UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

RODRIGO DOS SANTOS ALMEIDA

ASPECTOS GERAIS DA TEORIA DE KALUZA-KLEIN E MECANISMO DE COMPACTIFICAÇÃO

FORTALEZA

2016

RODRIGO DOS SANTOS ALMEIDA

ASPECTOS GERAIS DA TEORIA DE KALUZA-KLEIN E MECANISMO DE COMPACTIFICAÇÃO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho

Coorientador: Prof. Dr. Marcony Silva Cunha

FORTALEZA
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A45a Almeida, Rodrigo dos Santos.
Aspectos gerais da teoria de Kaluza-Klein e mecanismo de compactificação / Rodrigo dos Santos Almeida. – 2016.
52 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2016.
Orientação: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

1. Gravitação. 2. Dimensões extras. 3. Kaluza-Klein. 4. Compactificação de Fluxo. 5. Formas diferenciais. I. Título.

CDD 530

RODRIGO DOS SANTOS ALMEIDA

ASPECTOS GERAIS DA TEORIA DE KALUZA-KLEIN E MECANISMO DE COMPACTIFICAÇÃO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 16/08/2016

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Makarius Oliveira Tahim
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Prof. Dr. Marcony Silva Cunha
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Prof. Dr. Ivan Carneiro Jardim
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Dedico este trabalho
a minha Família
e
Amigos.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por ter me dados tudo que eu precisava.

À minha esposa Fabíola, pelo amor, apoio e compreensão. Sempre te amarei.

À minha filha Mariana (bola), pois você é minha segunda razão de viver.

Aos meus pais Mariano Alves de Almeida e Maria José dos Santos Almeida, pelo grade apoio e carinho.

Ao meu querido irmão Cicero dos Santos Almeida, pela confiança.

Ao professor Dr. Geová Maciel pela paciência, orientação e pelo voto de confiança que teve em mim depositado.

Ao professor Dr. Ricardo Renan pela sua disponibilidade em me ajudar.

Ao professor Dr. Marcony Silva Cunha pela coorientação.

Aos amigos (Irmãos) de longa data Nailson Vasconcelos e Keilla Façanha, pela grade ajuda que me deram desde sempre.

Aos novos amigos ou podemos dizer família do CREU: Antonio Ribeiro (Raul), Francisco Emmanoel, Emanuel Wendel, Jason Moraes, Márcio Viana e Wendel Macedo. Pois posso afirma com toda convicção que se não fosse por eles jamais teria conseguido fazer esse trabalho.

Aos novos membros do CREU: Ivan Júnior e Felipe Fernandes.

À coordenação do Programa de Pós-graduação em Física pela logística no desenvolvimento desse trabalho.

Aos demais professores e funcionários do Departamento da Física que participaram diretamente ou indiretamente de minha formação.

À CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho explora-se a teoria de Kaluza-Klein que propõe unificar o eletromagnetismo com a gravitação em uma abordagem clássica mediante a adição de uma dimensão extra tipo espaço, assim obtendo uma variedade composta por 4-dimensões espaciais e 1-dimensão temporal. Será visto como obter as equações de Einstein neste modelo e assim explanar suas consequências e restrições quando é feita uma redução dimensional para resgatar as equações já conhecidas em 4-dimensões. Será analisado a compactifcação dessa dimensão extra e será usando um mecanismo de compactificação espontânea para o caso onde teremos mais de uma dimensão extra na teoria, mecanismo este conhecido por compactificação de Fluxo. Esse mecanismo de compactificação se da por meio da introdução de um tensor totalmente antissimétrico nas equações de Einstein em 5-dimensões. Por ultimo foi abordado a teoria de Kaluza-Klein usando o formalismos de formas diferenciais, mostrando ser uma poderosa ferramenta para tal estudo uma vez que sua álgebra nos permitiu obter os mesmos resultados em um menor tempo.

Palavras-chave: Gravitação. Dimensões Extras. Kaluza-Klein. Compactificação de Fluxo. Formas Diferenciais.

ABSTRACT

In this work we will explore the theory of Kaluza-Klein, that proposes to unify the electromagnetism with the gravitation in one classical approach through the addition of one extra dimension (space type), thus obtaining one composed variety by 4 spatial dimensions and 1 time dimension. We will see how to obtain Einstein's equations in this model and ,thereby, explain their consequences and restrictions when we do one dimensional reduction in order to rescue the known equations in 4 dimensions. We will analyse the compaction of this extra dimension and we will use one mechanism of spontaneous compaction in the case where we will have more than one extra dimension in the theory, this mechanism is known as flux compaction. This mechanism of compaction is done through the introduction of a tensor totally antisymmetric in the Eistein's equations in 5 dimensions. Finally, we will approach the Kaluza-Klein theory using the formalism of differential forms, showing that it is a powerful tool in this study once that its algebra allowed us to obtain the same results in less time.

Keywords: Gravitation.. Extra Dimensions.. Kaluza-Klein. Flux Compactification. Differential Forms..

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Todos os fenômenos Físicos até o presente momento são regidos por quatro grandes tipos de interações, ou como popularmente são chamadas, “forças fundamentais”que são as força nuclear forte, nuclear fraca, eletromagnética e por último, mas não menos importante, a força gravitacional. É visto que com o passar do tempo os físicos conseguiram organizar e agrupar vários fenômenos que pareciam, a primeiro momento, distintos e incompatíveis em apenas quatro grandes forças onde podem ser assim descritos inúmeros eventos. Porém esse desejo de simplificar, ou seja, agregar o conhecimento ou a maneira de como se descreve os fenômenos da natureza usando a menor quantidade de regras ou restrições já vem desde os primórdios da ciência. Isso firmou-se mais ainda no século XIV, quando o filósofo e frade William de Ockham, afirmou um princípio simples, mas de grande importância, conhecido como “ Navalha de Ockhan”. Em suas próprias palavras ”Se em tudo o mais forem idênticos às várias explicações de um fenômeno, a mais simples é a melhor”[1]. Em outras palavras uma teoria com menos premissas que explica os mesmos fatos é melhor. Assim é visto que esse princípio está ligado diretamente com o conceito de unificação na Física atual.

A unificação se resume como dito anteriormente em poder descrever todos os fenômenos da natureza por meio de apenas uma única teoria e que em casos particulares decaia nas quatro interações conhecidas hoje, interações essa que são descritas pelo modelo padrão[1]. No decorrer dos últimos séculos foi visto vários avanços neste contexto, antes de se conseguir descrever os fenômenos naturais por apenas quatro interações teve-se algumas grandes unificações como a de Galileu que conseguiu provar que as leis do Céu e da Terra eram as mesmas. Outra grande unificação foi obtida graças a Maxwell que conseguiu provar que fenômenos elétricos e magnéticos na verdade eram manifestações da mesma grandeza, hoje denominada interação eletromagnética e com isso provou que a luz era uma onda eletromagnética, assim unificando a óptica geométrica com o eletromagnetismo [2]. Já com as quatro interações fundamentais estabelecidas veio então o pensamento de que essas quatro interações poderiam ser na verdade manifestações de uma única grandeza física. Assim na tentativa de unificar essas quatro interações foi que em 1979, os físicos Sheldon Glashow, Abdus Salam, e Steven Weinberg ganharam o prêmio Nobel por terem contribuído para a unificação do eletromagnetismo com a força nuclear fraca conhecida hoje como força Eletrofraca [3]. Posteriormente vem a Teoria de Grande Unificação (TGU)

[1]O Modelo Padrão da física de partículas é uma teoria que descreve as forças fundamentais forte, fraca e eletromagnética, bem como as partículas fundamentais que constituem toda a matéria.

que tenta descrever a unificação das interações Eletrofracas com a interação forte, porém, a interação gravitacional é sempre deixada de fora por motivos de incompatibilidade com as outras interações. Este trabalho vem justamente disserta a teoria de Kaluza-Klein que tentar unificar a interação gravitacional com a eletromagnética adicionando uma dimensão espacial extra em uma abordagem clássica, assim não tendo o mesmo problema da TGU.

Theodor Kaluza e Oscar Klein por volta de 1920, na tentativa de unificação da gravitação com o eletromagnetismo [4] acabaram sendo uns dos pioneiros no contexto de teorias com dimensão extras tendo sidos precedidos apenas pelo Físico finlandês Gunnar Nordstöm (1881-1923) [5], [6]. Nordstöm em 1914 propôs uma teoria na qual a gravitação é descrita por um campo escalar acoplado ao traço do tensor energia-momento, adicionando uma dimensão extra ao espaço-tempo 4-D, obtendo uma variedade 5-D. Devido inúmeras incompatibilidade a teoria de Nordstöm acabou sendo deixada de lado. A ideia de Kaluza e Klein foi considera uma gravitação em um espaço com cinco dimensões, sendo quatro espaciais e uma temporal que ao fazemos uma redução da teoria para 4-D será obtido a Gravitação e o Eletromagnetismo em 4-D. Para explicar o fato de não existir nenhum efeito detectado que revele a existência dessas dimensões extras, o modelo de Kaluza-Klein (KK) leva em consideração que essa dimensão era *compacta*. Embora esse modelo fosse completamente inovador a teoria de Kaluza-Klein apresentava certos problemas. Dentre eles pode-se destacar a falta de estabilidade do raio da dimensão extra e também a presença de um campo escalar na teoria quadrimensional que entra em contradição com as equações de Maxwell [7]. A teoria de Kaluza-Klein mesmo com problemas teve um papel muito importante pois se tornou base para várias teorias de unificação como a teoria de super-cordas, super-gravidade, teoria M e assim é visto a necessidade de dissertar esse tema.

Neste trabalho será feito uma revisão da teoria de Kaluza-Klein em seus vários aspectos. Abordando-se também um mecanismo de compactificação de dimenção extra e a teoria KK em termos de formas diferenciais mostrando a facilidade de se obter o escalar de Ricci da teoria de forma mais direta.

O trabalho ficou dividida da seguinte forma, no capítulo 2 é apresentado o formalismo das formas diferenciais com o intuito de abordar a teoria KK com essa ferramenta. Em seguida no capítulo 3 se faz uma breve exposição dos fundamentos da Teoria da Relatividade Geral (TRG) e seus principais elementos. No capítulo 4 é introduzido os principais conceitos de dimensão extra e do modelo de Kaluza-Klein, onde será apresentado uma abordagem das ideias principais que deu suporte a teoria, bem como o cálculo da quantidade relevantes para a obtenção da ação de Einstein da teoria, teremos a abordagem do mecanismo de compactificação da dimensão extra e por fim é será encontrado o escalar de Ricci da teoria KK usando formas diferenciais. No ultimo capítulo 5 será feito a exposição de alguns pontos da teoria e sua importância nos dias de hoje, pois ainda é vista como base para as atuais teorias de unificação.

2 FORMAS DIFERENCIAIS

Neste Capítulo será abordado uma poderosa ferramenta para simplificar e facilitar nosso trabalho, que são as formas diferenciais [8] [9]. Elas permitiram diminuir bastante o trabalho de obter algumas propriedades Físicas devido sua simplificação e elegância, mostrando ser fundamental nos capítulos posteriores.

2.1 Definições Básicas

Uma forma diferencial de ordem r, ou uma r-forma, é um tensor totalmente anti-simetrico do tipo $(0,r)$,

$$\omega_r = \frac{1}{r!}\omega_{\mu_1\mu_2...\mu_r}(dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r}). \tag{2.1}$$

onde o símbolo $\wedge$ é o produto Wedge de uma r-forma, definido como um produto tensorial tatalmente anti-simétrico,

$$dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r} = \sum_{P \in S_r} sgn(P) dx^{\mu_{P(1)}} \otimes dx^{\mu_{P(2)}} \otimes ... dx^{\mu_{P(r)}}. \tag{2.2}$$

onde P é um elemento do grupo de permutação S_r (r é o número de elementos do grupo).É possível definir a operação de permutação P como

$$P\omega(a_{\mu_1}, a_{\mu_2}..., a_{\mu_r}) = \omega_{\mu_{P(1)}\mu_{P(2)}...\mu_{P(r)}} \tag{2.3}$$

É possível ainda simetrizar ω, aplicando um operador S tal que

$$S\omega = \frac{1}{r!}\sum_{P \in S_r} P\omega, \tag{2.4}$$

ou anti-simetriza-lo da forma

$$A\omega = \frac{1}{r!}\sum_{P \in S_r} sgn(P)P\omega. \tag{2.5}$$

Um exemplo do produto wedge é

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu dx^\nu - dx^\nu dx^\mu \tag{2.6}$$

O produto wedge satisfaz as seguites propriedades:
$(i)dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r} = 0$, se aparecer índices repetidos.
$(ii)dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r}$ é linear para cada dx^μ.
A equação (2.1) denota que $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r}$ é uma base para r-forma. O espaço vetorial de uma r-forma em um ponto p tangente (ou normal) a variedade $M(p \in M)$ é denotada por $\Omega_p^r(M)$ e a dimensão desse espaço vetorial é

$$dim\Omega_p^r(M) = \frac{M!}{(M-r)!r!} \tag{2.7}$$

Exemplos de formas:

- 0-forma : $\omega_0 = a_0$ (escalar)
- 1-forma : $\omega_1 = \omega_\mu dx^\mu$
- 2-forma : $\omega_2 = \frac{1}{2!}\omega_{\mu\nu}(dx^\mu \wedge dx^\nu)$
- 3-forma : $\omega_3 = \frac{1}{3!}\omega_{\mu\nu\lambda}(dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda)$

Será visto agora como se define o produto exterior de uma q-forma com uma r-forma como : $\Omega_p^q(M) \times \Omega_p^r(M) \to \Omega_p^{q+r}(M)$ como

$$\omega \wedge \xi = \frac{1}{q!r!} \sum_{P \in S_{r+q}} sgn(P)\omega \otimes \xi \tag{2.8}$$

Sejam $\xi \in \Omega_p^q(M), \eta \in \Omega_p^r(M)$ e $\omega \in \Omega_p^S(M)$. vale:

$$\xi \wedge \xi = 0, \text{ se q é ímpar} \tag{2.9}$$

$$\xi \wedge \eta = (-1)^{qr}\eta \wedge \xi \tag{2.10}$$

$$(\xi \wedge \eta) \wedge \omega = \xi \wedge (\eta \wedge \xi) \tag{2.11}$$

Para definirmos uma propriedade muito importante em formas, que é o operador Hodge($\star$), Definimos primeiro o tensor anti-simétrico ε

$$\varepsilon_{a_1 \dots a_\mu} = \begin{cases} +1, & se \quad \{\mu_1 \dots \mu_m\} \quad é \quad uma \quad permutação \quad par \quad de \quad \{1, \dots m\} \\ -1, & se \quad \{\mu_1 \dots \mu_m\} \quad é \quad uma \quad permutação \quad ímpar \quad de \quad \{1, \dots m\} \\ 0, & caso \quad contrario. \end{cases}$$

Por outro lado, denotando g^{-1} o inverso do determinante da métrica, note que

$$\varepsilon^{\mu_1\mu_2 \dots \mu_m} = g^{\mu_1\nu_1} g^{\mu_2\nu_2} \dots g^{\mu_m\nu_m} \varepsilon_{\nu_1\nu_2 \dots \nu_m} = g^{-1} \varepsilon_{\nu_1\nu_2 \dots \nu_m}. \tag{2.12}$$

O operador Hodge é uma aplicação linear $\star$: $\Omega^r(M) \to \Omega^{m-r}(M)$ cuja ação sobre a base de $\Omega^r(M)$ é

$$\star(dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}) = \frac{\sqrt{|g|}}{(m-r)!} \varepsilon^{\mu_1\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_{r+1}\nu_{r+2} \dots \nu_m} dx^{\nu_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m} \tag{2.13}$$

Assim para o caso de uma r-forma do tipo

$$\omega_r = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1\mu_1 \dots \mu_r} (dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}). \tag{2.14}$$

temos

$$\star\omega_r = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1\mu_2 \dots \mu_r} \star (dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}) \tag{2.15}$$

$$= \frac{\sqrt{|g|}}{r!(m-r)!} \omega_{\mu_1\mu_2 \dots \mu_r} \varepsilon^{\mu_1\mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_{r+1}\nu_{r+2} \dots \nu_m} dx^{\nu_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m} \tag{2.16}$$

2.2 Diferenciação de Formas

Será agora definir uma diferenciação de formas. Define-se diferenciação exterior **d** como uma operação que transforma uma $r - forma$ numa $(r+1) - forma$ ou seja uma aplicação **d**:$\Omega^r(M) \to \Omega^{r+1}(M)$ cuja ação sobre a forma definida em (2.1) é

$$d_r\omega = \frac{1}{r!} \left(\frac{\partial \omega_{\mu_1\mu_2 \dots \mu_r}}{\partial x^\nu} \right) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \dots \wedge dx^{\mu_r} \tag{2.17}$$

onde α $(p - forma)$, $\beta(q - forma)$ e $\mathbf{a}$,$\mathbf{b} \in \mathbf{K}$ e que segue as seguintes propriedade:

1. $d(a\alpha + b\beta) = ad\alpha + bd\beta$;

2. $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$;

3. Lema de Poincaré: $dd\alpha = d^2\alpha \equiv 0, \forall\alpha$.

Observações

1. A operação **d** é completamente independente de qualquer sistema de coordenadas;

2. A operação **d** é única.

3. No caso particular em que **f** e **g** são 0- formas e α e β são $1 - formas$, teremos

   a) $d(fg) = dfg + fdg$,

   b) $d(f\alpha) = df \wedge \alpha + fd\alpha$,

   c) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge d\beta$.

Usando as definições de formas diferenciais e produto wedge no R^3 e usando também as coordenadas cartesianas (x, y, z), podemos escrever os operadores diferenciais (gradiente, divergente, rotacional e laplaciano) em termos de formas diferenciais. Para ajudar teremos as seguintes relações:

$$\star dx = dy \wedge dz; \star dy = dz \wedge dx; \star dz = dx \wedge dy; \star(dx \wedge dy) = dz; \tag{2.18}$$

$$\star(dz \wedge dx) = dy; \star(dy \wedge dz) = dx; \star(dx \wedge dy \wedge dz) = 1. \tag{2.19}$$

Gradiente (∇). Seja a $0 - forma$ $\omega_0 = f(x, y, z)$ que corresponde a uma função escalar. Calculando-se o seu diferencial, temos:

$$d\omega_0 = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz. \tag{2.20}$$

Comparando-se o resultado acima com o operador gradiente(∇) definida na Análise Vetorial, concluímos que :

$$\nabla = d \tag{2.21}$$

Rotacional$(\nabla\times)$. Seja a $1 - forma$ ω_1 dada por:

$$\omega_1 = f_1(x, y, z)dx + f_2(x, y, z)dy + f_3(x, y, z)dz, \tag{2.22}$$

que corresponde a uma função vetorial $\vec{f}$, cujos componentes no espaço vetorial de base (dx, dy, dz) são f_1 f_2 e f_3. Calculando-se o seu diferencial, teremos:

$$d\omega_1 = df_1 \wedge dx + df_2 \wedge dy + df_3 \wedge dz \quad (2.23)$$

$$d\omega_1 = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) dy \wedge dz. \quad (2.24)$$

Agora calculemos o operador ($\star$) da expressão acima:

$$\star d\omega_1 = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) \star (dx \wedge dy) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) \star (dz \wedge dx) + \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) \star (dy \wedge dz),$$

$$\star d\omega_1 = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) dx + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) dy + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dz \quad (2.25)$$

Comparando-se o resultado acima com a operação rotacional ($\nabla\times$) definida na Álgebra Vetorial, conclui-se que :

$$\nabla\times = \star d \quad (2.26)$$

Divergente($\nabla.$) Consideremos a $1-forma$ ω_1 dada no item anterior:

$$\omega_1 = f_1(x,y,z)dx + f_2(x,y,z)dy + f_3(x,y,z)dz, \quad (2.27)$$

e calculando o $\star\omega_1$:

$$\star\omega_1 = f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy. \quad (2.28)$$

Calculando-se o diferencial da expressão acima, resultará:

$$d \star \omega_1 = d(f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy),$$

$$d \star \omega_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz. \quad (2.29)$$

Aplicando-se a operação $\star$ ao resultado anterior, temos:

$$\star d \star \omega_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) \star (dx \wedge dy \wedge dz) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}. \quad (2.30)$$

Comparando-se o resultado acima com o operador divergência($\nabla.$) definida na Análise Vetorial, conclui-se que :

$$\nabla . = \star d \star \tag{2.31}$$

E por ultimo temos o **Laplaciano**(∇^2). Seja a $0-forma$ $\omega_0 = f(x,y,z)$ que corresponde a uma função escalar. Calculando-se o seu diferencial, temos:

$$d\omega_0 = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz. \tag{2.32}$$

Calculando-se o operador ($\star$) da expressão acima, virá:

$$\star d\omega_0 = \frac{\partial f}{\partial x} \star dx + \frac{\partial f}{\partial y} \star dy + \frac{\partial f}{\partial z} \star dz =$$
$$\star d\omega_0 = \frac{\partial f}{\partial x}dy \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y}dz \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial z}dx \wedge dy. \tag{2.33}$$

Agora, calculemos o diferencial da expressão acima:

$$d \star d\omega_0 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) dx \wedge dy \wedge dz. \tag{2.34}$$

Aplicando-se a operação $\star$ ao resultado anterior, virá:

$$\star d \star d\omega_0 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)(dx \wedge dy \wedge dz) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right). \tag{2.35}$$

Comparando-se o resultado acima com a operação laplaciano(∇^2) definida na Análise Vetorial, conclui-se que :

$$\nabla^2 = \star d \star d \tag{2.36}$$

Outra equação muito importante é

$$d^2 = 0 \ (ou \ d_{r+1}d_r = 0) \tag{2.37}$$

tomando uma $r - forma$

$$\omega = \frac{1}{r!}\omega_{\mu_1\mu_2...\mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r},$$

$$d^2\omega = \frac{1}{r!}\left(\frac{\partial^2\omega_{\mu_1\mu_2...\mu_r}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu}\right) dx^\lambda \wedge dx^\nu \wedge (dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} ... \wedge dx^{\mu_r}). \tag{2.38}$$

Como $\partial^2\omega_{\mu_1\mu_2...\mu_r}/\partial x^\lambda \partial x^\nu$ é simétrico com respeito a λ e ν, porque $\omega_{\mu_1\mu_2...\mu_r}$ é de classe C^∞ e $dx^\lambda \wedge dx^\nu$ é anti-simétrico, assim a equação acima é identicamente zero,

$$d^2\omega = 0;\ \omega \neq 0$$
$$d^2 = 0$$

2.3 Integração de Formas Diferenciais

A integração de formas diferenciais só é possível se a variedade M for orientável. Dessa forma se M é orientável, existe uma m-forma ω que define um elemento de volume o qual é uma medida de integração para uma função $f \in \mathcal{F}(M)$ sobre a variedade M. Essa integral é denotado por

$$\int_s f\omega \tag{2.39}$$

onde S é o domínio n-dimensional de integração.

Teorema de Stokes Generalizado: Seja ω uma r-forma continua no espaço tangente a à variedade S compacta, orientada, diferenciável, com fronteira ∂S nesse espaço o teorema de Stokes generalizado para essa forma é

$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega \tag{2.40}$$

Veremos agora a definição de Produto Interno de r-formas.

Sejam ω e $\eta \in \Omega^r(M)$, definidas como

$$\omega = \frac{1}{r!}\omega_{\mu_1\mu_2...\mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r}$$
$$\eta = \frac{1}{r!}\eta_{\mu_1\mu_2...\mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r} \tag{2.41}$$

tomando agora $\star\eta$ e fazendo o produto $\wedge$ entre as formas ω e $\star\eta$ temos:

$$\omega \wedge \star\eta = \eta \wedge \star\omega \tag{2.42}$$

Uma vez que $\omega \wedge \star\eta$ é uma $m - forma$, sua integral pode ser definida. O produto interno (ω, η) de duas r-formas é definido como :

$$(\omega, \eta) = \int \omega \wedge \star\eta = \frac{1}{r!} \int_M \omega_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_r} \eta^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_r} \sqrt{|g|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^m \tag{2.43}$$

e pela equação (2.42), temos que

$$(\omega, \eta) = (\eta, \omega) \tag{2.44}$$

Operador Derivada Exterior Adjunta ($d^\dagger$)

Seja $d : \Omega^{r-1}(M) \to \Omega^r(M)$, o operador derivada adjunta $d^\dagger : \Omega^{r-1}(M) \to \Omega^r(M)$ é definido para o caso Riemaniano

$$d^\dagger = (-1)^{D(r+1)+1} \star d\star \tag{2.45}$$

e para o caso Lorentziano

$$d^\dagger = (-1)^{D(r+1)} \star d\star \tag{2.46}$$

onde fizemos $M = D$, onde D é a dimensão da teoria que estamos trabalhando.

Usando a derivada exterior adjunta podemos definir o laplaciano da seguinte forma:

$$\nabla^2 = (d + d^\dagger)^2 = dd^\dagger + d^\dagger d \tag{2.47}$$

para o caso de uma 0-forma $\omega_0 = f(x, y, z)$ no R^3 temos que $d^\dagger\omega_0 = 0$ portanto

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= d^\dagger df, \quad \text{ou seja} \\ \nabla^2 &= d^\dagger d \end{aligned} \tag{2.48}$$

2.4 Formas diferenciais em teorias de Gauge abeliana

Será aplicado agora as formas diferenciais em uma teoria de Gauge abeliana como um exemplo. A principal teoria abeliana é o eletromagnetismo que pertence ao grupo $U(1)$. As equações de Maxwell na forma covariante são:

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0 \tag{2.49}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \tag{2.50}$$

Partindo de uma formulação variacional a ação que descreve a teoria é

$$S_{[\partial_\mu A_\nu, A_\mu]} = \int_M d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \right) \tag{2.51}$$

Reescrevendo agora a teoria usando formas diferenciais. Primeiro tomamos A_μ e definimos uma 1-forma:

$$A = A_\nu dx^\nu \tag{2.52}$$

e tomando a derivada exterior dessa forma:

$$dA = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu$$

trocando $\mu \rightleftharpoons \nu$:

$$dA = \partial_\nu A_\mu dx^\nu \wedge dx^\mu = -\partial_\nu A_\mu dx^\mu \wedge dx^\nu$$

Somando temos

$$\begin{aligned} 2dA &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu \\ dA &= \tfrac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu = \tfrac{1}{2!} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \end{aligned} \tag{2.53}$$

Identificamos dA como uma 2-forma. Portanto com

$$F = \frac{1}{2!} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{2.54}$$

temos então que ,

$$F = dA \tag{2.55}$$

Aplicando a derivada exterior em dA:

$$d(dA) = dF = \frac{1}{2!}\partial_\lambda F_{\mu\nu} dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{2.56}$$

Permutando os índices e somando as equação com os índices permutados obtemos

$$dF = \frac{1}{3!}(\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda}) dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{2.57}$$

Identificamos a quantidade acima como uma 3-forma. Por outro lado como $d^2 = 0$,

$$dF = d^2 A \Rightarrow dF = 0 \tag{2.58}$$

e assim é obtido o primeiro par de equações de Maxwell (2.52) em formas diferencias.

Para o segundo par de equações de Maxwell, calculamos $d^\dagger F$:

$$d^\dagger F = \star d \star F = \star d \left[\frac{1}{2!} F_{\mu\nu} \star (dx^\mu \wedge dx^\nu)\right] \tag{2.59}$$

por outro lado,

$$\star(dx^\mu \wedge dx^\nu) = \frac{1}{2!}\varepsilon^{\mu\nu}_{\lambda\sigma} dx^\lambda \wedge dx^\sigma \tag{2.60}$$

então nota-se que,

$$\begin{aligned} d^\dagger F &= \frac{1}{2!2!}\partial_\rho F^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\varepsilon^{\rho\lambda\sigma}_{\omega} dx^\omega = \frac{1}{2!2!}\partial_\rho F^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\varepsilon^{\rho\lambda\sigma\theta} g_{\omega\theta} dx^\omega \\ &= \frac{1}{2!2!}\partial_\rho F^{\mu\nu} g^{-1} 2! \delta^\theta_{[\mu}\delta^\rho_{\nu]} dx_\theta = \frac{1}{2}\left(\partial_\rho F^{\theta\rho} dx_\theta - \partial_\rho F^{\rho\theta} dx_\theta\right) \\ d^\dagger F &= -\partial_\rho F^{\rho\theta} dx_\theta = -J^\theta dx_\theta \end{aligned} \tag{2.61}$$

Portanto mostrou-se que

$$d^\dagger F = -J \tag{2.62}$$

que é justamente o segundo par de equações de Maxwell em termos de formas diferenciais. Para escrever a ação (2.54), será usado a definição de produto interno:

$$(\omega, \eta) = \int \omega \wedge \star\eta = \frac{1}{r!}\int_M \omega_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_r}\eta^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_r}\sqrt{|g|}dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^D \tag{2.63}$$

Calculando agora o (F, F):

$$(F, F) = \frac{1}{2!}\int_\omega F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{|g|}dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 = \frac{1}{2!}\int_\omega F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}d^4x \tag{2.64}$$

então encontrou-se

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(F, F) = -\frac{1}{2}(dA, dA) \tag{2.65}$$

e calculando (A,J) temos que

$$-(A, J) = -\int_\omega J^\mu A_\mu d^4x \tag{2.66}$$

Assim a ação de Maxwell se torna

$$S_{[A,J]} = -\frac{1}{2}(dA, dA) - (A, J) \tag{2.67}$$

Obtemos então a ação que descreve as equações de Maxwell em termos de formas diferenciais.

3 GRAVITAÇÃO

A interação gravitacional é, das quatro interações a mais estudada e ainda a que mais intriga a humanidade. A gravitação sendo uma interação de caráter universal, isto é, todos os corpos estão sujeitos a ela, foi primeiramente descrita por Issac Newton no século XVI, essa descrição permitiu unificar todos os processos de atração entre os corpos. Assim, qualquer forma de matéria, seja sobre a Terra (como no famoso exemplo da maçã), seja em corpos celestes (como planetas e estrelas) obedecem a um único tipo de força, a gravitação universal [10]. Porém no início do século XX, a comunidade científica estava ciente da não aplicabilidade da teoria de Newton na previsão de alguns fenômenos naturais, como a descrição do periélio de Mercúrio, sendo necessárias novas propostas de teorias para explicar tais fenômenos, porém a que mais se mostrou correta, devidos seus resultados condizerem com os dados experimentais, foi a Teoria da Relatividade Geral (TRG) desenvolvida por Albert Einstein (1879-1955) [11], na primeira metade do século XX, sendo assim um dos pioneiros a formular uma teoria para a gravitação compatível com a relatividade especial e que no limite da mecânica clássica reproduz a gravitação Newtoniana. Essa teoria relaciona matéria e energia com a geometria do espaço-tempo de uma forma bastante peculiar. Ela permite determinar a métrica $g_{\mu\nu}$ de onde se obtem a informação geométrica (campo gravitacional) produzida por uma distribuição de matéria-energia. Para construir tal teoria, Einstein baseou-se em uma observação, que posteriormente se tornou um princípio, chamado *Princípio da Equivalência.* Basicamente esse princípio diz que todas as leis da Física se reduzem localmente à relatividade especial, através de uma escolha adequada do sistema de referência [12].

3.1 Equações de Einstein

Na TRG a geometria do espaço-tempo é modificada pela existência de matéria-energia gerada por campos que podem ser acoplados com a gravidade através do *Tensor Energia-Momento.* Podemos portanto obter as equações que relacionam geometria e matéria por meio de um princípio variacional onde a ação total é $S_{total} = S_{EH} + S_{Mat}$. A ação S_{EH} é conhecida por ação de *Einstein-Hilbert*(EH) e foi proposta por David Hilbert (1862-1943), enquanto que o segundo termo S_{Mat} é a ação de matéria que nos dará o *Tensor Energia-Momento.* Então a ação total representada em D-dimensões

$$S_{total} = M^{D-2} \int_{\Omega} R\sqrt{-g}d^D x + \int_{\Omega} \mathcal{L}_{Mat}\sqrt{-g}d^D x \tag{3.1}$$

onde M fornece a escala de energia da gravitação em D dimensões. Para o caso quadrimensional a escala de energia é chamada de escala de Planck e é dada por $M^{D-2} = M_{Pl}^2 = 1/16\pi G$ onde G é a constante da gravitação universal de Newton. $\mathcal{L}_{Mat}$ é a Lagrangiana do termo de massa, Ω é a variedade que representa o espaço-tempo, $\sqrt{-g}d^Dx$ é o elemento de volume invariante e R é o escalar de Ricci que é dado por

$$R = g^{MN}R_{MN} \tag{3.2}$$

e R_{MN} é o tensor de Ricci, dado por [13]

$$R_{MN} = \partial_L \Gamma^L{}_{MN} - \partial_N \Gamma^L{}_{ML} + \Gamma^P{}_{MN}\Gamma^L{}_{LP} - \Gamma^P{}_{LM}\Gamma^L{}_{NP} \tag{3.3}$$

Variando agora a ação (3.1) temos:

$$\delta S_{total} = M^{D-2}\int_\Omega \delta(R\sqrt{-g})d^Dx + \int_\Omega \delta(\mathcal{L}_{Mat}\sqrt{-g})d^Dx. \tag{3.4}$$

Iremos trabalhar com as variações dos termos separadamente afim de uma melhor compreensão. Na variação do primeiro termo temos

$$\delta S_{EH} = M^{D-2}\int_\Omega \delta(R\sqrt{-g})d^Dx \tag{3.5}$$

Trabalhando com o termo $\delta(R\sqrt{-g})$ da expressão acima,

$$\begin{aligned} \delta(R\sqrt{-g}) &= \delta(R)\sqrt{-g} + R\delta(\sqrt{-g}) && (3.6) \\ &= \sqrt{-g}g^{MN}\delta R_{MN} + \sqrt{-g}R_{MN}\delta g^{MN} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}Rg_{MN}\delta g^{MN} \\ &= \sqrt{-g}G_{MN}\delta g^{MN} + \delta\mathcal{L}_{sur} && (3.7) \end{aligned}$$

onde definimos $\delta\mathcal{L}_{sur} = \sqrt{-g}g^{MN}\delta R_{MN}$, $G_{MN} = -\frac{1}{2}Rg_{MN}$ e $g^{MN}\delta R_{MN} = \nabla_L(g^{MN}\delta\Gamma^L{}_{MN} - g^{LN}\delta\Gamma^M{}_{MN})$ que é um termo de superfície e que se anulará nos extremos quando integrado [14], assim ficando apenas o primeiro termo da equação (3.6). A variação do primeiro termos da ação (3.1) fica.

$$\delta S_{EH} = M^{D-2}\int_\Omega \sqrt{-g}G_{MN}\delta g^{MN}d^Dx \tag{3.8}$$

Para o segundo termo a forma explícita para a variação da matéria só é possível se for dada a ação, embora sempre podemos definir o tensor energia-momento como T_MN de modo que

$$\delta S_{Mat} = -\frac{1}{2}\int_{\Omega} T_{MN}\delta g^{MN}\sqrt{-g}d^D x \tag{3.9}$$

onde g é o determinante da métrica e g^{MN} é a inversa da métrica em D dimensões.

Uma simetria essencial para a ação de matéria é a invariância por transformações gerais de coordenadas, $x^\mu \to x'^\mu + \xi^\mu$ onde ξ^μ é um parâmetro infinitesimal. O tensor energia-momento definido dessa forma tem a propriedade de que $\nabla_N T^{MN} = 0$, ou seja, a conservação do tensor energia-momento independente da particular forma do Lagrangiano de matéria[15].

Dessa forma as equações tensoriais que descrevem a dinâmica da geometria são obtidas pela aplicação do princípio variacional na ação $S_{EH} + S_{Mat}$, resultando nas equações de campo de Einstein

$$R_{MN} - \frac{1}{2}g_{MN}R = \kappa^{(D)}T_{MN} \tag{3.10}$$

onde definiu-se $\kappa^{(D)} = (1/2)M^{D-2}$.

Uma maneira alternativa de calcularmos o escalar de Ricci, é obtendo uma expressão para uma curvatura 2-forma, que é análogo ao tensor de Riemann. A vantagem de se usar esse formalismo é que, devido a antissimetria das formas, o cálculo para o tensor de Riemann, tensor de Ricci e o escalar de Ricci é mais compacto e elegante. Antes vamos introduzir alguns conceitos básicos para que possamos desenvolver nosso trabalho com os vierbein que fazem a conexão entre sistemas de coordenadas locais e globais.

3.2 Vierbiens

Na ausência de gravidade as Leis da física são invariantes por transformações de Lorentz *globais*, isso é o que afirma o princípio da relatividade. Para incorporar gravidade nesse contexto é necessário recorrer ao *princípio da equivalência de Einstein*, no qual é sempre possível escolher um sistema de referência tal que a gravidade desapareça localmente, chamado de "referencial de queda livre". Existe a necessidade de relacionar quantidades que estão em um referencial inercial com outras que estão no referencial do campo, ou em termos técnicos, como relacionar quantidades no espaço "flat" com as do espaço curvo [15].

A resposta para esse questionamento está na *transformação de coordenadas.* Seja $\{x^M\}$ um sistema de coordenadas D dimensional curvo associada a variedade curvada

Λ e $\{\xi^A\}$ são as coordenadas "flats"(locais) tangente à variedade. Aqui se deve fazer uma distinção nos índices relacionados as coordenadas locais e globais: quando forem $L, M, N, ...,$, se tratam do sistema de coordenadas curvo e quando forem $A, B, C, ..., J$ se tratam das coordenadas locais, e ambos variam de 0 a $D-1$. Quando as coordenadas forem quadrimensionais, usa-se os correspondentes gregos, isto é, $\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\alpha}, ...$ para as coordenada do espaço plano e $\mu, \nu, \alpha, ...$ para as coordenadas do espaço curvo.

Esclarecido a notação dos índices, realiza-se uma transformação local de coordenadas $\{x^M\} \to \{\xi^A\}$ e com isso pode-se escrever $\xi^A = \xi^A(x^M)$ ou de forma equivalente,

$$d\xi^A = \frac{\partial \xi^A}{\partial x^M} dx^M \tag{3.11}$$

onde as derivadas são avaliadas no ponto de interesse. Os elementos da matriz de transformação entre as coordenadas envolvidas são chamados de *vierbeins*, definidos como

$$e^A{}_M(x) \equiv \frac{\partial \xi^A}{\partial x^M} \tag{3.12}$$

sendo que os índices superescritos designam a linha e os subscritos a coluna da matriz. Dessa forma (3.11) se torna

$$d\xi^A = e^A{}_M(x) dx^M \tag{3.13}$$

e os elementos da matriz da transformação inversa são os *vierbeins inversos*,

$$dx^M = \frac{\partial x^M}{\partial \xi^A} d\xi^A \equiv e_A{}^M(x) d\xi^A. \tag{3.14}$$

A relação entre esses vierbeins obtida de

$$d\xi^A = e^A{}_M dx^M = e^A{}_M e_B{}^M d\xi^B \Rightarrow e^A{}_M e_B{}^M = \delta^A_B \tag{3.15}$$

também

$$dx^M = e_A{}^M d\xi^A = e_A{}^M e^A{}_N dx^N \Rightarrow e_A{}^M e^A{}_N = \delta^M_N. \tag{3.16}$$

A métrica do sistema de coordenadas curvo pode ser escrita em termos da métrica "flat", levando em conta que na transformação $\{\xi^A\} \to \{x^M\}$ o tensor métrico pode ser escrito na forma

$$g_{MN}(x) = e^A{}_M(x) e^B{}_N(x) \eta_{AB}. \tag{3.17}$$

E de maneira análoga, a métrica inversa é escrita como $g^{MN} = e_A{}^M(x) e_B{}^N(x) \eta^{AB}$. Pode-se verificar facilmente, usando (3.17) e a inversa da métrica que $g^{ML} g_{LN} = \delta^M_N$. De maneira análoga η_{AB} pode ser escrita em termos das tetradas inversas da forma

$$\eta_{AB} = e_A{}^M e_B{}^N g_{MN} \tag{3.18}$$

e a inversa fica dada por $\eta^{AB} = e^A{}_M e^B{}_N g^{MN}$ [14][15] [16]. Dado a definição de vierbein, podemos agora definir a conexão de spin. Na base do espaço a conexão Γ^L_{MN} será trocada por uma conexão que relacione os dois sistema, essa conexão é chamada de conexão de spin que é do tipo Ω^B_{LA}. Ela obedece ao mesmo princípio que a derivada covariante usual.

$$D_M X^A_B = \partial_M X^A_B - \Omega^C_{MB} X^A_C + \Omega^A_{MC} X^C_B \tag{3.19}$$

que é a própria derivada covariante de um espinor. O propósito em definir essa nova conexão, é de saber como é a derivada covariante de um vierbein ou seja de um objeto misto, que tem tanto índices do espaço curvo como do espaço plano e assim será usado os dois tipo de conexão como abaixo

$$D_M e^N_B = \partial_M e^N_B - \Omega^C_{MB} e^N_C + \Gamma^N_{ML} e^L_B \tag{3.20}$$

Como podemos estabelecer um sistema de coordenadas em que a derivada da métrica é nula ($\nabla g_{\mu\nu} = 0$) também pode-se escolher um sistema de coordenadas de tal forma que a derivada covariante do vierbein seja nulo $D_M e^N_B = 0$ para assim encontrar a relação entre os dois termos de conexão [16]. Fazendo a equação acima igual a zero e organizando os termos temos que

$$\Gamma^N_{ML} = e^B_L \partial_M e^N_B - \Omega^C_{MB} e^B_L e^N_C \tag{3.21}$$

ou

$$\begin{aligned} \Omega^C_{MB} &= e^C_N (\partial_M e^N_B + \Gamma^N_{ML} e^L_B) \\ \Omega^C_{MB} &= e^C_N (\nabla_M e^N_B) \end{aligned} \tag{3.22}$$

será provado agora que a conexão de spin é antissimétrica nos dois índices do espaço plano partindo de que

$$\begin{aligned} \nabla_M(\eta_{AB}) &= 0 \\ \nabla_M(e^N_A e_{BN}) &= 0 \\ e^N_A \nabla_M(e_{BN}) + e_{BN} \nabla_M(e^N_A) &= 0 \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$
\begin{aligned}
e_A^N \nabla_M(e_{BN}) + e_B^N \nabla_M(e_{AN}) &= 0 \\
e_{AN} \nabla_M(e_B^N) &= -e_{BN} \nabla_M(e_A^N) \\
\Omega_{MAB} &= -\Omega_{MBA}
\end{aligned}
$$

Agora será definir a relação entre as equações de estrutura de Cartan e o tensor de Riemann e o tensor de Ricci para, por fim, obter o escalar de Ricci com menos trabalho e mais elegância usando formas diferenciais.

3.3 Curvatura em 2-forma

Nesta seção será demonstrar que a curvatura em 2-forma é equivalente ao tensor de Riemann [16] [8]. Foi optado por tomar um caminho diferente da literatura, pois na mesma primeiramente é apresentado a relação entre os vierbeins e a conexão de spin para depois obtermos a curvatura. É mais intuitivo encontrar a curvatura em termos de formas para então vermos que ela é descrita por um conjunto de conexões de spin, assim nos motivando para encontrar a relação vierbein-conexão para que possamos obter a curvatura.

Partindo-se da seguinte relação

$$
[\nabla_\mu, \nabla_\nu] e_{\bar{\sigma}\rho} = R_{\rho\sigma\mu\nu} e^\sigma_{\bar{\sigma}} + (\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}) \nabla_\alpha e_{\bar{\sigma}\rho} \tag{3.24}
$$

será então escrita como

$$
\begin{aligned}
R_{\bar{\rho}\bar{\sigma}\mu\nu} &= R_{\rho\sigma\mu\nu} e^\rho_{\bar{\rho}} e^\sigma_{\bar{\sigma}} &(3.25)\\
R^{\bar{\rho}}{}_{\bar{\sigma}\mu\nu} &= \partial_\mu \Omega^{\bar{\rho}}_{\nu\bar{\sigma}} - \partial_\nu \Omega^{\bar{\rho}}_{\mu\bar{\sigma}} + \Omega^{\bar{\rho}}_{\mu\bar{\alpha}} \Omega^{\bar{\alpha}}_{\nu\bar{\sigma}} - \Omega^{\bar{\rho}}_{\nu\bar{\alpha}} \Omega^{\bar{\alpha}}_{\mu\bar{\sigma}} &(3.26)
\end{aligned}
$$

Usando a notação de formas diferenciais temos

$$
\begin{aligned}
R^{\bar{\rho}}{}_{\bar{\sigma}} &\equiv \frac{1}{2} R^{\bar{\rho}}{}_{\bar{\sigma}\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = d\Omega^{\bar{\rho}}{}_{\bar{\sigma}} + \Omega^{\bar{\rho}}{}_{\bar{\alpha}} \wedge \Omega^{\bar{\alpha}}{}_{\bar{\sigma}} &(3.27)\\
R^{\bar{\rho}}{}_{\bar{\sigma}} &\equiv \frac{1}{2} R^{\bar{\rho}}{}_{\bar{\sigma}\bar{\lambda}\bar{\alpha}} e^{\bar{\lambda}} \wedge e^{\bar{\alpha}} &(3.28)
\end{aligned}
$$

que é conhecida como curvatura 2-forma ou segunda equação de estrutura de Cartan. É visto então que para encontrarmos o tensor de Riemann é necessário encontrar as conexões de spin. Agora se faz necessário a obtenção da primeira equação de estrutura de Cartan que relaciona os vierbeins com as conexões. Partindo então da derivada covariante de um vierbein vista no inicio do capítulo. Tomando a derivada covariante de um vierbein para depois fazendo-se uso da mesma expressão fazendo a derivada apenas trocando os índices do espaço curvo:

$$D_\mu e^{\bar{\alpha}}_\nu = \partial_\mu e^{\bar{\alpha}}_\nu - \Gamma^\beta_{\mu\nu} e^{\bar{\alpha}}_\beta + \Omega^{\bar{\alpha}}{}_{\mu\bar{\lambda}} e^{\bar{\lambda}}_\nu = 0 \tag{3.29}$$

$$D_\nu e^{\bar{\alpha}}_\mu = \partial_\nu e^{\bar{\alpha}}_\mu - \Gamma^\beta_{\nu\mu} e^{\bar{\alpha}}_\beta + \Omega^{\bar{\alpha}}{}_{\nu\bar{\lambda}} e^{\bar{\lambda}}_\mu = 0 \tag{3.30}$$

Subtraindo as equações acima encontra-se que

$$\partial_\mu e^{\bar{\alpha}}_\nu - \partial_\nu e^{\bar{\alpha}}_\mu + \Omega^{\bar{\alpha}}{}_{\mu\bar{\lambda}} e^{\bar{\lambda}}_\nu - \Omega^{\bar{\alpha}}{}_{\nu\bar{\lambda}} e^{\bar{\lambda}}_\mu = (\Gamma^\beta_{\nu\mu} - \Gamma^\beta_{\nu\mu}) e^{\bar{\alpha}}_\beta \tag{3.31}$$

Usando a notação de formas diferenciais onde $e^{\bar{\alpha}} \equiv e^{\bar{\alpha}}_\nu dx^\nu$ e $\Omega^{\bar{\lambda}}_{\bar{\alpha}} \equiv \Omega^{\bar{\alpha}}_{\nu\bar{\lambda}} dx^\nu$ e definindo o tensor de torção como

$$T^{\bar{\alpha}} \equiv \frac{1}{2} T^{\bar{\alpha}}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv \frac{1}{2} (\Gamma^\beta_{\nu\mu} - \Gamma^\beta_{\nu\mu}) e^{\bar{\alpha}}_\beta dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{3.32}$$

nós obtemos:

$$de^{\bar{\alpha}} + \Omega^{\bar{\alpha}}_{\bar{\lambda}} \wedge e^{\bar{\lambda}} = T^{\bar{\alpha}} \tag{3.33}$$

que é a primeira equação de estrutura de Cartan. Considerando a torção igual a zero, teremos como saber quem são as conexões de spin se soubermos os vierbein, ficando a equação de Cartan sem o termo de torção da seguinte maneira

$$de^{\bar{\alpha}} = -\Omega^{\bar{\alpha}}_{\bar{\lambda}} \wedge e^{\bar{\lambda}} \tag{3.34}$$

Assim mostrando que as formas diferencias e a definição das equações de estrutura de Cartan reduzira bastante neste trabalho.

4 KALUZA-KLEIN

A teoria de Kaluza-Klein foi uma das primeiras teorias de unificação que tinha a proposta de unificar gravidade e eletromagnetismo em uma única teoria gravitacional em cinco dimensões (5-D) por meio da introdução de uma dimensão extra do tipo espaço. Essa teoria gravitacional quando submetida a uma redução dimensional recuperaria o eletromagnetismo e a gravitação em quatro dimensões (4-D).

4.1 Unificação e Dimensões Extras

Antes mesmo da teoria da Teoria da Relatividade Geral (TRG) ser publicada, o físico finlandês Gunnar Nordstöm (1881-1923) em 1914 propôs uma teoria na qual a gravitação é descrita por um campo escalar acoplado ao traço do tensor energia-momento conhecida como Gravitação de Nordstöm. Ele adicionou uma dimensão extra ao espaço-tempo 4-D, obtendo uma variedade 5-D. Introduziu um campo vetorial de calibre de cinco componentes, identificando a quinta componente como o campo escalar e as quatro restantes como o potencial eletromagnético, mas devido a inúmeras incompatibilidades com os resultados experimentais ela foi abandonada [17]. A ideia de dimensões extras ficou esquecida por um tempo, mas voltou a aparecer na comunidade científica em 1921, com a publicação do artigo "Zum Unitätsproblem der Physik"[4] do matemático e físico alemão Theodor Kaluza (1885-1954) que propunha uma teoria gravitacional em 5-D onde a nova dimensão era enrolada. Diferente de Nordström, Kaluza se apoiava na TRG que já era bem conhecida na época. O artigo foi publicado em 1921 mas ele já tinha esboçado suas ideias bem antes (1919), porém antes de publicá-las, Kaluza enviou para Albert Einstein por meio de um rascunho do artigo original, Einstein estudou a ideia por dois anos antes de finalmente recomendar que Kaluza as publicasse [18]. Posteriormente em 1926 o físico Sueco Oskar Klein (1894-1977) publicou um artigo [19] onde fez algumas modificações na teoria devido considera-la incompleta, como no caso da não aplicação do princípio de covariância geral. Por fim a teoria ficou conhecida por Teoria de Kaluza-Klein (KK) servindo como base para várias teorias no ramo da físicas de altas energias atualmente, como teoria de super-cordas, super-gravidade, teoria M e várias outras, sendo assim, a ideia de dimensões extras muito importante.

4.2 Construção da teoria por Kaluza

A ideia de Kaluza para acrescentar uma dimensão extra ao espaço-tempo veio depois que ele observou a semelhança entre o símbolo de Christoffel Γ e o tensor de campo eletromagnético (field-strenght) $F_{\mu\nu}$:

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \tag{4.1}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{4.2}$$

onde $g_{\mu\nu}$ representa o tensor métrico, A_μ denota o quadrivetor potencial e os índices gregos variando de 0 a 3 onde a componente zero representa o tempo. Kaluza notou que $F_{\mu\nu}$ se tornaria um símbolo de Christoffel se ele introduzisse uma dimensão extra com uma métrica tal que $\Gamma_{\mu\nu 5} \sim F_{\mu\nu}$. Para isso é necessário identificar $A_\mu = g_{\mu 5}$ e assumir que esta quantidade não depende da quinta coordenada x^5 [20]. Assim temos a seguinte métrica proposta por Kaluza:

$$ds^2 = \gamma_{AB}(x^\mu) dx^A dx^B \tag{4.3}$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + 2 g_{\mu 5} dx^\mu dx^5 + g_{55}\left(dx^5\right)^2$$

onde

$$\gamma_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & g_{\mu 5} \\ g_{5\nu} & g_{55} \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Uma vez que as quantidades físicas usuais dependem apenas do espaço-tempo 4-D usual, a métrica não depende da coordenada da quinta dimensão:

$$\partial_5 \gamma_{AB} = 0 \tag{4.5}$$

essa imposição é conhecida como condição de cilindricidade[2] de Kaluza. Tomando essas condições acima citadas , Kaluza calculou o símbolo de Christoffel para 5-D

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\mu\lambda})$$

$$\Gamma_{\mu\nu 5} = \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\nu 5} + \partial_5 g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\mu 5})$$

[2] Neste caso refere-se a condição da quinta dimensão ser compacta.

$$\Gamma_{\mu\nu5} = \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\nu5} - \partial_\nu g_{\mu5}) \tag{4.6}$$

Vemos portanto que o símbolo de Christofell é igual ao tensor $F_{\mu\nu}$ do campo eletromagnético com uma constante 2α. Portanto temos:

$$\Gamma_{\mu\nu5} = \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\nu5} - \partial_\nu g_{\mu5}) = \alpha\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) = \alpha F_{\mu\nu} \tag{4.7}$$

Kaluza ainda mostrou que outra consequência era a obtenção da seguinte relação:

$$F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\nu\lambda,\mu} + F_{\lambda\mu,\nu} = 0 \tag{4.8}$$

Por fim se mostrou que um mundo em 5-D, onde só existe a gravitação, poderia ser equivalente a um mundo 4-D que existe gravitação e eletromagnetismo. Porém sua métrica (4.3) não era invariante sobe transformações gerais de coordenadas.

4.2.1 Contribuições de Klein

Oskar Klein fez importantes modificações na teoria de Kaluza publicando-as em um artigo [19] em 1926, onde ele preocupou-se com a covariância da teoria mas deixando a condição de cilindricidade. Sua preocupação era que a teoria de Kaluza teria que ser covariância sob transformação geral de coordenadas, ou seja as novas coordenadas teriam que depender das antigas $x'^\mu(x^\mu, x^5)$ e $y'(x^\mu, x^5)$, mas como a covariância é um princípio que só pode ser comprovada em 4-D será imposto que $x'^\mu(x^\mu)$, ou seja $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^5} = 0$, e a condição de cilindricidade teria que valer no novo sistema de coordenada, $\frac{\partial \gamma'_{AB}}{\partial x'^5} = 0$.

Será construir uma teoria com essas características partindo de uma transformação geral de coordenadas, impondo as condições acima. Sabe-se que uma transformação geral de coordenadas é dada por:

$$g'_{CD}(x'^A) = \frac{\partial x^A}{\partial x'^C}\frac{\partial x^B}{\partial x'^D} g_{AB}(x) \tag{4.9}$$

Pegando agora o termo $g_{\nu5}$ e ver como ele se comporta.

$$g'_{\nu5}(x'^A) = \frac{\partial x^A}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^B}{\partial x'^5} g_{AB} \tag{4.10}$$

mas pela condição de cilindricidade imposta por Kaluza a métrica não pode depender da dimensão extra, portanto:

$$g'_{\nu 5}(x'^{\nu}) = \frac{\partial x^A}{\partial x'^{\nu}} g_{A5} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} g_{\mu 5} + \frac{\partial x^5}{\partial x'^{\nu}} g_{55} \tag{4.11}$$

Impondo agora as seguintes transformações

$$x^5 \to x'^5 = x^5 + \varepsilon(x^{\nu}) \quad \text{e} \quad x'^{\mu} = x^{\mu} \tag{4.12}$$

teremos que

$$g'_{\nu 5}(x'^{\nu}) = g_{\nu 5} + \partial_{\nu}\varepsilon(x^{\nu}) g_{55} \tag{4.13}$$

Kaluza adotou $g_{55} = \alpha$, onde α é uma constante, fazendo com que a expressão acima seja equivalente a uma transformação de gauge. Portanto, as transformações de coordenadas mais gerais para este caso são as transformações (4.12).

Com o estudo destas transformações Klein percebeu que a métrica proposta por Kaluza[3] $\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ não era consistente com a covariância, ou seja, a métrica $ds^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$ não é invariante sob as transformações (4.12). Para que seja obtido a métrica proposto por Klein, iremos partir da ação de uma partícula relativística de massa m em 4-D interagindo com um campo eletromagnético A_{μ} e posteriormente criar uma ação em 5-D para o mesmo sistema físico e comparar as Lagrangianas obtidas nos dois casos.

Sabe-se que a ação de uma partícula relativística de massa m movendo-se num espaço-tempo de Minkowski em D-dimensões é

$$S = -m \int ds = -m \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}} \tag{4.14}$$

onde $\mu, \nu = 0, 1, 2, ..., D-1$ e no qual usamos o tensor métrico $\eta_{\mu\nu} = diag(+, -, .., -)$. A ação acima é invariante por reparametrização $ds = \frac{ds}{d\lambda} d\lambda$, onde λ é um parâmetro arbitrário ao longo da linha-mundo. Assim temos que

$$S = -m \int_{\lambda i}^{\lambda f} \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda}} d\lambda = -m \int_{\lambda i}^{\lambda f} \sqrt{\dot{x^2}} d\lambda \tag{4.15}$$

onde definirmos $\frac{dx^{\mu}}{d\lambda} = \dot{x^{\mu}}$, onde $x^{\mu} = x^{\mu}(\lambda)$.

A ação (4.15) é invariante sob transformações na forma $\lambda \to \lambda' = f(\lambda)$ com f

[3] onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo quadridimensional

sendo uma função arbitrária de λ e portanto a Lagrangiana desse sistema é dada por

$$\mathcal{L} = -m\sqrt{\dot{x}^2} \tag{4.16}$$

com $\dot{x}^2 = \eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$. A equação de movimento da partícula é dada por $\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}\right) = 0$, onde obtemos que o momento conjugado é

$$p_\mu = -m\frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}} \tag{4.17}$$

que dá a seguinte equação de vínculo

$$\phi \equiv p^2 - m^2 = 0 \tag{4.18}$$

Mas se escolhendo-se o parâmetro λ como sendo o tempo próprio da partícula $\lambda \to \tau$ teremos que $\dot{x}^2 = 1$ assim a equação (4.17) torna-se

$$p_\mu = -m\dot{x}_\mu \tag{4.19}$$

onde $\dot{x}^2 = 1$ passa a ser o novo vínculo no lugar de (4.18).

A Lagrangiana (4.14) pode ser escrita de uma forma mais geral e fácil de se trabalhar e que ainda respeite as equações de movimento e os vínculos, pois a Lagrangiana (4.16) não descreve patículas de massa zero e ainda tem um termo de raiz quadrada. Para isso usamos a ação [21]

$$\tilde{S} = \frac{1}{2}\int_{\lambda 1}^{\lambda 2} e\left(\frac{\dot{x}^2}{e^2} + m^2\right) d\lambda \tag{4.20}$$

onde e é uma variável auxiliar tal que $e = e(\lambda)$, e que não adiciona nenhuma nova dinâmica nas equações de movimento. Essa nova variável se transforma como $\tilde{e} = \frac{d\lambda}{d\tilde{\lambda}}e$ e $x'^\mu(\lambda') = x^\mu(\lambda)$ tornando a ação acima invariante por reparametrização. Variando a ação (4.20) obtemos as seguintes equações de movimento

$$\frac{\delta \tilde{S}}{\delta e} = 0 \Longrightarrow \dot{x}^2 - e^2m^2 = o \Longrightarrow \dot{x}^2 = e^2m^2 \tag{4.21}$$

$$\frac{\delta \tilde{S}}{\delta x^\mu} = 0 \Longrightarrow \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\dot{x}^\mu}{e}\right) = 0 \tag{4.22}$$

onde temos que

$$e = \sqrt{\frac{\dot{x^2}}{m^2}} \tag{4.23}$$

Se tomarmos o parâmetro λ como o tempo próprio ($\lambda \rightarrow \tau$) teremos $\dot{x^2} = 1$ e portanto $e = 1/m$, podemos notar que se substituirmos a equação (4.23) na ação (4.20) obteremos a ação (4.15), provando a seguinte equivalência $S \equiv \tilde{S}$. Então a nova Lagrangiana fica

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{\dot{x^2}}{e} + em^2 \tag{4.24}$$

mostrando que nossa ação (4.20) é uma ação mais geral pois podemos descrever agora partículas de massa zero e não temos mais o termo com raiz quadrada.

Para o caso de uma partícula relativística de $m = 0$ e fazendo ($\lambda \rightarrow \tau$), onde τ é o tempo próprio, temos que a ação $\tilde{S}$ se torna

$$\tilde{S} = \frac{1}{2} \int_{\tau 1}^{\tau 2} \frac{\dot{x^2}}{e} d\tau \tag{4.25}$$

e conseguintemente

$$\dot{x^2} = m^2 e^2 = 0 \tag{4.26}$$

ou seja, se $m = 0$ pode-se atribuir qualquer valor para a variável e, em particular $e = 1$. Após tais considerações a ação fica

$$\tilde{S} = \frac{1}{2} \int_{\tau 1}^{\tau 2} \left(\eta_{\mu\nu} \dot{x^\mu} \dot{x^\nu} \right) d\tau \tag{4.27}$$

Agora considerando o caso de uma partícula relativística de $m = 0$ interagindo com o campo eletromagnético, nossa ação fica

$$S = \frac{1}{2} \int_{\tau 1}^{\tau 2} \eta_{\mu\nu} \dot{x^\mu} \dot{x^\nu} d\tau + \frac{q}{c} \int_{\tau 1}^{\tau 2} A_\mu \dot{x^\mu} d\tau \tag{4.28}$$

Para introduzirmos a gravitação na ação acima basta trocarmos o tensor métrico $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$, assim obtendo

$$S = \int_{\tau 1}^{\tau 2} g_{\mu\nu} \dot{x^\mu} \dot{x^\nu} d\tau + \frac{q}{c} \int_{\tau 1}^{\tau 2} A_\mu \dot{x^\mu} d\tau \tag{4.29}$$

onde a Lagrangiana da ação acima é

$$\mathcal{L} = g_{\mu\nu}\dot{x^\mu}\dot{x^\nu} + \frac{q}{c}A_\mu \dot{x^\mu} \tag{4.30}$$

e obtem-se que o momento conjugado é

$$P_\mu = g_{\mu\nu}\dot{x^\nu} + \frac{q}{c}A_\mu \tag{4.31}$$

Trabalhando agora com a equação em 5-D da gravitação (gravitação + eletromagnetismo) em 4-D, definimos $x^A = (t, x, y, z, w) = (x^\mu, w)$. Pode-se definir uma ação da seguinte maneira para o caso de 5-D,

$$\hat{S} = \frac{1}{2}\int_{\tau 1}^{\tau 2} \gamma_{AB}\dot{x^A}\dot{x^B} d\tau = \frac{1}{2}\int_{\tau 1}^{\tau 2} \left[g_{\mu\nu}\dot{x^\mu}\dot{x^\nu} + 2g_{\mu 5}\dot{w}\dot{x^\mu} + g_{55}\dot{w}^2\right] d\tau \tag{4.32}$$

Assim a Lagrangiana fica

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\left[g_{\mu\nu}\dot{x^\mu}\dot{x^\nu} + 2g_{\mu 5}\dot{w}\dot{x^\mu} + g_{55}\dot{w}^2\right] \tag{4.33}$$

Usando agora a equação de Euler-Lagrange para encontrar o momento conjugado e $\dot{w}$ obtêm-se,

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x^\mu}} = \hat{P}_\mu = \dot{x}_\mu + g_{5\mu}\dot{w} \tag{4.34}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{w}}\right) = 0 \quad \text{e portanto} \quad \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{w}} = cte = a \tag{4.35}$$

e assim encontramos o seguinte resultado para $\dot{w}$,

$$\dot{w} = \frac{a}{g_{55}} - \frac{g_{\mu 5}\dot{x^\mu}}{g_{55}} \tag{4.36}$$

Substituindo o valor de $\dot{w}$ em (4.32) e (4.34) obtemos que:

$$\hat{S} = \frac{1}{2}\int_{\tau 1}^{\tau 2} \left[\left(g_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu 5}g_{\nu 5}}{g_{55}}\right)\dot{x^\mu}\dot{x^\nu} + \frac{a g_{\mu 5}}{g_{55}}\dot{x^\mu} + a\dot{w}\right] d\tau \tag{4.37}$$

$$\hat{P}_\mu = \left(g_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu 5}g_{\nu 5}}{g_{55}}\right)\dot{x^\nu} + \frac{a g_{\mu 5}}{g_{55}} \tag{4.38}$$

e por fim vemos que o termo $a\dot{w}$ da equação (4.37) é um termos de superfície e quando integrado é zero, portanto obtemos que a ação e sua Lagrangiana são

$$\hat{S} = \frac{1}{2}\int_{\tau 1}^{\tau 2}\left[\left(g_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu 5}g_{\nu 5}}{g_{55}}\right)\dot{x^{\mu}}\dot{x^{\nu}} + \frac{a g_{\mu 5}}{g_{55}}\dot{x^{\mu}}\right]d\tau \tag{4.39}$$

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu 5}g_{\nu 5}}{g_{55}}\right)\dot{x^{\mu}}\dot{x^{\nu}} + \frac{1}{2}\frac{a g_{\mu 5}}{g_{55}}\dot{x^{\mu}} \tag{4.40}$$

agora se compararmos as lagrangianas (4.40) com a (4.30) nota-se que $\gamma_{\mu\nu} = \left(g_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu 5}g_{\nu 5}}{g_{55}}\right)$, que é diferente da proposta por Kaluza ($\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$). Também nata-se que $g_{5\mu} = g_{55}A_{\mu}$ e $a = 2q/c$. Assim a métrica fica

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} - g_{55}(dw - \frac{g_{5\mu}}{g_{55}}dx^{\mu})^2, \tag{4.41}$$

onde

$$\gamma_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} - g_{55}A_{\mu}A_{\nu} & g_{55}A_{\mu} \\ g_{55}A_{\nu} & -g_{55} \end{pmatrix} \tag{4.42}$$

e sua inversa é dada por

$$\gamma^{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & A^{\nu} \\ A_{\mu} & -1/g_{55} + A_{\mu}A^{\mu} \end{pmatrix} \tag{4.43}$$

que é uma métrica invariante sob as transformações (4.9), (4.12) e (4.13) definindo-se $g_{55} = \alpha$, onde α é uma constante. Assim essa métrica é invariante sob uma transformação geral de coordenadas e sob uma transformação da coordenada extra acompanhada de uma transformação de calibre.

4.3 Ação de Einstein-Hilbert da teoria KK

Klein ainda calculou a ação de EH em 5-D, variou-as e encontrou as equações da TRG de Einstein, onde o tensor energia-momento das equações é justamente o tensor energia-momento do campo eletromagnético [19]. Para a obtenção da ação de EH em 5-D teremos a seguinte equação:

$$\hat{S} = \frac{1}{16\pi\hat{G}}\int_{\Omega}\hat{R}\sqrt{\gamma}d^5x \tag{4.44}$$

onde $\hat{G}$, $\hat{R}$ e γ representam, respetivamente, a constante gravitacional, o escalar de Ricci e o determinante do tensor métrico γ_{AB} . Para um caso mais geral da redução dimensional de 5-D para 4-D vamos considerar nas equações (4.42) e (4.43) que $g_{55} = \phi(x^{\mu})$, onde

$\phi(x^\mu)$ é um campo escalar, e posteriormente podemos tomar o caso particular tomado por Klein quando fizermos $\phi = cte$. Vamos calcular os símbolos de Christoffel $\hat{\Gamma}^A_{BC}$ onde o índice latino $A = 0, 1, 2, 3, 5$, assim temos que

$$\hat{\Gamma}^A_{BC} = \frac{1}{2}\gamma^{AD}\left(\partial_B\gamma_{CD} + \partial_C\gamma_{DB} - \partial_D\gamma_{BC}\right) \tag{4.45}$$

de onde tiramos os seguintes resultados.

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}^\mu_{55} &= \frac{1}{2}\partial^\mu\phi \qquad (4.46)\\
\hat{\Gamma}^5_{55} &= \frac{1}{2}A^\nu\partial_\nu\phi\\
\hat{\Gamma}^\nu_{\mu 5} &= \frac{\phi}{2}\phi F^\nu_\mu - \frac{1}{2}A_\mu\partial^\nu\phi\\
\hat{\Gamma}^5_{5\mu} &= \frac{1}{2}\phi\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}\phi A_\nu F^\nu_\mu - \frac{1}{2}A_\mu A^\nu\partial_\nu\phi\\
\hat{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda} &= \Gamma^\mu_{\nu\lambda} - \frac{\phi}{2}A_{(\nu}F^\mu_{\lambda)} + \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}A_\nu A_\lambda\partial_\alpha\phi\\
\hat{\Gamma}^5_{\mu\nu} &= A_\beta\Gamma^\beta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_{(\mu}A_{\nu)} - \frac{1}{2\phi}A_{(\nu}\partial_{\mu)}\phi - \frac{\phi}{2}A^\lambda A_{(\mu}F_{\nu)\lambda} + \frac{A_\lambda}{2}A_\mu A_\nu\partial_\lambda\phi
\end{aligned}$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$ e $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ é o símbolo de Christoffel em 4-D. Com esses resultados pode-se calcular o tensor de Ricci $\hat{R}_{AB}$ e posteriormente o escalar de Ricci $\hat{R}$. O tensor de Ricci é dado por

$$\hat{R}_{AB} = \partial_B\hat{\Gamma}^C_{AC} - \partial_C\hat{\Gamma}^C_{AB} + \hat{\Gamma}^C_{AD}\hat{\Gamma}^D_{BC} - \hat{\Gamma}^C_{CD}\hat{\Gamma}^D_{AB} \tag{4.47}$$

onde, usando os valores dos $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ acima, obtêm-se

$$\hat{R}_{55} = -\frac{1}{2}\nabla^2\phi + \frac{\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi}{4\phi} + \frac{\phi^2F^2}{4} \tag{4.48}$$

$$\hat{R}_{5\mu} = -\frac{3}{4}F^\alpha_\mu\partial_\alpha\phi - \frac{\phi}{2}\nabla_\nu F^\nu_\mu - \frac{A_\mu}{2}\nabla^2\phi - \frac{A_\mu}{4\phi}\partial^\nu\phi\partial_\nu\phi + \frac{\phi^2}{4}A_\mu F^2 \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} &- \frac{3}{4}\partial^\alpha\phi A_{(\mu}F_{\nu)\alpha} - \frac{1}{2\phi}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - \frac{\phi}{2}\nabla_\alpha F_{(\mu}{}^\alpha A_{\nu)} + \frac{1}{2}\nabla^2\phi A_\mu A_\nu \qquad (4.50)\\
&+ \frac{\phi}{4}F_{\alpha(\mu}F_{\nu)}{}^\alpha + \frac{\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi}{4\phi^2} + \frac{1}{4\phi}(\nabla\phi)^2A_\mu A_\nu + \frac{\phi^2}{4}A_\mu A_\nu F^2
\end{aligned}$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci em 4-D. Com esses resultado obtemos o escalar de Ricci

$$\begin{aligned} \hat{R} &= \hat{g}^{AB}\hat{R}_{AB} = R + \frac{\phi}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi}{2\phi^2} + \frac{\Box\phi}{\phi} \\ \hat{R} &= R + \frac{\phi}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{2}{\sqrt{\phi}}\Box\sqrt{\phi} \end{aligned} \tag{4.51}$$

Assim vemos que podemos também obter o escalar de Ricci com menos trabalho e com mais elegância usando o formalismo de formas diferenciais e as equações de estrutura de Cartan, que foram abordado em capítulos anteriores.

Agora substituirmos o valor de $\hat{R}$ em (4.44) temos a seguinte ação

$$\hat{S}_{KK} = \frac{1}{16\pi\hat{G}}\int\sqrt{-g}\sqrt{\phi}\left(R + \frac{\phi}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{2}{\sqrt{\phi}}\Box\sqrt{\phi}\right)d^4x\int dw \tag{4.52}$$

que é a ação de Kaluza-Klein. Assumindo que a dimensão extra é compacta e varia de 0 até $2\pi r$, onde r é o raio de compactificação da dimensão extra, e que $\Box\phi$ é um termo de divergência que quando integrado é zero, e fazendo um reescalonamento no campo A_μ, $A_\mu \to kA_\mu$, temos a seguinte ação

$$\hat{S}_{KK} = \frac{2\pi r}{16\pi\hat{G}}\int\sqrt{-g}\sqrt{\phi}\left(R + \frac{\phi k^2}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)d^4x \tag{4.53}$$

onde temos que

$$G = \frac{\hat{G}}{2\pi r} \tag{4.54}$$

em que G é a constante gravitacional em 4-D e onde definindo a nova constante k como $k = 4\sqrt{\pi G}$. Assim obtemos a ação

$$\hat{S}_{KK} = \frac{1}{16\pi G}\int\sqrt{-g}\sqrt{\phi}\left(R + \frac{\phi k^2}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)d^4x \tag{4.55}$$

esta é a ação de Kaluza-Klein no referencial de Jordan. Neste referencial o compo escalar ϕ tem um escalonamento global diferenciando-o da ação de Kaluza-Klein no referencial de Einstein que não possui este campo escalar. Variando a ação acima obtemos as seguintes equações de movimento [22] [23]

$$G_{\mu\nu} = \frac{k^2\phi}{2}T^{EM}_{\mu\nu} + \frac{1}{2\phi}(g_{\mu\nu}\Box\phi - \nabla_\mu\nabla_\nu\phi) + \frac{1}{4\phi^2}(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}\nabla_\lambda\phi\nabla^\lambda\phi) \tag{4.56}$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{3F^{\mu\nu}}{2\phi}\partial_\mu\phi \tag{4.57}$$

$$\Box\phi = \frac{\phi^2k^2}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{\nabla_\nu\phi\nabla^\nu\phi}{2\phi} \tag{4.58}$$

onde $T^{EM}_{\mu\nu} = -F_{\mu}{}^{\lambda}F_{\nu\lambda} + \frac{g_{\mu\nu}}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ que é o tensor de energia-momento e $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Temos então o chamado milagre de Kaluza-Klein, pois obtemos o tensor momento-energia do campo eletromagnético em 4-D partindo de uma teoria puramente geométrica em 5-D, Kaluza adotou que $\hat{G}_{MN} = 0$ ou a própria geometria em 5-D gera o tensor energia-momento em 4-D. Neste contexto temos dois casos importantes, o primeiro sendo $\phi =$constante e no segundo $A_\mu = 0$.

Para o primeiro caso no qual o campo escalar constante iremos assumir $\phi = 1$ e obteremos a seguinte ação

$$\hat{S}_{kk} = \frac{1}{16\pi G}\int \sqrt{-g}\left(R + \frac{k^2}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)d^4x. \tag{4.59}$$

Esta ação descreve a gravidade de Einstein em quatro dimensões acoplada a um campo eletromagnético, e consecutivamente obteremos as seguintes equações de movimento:

$$G_{\mu\nu} = \frac{k^2}{2}T^{EM}_{\mu\nu}, \tag{4.60}$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{4.61}$$

$$\tag{4.62}$$

Assim, a teoria da relatividade de Einstein e o eletromagnetismo foram supostamente unificados [24]. Contudo esta escolha de ϕ não é consistente com a equação (4.58) se $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \neq 0$, fato primeiro notado por Jordan [25] e Thiry [26]. Assim a restrição $A_\mu = 0$ nos mostra que estamos trabalhando em um referencial especial, ou seja, se não podemos escolher um referencial onde $A_\mu \neq 0$ a teoria de Kaluza-Klein não é invariante sobre transformações gerais de coordenadas e mesmo adotando $A_\mu = 0$ não teremos uma unificação já que teremos apenas o termo gravitacional. Podemos deixar a ação (4.55) parecida com a ação de Einstein-Hilbert adicionada da ação do campo eletromagnético sem precisarmos assumir $\phi =$ constante fazendo uma transformação conforme. Quando trabalhamos com a ação (4.55) dizemos que estamos no referencial de Jordan, assim passaremos do referencial de Jordan para o referencial de Einstein onde não teremos a dependência de $\sqrt{\phi}$ em R.

4.3.1 Transformação Conforme

Vimos que pela ação (4.55) podemos obter os equações de Einstein e as equações para o eletromagnetismo, porém apenas quando fazemos o caso em que o campo ϕ é constante, mas podemos considerar ϕ sendo dinâmico porém temos que nos assegurar que a

Teoria da Relatividade Geral que tem como base o Princípio de Equivalência continue valendo mesmo quando temos um campo ϕ variando. Nosso problema é que na teoria de Einstein em 4-D, equação (4.59), não temos nenhum campo escalar do tipo $\sqrt{\phi}$ multiplicando o escalar de Ricci diferente da ação em (4.55), assim teremos que eliminar este termo usando uma transformação conforme na métrica [27] [24] da seguinte forma:

$$g_{\mu\nu} \to \Omega^2 g_{\mu\nu} \tag{4.63}$$

e escolher o fator apropriado Ω também chamado de fator de Weyl. Em um espaço-tempo em D-dimensões o resultado da correspondente mudança do tensor de Ricci é

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} \to R_{\mu\nu} - (D-2)\nabla_\mu\nabla_\nu ln\Omega - g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta ln\Omega + (D-2)(\nabla_\mu ln\Omega)\nabla_\nu ln\Omega \\ -(D-2)g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}(\nabla_\alpha ln\Omega)\nabla_\beta ln\Omega \end{aligned} \tag{4.64}$$

Assim temos que o escalar de Ricci muda para

$$R \to \Omega^{-2}[R - 2(D-1)\Box ln\Omega - (D-2)(D-1)(\nabla ln\Omega)^2] \tag{4.65}$$

Fazendo a transformação conforme na ação (4.55) para D=4 onde $\sqrt{-g} \to \Omega^4\sqrt{-g}$, obtemos que o valor do fator escalar $\Omega = \phi^{-\frac{1}{4}}$ teremos a seguinte ação

$$\hat{S}_{KK} = \frac{1}{16\pi G}\int\sqrt{-g}\left(R + \frac{\phi^{\frac{3}{2}}k^2}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{15}{8}\frac{\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi}{\phi^2} + \frac{3}{2}\frac{\Box\phi}{\phi}\right)d^4x \tag{4.66}$$

ou, fazendo uma integração por partes nos últimos dois termos da integral, temos

$$\hat{S}_{kk} = \frac{1}{16\pi G}\int\sqrt{-g}\left(R + \frac{\phi^{\frac{3}{2}}k^2}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{3}{8}\frac{\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi}{\phi^2}\right)d^4x \tag{4.67}$$

Depois desta transformação conforme, estamos agora no referencial de Einstein. Vemos que conseguimos eliminar o termo que acompanhava o escalar de Ricci e obter uma ação similar a ação (5.59).

4.4 Compactificação

Falamos da quinta dimensão até agora como uma ferramenta matemática mas não falamos nada sobre sua natureza Física e o fato dela não ter sido observada experimentalmente. Somente em 1926 foi que Klein estendeu a ideia de Kaluza onde ele havia postulado a independência dos campos com relação a dimensão extra [20]. Klein sugere que a dimensão extra poderia ser compactificada em um círculo de tamanho $2\pi r \sim M_{pl}^{-1}$, de modo que a variedade V_5 resultasse do produto direto $V_5 = V_4 \times S_1$, onde V_4 denota uma variedade Riemanianna (espaço-tempo) e S_1 um circulo que é a variedade relacionada ao grupo de simetria U(1) do eletromagnetismo. Isso nos indica que qualquer campo $f(x^\mu, \omega)$ se torna periódico em relação a quinta coordenada que denotamos como ω, de modo que $f(x^\mu, \omega) = f(x^\mu, \omega + 2\pi r)$, onde r representa o raio da quinta dimensão. Essa simetria circular nos permite expandir a métrica e os campos em série de Fourier com respeito a dimensão extra tal que possamos escrever nossos campos da seguinte maneira:

$$g_{MN}(x^\mu, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g^n_{\mu\nu}(x^\mu) e^{\frac{in\omega}{r}}, \tag{4.68}$$

$$A_N(x^\mu, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A^n_\mu(x^\mu) e^{\frac{in\omega}{r}}, \tag{4.69}$$

$$\phi(x^\mu, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi^n(x^\mu) e^{\frac{in\omega}{r}}, \tag{4.70}$$

$$\tag{4.71}$$

onde o superescrito n refere-se ao n-ésimo módulo de Fourier. Para o caso do campo escalar temos a seguinte ação

$$S = \int d^5x \partial_M \phi(x^\mu, \omega) \partial^M \phi(x^\mu, \omega), \tag{4.72}$$

e expandindo o campo escalar em série de Fourier ficamos com a seguinte ação

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi^{(0)} \partial^\mu \phi^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\partial_\mu \phi^{(n)\dagger} \partial^\mu \phi^{(n)} - \frac{n^2}{r^2} \phi^{(n)\dagger} \phi^{(n)} \right) \right]. \tag{4.73}$$

Para esse resultado assumimos que ϕ é um campo real o que implica que $\phi^{(-n)} = \phi^{(n)\dagger}$. Podemos escrever a ação em 5-D para cada campo, expandindo-los em série de Fourier e integralos na quinta dimensão para, em fim, podermos ver que a ação obtida por Kaluza é na verdade o módulo não massivo, ou seja $n = 0$, na expansão da série de Fourier, e para $n \neq 0$ teremos as torres de Kaluza-Klein que são os módulos massivos da série. Portanto vemos que a relação entre a massa e o raio da dimensão extra é

$$m \sim \frac{n}{r} \tag{4.74}$$

onde r é o raio da dimensão extra e n são os n-ésimos termos da expansão da série de Fourier. Podemos ainda generalizar para

$$m^2 = \frac{n^2}{r^2} \tag{4.75}$$

Contudo vemos que para $n \neq 0$ e adotando a ideia de Klein onde não vemos a dimensão extra devido seu raio ser muito pequeno, então teríamos para o caso massivo partículas com massas muito grandes. Se r fosse da ordem do comprimento de Planck, $10^{-33}cm$, as massas seriam da ordem de 10^{19}GeV (a massa de Planck), uma escala tão enorme que impossibilita a observação destes tipos de partículas em escalas de energia comuns ao modelo padrão de partículas, assim ignoramos os modos massivos de Kaluza-Klein e trabalhamos apenas com o modo não massivo e real (o modo-zero de Kaluza-Klein)[28]. Se adotarmos que o raio é muito grande fazendo assim desaparecer o problema de partículas muito massivas, teremos outro problema pois já que o raio da dimensão extra é muito grande, essa dimensão já poderia ter sido observada.

4.4.1 Mecanismos de Compactificação

Vimos que para que a teoria de Kaluza-Klein recaia em uma teoria de 4-D tivemos que fazer uma redução dimensional baseada na ideia de que a quinta dimensão era compacta e mostramos que ela nada mais é do que o módo zero de uma expansão dos campos por série de Fourier, porém esse é o caso que tem uma solução clássica de compactificação espontânea, mas se quisermos uma teoria tipo Kaluza-Klein em (4+D)-dimensões com (D>1) não podemos usar o mesmo método usado anteriormente, pois as soluções já não são tão triviais. Devido essa complicação em compactificar a teoria com D-dimensões extras foram criados vários mecanismos de compactificação espontânea (baseado em um tensor de campo totalmente antissimétrico, Campos de Yang-Mills, flutuação quântica, monopólos, instantons, generalização da ação em grandes curvaturas, ...)[14], nós nos concentraremos no primeiro caso que é a introdução de um tensor totalmente antissimétrico na teoria de Kaluza-Klein.

A compactificação espontânea se baseia na introdução de um tensor totalmente antissimétrico, que será um tensor de energia-momento na teoria de Kaluza-Klein, assim acabando com a ideia original de Kaluza que queria obter as equações de movimento em 4-D por meio de uma teoria totalmente geométrica em 5-D. Esse método de compactificação é chamado de compactificação de fluxo onde nosso tensor antissimétrico é uma espécie de fluxo de campo, e foi primeiro introduzida pelos Físicos Peter Freund e Mark Rubin em 1980 [29] para estudos de Super-Gravidade em 11-D. Para uma teoria da gravitação em 11-

D (super-gravidade) nós podemos encontrar 7 ou 4 dimensões do tipo espaço compactas.

Pelo exemplo de compactificação de Freund-Rubin nós começamos considerando a ação de Einstein-Maxwell em D-dimensões, sabendo que o tensor do campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$ é uma 2-forma, como visto em capítulos anteriores, e que consideramos esse tensor como um fluxo do campo eletromagnético podendo assim compactificar 2 ou $(D-2)$-dimensões espaciais se nós escolhermos uma forma específica para a métrica e para o campo de fluxo. As equações Einstein-Maxwell em D-dimensões são

$$\begin{aligned} R^{MN} - \frac{1}{2}g^{MN}R &= -8\pi G(F_P{}^M F^{PN} - \frac{1}{4}g^{MN}F_{AB}F^{AB}) && (4.76) \\ \nabla_M F^{MN} &= 0, && (4.77) \end{aligned}$$

onde F^{MN} é um tensor de rank dois totalmente antissimétrico. Podemos ver que a solução das equações acima de um espaço-tempo de D-dimensões como um produto de duas variedades Riemannianas, uma de 2-dimensões e a outra de $(D-2)$-dimensões: $V_D = V_2 \times V_{D-2}$, similarmente ao caso da teoria de Kaluza-Klein em 5-D que era composto como $V_5 = V_4 \times S_1$. Sabemos que o tensor F_{MN} é proporcional ao tensor de Levi-Civita em V_2. Com isso podemos escrever, nossa métrica em blocos como sendo

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}(x^p) & 0 \\ 0 & g_{mn}(x^q) \end{pmatrix} \tag{4.78}$$

onde μ, ν, $p = 1, 2$ e m, n, $q = D-2$. As equações de Maxwell admitem a seguinte solução

$$F^{MN} = \left(\epsilon^{MN}/\sqrt{|g|}\right) f, \tag{4.79}$$

onde

$$\begin{aligned} \epsilon^{MN} &= \epsilon^{\mu\nu}, \quad \text{para} \quad M = \mu \quad \text{e} \quad N = \nu, && (4.80) \\ \epsilon^{MN} &= 0, \quad \text{para qualquer outro caso} \end{aligned}$$

onde temos que $\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}$ e que $\epsilon^{\mu\nu} = +1$ para $\mu < n$, g é o determinante da métrica g_{MN}, e f é uma constante com dimensão de massa ao quadrado. Assim notamos que o termo $F_{AB}F^{AB}$ das equações de Einstein dá um termo de constante cosmológica geral:

$$\begin{aligned} F_{AB}F^{AB} &= \left(\epsilon_{AB}.\sqrt{|g|}\right) f. \left(\epsilon^{AB}/\sqrt{|g|}\right) f \\ F_{AB}F^{AB} &= 2f^2 sgn(g) \end{aligned} \tag{4.81}$$

Temos que os primeiros termos são nulos exceto para $M = \mu$ e $N = \nu$, onde este é proporcional a g^{MN}. Assim o termo de fonte das equações de Einstein reduz se a termos de constante cosmológicas com diferentes valores para V_2 e V_{D-2}. Com isso podemos definir o escalar de curvatura de V_2 como $R_2 = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ e para V_{D-2} temos $R_{D-2} = g^{mn}R_{mn}$, onde $R = R_2 + R_{D-2}$[29] [30]. Assim obtemos as seguintes escalares de curvatura

$$R_{D-2} = \lambda, \; R_2 = -2\frac{D-3}{D-2}\lambda \tag{4.82}$$

onde

$$\lambda = 8\pi G f^2 sgn(g_2) \tag{4.83}$$

Por fim vemos que para uma variedade Riemanniana compacta o seu escalar de curvatura tem que ser negativo. Notamos que para $D \geq 4$ temos que $Gf^2 > 0$ assim R_2 e R_{D-2} tem sinais opostos enquanto que R_{D-2} e g_2 tem o mesmo sinal. Isso implica que quando a dimensão temporal estiver em V_2 a variedade V_{D-2} é compacta e vice-versa.

Agora podemos generalizar a compactificação para (q)-dimensões bastando trocar o campo vetorial na equação (5.76) por um tensor de fluxo de campo totalmente antissimétrico de rank $(q-1)$ e correspondentemente o tensor do campo eletromagnético será então componentes de um tensor totalmente antissimétrico de rank q podendo assim estabilizar a compactificação de q ou $D-q$ dimensões. Nossa ação (D)-dimensão Einstein-Maxwell é

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int dx^d\sqrt{-g}\left(R - \frac{1}{q!}F^2_{(q)}\right) \tag{4.84}$$

onde R é o escalar de curvatura, $F_{(q)}$ é o fluxo de campo em q-forma e $g = det(g_{MN})$, é o determinante da métrica total. Variando a ação (4.83) teremos a seguintes equações de Einstein

$$R^{MN} - \frac{1}{2}g^{MN}R = -8\pi G T^{MN}, \tag{4.85}$$

$$T^{MN} = \frac{1}{(q-1)!}F^{M}_{L_1 \ldots L_{q-1}}F^{L_1 \ldots L_{q-1}N} - \frac{1}{2q!}F^2 g^{MN}, \tag{4.86}$$

$$\nabla_M F^{ML_1 \ldots L_{q-1}} = 0 \tag{4.87}$$

se contrairmos o tensor de Einstein usando a métrica inversa g_{MN} teremos a expressão do escalar de Ricci R do espaço (D)-dimensões

$$R = \lambda \frac{(2q-D)}{(D-2)} \tag{4.88}$$

substituindo o escalar de Ricci na equação (4.84) obteremos uma geral expressão para o tensor de Ricci:

$$R^{MN} = -8\pi G \left[\frac{1}{(q-1)!} F^{M}_{L_1 \ldots L_{q-1}} F^{L_1 \ldots L_{q-1} N} - \frac{1}{q!} \frac{(q-1)}{(D-2)} F^2 g^{MN} \right] \tag{4.89}$$

assim como feito anteriormente podemos escrever essa variedade como $V_D = \mathcal{M}_{D-q} \times \mathcal{N}_q$ tal que a métrica é da forma

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}(x^p) & 0 \\ 0 & g_{mn}(x^q) \end{pmatrix} \tag{4.90}$$

onde o escalar de curvatura pode ser escrito como uma soma dos dois escalares das separadas variedades $R = R_{\mathcal{M}_{d-q}} + R_{\mathcal{N}_q}$ e onde o escalar $R_{\mathcal{M}_D}$ e o $R_{\mathcal{N}_q}$ são dados por

$$R^{\mu\nu}_{\mathcal{M}_{D-q}} = \frac{1}{(q-1)!} F^{\mu}_{L_1 \ldots L_{q-1}} F^{L_1 \ldots L_{q-1} \nu} - \frac{1}{q!} \frac{q-1}{D-2} F^2 g^{\mu\nu} \tag{4.91}$$

$$R^{mn}_{\mathcal{N}_q} = \frac{1}{(q-1)!} F^{m}_{L_1 \ldots L_{q-1}} F^{L_1 \ldots L_{q-1} n} - \frac{1}{q!} \frac{q-1}{D-2} F^2 g^{mn} \tag{4.92}$$

agora escolhendo a q-forma campo fluxo proporcional ao completamente antissimétrico tenso em N_q temos

$$F^{M1 \ldots Mq} = f sgn(g_q) \left(\epsilon^{M1 \ldots Mq} / \sqrt{|g_q|} \right), \tag{4.93}$$

onde

$$\epsilon^{MN} = \epsilon^{m1 \ldots mq} / \sqrt{-g_q}, \tag{4.94}$$

$$\epsilon^{MN} = 0, \; \textit{para qualquer outro caso.}$$

onde f é uma constante a ser definida. Por fim nos obtemos o escalar de Ricci nas duas variedade anterior contraindo com a métrica inversa e obtendo

$$R_{\mathcal{M}_{D-q}} = \lambda \frac{(D-q)(q-1)}{(D-2)}, \quad \text{e} \quad R_{\mathcal{N}_q} = -\lambda \frac{q(D-q-1)}{(D-2)}. \tag{4.95}$$

onde

$$\lambda = 8\pi G f^2 sgn(g_q) \tag{4.96}$$

vemos que se escolhermos $q = 2$ recuperamos o resultado de Freund e Rubin. Por fim mostramos que o escalar tem sinal oposto do escalar da variedade $\mathcal{M}_{D-q}$, assim sendo uma variedade compacta. Provamos assim que a introdução de um tensor de fluxo q-forma pode compactar naturalmente p ou q dimensões espaciais.

4.4.2 Kaluza-Klein em formas diferenciais

Vamos agora calcular o tensor de Riemann, o tensor de Ricci e o seu escalar na teoria de Kaluza-Klein usando formas diferenciais, mostrando assim que é bem menos trabalhoso [27] [24]. Usaremos a notação de vierbein descrita nas sessões anteriores onde os índices do espaço-tempo quadridimensionais curvo serão representados pelas letras gregas $\mu, \nu, \alpha, ..$ e que variam de 0,1,2,3 e os índices do espaço-tempo plano (espaço de Minkowski) serão representados por $\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\alpha}, ...$, e assim temos que $g_{\mu\nu} = e^{\bar{\mu}}_{\mu} e^{\bar{\nu}}_{\nu} \eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$. Usando nossa métrica (4.41) e escolhendo nosso $g_{55} = -\phi$ e nosso $-g_{5\mu}/g_{55} = A_\mu$ e tomando $dw = dx^5$ podemos obter nossa base ortonormal 1-forma partindo da seguinte expressão:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \phi(dx^5 + A_\mu dx^\mu)^2, \tag{4.97}$$

onde, fazendo a mudança para o espaço plano, temos

$$ds^2 = \eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} e^{\bar{\mu}}{}_{\mu} e^{\bar{\nu}}_{\nu} dx^\mu dx^\nu + \phi(dx^5 + A_\mu dx^\mu)^2 \tag{4.98}$$

onde definimos que

$$\begin{aligned} \omega^{\bar{\mu}} &= e^{\bar{\mu}}{}_{\mu} dx^\mu && (4.99) \\ \omega^{\bar{5}} &= \sqrt{\phi}(dx^5 + A_\mu dx^\mu) && (4.100) \\ & && (4.101) \end{aligned}$$

podemos então ver que $e^{\bar{5}}{}_{5} = \sqrt{\phi}$, $e^{\bar{5}}{}_{\mu} = \sqrt{\phi} A_\mu$ e $e^{\bar{\mu}}{}_{5} = 0$. Agora usando a primeira equação de estrutura de Cartan com termo de torção nulo ($de^{\bar{\alpha}} = -\Omega^{\bar{\alpha}}_{\bar{\lambda}} \wedge e^{\bar{\lambda}}$) encontraremos a conexão de spin. Fazendo a derivada exterior da forma ($\omega^{\bar{5}}$) obtemos

$$d\omega^{\bar{5}} = \frac{1}{2}\phi^{-1/2}\partial_\rho(\phi) dx^\rho \wedge (dx^5 + A_\mu dx^\mu) + \phi^{1/2}\partial_\rho(A_\mu) dx^\rho \wedge dx^\mu \tag{4.102}$$

sabendo que $F_{\rho\mu} = \partial_\rho A_\mu - \partial_\mu A_\rho$, usando a antissimetria de $dx^\rho \wedge dx^\mu$ e a transformação $\partial_\rho = e^{\bar{\rho}}{}_{\rho} \partial_{\bar{\rho}}$ obtemos que

$$d\omega^{\bar{5}} = \frac{1}{2\phi}\partial_{\bar{\rho}}(\phi)\omega^{\bar{\rho}} \wedge \omega^{\bar{5}} + \frac{\phi^{1/2}}{2} F_{\bar{\mu}\bar{\rho}} \omega^{\bar{\rho}} \wedge \omega^{\bar{\mu}}. \tag{4.103}$$

Comparando agora o nosso resultado com a primeira equação de estrutura de Cartan para a quinta dimensão ($d\omega^{\bar{5}} = -\bar{\Omega}^{\bar{5}}_{\bar{\rho}} \wedge e^{\bar{\rho}}$) vemos que nossa conexão de spin é

$$\bar{\Omega}^{\bar{5}}{}_{\bar{\rho}} = \frac{\phi^{1/2}}{2} F_{\bar{\mu}\bar{\rho}} \omega^{\bar{\mu}} + \frac{1}{2\phi} \partial_{\bar{\rho}}(\phi) \omega^{\bar{5}} \tag{4.104}$$

Usando a antissimetria dos dois índices ortonormais, nos também encontramos o valor de $\bar{\Omega}^{\bar{\rho}}{}_{\bar{5}}$ onde precisaremos a seguir. Calculemos agora a derivada exterior $d\omega^{\bar{\mu}}$,

$$d\omega^{\bar{\mu}} = -\bar{\Omega}^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}} \wedge \omega^{\bar{\nu}} - \bar{\Omega}^{\bar{\mu}}{}_{\bar{5}} \wedge \omega^{\bar{5}} \tag{4.105}$$

A versão quadrimensional da primeira equação de estrutura de Cartan é

$$d\omega^{\bar{\mu}} = -\Omega^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}} \wedge \omega^{\bar{\nu}} \tag{4.106}$$

implicando assim que

$$\bar{\Omega}^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}} = \Omega^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}} + \frac{1}{2} \phi^{1/2} F_{\bar{\nu}}{}^{\bar{\mu}} \omega^{\bar{5}} \tag{4.107}$$

obtendo assim a conexão de spin nos dois espaços.

Agora em posse das conexões de spin podemos obter o tensor de Riemann e o tensor de Ricci usando a segunda equação de estrutura de Cartan, onde as componentes $R^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\sigma}}$ formam o tensor de curvatura de Riemann no referencial ortonormal onde estamos trabalhando. Neste mesmo referencial a correspondente expansão da conexão de spin é da forma $\Omega^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}} = \Omega^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}\sigma} dx^{\sigma}$ onde $\Omega^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}\sigma}$ são os coeficientes da conexão.

Calculemos primeiro a curvatura da forma $\bar{R}^{\bar{\mu}}{}_{\bar{5}}$ que é

$$\bar{R}^{\bar{\mu}}{}_{\bar{5}} = d\Omega^{\bar{\mu}}{}_{\bar{5}} + \Omega^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}} \wedge \Omega^{\bar{\nu}}{}_{\bar{5}} \tag{4.108}$$

Ao longo da direção $\omega^{\bar{\rho}} \wedge \omega^{\bar{\sigma}}$ nós encontramos as componentes do tensor de curvatura

$$\bar{R}^{\bar{\mu}}{}_{\bar{5}\bar{\rho}\bar{\sigma}} = \frac{1}{2} \phi^{1/2} D^{\bar{\mu}}(F_{\bar{\sigma}\bar{\rho}}) + \frac{1}{4\phi^{1/2}} \left(2D^{\bar{\mu}}(\phi) F_{\bar{\sigma}\bar{\rho}} + D_{\bar{\rho}}(\phi) F_{\bar{\sigma}}{}^{\bar{\mu}} - D_{\bar{\sigma}}(\phi) F_{\bar{\rho}}{}^{\bar{\mu}} \right) \tag{4.109}$$

onde usamos a relação de que $D_{\bar{\mu}}(F_{\bar{\sigma}\bar{\rho}}) = \nabla_{\mu}(F_{\bar{\sigma}\bar{\rho}}) e^{\mu}_{\bar{\mu}}$ para a derivada covariante e simplificamos o resultado usando a identidade de Bianchi $D_{\bar{\mu}}(F_{\bar{\sigma}\bar{\rho}}) + D_{\bar{\sigma}}(F_{\bar{\rho}\bar{\mu}}) + D_{\bar{\rho}}(F_{\bar{\mu}\bar{\sigma}}) = 0$. Com um cálculo similar encontramos as componentes para a direção $\omega^{\bar{\rho}} \wedge \omega^{\bar{5}}$

$$\bar{R}^{\bar{\mu}}{}_{\bar{5}\bar{\rho}\bar{5}} = \frac{\phi}{2} F^{\bar{\mu}\bar{\nu}} F_{\bar{\mu}\bar{\nu}} - \frac{1}{4\phi} D_{\bar{\rho}}(D^{\bar{\mu}}\phi) + \frac{1}{4\phi^2} D^{\bar{\mu}}(\phi) D_{\bar{\rho}}(\phi) \tag{4.110}$$

Estas são todas as componentedo do tensor de Riemann que envolvem o índice da quinta dimensão. Para o caso da componete do tensor de Riemann em 5-D com respeito aos índices $\bar{\mu}\bar{\nu}$ temos

$$\bar{R}^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}} = d\bar{\Omega}^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}} + \bar{\Omega}^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\lambda}} \wedge \bar{\Omega}^{\bar{\lambda}}{}_{\bar{\nu}} + \bar{\Omega}^{\bar{\mu}}{}_{\bar{5}} \wedge \bar{\Omega}^{\bar{5}}{}_{\bar{\nu}} \tag{4.111}$$

e com isso obtemos que

$$\bar{R}^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\sigma}} = R^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\sigma}} + \frac{\phi}{4}\left(2F_{\bar{\nu}}{}^{\bar{\mu}} F_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} - F_{\bar{\rho}}{}^{\bar{\mu}} F_{\bar{\sigma}\bar{\nu}} - F_{\bar{\sigma}}{}^{\bar{\mu}} F_{\bar{\nu}\bar{\rho}}\right) \tag{4.112}$$

que tem a correta antissimetria nos dois primeiros e nos dois últimos índices. Nós também vemos que a simetria $\bar{R}_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\sigma}} = \bar{R}_{\bar{\rho}\bar{\sigma}\bar{\mu}\bar{\nu}}$ é satisfeita. O tensor de Ricci é definido em 4-D como sendo $R_{\bar{\nu}\bar{\sigma}} = R^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}\bar{\mu}\bar{\sigma}}$ e similarmente em 5-D. Ele é simétrico nos dois índices, e suas componentes são

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{\bar{5}\bar{5}} &= \frac{\phi}{2} F^{\bar{\mu}\bar{\nu}} F_{\bar{\mu}\bar{\nu}} - \frac{1}{4\phi} D_{\bar{\mu}}(D^{\bar{\mu}}\phi) + \frac{1}{4\phi^2} D^{\bar{\mu}}(\phi) D_{\bar{\mu}}(\phi) && (4.113)\\
\bar{R}_{\bar{\nu}\bar{5}} &= \frac{\phi^{1/2}}{2} D^{\bar{\mu}}(F_{\bar{\nu}\bar{\mu}}) + \frac{3}{4\phi^{1/2}} F_{\bar{\nu}\bar{\mu}} D^{\bar{\mu}}(\phi) && (4.114)\\
\bar{R}_{\bar{\nu}\bar{\sigma}} &= R_{\bar{\nu}\bar{\sigma}} - \frac{1}{2}\phi F_{\bar{\nu}}{}^{\bar{\mu}} F_{\bar{\mu}\bar{\sigma}} - \frac{1}{2\phi} D_{\bar{\sigma}}(\phi) D_{\bar{\nu}}(\phi) && (4.115)
\end{aligned}$$

Para o escalar de curvatura temos que $\bar{R} = \bar{R}^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\mu}}$, em termos da coordenadas base temos

$$\bar{R} = R - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{\phi} \nabla^2(\phi) + \frac{1}{2\phi^2} (\nabla_\mu \phi)^2 \tag{4.116}$$

Por fim obtemos o mesmo escalar de curvatura por um meio mais rápido e elegante usando formas diferenciais e que as equações de estrutura de Cartan, onde vemos que o formalismo, é bastante poderoso, se tornando uma ferramenta fundamental para quem trabalha em teorias de campo. Podemos encontrar os tensores de Ricci na base curvilínea usando os vierbein $e^{\bar{\mu}}{}_{\mu}$ juntamende com as relações $e^{\bar{\mu}}{}_{5} = 0$, $e^{\bar{5}}{}_{\mu} = \phi^{1/2} A_\mu$ e $e^{\bar{5}}{}_{5} = \phi^{1/2}$.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho exploramos vários aspectos da teoria de Kaluza-Klein e vimos que a teoria não unifica realmente o eletromagnetismo com a gravitação, porem vimos as possibilidades que a adição de uma dimensão extra causa em uma teoria, que neste caso, nos levou a uma teoria mais abrangente e nos deu dicas de como proceder para uma possível unificação. Assim podemos afirmar que um dos caminhos mais atraentes para uma teoria de grande unificação seja a introdução de dimensões extras nas teorias existente ou criando teorias que já partem do pressuposto que existem mais do que quatro dimensões. Essa afirmação vem realmente sendo comprovada teoricamente com o grande avanço de teorias que se apoiaram na ideia de Kaluza e Klein. Também constatamos que a ideia primordial de Kaluza foi perdida já que para uma teoria com mais de uma dimensão extra temos que usar ferramentas para compactificá-las, que no nosso caso foi a compactificação de *Fluxo* onde se adiciona um tensor energia-momento totalmente antissimétrico, assim não obtendo uma teoria puramente geométrica que era sua ideia original. E por fim vimos que é muito vantajoso se trabalhar com formas diferenciais pois as mesmas se mostraram ferramentas poderosas para tal estudo uma vez que sua álgebra nos permitiu obter os mesmos resultados em um menor tempo. Como continuação da pesquisa iremos abordar o modelo de Kaluza-Klein com 2-dimensões, assim trabalhando com um modelo de álgebra não abeliano, e com isso podermos analisar suas consequências em termos de teoria de unificação.

REFERÊNCIAS

[1] LEITE, J. P. O Nominalismo de Quilherme de Ockham:Ontogolia e Semântica. Resista Thaumazein, Ano IV,Número 08, Santa Maria, 29-45.

[2] ALENCAR, GEOVÁ;TAHIM, M. O; MUNIZ, C. R.;COSTA, R. N. Teorias de Tudo como Projeto de Pesquisa. Revista Cadernos de Estudos e Pesquisas do Sertão, Quixadá, v.1, n.1, jul. -dez. 2013,107-115 .

[3] The Nobel Prize in Physics 1979. Disponivel em: < $http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1979/$ >. Acessado em: 18/07/2016 as 14:01.45

[4] KALUZA, T. On the Problem of Unity in Physics. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin *Math.Phys.*, HUPD-8401,966-972,1921.

[5] NORDSTRÖM, G. Relativitätsprinzip und Gravitation, Physikalische Zeitschrift, 13, 1126-29,1912

[6] ALMEIDA, T. S. Geometria de Weyl e a Teori Gravitacional De Nordström. 2010. Dissertação (Mestrado em Física) - Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba.

[7] JARDIM, I. C. *Modelo de Múltiplas Branas Esféricas como uma Descrição Cosmológica.* 2012. 70 f. Tese (Doutorado em Física) - Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará.

[8] NAKAHARA, M. Geometry, Topology and Physics. Taylor & Francis Group, New York, 2003.

[9] BASSALO, J. M. F. Cálculo Exterior. Livraria da Física, São Paulo, 2009.

[10] NOVELO, M. A Interação Gravitacional, Revista Carbono, n.5, 2014 .

[11] EINSTEIN, A. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Sitzung der Physikalisch-Mayhematischen Klasse, vol.25,844-847,(1915).

[12] LANDAU, L. D; LIFSHITZ, E. M. The Classical Theory of Fields. Butterworth-Heinenann, Oxford, 1996.

[13] SCHUTZ, B. A First Course in General Relativity, 2 ed. Cambridge press, 2009.

[14] GASPERINI, M. Theory of Gravitational Interactions, vol 1. Department of Physics University of Bari, Bari, Italy, 2013.

[15] MENDES, W. M. Localização de Férmions em D Dimensões 2015. 56 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará.

[16] YEPEZ, J. Einstein's vierbein field theory of curved space. arXiv:1106.2037 [gr-qc],2011 .

[17] CUNHA, D. C. N. Unificação Geométrica das Interações Fundamentais. 2013. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física da Universidade de Brasília.

[18] STRAUB, W. O. Kaluza-Klein for Kids. Pasadena, California 91104, 2014.

[19] KLEIN, O. Quantum Theory and Five-Dimensional Relativity. Zeit. f. Physik 37 (1926)895.

[20] AMORIM, A. W. Gravitação e eletromagnetismo em cinco dimensões. Revista Physicae, Campinas - SP, Brasil, v.5, n.5, 2005 .

[21] SOUZA, F. E. A. Superpartículas de Brink-Schwarz. 2015. 40 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará.

[22] WILLIAMS, L.L. Field Equations and Lagrangian for the Kaluza Metric Evaluated with Tensor Algebra Software. Journal of Gravity, vol. 2015, Article ID 901870, 6 pages, 2015.

[23] MORGADO, A. 5D Kaluza-Klein theories - a brief review. Departamento de Física, Instituto Superior Técnico, Av. Rovisco Pais 1, 1049-001 Lisboa, Portugal, 2013 .

[24] GRØN, Ø; HERVIK, S. Einstein's General Theory of Relativity. Springer-Verlag, New York, 2007.

[25] JORDAN, P. Erweiterung der projektiven Relativitätstheorie. Ann. Phys. (Leipzig) 1 (1947) 219.

[26] THIRY, Y. Les équations de la théorie unitaire de Kaluza, Comptes Rendus Acad. 226 (1948) 216.

[27] WEHUS, I.W; RAVNDAL F. Dynamics of the scalar field in 5-dimensional Kaluza-Klein theory. Int.J.Mod.Phys. A19 (2004) 4671-4686 .

[28] TAHIM, M. O. Aspectos Clássicos de Gravitação Topológica e Dimensões Extras. 2008. 116 f. Tese (Doutorado em Física) - Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará.

[29] FREUND, P. G. O; RUBIN M. A. Dynamics of dimensional reduction. Physics Letters B,Vol- 97, Issue 2, 1980, 233-235 .

[30] GIMBRÈRE, A. Kaluza Klein Spectra from Compactified and Warped Extra Dimensions. 2014. 64 f. Tese (Doutorado em Física) - Institute of Theoretical Physics in Amsterdam .

[31] WEINBERG, S. Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity. John Wiley Sons,(1972).

[32] BLAGOJEVIÉ, M. Gravitation and Gauge Symmetries. Institute of Physics Publishing, (2002).

[33] WITTER, E. Search for a Realistic Kaluza-Klein Theory. Princeton University,Princeton, Nuclear Physic B186 (1981) 412-428 .

[34] WITTER, E. Instability of the Kaluza-Klein Vacuum. Princeton University,Princeton, Nuclear Physic B195 (1982) 481-492 .