sobre U tais que:*

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \wedge \omega_i = 0. \tag{6}$$

Então, existem funções diferenciáveis $b_{ij} : U \longrightarrow R$ tais que $\alpha_i = \sum_{j=1}^{r} b_{ij}\omega_j$ e $b_{ij} = b_{ji}$.

Demonstração. *De forma geral, consideremos $r \leq k$. Inicialmente, completemos o conjunto das 1-formas ω_i para obtermos uma base $\{\omega_1, \ldots, \omega_r, \ldots, \omega_k\}$ de $(T_pM)^*$. Assim, como as $\alpha_i's$ são 1-formas, existem funções diferenciáveis tais que:*

$$\alpha_i = \sum_{i=1}^{r} b_{ij}\omega_j + \sum_{j=r+1}^{k} a_{ij}\omega_j.$$

Por hipótese, temos que

$$0 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \wedge \omega_i = \sum_{i,j}^{r} b_{ij}\omega_j \wedge \omega_i + \sum_{1 \leq i \leq r, r+1 \leq j \leq k} a_{ij}\omega_j \wedge \omega_i.$$

Como $\omega_i \wedge \omega_j = -\omega_j \wedge \omega_i$, para todo $1 \leq i, j \leq k$, obtemos

$$0 = \sum_{i<j}^{r} (b_{ij} - b_{ji})\omega_j \wedge \omega_i + \sum_{1 \leq i \leq r,\, r+1 \leq j \leq k} a_{ij}\omega_j \wedge \omega_i.$$

Uma vez que $\omega_j \wedge \omega_i$, com $i < j$ e $1 \leq i, j \leq k$, formam uma base para o espaço das 2-formas, obtemos

$$b_{ij} = b_{ji} \quad e \quad a_{ij} = 0.$$

Portanto, $\alpha_i = \sum_{j=1}^{r} b_{ij}\omega_j$, com $b_{ij} = b_{ji}$ funções diferenciáveis de U em $\mathbb{R}$.

■

Sejam $x : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ uma imersão em $\mathbb{Q}^4(c)$ de uma variedade Riemannianna conexa M e $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ um referencial ortornormal local adaptado à imersão x, isto é, para cada ponto $p \in M^3$ os vetores $\{e_1(p), e_2(p), e_3(p)\}$ geram T_pM numa vizinhança de p e e_4 gera o espaço normal a M^3. Adotemos a seguinte convenção sobre a variação dos índices:

$$1 \leq A, B, C, \ldots \leq 4, \qquad 1 \leq i, j, k, \ldots \leq 3.$$

Associado a este referencial ortonormal local $\{e_A\}$, definimos o correferencial $\{\omega_A\}$ e o conjunto das 1-formas $\{\omega_{AB}\}$, chamadas *formas de conexão* de $\mathbb{Q}^4(c)$, para as quais temos as seguintes *equações de estrutura* de $\mathbb{Q}^4(c)$:

$$d\omega_A = \sum_B \omega_{AB} \wedge \omega_B, \qquad \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0, \tag{7}$$

$$d\omega_{AB} = \sum_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} + \overline{\Omega}_{AB}. \tag{8}$$

As 2-formas $\overline{\Omega}_{AB}$ são chamadas as formas de curvaturas de $\mathbb{Q}^4(c)$. Para cada p, dados $X, Y \in T_p\mathbb{Q}^4(c)$, a matriz $((\overline{\Omega}_{AB})_p(X,Y))$ gerada pelas 2-formas $\overline{\Omega}_{AB}$ define um operador $\overline{R}(X,Y)_p : T_p\mathbb{Q}^4(c) \to T_p\mathbb{Q}^4(c)$, chamado operador curvatura e um (0,4)-tensor $\overline{R}$, dado por $\overline{R}(X,Y,Z,W) = \langle \overline{R}(X,Y)Z, W\rangle$, chamado de tensor curvatura. Denotando $\overline{R}_{ABCD} = \overline{R}(e_A, e_B, e_C, e_D)$, as componentes do tensor curvatura, no referencial $\{e_A\}$, segue que

$$\overline{\Omega}_{AB} = -\frac{1}{2}\sum_{C,D} \overline{R}_{ABCD}\,\omega_C \wedge \omega_D.$$

Temos as seguintes propriedades:

Proposição 2.1. *Para X, Y, Z, T campos diferenciáveis de vetores em $\mathbb{Q}^4(c)$, temos*

1. $\overline{R}(X,Y) = -\overline{R}(Y,X)$;
2. $\langle \overline{R}(X,Y)Z, T\rangle = -\langle \overline{R}(X,Y)T, Z\rangle$;
3. $\langle \overline{R}(X,Y)Z, T\rangle = \langle \overline{R}(Z,T)X, Y\rangle$;
4. $\langle \overline{R}(X,Y)Z, T\rangle + \langle \overline{R}(Y,Z)X, T\rangle + \langle \overline{R}(Z,X)Y, T\rangle = 0$.

Em M^3, temos $\omega_4 = 0$. De fato, seja $X \in \mathfrak{X}(M)$, escrevemos $X = \sum_i X_i e_i$. Daí,

$$\omega_4(X) = \omega_4\left(\sum_i X_i e_i\right) = \sum_i X_i \omega_4(e_i) = 0. \tag{9}$$

Do fato de $\omega_4 = 0$ em M^3, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega_4 = \sum_B \omega_{4B} \wedge \omega_B, \\ &= \sum_i \omega_{4i} \wedge \omega_i + \omega_{44} \wedge \omega_4 \\ &= \sum_i \omega_{4i} \wedge \omega_i. \end{aligned}$$

Logo, pelo Lema de Cartan, existem funções diferenciáveis h_{ij}, tais que:

$$\omega_{4i} = \sum_j h_{ij}\,\omega_j, \qquad h_{ij} = h_{ji}. \tag{10}$$

A partir disso, definimos a segunda forma fundamental da imersão x por

$$h = \sum_{i,j} h_{ij}\,\omega_i\omega_j. \tag{11}$$

No caso de hipersuperfícies, só existe, a menos de orientação, uma única segunda forma quadrática em cada ponto $p \in M^3$.

Podemos associar a segunda forma uma transformação linear auto-adjunta em T_pM, definida por

$$A_\eta : T_pM \to T_pM, \text{ onde } \langle A_\eta(v), v\rangle = h(v)$$

para $v \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$, com $(T_pM)^\perp$ o espaço dos campos normais a imersão em p.

Às vezes, é conveniente usarmos a aplicação bilinear, em p, $B : T_pM \times T_pM \to (T_pM)^\perp$, dada por

$$\langle B(X,Y), \eta\rangle = \langle A_\eta(X), Y\rangle$$

com $X, Y \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$.

Sendo as funções h_{ij} simétricas em relação aos índices, temos que h é uma aplicação simétrica. Definimos o vetor curvatura média por

$$\overrightarrow{H} = \frac{1}{3}\left(\sum_i h_{ii}\right) e_4.$$

Deste vetor, definimos a função curvatura média por

$$H = \frac{1}{3}\sum_i h_{ii}. \tag{12}$$

Dizemos que uma hipersuperfície M é *mínima* se $H \equiv 0$.

Uma imersão $f : M \to \overline{M}$ é dita *geodésica* em $p \in M$, se para todo $\eta \in (T_pM)^\perp$, a segunda forma fundamental h é identicamente nula em p. Se f é geodésica para todo $p \in M$, dizemos que f é *totalmente geodésica*.

As formas de conexão ω_{AB} de $\mathbb{Q}^4(c)$, recebem esse nome, pois definem uma derivação sobre $\mathbb{Q}^4(c)$ (conexão), representada por $\overline{\nabla}$. Tal $\overline{\nabla}$ é chamada de derivada covariante e define-se da seguinte maneira: dados X e Y, campos de vetores diferenciáveis sobre uma variedade riemanniana $\overline{M}^{n+1}$ e $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ um referencial ortonormal local, tomando $Y = \sum_A y_A e_A$, a derivada covariante de Y em relação a X, $\overline{\nabla}_X Y$, é definida por

$$\overline{\nabla}_X Y = \sum_B \{dy_B(X) + \sum_A \omega_{AB}(X) y_A\} e_B.$$

Note que $\overline{\nabla}_X Y$ não depende do referencial, mas da métrica, e que se $Y = e_C$, temos

$$\langle \overline{\nabla}_X e_C, e_D \rangle = \omega_{CD}(X), \tag{13}$$

que fornece uma interpretação geométrica das formas de conexão ω_{AB} em termos da derivação covariante. A derivada covariante possui as seguintes propriedades.

Proposição 2.2. *Sejam X, Y, Z campos diferenciáveis de vetores em $\overline{M}^{n+1}$, f, g funções diferenciáveis em $\overline{M}^{n+1}$ e a, b números reais. Então, a conexão*

$$\overline{\nabla} : \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1}) \times \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1}) \to \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1})$$

satisfaz:

1. *$\overline{\nabla}$ é $C^\infty(\overline{M}^{n+1})$-linear na primeira coordenada, isto é,*

$$\overline{\nabla}_{fX+gY} Z = f\overline{\nabla}_X Z + g\overline{\nabla}_Y Z;$$

2. *$\overline{\nabla}$ é $\mathbb{R}$-linear na segunda coordenada, isto é,*

$$\overline{\nabla}_X (aY + bZ) = a\overline{\nabla}_X Y + b\overline{\nabla}_X Z;$$

3. *$\overline{\nabla}_X(fY) = X(f)Y + f\overline{\nabla}_X Y$;*
4. *$\langle \overline{\nabla}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \overline{\nabla}_X Z \rangle = X\langle Y, Z \rangle$;*
5. *Se $p \in \overline{M}^{n+1}$, $(\overline{\nabla}_X Y)(p)$ só depende do valor de X no ponto p e dos valores de Y ao longo de uma curva parametrizada $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \overline{M}^{n+1}$, com $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = X(p)$.*

Com essa noção de conexão, temos que o colchete de Lie entre dois campos vetoriais tangentes X e Y, que fornece um novo campo vetorial tangente sobre M^{n+1}, é dado por

$$[X, Y] = \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X.$$

Separando nas equações de estrutura de $\mathbb{Q}^4(c)$ às parte tangente e normal a

M^3, obtemos de $\omega_4 = 0$, que:

$$d\omega_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j; \tag{14}$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \omega_{i4} \wedge \omega_{4j} + \overline{\Omega}_{ij}; \tag{15}$$

$$d\omega_{i4} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{k4} + \overline{\Omega}_{i4}. \tag{16}$$

As formas ω_{ij} restritas à M^3 só dependem da métrica de M^3 e da parte tangente do referencial $\{e_1, \ldots, e_4\}$. Assim, definimos uma derivada covariante ∇ sobre M^3 a partir da derivada covariante de $\mathbb{Q}^4(c)$, como sendo a parte tangente de $\overline{\nabla}$ a M^3, isto é,

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T = \sum_j \{dy_j(X) + \sum_i \omega_{ij}(X) y_i\} e_j, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

A conexão ∇ de M^3 possui todas as propriedades enunciadas na Proposição 2.2.

Pela interpretação geométrica dada em 13, podemos fazer o mesmo para as formas de conexão $\{\omega_{ij}\}$, isto é,

$$\langle \nabla_X e_i, e_j \rangle = \omega_{ij}(X) \qquad \forall X. \tag{17}$$

Em particular, se fizermos $X = e_k$, obtemos

$$\langle \nabla_X e_i, e_j \rangle = \omega_{ij}(e_k)$$

Dada uma imersão isométrica $f : M^n \to \overline{M}^{n+m}$, o *primeiro espaço normal* de f em $p \in M$ é o subespaço $N_1(p) \subset T_pM^\perp$ definido por

$$N_1(p) = \{B(X, Y); X, Y \in T_pM\}.$$

Dizemos que um subfibrado L, do fibrado normal $TM^\perp$, é *paralelo* se $\nabla_X Y \in L$, para todo $X \in TM$ e para todo $Y \in L$.

O resultado apresentado a seguir será de grande importância nos teoremas principais. Ele fornece condições para reduzir a codimensão de uma imersão isométrica e sua prova pode ser encontrada em (DAJCZER (1990), Proposição 4.1, pág. 54).

Proposição 2.3. *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+m}$ uma imersão isométrica, e suponha que exista um subfibrado paralelo L, do fibrado normal, de posto $r < m$, satisfazendo $N_1(p) \subset L(p)$, para todo $p \in M$. Então a codimensão de f pode ser reduzida para $m - r$, isto é, $f(M^n) \subset \mathbb{R}^{n+m-r}$.*

Definimos também as formas de curvatura da métrica de M^3 por

$$\Omega_{ij} = d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}.$$

Portanto, as equações de estrutura de M^3 são

$$d\omega_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j, \qquad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0; \tag{18}$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij}. \tag{19}$$

Tal como as formas de curvatura de $\mathbb{Q}^4(c)$, vistas anteriormente, dado $p \in M^3$ e $X, Y \in T_pM^3$, a matriz $((\Omega_{ij})_p(X,Y))$ gerada pelas 2-formas Ω_{ij} define um operador curvatura $R(X,Y)_p : T_pM^3 \to T_pM^3$ e um (0,4)-tensor curvatura para M^3 tal que $R(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z, W\rangle$. Esse tensor tem propriedades similares ao tensor $\overline{R}$ de $\mathbb{Q}^4(c)$. Denotando $R_{ijkl} = \langle R(e_i, e_j)e_k, e_l\rangle = \Omega_{lk}(e_i, e_j)$ as componentes do tensor R, as formas Ω_{ij} podem ser escritas como

$$\Omega_{ij} = -\frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl}\, \omega_k \wedge \omega_l.$$

Da equação (15), podemos estabelecer uma relação entre as componentes do tensor curvatura de M^3 com as componentes tangentes do tensor curvatura de $\mathbb{Q}^4(c)$. Essa relação é dada por:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l &= \Omega_{ij} \\
&= d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \\
&= \omega_{i4} \wedge \omega_{4j} + \overline{\Omega}_{ij} \\
&= \sum_k h_{ik}\omega_k \wedge \sum_l h_{jl}\omega_l - \frac{1}{2}\sum_{k,l} \overline{R}_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l \\
&= \sum_{k,l} h_{ik}h_{jl}\omega_k \wedge \omega_l - \frac{1}{2}\sum_{k,l} \overline{R}_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l.
\end{aligned}$$

Assim,

$$R_{ijkl} = \overline{R}_{ijkl} + (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}). \tag{20}$$

A equação (20) é chamada de *Equação de Gauss*.

Tomando a segunda forma fundamental dada por $h = \sum_k h_{ij}\omega_i \otimes \omega_j e_4$ e utilizando o definido em 2 e 3, as derivadas covariantes de h_{ij} satisfazem o seguinte

$$\sum_k h_{ijk}\omega_k = d(h_{ij}) + \sum_k h_{jk}\omega_{ik} + \sum_k h_{ik}\omega_{jk}, \tag{21}$$

$$\sum_l h_{ijkl}\omega_l = d(h_{ijk}) + \sum_l h_{ljk}\omega_{il} + \sum_l h_{ilk}\omega_{jl} + \sum_l h_{ijl}\omega_{kl}. \tag{22}$$

A partir da primeira expressão vamos obter as chamadas *equações de Codazzi*

$$h_{ijk} = h_{ikj} = h_{jik}; \qquad \forall i, j, k = 1, \ldots, n. \tag{23}$$

Para obtê-las, derivamos exteriormente a equação (10) e substituimos dh_{ij}. Logo,

$$d\omega_{4i} = d\left(\sum_j h_{ij}\,\omega_j\right) = \sum_j dh_{ij} \wedge \omega_j + \sum_j h_{ij} d\omega_j.$$

Calculamos então

$$\begin{aligned}
\sum_j dh_{ij} \wedge \omega_j &= \sum_j (\sum_k h_{ijk}\omega_k - \sum_k h_{jk}\omega_{ik} - \sum_k h_{ik}\omega_{jk}) \wedge \omega_j \\
&= \sum_{jk} h_{ijk}\omega_k \wedge \omega_j - \sum_{jk} h_{jk}\omega_i k \wedge \omega_j - \sum_{jk} h_{ik}\omega_{jk} \wedge \omega_j \\
&= \sum_{jk} h_{ijk}\omega_k \wedge \omega_j - \sum_{jk} h_{jk}\omega_{ik} \wedge \omega_j - \sum_k h_{ik} \sum_j \omega_{jk} \wedge \omega_j \\
&= \sum_{jk} h_{ijk}\omega_k \wedge \omega_j + \sum_{jk} h_{jk}\omega_j \wedge \omega_{ik} - \sum_k h_{ik} d\omega_k \\
&= \sum_{jk} h_{ijk}\omega_k \wedge \omega_j + \sum_k \omega_{4k} \wedge \omega_{ik} - \sum_k h_{ik} d\omega_k \\
&= \sum_{jk} h_{ijk}\omega_k \wedge \omega_j + \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{k4} - \sum_k h_{ik} d\omega_k
\end{aligned}$$

logo,

$$d\omega_{4i} = \sum_{jk} h_{ijk}\omega_k \wedge \omega_j + \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{k4}.$$

Por outro lado, como $\mathbb{Q}^4(c)$ tem curvatura (seccional) constante e igual a c, temos $\overline{\Omega}_{i4} = 0$. Assim, resta em (16)

$$d\omega_{4i} \;=\; \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{k4}. \tag{24}$$

Daí,

$$0 = \sum_{j,k} h_{ijk}\omega_k \wedge \omega_j = \sum_{j<k} (h_{ijk} - h_{ikj})\omega_k \wedge \omega_j,$$

segue então que $h_{ijk} = h_{ikj}$.

Observação 2.1. *Uma relação interessante que obtemos da equação de Codazzi, relacionando o operador de forma, é quando a codimensão da imersão é* 1. *Neste caso, obtemos*

$$A_\eta([X,Y]) = \nabla_X(A_\eta(Y)) - \nabla_Y(A_\eta(X))$$

As funções componentes R_{ijkl} do tensor curvatura de M^3, nos permitem definir outras curvaturas importantes sobre a nossa variedade.

Dado $p \in M^3$, consideremos em T_pM^3 um subespaço P bidimensional. Suponhamos span$\{e_i, e_j\} = P$, para alguns $i, j = 1, 2, 3$. Assim, temos a seguinte

Proposição 2.4. *O número* $\Omega_{ij}(e_i, e_j) = R_{ijij}$ *depende apenas do subespaço* P.

Daí, podemos então, definir

Definição 2.3. *O número*

$$K_p(P) = -\Omega_{ij}(e_i, e_j)$$

é chamado a curvatura seccional de M^3 *em* p, *segundo* P.

Mais geralmente, temos:

Proposição 2.5. *Sejam* $X, Y \in P \subset T_pM$ *linearmente independentes e um referencial ortonormal* $\{e_i\}$ *tal que span*$\{e_i, e_j\} = P$, *para alguns* $i, j = 1, \ldots, n$. *Então,*

$$K(p) = \frac{\langle R(X,Y)X, Y\rangle}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2}.$$

É importante notar que, como P é não degenerado, $\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle \neq 0$.

Como vimos acima, as componentes h_{ij} da segunda forma fundamental são simétricas e assim temos que h é simétrica. Dessa forma, dado $p \in M$, podemos escolher os campos $\{e_1, e_2, e_3\} \in T_pM$ de modo a diagolanizar a segunda forma fundamental h, isto é,

$$h = \sum_{i,j} h_{ij}\, \omega_i\omega_j = \sum_i h_{ii}\, \omega_i^2 = \sum_i \lambda_i \omega_i^2.$$

Os campos $\{e_1, e_2, e_3\}$ são chamados de *direções principais* e os números λ_i, que são os auto-valores da matriz h_{ij}, são chamados *curvaturas principais*. A partir dessas informações, reescrever as curvaturas média H e seccional K para a nossa hipersuperfície

$x : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} nH &= \sum_i h_{ii} = \sum_i \lambda_i \\ K &= \det(h_{ij}) = \Pi_i \lambda_i, \end{aligned}$$

a curvatura K recebe o nome de *curvatura de Gauss-Kronecker.*

Definição 2.4. *Dizemos que uma variedade tem curvatura (seccional) constante, se $K_p(P)$ não depende de p e do subespaço não degenerado P.*

Logo, como $\mathbb{Q}^4(c)$ tem curvatura constante, temos que

$$\overline{R}_{ABCD} = c(\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC}).$$

A equação de Gauss para uma hipersuperfície M^3 em $\mathbb{Q}^4(c)$ pode ser escrita como

$$R_{ijkl} = c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}). \tag{25}$$

Definição 2.5 (Tensor Curvatura de Ricci)**.** *Seja R o tensor curvatura de M^3. O tensor curvatura de Ricci de M^3 é definido por*

$$Ric(X, Y) = \sum_i \langle R(X, e_i)Y, e_i\rangle, \tag{26}$$

onde $\{e_1, e_2, e_3\}$ é um referencial ortonormal e X, Y são campos vetoriais sobre M.

O número $\mathrm{Ric}(X, X)$ é chamado *curvatura de Ricci* na direção de X. Dados $X = e_i$, $Y = e_j$, as componentes do tensor curvatura de Ricci, R_{ij}, no referencial $\{e_1, e_2, e_3\}$, são dadas por

$$R_{ij} = \mathrm{Ric}(e_i, e_j) = \sum_k R_{ikjk}, \tag{27}$$

onde $R_{ikjk} = \langle R(e_i, e_k)e_j, e_k\rangle$. Pela equação de Gauss (25), deduzimos as componentes do tensor curvatura de Ricci

$$\begin{aligned} R_{ij} = \sum_k R_{ikjk} &= c\sum_k(\delta_{ij}\delta_{kk} - \delta_{ik}\delta_{kj}) + \sum_k(h_{ij}h_{kk} - h_{ik}h_{kj}) && (28) \\ &= c(3\delta_{ij} - \delta_{ij}) + h_{ij}\sum_k h_{kk} - \sum_k h_{ik}h_{kj} && (29) \\ &= 2c\delta_{ij} - \sum_k h_{ik}h_{kj} && (30) \end{aligned}$$

Dizemos que o tensor curvatura de Ricci de M^3 é limitado inferiormente se existe L tal

que
$$\mathrm{Ric}(X,Y) \geq L\langle X,Y\rangle,$$
para quaisquer X, Y campos vetoriais sobre M^n. Similarmente, a curvatura de Ricci é limitada inferiormente se
$$\mathrm{Ric}(X,X) \geq L\langle X,X\rangle,$$
para qualquer campo vetorial X sobre M^3. Equivalentemente, a curvatura de Ricci é limitada inferiormente se
$$R_{ii} \geq L, \tag{31}$$
para todo $1 \leq i \leq 3$.

Munidos da curvatura de Ricci, podemos definir a *curvatura escalar* de M.

Definição 2.6 (Curvatura Escalar (R))**.** *Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ é uma base ortonormal de campos locais sobre M^3. Definimos a curvatura escalar de M^3,a partir do tensor curvatura de Ricci, por*
$$R(p) = \sum_i Ric_p(e_i, e_i) = \sum_{i,j} R_{ijij}. \tag{32}$$

De (30)
$$\begin{aligned} \mathrm{R} &= \sum_i R_{ii} \\ &= 2c\sum_i \delta_{ii} - \sum_{i,k} h_{ik}^2 \\ &= 6c - S. \end{aligned} \tag{33}$$
onde $S = \sum_{i,j} h_{ij}^2$ é o quadrado da norma da segunda forma fundamental h de M^3. Temos daí que R é constante se, e somente se, S é constante.

No final desta seção apresentamos um resultado interessante, relacionando os campos diferenciáveis e as fomas diferenciais em M.

Proposição 2.6. *Sejam ω uma 1-forma diferenciável e X, Y campos de vetores diferenciáveis definidos em uma variedade diferenciável M. Então,*
$$d\omega(X,Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y]). \tag{34}$$

2.3 Operadores diferenciais

Com a definição de derivada covariante de tensores apresentada em 2.2, podemos definir, para variedades Riemannianas, certos operadores que já nos são conhecidos da geometria euclidiana.

Definição 2.7. *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em uma variedade Riemanniana M^n. O gradiente de f é o campo vetorial ∇f em M^n definido por*

$$\langle \nabla f, X \rangle_p = df_p(X),$$

para todo $p \in M$ e todo $X \in T_pM$.

Sejam o aberto $U \subset M^n$ e um referencial $\{e_i\}$ definido nesse aberto. Escrevemos em U, $df = \sum_i f_i \omega_i$, onde a função f_i é a derivada de f na direção de e_i. Daí, temos

$$\nabla f = \sum_{i=1} f_i e_i.$$

Sendo a 1-forma df um (0,1)-tensor, obtemos que a sua diferencial covariante $\nabla(df)$ é um (0,2)-tensor, cujas componentes f_{ij} satisfazem

$$\sum_j f_{ij}\omega_j = df_i + \sum_j f_j \omega_{ji}.$$

Definição 2.8. *A forma bilinear $\nabla(df)$ é chamada o Hessiano de f na métrica de M^n. O traço desta forma é chamado o Laplaciano de f, e é dado por*

$$\Delta f = \sum_i f_{ii}.$$

A métrica Riemanniana definida sobre M^n faz corresponder, a todo campo de vetores X em M^n, uma 1-forma diferenciável ω_X, definida por

$$\omega_X(Y) = \langle X, Y \rangle_p,$$

para todo $p \in M$ e todo $Y \in T_pM$. Em um referencial $\{e_i\}$ sobre um aberto de M, se $X = \sum_i x_i e_i$, temos que

$$\omega_X = \sum_i x_i \omega_i.$$

A diferencial covariante $\nabla \omega_X$ é uma forma bilinear cujas funções componentes x_{ij} são dadas por

$$\sum_j x_{ij}\omega_j = dx_i + \sum_j x_j \omega_{ji}.$$

Definição 2.9. *O traço de $\nabla \omega_X$ é chamado divergente de X, e tem a expressão*

$$divX = \sum_i x_{ii}.$$

É importante observar que

$$\Delta f = div \nabla f.$$

Damos agora propriedades e fórmulas importantes, sobre os operadores definidos acima, que terão uso ao longo de todo o trabalho. Dadas funções diferenciáveis $f, g : M^n \to \mathbb{R}$ e X, Y campos vetoriais diferenciáveis em M^n, temos

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$.
2. $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.
3. Se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável, então $\nabla(\varphi \circ f) = \varphi'(f)\nabla f$.
4. $div(X+Y) = divX + divY$.
5. $div(fX) = f divX + \langle \nabla f, X \rangle$.
6. $\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$.
7. Se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável, então $\nabla(\varphi \circ f) = (\varphi'' \circ f)|\nabla f|^2 + (\varphi' \circ f)\Delta f$.

Apresentamos aqui um resultado muito útil à respeito da definição do Laplaciano.

Proposição 2.7. *Sejam $f : M^n \to R$ uma função suave e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta $U \in M$. Então em U temos:*

$$\Delta f = \sum_i \{e_i(e_i f) - (\nabla_{e_i} e_i) f\}$$

Demonstração. *Observamos que,*

$$\begin{aligned}
\sum_i^n X_i X_i(f) &= \sum_i^n X_i \langle \nabla f,\ X_i \rangle \\
&= \sum_i^n (\langle \nabla_{X_i} \nabla f,\ X_i \rangle + \langle \nabla f,\ \nabla_{X_i} X_i \rangle) \\
&= \sum_i^n \langle \nabla_{X_i} \nabla f,\ X_i \rangle + \sum_i^n (\nabla_{X_i} X_i)(f)
\end{aligned}$$

Daí,

$$\sum_i^n \langle \nabla_{X_i} \nabla f\ X_i \rangle = \sum_i^n (X_i X_i(f) - (\nabla_{X_i} X_i)(f)) \ .$$

Como $\{X_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal, pela definição de divergente, concluímos que

$$\Delta f = \sum_i^n (X_i X_i(f) - (\nabla_{X_i} X_i)(f)) \ .$$

■

2.4 Lugar dos pontos mínimos (Cut Locus)

Sejam M uma variedade Riemanniana completa, p um ponto de M e $\gamma : [0, \infty) \to M$ uma geodésica normalizada com $\gamma(0) = p$. Sabemos que para $t > 0$, suficientemente pequeno, $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$, isto é, $\gamma([0, 1])$ é uma geodésica minimizante. Além disso, se $\gamma([0, t_1])$ não é minimizante, o mesmo acontece para $t > t_1$. Por continuidade, temos que o conjunto dos números $t > 0$ para os quais $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$ é da forma $[0, t_0]$ ou $[0, \infty)$. No primeiro caso, $\gamma(t_0)$ é chamado o *ponto mínimo (ou cut point) de p ao longo de γ*; no segundo caso, diz-se que tal ponto não existe. Definimos o *lugar dos pontos mínimos de p (ou Cut Locus de p)*, indicado por $C_m(p)$, como a união dos pontos mínimos de p ao longo de todas as geodésicas que partem de p. Mais informações sobre o *Cut Locus*, podem ser encontradas em [DO CARMO (2005)].

Observe que, como no caso da esfera $\mathbb{S}^n$, podem existir mais de uma geodésica minimizante ligandos dois pontos antípodas. Com isso apresentamos uma importante propriedade sobre o *Cut Locus* envolvendo a função *distância*. A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em SAKAI (1996).

Proposição 2.8. *Suponha que existam, pelo menos, duas geodésicas minimizantes ligando pontos p, q em M. Então a função distância $d : M \to \mathbb{R}$ não é suave em q.*

2.5 Decomposição de de Rham

Aqui abrimos uma seção para um resultado de extrema importância, que usaremos na demonstração do teorema 1, além das definições necessárias para tal resultado. A prova desse teorema de de Rham pode ser encontrada em (KOBAYASHI (1996), pág. 187-189).

Sejam M^n e N^r variedades diferenciáveis e $\varphi : N \to M$ uma imersão. Se, além disso, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(N) \subset M$, onde $\varphi(N)$ tem a topologia induzida por M, dizemos que φ é um *mergulho*. Se $N \subset M$ e a inclusão $i : N \hookrightarrow M$ é um mergulho, dizemos que N é uma subvariedade de M.

Uma *distribuição* D k-dimensional em uma variedade M é uma aplicação que, a cada ponto $p \in M$, associa um subespaço k-dimensional $D(p)$ de T_pM. Dizemos que a distribuição D é diferenciável se, para todo $p \in M$, existem uma vizinhança V de p e k campos diferenciáveis $\{X_1, ..., X_k\}$, tais que $\{X_i\}_{i=1}^k$ forma uma base de $D(q)$, para todo $q \in V$.

Dada uma distribuição D em M, uma subvariedade N de M é chamada *subvariedade integral* de D se $T_pN = D(p)$, para todo $p \in N$. Uma subvariedade integral N será chamada de *subvariedade integral maximal* se, para toda subvariedade integral $\overline{N}$ de D, com $N \subset \overline{N}$, tivermos $N = \overline{N}$.

Por fim, chamamos uma distribuição D em M de *involutiva* se, para todo $X, Y \in D$, temos que $[X, Y] \in D$ e de *paralela* se, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e para todo

$Y \in D$ temos $\nabla_X Y \in D$.

Teorema. *(**Teorema da decomposição de de Rham**) Sejam M^n variedade Riemanniana conexa, D_1 e D_2 duas distribuições paralelas e involutivas em M^n de dimensões k e $n-k$, respectivamente, tais que $T_pM = D_1(p) \oplus D_2(p)$, para todo $p \in M^n$. Nestas condições, vale que:*

i) *para todo $p \in M^n$, existe uma vizinhança U de p tal que $U = U_1^k \times U_2^{n-k}$, onde U_1^k e U_2^{n-k} são subvariedades de M^n tais que, $TU_1 = D_1|_{U_1}$ e $TU_2 = D_2|_{U_2}$.*

ii) *Se M^n é uma variedade simplesmente conexa, então $M^n = M_1^k \times M_2^{n-k}$, onde M_1^k e M_2^{n-k} são as subvariedades integrais e maximais de D_1 e D_2, respectivamente.*

3 FUNÇÃO DISTÂNCIA E CURVATURA RICCI

Neste capítulo apresentamos os teoremas principais deste trabalho e os resultados necessários para as demonstrações desses teoremas.

Dentre esses lemas, destacamos abaixo o também conhecido por *Teorema da Comparação do Laplaciano*, referente a propriedades sobre a função distância.

Lema 3.1. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa e $x_0 \in M$. Seja $\rho : M \to \mathbb{R}$ tal que $\rho(x) = d(x, x_0)$, onde d é a função distância em M. Seja $\overline{x}$ um ponto de M, onde ρ é diferenciável. Então:*

i) $\|\nabla\rho(\overline{x})\| = 1$;

ii) (Teorema da Comparação do Laplaciano) *Se $Ric_x(v) \geqq (n-1)c$, $\forall x \in M$ e $\forall v \in T_xM$ com $\|v\| = 1$. Temos:*

$$\Delta\rho(\overline{x}) \leq \Delta\rho_c(\overline{x}), \text{ onde}$$

$$\frac{\Delta\rho_c(\overline{x})}{n-1} = \begin{cases} \sqrt{c}\cot(\sqrt{c}\rho), & se \quad c > 0; \\ \frac{1}{\rho}, & se \quad c = 0; \\ \sqrt{-c}\coth(\sqrt{-c}\rho), & se \quad c < 0. \end{cases}$$

Em particular, se $\overline{x}$ não é <u>cut point</u> de x_0, então valem i) e ii).

Lema 3.2. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa, $x_0 \in M$ e $\rho(x) = d(x, x_0)$. Supondo $Ric_x(v) \geq -(n-1)k^2$, para todo $x_0 \in M$ e $v \in T_pM$, com $\|v\| = 1$. Se $\overline{x}$ é um ponto onde ρ é diferenciável, então*

$$\rho(\overline{x})\Delta\rho(\overline{x}) \leq (n-1)(1 + \rho(\overline{x})k).$$

Demonstração. *Estando nas condições do lema 3.1, substituímos $c = -k^2$ no item ii). Dessa forma, teremos $c < 0$ e, portanto,*

$$\frac{\Delta\rho_c(\overline{x})}{n-1} = \sqrt{k^2}\coth(\sqrt{k^2}\rho) = k\coth(k\rho), \qquad \text{onde } k > 0.$$

Como para $y \in \mathbb{R}$, temos que $\coth(y) = \dfrac{\cosh(y)}{\sinh(y)}$ e $\cosh(y) = \sqrt{1 + \sinh^2(y)}$, obtemos

$$\frac{\Delta\rho_c}{n-1} = k\frac{\sqrt{1 + \sinh^2(k\rho)}}{\sinh(k\rho)} = k\sqrt{\frac{1}{\sinh^2(k\rho)} + 1} \leq \frac{k}{\sinh(k\rho)} + k.$$

De $\sinh(y) \geq y$, para $y > 0$, obtemos $\sinh(k\rho) \geq k\rho$. Dessa forma,

$$\frac{\Delta\rho_c}{n-1} \leq \frac{k}{\sinh(k\rho)} + k \leq \frac{1 + k\rho}{\rho}$$

donde, $\Delta\rho_c \leq \dfrac{(n-1)(1+k\rho)}{\rho}$.

Utilizando novamente o item ii), temos $\Delta\rho(\overline{x}) \leq \Delta\rho_c(\overline{x})$. *Logo,*

$$\rho(\overline{x})\Delta\rho(\overline{x}) \leq (n-1)(1+\rho(\overline{x})k)$$

.

$\blacksquare$

Lema 3.3. *Sejam* M^n *uma variedade Riemanniana,* $n \geq 2$*, completa com curvatura de Ricci satisfazendo* $Ric_x(v) \geq -(n-1)k^2$*, onde* k *é uma constante positiva. Suponha* g *uma função não-negativa suave em* M^n*, satisfazendo*

$$\Delta g \geq cg^2,$$

onde c *é uma constante positiva e* Δ *representa o operador Laplaciano. Então* g *é identicamente nula.*

Demonstração. *Tomemos um ponto* x_0 *qualquer de* M. *Nosso objetivo será mostrar que* x_0 *é máximo de* g *em* M*, isto é,* $g(x) \leq g(x_0)$ *para todo* $x \in M$. *Para isso, suponhamos o contrário, que existe um* $x_1 \in M$ *tal que* $g(x_0) < g(x_1)$.

Sejam então $B_a(x_0) \subset M$ *a bola geodésica de raio* a *centrada em* x_0 *e* $b = d(x_1, x_0)$ *a distância de* x_1 *a* x_0 *em* M*, de modo que* $b < a$. *Consideremos agora a função* $G : B_a(x_0) \to R$ *definida por:*

$$G(x) = (a^2 - \rho^2(x))^2 g(x), \tag{35}$$

onde $\rho(x) = d(x, x_0)$.

Dessa definição temos que $G \geq 0$ *e que* $G\big|_{\partial B_a(x_0)} = 0$*, logo* G *atinge seu máximo em algum ponto* x_2 *de* $B_a(x_0)$.

A fim de que a função distância $\rho(x)$ *seja suave, é razoável pedirmos então que* x_2 *não seja* cut point *de* x_0 *(proposição 2.8). Dessa forma, nossa* G *é suave na proximidade de* x_2 *e pelo princípio do máximo*

$$\nabla G(x_2) = 0 \text{ e } \Delta G(x_2) \leq 0. \tag{36}$$

Utilizando 36, vamos encontrar relações para o $\nabla g(x_2)$ *e o* $\Delta g(x_2)$.

Calculando o gradiente de G, temos:

$$\begin{aligned}
\nabla G &= \nabla((a^2-\rho^2)^2 g)\\
&= (a^2-\rho^2)^2\nabla g + g\nabla(a^2-\rho^2)^2\\
&= (a^2-\rho^2)^2\nabla g + g(2(a^2-\rho^2)\nabla(a^2-\rho^2))\\
&= (a^2-\rho^2)^2\nabla g + g2(a^2-\rho^2)(-2\rho\nabla\rho)\\
&= -4g(a^2-\rho^2)\rho\nabla\rho + (a^2-\rho^2)^2\nabla g.
\end{aligned}$$

Aplicando o gradiente de G em x_2, temos $\nabla G(x_2)=0$, logo

$$(a^2-\rho^2(x_2))^2\nabla g(x_2) = 4g(x_2)(a^2-\rho^2(x_2))\rho(x_2)\nabla\rho(x_2)$$

Daí,

$$\frac{\nabla g}{g}(x_2) = \frac{4\rho\nabla\rho}{a^2-\rho^2}(x_2). \tag{37}$$

Para o laplaciano de G, fazemos:

$$\begin{aligned}
\Delta G &= \Delta((a^2-\rho^2)^2 g)\\
&= (a^2-\rho^2)^2\Delta g + g\Delta(a^2-\rho^2)^2 + 2\langle\nabla(a^2-\rho^2)^2,\nabla g\rangle\\
&= (a^2-\rho^2)^2\Delta g + g\{2(a^2-\rho^2)\Delta(a^2-\rho^2) + 2\langle\nabla(a^2-\rho^2),\nabla(a^2-\rho^2)\rangle\}\\
&\quad +2\langle 2(a^2-\rho^2)\nabla(a^2-\rho^2),\nabla g\rangle\\
&= (a^2-\rho^2)^2\Delta g + g\{2(a^2-\rho^2)(-\Delta\rho^2) + 2\langle -2\rho\nabla\rho,-2\rho\nabla\rho\rangle\}\\
&\quad +2\langle 2(a^2-\rho^2)(-2\rho\nabla\rho),\nabla g\rangle\\
&= (a^2-\rho^2)^2\Delta g + g\{-2(a^2-\rho^2)(2\rho\Delta\rho + 2\langle\nabla\rho,\nabla\rho\rangle) + 8\langle\rho\nabla\rho,\rho\nabla\rho\rangle\}\\
&\quad -8\langle(a^2-\rho^2)\rho\nabla\rho,\nabla g\rangle\\
&= (a^2-\rho^2)^2\Delta g + g\{-4(a^2-\rho^2)(\rho\Delta\rho - 4\langle\nabla\rho,\nabla\rho\rangle) + 8\langle\rho\nabla\rho,\rho\nabla\rho\rangle\}\\
&\quad -8\langle(a^2-\rho^2)\rho\nabla\rho,\nabla g\rangle
\end{aligned}$$

Aplicando o laplaciano de G em x_2, temos $\Delta G(x_2)\le 0$, e

$$\begin{aligned}
(a^2-\rho^2(x_2))^2\frac{\Delta g}{g}(x_2) &\le 4(a^2-\rho^2(x_2))\rho(x_2)\Delta\rho(x_2)\\
&\quad +4(a^2-\rho^2(x_2))\|\nabla\rho(x_2)\|^2 - 8\rho^2(x_2)\|\nabla\rho(x_2)\|^2\\
&\quad +8(a^2-\rho^2(x_2))\rho(x_2)\langle\nabla\rho(x_2),\frac{\nabla g}{g}(x_2)\rangle.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\langle \nabla\rho(x_2), \frac{\nabla g}{g}(x_2)\rangle\right| \leq \|\nabla\rho(x_2)\|\|\frac{\nabla g}{g}(x_2)\|,$$

segue,

$$\frac{\Delta g}{g}(x_2) \leq \frac{4\rho(x_2)\Delta\rho(x_2)}{(a^2-\rho^2(x_2))}+\frac{4\|\nabla\rho(x_2)\|^2}{(a^2-\rho^2(x_2))}-\frac{8\rho^2(x_2)\|\nabla\rho(x_2)\|^2}{(a^2-\rho^2(x_2))^2}+\frac{8\rho(x_2)\|\nabla\rho(x_2)\|}{(a^2-\rho^2(x_2))}\|\frac{\nabla g}{g}(x_2)\|,$$

Do fato de x_2 não ser cut point *de x_0, temos que ρ é diferenciável em x_2, logo pelo item i) de 3.1 obtemos $\|\nabla\rho(x_2)\| = 1$. Usando (37), temos:*

$$\frac{\Delta g}{g}(x_2) \leq \frac{4(1+\rho(x_2)\Delta\rho(x_2))}{a^2-\rho^2(x_2)} + \frac{24\rho^2(x_2)}{(a^2-\rho^2(x_2))^2}. \tag{38}$$

Da desigualdade obtida em 3.2 e da hipótese $\Delta g \geq cg^2$,

$$(a^2-\rho^2(x_2))^2\frac{\Delta g}{g}(x_2) \leq 4(a^2-\rho^2(x_2))(1+\rho(x_2)\Delta\rho(x_2)) + 24\rho^2(x_2).$$

Donde

$$\begin{aligned}
c(a^2-\rho^2(x_2))^2 g(x_2) &\leq 4(a^2-\rho^2(x_2))(1+\rho(x_2)\Delta\rho(x_2)) + 24\rho^2(x_2)\\
cG(x_2) &\leq 4(a^2-\rho^2(x_2))(1+\rho(x_2)\Delta\rho(x_2)) + 24\rho^2(x_2)\\
&\leq 4(a^2-\rho^2(x_2))(1+(n-1)(1+k\rho(x_2))) + 24\rho^2(x_2)\\
&\leq 4a^2-4\rho^2(x_2)+4an-4a^2-4\rho^2(x_2)n\\
&\quad +4a^2(n-1)k\rho(x_2)+28\rho^2(x_2).
\end{aligned}$$

Como $x_2 \in B_a(x_0)$, então $\rho(x_2) < a$ e, portanto, $\rho^2(x_2) < a^2$. Daí,

$$\begin{aligned}
cG(x_2) &\leq 4a^2-4a^2+4an-4a^2-4a^2n+4a^2(n-1)ka+28a^2\\
&\leq 4a^2k(n-1)a+28a^2\\
&\leq a^2(4k(n-1)a+28)
\end{aligned}$$

Por fim, uma importante relação para G em x_2 é obtida

$$G(x_2) \leq \frac{a^2}{c}(28+4k(n-1)a). \tag{39}$$

Como x_2 não é cut point *de x_0, temos uma única geodésica σ minimizante,* *ligando x_0 a x_2. Assim, tomamos $\overline{x_0} \in \sigma$ tal que $d(x_0, \overline{x_0}) = \epsilon$, com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Definimos então ρ para $\overline{x_0}$ por $\overline{\rho}(x) = d(x, \overline{x_0})$, a qual é suave perto de x_2. Definindo a função*

$$G_\epsilon(x) = (a^2 - (\overline{\rho}(x) + \epsilon)^2)^2 g(x),$$

obtemos $G_\epsilon(x) \leq G(x)$ e $G_\epsilon(x_2) = G(x_2)$, pois

$$G_\epsilon(x_2) = (a^2 - (\overline{\rho}(x_2) + \epsilon)^2)^2 g(x_2) = (a^2 - \rho^2(x_2))^2 g(x_2) = G(x_2).$$

Logo, x_2 também é ponto de máximo de G_ϵ.

Fazendo uma construção similar a (39) para G_ϵ e mandando $\epsilon \to 0$, teremos:

$$G_\epsilon(x_2) \leq \frac{a^2}{c}(28 + 4k(n-1)a)$$

Como x_2 é máximo de G na bola $B_a(x_0)$ e $d(x_1, x_0) < a$, então $G(x_1) \leq G(x_2)$. Da definição de G_ϵ, temos que

$$g(x) = \frac{G_\epsilon(x)}{(a^2 - (\overline{\rho}(x) + \epsilon)^2)^2}.$$

A partir daí, calculamos,

$$0 \leq g(x_1) \leq \frac{G(x_1)}{(a^2 - (\overline{\rho}(x_1) + \epsilon)^2)^2} \leq \frac{G(x_2)}{(a^2 - (\overline{\rho}(x_1) + \epsilon)^2)^2} \leq \frac{a^2(28 + 4k(n-1)a)}{c(a^2 - (\overline{\rho}(x_1) + \epsilon)^2)^2}.$$

Sendo a o raio da bola normal $B_a(x_0)$ e sendo M completa, podemos fazer $a \to \infty$ e assim obter $g(x_1) = 0$. No entanto, assumimos de início que $g(x_0) < g(x_1)$. Se $g(x_1) = 0$ então $g(x_0)$ seria negativa, contradizendo a hipótese de que g é não-negativa. Portanto, x_0 é máximo de g.

Como x_0 foi tomado arbitrariamente, todo ponto de M é máximo de g e assim $g(x)$ é constante para todo $x \in M$. Da segunda condição sobre g, teremos

$$0 \leq cg^2(x) \leq \Delta g(x) = 0, \qquad \forall x \in M$$

Isso nos dá $g^2(x) \equiv 0$ e portanto, $g \equiv 0$.

$\blacksquare$

4 HIPERSUPERFÍCIES EM $\mathbb{R}^4$

Sejam $f : M^3 \to \mathbb{R}^4$ uma hipersuperfície mínima, orientada, com a métrica induzida e $\xi : M^3 \to \mathbb{R}^4$ um campo vetorial unitário normal a f. Denotaremos por $A_\xi : T_pM^3 \to T_pM^3$ o operador de forma na direção do campo normal ξ e $k_1 \geq k_2 \geq k_3$ as curvaturas principais de f. Denotamos também a curvatura média e a curvatura de Gauss-Kronecker K de f, respectivamente, por

$$H(p) = k_1 + k_2 + k_3 \text{ e } K = det(A_\xi) = k_1k_2k_3.$$

Tendo por início que f é mínima, se assumirmos agora que a curvtura Gauss-Kronecker de f seja identicamente nula e que sua segunda forma fundamental não se anule em lugar nenhum de M, então teremos que suas curvaturas principais satisfazem $k_1 = \lambda, k_2 = 0, k_3 = -\lambda$, onde λ é uma função suave, positiva de M^3.

Escolhemos, então, um referencial ortonormal local $\{e_1, e_2, e_3\}$ em M^3, de direções principais correspondendo a $\lambda, 0, -\lambda$. Sejam $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ o correferencial e $\{\omega_{ij}\}$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ as formas de conexão, respectivamente, associados ao nosso referencial. Da construção das equações de estrutura, que fizemos em (14), e utilizando (10), temos que para $\mathbb{R}^4$ tais equações se apresentam por

$$d\omega_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j, \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \tag{40}$$

$$d\omega_{ij} = \sum_l \omega_{il} \wedge \omega_{lj} - k_ik_j\omega_i \wedge \omega_j, \quad i \neq j. \tag{41}$$

A partir daqui, introduzimos duas funções em M, $u, v : M^3 \to R$, definidas localmente em M, por

$$u := \omega_{12}(e_3) \ \text{ e } \ v := e_2(\log \lambda) \tag{42}$$

e estudaremos algumas propriedades interessantes dessas funções, as quais terão grande importância nas demonstrações que faremos mais a frente.

Por meio das equações de estrutura e de Codazzi, teremos que

$$e_i(k_j) = (k_i - k_j)\omega_{ij}(e_j), \quad i \neq j, \tag{43}$$

$$(k_1 - k_2)\omega_{12}(e_3) = (k_2 - k_3)\omega_{23}(e_1) = (k_1 - k_3)\omega_{13}(e_2) \tag{44}$$

Para isso, tomemos $X = e_i$ e $Y = e_j, i \neq j$ na equação de Codazzi apresentada em (2.1) e usemos o fato de que $A(e_i) = \lambda_i e_i$ e $A(e_j) = \lambda_i e_j$, daí

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_i} A e_j - \nabla_{e_j} A e_i &= A([e_i, e_j]) \\
&= A(\nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i) \\
&= A(\nabla_{e_i} e_j) - A(\nabla_{e_j} e_i) \\
&= \sum_l^3 \langle A(\nabla_{e_i} e_j), e_l \rangle e_l - \sum_l^3 \langle A(\nabla_{e_j} e_i), e_l \rangle e_l \\
&= \sum_l^3 \langle \nabla_{e_i} e_j, A e_l \rangle e_l - \sum_l^3 \langle \nabla_{e_j} e_i, A e_l \rangle e_l \\
&= \sum_l^3 \langle \nabla_{e_i} e_j, \lambda_l e_l \rangle e_l - \sum_l^3 \langle \nabla_{e_j} e_i, \lambda_l e_l \rangle e_l \\
&= \sum_l^3 \lambda_l \langle \nabla_{e_i} e_j, e_l \rangle e_l - \sum_l^3 \lambda_l \langle \nabla_{e_j} e_i, e_l \rangle e_l.
\end{aligned}$$

Desenvolvendo o membro da esquerda, temos

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_i} A e_j - \nabla_{e_j} A e_i &= \nabla_{e_i} \lambda_j e_j - \nabla_{e_j} \lambda_i e_i \\
&= \lambda_j \nabla_{e_i} e_j + e_i(\lambda_j) e_j - \lambda_i \nabla_{e_j} e_i - e_j(\lambda_i) e_i.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lambda_j \nabla_{e_i} e_j + e_i(\lambda_j) e_j - \lambda_i \nabla_{e_j} e_i - e_j(\lambda_i) e_i = \sum_l^3 \lambda_l \langle \nabla_{e_i} e_j, e_l \rangle e_l - \sum_l^3 \lambda_l \langle \nabla_{e_j} e_i, e_l \rangle e_l.$$

Aplicando o produto interno cm e_j e usando a igualdade (17),

$$\begin{aligned}
\lambda_j \langle \nabla_{e_i} e_j, e_j \rangle + e_i(\lambda_j) - \lambda_i \langle \nabla_{e_j} e_i, e_j \rangle &= \lambda_j \langle \nabla_{e_i} e_j, e_j \rangle - \lambda_j \langle \nabla_{e_j} e_i, e_j \rangle \\
e_i(\lambda_j) &= \lambda_i \langle \nabla_{e_j} e_i, e_j \rangle - \lambda_j \langle \nabla_{e_j} e_i, e_j \rangle \\
&= (\lambda_i - \lambda_j) \langle \nabla_{e_j} e_i, e_j \rangle \\
&= (\lambda_i - \lambda_j) \omega_{ij}(e_j),
\end{aligned}$$

donde obtemos, $e_i(k_j) = (k_i - k_j)\omega_{ij}(e_j)$.

Tomando novamente a igualdade

$$\lambda_j \nabla_{e_i} e_j + e_i(\lambda_j) e_j - \lambda_i \nabla_{e_j} e_i - e_j(\lambda_i) e_i = \sum_l^3 \lambda_l \langle \nabla_{e_i} e_j, e_l \rangle e_l - \sum_l^3 \lambda_l \langle \nabla_{e_j} e_i, e_l \rangle e_l$$

para $i = 1, j = 2$ e aplicando o produto interno com e_3, temos

$$\begin{aligned}
\lambda_2\langle\nabla_{e_1}e_2, e_3\rangle - \lambda_1\langle\nabla_{e_2}e_1, e_3\rangle &= \lambda_3\langle\nabla_{e_1}e_2, e_3\rangle - \lambda_3\langle\nabla_{e_2}e_1, e_3\rangle \\
(\lambda_2 - \lambda_1)\langle\nabla_{e_1}e_2, e_3\rangle &= (\lambda_1 - \lambda_3)\langle\nabla_{e_1}e_2, e_3\rangle,
\end{aligned}$$

logo $(k_2 - k_1)\omega_{23}(e_1) = (k_1 - k_3)\omega_{13}(e_2)$.
De modo análogo, agora fazendo $i = 1, j = 3$ e aplicando o produto interno com e_2, obtemos $(k_2 - k_3)\omega_{23}(e_1) = (k_1 - k_3)\omega_{12}(e_3)$.

Por fim, então, temos o desejado

$$(k_1 - k_3)\omega_{13}(e_2) = (k_2 - k_1)\omega_{23}(e_1) = (k_1 - k_3)\omega_{12}(e_3).$$

Como dito, anteriormente, estudaremos algumas propriedades importantes sobre as funções u, v definidas em (42). Faremos isso, em alguns lemas a seguir.

Lema 4.1. *Sejam $\{\omega_{ij}\}$ as formas de conexões, e u, v as funções definidas em (42). Então o seguinte vale:*

i) $\omega_{12}(e_1) = v$, $\quad \omega_{12}(e_2) = 0$, $\quad \omega_{12}(e_3) = u$;

ii) $\omega_{13}(e_1) = \frac{1}{2}e_3(\ln\lambda)$, $\quad \omega_{13}(e_2) = \frac{1}{2}u$, $\quad \omega_{13}(e_3) = -\frac{1}{2}e_1(\ln\lambda)$;

iii) $\omega_{23}(e_1) = u$, $\quad \omega_{23}(e_2) = 0$, $\quad \omega_{23}(e_3) = -v$.

Demonstração. *Como os três itens possuem uma construção similar nas demonstrações, provaremos apenas o item ii), que apresenta igualdades um pouco mais interessantes.*

Para a prova de ii), tomemos $i = 3$ e $j = 1$ em 44, daí

$$e_3(k_1) = (k_3 - k_1)\omega_{31}(e_1),$$

como $k_1 = \lambda > k_2 = 0 > k_3 = -\lambda$, temos

$$e_3(\lambda) = -2\lambda\omega_{31}(e_1)\ .$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\omega_{31}(e_1) &= -\frac{e_3(\lambda)}{2\lambda} \\
&= -\frac{1}{2}e_3(\ln\lambda).
\end{aligned}$$

Por fim, temos

$$\omega_{13}(e_1) = \frac{1}{2}e_3(\ln\lambda)\ .$$

Analogamente, fazendo $i = 1$ e $j = 2$ em 44, temos

$$(k_1 - k_3)\omega_{13}(e_2) = (k_1 - k_2)\omega_{12}(e_3)$$

e

$$2\lambda\omega_{13}(e_2) = \lambda u.$$

Logo,

$$\omega_{13}(e_2) = \frac{1}{2}u.$$

Usando novamente 44, faremos $i = 1, j = 3$. Assim,

$$e_1(k_3) = (k_1 - k_3)\omega_{13}(e_3)$$

donde,

$$e_1(-\lambda) = 2\lambda\omega_{13}(e_3).$$

Logo

$$\begin{aligned} \omega_{13}(e_3) &= -\frac{e_1(\lambda)}{2\lambda} \\ &= -\frac{1}{2}e_1(\ln\lambda). \end{aligned}$$

■

Lema 4.2. *Em posse do referencial ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ e das funções u, v, já definidas anteriormente. Vamos mostrar que valem as seguintes igualdades:*
i) $e_2(v) = v^2 - u^2$;
ii) $e_1(u) = e_3(v)$;
iii) $e_2(u) = 2uv$;
iv) $e_3(u) = -e_1(v)$.

Para as demonstrações, utilizaremos as equações de estrutura (40) e a relação (34).

Demonstração. *i) Façamos $X = e_1$ e $Y = e_2$. Daí, temos:*

$$\begin{aligned} d\omega_{12}(e_1, e_2) &= \omega_{11} \wedge \omega_{12}(e_1, e_2) + \omega_{12} \wedge \omega_{22}(e_1, e_2) + \omega_{13} \wedge \omega_{32}(e_1, e_2) - k_1k_2\omega_1 \wedge \omega_2(e_1, e_2) \\ &= \omega_{13} \wedge \omega_{32}(e_1, e_2) - k_1k_2\omega_1 \wedge \omega_2(e_1, e_2) \\ d\omega_{12}(e_1, e_2) &= e_1\omega_{12}(e_2) - e_2\omega_{12}(e_1) - \omega_{12}([e_1, e_2]), \end{aligned}$$

assim

$$e_1\omega_{12}(e_2) - e_2\omega_{12}(e_1) - \omega_{12}([e_1, e_2]) = \omega_{13} \wedge \omega_{32}(e_1, e_2) - k_1k_2\omega_1 \wedge \omega_2(e_1, e_2).$$

Pelo obtido, precisamos calcular os colchetes dos campos. Usando a definição, temos,

$$\begin{aligned}[e_1, e_2] &= \nabla_{e_1} e_2 - \nabla_{e_2} e_1 \\ &= \omega_{21}(e_1)e_1 + \omega_{23}(e_1)e_3 - \omega_{12}(e_2)e_2 - \omega_{13}(e_2)e_3 \\ &= -ve_1 + ue_3 - \frac{1}{2}ue_3 \\ &= -ve_1 + \frac{1}{2}ue_3.\end{aligned}$$

Substituindo os valores obtidos dos colchetes e eliminando os termos nulos, teremos

$$\begin{aligned}-e_2\omega_{12}(e_1) - \omega_{12}(-ve_1 + \frac{1}{2}ue_3) &= \omega_{13}(e_1)\omega_{32}(e_2) - \omega_{13}(e_2)\omega_{32}(e_1) \\ &= \omega_{13}(e_2)\omega_{23}(e_1) \\ -e_2(v) + v\omega_{12}(e_1) - \frac{1}{2}u\omega_{12}(e_3) &= \frac{1}{2}u.u \\ -e_2(v) + v^2 - \frac{1}{2}u^2 &= \frac{1}{2}u^2.\end{aligned}$$

Finalmente, $e_2(v) = v^2 - u^2$.

ii) Seguindos passos do item i)

$$e_1\omega_{12}(e_3) - e_3\omega_{12}(e_1) - \omega_{12}([e_1,\ e_3]) = \omega_{13} \wedge \omega_{32}(e_1,\ e_3) - k_1k_2\omega_1 \wedge \omega_2(e_1,\ e_3)$$

daí,

$$e_1\omega_{12}(e_3) - e_3\omega_{12}(e_1) - \omega_{12}([e_1,\ e_3]) = \omega_{13}(e_1)\omega_{32}(e_3) - \omega_{13}(e_3)\omega_{32}(e_1).$$

Calculamos então os colchetes,

$$\begin{aligned}[e_1,\ e_3] &= \nabla_{e_1} e_3 - \nabla_{e_3} e_1 \\ &= \omega_{31}(e_1)e_1 + \omega_{32}(e_1)e_2 - \omega_{12}(e_3)e_2 - \omega_{13}(e_3)e_3 \\ &= -ve_1 + ue_3 - \frac{u}{2}e_3 \\ &= -\frac{1}{2}e_3(\ln\lambda)e_1 - ue_2 - ue_2 + \frac{1}{2}e_1(\ln\lambda)e_3 \\ &= -\frac{1}{2}e_3(\ln\lambda)e_1 - 2ue_2 + \frac{1}{2}e_1(\ln\lambda)e_3.\end{aligned}$$

Substituindo os valores e organizando os termos, teremos

$$\begin{aligned}e_1(v) - e_3(v) - \omega_{12}(\frac{1}{2}e_3(\ln\lambda)e_1 - 2ue_2 + \frac{1}{2}e_1(\ln\lambda)e_3) &= \frac{1}{2}e_3(\ln\lambda)v - \frac{1}{2}e_1(\ln\lambda)u \\ e_1(v) - e_3(v) + \frac{1}{2}e_3(\ln\lambda)v - \frac{1}{2}e_1(\ln\lambda)u &= \frac{1}{2}e_3(\ln\lambda)v - \frac{1}{2}e_1(\ln\lambda)u.\end{aligned}$$

Fornecendo, ao final, $e_1(u) = e_3(v)$.

iii) Assim como nos itens anteriores,

$$e_1\omega_{23}(e_2) - e_2\omega_{23}(e_1) - \omega_{23}([e_1,\ e_2]) = \omega_{21} \wedge \omega_{13}(e_1,\ e_2) - \lambda_2\lambda_3\omega_2 \wedge \omega_3(e_1,\ e_2).$$

Resolvendo os colchetes,

$$\begin{aligned}
[e_2,\ e_3] &= \nabla_{e_2}e_3 - \nabla_{e_3}e_2 \\
&= \omega_{31}(e_2)e_1 + \omega_{32}(e_2)e_2 - \omega_{21}(e_3)e_1 - \omega_{23}(e_3)e_3 \\
&= -\frac{u}{2}e_1 + ue_1 + ve_3 \\
&= \frac{u}{2}e_1 + ve_3.
\end{aligned}$$

Substituindo,

$$\begin{aligned}
-e_2(u) - \omega_{23}(-ve_1 + \frac{u}{2}e_3) &= \omega_{21}(e_1)\omega_{13}(e_2) - \omega_{21}(e_2)\omega_{13}(e_1) \\
-e_2(u) + v\omega_{23}(e_1) - \frac{u}{2}\omega_{23}(e_3) &= -v\frac{u}{2} \\
-e_2(u) + vu - \frac{1}{2}uv &= -\frac{1}{2}uv.
\end{aligned}$$

Logo $e_2(u) = 2uv$.

iv) Novamente,

$$e_1\omega_{23}(e_3) - e_3\omega_{23}(e_1) - \omega_{23}([e_1,\ e_3]) = \omega_{21} \wedge \omega_{13}(e_1,\ e_3) - \lambda_2\lambda_3\omega_2 \wedge \omega_3(e_1,\ e_3).$$

Como já calculamos o colchete $[e_1,\ e_3]$ *no item ii), substituimos,*

$$\begin{aligned}
-e_1(v) - e_3(u) - \omega_{23}(\frac{1}{2}e_3(\ln\lambda)e_1 - 2ue_2 + \frac{1}{2}e_1(\ln\lambda)e_3) &= \omega_{21}(e_1)\omega_{13}(e_3) - \omega_{21}(e_3)\omega_{13}(e_1) \\
-e_1(v) - e_3(u) + \frac{1}{2}e_3(\ln\lambda)u + \frac{1}{2}e_1(\ln\lambda)v &= v\frac{1}{2}e_1(\ln\lambda) + u\frac{1}{2}e_3(\ln\lambda)
\end{aligned}$$

Logo, $e_3(u) = -e_1(v)$.

$\blacksquare$

5 RESULTADOS PRINCIPAIS

Teorema 5.1. *Sejam M^3 uma variedade Riemanniana orientada,completa e $f : M^3 \to \mathbb{R}^4$ uma imersão isométrica mínima com curvatura de Gauss-Kronecker identicamente zero e segunda forma fundamental não se anulando em nenhum ponto de M. Se a curvatura escalar de M^3 é limitada inferiormente, então $f(M^3)$ se decompõe como o produto Euclidiano $L^2 \times \mathbb{R}$, onde L^2 é uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^3$, com curvatura Gaussiana limitada inferiormente.*

Demonstração. *Na primeira parte dessa demonstração, nossa estratégia é usar o teorema da decomposição de de Rham para decompor M^3 como produto de duas suvariedades maximais.*

Suponhamos então M^3 simplesmente conexa. Tomamos um referencial ortonormal global $\{e_1, e_2, e_3\}$, de campos de vetores associados aos autovalores $k_1 = \lambda, k_2 = 0, k_3 = -\lambda$, ou seja, $A_\eta(e_1) = k_1e_1, A_\eta(e_2) = k_2e_2$ e $A_\eta(e_3) = k_3e_3$, onde $A_\eta : T_pM \to T_pM$ é operador de forma (Weingarten) na direção de $\eta \in (T_pM)^\perp$. Consideramos, a partir daí, $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ e $\{\omega_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, 3$, a base dual e as formas de conexão, respectivamente, em M, associadas ao nosso referencial $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$.

Com isso, calculamos a curvatura escalar S,

$$S(p) = 2(k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3) = -2\lambda^2$$

e as curvaturas de Ricci de M^3

$$\begin{aligned} Ric_p(e_1) &= sec(e_1, e_2) + sec(e_1, e_3) = -\lambda^2 \\ Ric_p(e_2) &= sec(e_2, e_1) + sec(e_2, e_3) = 0 \\ Ric_p(e_3) &= sec(e_3, e_1) + sec(e_3, e_2) = -\lambda^2. \end{aligned}$$

Donde, pela hipótese da curvatura escalar, concluímos também que a curvatura de Ricci é limitada inferiormente.

Afimação 5.1. *As funções u e v, definidas em (42), são identicamente nulas.*

Demonstração. Mostraremos, primeiramente, que u, v são hamônicas e, usando o lema 3.3, concluímos a prova da afirmação.

De fato, da definição do Laplaciano apresentada em (2.7), temos que

$$\Delta v = \sum_{i=1}^{3}(e_ie_i(v) - (\nabla_{e_i}e_i)(v)).$$

Da relação $\nabla_{e_i} e_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}(e_i) e_j$, fazemos

$$\begin{aligned}
\Delta v &= \sum_{i=1}^{3} e_i e_i(v) - \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}(e_i) e_j(v) = \sum_{j=1}^{3} (e_j e_j(v) - \omega_{ij}(e_i) e_j(v)) \\
&= e_1 e_1(v) + e_2 e_2(v) + e_3 e_3(v) - (\omega_{21}(e_2) + \omega_{31}(e_3)) e_1(v) \\
&\quad -(\omega_{12}(e_1) + \omega_{32}(e_3)) e_2(v) - (\omega_{13}(e_1) + \omega_{23}(e_2)) e_3(v)
\end{aligned}$$

substituindo os valores das formas de conexão, obtemos

$$\Delta v = e_1 e_1(v) + e_2 e_2(v) + e_3 e_3(v) - \frac{1}{2} e_1(\ln \lambda) e_1(v) - 2 e_2(v) - \frac{1}{2} e_3(\ln \lambda) e_3(v).$$

Usando as igualdades que obtemos no lema anterior

$$\begin{aligned}
e_1 e_1(v) &= -e_1 e_3(u), \\
e_2 e_2(v) &= 2 v e_2(v) - 2 u e_2(v), \\
&= 2v^3 - 6vu^2, \\
e_3 e_3(v) &= e_3 e_1(u).
\end{aligned}$$

Daí,

$$\Delta v = -e_1 e_3(u) + e_3 e_1(u) + 2v^3 - 6vu^2 - \frac{1}{2} e_1(\ln \lambda) e_1(v) - 2 e_2(v) - \frac{1}{2} e_3(\ln \lambda) e_3(v).$$

Agora, observamos o seguinte fato da definição do colhete,

$$\begin{aligned}
[e_1, e_3] = -(-e_1 e_3(u) + e_3 e_1(u)) &= -\frac{1}{2} e_1(\ln \lambda) e_1(v) - 2 e_2(v) - \frac{1}{2} e_3(\ln \lambda) e_3(v) \\
&= -\frac{1}{2} e_1(\ln \lambda) e_1(v) - 4u^2 v - \frac{1}{2} e_3(\ln \lambda) e_3(v).
\end{aligned}$$

Isso nos dá

$$\begin{aligned}
\Delta v &= 2v^3 - 6u^2 v + 4u^2 v - 2 e_2(v) \\
&= 2v^3 - 6u^2 v + 4u^2 v - 2v(v^2 - u^2) \\
&= 2v^3 - 6u^2 v + 4u^2 v - 2v^3 - 2u^2 v.
\end{aligned}$$

Portanto, $\Delta v = 0$. De modo análogo, mostramos que $\Delta u = 0$.

Usando a definição e as propriedades do gradiente, teremos

$$\begin{aligned}\Delta(u^2+v^2) &= \Delta u^2 + \Delta v^2\\ &= 2u\Delta u + 2v\Delta v + 2\|\nabla u\|^2 + 2\|\nabla v\|^2\\ &= 2(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2)\end{aligned}$$

pois, tinhamos que $\Delta u = \Delta v = 0$.
Daí,

$$\begin{aligned}\Delta(u^2+v^2) &= 2(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2)\\ &\geq 2((e_2(u))^2 + (e_2(v))^2)\\ &= 2((2uv)^2 + (v^2-u^2)^2)\\ &= 2(v^4 + 2u^2v^2 + u^4) = 2(u^2+v^2)^2.\end{aligned}$$

Assim,

$$\Delta(u^2+v^2) \geq 2(u^2+v^2)^2.$$

Fazendo $g = (u^2+v^2)$ e $c = 2$, o lema 3.3 nos diz que (u^2+v^2) é identicamente nula e, portanto, $u = v \equiv 0$, chegando ao desejado.

□

Sejam agora $p \in M^3$ e D_1 e D_2 distribuições em M^3, de dimensões 1 e 2, respectivamente, onde $D_1(p)$ é gerada por e_2 e $D_2(p)$ por e_1 e e_3. Dessa forma, temos que $T_pM = D_1(p) \oplus D_2(p)$. Partindo disso, mostremos que $D_1(p)$ e $D_2(p)$ são involutivas *e* paralelas.

Usando as equações que calculamos para os colchetes, obtemos que $[e_1, e_3] \in D_2(p)$, pois

$$\begin{aligned}[e_1,\ e_3] &= -\frac{1}{2}e_3(\ln\lambda)e_1 - 2ue_2 + \frac{1}{2}e_1(\ln\lambda)e_3\\ &= -\frac{1}{2}e_3(\ln\lambda)e_1 + \frac{1}{2}e_1(\ln\lambda)e_3. \qquad (u \equiv 0)\end{aligned}$$

Logo, $D_2(p)$ é involutiva.

Para mostrarmos que $D_2(p)$ é paralela, usamos as igualdades calculadas, anteriormente, no lema 4.1 e a relação $\nabla_{e_k}e_i = \sum_j^3 \omega_{ij}(e_k)e_j$ com $i = 1, 3$ e $k = 1, 2, 3$, obtida em (17). Dessa forma, obtemos que $\nabla_{e_k}e_i \in D_2(p)$ e portanto, $D_2(p)$ também é paralela.

Como $D_1(p)$ tem dimensão 1, então D_1 é involutiva. Valendo-se, novamente, da igualdade $\nabla_{e_k}e_2 = \sum_2^3 \omega_{ij}(e_k)e_j$ com $k = 1, 2, 3$ e do lema 4.1, temos que $\nabla_{e_k}e_2 \in D_1(p)$ e assim concluímos que $D_1(p)$ é paralela.

Sendo assim, temos M^3 simplesmente conexa com duas distribuições D_1 e D_2, ambas paralelas e involutivas, de dimensões 1 e 2, respectivamente, e $T_pM = D_1(p) \oplus D_2(p)$. O teorema da decomposição de de Rham 2.5 nos diz então que $M^3 = M_1^1 \times M_2^2$, onde M_1^1 e M_2^2 são subvariedades integrais maximais de $D_1(p)$ e $D_2(p)$.

Nossa intenção agora é mostrar que $f(M^3) = \mathcal{L}^2 \times \mathbb{R}$, com $\mathcal{L}^2$ uma superfície mínima, completa de $\mathbb{R}^3$, com curvatura Gaussiana limitada inferiormente.

Tomamos $p = (p_1, p_2) \in M_1^1 \times M_2^2$. Definimos então as imersões $f_1 = f \circ i_1 : M_1 \to \mathbb{R}^4$ e $f_2 = f \circ i_2 : M_2 \to \mathbb{R}^4$, onde $i_1 : M_1 \hookrightarrow M_1 \times M_2$ e $i_2 : M_2 \hookrightarrow M_1 \times M_2$ são as aplicações de inclusão; $\overline{\nabla}$, $\widetilde{\nabla}$ e $\widehat{\nabla}$ as conexões de $\mathbb{R}^4, f_1$ e f_2, respectivamente; por fim chamamos B_1 e B_2 as aplicações bilineares associadas às segundas formas fundamentais de f_1 e f_2, respectivamente.

Usando a relação de Gauss das conexões para a nossa imersão f, temos que

$$\overline{\nabla}_{e_2} e_i = \nabla_{e_2} e_i + \langle A_\eta(e_2), e_i \rangle \eta.$$

Já temos que $A_\eta(e_2) = 0$, e calculando $\nabla_{e_2} e_i = \sum_j \omega_{ij}(e_2) e_j$, mostramos que $\nabla_{e_2} e_i = 0$. Isso nos dá que

$$\overline{\nabla}_{e_2} e_i = 0.$$

Raciocinando similarmente para a imersão f_1, temos

$$\overline{\nabla}_{e_2} e_2 = \widetilde{\nabla}_{e_2} e_2 + B_1(e_2, e_2).$$

Pelo obtido anteriormente, já temos $\overline{\nabla}_{e_2} e_2 = 0$. Daí, $\widetilde{\nabla}_{e_2} e_2 = 0$ e $B_1(e_2, e_2) = 0$. Dessa conclusão sobre B_1 obtemos que f_1 é totalmente geodésica e, portanto, $f_1(M_1) = R$.

Nosso objetivo agora é reduzir a codimensão de f_2, a fim de que $\mathcal{L}^2 = f_2(M_2) \subset \mathbb{R}^3$. Para isso, seguimos o mesmo processo da relação de Gauss com f_2. Assim,

$$\overline{\nabla}_X Y = \widehat{\nabla}_X Y + B_2(X, Y), \quad X, Y \in T_{p_2} M_2.$$

Escolhemos $X = e_k$ e $Y = e_i$, $i, k = 1, 3$, e aplicamos o produto interno com e_2. Daí,

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{e_k} e_i &= \widehat{\nabla}_{e_k} e_i + B_2(e_k, e_i), \\ \langle \overline{\nabla}_{e_k} e_i, e_2 \rangle &= \langle \widehat{\nabla}_{e_k} e_i, e_2 \rangle + \langle B_2(e_k, e_i), e_2 \rangle. \end{aligned}$$

Como e_2 é normal a f_2, então $\langle \widehat{\nabla}_{e_k} e_i, e_2 \rangle = 0$. Usando a compatibilidade da conexão de $\mathbb{R}^4$,

$$\langle \overline{\nabla}_{e_k} e_i, e_2 \rangle = -\langle e_i, \overline{\nabla}_{e_k} e_2 \rangle.$$

Do que já obtemos antes para f, $\overline{\nabla}_{e_k}e_2 = 0$. Dessa forma, temos

$$\langle B_2(e_k, e_i), e_2\rangle = 0, \quad e \;\; f_2 \text{ é mínima.}$$

Olhando agora para o primeiro espaço normal de f_2, em $p_2 \in M_2$,

$$\begin{aligned} N_1(p_2) &= \{B_2(X,Y);\; X, Y \in T_{p_2}M_2\} \\ &= \{\langle B_2(X,Y), \eta\rangle\eta + \langle B_2(X,Y), e_2\rangle e_2;\; X, Y \in T_{p_2}M_2\} \\ &= \{\langle B_2(X,Y), \eta\rangle\eta;\; X, Y \in T_{p_2}M_2\}. \end{aligned}$$

Disso obtemos que N_1 é um subfibrado de $(T_{p_2}M_2)^{\perp}$ de posto 1, pois para $p_2 \in M_2$, o espaço $N_1(p_2)$ é gerado por $\eta \in (T_{p_2}M_2)^{\perp}$.

Agora mostramos que N_1 é um subfibrado paralelo de $(T_{p_2}M_2)^{\perp}$, isto é, para $Y \in N_1$ e $X \in TM_2$, tem-se $\widehat{\nabla}^{\perp}_X Y \in N_1$.

Sejam, então, $Y = \eta$ e $X = e_k$, $k = 1, 3$. Pela relação do operador de forma, temos

$$0 = \overline{\nabla}_{e_k}e_2 = -A_\eta(e_k) + \widehat{\nabla}^{\perp}_X Y \in N_1.$$

Derivando o produto $\langle e_2, \eta\rangle = 0$, obtemos

$$\langle \widehat{\nabla}^{\perp}_{e_k}e_2, \eta\rangle + \langle e_2, \widehat{\nabla}^{\perp}_{e_k}\eta\rangle = 0.$$

Logo, $\langle e_2, \widehat{\nabla}^{\perp}_{e_k}\eta\rangle = 0$ e assim, $\widehat{\nabla}^{\perp}_{e_k}\eta = 0$.

Assim, mostramos que N_1 é um subfibrado paralelo de $(T_{p_2}M_2)^{\perp}$ de posto 1. Pelo teorema 2.3, podemos reduzir a codimensão de $f_2 : M_2 \to \mathbb{R}^4$ para 1, ou seja, $\mathcal{L}^2 = f_2(M_2) \subset \mathbb{R}^3$.

Por fim, obtemos $f(M^3) = \mathcal{L}^2 \times \mathbb{R}$, com $\mathcal{L}^2$ uma superfície mínima de $\mathbb{R}^3$, com curvatura Gaussiana limitada inferiormente.

Por fim, analisamos o caso em que M^3 não é simplesmente conexa. Tomamos, nesse caso, $\widetilde{M}^3$ o recobrimento universal de M^3 com $\pi : \widetilde{M}^3 \to M^3$ isometria local pela métrica de recobrimento. Definimos então $\widetilde{f} = f \circ \pi : \widetilde{M}^3 \to \mathbb{R}^4$ hipersuperfície mínima com curvatura de Gauss-Kronecker nula. Além disso, a Ricci de $\widetilde{M}^3$ é limitada inferiormente e $\widetilde{B}$, segunda forma de $\widetilde{f}$, é não nula em $\widetilde{M}^3$. Dessa forma, fazemos para $\widetilde{M}^3$ a mesma construção do caso em que M^3 é simplesmente conexa. Como π é uma isometria local, temos que $f(M^3)$ é localmente o produto $\mathcal{L}^2 \times \mathbb{R}$.

■

Para o segundo teorema principal, usaremos importante resultado sobre hipersupersícies de $\mathbb{R}^{n+1}$, cuja prova pode ser encontrada em (SMITH and XAVIER (1987)).

Proposição 5.1. ***(Teorema das curvaturas principais)*** *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ hiper-*

superfície completa, orientada, que não seja um hiperplano. Seja A_η o operador linear, auto-adjunto, associado a segunda forma fundamental, com respeito ao campo unitário normal η. Seja $\Lambda \subset \mathbb{R}$ o conjunto de autovalres não nulos de A e seja $\Lambda^\pm = \Lambda \cap \mathbb{R}^\pm$, então:

i *Se Λ^+ e Λ^- são não vazios, então $inf \Lambda^+ = \sup \Lambda^- = 0$.*

ii *Se Λ^+ ou Λ^- é vazio, então o fecho $\overline{\Lambda}$ de Λ é conexo.*

Teorema 5.2. *Seja M^3 uma variedade Riemanniana orientada,completa e $f : M^3 \to \mathbb{R}^4$ uma imersão isométrica mínima com curvatura de Gauss-Kronecker constante. Então a curvatura de Gauss-Kronecker é identicamente zero.*

Demonstração. *Suponhamos por absurdo que $K \neq 0$, podemos então escolher uma orientação em que $K > 0$ e $k_1 > 0$. Dessa forma, $k_2 k_3 > 0$. Como f é mínima, temos que $k_2 + k_3 = -k_1 < 0$, logo tomamos $0 > k_2 \geq k_3$. Podemos fazer ainda que $k_1 = -k_2 - k_3 = |k_2| + |k_3|$, daí $k_1 \geq |k_i|, i = 2, 3$. Pelo teorema 5.1, item i), existe uma sequência $\{p_n\}$ de M tal que $k_1(p_n) \to 0$. Do que obtemos de $k_1 \geq |k_i|, i = 2, 3$, temos também que $k_2(p_n) \to 0$ e $k_3(p_n) \to 0$. Portanto, $K(p_n) \to 0$. Como, por hipótese, a curvatura de Gauss-Kronecker $K(p)$ é constante para todo $p \in M$ concluímos que $K \equiv 0$, contradição. O caso $K < 0$ é feito de modo análogo.*

$\blacksquare$

REFERÊNCIAS

CHENG, Q. M. Curvature of complete hypersurfaces in spaces forms. **Proc. R. Soc. Edinb. Sect.**, v. A 134, p. 55–68, 2004.

CHENG, S. Y.; Yau, S. T. Maximal space-like hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces. **Ann. of Math.**, v. (2) 104, p. 407–419, 1976.

DAJCZER, M. Submanifolds and Isometric Immersions. **Mathematics Lectures Series**, v. 13, p. 3–55, 1990.

DAJCZER, M.; GROMOLL, D. Gauss parametrizations and rigity aspects of submanifolds. **J. Differential Geom.**, v. 22, p. 1–12, 1985.

DO CARMO, M. P. **Método do Referencial Móvel**. Rio de Janeiro: IMPA, III Escola Latino-Americana de Matemática, 1976.

DO CARMO, M. P. **Geometria Riemanniana**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, Projeto Euclides, 2005.

KOBAYASHI, K., S. NOMIZU. Foundations of Differential Geometry. **Wiley Classics Library**, v. 1, p. 187–189, 1996.

LEE, J. M. **Introduction to Smooth Manifolds**. New York: Springer, 2003.

NADIRASHVILI, N. Hadamard's and Calabi-Yau's conjectures on negatively curved and minimal surfaces. **Invent. Math.**, v. 126, p. 457–465, 1996.

NISHIKAWA, S. On maximal spacelike hypersurfaces in a Lorentz Manifold. **Nagoya Math. J.**, v. 95, p. 117–124, 1984.

O'NEILL, B. **Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity**. New York: Academic Press, 1983.

SAKAI, T. **Riemannian Geometry**. American Mathematical Society, 1996.

SMITH, B.; XAVIER, F. Efimov's theorem in dimension greater than two. **Invent. Math.**, v. 90, p. 443–450, 1987.