UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOÃO RODRIGUES DE SOUSA FILHO

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS UTILIZANDO O APLICATIVO EUCLIDEA

FORTALEZA

2017

JOÃO RODRIGUES DE SOUSA FILHO

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS UTILIZANDO O APLICATIVO EUCLIDEA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino da Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Frederico Vale Girão

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S697c Sousa Filho, João Rodrigues de.
Construções Geométricas Utilizando o Aplicativo Euclidea / João Rodrigues de Sousa Filho. – 2017.
54 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2017.
Orientação: Prof. Dr. Frederico Vale Girão.

1. Construções geométricas. 2. Aplicativo matemático para smartphone. 3. Resolução de problemas de geometria plana. I. Título.

CDD 510

JOÃO RODRIGUES DE SOUSA FILHO

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS UTILIZANDO O APLICATIVO EUCLIDEA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino da Matemática.

Aprovado em: 30/08/2017

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Frederico Vale Girão (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

A Deus.

Aos meus pais, João Rodrigues de Sousa (*in memorian*) e Ideltrudes Soares de Sousa, meus filhos Thifane Rodrigues Sousa, Esthefane Rodrigues Sousa e João Rodrigues Sousa Neto e à minha querida esposa Aurilene Cruz de Sousa.

A todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por sempre estar ao meu lado durante minhas viagens até a Universidade e em minhas angústias e provações para concluir esse curso. Que o Seu nome seja honrado, glorificado e louvado em todos os lugares deste mundo.

Ao meu pai João Rodrigues de Sousa (*in memorian*) que me ensinou, enquanto em vida, a buscar a realização dos sonhos com honestidade e caráter.

À minha mãe Ideltrudes Soares de Sousa, que sempre me aconselha em minhas decisões, fazendo com que eu nunca perca a fé mesmo diante das dificuldades.

À Aurilene Cruz de Sousa, minha esposa, por estar comigo em todos os momentos e por ter tido compreensão durante esse período do mestrado. Certamente, sem ela, seria muito mais difícil alcançar os objetivos. Obrigado pelo amor e apoio demonstrados.

Aos meus filhos, Thifane Rodrigues Sousa, Esthefane Rodrigues Sousa e João Rodrigues Sousa Neto que são minha inspiração diária.

Aos meus colegas de trabalho da Escola de Ensino Médio Deputado Fernando Mota, em especial ao professor Elinardo Martins, que sempre me apoiou nas horas difíceis transmitindo sabedoria com suas palavras de fé.

Aos meus colegas de turma, cuja valiosa ajuda me auxiliou a superar minhas dificuldades. Agradeço em especial os seguintes: Adriano Ávela, Antônio Batista, Francisco das Chagas, Diego Feitosa, Vandiesio Soares, Iarli Barreto, Jamires Ximenes e Jânio Kleo dentre outros. Além destes, gostaria de agradecer também os colegas Mário Regis Rebouças Torres e Antônio Edilson Cardoso Portela que se tornaram verdadeiros amigos nas horas difíceis e nunca deixaram que eu desistisse de sonhar. Gratidão é o sentimento que tenho por vocês.

Ao meu orientador, Frederico Vale Girão, que além de ser um excelente professor é uma pessoa de grande caráter, tendo bastante paciência na produção deste trabalho.

Aos professores do PROFMAT que repassaram, com sabedoria, um pouco de seus conhecimentos com o rigor necessário para que possamos ter sucesso durante nossa vida docente.

“A geometria é uma ciência de todas as espécies possíveis de espaços.” (IMMANUEL KANT)

RESUMO

A presente dissertação pretende, em um primeiro momento, explicar o aplicativo Euclidea bem como sua utilização no processo de aprendizagem de geometria plana, incluindo a resolução de problemas envolvendo este conteúdo. Essa proposta pretende atingir parte do universo jovem que usa aparelhos smartphones, trazendo assim uma grande oportunidade de tornar as aulas de Matemática mais atrativas. Em um segundo momento, abordaremos a resolução de dezesseis problemas do aplicativo e daremos demonstrações rigorosas de suas construções.

Palavras-chave: Construções geométricas. Aplicativo matemático para smartphone. Resolução de problemas de geometria plana.

ABSTRACT

The present dissertation intends, in a first moment, to explain the Euclidea application as well as its use in the learning process of plane geometry, including the solution of problems involving this subject. This proposal intends to reach part of the young people who use smartphones, bringing a great opportunity to make Math classes more attractive. In a second moment we will solve sixteen problems of the application and give rigorous proofs of their constructions.

Keywords: Geometric constructions. Mathematical application for smartphones. Plane geometry problem solving.

LISTA DE SÍMBOLOS

$=$	Igual
$\neq$	Diferente
$>$	Maior que
$<$	Menor que
$\perp$	Retas perpendiculares
$//$	Retas paralelas
$\overleftrightarrow{AB}$	Reta passando pelos pontos A e B
$\overrightarrow{AB}$	Semirreta com origem no ponto A e passando pelo ponto B
AB	Segmento de reta cujas as extremidades são os pontos A e B
$\lvert AB \rvert$	Comprimento do segmento de reta AB
$A\hat{B}C$	Ângulo formado pelas semirretas $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$
ABC	Triângulo cujos vértices são os pontos A, B e C
$ABCD$	Quadrilátero de lados AB, BC, CD e DA

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Essa dissertação de mestrado tem como propósito apresentar o aplicativo Euclidea como recurso pedagógico para auxiliar os alunos no processo de aprendizagem de geometria plana.

A utilização das novas tecnologias em sala de aula enriquece o processo de aprendizagem dos alunos, pois faz com que o processo educacional permeie o mundo tecnológico em que os jovens do século XXI estão inseridos, fazendo-os participar mais da construção do conhecimento.

Além da parte tecnológica, o aplicativo Euclidea é um jogo que envolve construções da geometria plana, deixando o estudo ainda mais atraente para o público jovem. Antunes (2009, p. 24) afirma o seguinte:

> Trabalhar com jogos não é apenas uma maneira moderna e criativa de ensinar, mas apresenta estratégias motivadoras para um ensino vivo e para uma aprendizagem cheia de significações e transferências positivas, tornando a aula interessante, estimulante e cheia de criatividade.

O uso do Euclidea como aplicativo pedagógico auxilia os professores a tornarem as aulas mais dinâmicas no estudo de geometria, pois um jogo educativo oferece muitas potencialidades e cria um ambiente rico de imagens e animações, fornecendo, dessa maneira, um estudo mais dinâmico, permitindo que o aluno visualize e interaja durante a resolução dos problemas propostos pelo aplicativo.

A escolha para essa linha de pesquisa foi motivada pela necessidade da utilização dos recursos tecnológicos como uma ferramenta didática no processo de construção do conhecimento matemático.

Durante minha vida no magistério, sempre procurei aplicar uma didática mais dinâmica no ensino de matemática, procurando novas formas de motivar os educandos para o aprendizado do conteúdo. Meu trabalho de graduação foi direcionado para a utilização de jogos matemáticos para motivar as crianças do ensino fundamental (II) a se divertirem com a matemática. Com isso, passaram a gostar da disciplina, tida por muitos como uma grande vilã. Para o trabalho de pós-graduação (lato sensu), a linha de pesquisa foi voltada para a utilização do software Geogebra[1] para o ensino de geometria no plano.

---

[1] Aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra em um único software.

Com os estudos anteriores voltados para o uso de tecnologia e a aplicação de jogos, a escolha de um aplicativo que pudesse unir toda essa linha de pesquisa se concentrou no Euclidea, pois se trata de um jogo desafiador utilizando os mais diversos recursos matemáticos, tem uma interface de fácil manipulação, interação e visualização, e ainda, por ser um aplicativo de geometria dinâmica, é possível verificar propriedades e definições da geometria plana utilizando as construções geométricas.

Além disso, é possível implementar no ensino de geometria o conteúdo de desenho geométrico, possibilitando, ao educando, uma visão mais ampla ao tentar resolver problemas dessa natureza. Wagner (2007, p. 19) afirma que:

> As Construções Geométricas devem, em nossa opinião, acompanhar qualquer curso de Geometria na escola secundária. Os problemas são motivadores, às vezes intrigantes e frequentemente conduzem à descoberta de novas propriedades. São educativos no sentido que em cada um é necessária a análise de situações onde se faz o planejamento da construção, seguindo-se a execução dessa construção, a posterior conclusão cobre o número de soluções distintas e também sobre a compatibilidade dos dados.

Com isso, no estudo de construções geométricas, o estudante tem possibilidades variadas de resolver esses problemas utilizando construções mais simples até as mais sofisticadas, possibilitando uma aprendizagem mais ampla do conteúdo. Para Lima Netto (2009, in).

> Muitas vezes, um problema de geometria e, em particular, de construção geométrica, pode ser resolvido de diversas formas, ou seja, por caminhos diferentes: mais curtos, mais longos e também mais bonitos. A Matemática e a arte estão inevitavelmente unidas neste tema das construções geométricas. Se temos prazer em conseguir a solução de um problema, temos um prazer ainda maior em conseguir a solução mais elegante, mais bonita e, porque não, a mais simples, pois na simplicidade está a beleza.

Com toda essa motivação, iniciou-se a elaboração de uma proposta que pudesse abranger a utilização desse aplicativo, bem como a introdução de construções geométricas no conteúdo de geometria plana. A intenção é mostrar como esse aplicativo pode ser utilizado como recurso educacional no ensino de geometria plana, além de aumentar o interesse pelas as aulas, ampliando a compreensão e a aprendizagem desse conteúdo.

No primeiro capítulo será explicado o funcionamento do aplicativo Euclidea, incluindo seus vários recursos, os quais auxiliam o jogador a resolver os problemas propostos.

No segundo capítulo serão apresentados dezesseis problemas com suas respectivas resoluções, seguidas de demonstrações rigorosas de suas construções. Em alguns destes, será necessária uma segunda construção para atender objetivos diferentes.

2 O APLICATIVO EUCLIDEA

O Euclidea é um jogo de matemática que utiliza basicamente ferramentas de régua e compasso para solucionar problemas dos mais simples aos mais sofisticados, levando o jogador a tentar solucionar essas questões usando o mínimo de movimentos.

Durante a construção, não é necessário se preocupar com a quantidade de pontos marcados no plano, pois não são contados na pontuação do jogo.

2.1 Comandos da tela inicial

Ao iniciar o aplicativo, o jogador verá uma tela com três comandos principais (veja figura 1).

Figura 1 – Tela inicial do aplicativo Euclidea.

Fonte: Aplicativo Euclidea.

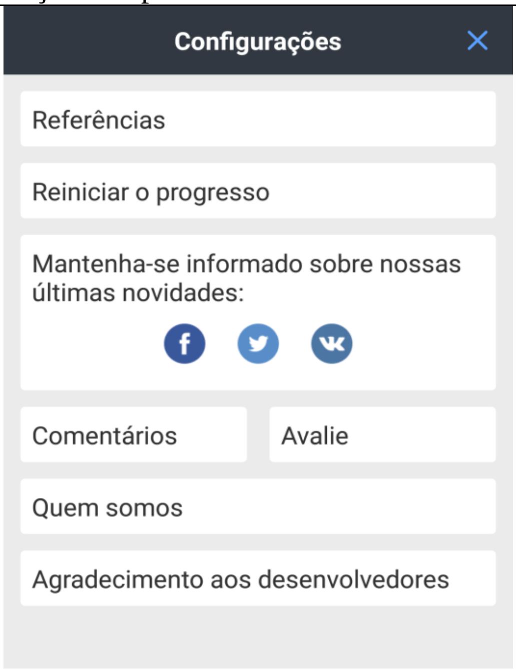
1. Mostra a estatística do jogo (veja figura 2), indicando a quantidade de níveis resolvidos com relação ao total, a quantidade de estrelas e o tempo que foi utilizado para a resolução.

Figura 2 – Tela de estatística do aplicativo.

Fonte: Aplicativo Euclidea.

2. Indica as configurações (veja figura 3), referências, comentários, avaliação, reinício do jogo e redes sociais.

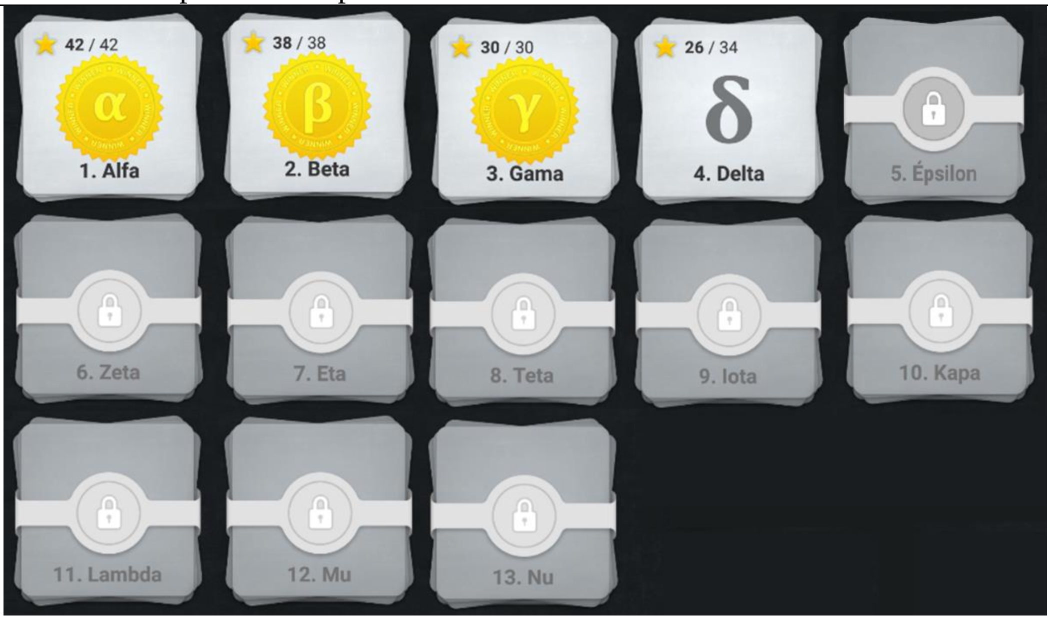
Figura 3 – Tela de configuração do aplicativo.



Fonte: Aplicativo Euclidea.

3. Esse comando leva até a plataforma de pacotes de níveis (veja figura 4), onde o jogador pode iniciar o jogo. Atualmente estão disponíveis 13 pacotes indicados por letras gregas.
   - Pacote 1 : α (alfa).
   - Pacote 2 : β (beta).
   - Pacote 3 : γ (gama).
   - Pacote 4 : δ (delta).
   - Pacote 5 : ε (épsilon).
   - Pacote 6 : ζ (zeta).
   - Pacote 7 : η (eta).
   - Pacote 8 : θ (teta).
   - Pacote 9 : ι (iota).
   - Pacote 10 : κ (kapa).
   - Pacote 11 : λ (lambda).
   - Pacote 12 : μ (mu).
   - Pacote 13 : ν (nu).

Figura 4 – Tela de pacotes do aplicativo.



Fonte: Aplicativo Euclidea.

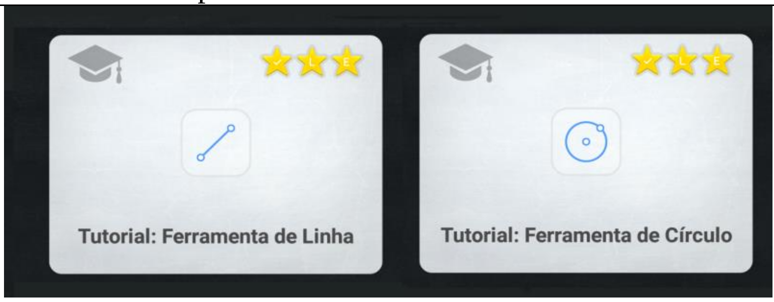
O jogo se desenvolve partindo do pacote α, onde o jogador resolve os problemas e ganha estrelas. Veja que na figura 4, os níveis α, β e γ, estão dourados, isso significa que o jogador descobriu todas as estrelas desses pacotes e passou para o próximo.

2.2 Níveis do aplicativo e tutoriais

O aplicativo Euclidea pode ser utilizado de forma gratuita em todos os pacotes, desde que o jogador consiga resolver todos os níveis. Atualmente os pacotes α e β estão liberados, mas para passar para o pacote γ e posteriores, é necessário ganhar todas as estrelas. Uma outra forma é optar por comprar a licença do aplicativo; assim é possível a mudança de pacote sem a obrigatoriedade de ganhar todas as estrelas.

Cada pacote tem em média dez níveis; nos iniciais há níveis tutoriais sinalizados com um capelo (veja figura 5). Nesse nível o jogador aprenderá a utilizar as ferramentas indicando uma das construções elementares. Essas ferramentas ficarão como ícones e poderão ser utilizadas nos próximos níveis.

Figura 5 – Níveis tutoriais do aplicativo.



Fonte: Aplicativo Euclidea.

No nível α, o Euclidea inicia com alguns tutoriais básicos, como construção de segmento de reta, círculo, marcação de ponto, interseções, ângulo e retas perpendiculares. Dessa forma, o jogador vai adquirindo a habilidade antes de resolver tarefas realmente complicadas.

2.3 Objetivos *L* e *E* do aplicativo

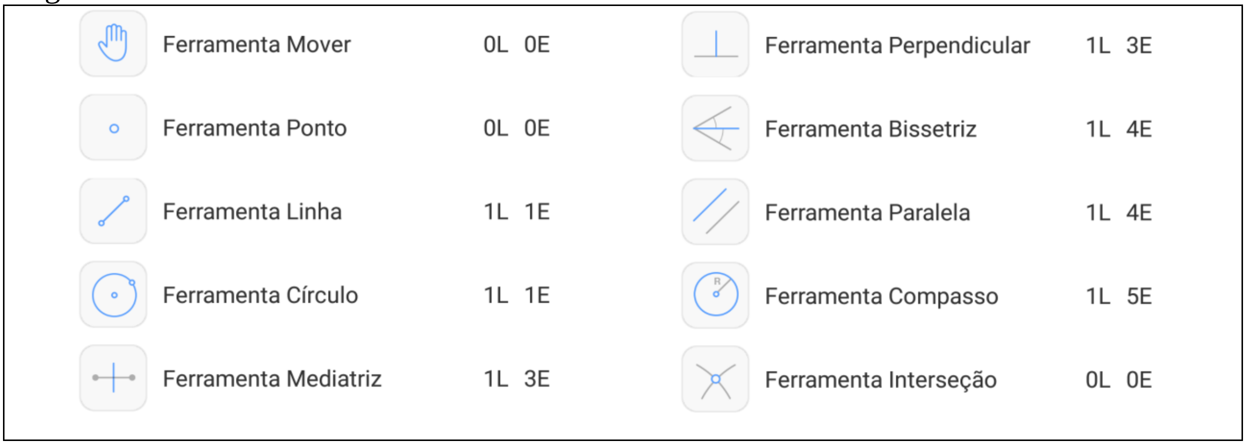
O principal objetivo do jogo é resolver o problema usando o menor número de movimentos possíveis e, quando isso ocorre, a resposta do problema fica em destaque com uma cor alaranjada, indicando que o jogador teve êxito.

Cada nível tem objetivos que são independentes. Segundo as definições do aplicativo (EUCLIDEA, 2017).

> Cada solução é pontuada em dois tipos de movimentos L e E. Em L conta as ações da ferramenta: construção de uma linha, uma perpendicular, e assim por diante. Já para E, conta com movimentos como se uma construção fosse feita com régua e compasso reais. Cada ferramenta avançada tem seu próprio custo E. Os objetivos de L e E podem ser satisfeitos independentemente. Muitos problemas têm solução universal que satisfaz ambos os objetivos. Mas alguns problemas devem ser resolvidos duas vezes: uma solução para atingir o objetivo L e outra solução para atingir o objetivo de E.

Se houver vários objetos que satisfaçam a afirmação de um problema, é possível obter uma estrela V, oculta, construindo todas as respostas (soluções) no mesmo desenho. Normalmente isso implica algum tipo de simetria, logo o jogador precisa adivinhar em que níveis isso é possível, pois a presença de uma estrela V não é mostrada até que a encontre. Essa estrela é mais um desafio em Euclidea, por isso leia atentamente os enunciados.

Figura 6 – Custo E e custo L de cada ferramenta Euclidea.



Ferramenta Mover	0L 0E	Ferramenta Perpendicular	1L 3E
Ferramenta Ponto	0L 0E	Ferramenta Bissetriz	1L 4E
Ferramenta Linha	1L 1E	Ferramenta Paralela	1L 4E
Ferramenta Círculo	1L 1E	Ferramenta Compasso	1L 5E
Ferramenta Mediatriz	1L 3E	Ferramenta Interseção	0L 0E

Fonte: Aplicativo Euclidea.

Os objetivos são nomeados com as letras L e E. O primeiro objetivo indica a quantidade de ferramentas do Euclidea utilizadas na construção, como uma reta, uma perpendicular, uma mediatriz, etc. Já o objetivo E conta os movimentos, como se uma construção fosse feita com régua e compasso reais. Veja na figura 6 o custo E de cada ferramenta Euclidea.

Todas as ferramentas que têm custo E diferente de L, como mediatriz, bissetriz, etc, são colocadas como desafio, e quando o jogador consegue resolvê-lo, fica disponibilizado como ícone do aplicativo para ser utilizado em construções posteriores. Assim o jogador só terá acesso à ferramenta quando dominar sua construção em um nível anterior.

Umas das primeiras ferramentas que aparece disponível como ícone é uma “mão”. Sua principal função é ser utilizada quando uma solução não é aceita pelo Euclidea como correta. Assim, ela pode ser acionada e o aplicativo mostrará pontos azuis e vermelhos, que servem como indicativos. Ao movimentar um ponto azul a solução não pode perder suas características. Caso ocorra, a solução é invalida. Já os pontos vermelhos, quando aparecem, podem ser movidos livremente sem modificar a solução do problema (veja figura 8).

2.4 Como são classificadas as estrelas no aplicativo

Cada solução é pontuada seguindo quatro tipos de estrelas (veja a figura 7).

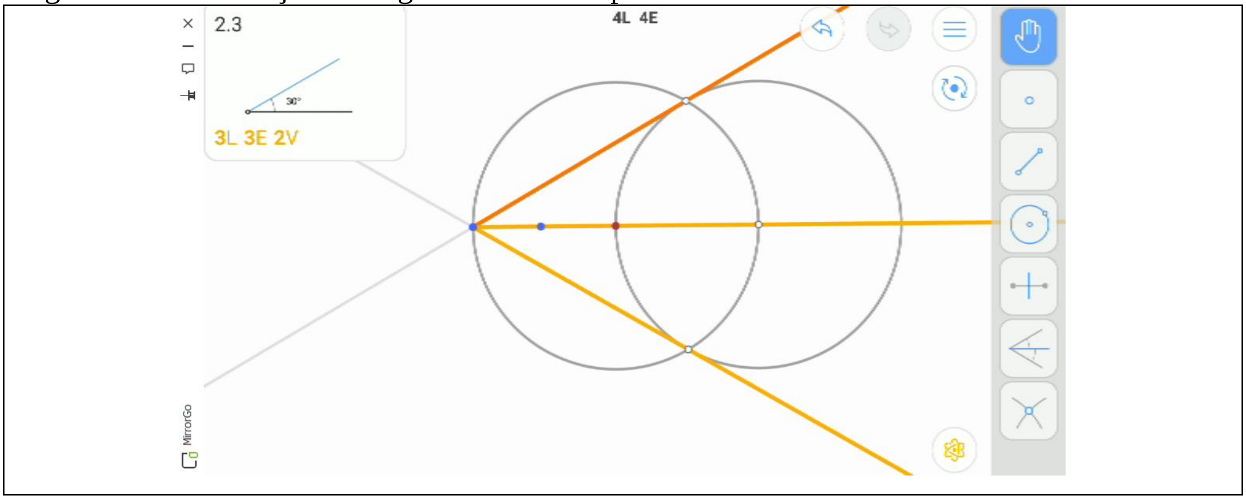
Figura 7 – Tipos de estrelas do aplicativo.

Fonte: Aplicativo Euclidea.

- Estrela simples: indica que o desafio foi resolvido e o jogador pode prosseguir para outro nível.
- Estrela L : indica que o objetivo L foi alcançado.
- Estrela E : indica que o objetivo E foi alcançado.
- Estrela V : indica que todas as variantes de respostas foram encontradas.

A pontuação do jogo é determinada pela quantidade de estrelas adquiridas e para mudar de nível dentro do pacote, não é necessário encontrar as soluções ideais L ou E, basta resolver de forma simples e ganhar uma estrela.

Figura 8 – Construção do ângulo de 30° no aplicativo.

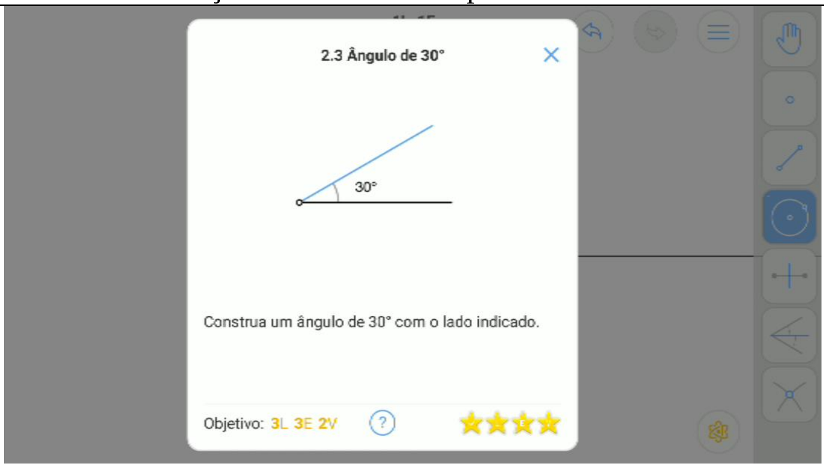


Fonte: Aplicativo Euclidea.

Veja na figura 8 uma resolução ideal para o nível 2.3 que indica a construção do ângulo de 30°. Além da solução ser ideal para E, a solução indica também que foi encontrada uma estrela V através de uma simetria, com isso, a solução para o problema teve todos os seus objetivos alcançados

2.5 Comandos da tela de jogo

Figura 9 – Cartão de visualização dos detalhes do problema.

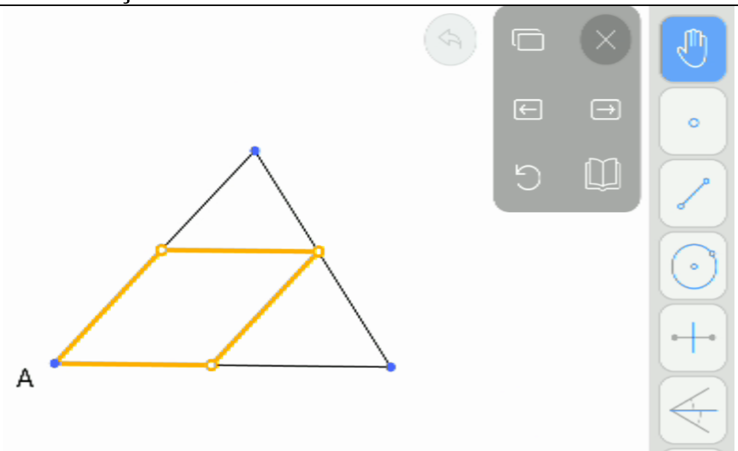


Fonte: Aplicativo Euclidea.

Para ler o problema com mais detalhes, toque no cartão de visualização no canto superior esquerdo da tela do jogo (veja figura 8). Assim, a janela de informação irá abrir com uma explicação da resolução do problema. Se o jogador tiver dúvidas sobre o objeto a ser construído, poderá rever as definições no glossário tocando em um ícone com uma interrogação de cor azul "?" (veja figura 9). Um detalhe importante é que o glossário só irá abrir se o celular tiver acesso à internet.

Durante a resolução do problema é possível visualizar a solução utilizando a ferramenta "Modo Explorar", um ícone de cor laranja localizado no canto inferior direto (veja figura 8). Com essa função ligada junto com a opção "mão", é possível observar os pontos azuis e vermelhos; estes pontos podem ser movidos para que se possam identificar as propriedades da solução, auxiliando no encontro das possíveis respostas.

Figura 10 – Menu de resolução.



Fonte: Aplicativo Euclidea.

Um outro recurso disponível no Euclidea é o botão Menu no canto superior direito da tela do jogo (indicado por três linhas horizontais). Clicando sobre o ícone abre-se uma tela auxiliar (veja figura 10). Ao abrir é possível visualizar os seguintes ícones:

- Duas telas sobrepostas: retorna para a visualização dos níveis do pacote.
- Duas setas[2] : muda de nível.
- Seta curvada: reinicia o problema.
- Livro aberto: mostra as soluções anteriores gravadas pelo aplicativo.

Todas as soluções ficam salvas no menu e o jogador pode retornar e visualizá-las sempre que necessário. As soluções em que algum objetivo L, E ou V foi resolvido, são destacadas em uma cor alaranjada.

Assim, a partir dessas explicações, o aplicativo Euclidea já pode ser explorado de forma mais segura. As soluções gradativas dos níveis levarão o jogador a adquirir as habilidades para resolver problemas posteriores, de grau de dificuldade elevado.

[2] Se o aplicativo estiver liberado, a seta para a direita abre todos os níveis até o último pacote.

3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DO APLICATIVO EUCLIDEA

Neste capítulo apresentaremos dezesseis problemas do aplicativo Euclidea. Para cada problema tem-se as seguintes etapas:

1) Enunciado.
2) Objetivo L e objetivo E.
3) Construção.
4) Uma figura da solução.
5) Demonstração de que a construção funciona.
6) Uma observação de quantas vezes régua e compasso foram utilizados.

Em alguns problemas faz-se necessário obter duas soluções distintas para conquistar os objetivos L e E separadamente. Assim, caso exista, a segunda solução seguirá imediatamente após a primeira.

3.1 Problema 1 – Dada uma circunferência Γ, construa o seu centro.

Resolução 1 $(2L\ 6E)$

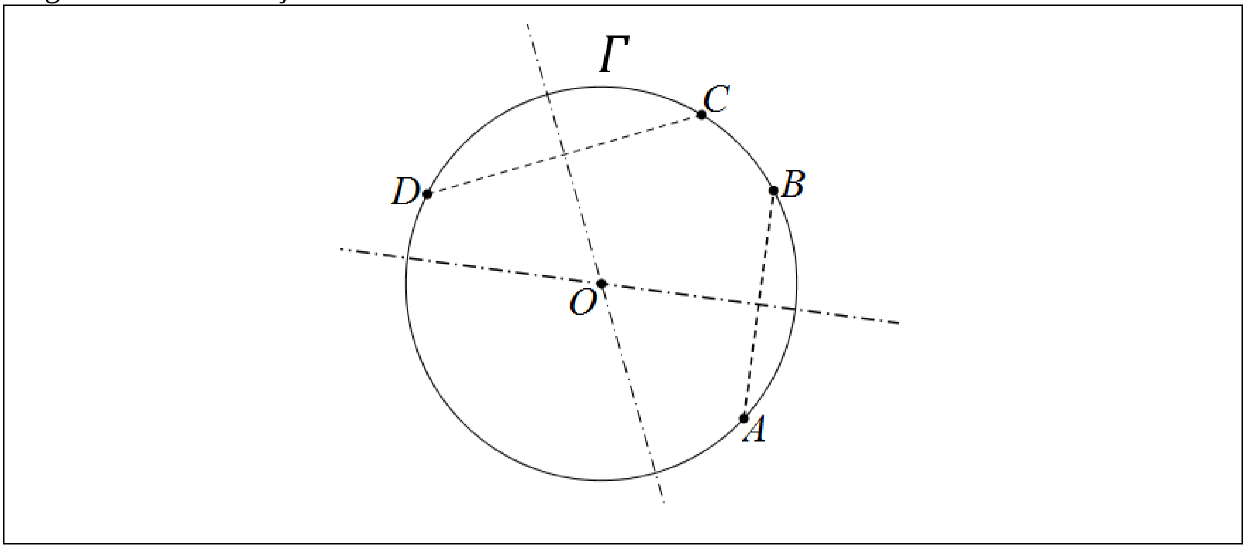
Construção:

(i) Escolha pontos quaisquer A, B, C e D de Γ.

(ii) Trace as mediatrizes dos segmentos AB e CD.

(iii) O ponto O, dado pela interseção dessas duas mediatrizes, é o centro de Γ.

Figura 11 – Construção do centro de uma circunferência com $L = 2$.



Fonte: Elaboração própria.

Justificativa: Sabe-se que se R e S são pontos do plano, então a mediatriz do segmento RS é o lugar geométrico dos pontos P tais que $|PR| = |PS|$.

Sejam O e r, respectivamente, o centro e o raio de Γ. Como $|OA| = |OB| = r$, tem-se que O está na mediatriz do segmento AB. Analogamente, O está na mediatriz do segmento CD. Portanto, O coincide com a interseção dessas duas mediatrizes.

OBS. Note que, nesta construção, o compasso foi usado quatro vezes (duas vezes para cada mediatriz) e a régua foi usada duas vezes (uma vez para cada mediatriz).

Resolução 2 $(5L\ 5E)$

Construção:

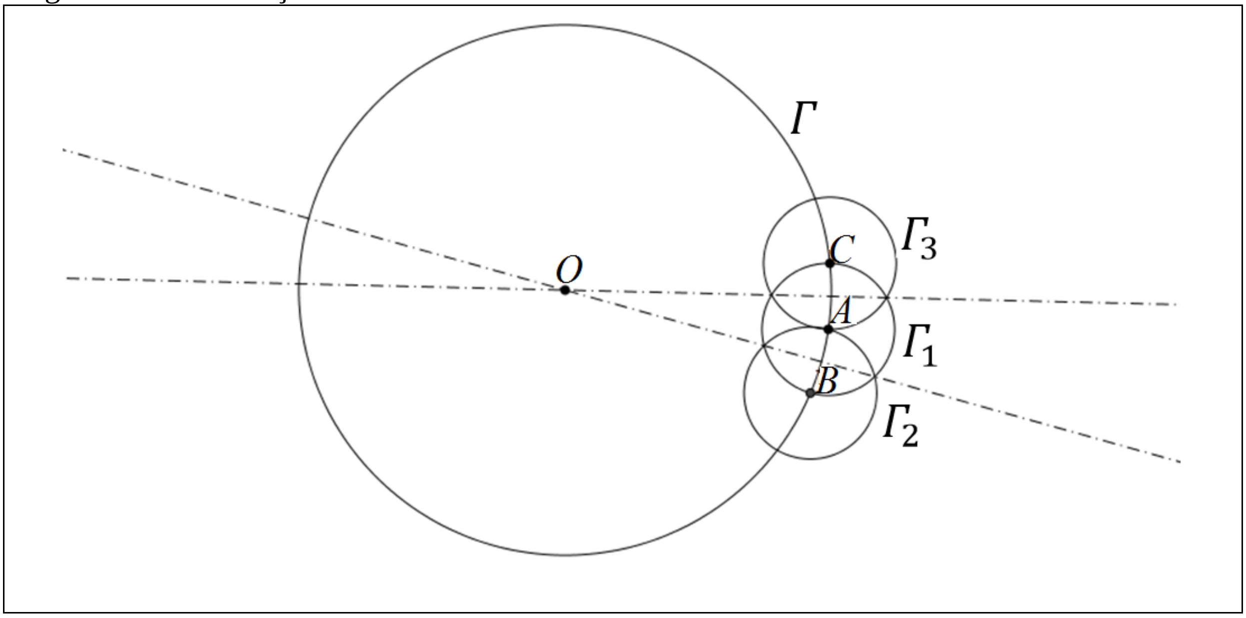
(i) Escolha um ponto qualquer A de Γ.

(ii) Construa a circunferência Γ_1, de centro A e raio s, onde a única restrição sobre s é que ele seja pequeno o suficiente de modo que Γ_1 intersecte Γ em dois pontos distintos, digamos, B e C.

(iii) Construa a circunferência Γ_2, de centro B e raio s, e a circunferência Γ_3, de centro C e raio s.

(iv) Trace a reta que passa pelos pontos de interseção de Γ_1 com Γ_2 e a reta que passa pelos pontos de interseção de Γ_1 com Γ_3. A interseção dessas duas retas determina o centro O de Γ.

Figura 12 – Construção do centro de uma circunferência com $E = 5$.



Fonte: Elaboração própria.

Justificativa: Sejam X e Y os pontos de interseção de Γ_1 com Γ_2. Afirmamos que a reta $\overleftrightarrow{XY}$ é a mediatriz do segmento AB. De fato, como $|AX| = |AY| = |BX| = |BY| = s$, temos que $AXBY$ é um losango. Como as diagonais de um losango são perpendiculares e se encontram em seus pontos médios, segue a afirmação.

Sejam O e r, respectivamente, o centro e o raio de Γ. Como $|OA| = |OB| = r$, tem-se que O está na mediatriz do segmento AB. Pelo que vimos acima, esta mediatriz é justamente a reta que passa pelos pontos de interseção de Γ_1 com Γ_2. Analogamente, O pertence à reta que passa pelos pontos de interseção de Γ_1 com Γ_3.

OBS. Note que o compasso foi usado três vezes (nas construções dos círculos) e a régua foi usada duas vezes (nas construções das retas mediatrizes).

3.2 Problema 2 – São dados uma circunferência Γ, o seu centro O, e um ponto A sobre Γ. Construa a reta tangente a Γ que passa por A.

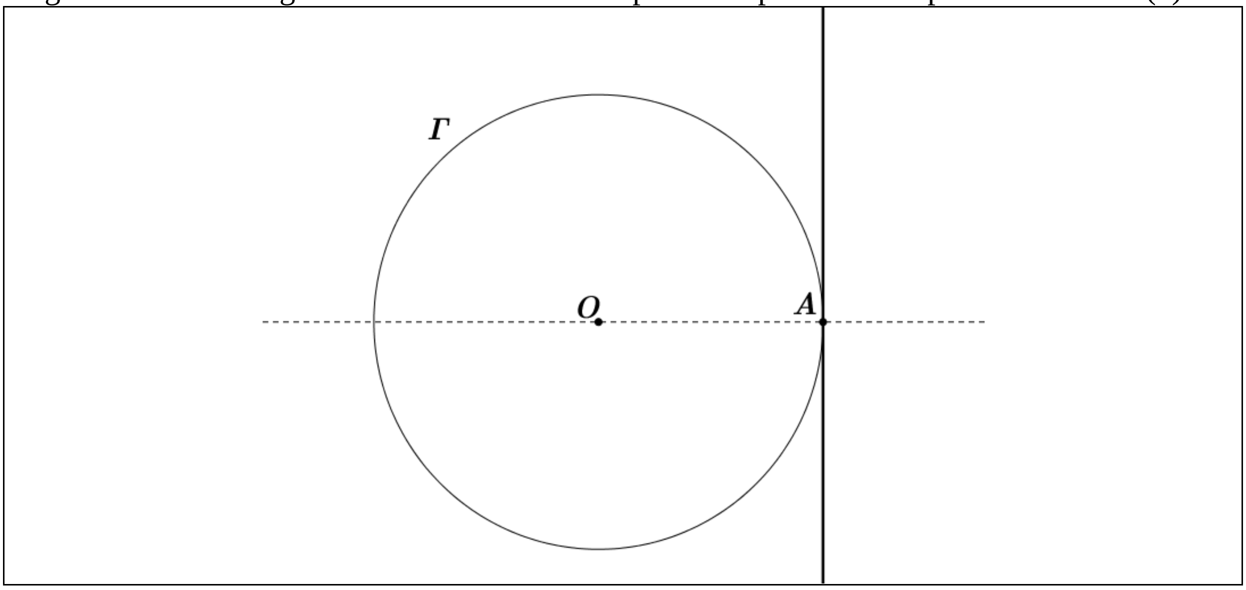
Resolução 1 $(2L\ 4E)$

Construção:

(i) Trace a reta $\overleftrightarrow{AO}$.

(ii) Trace a uma reta perpendicular do segmento OA, passando por A. Esta é a reta procurada.

Figura 13 – Reta tangente a uma circunferência passando por um dado ponto da mesma (1)



Fonte: Elaboração própria.

Justificativa: Como a reta perpendicular ao reta $\overleftrightarrow{AO}$ passa no ponto A, esta é ortogonal ao segmento OA, assim a reta construída é tangente a Γ em A.

OBS. Para essa construção, o compasso foi usado uma vez (na construção da reta perpendicular) a régua foi usada três vezes (uma vez para a construção da reta $\overleftrightarrow{AO}$ e as outras duas vezes para a construção da reta perpendicular).

Resolução 2 $(3L\ 3E)$

Construção:

(i) Marque um ponto R em Γ, com R diferente de A.

(ii) Construa a circunferência Γ_1 de centro R e raio $|RA|$.

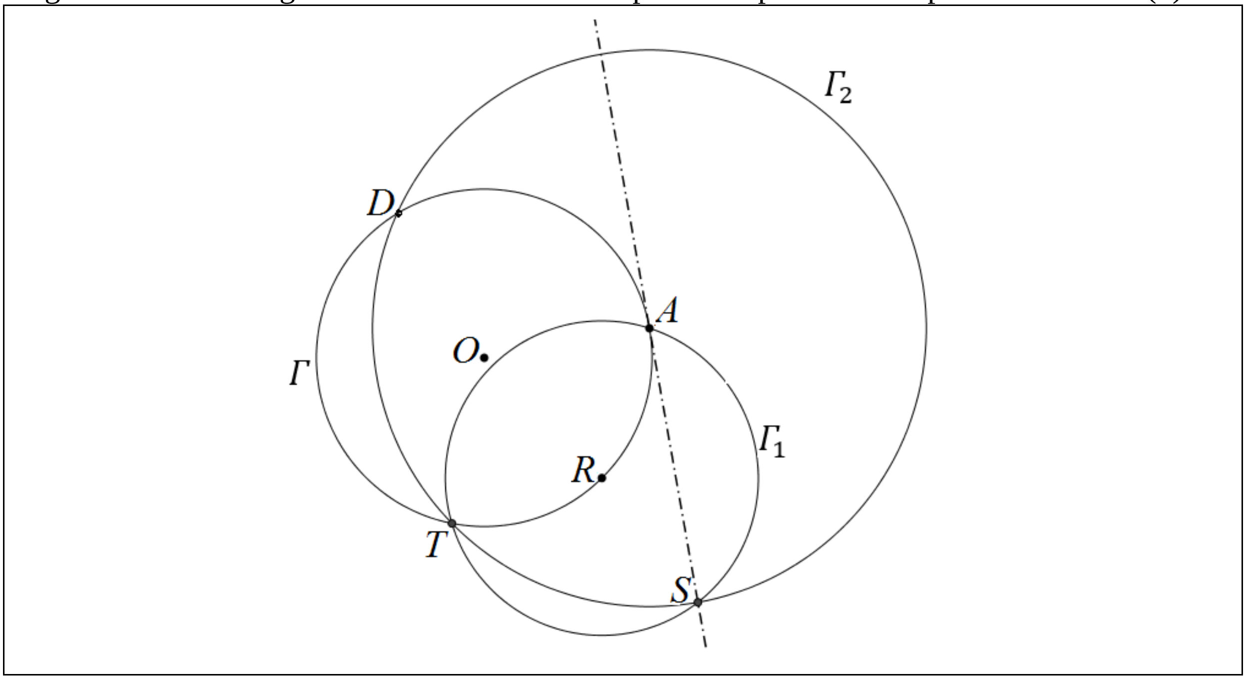
(iii) Marque o ponto T na interseção de Γ com Γ_1 (com T diferente de A).

(iv) Construa a circunferência Γ_2 de centro A e raio $|AT|$.

(v) Marque o ponto S na interseção de Γ_1 com Γ_2.

(vi) Trace a reta $\overleftrightarrow{AS}$. Esta é a reta tangente a Γ em A.

Figura 14 – Reta tangente a uma circunferência passando por um dado ponto da mesma (2).



Fonte: Elaboração própria.

Justificativa: Considere o ângulo $A\hat{S}T$. Como $A\hat{R}T$ é ângulo central de Γ_1, tem-se

$$A\hat{R}T = 2A\hat{S}T. \quad (1.1)$$

Usando que o quadrilátero $ARTD$ é inscritível e a equação (1.1), obtém-se

$$T\hat{D}A = 180° - A\hat{R}T$$

$$= 180° - 2A\hat{S}T. \qquad (1.2)$$

Como D, T e S pertencem a Γ_2, tem-se $|AD| = |AT| = |AS|$. Portanto, os triângulos DTA e STA são isósceles. Assim,

$$T\hat{A}S = 180° - 2A\hat{S}T \qquad (1.3)$$

e

$$\begin{aligned} D\hat{A}T &= 180° - 2T\hat{D}A \\ &= 180° - 2(180° - 2A\hat{S}T) \\ &= 4A\hat{S}T - 180°, \end{aligned} \qquad (1.4)$$

onde na segunda igualdade (1.4), foi utilizada a equação (1.2). Note que os triângulos DOA e AOT são congruentes e isósceles, pois $|AD| = |AT|$ e $|DO| = |AO| = |TO|$, assim os ângulos $D\hat{A}O$ é congruente ao ângulo $O\hat{A}T$, dessa forma tem-se que a semirreta $\overrightarrow{AO}$ é bissetriz do ângulo $D\hat{A}T$. Assim,

$$O\hat{A}T = \frac{1}{2}D\hat{A}T. \qquad (1.5)$$

Utilizando (1.3), (1.4) e (1.5), obtém-se

$$\begin{aligned} O\hat{A}S &= O\hat{A}T + T\hat{A}S \\ &= \frac{1}{2}D\hat{A}T + T\hat{A}S \\ &= (2A\hat{S}T - 90°) + (180° - 2A\hat{S}T) \\ &= 90°. \end{aligned}$$

Logo, a reta $\overleftrightarrow{AS}$ é tangente à circunferência Γ no ponto A.

OBS. Note que o compasso foi usado duas vezes (nas construções de Γ_1 e Γ_2) e a régua foi usada uma vez (na construção da reta $\overleftrightarrow{AS}$) .

3.3 Problema 3 – São dados uma reta r e um ponto O fora de r. Construa a circunferência de centro O que é tangente à reta r.

Resolução $(2L\ 4E)$

Construção:

(i) Marque sobre a reta r dois pontos distintos A e B.

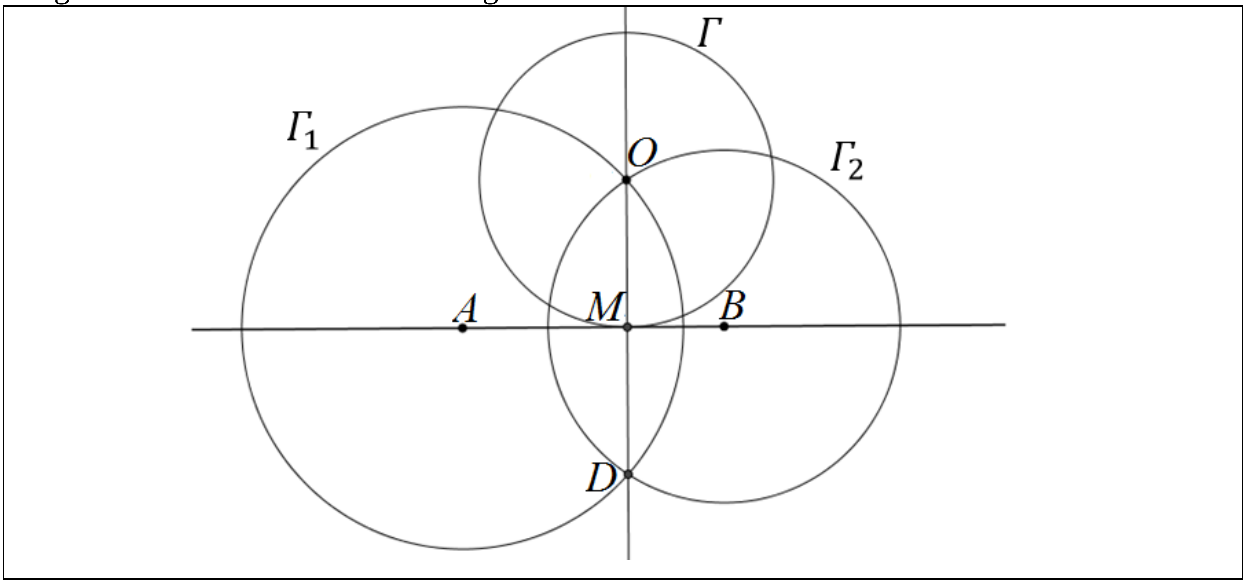
(ii) Construa a circunferência Γ_1 de centro A e raio $|AO|$ e a circunferência Γ_2 de centro B e raio $|BO|$.

(iii) Marque o ponto $D \neq O$ na interseção de Γ_1 com Γ_2.

(iv) Marque M na interseção das retas $\overleftrightarrow{OD}$ e $\overleftrightarrow{AB}$.

(v) Construa a circunferência Γ de centro O e raio $|OM|$. Esta é a circunferência procurada.

Figura 15 – Círculo de centro O tangente à reta r.



Fonte: Elaboração própria.

Justificativa: Note que os triângulos ABO e ABD são congruentes (caso LLL). Portanto, AM é bissetriz interna (relativa ao vértice A) do triângulo AOD, o qual é isósceles, visto que $|AD| = |AO|$. Assim, o segmento AM é altura (relativa ao vértice A) do triângulo AOD. Em particular o ângulo $A\widehat{M}O$ mede 90°. Logo, a circunferência Γ de centro O e raio $|OM|$ é tangente à reta $\overleftrightarrow{AB}$ no ponto M.

OBS. Nesta construção, o compasso foi usado três vezes (duas para construir a reta perpendicular e uma para construir a circunferência tangente) e a régua uma vez (para traçar a reta perpendicular).

3.4 Problema 4 – Seja $ABCD$ um quadrado de lados AB, BC, CD e DA. Construa a circunferência inscrita em $ABCD$.

Resolução $(3L\ 5E)$

Construção:

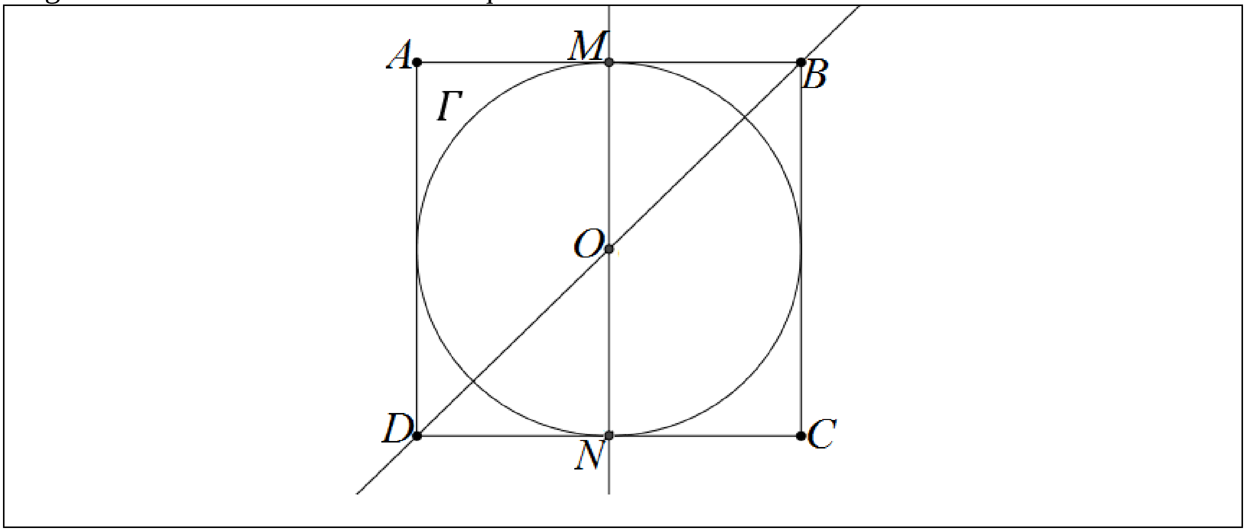
(i) Trace o segmento BD.

(ii) Construa a mediatriz do segmento AB.

(iii) Marque o ponto O na interseção da mediatriz de AB com o segmento BD. Seja M o ponto médio de AB.

(iv) Construa a circunferência Γ de centro O e raio $|OM|$. Esta é a circunferência procurada.

Figura 16 – Círculo inscrito em um quadrado.



Fonte: Elaboração própria.

Justificativa: Como $MO \perp AB$, tem-se que Γ é tangente ao lado AB do quadrado $ABCD$. Será mostrado que Γ também é tangente aos outros lados do quadrado.

Tem-se MO paralelo a AD (pois ambos são perpendiculares a AB). Como M é ponto médio de AB, conclui-se que MO é base média de AD (com relação ao triângulo ABD). Em particular, O é ponto médio de BD e $|MO| = l/2$, onde l denota o lado do quadrado.

Seja N o ponto onde a mediatriz de AB intersecta CD. Tem-se que ON é paralelo a BC (pois ambos são perpendiculares a AB). Como O é ponto médio de BD, tem-se que ON é base média de BC (com relação ao triângulo DBC). Em particular, $ON \perp CD$ e $|ON| = l/2$. Portanto, Γ é tangente ao lado CD do quadrado.

Note que, se lugar da mediatriz de AB tivesse sido usada a mediatriz de BC, a circunferência construída seria a mesma (de centro no ponto médio de BD e raio $l/2$). Portanto, Γ também é tangente aos lados BC e DA.

OBS. Nesta construção, o compasso foi usado três vezes (duas vezes na construção da mediatriz e uma vez na circunferência) e a régua duas vezes (uma vez para traçar a diagonal do quadrado e outra vez na construção da mediatriz).

3.5 Problema 5 – Dado um retângulo $ABCD$ de lados AB, BC, CD e DA, com $|AB| \neq |BC|$, construa um losango $FBGD$, com F e G sobre lados opostos do retângulo.

Resolução $(3L\ 5E)$

Construção:

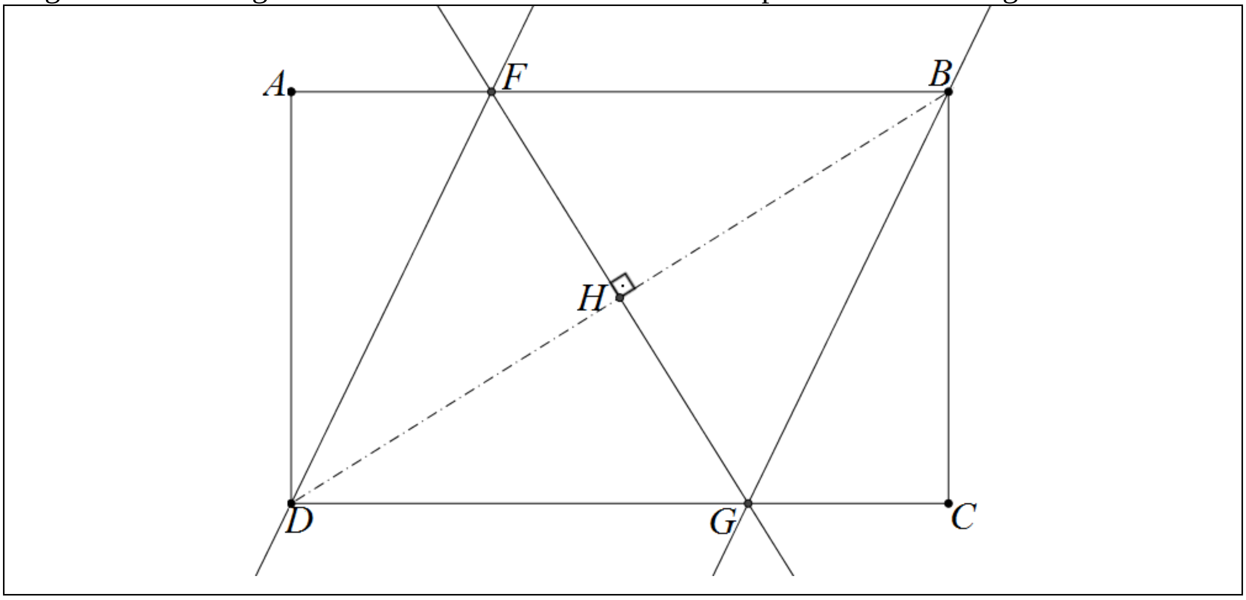
Suponha que $|AB| > |BC|$. A construção é análoga no caso em que $|AB| < |BC|$.

(i) Trace a mediatriz do segmento BD.

(ii) Marque os pontos F e G na interseção dessa mediatriz com o retângulo $ABCD$, com F sobre AB e G sobre CD.

(iii) Construa os segmentos DF e BG.

Figura 17 – Losango com dois de seus lados sobre lados opostos de um retângulo.



Fonte: Elaboração própria.

Justificativa: Primeiramente, será mostrado que se $|AB| > |BC|$, então a mediatriz de BD intersecta o retângulo nos lados AB e CD. Suponha que a mediatriz de BD intersecta o lado AD. Seja X o ponto de interseção. Como XB é hipotenusa do triângulo AXB, tem-se que $|XB| > |AB|$. Assim, $|BC| = |AD| > |XD| = |XB| > |AB|$, uma contradição.

Será mostrado agora que a construção, de fato, funciona. Como AB é paralelo a CD, tem-se $H\hat{D}G = H\hat{B}F$ e $H\hat{G}D = H\hat{F}B$. Portanto, os triângulos HDG e HBF são semelhantes. Como $|HD| = |HB|$, esses triângulos são, de fato, congruentes. Assim, $|FB| = |GD|$. Como F e G estão na mediatriz de BD, tem-se $|DF| = |FB|$ e $|BG| = |GD|$. Logo, $FBGD$ é um losango.

OBS. Nesta construção, o compasso foi usado duas vezes (na construção da mediatriz de BD) e a régua foi usada três vezes (uma vez na construção da mediatriz de BD, uma vez na construção do segmento DF e outra vez na construção do segmento GB).

3.6 Problema 6 – São dados uma circunferência Γ de centro O e um ponto A sobre Γ. Construir um quadrado inscrito em Γ de modo que um dos vértices do quadrado seja A.

Resolução 1 $(6L\ 8E)$

Construção:

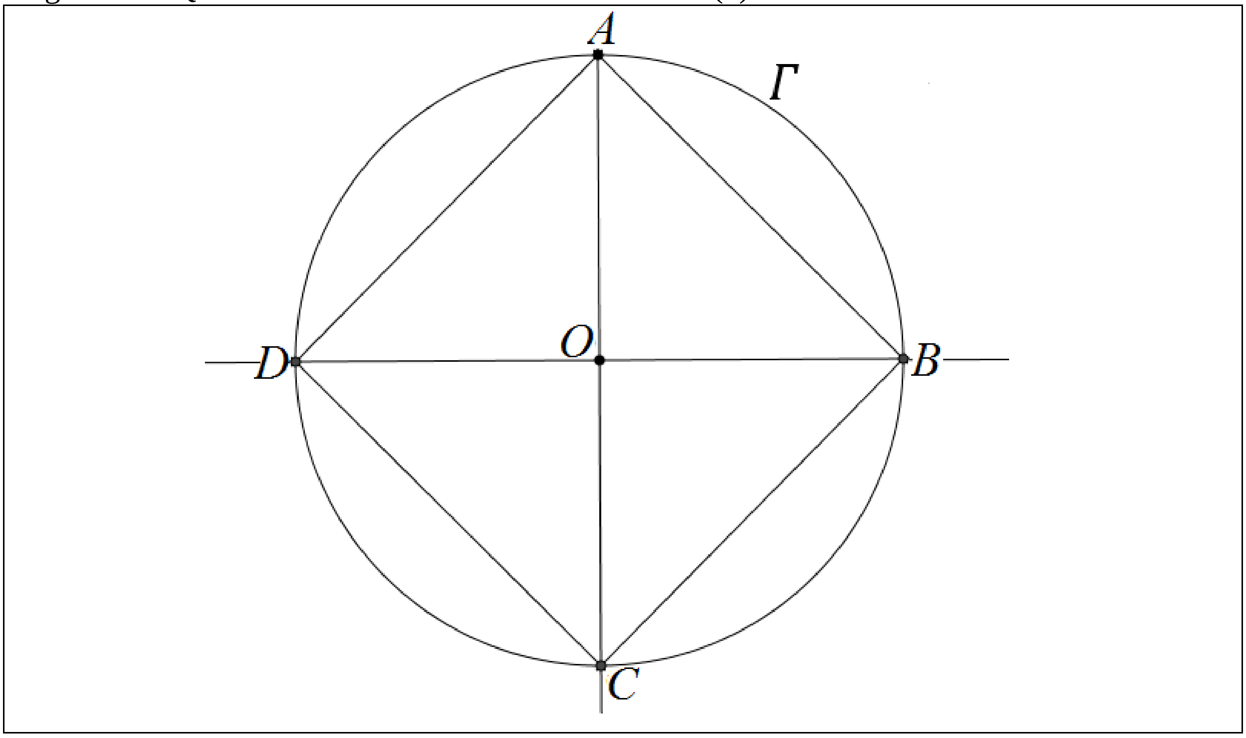
(i) Trace a semirreta $\overrightarrow{AO}$.

(ii) Marque o ponto C na interseção da semirreta $\overrightarrow{AO}$ com a circunferência Γ.

(iii) Trace a mediatriz do segmento AC. Esta mediatriz intersecta Γ em dois pontos, digamos, B e D.

(iv) Trace os segmentos AB, BC, CD e DA, determinando assim o quadrado $ABCD$.

Figura 18 – Quadrado inscrito em uma circunferência (1).



Fonte: Elaboração própria.

Justificativa: Seja R o raio de Γ. Como $|OA| = |OB| = R$ e $A\hat{O}B = 90°$, o Teorema de Pitágoras fornece $|AB| = R\sqrt{2}$. De modo análogo, $|BC| = |CD| = |DA| = R\sqrt{2}$. Como o segmento BD é diâmetro de Γ, tem-se $D\hat{A}B = 90°$. Analogamente, $A\hat{B}C = B\hat{C}D = C\hat{D}A = 90°$. Portanto, $ABCD$ é um quadrado.

OBS. Nesta construção, o compasso foi usado duas vezes (construção da mediatriz) e a régua seis vezes (duas vezes para traçar as diagonais do quadrado e outras quatro vezes na construção dos lados do quadrado).

Resolução 2 $(7L\ 7E)$

Construção:

(i) Construa a circunferência Γ_1 de centro A e raio $|OA|$.

(ii) Marque os pontos B e C na interseção de Γ com Γ_1 .

(iii) Construa a circunferências Γ_2 de centro B e raio $|BC|$.

(iv) Marque o ponto D (com $D \neq C$) na interseção de Γ com Γ_2 .

(v) Trace a reta $\overleftrightarrow{OB}$.

(vi) Marque os pontos E e F na interseção da reta $\overleftrightarrow{OB}$ com Γ_2 .

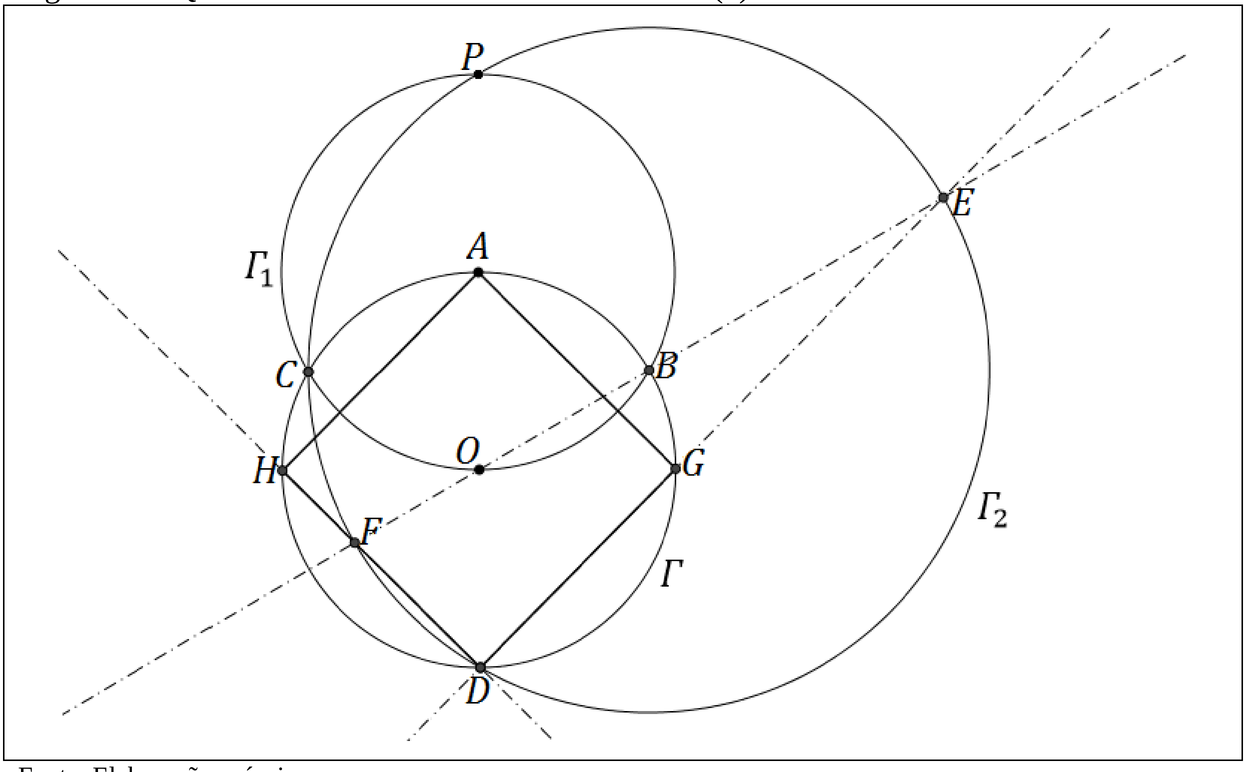
(vii) Trace as retas $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{DF}$.

(viii) Marque os pontos G e H, respectivamente, nas interseções de $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{DF}$ com Γ.

(ix) Trace os segmentos AG e AH.

(x) O quadrilátero $AGDH$ é o quadrado procurado.

Figura 19 – Quadrado inscrito em uma circunferência (2).



Fonte: Elaboração própria.

Justificativa: Seja $P \neq C$ a interseção de Γ_2 com Γ_1. Denote por R_2 o raio da circunferência Γ_2. Como os triângulos ABO e ACO são equiláteros, tem-se $C\hat{A}B = 120°$ e $O\hat{A}B = 60°$. Como BC e BP são cordas de Γ_1 tais que $|BC| = |BP| = R_2$, tem-se $P\hat{A}B = 120°$. Assim,

$$P\hat{A}O = P\hat{A}B + B\hat{A}O = 120° + 60° = 180°.$$

Logo, PO é diâmetro de Γ_1. De modo análogo, conclui-se que AD é diâmetro de Γ.

Visto que PO é diâmetro de Γ_1, tem-se $P\hat{B}O = 90°$, e consequentemente $P\hat{B}E = 90°$. Como $P\hat{B}E$ é ângulo central de Γ_2, tem-se $P\widehat{D}E = 45°$.

Como AD é diâmetro de Γ, $A\hat{G}D = 90°$ e, dessa forma, $D\hat{A}G = 45°$.

Por outro lado, veja que EF é diâmetro de Γ_2, assim $F\widehat{D}E = 90°$, $A\widehat{D}H = 45°$, $D\widehat{H}G = 90°$ e $D\hat{A}H = 45°$.

Veja também que, AG, GD, DH e HA são cordas de Γ que correspondem a ângulos de 45°, logo $|AG| = |GD| = |DH| = |HA|$. Isto mostra que $AGDH$ é um quadrado.

OBS. Nesta construção, o compasso foi usado duas vezes (construção de Γ_1 e Γ_2) e a régua foi usada cinco vezes (uma para construir a reta $\overleftrightarrow{OB}$ e quatro vezes para construir retas suportes para os lados do quadrado $AGDH$)

3.7 Problema 7 – Dado um triângulo ABC, construa um losango $ADFE$ de modo que os pontos D, E e F estejam, respectivamente, sobre as retas que contêm os lados AB, AC e BC do triângulo ABC.

Resolução $(4L\ 9E)$

Construção:

(i) Trace bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$.

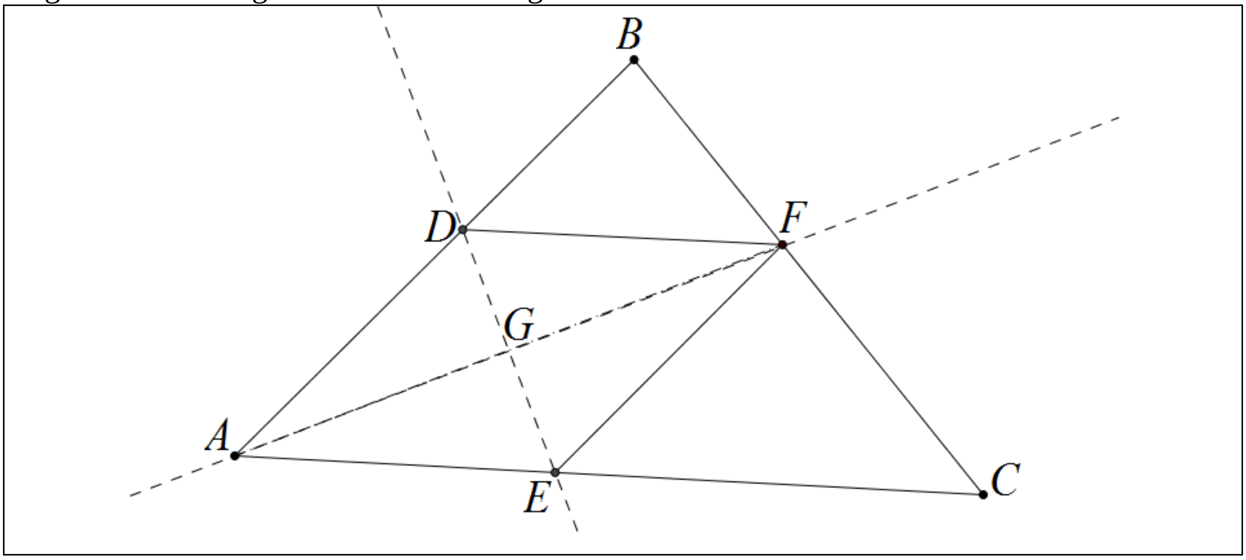
(ii) Marque o ponto F na interseção da bissetriz interna do ângulo $B\hat{A}C$ com o segmento BC.

(iii) Trace a mediatriz do segmento AF.

(iv) Marque os pontos D e E, respectivamente, na interseção da mediatriz do segmento AF com as retas que contêm, respectivamente, os lados AB e AC do triângulo ABC.

(v) Trace os segmentos DF e EF. O quadrilátero $ADFE$ é o losango procurado.

Figura 20 – Losango dentro de um triângulo.



Fonte: Elaboração própria.

Justificativa: Como D e E estão na mediatriz do segmento AF, tem-se $|AD| = |DF|$ e $|FE| = |EA|$. Assim, para mostrar que os quatro lados do quadrilátero $ADFE$ têm a mesma medida, basta mostrar, por exemplo, que $|AD| = |EA|$. Para mostrar esta última igualdade note que $B\hat{A}F = F\hat{A}C$ (pois AF é bissetriz interna do ângulo $B\hat{A}C$), $A\hat{G}D = A\hat{G}E = 90°$ (pois $\overleftrightarrow{DE}$ é mediatriz do segmento AF) e o segmento AG é lado comum aos triângulos AGD e AGE. Assim, os triângulos AGD e AGE são congruentes (caso ALA). Portanto, $ADFE$ é um losango.

OBS. Nesta construção, o compasso foi usado cinco vezes (três vezes na construção da bissetriz interna e duas vezes na construção da mediatriz) e a régua foi usada quatro vezes (uma vez na construção bissetriz interna, outra vez na construção da mediatriz e outras duas vezes para traçar os segmentos DF e EF).

3.8 Problema 8 – São dados no plano um ponto e um retângulo. Construa uma reta que passa pelo ponto dado e divide o retângulo em duas regiões de mesma área.

Resolução $(3L\ 3E)$

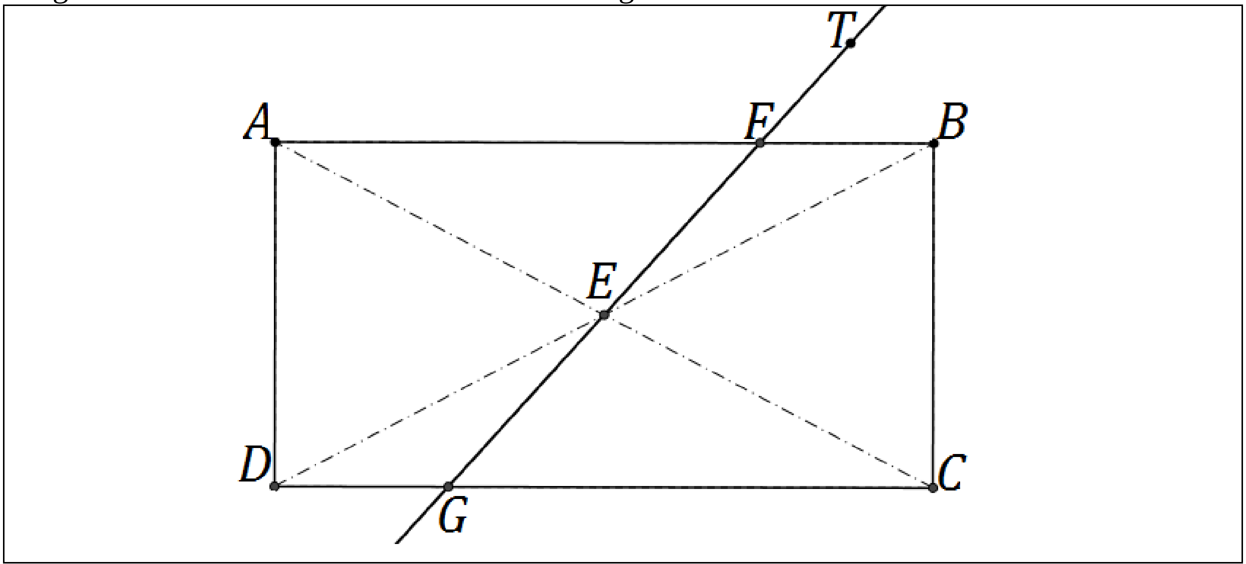
Construção: Considere um retângulo $ABCD$ de lados AB, BC, CD e DA e um ponto T qualquer do plano.

(i) Trace as diagonais AC e BD.

(ii) Marque o ponto E na interseção de AC com BD.

(iii) Se E coincide com T, trace qualquer reta que passe por T. Se E não coincide com T, trace a reta $\overleftrightarrow{TE}$. A reta traçada satisfaz as condições do problema.

Figura 21 – Corte de mesma área em um retângulo.



Fonte: Elaboração própria.

Justificativa: Seja r uma reta qualquer passando pelo ponto E. Será mostrado que r divide o retângulo $ABCD$ em duas regiões de mesma área. Suponha que r intercepta os lados AB e CD do retângulo $ABCD$ (o caso em que r intercepta os lados BC e DA é análogo).

Como AB e CD são paralelos, $E\hat{F}A = E\hat{G}C$ e $F\hat{A}E = G\hat{C}E$. Assim, os triângulos AFE e CGE são semelhantes. Como $ABCD$ é paralelogramo, $|AE| = |CE|$. Logo, os triângulos AFE e CGE são, de fato, congruentes. Em particular, $|AF| = |CG|$. Conclui-se também que $|DG| = |BF|$, pois

$$|DG| = |CD| - |CG| = |AB| - |AF| = |BF|.$$

Assim, como $|AF| = |CG|$ e $|DG| = |BF|$, tem-se que os trapézios $AFGD$ e $FBCG$ têm a mesma área.

OBS. Nesta construção, a régua foi utilizada três vezes (duas vezes para construir as diagonais do retângulo e uma vez para construir a reta que divide a área do retângulo em duas partes iguais).

3.9 Problema 9 – Construir um círculo inscrito em um losango dado.

Resolução $(4L\ 6E)$

Construção: Considere um losango $ABCD$ de lados AB, BC, CD e DA.

(i) Trace as diagonais AC e BD.

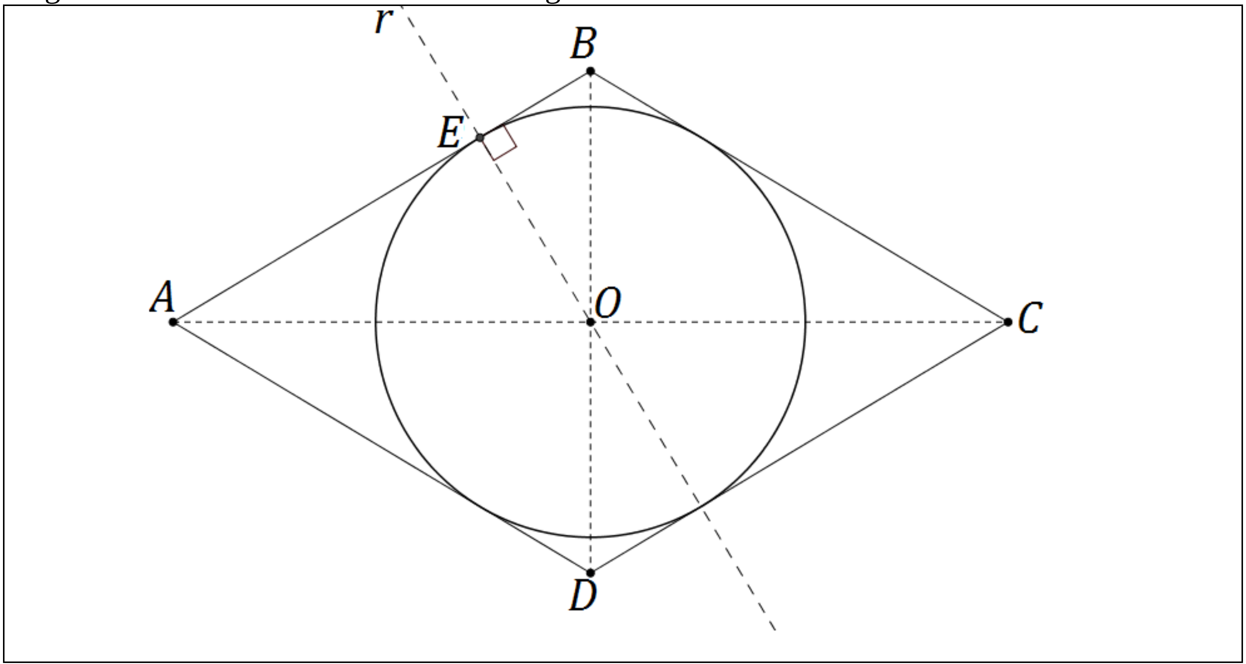
(ii) Marque o ponto O na interseção de AC com BD.

(iii) Trace uma reta r que passa por O e é perpendicular ao lado AB do losango.

(iv) Marque o ponto E na interseção de r com AB.

(v) Construa o círculo de raio $|OE|$ de centro O. Este é o círculo procurado.

Figura 22 – Círculo inscrito em um losango.



Fonte: Elaboração própria.

Justificativa: Como $ABCD$ é losango, tem-se

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA|.$$

Tem-se também

$$|AO| = |OC| \text{ e } |BO| = |OD|.$$

Logo, os triângulos AOB, COB, COD e AOD são dois a dois congruentes (caso LLL). Assim, a altura de qualquer um desses quatro triângulos em relação ao vértice O mede $|OE|$. Portanto, o círculo de raio $|OE|$ e centro O está inscrito no losango $ABCD$.

OBS. Nesta construção, a régua foi utilizada três vezes e o compasso foi usado três vezes (duas vezes na construção da reta r e uma vez para traçar o círculo de centro O e raio $|OE|$).

3.10 Problema 10 – São dados no plano um ponto P e um ângulo $B\hat{A}C$. Construa um triângulo tal que um de seus vértices é A, seu ortocentro é P, e os outros dois vértices do triângulo são tais que um deles está sobre a semirreta $\overrightarrow{AB}$ e o outro está sobre a semirreta $\overrightarrow{AC}$.

Resolução 1 $(3L\ 7E)$

Construção:

(i) Trace uma reta r, perpendicular à semirreta $\overrightarrow{AB}$, passando pelo ponto P.

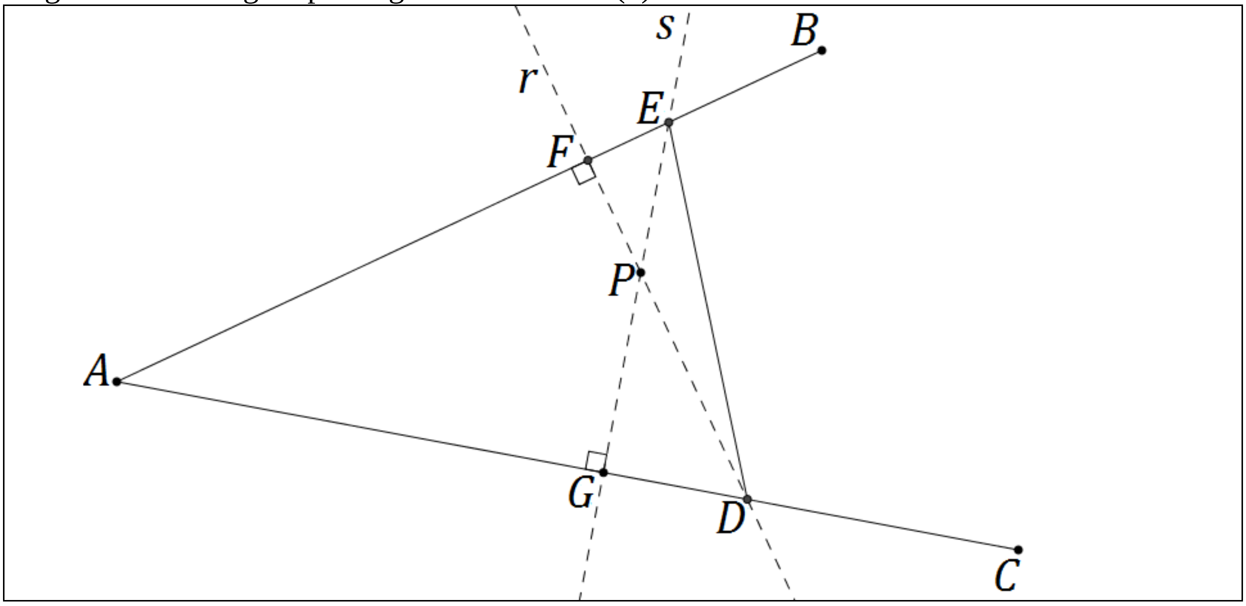
(ii) Marque o ponto D na interseção de r com $\overrightarrow{AC}$.

(iii) Trace uma reta s, perpendicular à semirreta $\overrightarrow{AC}$, passando pelo ponto P.

(iv) Marque o ponto E na interseção de s com $\overrightarrow{AB}$.

(v) Construa o segmento DE. Dessa forma, ADE é o triângulo procurado.

Figura 23 – Triângulo por ângulo e ortocentro (1).



Fonte: Elaboração própria.

Justificativa: Considere o triângulo AED. Tem-se que o segmento FD é altura relativa ao vértice D. Tem-se também que o segmento EG é altura relativa ao vértice E. Como P é a interseção das alturas DF e EG, tem-se que P é o ortocentro de AED.

OBS. Nesta construção, a régua foi utilizada três vezes(para construir as retas perpendiculares e uma vez para o sege o compasso foi usado quatro vezes (na construção das perpendiculares, passado por P, às semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$).

Resolução 2 $(6L\ 6E)$

Construção:

(i) Trace a circunferência Γ de centro A e raio $|AP|$.

(ii) Marque o ponto D na interseção de Γ com $\overrightarrow{AB}$.

(iii) Trace a circunferência Γ_1 de centro D e raio $|DP|$.

(iv) Marque o ponto E na interseção de Γ com Γ_1 (com E diferente de P).

(v) Trace a reta $\overleftrightarrow{EP}$ e marque o ponto F na interseção desta com a semirreta $\overrightarrow{AC}$.

(vi) Marque o ponto G na interseção de Γ com $\overrightarrow{AC}$.

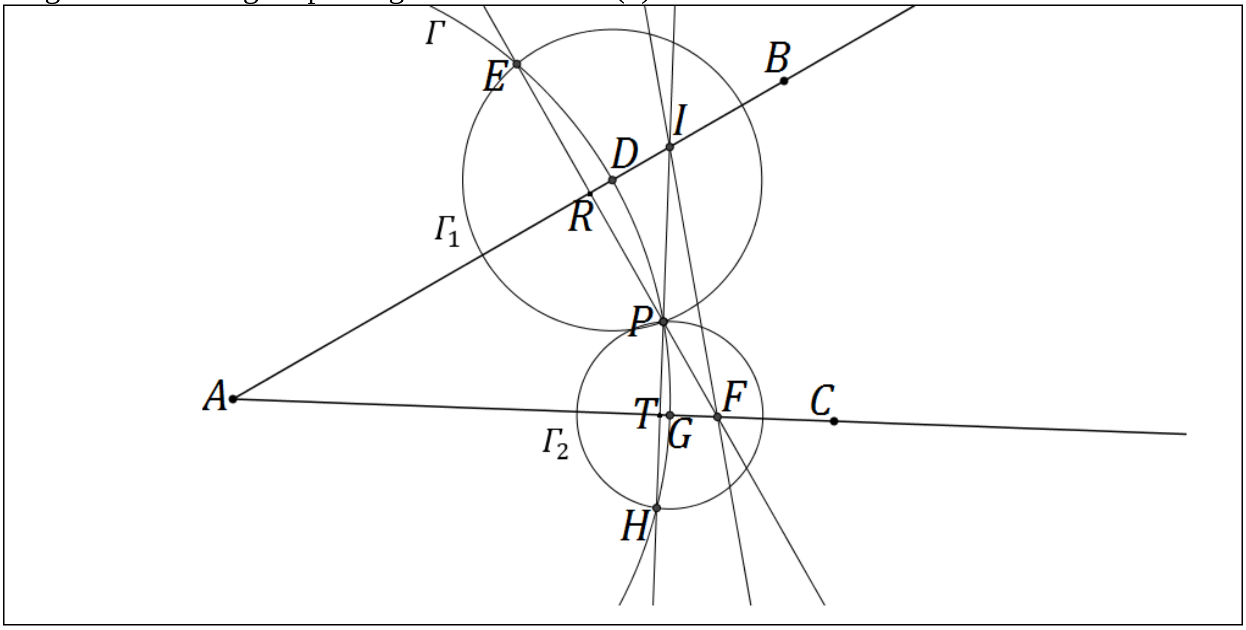
(vii) Trace a circunferência Γ_2 de centro G e raio $|GP|$.

(viii) Marque o ponto H na interseção de Γ com Γ_2 (com H diferente de P).

(ix) Trace a reta $\overleftrightarrow{HP}$ e marque I na interseção desta com a semirreta $\overrightarrow{AB}$.

(x) Trace a reta $\overleftrightarrow{FI}$. Dessa forma, AFI é o triângulo procurado.

Figura 24 – Triângulo por ângulo e ortocentro (2).



Fonte: Elaboração própria.

Justificativa: Sejam $R = \overrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{EP}$ e $T = \overrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{HP}$. Note que $\overleftrightarrow{EP}$ é o eixo radical de Γ e Γ_1. Assim, como A é o centro de Γ e D é o centro de Γ_1, tem-se que $\overleftrightarrow{EP}$ é perpendicular a $\overrightarrow{AD}$ e, portanto, FR é a altura do triângulo AFI relativa ao vértice F. Analogamente, IT é a altura do triângulo AFI relativa ao vértice I. Logo, P é o ortocentro de AFI.

OBS. Nesta construção, a régua foi utilizada três vezes (para construir as duas mediatrizes e o segmento IF), o compasso foi usado três vezes (para construir Γ, Γ_1 e Γ_2).

3.11 Problema 11 – São dados no plano um ponto P e um ângulo $B\hat{A}C$. Construa o triângulo ADE satisfazendo o seguinte: $D \in \overrightarrow{AB}$, $E \in \overrightarrow{AC}$ e P é o circuncentro de ADE.

Resolução $(2L\ 2E)$

Construção:

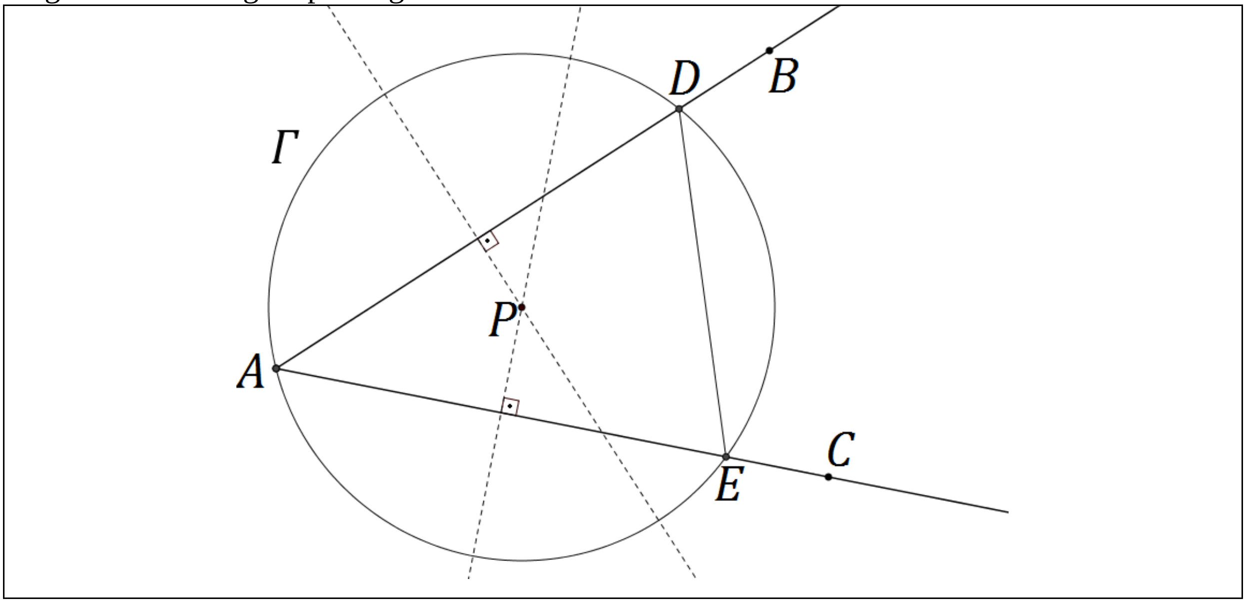
(i) Trace a circunferência Γ de centro P e raio $|PA|$.

(ii) Marque os pontos D e E na interseção entre Γ com semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, respectivamente.

(iii) Trace o segmento DE. O triângulo ADE satisfaz às condições o problema.

(iv) Para P externo a $B\hat{A}C$, o problema terá solução se as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ forem ambas secantes a Γ. Caso isso não ocorra, a construção é impossível.

Figura 25 – Triângulo por ângulo e circuncentro.



Fonte: Elaboração própria.

Justificativa: Como $|PA| = |PD|$, temos que P pertence à mediatriz do segmento AD. De modo análogo, P pertence à mediatriz do segmento AE. Portanto, P é o circuncentro do triângulo ADE.

Veja que no item (iv), só teremos um triângulo com vértices nas semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ com P circuncentro, se a circunferência tocar essas semirretas em pontos diferentes de $A \in \Gamma$. Caso isso não ocorra, a construção é impossível.

OBS. Nesta construção, a régua foi utilizada três vezes (duas vezes para construir as mediatrizes e uma vez para construir o segmento DE) e o compasso foi usado uma vez (para construir Γ)

3.12 Problema 12 – São dados no plano um ângulo $A\hat{B}C$ e um ponto M em seu interior. Construa os segmentos DM e MF satisfazendo o seguinte: $D \in \overrightarrow{BA}$, $F \in \overrightarrow{BC}$ e $|BD| = |DM| = |MF|$.

Resolução $(4L\ 6E)$

Construção:

(i) Trace a mediatriz do segmento BM.

(ii) Marque o ponto D na interseção da mediatriz do segmento BM com a semirreta $\overrightarrow{BA}$.

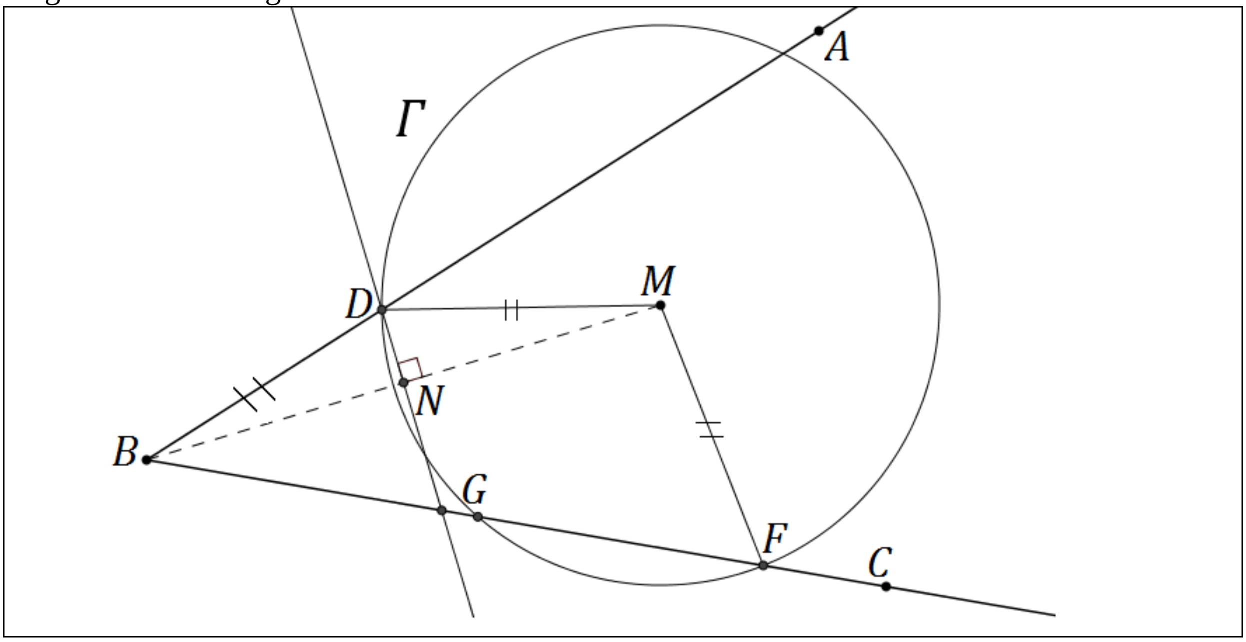
(iii) Trace a circunferência Γ de centro M e raio $|MD|$.

(iv) Se a distância de M à semirreta $\overrightarrow{BC}$ for menor que o raio de Γ, marque os pontos F e G na interseção de Γ com $\overrightarrow{BC}$. Assim, teremos os segmentos $|BD| = |MD| = |MF| = |MG|$.

(v) Se a distância de M à semirreta $\overrightarrow{BC}$ for igual ao raio de Γ, marque o ponto F na interseção de Γ com $\overrightarrow{BC}$. Assim, teremos os segmentos $|BD| = |MD| = |MF|$.

(vi) Se a distância de M à semirreta $\overrightarrow{BC}$ for maior que o raio de Γ, a construção é impossível.

Figura 26 – Três segmentos.



Fonte: Elaboração própria.

Justificativa: Como D está na mediatriz de BM temos $|BD| = |DM|$. Como F (e G) está (estão) na circunferência de centro M e raio $|MB|$, temos $|DM| = |MF|$ $(= |MG|)$. Portanto,

$$|BD| = |DM| = |MF| \; (=|MG|).$$

Observe que, de fato, o item (vi) da construção caracteriza a não existência de solução, pois se existe uma solução, então D deve pertencer à mediatriz de BM (visto que $|BD| = |DM|$) e F deve pertencer à circunferência de centro M e raio $|DM|$ (visto que $|DM| = |MF|$).

OBS. Nesta construção, a régua foi utilizada três vezes (uma vez para construir a mediatriz e duas vezes para construir $|DM|$ e $|MF|$) e o compasso foi usado três vezes (uma para construir Γ e duas vezes na construção da mediatriz).

3.13 Problema 13 – São dados no plano uma reta r, um ponto $A \in r$ e um ponto M fora da reta. Construa um círculo passando M tangente a r no ponto A.

Resolução $(3L\ 7E)$

Construção:

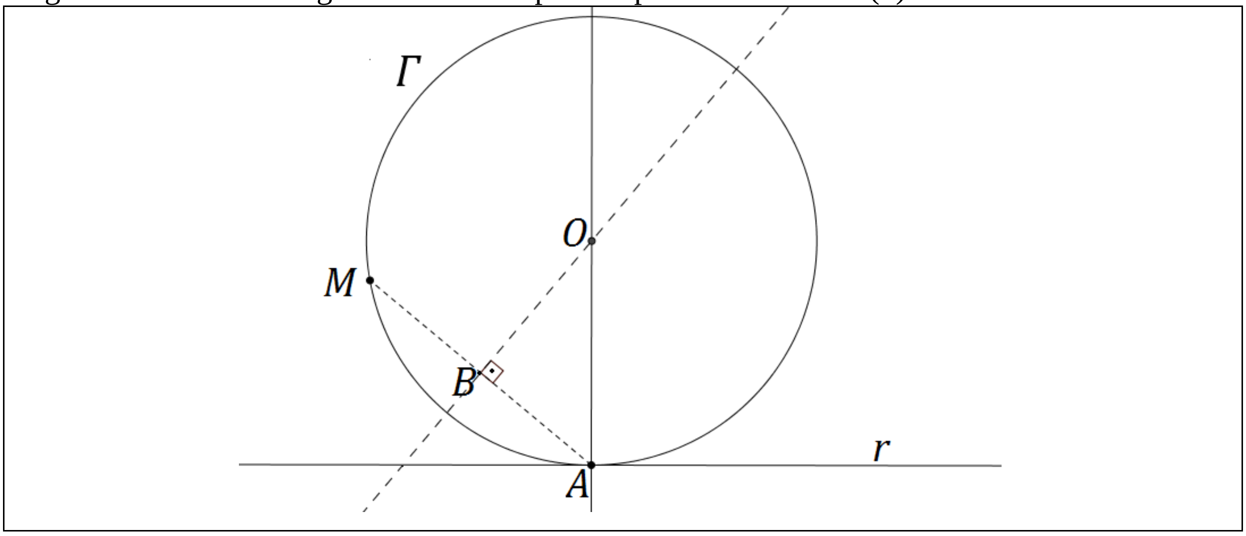
(i) Trace a reta mediatriz do segmento AM.

(ii) Construa uma reta perpendicular a r passando por A.

(iii) Marque o ponto O na interseção da mediatriz do segmento AM com a reta perpendicular a r que passa por A.

(iv) Trace o círculo Γ de raio $|OM|$. Este círculo responde ao problema.

Figura 27 – Círculo tangente a uma reta por um ponto fora da reta (1).



Fonte: Elaboração própria.

Justificativa: Obviamente, $M \in \Gamma$, pois Γ foi definido com o círculo de centro O e raio $|OM|$. Como O está na mediatriz do segmento MA, tem-se que $|OA| = |OM|$. Assim, A também pertence a Γ. Finalmente, como $\overleftrightarrow{AO}$ é perpendicular a r, tem-se que Γ é tangente a r.

OBS. Nesta construção, a régua foi utilizada três vezes (uma para a mediatriz e duas para a reta perpendicular) e o compasso foi usado quatro vezes (duas vezes para a construção da reta mediatriz e uma para a construção da reta perpendicular e outra para definir Γ).

3.14 Problema 14 – Dado um trapézio, construir o segmento de reta cujas extremidades são os pontos médios das bases do trapézio.

Resolução 1 $(3L\ 7E)$

Construção:

(i) Trace a reta mediatriz do segmento AB.

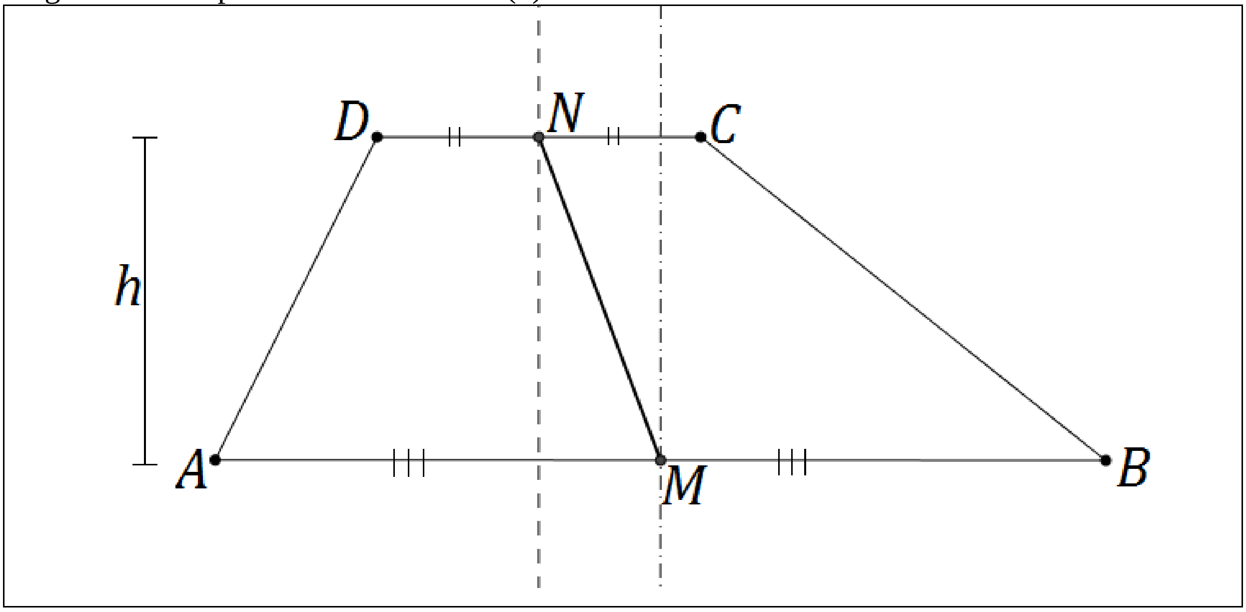
(ii) Marque o ponto M na interseção do segmento AB com sua reta mediatriz.

(iii) Trace a reta mediatriz do segmento DC.

(iv) Marque o ponto N na interseção do segmento DC com sua reta mediatriz.

(v) Trace o segmento MN. Este é o segmento procurado.

Figura 28 – Trapézios de mesma área (1).



Fonte: Elaboração própria.

Justificativa: Como a mediatriz de um segmento intersecta este segmento em seu ponto médio, tem-se que os pontos M e N são os pontos médios das bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente, do trapézio $ABCD$.

OBS. Nesta construção, a régua foi utilizada três vezes (duas para construir as mediatrizes e uma para construir o segmento MN) e o compasso foi usado quatro vezes (ambas para construir as mediatrizes).

Resolução 2 $(5L\ 5E)$

Construção:

(i) Trace as diagonais AC e BD do trapézio $ABCD$.

(ii) Marque o ponto E na interseção das diagonais traçadas em (i).

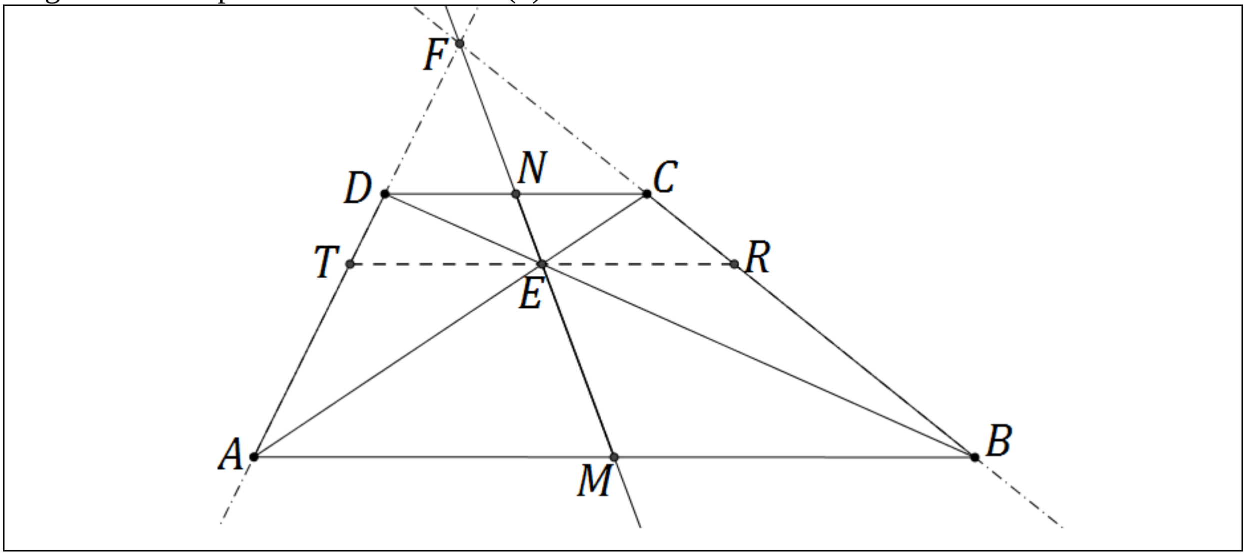
(iii) Construa as retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.

(iv) Marque o ponto F na interseção das retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.

(v) Trace a reta $\overleftrightarrow{EF}$.

(vi) Marque os pontos M e N na interseção da reta $\overleftrightarrow{EF}$ com os segmentos AB e DC, respectivamente. O segmento MN é o segmento procurado.

Figura 29 – Trapézios de mesma área (2).



Fonte: Elaboração própria.

Justificativa: Veja que os segmentos AB e CD são paralelos, logos os triângulos DFN e AFM são semelhantes, e

$$\frac{DN}{AM} = \frac{FN}{FM}$$

Veja também que os triângulos CFN e BFM são semelhantes, e

$$\frac{FN}{FM} = \frac{CN}{BM}$$

Assim

$$\frac{DN}{AM} = \frac{CN}{BM} \qquad (2.1).$$

Por outro lado, os triângulos DEN e BEM são semelhantes, e

$$\frac{DN}{BM} = \frac{EN}{EM}$$

Assim como os triângulos CEN e AEM são semelhantes, e

$$\frac{EN}{EM} = \frac{CN}{AM}$$

Logo

$$\frac{DN}{BM} = \frac{CN}{AM} \qquad (2.2)$$

Utilizando (2.1) e (2.2), obtém-se

$$\frac{AM}{BM} = \frac{BM}{AM}$$

$$(AM)^2 = (BM)^2$$

$$AM = BM$$

De forma análoga podemos concluir que DN é

$$CN = DN$$

Concluímos assim que, M e N são ponstos médios dos segmentos AB e CD respectivamente.

OBS. Nesta construção, a régua foi utilizada cinco vezes (ambas para as retas suportes) e o compasso não foi usado.

3.15 Problema 15 – Dado uma semirreta $\overrightarrow{AB}$ construir um ângulo de $45°$ que tem A como vértice e tal que um de seus lados é a semirreta $\overrightarrow{AB}$.

Resolução 1 $(2L\ 7E)$

Construção:

(i) Trace uma reta perpendicular à semirreta $\overrightarrow{AB}$ em A.

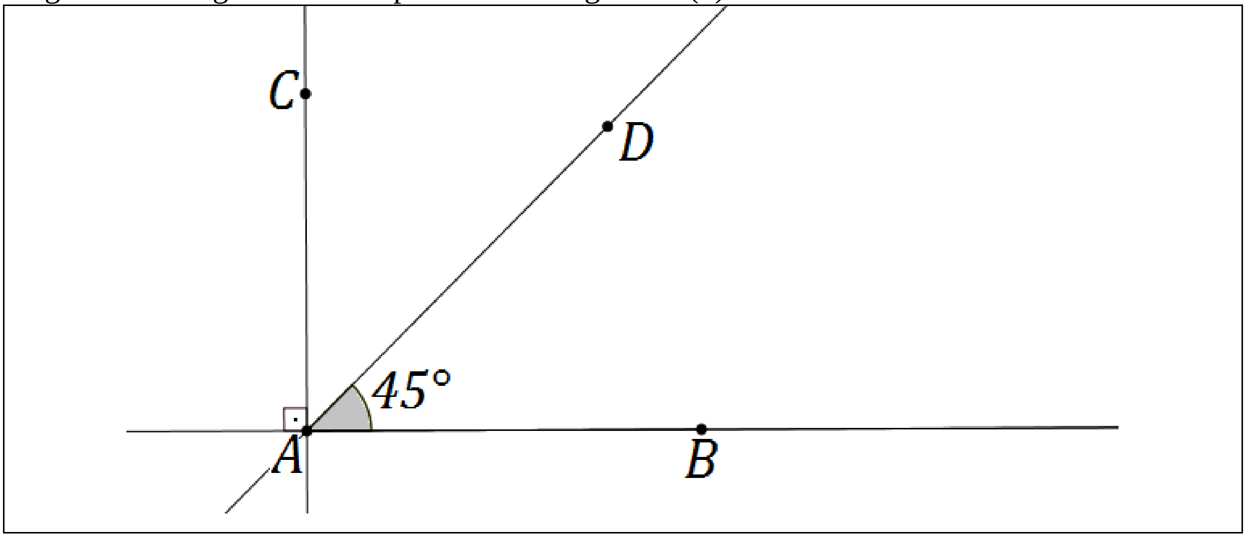
(ii) Marque um ponto C na reta perpendicular à semirreta $\overrightarrow{AB}$, com $C \neq A$.

(iii) Trace a reta bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$.

(iv) Seja D pertencente à reta bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$, com $D \neq A$. O ângulo $B\hat{A}D$ mede $45°$ e responde ao problema.

OBS. Note que se tomarmos C do outro lado de A teremos outra solução para o problema.

Figura 30 – Ângulo de 45° a partir de um segmento (1).



Fonte: Elaboração própria.

Justificativa: Veja que a reta perpendicular à semirreta $\overrightarrow{AB}$, forma um ângulo de 90° com $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Assim, ao traçar a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$, esta o divide em dois ângulos congruentes de 45°. Logo, o ângulo $B\hat{A}D$ mede 45°.

OBS. Nesta construção, a régua foi utilizada três vezes (duas vez para a reta perpendicular e uma vez para a reta bissetriz) e o compasso foi usado quatro vezes (três vezes para a construção da reta bissetriz e uma para a construção da reta perpendicular). .

Resolução 2 $(3L\ 5E)$

Construção:

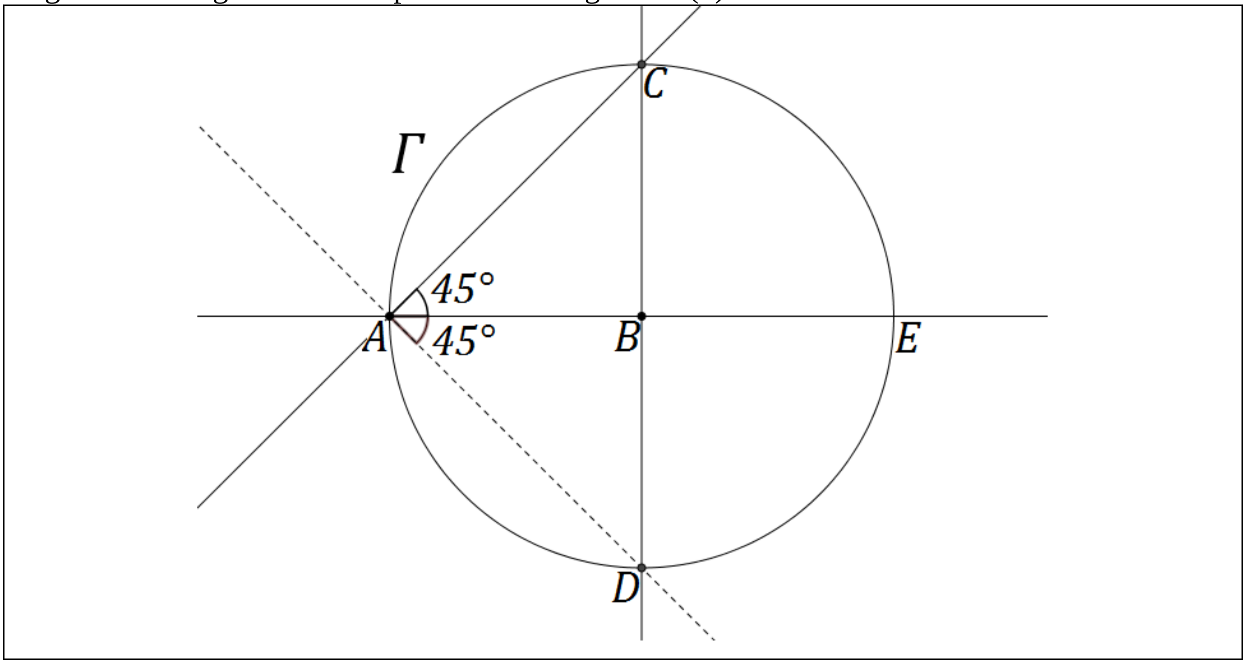
(i) Construa o círculo de centro em B e raio $|BA|$.

(ii) Trace a reta perpendicular à semirreta $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ em B.

(iii) Marque os pontos C e D na interseção do círculo Γ com a reta perpendicular à semirreta $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

(iv) Trace a reta $\overleftrightarrow{AC}$ e a reta $\overleftrightarrow{AD}$. Os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{A}D$ medem 45°, e portanto, respondem ao problema.

Figura 31 – Ângulo de 45° a partir de um segmento (2).



Fonte: Elaboração própria.

Justificativa: Observe que $E\hat{B}C$ é ângulo central de Γ, como o segmento BC está contido na reta perpendicular a semirreta $\overrightarrow{AB}$ no ponto B, o ângulo $E\hat{B}C$ mede 90°. Logo,

$$E\hat{A}C = \frac{1}{2}E\hat{B}C = 45°.$$

Como $E\hat{A}C$ é congruente a $B\hat{A}C$, este mede 45°.

De forma análoga, o ângulo $E\hat{B}D$ mede 90° e por conseguinte $E\hat{A}D$ mede 45°, respondendo ao problema.

OBS. Nesta construção, a régua foi utilizada duas vezes (uma para construir a mediatriz e outra para a reta $\overleftrightarrow{AC}$) e o compasso foi usado três vezes (duas para a construção para a mediatriz e uma para a construção de Γ).

3.16 Problema 16 – Dado um segmento AB, construir um losango tal que um de seus lados é o segmento AB e o ângulo relativo ao vértice A mede $45°$.

Resolução 1 $(5L\ 12E)$

Construção:

(i) Construa o círculo Γ de centro A e raio $|AB|$.

(ii) Trace a reta perpendicular à semirreta $\overrightarrow{AB}$ em A e marque o ponto T na interseção desta reta com Γ.

(iii) Trace a reta bissetriz do ângulo $B\hat{A}T$.

(iv) Marque o ponto B na interseção de $\overrightarrow{AB}$ com Γ.

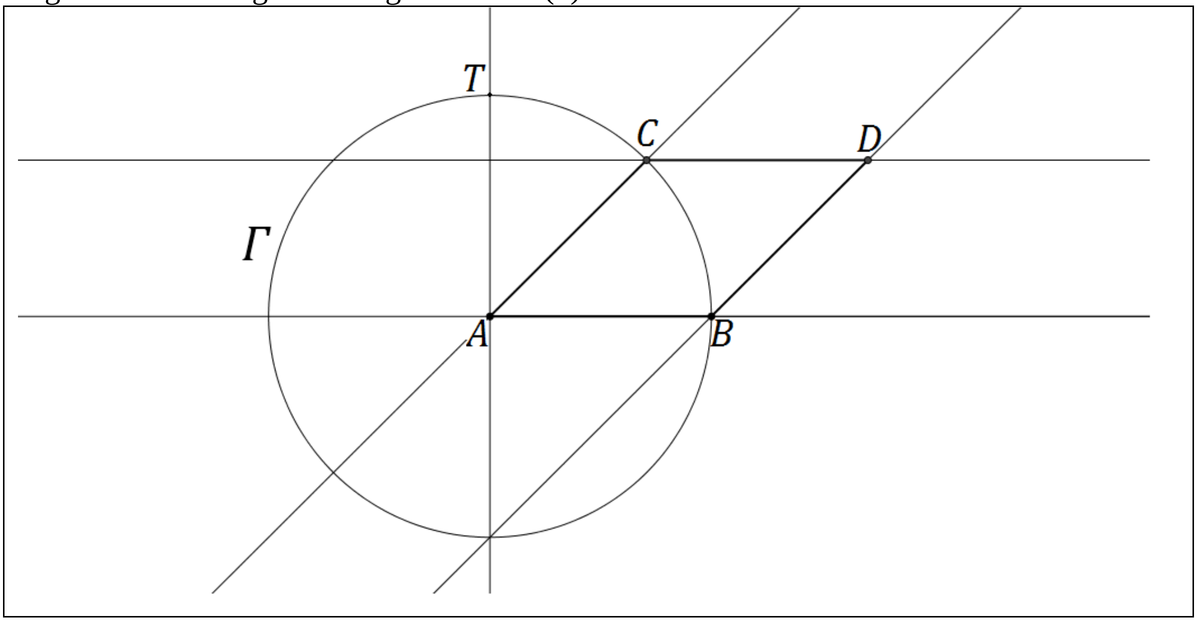
(v) Marque o ponto C na interseção da reta bissetriz do ângulo $B\hat{A}T$ com Γ.

(vi) Construa uma reta paralela à semirreta $\overrightarrow{AB}$ passando por C.

(vii) Construa uma reta paralela à reta $\overleftrightarrow{AC}$ passando por B.

(viii) Marque o ponto D na interseção das retas construídas em (vi) e (vii). O losango $ABDC$ responde ao problema.

Figura 32 – Losango com ângulo de 45° (1).



Fonte: Elaboração própria.

Justificativa: Veja que os segmentos AB e AC são raio de Γ, logo

$$AB = AC.$$

Dessa forma o triângulo ABC é isósceles.

Por outro lado AB e AT são perpendiculares, assim $B\hat{A}T = 90°$, como o segmento AC pertence a bissetriz de $B\hat{A}T$, concluímos que:

$$B\hat{A}C = 90°/2$$

$$B\hat{A}C = 45°$$

Assim

$$A\hat{C}B = C\hat{B}A$$

e

$$A\hat{C}B + C\hat{B}A + B\hat{A}C = 180°$$

$$2C\hat{B}A + 45° = 180°$$

$$2C\hat{B}A = 180° - 45°$$

$$2C\hat{B}A = 135°$$

$$C\hat{B}A = 135°/2$$
$$C\hat{B}A = 67°30'.$$

Veja também que em (vi) os segmentos AB é paralelo a CD, dessa forma os ângulos $C\hat{B}A$ e $B\hat{C}D$ são alternos internos, e

$$C\hat{B}A = B\hat{C}D = 67°30'.$$

De forma análoga em (vii) os segmentos AC é paralelo a BD, dessa forma os ângulos $A\hat{C}B$ e $D\hat{B}C$ são alternos internos, e

$$A\hat{C}B = D\hat{B}C = 67°30'.$$

Assim, os triângulos ACB e DBC, são semelhantes (caso ALA), mas como BC é lado comum, concluímos que

$$AB = BC = CD = DA.$$

Assim, os lados do quadrilátero $ABCD$ têm a mesma medida, o que implica que $ABCD$ é um losango.

OBS. Nesta construção, a régua foi utilizada sete vezes (quatro vezes para a construção das perpendiculares, uma vez para a bissetriz e duas vezes para a reta paralela) e o compasso foi usado cinco vezes (duas vezes para as retas perpendiculares, duas vezes para a construção da reta bissetriz e uma vezes para a construção da reta paralela).

Resolução 2 $(7L\ 7E)$

Construção:

(i) Construa o círculo Γ de centro em A e raio $|AB|$.

(ii) Construa o círculo Γ_1 de centro em B e raio $|BA|$.

(iii) Marque os pontos S e T na interseção de Γ com Γ_1.

(iv) Trace a reta $\overleftrightarrow{ST}$ e marque o ponto V na interseção desta reta com $\overrightarrow{AB}$.

(v) Construa o círculo Γ_2 de centro em V e raio $|VA|$.

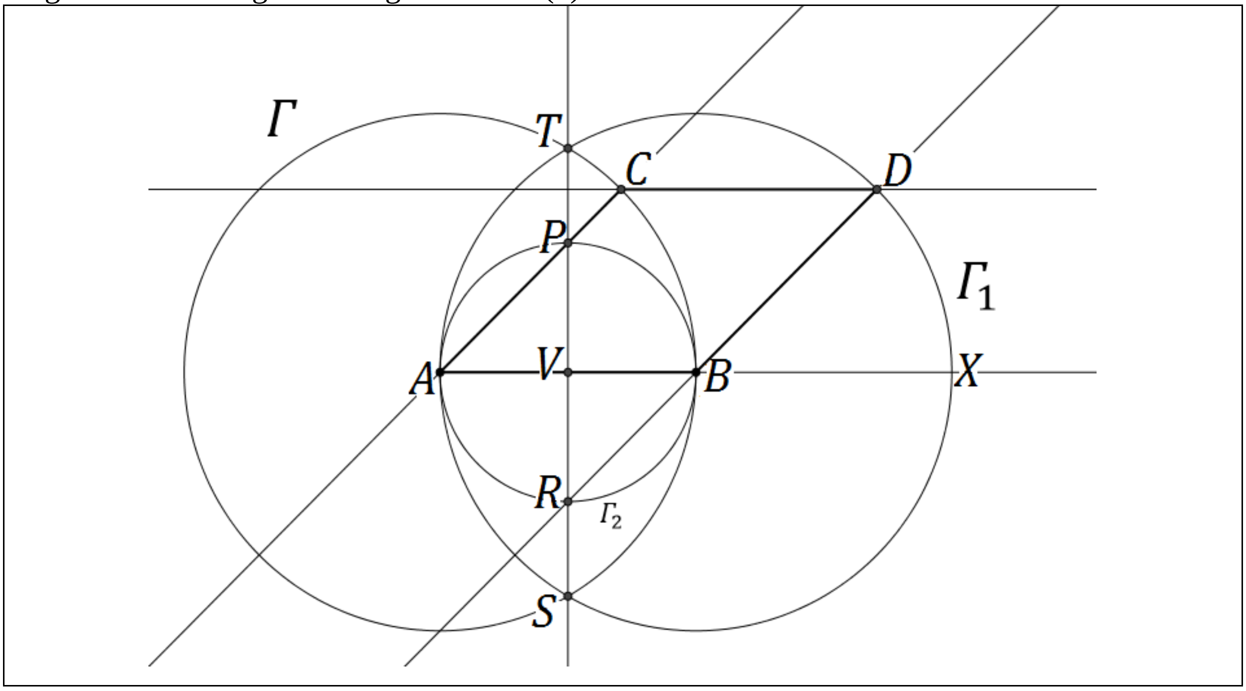
(vi) Marque os pontos R e P na interseção de $\overleftrightarrow{ST}$ com Γ_2.

(vii) Trace a reta $\overleftrightarrow{AP}$ e marque o ponto C na interseção desta reta com Γ.

(viii) Trace a reta $\overleftrightarrow{RB}$ e marque o ponto D na interseção desta reta com Γ_1.

(ix) Construa a reta $\overleftrightarrow{CD}$. O quadrilátero $ABCD$ é um losango e $B\hat{A}C$ mede 45°.

Figura 33 – Losango com ângulo de 45° (2).



Fonte: Elaboração própria.

Justificativa: Veja que a reta $\overleftrightarrow{ST}$ é eixo radical de Γ e Γ_1, logo o segmento ST é perpendicular ao segmento AB, e

$$B\hat{V}P = 90°.$$

Como $B\hat{V}P$ é ângulo central de Γ_2, temos que

$$B\hat{A}P = B\hat{V}P/2$$

$$B\hat{A}P = 90°/2$$

$$B\hat{A}P = 45°.$$

Por outro lado veja que os triângulos AVP e BVR são congruentes, assim

$$V\hat{A}P = V\hat{B}R = 45°$$

e

$$V\hat{B}R = X\hat{B}D,$$

pois são opostos pelo vértice B.

E, dessa forma

$$AC \,//\, BD.$$

Como já foi mencionado na solução anterior, os segmentos AB e AC são raio de Γ, logo o triângulo ABC é isósceles e

$$A\hat{C}B = C\hat{B}A = 67°30'$$

Assim, $A\hat{C}B$ e $D\hat{B}C$ são alternos internos, e

$$A\hat{C}B \; = D\hat{B}C = 67°30'.$$

Veja que os segmentos AB e BD são raios de Γ_1, então

$$AC = BD.$$

Assim, os triângulos ACB e DBC, são congruentes (caso LAL), pois BC é lado comum. Concluímos que os segmentos

$$AB = BC = CD = DA.$$

Assim, os lados do quadrilátero $ABCD$ têm a mesma medida, o que implica que $ABCD$ é um losango.

OBS. Nesta construção, a régua foi utilizada quatro vezes (para a construção das retas $\overleftrightarrow{ST}, \overleftrightarrow{AP}, \overleftrightarrow{RB}, \overleftrightarrow{CD}$) e o compasso foi usado três vezes (para a construção das circunferência Γ, Γ_1 e Γ_2).

4 CONCLUSÃO

O presente estudo demonstrou a utilização de um aplicativo de smartphone e como é possível inserir essa tecnologia no estudo de geometria plana, especificamente nas construções geométricas. Além de proporcionar diversas possibilidades para a resolução de problemas geométricos, causa no estudante um desafio prazeroso.

Dada a importância das construções geométricas, é possível a inserção desse conteúdo nos cursos de geometria plana, pois as técnicas utilizadas durante essas construções melhoram significativamente a abordagem na resolução de problemas. Além disso, o aplicativo Euclidea aceitas apenas soluções matematicamente corretas. Assim, mesmo que a construção seja visualmente aceitável, o aplicativo não a acolherá. Isso certamente auxiliará o discente no processo de aprendizagem, pois terá que encontrar as soluções que têm o rigor matemático.

Dentre as várias possibilidades de utilização desse material como apoio pedagógico, sugerimos uma intervenção gradativa na disciplina de geometria plana. Nessa abordagem, o professor inicia o conteúdo de fundamentação teórica da disciplina, seguindo com a introdução do aplicativo Euclidea para que os alunos tenham contato com o jogo e passem a resolver os problemas propostos.

Mesmo constando de variações decorrentes das deficiências desses alunos, é possível pedir para que resolvam os problemas com régua e compasso reais; quando já tiverem dominado esse desafio, pedir para que justifiquem matematicamente cada resposta e posteriormente compararem com as justificativas desse trabalho.

Esta é apenas uma pequena demonstração da utilidade dessa pesquisa e espera-se que seja utilizado, não apenas por professores, mas por amantes de matemática que gostam de desafios e inovações.

REFERÊNCIAS

ANTUNES, Celso. Jogos para bem ensinar. 1° edição. Fortaleza: Editora IMPH, 2009.

EUCLIDEA - The Largest Collection of Interactive Geometric Puzzles. Disponível em: < https://www.euclidea.xyz/> Acesso em 17/05/2017

LIMA NETO, Sérgio. Construções geométricas: exercícios e soluções. 1° edição. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

WAGNER, Eduardo. Construções geométricas. 6º edição. Rio de Janeiro: SBM, 2007.