UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ADAM OLIVEIRA DA SILVA

RIGIDEZ DE MÉTRICAS CRÍTICAS PARA FUNCIONAIS RIEMANNIANOS

FORTALEZA

2017

ADAM OLIVEIRA DA SILVA

RIGIDEZ DE MÉTRICAS CRÍTICAS PARA FUNCIONAIS RIEMANNIANOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S578r Silva, Adam Oliveira da.
Rigidez de métricas críticas para funcionais riemannianos / Adam Oliveira da Silva. – 2017.
77 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática , Fortaleza, 2017.
Orientação: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

1. Métricas críticas. 2. Funcionais quadráticos. 3. Métrica de Einstein. 4. Funcional volume. 5. Forma espacial. I. Título.

CDD 510

ADAM OLIVEIRA DA SILVA

RIGIDEZ DE MÉTRICAS CRÍTICAS PARA FUNCIONAIS RIEMANNIANOS.

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovoda em: 15/09/2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marco Magliaro
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Cícero Tiarlos Nogueira Cruz
Universidade Federal de Alagoas (UFAL)

Prof. Dr. Israel de Sousa Evangelista
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

Aos meus pais, Sandra Silva e Natalino Silva.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus por ter guiado meu caminho até aqui. Por fazer com que meus pedidos feitos em orações se tornassem realidade.

À minha família, meus amados pais Sandra Silva e Natalino Silva, por todo amor, carinho, conselhos, pelo esforço para oferecer-me educação de qualidade e pelo apoio incondicional em todas minhas escolhas, sem vocês nada disso seria possível. Aos meus irmãos Priscila Guedes e Anderson Silva pelo apoio e aos meus maravilhosos sobrinhos Gabriel, Ana Lívia, Ana Júlia e Ana Catarina.

À minha namorada Elany Maciel, por entender e suportar todo esse tempo distante e pela força nos momentos mais complicados durante o curso. Foram quase quatro anos de viagens para nos encontrar de três a quatro vezes por ano. Acredito que isso fez com que nossa união se consolidasse ainda mais. Te amo linda!!

Ao professor Abdênago Barros, pela sua orientação, motivação nos momentos difíceis, ajuda e colaboração para esta tese. Agradeço pela sua paciência e disponibilidade para as conversas quase que diárias. Levo comigo a certeza de ter tido uma excelente formação sob sua orientação e ter conquistado uma grande amizade.

Aos professores Ernani Ribeiro Jr., Marco Magliaro, Cícero Tiarlos Cruz e Israel Evangelista por terem aceitado o convite para participar da banca examinadora.

À todos os professores da Pós-Graduação em Matemática da UFC, em especial aos professores Marcos Melo, Daniel Cibotaru, Fábio Montenegro, Luciano Mari, Diego Moreira, Ernani Ribeiro Jr., Jorge Herbert e Antonio Caminha que contribuiram de forma direta para minha formação. Agradeço ao professor e amigo Ernani Ribeiro Jr. pelas inúmeras discussões sobre matemática, sugestões e pelas conversas descontraídas durante o cafezinho das 9:30h.

Aos meus amigos da Pós-Graduação (alunos e ex-alunos), Alex Santos, Amilcar Montalbán, Antônio Grangeiro, Antônio Wilson, Davi Ribeiro, Davi Lustosa, Diego Sousa, Diego Eloi, Eddygledson Gama (Nino), Elzimar Rufino, Emanuel Viana, Fabrício Oliveira, Fagner, Francisca Damiana, Halyson Baltazar, Israel Evangelista, Jocel Faustino, J. Tiago Cruz e sua esposa Leidmar Vieira, Léo Ivo, Manoel Vieira, Marcos Raniere, Renivaldo Sena, Tiarlos Cruz, Valdir Junior e Wanderley Pereira. Muito obrigado por esses anos de convivência, ajuda, pela força e pelas conversas durante o café da tarde no seu Diniz.

À Universidade Federal do Pará, em particular, a Faculdade de Matemática pelo apoio à liberação para meu afastamento.

Não poderia deixar de agradecer aos amigos Dalmi Gama e Rômulo Oliveira, pela amizade desde a nossa Graduação e que mesmo realizando seus cursos de Doutorado em outros Centros, nunca deixaram de dar apoio.

Agradecimentos também a Andrea Dantas e Jessyca Soares, secretárias da Pós-Graduação, por toda competência e agilidade.

Ao Programa Prodoutoral/Capes pelo apoio financeiro.

“A possibilidade de realizarmos um sonho é o que torna a vida interessante.”(PAULO COELHO)

RESUMO

Este trabalho tem como principal objetivo estudar métricas que são pontos críticos de alguns funcionais Riemannianos. Na primeira parte, investigaremos métricas críticas de funcionais que são quadráticos na curvatura sobre variedades Riemannianas fechadas. É de conhecimento que métricas tipo formas espaciais são pontos críticos para tais funcionais, denotados aqui por $\mathcal{F}_{t,s}(g)$. Além disso, no caso $s = 0$, métricas de Einstein são sempre críticas para $\mathcal{F}_t(g)$. Provamos que sob algumas condições, a recíproca destes fatos são verdadeiras. Por exemplo, dentre outros resultados, provamos que se $n \geq 5$ e g é uma métrica Bach-*flat* crítica para $\mathcal{F}_{-n/4(n-1)}$ com segunda função simétrica elementar do tensor de Schouten $\sigma_2(A) > 0$, então g tem que ser métrica de Einstein. Ademais, mostramos que uma métrica crítica localmente conformemente plana, com algumas hipóteses adicionais, tem que ser tipo forma espacial. Na segunda parte, estudamos as métricas críticas do funcional volume sobre variedades Riemannianas compactas com bordo suave conexo. Chamamos tais pontos críticos de métricas críticas de Miao-Tam, devido ao estudo variacional feito por Miao e Tam (2009). Neste trabalho provamos que as bolas geodésicas das formas espaciais $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$ possuem o valor máximo para o volume do bordo dentre todas as métricas críticas de Miao-Tam com bordo conexo, desde que o bordo seja uma variedade de Einstein. No mesmo sentido, também estendemos um teorema de rigidez devido à Boucher et al. (1984) e Shen (1997) para métricas estáticas de dimensão n e com curvatura escalar constante positiva, o qual nos fornece outra maneira para obter uma resposta parcial para a *Cosmic no-hair conjecture* já obtida por Chruściel (2003).

Palavras-chave: Métricas críticas. Funcionais quadráticos. Métrica de Einstein. Curvatura escalar. Funcional volume. Forma espacial. Bolas geodésicas.

ABSTRACT

The aim of this work is to study metrics that are critical points for some Riemannian functionals. In the first part, we investigate critical metrics for functionals which are quadratic in the curvature on closed Riemannian manifolds. It is known that space form metrics are critical points for these functionals, denoted by $\mathcal{F}_{t,s}(g)$. Moreover, when $s = 0$, always Einstein metrics are critical to $\mathcal{F}_t(g)$. We proved that under some conditions the converse is true. For instance, among others results, we prove that if $n \geq 5$ and g is a Bach-flat critical metric to $\mathcal{F}_{-n/4(n-1)}$, with second elementary symmetric function of the Schouten tensor $\sigma_2(A) > 0$, then g should be Einstein. Furthermore, we show that a locally conformally flat critical metric with some additional conditions are space form metrics. In the second part, we study the critical metrics to volume functional on compact Riemannian manifolds with connected smooth boundary. We call such critical points of Miao-Tam critical metrics due to the variational study making by Miao and Tam (2009). In this work, we show that the geodesics balls in space forms $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ and $\mathbb{H}^n$ have the maximum possible boundary volume among Miao-Tam critical metrics with connected boundary provided that the boundary be an Einstein manifold. In the same spirit, we also extend a rigidity theorem due to Boucher et al. (1984) and Shen (1997) to n-dimensional static metrics with positive constant scalar curvature, which give us another way to get a partial answer to the Cosmic no-hair conjecture already obtained by Chruściel (2003).

Keywords: Critical metrics. Quadratic functionals. Einstein metrics. Scalar curvature. Volume functional. Space form. Geodesic balls.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana conexa, compacta (possivelmente com bordo) com dimensão $n \geq 3$. Denotemos por $\mathcal{M}$ e $\mathcal{G}$ o espaço das métricas Riemannianas suaves e o grupo de difeomorfismos sobre M, respectivamente. Chamamos um funcional $\mathcal{F} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ de Funcional Riemanniano, se ele é invariante pela ação de $\mathcal{G}$, isto é, se $\mathcal{F}(\varphi^* g) = \mathcal{F}(g)$ para cada $\varphi \in \mathcal{G}$ e $g \in \mathcal{M}$.

Um exemplo bastante conhecido de funcional Riemanniano é o funcional de Einstein-Hilbert

$$g \to \int_M R_g dV_g,$$

onde R_g e dV_g denotam, respectivamente, a curvatura escalar e a forma de volume de M^n. Tal funcional apareceu pela primeira vez no contexto da Relatividade Geral em Hilbert (1915), uma vez que as equações de Einstein surgem como as equações de Euler-Lagrange deste funcional. Nesse mesmo trabalho, Hilbert provou que quando M^n é fechada (compacta sem bordo), as métricas de Einstein são pontos críticos do funcional $\int_M R_g dV_g$ quando restrito ao espaço $\mathcal{M}_1$ das classes de equivalência de métricas Riemannianas suaves com volume unitário, isto é,

$$\mathcal{M}_1 = \{g \in \mathcal{M} | Vol(g) = 1\}.$$

Na geometria, seu estudo também é de grande interesse, por exemplo, Schoen (1984) resolveu o famoso problema de Yamabe utilizando as equações de Euler-Lagrange do funcional de Einstein-Hilbert restrito à classe conforme de uma métrica g. Através disso, é bem conhecido que a métrica a qual realiza a constante de Yamabe é uma métrica de curvatura escalar constante.

Nessa perspectiva, estamos interessados no estudo de pontos críticos de funcionais Riemannianos mais gerais com o intuito de obter resultados de rigidez envolvendo a curvatura escalar da variedade.

No capítulo 3, estudaremos os pontos críticos de funcionais que são quadráticos na curvatura sobre variedades Riemannianas fechadas. Como pode ser visto em Besse (1987), o conjunto $\{\mathcal{W}(g), \rho(g), \mathcal{S}(g)\}$ constitui uma base para o espaço desses funcionais, onde

$$\mathcal{W}(g) = \int_M |W_g|^2 \, dV_g, \quad \rho(g) = \int_M |Ric_g|^2 \, dV_g \quad \text{e} \quad \mathcal{S}(g) = \int_M R_g^2 \, dV_g. \tag{1}$$

Nos últimos anos, vários autores vêm estudando esses tipos de funcionais, visto que eles aparecem naturalmente em certas teorias de campos gravitacionais da Física. Baseado em Hilbert (1915), Berger (1970) foi quem iniciou tal estudo (veja também Besse (1987) e Smolentsev (2007)).

Em dimensão quatro, é bem conhecido que métricas de Einstein são pontos críticos para todos os funcionais definidos em (1) (ver Gursky (2015) ou Viaclovsky (2014)). No entanto, para $n > 4$, isto nem sempre é verdade. Com esta motivação, seguiremos as ideias de Catino (2015) e consideremos o funcional

$$\mathcal{F}_{t,s}(g) = \int_M |Ric_g|^2 dV_g + t \int_M R_g^2 dV_g + s \int_M |Rm_g|^2 dV_g, \tag{2}$$

onde $t, s \in \mathbb{R}$.

Como veremos no Corolário 3.3, uma métrica de Einstein nem sempre é ponto crítico para o funcional $\mathcal{F}_{t,s}$. Porém, de acordo com o Corolário 3.6 isto sempre ocorre para o caso $s = 0$. Por isso, dividiremos este capítulo em dois momentos. No primeiro, estudaremos o caso $s = 0$, isto é, consideraremos o funcional

$$\mathcal{F}_t(g) = \int_M |Ric_g|^2 dV_g + t \int_M R_g^2 dV_g, \tag{3}$$

definido para alguma constante $t \in \mathbb{R}$. Este caso é baseado no artigo *A characterization of critical metrics for quadratic curvature functionals* (2017a), do autor em parceria com A. Barros. Como em dimensão maior do que quatro $\mathcal{F}_t$ não é *scaling*-invariante, é natural restringir o funcional sobre $\mathcal{M}_1$. Equivalentemente, podemos considerar o funcional normalizado com o volume da variedade dado por $\widetilde{\mathcal{F}_t}(g) = Vol(g)^{\frac{4}{n}-1}\mathcal{F}_t(g)$ (ver Gursky e Viaclovsky (2015)).

É natural perguntarmos sobre quais condições uma métrica crítica para $\mathcal{F}_t$ sobre $\mathcal{M}_1$ é de Einstein. Com certeza, nem todos os pontos críticos de $\mathcal{F}_t$ sobre $\mathcal{M}_1$ são métricas de Einstein, por exemplo, em dimensão 4, podemos ver em Besse (1987) que toda métrica Bach-*flat* é crítica para $\mathcal{F}_{-1/3}$ e toda métrica conformemente plana com curvatura escalar nula é crítica para $\mathcal{F}_{-1/4}$ sobre $\mathcal{M}_1$. Tanno (1975), mostrou que, em dimensão 3, uma métrica crítica para $\mathcal{F}_{-1/3}$ é de Einstein se a curvatura escalar satisfizer uma certa condição de pinching. Em Gursky e Viaclovsky (2001), os autores assumiram uma condição integral, digamos $\mathcal{F}_{-3/8} \leq 0$ em dimensão três, para concluir que as métricas críticas são de Einstein. Este resultado também é verdade em dimensão maior do que quatro desde que a métrica seja suposta localmente conformemente plana (ver Hu e Li (2003)).

Mais recentemente, Catino (2015) provou alguns resultados nesta direção assumindo sinal na curvatura seccional. Por exemplo, em dimensão $n \geq 3$, mostrou que uma métrica crítica para $\mathcal{F}_t$ para algum $t < -1/2$ e curvatura seccional não negativa tem que ser métrica de Einstein. Já em dimensão 4, ele mostrou que toda métrica crítica para $\mathcal{F}_t$ com $t \geq -1/4$ e curvatura seccional não positiva é uma métrica de Einstein.

Nossos resultados de rigidez obtidos neste trabalho, provém de uma importante expressão obtida para o tensor de Bach de uma métrica crítica para o funcional $\mathcal{F}_{t,s}$. Mais precisamente, obtemos a seguinte proposição.

Proposição 3.4. *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana fechada de dimensão* $n \geq 4$. *Se* g *é uma métrica crítica para* $\mathcal{F}_{t,s}$ *sobre* $\mathcal{M}_1$, *então o tensor de Bach é dado por*

$$\begin{aligned}(n-2)(1+4s)B_{ij} &= \Big(\frac{n+4(n-1)t+4s}{2(n-1)}\Big)(\mathring{\nabla}^2 R)_{ij} + 4sR_{ikjp}\mathring{R}_{kp} \\ &- \Big(\frac{(n-2)-4s}{(n-1)} + 2 + 2nt\Big)\frac{R}{n}\mathring{R}_{ij} + \frac{(n-4)-4ns}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^2 g_{ij} \\ &+ 2s\Big(\frac{1}{n}|Rm|^2 g_{ij} - R_{ikpq}R_{jkpq}\Big) - \frac{(n-4)-8s}{(n-2)}\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}.\end{aligned}$$

Como consequência, no caso $s = 0$, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 3.8. *Seja* (M^4, g) *uma variedade Riemanniana Bach-flat, fechada de dimensão* 4. *Se* g *é uma métrica crítica para* $\mathcal{F}_t$ *sobre* $\mathcal{M}_1$ *para algum* $t \neq -\frac{1}{3}$, *então devemos ter* $R \equiv 0$ *ou* M^4 *é uma variedade de Einstein.*

Em particular, para $t = -n/4(n-1)$ e a segunda função simétrica do tensor de Schouten $\sigma_2(A) > 0$, mostramos que uma métrica Bach-flat e crítica para $\mathcal{F}_t$ tem que ser de Einstein. Este resultado recupera a Proposição 5.1 de Hu e Li (2003) para o caso de métricas conformemente planas. Isto é, provamos o seguinte teorema.

Teorema 3.5. *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana fechada de dimensão* $n \neq 4$ *e* $g \in \mathcal{M}_1$ *uma métrica Bach-flat. Se* g *é um ponto crítico para* $\mathcal{F}_{-n/4(n-1)}$ *com* $\sigma_2(A) > 0$, *então* (M^n, g) *é uma variedade de Einstein.*

Para dimensão $n \geq 5$ e métricas localmente conformemente planas, obtemos um teorema semelhante ao Corolário 3.8 para uma certa classe de funcionais $\mathcal{F}_t$.

Teorema 3.6. *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana fechada, localmente conformemente plana, com curvatura escalar* R *não negativa e de dimensão* $n \geq 5$. *Se* g *é uma métrica crítica para o funcional* $\mathcal{F}_t$ *sobre* $\mathcal{M}_1$ *para algum* $t \leq -\frac{n^2-3n+4}{2n(n-1)}$, *então devemos ter*

(*i*) *ou* $R_g \equiv 0$, *ou o recobrimento universal de* M^n *é isométrico à esfera euclidiana* $\mathbb{S}^n$, *quando* $t < -\frac{n^2-3n+4}{2n(n-1)}$;

(*ii*) *ou* $R_g \equiv 0$ *e nesse caso* g *não é uma métrica de Einstein, ou o recobrimento universal de* M^n *é isométrico à esfera euclidiana* $\mathbb{S}^n$ *ou ao espaço euclidiano* $\mathbb{R}^n$, *quando* $t = -\frac{n^2-3n+4}{2n(n-1)}$.

No caso tridimensional mostramos que a condição de pinching sobre a curvatura escalar no Teorema 3.3 devido à Catino (2015) (veja Seção 3.3) pode ser removida no caso de métricas conformemente planas e $t > -1/3$. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.7. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana fechada, localmente conformemente plana, com curvatura escalar R não negativa e g uma métrica crítica para $\mathcal{F}_t$ sobre $\mathcal{M}_1$ para algum $t \geq -1/3$. Então,*

(i) ou $R_g \equiv 0$, ou o recobrimento universal de M^3 é isométrico à esfera euclidiana $\mathbb{S}^3$, se $t > -1/3$;

(ii) ou $R_g \equiv 0$ e nesse caso g não é uma métrica de Einstein, ou o recobrimento universal de M^3 é isométrico à esfera euclidiana $\mathbb{S}^3$ ou ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, se $t = -1/3$.

No segundo momento, baseado no artigo *On locally conformally flat critical metrics for quadratic functionals* (2017c) escrito pelo autor em parceira com A. Barros, estudaremos as métricas críticas para o funcional $\mathcal{F}_{t,s}$ com $s \neq 0$. A presença do termo envolvendo o tensor de Riemann faz com que nem todas as métricas de Einstein sejam pontos críticos para o funcional, porém, as métricas em formas espacias sempre serão. Nesta seção do capítulo 3, iremos apresentar dois resultados que garantem quando uma métrica crítica para $\mathcal{F}_{t,s}$ sobre $\mathcal{M}_1$ é isométrica à métrica de uma forma espacial. Mais precisamente, provamos os seguintes teoremas.

Para o caso $4s + n + 4(n-1)t = 0$, o seguinte teorema é verdadeiro.

Teorema 3.8. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana fechada de dimensão $n > 4$. Se $g \in \mathcal{M}_1$ é uma métrica localmente conformemente plana e crítica para $\mathcal{F}_{t,-\frac{n+4(n-1)t}{4}}$ tal que $t \notin \{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2(n-1)}\}$ e $\sigma_2(A) > 0$, então (M^n, g) é uma forma espacial.*

Já no caso $4s + n + 4(n-1)t \neq 0$ e $s = -\frac{n-2}{4}$, a condição sobre a segunda função simétrica $\sigma_2(A)$ não é necessária. Mais precisamente, obtemos o seguinte teorema.

Teorema 3.9. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana fechada, localmente conformemente plana de dimensão $n > 4$ e curvatura escalar não-negativa. Se $g \in \mathcal{M}_1$ é uma métrica crítica para $\mathcal{F}_{t,s}$ tal que $s = -\frac{n-2}{4}$ e $t \neq -\frac{1}{2(n-1)}$, então ou $R \equiv 0$, ou o recobrimento universal de (M^n, g) é isométrico à esfera euclidiana $\mathbb{S}^n$.*

No capítulo 4, (M^n, g) denotará uma variedade Riemanniana compacta, conexa, de dimensão $n \geq 3$, com bordo suave conexo $\Sigma = \partial M$ e γ uma métrica fixada no bordo. A proposta neste momento, é apresentar alguns resultados de rigidez para métricas críticas do funcional volume $V : \mathcal{M}_\gamma^R \to \mathbb{R}$, onde $\mathcal{M}_\gamma^R$ representa o espaço das métricas Riemannianas sobre M com curvatura escalar constante R, as quais coincidem com γ quando restritas ao bordo Σ.

Recentemente, importantes avanços foram obtidos em relação às métricas críticas de V. Por exemplo, motivados pela caracterização variacional das métricas de Einstein sobre variedades fechadas através do estudo dos pontos críticos do funcional de Einstein-Hilbert, Miao e Tam (2009) estudaram o problema variacional do funcional volume restrito ao espaço $\mathcal{M}_\gamma^R$ e encontraram uma caracterização para métricas críticas de

V. Em particular, mostraram que se $g \in \mathcal{M}_\gamma^R$ possui a propriedade de que o primeiro autovalor de Dirichlet de $(n-1)\Delta_g + R$ é positivo, então g é ponto crítico de V restrito ao espaço $\mathcal{M}_\gamma^R$ se, e somente se, existe uma função suave f sobre M satisfazendo o seguinte sistema de Equações Diferenciais Parciais

$$\mathfrak{L}_g^*(f) = -(\Delta_g f)g + \nabla_g^2 f - fRic_g = g \tag{4}$$

com $f|_\Sigma = 0$, onde Ric_g, Δ_g e ∇_g^2 denotam, respectivamente, o tensor de Ricci, o Laplaciano e a forma hessiana associada à métrica g sobre M^n e $\mathfrak{L}_g^*$ representa o L^2-adjunto da linearização $\mathfrak{L}_g$ do operador curvatura escalar. Além disso, mostraram também que uma variedade Riemanniana admitindo uma função f satisfazendo (4) tem que ter curvatura escalar constante.

Utilizando a mesma nomenclatura de Barros, Diógenes e Ribeiro Jr. (2015), chamaremos tais pontos críticos de métricas críticas de Miao-Tam ou simplesmente métricas de Miao-Tam, isto é, uma métrica crítica de Miao-Tam é uma tripla $(M^n,\, g,\, f)$, onde $(M^n,\, g)$ é uma variedade Riemanniana conexa e compacta com bordo suave Σ, f é uma função suave em M tal que $f^{-1}(0) = \Sigma$ e satisfaz à equação (4).

Ainda no mesmo trabalho em 2009, Miao e Tam provaram que dentre os domínios compactos Ω em formas espaciais simplesmente conexas, as bolas geodésicas são as únicas métricas críticas de V (se $\Omega \subset \mathbb{S}^n$, assumimos $V(\Omega) < \frac{1}{2}V(\mathbb{S}^n)$) sobre $\mathcal{M}_\gamma^R$. Deve-se notar que funções altura, a menos de constantes, resolvem a equação (4) sobre bolas geodésicas em formas espaciais simplesmente conexas, como pode ser verificado em Miao e Tam (2009) ou Batista et al. (2017).

Motivados pelas idéias de Kobayashi (1982), Miao e Tam (2011) procuraram respostas para o seguinte questionamento:

Questão 4.1. *As bolas geodésicas nas formas espaciais simplesmente conexas $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$ são as únicas métricas críticas de Miao-Tam?*

Mais precisamente, eles mostraram que uma métrica crítica de Miao-Tam (M^n, g, f), localmente conformemente plana, simplesmente conexa e com bordo isométrico à esfera canônica $\mathbb{S}^{n-1}$ tem que ser isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{H}^n$. Em dimensão baixa ($n = 3, 4$), Barros, Diógenes e Ribeiro Jr. (2015) melhoraram este teorema, concluindo que a hipótese localmente conformemente plana poderia ser substituída por uma condição mais fraca, considerando uma métrica Bach-*flat*.

Em Miao e Tam (2011), os autores mostraram que a condição sobre o bordo ser isométrico à esfera canônica $\mathbb{S}^{n-1}$ pode ser removida desde que (M^n, g) seja uma variedade de Einstein. Mais recentemente, Baltazar e Ribeiro Jr. (2017) melhoraram o resultado de Miao e Tam (2011), mostrando que a condição da variedade ser de Einstein pode ser substituída pela hipótese mais fraca: tensor de Ricci paralelo.

Outros resultados interessantes sobre métricas críticas de Miao-Tam estão relacionados às estimativas de volume do bordo de tais variedades. Porém, antes de comentá-los, relembremos a definição de outra classe de métricas que servirá de motivação para nossas conclusões do Capítulo 4. Dizemos que (M^n, g, f) é uma tripla estática ou simplesmente métrica estática, se (M^n, g) é uma variedade Riemanniana conexa, completa, com bordo Σ (possivelmente não-vazio) e existe uma função f suave não negativa sobre M^n tal que $f^{-1}(0) = \Sigma$ e

$$\mathfrak{L}_g^*(f) = 0, \tag{5}$$

onde $\mathfrak{L}_g^*(f) = -(\Delta_g f)g + \nabla_g^2 f - fRic_g$.

Vale lembrar, que a identidade (5) aparece em Relatividade Geral, onde ela define soluções estáticas das esquações de campos de Einstein. O núcleo de $\mathfrak{L}_g^*$ está relacionado aos espaços-tempo estáticos em Relatividade Geral, como pode ser visto em Corvino (2000). Ele mostrou ainda, que uma métrica estática também possui curvatura escalar constante R. No caso de curvatura escalar positiva, existe uma clássica conjectura chamada *Cosmic no-hair conjecture*, formulada por Boucher, Gibbons e Horowitz (1984), que afirma:

Conjectura 4.1 (Cosmic no-hair conjecture). *A única tripla estática compacta (M^n, g, f) de dimensão n, com curvatura escalar positiva e bordo conexo Σ é dada por um hemisfério canônico $\mathbb{S}^n_+$, onde a função f é a função altura correspondente.*

Alguns resultados parciais para a conjectura foram obtidos. Por exemplo, Kobayashi (1982) e Lafontaine (1983) provaram, independentemente, que a conjectura é verdadeira quando (M^n, g) é suposta localmente conformemente plana. Outra importante resposta para esta questão foi dada por Boucher-Gibbons-Horowitz (1984) e Shen (1997) no caso tridimensional de acordo com o teorema abaixo.

Teorema 4.5 (Boucher-Gibbons-Horowitz (1984), Shen (1997)). *Seja (M^3, g, f) uma tripla estática compacta, orientada, com bordo conexo Σ e curvatura escalar 6. Então Σ é uma esfera bidimensional cuja área satisfaz a desigualdade*

$$|\Sigma| \leq 4\pi,$$

com igualdade acontecendo se, e somente se, M é isométrica ao hemisfério canônico $\mathbb{S}^3_+$.

Inspirado nesta desigualdade, com a hipótese adicional do bordo ser isométrico à esfera $\mathbb{S}^{n-1}(r)$ de raio $r > 0$, Chruściel (2003) concluiu que $r \leq \sqrt{\frac{n}{\Lambda}}$, onde $\Lambda > 0$ denota a constante cosmológica da tripla estática (M^n, g, f). Além disso, se $r = \sqrt{\frac{n}{\Lambda}}$, então M^n é dada por um hemisfério canônico $\mathbb{S}^n_+(\sqrt{n/\Lambda})$.

Hijazi, Montiel e Raulot (2015) estabeleceram um resultado similar envolvendo uma desigualdade para o primeiro autovalor do operador de Dirac induzido em cada componente do bordo. Isto é, provaram que o espaço-tempo de de Sitter minimiza o valor absoluto do operador de Dirac sobre cada componente do bordo dentre todas as triplas estáticas com curvatura escalar positiva.

Batista et al. (2017) obtiveram um análogo do Teorema 4.5 para métricas críticas de Miao-Tam. Mais precisamente, em Batista et al. (2017) foi provado o seguinte resultado: *Seja* (M^3, g, f) *uma métrica crítica de Miao-Tam, compacta, orientada, com bordo conexo* Σ *e curvatura escalar não negativa. Então,* Σ *é uma esfera bidimensional e*

$$|\Sigma| \leq \frac{4\pi}{C(R)}, \tag{6}$$

onde $C(R) = \frac{R}{6} + \frac{1}{4|\nabla f|^2}$ *é constante. Além disso, a igualdade em* (6) *ocorre, se, e somente se,* (M^3, g) *é isométrica à bola geodésica em alguma forma espacial simplesmente conexa* $\mathbb{R}^3$ *ou* $\mathbb{S}^3$*.*

Barbosa et al. (2016) mostraram que o resultado acima também é válido no caso de curvatura escalar negativa, desde que a curvatura média do bordo satisfaça $H > 2$. Ademais, eles estenderam este mesmo fato para dimensão 5 assumindo que o bordo Σ seja de Einstein. Para outros resultados relacionaods, o leitor pode ver também Corvino et al. (2013).

O objetivo deste capítulo é estender para quaisquer dimensão $n \geq 4$ as estimativas obtidas por Batista et al. (2017) e Barbosa et al. (2016) para métricas críticas de Miao-Tam, bem como o Teorema 4.5 para métricas estáticas. Com essas estimativas iremos obter importantes respostas para a Questão 4.1, assim como para a *Cosmic no-hair conjecture*. Os resultados deste capítulo foram obtidos no artigo *Rigidity for critical metrics of the volume functional* (2017b), escrito pelo autor em parceira com A. Barros.

Primeiramente, provamos que as bolas geodésicas nas formas espacias simplesmente conexas $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{H}^n$ possuem o valor máximo para o volume do bordo dentre todas métricas críticas de Miao-Tam com o bordo Σ sendo uma variedade de Einstein e conexa. De fato, o seguinte teorema é verdadeiro.

Teorema 4.8. *Seja* (M^n, g, f), $n \geq 4$, *uma métrica crítica de Miao-Tam, compacta, orientada, com bordo conexo* Σ *e curvatura escalar* $R = n(n-1)\varepsilon$, *onde* $\varepsilon = -1, 0, 1$. *Suponha que o bordo* Σ *seja uma variedade de Einstein com curvatura escalar* R^{Σ} *positiva. Se* $\varepsilon = -1$, *assumimos ainda que a curvatura média de* Σ *satisfaz* $H > n-1$. *Então temos*

$$|\Sigma|^{\frac{2}{n-1}} \leq \frac{Y(\mathbb{S}^{n-1}, [g_{can}])}{C(R)}, \tag{7}$$

onde $C(R) = \frac{n-2}{n}R + \frac{n-2}{n-1}H^2$ *é uma constante positiva. Além disso, a igualdade ocorre em* (7)*, se, e somente se,* (M^n, g) *é isométrica a uma bola geodésica em alguma das formas* *espaciais simplesmente conexas* $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{R}^n$ *ou* $\mathbb{H}^n$.

O número real $Y(\mathbb{S}^{n-1},[g_{can}])$ corresponde à constante de Yamabe da esfera canônica $\mathbb{S}^{n-1}$, cuja definição será lembrada na Seção 4.3. De acordo com o Teorema 4.8, obtemos uma reposta parcial para a Questão 4.1 feita por Miao e Tam (2011). Mais precisamente, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 4.1. *Seja* (M^n,g,f), $n\geq 4$, *uma métrica crítica de Miao-Tam, compacta, orientada, com bordo conexo* Σ *isométrico à esfera canônica* $\mathbb{S}^{n-1}(r)$ *de raio* $r=\left(\frac{(n-1)(n-2)}{C(R)}\right)^{1/2}$, *e curvatura escalar* $R=n(n-1)\varepsilon$, *onde* $\varepsilon=-1,0,1$. *Além disso, se* $\varepsilon=-1$, *assumimos que a curvatura média de* Σ *satisfaz* $H>n-1$. *Então* (M^n,g) *é isométrica a uma bola geodésica em alguma das formas espaciais simplesmente conexas* $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{R}^n$ *ou* $\mathbb{H}^n$.

Vale ressaltar, que sob a escolha da curvatura escalar $R=n(n-1)\varepsilon$, a constante $C(R)$ admite a seguinte expressão

$$C(R)=\frac{n-2}{n-1}\big(H^2+(n-1)^2\varepsilon\big). \tag{8}$$

Quando uma métrica crítica de Miao-Tam possui curvatura escalar não negativa é possível estimar o volume de M^n conforme o corolário a seguir.

Corolário 4.2. *Sob as mesmas condições do Teorema 4.8, porém* $R\geq 0$, *deduzimos*

$$\Big(\frac{nH}{n-1}\Big)^{\frac{2}{n-1}}|M|^{\frac{2}{n-1}}\leq\frac{Y(\mathbb{S}^{n-1},[g_{can}])}{C(R)}. \tag{9}$$

Além disso, a igualdade acontece em (9) *se, e somente se,* (M^n,g) *é isométrica a uma bola geodésica no espaço euclidiano* $\mathbb{R}^n$.

Para métricas estáticas, o próximo teorema estende o resultado devido a Boucher-Gibbons-Horowitz (1984), bem como aquele devido a Shen (1997).

Teorema 4.9. *Seja* (M^n,g,f), $n\geq 4$, *uma tripla estática, compacta, orientada, com bordo conexo* Σ *e curvatura escalar positiva* $R=n(n-1)$. *Suponha que o bordo* Σ *seja uma variedade de Einstein com curvatura escalar* R^{Σ} *positiva, então vale a seguinte estimativa*

$$|\Sigma|\leq\omega_{n-1}. \tag{10}$$

Além disso, a igualdade em (10) *é atingida somente para o hemisfério canônico* $\mathbb{S}^n_+$.

A constante ω_{n-1} representa o volume da esfera canônica $\mathbb{S}^{n-1}$. Com isto, através do Teorema 4.9 reobtemos uma resposta parcial, já demonstrada por Chruściel (2003), para a *cosmic no-hair conjecture* formulada por Boucher et al. (1984). De fato, iremos provar:

Corolário 4.3. *A Cosmic no-hair conjecture é verdadeira quando o bordo* Σ *é isométrico à esfera canônica* $\mathbb{S}^{n-1}$.

Gibbons-Hartnoll-Pope (2003) construíram contra-exemplos para a *cosmic no-hair conjecture* nos casos $4 \leq n \leq 8$. No entanto, nesses contra-exemplos, encontramos componentes do bordo que são topologicamente esferas dotadas com métricas não canônicas e produtos Riemannianos de esferas. Assim, isto não contradiz nosso Corolário 4.3.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, iremos fixar as notações e recordarmos um breve conteúdo de Geometria Riemanniana necessário para o bom encaminhamento nos demais capítulos. Na seção 2.1 iremos apresentar as definições do tensor de curvatura de Riemann, tensor de Ricci e curvatura escalar associados a uma variedade Riemanniana, bem como apresentar alguns conceitos e outros tensores essenciais para este trabalho. Não entraremos em detalhes sobre demonstrações nesta seção, porém o leitor pode consultar Besse (1987), Petersen (2006) ou Chow, Lu e Ni (2006) para esclarecimentos. Na seção 2.2 colocaremos algumas fórmulas de variação necessárias para deduzirmos a primeira variação dos funcionais Riemannianos estudados nos demais capítulos.

2.1 Notações e alguns tensores importantes

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 3$ com métrica g e conexão de Levi-Civita ∇. Além disso, denotemos por $\mathcal{C}^\infty(M)$ o espaço das funções suaves definidas em M.

O **tensor curvatura de Riemann** é o $(1,3)-$tensor $Rm : \mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$ definido por

$$\begin{aligned} Rm\,(X,Y)Z &= \nabla^2_{X,Y}Z - \nabla^2_{Y,Z}Z \\ &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, \end{aligned}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Usando a métrica, podemos interpretar o tensor Rm como um $(0,4)-$tensor, definido por $\mathrm{Rm} : \mathfrak{X}(M)^4 \to \mathcal{C}^\infty(M)$, onde

$$Rm\,(X,Y,Z,W) = -\langle Rm\,(X,Y)Z, W\rangle.$$

Em um sistema de coordenadas adotaremos a convenção de índices repetidos para indicar soma. Consequentemente podemos escrever

$$\begin{aligned} Rm(\partial_i,\partial_j)\partial_k &= R_{ijk}{}^l\partial_l \\ Rm(\partial_i,\partial_j,\partial_k,\partial_l) &= R_{ijkl}. \end{aligned}$$

Assim,

$$R_{ijkl} = -\langle Rm(\partial_i,\partial_j)\partial_k, \partial_l\rangle = -\langle R_{ijk}{}^m\partial_m, \partial_l\rangle = -R_{ijk}{}^m g_{ml},$$

isto é, o índice superior desce na terceira posição.

Dado um plano bidimensional $\Pi \subset T_pM$ e $X_p, Y_p \in T_pM$ vetores que geram

Π, então

$$K(\Pi) = \frac{Rm(X,Y,X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}, \tag{11}$$

não depende da base escolhida para Π, e é chamada **curvatura seccional** do plano Π. Uma variedade Riemanniana completa e com curvatura seccional constante é dita uma **forma espacial**.

O **tensor de Ricci** é definido como o $(0,2)-$ tensor

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = tr(U \to \mathrm{Rm}(U,X)Y).$$

Em coordenadas teremos:

$$R_{ij} = R_{lij}{}^{l} = g^{lm}R_{limj}$$

e a **curvatura escalar** é

$$R = g^{ij}R_{ij}.$$

Relembremos alguns tensores essenciais para o nosso trabalho. Primeiro recorde que em dimensão $n \geq 3$ o tensor de Riemann admite a seguinte decomposição:

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= W_{ijkl} + \frac{1}{n-2}\big(R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il}\big) \\ &\quad - \frac{R}{(n-1)(n-2)}\big(g_{jl}g_{ik} - g_{il}g_{jk}\big), \end{aligned} \tag{12}$$

onde W_{ijkl} denota o tensor de curvatura de Weyl e R_{ij} denota o tensor de Ricci. Outro tensor importante é o tensor de Cotton C, definido como segue:

$$C_{ijk} = \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)}\big(\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik}\big), \tag{13}$$

o qual está relacionado com o tensor de Weyl da seguinte maneira:

$$C_{ijk} = -\frac{(n-2)}{(n-3)}\nabla_l W_{ijkl}, \tag{14}$$

quando $n \geq 4$.

Observação 2.1. *Uma importante propriedade do tensor de Cotton é que ele é antisimétrico nos dois primeiros índices e tem traço nulo em quaisquer índices, isto é,*

$$C_{ijk} = -C_{jik} \ \text{ e } \ g^{ij}C_{ijk} = g^{ik}C_{ijk} = 0. \tag{15}$$

O tensor de Schouten A é definido por

$$A_{ij} = \frac{1}{n-2}\big(R_{ij} - \frac{R}{2(n-1)}g_{ij}\big). \tag{16}$$

Das equações (12) e (16) concluímos que

$$R_{ijkl} = (A \owedge g)_{ijkl} + W_{ijkl}, \tag{17}$$

onde $\owedge$ representa o produto Kulkarni-Nomizu, o qual é definido por

$$(A \owedge B)_{ijkl} = A_{ik}B_{jl} + A_{jl}B_{ik} - A_{il}B_{jk} - A_{jk}B_{il}.$$

Consideremos uma transformação linear simétrica $A : V \to V$, onde V é uma espaço vetorial de dimensão n. Denotemos os autovalores de A por $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Definição 2.1. *Se $0 \leq q \leq n$, então a q-ésima função simétrica elementar de A é definda por*

$$\sigma_q(A) = \sum_{i_1<\ldots<i_q} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_q}. \tag{18}$$

Suponha que para alguma base de V, a transformação A possui matriz (A_i^j), então em Reilly (1974, Proposição 1.2) encontramos uma relação bastante conhecida sobre $\sigma_q(A)$, isto é,

$$\sigma_q(A) = \frac{1}{q!}\sum \delta^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_q} A^{j_1}_{i_1} \ldots A^{j_q}_{i_q}, \tag{19}$$

onde $\delta^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_q}$ representa o delta de Kronecker generalizado. Assim, para $q = 2$ e considerando o tensor de Schouten dado em (16) como um tensor do tipo $(1,1)$, teremos

$$\begin{aligned}
\sigma_2(A) &= \frac{1}{2}((trA)^2 - |A|^2) \\
\sigma_2(A) &= -\frac{1}{2(n-2)^2}|Ric|^2 + \frac{n}{8(n-1)(n-2)^2}R^2.
\end{aligned} \tag{20}$$

A seguir, apresentamos algumas definições essenciais para esta tese.

Definição 2.2. *Uma métrica Riemanniana g é chamada métrica de Einstein se o tensor de Ricci satisfaz $Ric_g = \lambda g$, para alguma constante real λ.*

Definição 2.3. *Uma variedade Riemanniana (M, g) é chamada localmente conformemente plana se para todo ponto $p \in M$, existe uma vizinhança V de p e uma função $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$ tal que $(V, e^{2f}g)$ é flat.*

Aqui, dizemos que uma métrica h é *flat* se ela é localmente isométrica à métrica euclidiana, isto é, para todo $p \in M$ existe uma vizinhança V de p e uma isometria $f : V \to f(V) \subset \mathbb{R}^n$.

Nesta tese utilizaremos uma caracterização de métricas localmente conformemente planas segundo o Teorema de Weyl-Schouten, primeiramente provado por Cotton (1897) em dimensão três e por Weyl (1918) e Schouten (1921) em dimensão $n \geq 4$.

Teorema 2.1 (Weyl-Schouten)**.** *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n. Então*

(i) Se $n = 2$, então (M^n, g) é localmente conformemente plana.

(ii) Se $n = 3$, então (M^n, g) é localmente conformemente plana se, e somente se, o tensor de Cotton é nulo.

(iii) Se $n \geq 4$, então (M^n, g) é localmente conformemente plana se, e somente se, o tensor de Weyl é nulo.

Em particular, se $\mathrm{Ric} = \frac{R}{n} g$, isto é, g é uma métrica de Einstein, então $A = \frac{R}{2n(n-1)} g$ devido a eq. (16). Logo, por (17) obtemos

$$Rm = W + \frac{R}{2n(n-1)}(g \owedge g). \tag{21}$$

Assim, se (M, g) é variedade de Einstein e localmente conformemente plana (i.e., $W \equiv 0$), então a variedade tem que ser uma forma espacial.

Finalmente, consideremos o tensor de Bach definido para $n \geq 4$, o qual foi introduzido por Bach em 1921:

$$B_{ij} = \frac{1}{n-3} \nabla^k \nabla^l W_{ikjl} + \frac{1}{n-2} R^{kl} W_{ikjl}. \tag{22}$$

Além disso, para $n = 3$, definimos

$$B_{ij} = \nabla^k C_{kij}. \tag{23}$$

Dizemos que a métrica é Bach-*flat* se $B_{ij} = 0$. Em dimensão 4, as métricas Bach-*flats* são precisamente pontos críticos do funcional conformemente invariante

$$\mathcal{W}(g) = \int_M |W_g|^2 dM_g, \tag{24}$$

definido no espaço das métricas Riemannianas. Em particular, se uma métrica é localmente conformemente plana então ela é também Bach-*flat*. Além disso, se a métrica é de Einstein, então ela é Bach-*flat*, pois o tensor de Cotton (13) é identicamente nulo e o tensor de Weyl tem traço igual a zero. Porém, como pode ser visto em Besse (1987), a recíproca desses fatos nem sempre acontece. Em resumo, temos que

$$W \equiv 0 \;\Rightarrow\; B \equiv 0 \tag{25}$$
$$\not\Leftarrow$$
$$\text{e}$$
$$Ric = \frac{R}{n}g \;\Rightarrow\; B \equiv 0. \tag{26}$$
$$\not\Leftarrow$$

2.2 Fórmulas de Variação

Nesta seção iremos apresentar algumas fórmulas de variação já bastantes conhecidas, porém apresentaremos uma breve demonstração para o leitor.

Consideremos $g(t)$ uma família a $1-$parâmetro de métricas Riemannianas suaves tais que $g(0)_{ij} = g_{ij}$ e $\frac{\partial}{\partial t}g_{ij} = h_{ij}$, onde $h \in \Gamma(S^2(T^*(M)))$ é um 2-tensor simétrico. Lembremos que a variação inversa de g é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t}g^{ij} = -g^{ik}h_{kl}g^{jl}. \tag{27}$$

Lema 2.1. *As fórmulas da primeira variação para o elemento de volume e para os símbolos de Christoffel são:*

a) $\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\, dV_{g(t)} = \frac{1}{2}trh\, dV_g$.

b) $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}(\nabla_i h_{jl} + \nabla_j h_{il} - \nabla_l h_{ij})$.

Demonstração: Sabemos que em um sistema de coordenadas locais, o elemento de volume se escreve como

$$dV_{g(t)} = \sqrt{det(g(t))}dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

enquanto que a fórmula de variação do determinante de uma matriz $A(t)$ é

$$\frac{\partial}{\partial t}\log(detA(t)) = (A^{-1})^{ij}\frac{\partial}{\partial t}A_{ij}(t).$$

Com isto, temos:

a)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} dV_{g(t)} &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g_{ij}}}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} detg_{ij}(t)dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{g_{ij}}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\log(detg_{ij}(t))dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \\ &= \frac{1}{2}g^{ij}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}g_{ij}(t)dV_g \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} g^{ij} h_{ij}\, dV_g \\
&= \frac{1}{2} trh\, dV_g.
\end{aligned}
$$

b) Lembremos que em um sistema de coordenadas, os símbolos de Christoffel se escrevem da seguinte forma

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij}\Big).$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} g^{kl}(t)\Big(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij}\Big) \\
&+ \frac{1}{2} g^{kl}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial t} g_{jl}(t) + \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial t} g_{il}(t) - \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial t} g_{ij}(t)\Big)\Big|_{t=0}.
\end{aligned}
$$

Em um sistema de coordenadas normais centrado em $p \in M$, temos que $\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk}(p) = 0$, $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ e $\frac{\partial}{\partial x_i} h_{jk}(p) = \nabla_i h_{jk}(p)$. Portanto, em p, teremos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} g^{kl}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i} h_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j} h_{il} - \frac{\partial}{\partial x_l} h_{ij}\Big) \\
&= \frac{1}{2} g^{kl}\Big(\nabla_i h_{jl} + \nabla_j h_{il} - \nabla_l h_{ij}\Big).
\end{aligned}
$$

□

A fórmula de variação do tensor se Ricci é dado pelo seguinte lema.

Lema 2.2. *A primeira variação do tensor de Ricci é dada por*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} R_{ij} &= \frac{1}{2}\Big(- \Delta h_{ij} + \nabla_i(\mathrm{div} h)_j + \nabla_j(\mathrm{div} h)_i - \nabla_i \nabla_j (trh) \\
&- 2R_{ikjp} h^{kp} + R_i^p h_{jp} + R_j^p h_{ip}\Big),
\end{aligned}
$$

onde $(\mathrm{div} h)_j = g^{ik}\nabla_i h_{kj}$.

Demonstração: Sabemos que a fórmula do tensor de curvatura em função dos símbolos de Christoffel é dada por

$$R_{ijk}{}^l = \frac{\partial}{\partial x_i}(\Gamma_{jk}^l) - \frac{\partial}{\partial x_j}(\Gamma_{ik}^l) + \Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m. \tag{28}$$

Assim, de acordo com a definição do tensor de Ricci, teremos

$$R_{jk} = \frac{\partial}{\partial x_l}(\Gamma_{jk}^l) - \frac{\partial}{\partial x_j}(\Gamma_{lk}^l) + \Gamma_{lm}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{lk}^m. \tag{29}$$

Usando coordenadas normais em torno de um ponto p, por (29) e pelo Lema 2.1, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}R_{ij} &= \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^l_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^l_{lj}\\
&= \frac{1}{2}\nabla_l\Big(g^{lm}(\nabla_i h_{jm} + \nabla_j h_{im} - \nabla_m h_{ij})\Big) - \frac{1}{2}\nabla_i\Big(g^{lm}(\nabla_l h_{jm} + \nabla_j h_{lm} - \nabla_m h_{lj})\Big)\\
&= \frac{1}{2}g^{lm}(\nabla_l\nabla_i h_{jm} + \nabla_l\nabla_j h_{im} - \nabla_l\nabla_m h_{ij} - \nabla_i\nabla_l h_{jm} - \nabla_i\nabla_j h_{lm} + \nabla_i\nabla_m h_{lj})\\
&= \frac{1}{2}g^{lm}(\nabla_l\nabla_i h_{jm} - \nabla_i\nabla_l h_{jm}) + \frac{1}{2}g^{lm}(\nabla_l\nabla_j h_{im} + \nabla_i\nabla_m h_{lj}) - \frac{1}{2}\Delta h_{ij}\\
&- \frac{1}{2}\nabla_i\nabla_j(trh).
\end{aligned}$$

Aplicando a identidade de Ricci na igualdade obtida acima, encontramos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}R_{ij} &= \frac{1}{2}g^{lm}(-R_{lij}{}^{p}h_{pm} - R_{lim}{}^{p}h_{jp}) - \frac{1}{2}\Delta h_{ij} - \frac{1}{2}\nabla_i\nabla_j(trh)\\
&+ \frac{1}{2}g^{lm}(\nabla_j\nabla_l h_{im} - R_{lji}{}^{p}h_{pm} - R_{ljm}{}^{p}h_{ip} + \nabla_i\nabla_m h_{lj})\\
&= \frac{1}{2}(-R_{lij}{}^{p}h^l_p + R^p_i h_{jp} - \Delta h_{ij} - \nabla_i\nabla_j(trh) + \nabla_j(\mathrm{div}h)_i - R_{lji}{}^{p}h^l_p)\\
&+ \frac{1}{2}(R^p_j h_{ip} + \nabla_i(\mathrm{div}h)_j).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}R_{ij} &= \frac{1}{2}\Big(- \Delta h_{ij} + \nabla_i(\mathrm{div}h)_j + \nabla_j(\mathrm{div}h)_i - \nabla_i\nabla_j(trh)\\
&- 2R_{iljp}h^{lp} + R^p_i h_{jp} + R^p_j h_{ip}\Big).
\end{aligned}$$

□

Lema 2.3. *A primeira variação da curvatura escalar é dada por*

$$\frac{\partial R_{g(t)}}{\partial t} = -\Delta(trh) + \mathrm{div}^2 h - \langle Ric, h\rangle.$$

Demonstração: Sabendo que $R = g^{ij}R_{ij}$, aplicando (27) e o lema anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}g^{ij}R_{ij} + g^{ij}\frac{\partial}{\partial t}R_{ij}\\
&= -g^{ik}h_{kl}g^{jl}R_{ij} + \frac{1}{2}g^{ij}\Big(- \Delta h_{ij} + \nabla_i(\mathrm{div}h)_j + \nabla_j(\mathrm{div}h)_i - \nabla_i\nabla_j(trh)\\
&- 2R_{iljp}h^{lp} + R^p_i h_{jp} + R^p_j h_{ip}\Big)\\
&= -\langle Ric, h\rangle - \Delta(trh) + \mathrm{div}^2 h,
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar. □

Lema 2.4. *A primeira variação da norma do tensor de Ricci é dada pela seguinte expressão*

$$\frac{\partial}{\partial t}|Ric_{g(t)}|^2_{g(t)} = 2\langle\frac{\partial}{\partial t}Ric_g, Ric_g\rangle_g - 2\langle Ric\circ Ric, h\rangle_g.$$

Demonstração: Primeiro, observe que

$$|Ric_{g(t)}|^2_{g(t)} = g^{ik}(t)g^{jp}(t)R_{ij}(t)R_{kp}(t).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}|Ric_{g(t)}|^2_{g(t)} &= 2\Big(\frac{\partial}{\partial t}g^{ik}(t)\Big)g^{jp}R_{ij}R_{kp} + 2g^{ik}g^{jp}\Big(\frac{\partial}{\partial t}R_{ij}\Big)R_{kp}\\
&= -2g^{il}h_{lq}g^{qk}g^{jp}R_{ij}R_{kp} + 2\langle\frac{\partial}{\partial t}Ric_g, Ric_g\rangle_g\\
&= -2h^{ik}R_i^pR_{kp} + 2\langle\frac{\partial}{\partial t}Ric_g, Ric_g\rangle_g\\
&= -2\langle Ric\circ Ric, h\rangle_g + 2\langle\frac{\partial}{\partial t}Ric_g, Ric_g\rangle_g,
\end{aligned}$$

o que finaliza a prova.

$\square$

Por fim, iremos encontrar a fórmula da primeira variação para o tensor de Riemann visto como um $(0,4)-$tensor.

Lema 2.5. *A primeira variação do* $(0,4)$*-tensor de Riemann é dada por*

$$\frac{\partial}{\partial t}R_{ijkl} = \frac{1}{2}(R_{ijkp}h_{pl} - R_{ijlp}h_{kp}) + \frac{1}{2}(\nabla_i\nabla_l h_{jk} + \nabla_j\nabla_k h_{il} - \nabla_i\nabla_k h_{jl} - \nabla_j\nabla_l h_{ik}).$$

Demonstração: Desde que $R_{ijkl} = -R_{ijk}{}^p g_{pl}$, temos

$$\frac{\partial}{\partial t}R_{ijkl} = -\Big(\frac{\partial}{\partial t}R_{ijk}{}^p\Big)g_{pl} - R_{ijk}{}^p\Big(\frac{\partial}{\partial t}g_{pl}\Big).$$

Pela equação (28) e usando coordenadas normais em torno de um ponto p, obtemos que em p, vale

$$\frac{\partial}{\partial t}R_{ijkl} = -\Big(\nabla_i(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^p_{jk}) - \nabla_j(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^p_{ik})\Big)g_{pl} - R_{ijk}{}^p h_{pl}.$$

Agora, aplicamos o Lema 2.1 para obter

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}R_{ijkl} &= -\frac{1}{2}\Big(\nabla_i\big(g^{pq}(\nabla_j h_{kq}+\nabla_k h_{jq}-\nabla_q h_{jk})\big)-\nabla_j\big(g^{pq}(\nabla_i h_{kq}+\nabla_k h_{iq}-\nabla_q h_{ik})\big)\Big)g_{pl}\\
&- R_{ijk}{}^{p}h_{pl}\\
&= -\frac{1}{2}\Big(\nabla_i\nabla_j h_{kl}+\nabla_i\nabla_k h_{jl}-\nabla_i\nabla_l h_{jk}-\nabla_j\nabla_i h_{kl}-\nabla_j\nabla_k h_{il}+\nabla_j\nabla_l h_{ik}\Big)\\
&+ R_{ijkp}h_{pl}.
\end{aligned}$$

Usando novamente a identidade de Ricci, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}R_{ijkl} &= -\frac{1}{2}\Big(-R_{ijk}{}^{p}h_{pl}-R_{ijl}{}^{p}h_{kp}+\nabla_i\nabla_k h_{jl}-\nabla_i\nabla_l h_{jk}-\nabla_j\nabla_k h_{il}+\nabla_j\nabla_l h_{ik}\Big)\\
&+ R_{ijkp}h_{pl}\\
&= -\frac{1}{2}R_{ijkp}h_{pl}-\frac{1}{2}R_{ijlp}h_{kp}+\frac{1}{2}(\nabla_i\nabla_l h_{jk}+\nabla_j\nabla_k h_{il}-\nabla_i\nabla_k h_{jl}-\nabla_j\nabla_l h_{ik})\\
&+ R_{ijkp}h_{pl}\\
&= \frac{1}{2}(R_{ijkp}h_{pl}-R_{ijlp}h_{kp})+\frac{1}{2}(\nabla_i\nabla_l h_{jk}+\nabla_j\nabla_k h_{il}-\nabla_i\nabla_k h_{jl}-\nabla_j\nabla_l h_{ik}),
\end{aligned}$$

como afirmado. □

3 MÉTRICAS CRÍTICAS PARA FUNCIONAIS QUADRÁTICOS

Este capítulo baseia-se no estudo dos pontos críticos de funcionais que são quadráticos na curvatura. Um fato bastante conhecido sobre este assunto é que as métricas em formas espaciais são sempre pontos críticos de tais funcionais, e em alguns casos, métricas de Einstein também são pontos críticos. De posse dessas informações, procuramos condições para que a recíproca desses fatos sejam verdadeiras. Os teoremas deste capítulo foram motivados pelo trabalho de Catino (2015), onde o mesmo obteve alguns resultados de rigidez envolvendo a curvatura escalar de uma métrica crítica de tais funcionais.

3.1 Definições e fatos conhecidos

Nesta seção, consideremos (M^n, g) uma variedade Riemanniana conexa e fechada (compacta sem bordo) de dimensão $n \geq 3$ e $\mathcal{M}_1$ o espaço das classes de equivalência de métricas Riemannianas suaves com volume unitário sobre M^n. Tais métricas são identificadas se elas estão relacionadas pela ação do grupo de difeomorfismos $\mathcal{G}$ em M.

Apresentaremos aqui, alguns resultados já conhecidos sobre funcionais quadráticos na curvatura. Como pode ser visto em Besse (1987), uma base para estes funcionais é constituída por

$$\mathcal{W}(g) = \int_M |W_g|^2 \, dV_g, \quad \rho(g) = \int_M |Ric_g|^2 \, dV_g \quad \text{e} \quad \mathcal{S}(g) = \int_M R_g^2 \, dV_g, \tag{30}$$

onde W_g, Ric_g e R_g denotam, respectivamente, os tensores de Weyl, Ricci e a curvatura escalar em relação à métrica g. Fazendo uso da decomposição do tensor de Riemann (12) segue-se que

$$\mathcal{R}(g) = \int_M |Rm_g|^2 dV_g = \int_M \left(|W_g|^2 + \frac{4}{n-2}|Ric_g|^2 - \frac{2}{(n-1)(n-2)} R_g^2 \right) dV_g. \tag{31}$$

Lembremos que a fórmula de Chern-Gauss-Bonnet em dimensão 4 se escreve como

$$\int_M \left(|W_g|^2 - 2|Ric_g|^2 + \frac{2}{3} R_g^2 \right) dV_g = 32\pi^2 \chi(M), \tag{32}$$

o qual implica que o funcional de Weyl $\mathcal{W}$ pode ser escrito, a menos de um invariante topológico, como combinação linear dos outros dois funcionais dados em (30). A partir de agora, para simplificar a notação, denotaremos as quantidades relacionadas à métrica g sem o subíndice g.

Para realizar o estudo dos pontos críticos para funcionais Riemannianos, lembremos a seguinte definição.

Definição 3.1. *Um funcional Riemanniano $\mathcal{F}$ possui um gradiente em g, se existe $a \in \Gamma(S^2(T^*M))$ tal que para todo $h \in \Gamma(S^2(T^*M))$,*

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(g(t))\Big|_{t=0} = \mathcal{F}'_g(h) = \langle a, h\rangle_{L^2}.$$

Neste caso, dizemos que a é o gradiente de $\mathcal{F}$ e denotaremos por $a = \nabla\mathcal{F}$.

Um fato já conhecido é que, em dimensão 4, as métricas de Einstein são pontos críticos de todos os funcionais dados em (30). De fato, temos os seguintes resultados.

Proposição 3.1 (Berger, 1970)**.** *As equações de Euler-Lagrange dos funcionais* (30) *são:*

(i) $(\nabla\mathcal{S})_{ij} = 2\nabla_i\nabla_j R - 2(\Delta R)g_{ij} - 2RR_{ij} + \frac{1}{2}R^2 g_{ij}$.

(ii) $(\nabla\rho)_{ij} = -\Delta R_{ij} - 2R_{ikjl}R^{kl} + \nabla_i\nabla_j R - \frac{1}{2}(\Delta R)g_{ij} + \frac{1}{2}|Ric|^2 g_{ij}$.

(iii) Se $n = 4$, $(\nabla\mathcal{W})_{ij} = -4(\nabla^k\nabla^l W_{ikjl} + \frac{1}{2}R^{kl}W_{ikjl})$.

Demonstração: Seja $g(t)$ uma família a 1-parâmetro de métricas Riemannianas suaves tal que $g(0) = g$ e $g'(0) = h$. Assim, no item (i), a primeira variação do funcional $\mathcal{S}(g) = \int_M R_g^2\, dV_g$ é dada por

$$\mathcal{S}'_g(h) \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{S}(g(t))\Big|_{t=0} = 2\int_M R(\frac{\partial}{\partial t}R_{g(t)})dV_g + \int_M R^2(\frac{\partial}{\partial t}dV_{g(t)}).$$

Aplicando o Lema 2.3 e o Lema 2.1, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}'_g(h) &= 2\int_M R(-\Delta(trh) + \mathrm{div}^2 h - \langle Ric, h\rangle)dV_g + \frac{1}{2}\int_M R^2(trh)dV_g \\
&= -2\int_M (\Delta R)(trh)dV_g + 2\int_M R\nabla_i\nabla_j h_{ij}dV_g - 2\int_M R\langle Ric, h\rangle)dV_g \\
&+ \frac{1}{2}\int_M R^2(trh)dV_g \\
&= -\int_M \langle 2(\Delta R)g, h\rangle dV_g + 2\int_M (\nabla_i\nabla_j R)h_{ij}dV_g - \int_M \langle 2RRic, h\rangle)dV_g \\
&+ \frac{1}{2}\int_M \langle R^2 g, h\rangle dV_g.
\end{aligned}$$

Logo, concluímos que

$$\mathcal{S}'_g(h) = \int_M \langle 2\nabla^2 R - 2(\Delta R)g - 2RRic + \frac{1}{2}R^2 g, h\rangle dV_g,$$

o que prova o item (i).

Passamos agora à prova do item (ii), a primeira variação de $\rho(g)$ é

$$\rho'_g(h) \;=\; \int_M \frac{\partial}{\partial t}|Ric_{g(t)}|^2_{g(t)}dV_g + \int_M |Ric|^2(\frac{\partial}{\partial t}dV_{g(t)}).$$

Usando o Lema 2.4 e o Lema 2.1, obtemos

$$\rho'_g(h) \;=\; 2\int_M \langle \frac{\partial}{\partial t} Ric, Ric\rangle dV_g - 2\int_M \langle Ric\circ Ric, h\rangle dV_g + \frac{1}{2}\int_M |Ric|^2 (trh) dV_g. \quad (33)$$

Substituindo a identidade do Lema 2.2 na equação (33) encontramos

$$\begin{aligned}
\rho'_g(h) &= \int_M \Big(-\Delta h_{ij} + \nabla_i(\mathrm{div}h)_j + \nabla_j(\mathrm{div}h)_i - \nabla_i\nabla_j(trh) - 2R_{ikjp}h^{kp}\Big) R_{ij}\, dV_g \\
&+ \int_M (R_i^p h_{jp} + R_j^p h_{ip}) R_{ij}\, dV_g - 2\int_M \langle Ric\circ Ric, h\rangle dV_g + \frac{1}{2}\int_M |Ric|^2(trh) dV_g \\
&= -\int_M \langle \Delta Ric, h\rangle dV_g + 2\int_M \nabla_i(\mathrm{div}h)_j R_{ij} dV_g - \int_M \nabla_i\nabla_j(trh) R_{ij} dV_g \\
&- 2\int_M R_{ikjp}R_{ij}h^{kp} dV_g + \frac{1}{2}\int_M \langle |Ric|^2 g, h\rangle dV_g.
\end{aligned}$$

Desde que $\nabla^i R_{ij} = \frac{1}{2}\nabla_j R$, aplicando o teorema da divergência na igualdade acima, temos

$$\begin{aligned}
\rho'_g(h) &= -\int_M \langle \Delta Ric, h\rangle dV_g - \int_M \nabla^k h_{kj}\nabla_j R dV_g + \frac{1}{2}\int_M \nabla_j(trh)\nabla_j R dV_g \\
&- 2\int_M R_{ikjp}R_{ij}h^{kp} dV_g + \frac{1}{2}\int_M \langle |Ric|^2 g, h\rangle dV_g \\
&= -\int_M \langle \Delta Ric, h\rangle dV_g + \int_M \langle \nabla^2 R, h\rangle dV_g - \frac{1}{2}\int_M \langle (\Delta R) g, h\rangle dV_g \\
&- 2\int_M R_{ikjp}R_{ij}h^{kp} dV_g + \frac{1}{2}\int_M \langle |Ric|^2 g, h\rangle dV_g.
\end{aligned}$$

Assim, mostramos que

$$\rho'_g(h) = \int_M \langle -\Delta Ric + \nabla^2 R - \frac{1}{2}(\Delta R) g - 2\mathring{R}(Ric) + \frac{1}{2}|Ric|^2 g, h\rangle dV_g,$$

onde $\mathring{R}(T)_{kp} = R_{ikjp}T_{ij}$ para todo 2-tensor simétrico T. Isto conclui a prova do item (ii).

Para provar o item (iii), observe que pela fórmula de Chern-Gauss-Bonnet (32), temos

$$32\pi^2\chi(M) = \mathcal{W}_g - 2\rho_g + \frac{2}{3}\mathcal{S}_g.$$

Portanto, utilizando os itens (i) e (ii) obtemos a seguinte expressão para a primeira variação de $\mathcal{W}_g$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}'_g(h) &= 2\rho'_g(h) - \frac{2}{3}\mathcal{S}'_g(h) \\
&= 2\int_M \langle -\Delta Ric + \nabla^2 R - \frac{1}{2}(\Delta R) g - 2\mathring{R}(Ric) + \frac{1}{2}|Ric|^2 g, h\rangle dV_g \\
&- \frac{2}{3}\int_M \langle 2\nabla^2 R - 2(\Delta R) g - 2R Ric + \frac{1}{2}R^2 g, h\rangle dV_g.
\end{aligned}$$

Com isto, concluímos que

$$\begin{aligned}(\nabla\mathcal{W})_{ij} &= -2\Delta R_{ij} + \frac{2}{3}\nabla_i\nabla_j R + \frac{1}{3}(\Delta R)g_{ij} - 4R_{ikjl}R^{kl} + |Ric|^2 g_{ij} \\ &+ \frac{4}{3}RR_{ij} - \frac{1}{3}R^2 g_{ij}.\end{aligned} \tag{34}$$

Por outro lado, tomando o divergente na decomposição do tensor de Riemann (12) para dimensão $n = 4$, temos

$$\begin{aligned}\nabla^l R_{ikjl} &= \nabla^l W_{ikjl} + \frac{1}{2}(\nabla_k R_{ij} + \frac{1}{2}\nabla_k R g_{ij} - \frac{1}{2}\nabla_i R g_{kj} - \nabla_i R_{kj}) - \frac{1}{6}\nabla_k R g_{ij} + \frac{1}{6}\nabla_i R g_{kj} \\ &= \nabla^l W_{ikjl} + \frac{1}{2}(\nabla_k R_{ij} - \nabla_i R_{kj}) + \frac{1}{12}(\nabla_k R g_{ij} - \nabla_i R g_{kj}).\end{aligned} \tag{35}$$

Pela segunda identidade de Bianchi, facilmente verifica-se que

$$\nabla^l R_{ikjl} = \nabla_k R_{ij} - \nabla_i R_{kj}. \tag{36}$$

Substituindo (36) em (35), obtemos

$$\nabla^l W_{ikjl} = \frac{1}{2}(\nabla_k R_{ij} - \nabla_i R_{kj}) - \frac{1}{12}(\nabla_k R g_{ij} - \nabla_i R g_{kj}).$$

Tomando mais uma vez o divergente no índice k nesta última igualdade chegamos a

$$\begin{aligned}\nabla^k\nabla^l W_{ikjl} &= \frac{1}{2}\Delta R_{ij} - \frac{1}{2}\nabla^k\nabla_i R_{kj} - \frac{1}{12}(\Delta R)g_{ij} + \frac{1}{12}\nabla_j\nabla_i R \\ &= \frac{1}{2}\Delta R_{ij} - \frac{1}{2}(\nabla_i\nabla^k R_{kj} + R_{kikp}R^p_j + R_{kijp}R^{kp}) - \frac{1}{12}(\Delta R)g_{ij} + \frac{1}{12}\nabla_j\nabla_i R \\ &= \frac{1}{2}\Delta R_{ij} - \frac{1}{4}\nabla_i\nabla_j R - \frac{1}{2}R_{ip}R^p_j + \frac{1}{2}R_{ikjp}R^{kp} - \frac{1}{12}(\Delta R)g_{ij} + \frac{1}{12}\nabla_j\nabla_i R \\ &= \frac{1}{2}\Delta R_{ij} - \frac{1}{6}\nabla_i\nabla_j R - \frac{1}{2}R_{ip}R^p_j + \frac{1}{2}R_{ikjp}R^{kp} - \frac{1}{12}(\Delta R)g_{ij}.\end{aligned}$$

Ainda pela eq. (12), temos

$$\begin{aligned}W_{ikjl}R^{kl} &= R_{ikjl}R^{kl} - \frac{1}{2}RR_{ij} - \frac{1}{2}|Ric|^2 g_{ij} + \frac{1}{2}R_{il}R^l_j + \frac{1}{2}R_{kj}R^k_i + \frac{1}{6}R^2 g_{ij} - \frac{1}{6}RR_{ij} \\ &= R_{ikjl}R^{kl} - \frac{2}{3}RR_{ij} - \frac{1}{2}|Ric|^2 g_{ij} + R_{il}R^l_j + \frac{1}{6}R^2 g_{ij}.\end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\begin{aligned}-4\nabla^k\nabla^l W_{ikjl} - 2W_{ikjl}R^{kl} &= -2\Delta R_{ij} + \frac{2}{3}\nabla_i\nabla_j R + 2R_{ip}R^p_j - 2R_{ikjp}R^{kp} + \frac{1}{3}(\Delta R)g_{ij} \\ &- 2R_{ikjl}R^{kl} + \frac{4}{3}RR_{ij} + |Ric|^2 g_{ij} - 2R_{il}R^l_j - \frac{1}{3}R^2 g_{ij} \\ &= -2\Delta R_{ij} + \frac{2}{3}\nabla_i\nabla_j R + \frac{1}{3}(\Delta R)g_{ij} - 4R_{ikjl}R^{kl} + |Ric|^2 g_{ij}\end{aligned}$$

$$+ \quad \frac{4}{3}RR_{ij} - \frac{1}{3}R^2 g_{ij},$$

o que é exatamente a eq. (34), como queríamos demonstrar. $\square$

Como consequência direta da proposição anterior, temos o seguinte corolário.

Corolário 3.1. *Se g é uma métrica de Einstein, isto é, $Ric = \frac{R}{n}g$, então*

1. $(\nabla\rho)_{ij} = (\frac{n-4}{2n^2})R^2 g_{ij}$.
2. $(\nabla\mathcal{S})_{ij} = (\frac{n-4}{2n})R^2 g_{ij}$.

Corolário 3.2. *Em dimensão 4, qualquer métrica de Einstein é ponto crítico para todos os funcionais $\mathcal{W}, \rho$ e $\mathcal{S}$. Também, qualquer métrica com curvatura escalar nula é crítica para $\mathcal{S}$.*

Porém, em dimensão $n > 4$, nem sempre é verdade que as métricas de Einstein são pontos críticos dos funcionais $\mathcal{W}$, ρ e $\mathcal{S}$ sobre $\mathcal{M}_1$. Motivados por Catino (2015), consideremos o funcional

$$\mathcal{F}_{t,s}(g) = \int_M |Ric_g|^2 dV_g + t\int_M R_g^2 dV_g + s\int_M |Rm_g|^2 dV_g, \tag{37}$$

onde t e s são números reais. Desde que em dimensões maiores do que 4, o funcional $\mathcal{F}_{t,s}(g)$ não é *scale*-inavariante é natural restringirmos o funcional ao espaço $\mathcal{M}_1$. Equivalentemente, podemos considerar o funcional normalizado $\widetilde{\mathcal{F}}_{t,s}(g) = (\mathrm{Vol}(g))^{\frac{4-n}{n}}\mathcal{F}_{t,s}(g)$.

Para calcular a equação de Euler-Lagrange de $\mathcal{F}_{t,s}$ utilizaremos a Proposição 3.1 e o fato de $\nabla\mathcal{R}$ ser dado pela seguinte proposição.

Proposição 3.2. *A equação de Euler-Lagrange do funcional $\mathcal{R}(g) = \int_M |Rm_g|^2 dV_g$ é dada por*

$$(\nabla\mathcal{R})_{ij} = -4\Delta R_{ij} + 2\nabla_i\nabla_j R - 2R_{ikpq}R_{jkpq} + \frac{1}{2}|Rm|^2 g_{ij} - 4R_{ikjl}R_{kl} + 4R_{ik}R_{kj}.$$

Demonstração: De fato, primeiramente observemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}|Rm_{g(t)}|^2_{g(t)} \quad = \quad 2\langle Rm_g, \frac{\partial}{\partial t}Rm_{g(t)}\rangle - 4h^{ip}g^{jq}g^{kr}g^{ls}R_{ijkl}R_{pqrs}. \tag{38}$$

Logo, usando a eq. (38) teremos

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}'_g(h) &= \int_M |Rm_g|^2(\frac{\partial}{\partial t}dV_{g(t)}) + \int_M \frac{\partial}{\partial t}|Rm_{g(t)}|^2_{g(t)} dV_g \\
&= \frac{1}{2}\int_M |Rm_g|^2(trh)dV_g + 2\int_M \langle Rm_g, \frac{\partial}{\partial t}Rm_{g(t)}\rangle dV_g
\end{aligned}$$

$$- \quad 4\int_M h^{ip}g^{jq}g^{kr}g^{ls}R_{ijkl}R_{pqrs}dV_g. \tag{39}$$

Usamos o Lema 2.5 para calcular

$$\begin{aligned}
2\int_M \langle Rm_g, \frac{\partial}{\partial t}Rm_{g(t)}\rangle dV_g &= \int_M R_{ijkl}(R_{ijkp}h_{pl} - R_{ijlp}h_{kp})dV_g \\
&+ \int_M R_{ijkl}(\nabla_i\nabla_l h_{jk} + \nabla_j\nabla_k h_{il} - \nabla_i\nabla_k h_{jl} - \nabla_j\nabla_l h_{ik})dV_g \\
&= \int_M (R_{ijkl}R_{ijkp}h_{pl} + R_{ijlk}R_{ijlp}h_{kp} + R_{ijkl}\nabla_i\nabla_l h_{jk})dV_g \\
&+ \int_M (R_{ijkl}\nabla_j\nabla_k h_{il} - R_{ijkl}\nabla_i\nabla_k h_{jl} - R_{ijkl}\nabla_j\nabla_l h_{ik})dV_g.
\end{aligned}$$

Integrando por partes a última igualdade acima, obtém-se

$$\begin{aligned}
2\int_M \langle Rm_g, \frac{\partial}{\partial t}Rm_{g(t)}\rangle dV_g &= 2\int_M R_{ijkl}R_{ijkp}h_{pl}dV_g - \int_M (\nabla_i R_{ijkl})(\nabla_l h_{jk})dV_g \\
&- \int_M (\nabla_j R_{ijkl})(\nabla_k h_{il})dV_g + \int_M (\nabla_i R_{ijkl})(\nabla_k h_{jl})dV_g \\
&+ \int_M (\nabla_j R_{ijkl})(\nabla_l h_{ik})dV_g \\
&= 2\int_M R_{ijkl}R_{ijkp}h_{pl}dV_g - 2\int_M (\nabla_i R_{ijkl})(\nabla_l h_{jk})dV_g \\
&+ 2\int_M (\nabla_j R_{ijkl})(\nabla_l h_{ik})dV_g.
\end{aligned} \tag{40}$$

Substituindo a equação (36) em (40) teremos

$$\begin{aligned}
2\int_M \langle Rm_g, \frac{\partial}{\partial t}Rm_{g(t)}\rangle dV_g &= 2\int_M R_{ijkl}R_{ijkp}h_{pl}dV_g - 2\int_M (\nabla_k R_{lj} - \nabla_l R_{kj})\nabla_l h_{jk}\, dV_g \\
&+ 2\int_M (\nabla_l R_{ki} - \nabla_k R_{li})\nabla_l h_{ik}\, dV_g \\
&= 2\int_M R_{ijkl}R_{ijkp}h_{pl}dV_g + 2\int_M (\nabla_l\nabla_k R_{lj} - \Delta R_{kj})h_{kj}dV_g \\
&- 2\int_M (\Delta R_{ki} - \nabla_l\nabla_k R_{li})h_{ik}dV_g,
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos novamente integração por partes. Logo,

$$\begin{aligned}
2\int_M \langle Rm_g, \frac{\partial}{\partial t}Rm_{g(t)}\rangle dV_g &= 2\int_M R_{ijkl}R_{ijkp}h_{pl}dV_g - 4\int_M (\Delta R_{ki})h_{ki}dV_g \\
&+ 4\int_M (\nabla_l\nabla_k R_{lj})h_{kj}dV_g.
\end{aligned}$$

Agora, aplicando a identidade de Ricci na última parcela das somas de integrais acima, obtemos

$$\begin{aligned}
2\int_M \langle Rm_g, \frac{\partial}{\partial t}Rm_{g(t)}\rangle dV_g &= 2\int_M R_{ijkl}R_{ijkp}h_{pl}dV_g - 4\int_M (\Delta R_{ki})h_{ki}dV_g \\
&+ 4\int_M (\nabla_k\nabla_l R_{lj} - R_{lkl}{}^p R_{pj} - R_{lkj}{}^p R_{lp})h_{kj}dV_g \\
&= 2\int_M R_{ijkl}R_{ijkp}h_{pl}dV_g - 4\int_M (\Delta R_{ki})h_{ki}dV_g \\
&+ 2\int_M (\nabla_k\nabla_j R)h_{kj}dV_g + 4\int_M R_{kp}R_{pj}h_{kj}dV_g \\
&- 4\int_M R_{lkpj}R_{lp}h_{kj}dV_g.
\end{aligned}$$

Então temos que

$$\begin{aligned}
2\int_M \langle Rm_g, \frac{\partial}{\partial t}Rm_{g(t)}\rangle dV_g &= \int_M (2R_{ikpq}R_{jkpq} - 4\Delta R_{ij} + 2\nabla_i\nabla_j R)h_{ij}dV_g \\
&+ \int_M (4R_{ip}R_{pj} - 4R_{ikjp}R_{kp})h_{ij}dV_g. \qquad (41)
\end{aligned}$$

Logo, substituindo (41) em (39) conluímos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}'_g(h) &= \frac{1}{2}\int_M |Rm_g|^2(trh)dV_g + \int_M (2R_{ikpq}R_{jkpq} - 4\Delta R_{ij} + 2\nabla_i\nabla_j R)h_{ij}dV_g \\
&+ \int_M (4R_{ip}R_{pj} - 4R_{ikjp}R_{kp})h_{ij}dV_g - 4\int_M R_{ikpq}R_{jkpq}h_{ij}dV_g \\
&= \int_M (-4\Delta R_{ij} + 2\nabla_i\nabla_j R - 2R_{ikpq}R_{jkpq} + \frac{1}{2}|Rm|^2 g_{ij} - 4R_{ikjp}R_{kp} + 4R_{ip}R_{pj})h_{ij}dV_g,
\end{aligned}$$

como queríamos provar.

$\square$

De acordo com o que foi mostrado, o gradiente do funcional $\mathcal{F}_{t,s}$ é dado pela seguinte expressão

$$\begin{aligned}
(\nabla\mathcal{F}_{t,s})_{ij} &= (\nabla\rho)_{ij} + t(\nabla\mathcal{S})_{ij} + s(\nabla\mathcal{R})_{ij} \\
&= -(1+4s)\Delta R_{ij} + (1+2t+2s)\nabla_i\nabla_j R - \Big(\frac{1+4t}{2}\Big)(\Delta R)g_{ij} - (2+4s)R_{ikjl}R_{kl} \\
&+ \frac{1}{2}(|Ric|^2 + tR^2 + s|Rm|^2)g_{ij} - 2tRR_{ij} - 2sR_{ikpq}R_{jkpq} + 4sR_{ik}R_{kj}. \qquad (42)
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos o seguinte lema, o qual pode ser encontrado em Besse (1987, Proposição 4.13) ou Gursky e Viaclovsky (2015, Lema 2.5 adaptado à $\mathcal{F}_{t,s}$).

Lema 3.1. *Uma métrica crítica para $\widetilde{\mathcal{F}}_{t,s}(g) = (\mathrm{Vol}(g))^{\frac{4-n}{n}}\mathcal{F}_{t,s}(g)$ satisfaz:*

$$\nabla\mathcal{F}_{t,s} = cg,$$

onde $c = -\frac{4-n}{2n}\mathrm{Vol}^{-1}(g)\mathcal{F}_{t,s}(g)$.

Demonstração: De fato, temos

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\mathcal{F}}_{t,s})'_g(h) &= \frac{4-n}{n}(\mathrm{Vol}(g))^{\frac{4-n}{n}-1}(\mathrm{Vol}(g))'\mathcal{F}_{t,s}(g) + (\mathrm{Vol}(g))^{\frac{4-n}{n}}(\mathcal{F}_{t,s})'_g(h)\\
&= \frac{4-n}{n}(\mathrm{Vol}(g))^{\frac{4-n}{n}-1}\mathcal{F}_{t,s}(g)\frac{1}{2}\int_M trh dV_g + (\mathrm{Vol}(g))^{\frac{4-n}{n}}(\mathcal{F}_{t,s})'_g(h).
\end{aligned}$$

Portanto, se g é métrica crítica de $\widetilde{\mathcal{F}}_{t,s}(g)$, então devemos ter

$$(\mathcal{F}_{t,s})'_g(h) = -\frac{4-n}{2n}\mathrm{Vol}^{-1}(g)\int_M \langle \mathcal{F}_{t,s}(g)g, h\rangle dV_g,$$

como queríamos mostrar.

□

Afim de obter uma caracterização para as métricas críticas do funcional $\mathcal{F}_{t,s}$ sobre $\mathcal{M}_1$, podemos relacionar a equação (42) ao Lema 3.1. Assim, tomando o traço na equação (42) e no Lema 3.1, obtemos

$$\begin{aligned}
nc &= -(1+4s)\Delta R + (1+2t+2s)\Delta R - \Big(\frac{1+4t}{2}\Big)n\Delta R - (2+4s)|Ric|^2\\
&+ \frac{n}{2}(|Ric|^2 + tR^2 + s|Rm|^2) - 2tR^2 - 2s|Rm|^2 + 4s|Ric|^2\\
&= \Big(2t - 2s - \frac{(1+4t)n}{2}\Big)\Delta R + \Big(\frac{n-4}{2}\Big)(|Ric|^2 + tR^2 + s|Rm|^2)\\
&= -\frac{n+4t(n-1)+4s}{2}\Delta R + \Big(\frac{n-4}{2}\Big)(|Ric|^2 + tR^2 + s|Rm|^2).
\end{aligned}$$

Desde que $c = -\frac{4-n}{2n}\mathrm{Vol}^{-1}(g)\mathcal{F}_{t,s}(g)$ e $\mathrm{Vol}^{-1}(g) = 1$, devemos ter

$$(n + 4(n-1)t + 4s)\Delta R = (n-4)(|Ric|^2 + tR^2 + s|Rm|^2 - \mathcal{F}_{t,s}(g)). \qquad (43)$$

Agora, substituindo (42) no Lema 3.1 e depois usando (43) temos

$$\begin{aligned}
&- (1+4s)\Delta R_{ij} + (1+2t+2s)\nabla_i\nabla_j R - \Big(\frac{1+4t}{2}\Big)(\Delta R)g_{ij} - (2+4s)R_{ikjl}R_{kl}\\
&+ \frac{1}{2}(|Ric|^2 + tR^2 + s|Rm|^2)g_{ij} - 2tRR_{ij} - 2sR_{ikpq}R_{jkpq} + 4sR_{ik}R_{kj} = cg_{ij}\\
&= \Big(\frac{n-4}{2n}\Big)(|Ric|^2 + tR^2 + s|Rm|^2)g_{ij} - \frac{n+4t(n-1)+4s}{2n}(\Delta R)g_{ij}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&- (1+4s)\Delta R_{ij} + (1+2t+2s)\nabla_i\nabla_j R - \frac{2t-2s}{n}(\Delta R)g_{ij} + \frac{2}{n}(|Ric|^2 + tR^2 + s|Rm|^2)g_{ij}\\
&- (2+4s)R_{ikjl}R_{kl} - 2tRR_{ij} - 2sR_{ikpq}R_{jkpq} + 4sR_{ik}R_{kj} = 0. \qquad (44)
\end{aligned}$$

Dado um 2-tensor T, o *traceless* (tensor sem traço) de T é definido por $\mathring{T} = T - \frac{trT}{n} g$. Considerando o tensor $\mathring{Ric} = Ric - \frac{R}{n} g$, podemos reescrever a equação de Euler-Lagrange das métricas críticas para $\mathcal{F}_{t,s}$ sobre $\mathcal{M}_1$ de acordo com a proposição abaixo.

Proposição 3.3 (Catino, 2015). *Seja M^n uma variedade Riemanniana fechada de dimensão $n \geq 3$. Uma métrica g é ponto crítico para $\mathcal{F}_{t,s}$ sobre $\mathcal{M}_1$ se, e somente se, satisfaz as seguintes equações:*

$$\begin{aligned}(1+4s)\Delta \mathring{R}_{ij} &= (1+2t+2s)(\mathring{\nabla}^2 R)_{ij} - (2+4s)R_{ikjl}\mathring{R}_{kl} - \frac{2+2nt-4s}{n} R\mathring{R}_{ij} \\ &+ \frac{2}{n}(|\mathring{Ric}|^2 + s|Rm|^2)g_{ij} - 2sR_{ikpq}R_{jkpq} + 4s\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jk}\end{aligned}$$

e

$$(n+4(n-1)t+4s)\Delta R = (n-4)(|Ric|^2 + tR^2 + s|Rm|^2 - \mathcal{F}_{t,s}(g)).$$

Demonstração: Substituindo $\mathring{R}_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij}$ em (44) obtém-se

$$\begin{aligned}0 &= -(1+4s)\Delta \mathring{R}_{ij} - (1+4s)\frac{\Delta R}{n} g_{ij} + (1+2t+2s)\nabla_i\nabla_j R - \frac{2t-2s}{n}(\Delta R)g_{ij} \\ &+ \frac{2}{n}(|\mathring{Ric}|^2 + \frac{R^2}{n} + tR^2 + s|Rm|^2)g_{ij} - (2+4s)R_{ikjl}\mathring{R}_{kl} - (2+4s)\frac{R}{n}R_{ij} - 2tR\mathring{R}_{ij} \\ &- 2t\frac{R^2}{n}g_{ij} - 2sR_{ikpq}R_{jkpq} + 4sR_{ik}\mathring{R}_{kj} + 4s\frac{R}{n}R_{ij}.\end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\begin{aligned}(1+4s)\Delta \mathring{R}_{ij} &= (1+2t+2s)\nabla_i\nabla_j R - (1+2t+2s)\frac{\Delta R}{n} g_{ij} + \frac{2}{n}(|\mathring{Ric}|^2 + s|Rm|^2)g_{ij} \\ &+ 2\frac{R^2}{n^2}g_{ij} + \frac{2}{n}tR^2 g_{ij} - (2+4s)R_{ikjl}\mathring{R}_{kl} - 2\frac{R}{n}\mathring{R}_{ij} - 2\frac{R^2}{n^2}g_{ij} - 2tR\mathring{R}_{ij} \\ &- 2t\frac{R^2}{n}g_{ij} - 2sR_{ikpq}R_{jkpq} + 4s\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{kj} + 4s\frac{R}{n}\mathring{R}_{ij}.\end{aligned}$$

Daí concluímos que

$$\begin{aligned}(1+4s)\Delta \mathring{R}_{ij} &= (1+2t+2s)(\mathring{\nabla}^2 R)_{ij} - (2+4s)R_{ikjl}\mathring{R}_{kl} - \frac{2+2nt-4s}{n} R\mathring{R}_{ij} \\ &+ \frac{2}{n}(|\mathring{Ric}|^2 + s|Rm|^2)g_{ij} - 2sR_{ikpq}R_{jkpq} + 4s\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jk}.\end{aligned}$$

Note que, a segunda equação já foi obtida em (43) e isto completa a prova da proposição. □

Em particular, qualquer métrica crítica de Einstein deverá satisfazer o seguinte corolário.

Corolário 3.3. *Uma métrica de Einstein é crítica para $\mathcal{F}_{t,s}$ sobre $\mathcal{M}_1$ se, e somente se, satifaz*
$$R_{ikpq}R_{jkpq} = \frac{1}{n}|Rm|^2 g_{ij}.$$

Corolário 3.4. *A métrica de qualquer forma espacial é crítica para $\mathcal{F}_{t,s}$ sobre $\mathcal{M}_1$.*

No caso $n \neq 4$ e $s = -\frac{n+4(n-1)t}{4}$, a segunda equação na Proposição 3.3 nos garante que
$$|Ric|^2 + tR^2 - \frac{n+4(n-1)t}{4}|Rm|^2$$
é constante sobre M^n. A decomposição (12) do tensor de Riemann nos fornece
$$|Rm|^2 = |W|^2 + \frac{4}{n-2}|\mathring{Ric}|^2 + \frac{2}{n(n-1)}R^2.$$

Relembremos pela eq. (20) que a segunda função simétrica elementar $\sigma_2(A)$ do tensor de Schouten (16) é dada por
$$\sigma_2(A) = -\frac{1}{2(n-2)^2}|\mathring{Ric}|^2 + \frac{1}{8n(n-1)}R^2. \tag{45}$$

Assim, obtemos ainda o seguinte corolário.

Corolário 3.5. *Seja M^n uma variedade Riemanniana fechada de dimensão $n \neq 4$. Se g é uma métrica crítica para $\mathcal{F}_{t,-\frac{n+4(n-1)t}{4}}$ sobre $\mathcal{M}_1$, então*
$$-\frac{n+4(n-1)t}{4}|W|^2 + 4(n-2)(1+2(n-1)t)\sigma_2(A)$$
é constante sobre M^n.

3.2 Tensor de Bach para métricas críticas de $\mathcal{F}_{t,s}$

Neste momento iremos apresentar uma expressão que obtemos para o tensor de Bach de uma métrica crítica de $\mathcal{F}_{t,s}$ sobre $\mathcal{M}_1$. Tal expressão será de extrema importância para todos os resultados deste capítulo.

Para isto, note que o tensor de Cotton (13) pode ser reescrito como
$$C_{kij} = \nabla_k \mathring{R}_{ij} - \nabla_i \mathring{R}_{kj} + \frac{n-2}{2n(n-1)}\big(\nabla_k R g_{ij} - \nabla_i R g_{kj}\big). \tag{46}$$

De onde deduzimos
$$\nabla^k C_{kij} = \Delta \mathring{R}_{ij} - \nabla^k \nabla_i \mathring{R}_{kj} + \frac{n-2}{2n(n-1)}((\Delta R)g_{ij} - \nabla_j \nabla_i R). \tag{47}$$

Consequentemente, usando a identidade de Ricci podemos escrever (47) como abaixo

$$\nabla^k C_{kij} = \Delta \mathring{R}_{ij} - (\nabla_i \nabla^k \mathring{R}_{kj} - R_{kik}{}^p \mathring{R}_{pj} - R_{kij}{}^p \mathring{R}_{kp}) + \frac{n-2}{2n(n-1)}((\Delta R) g_{ij} - \nabla_j \nabla_i R). \quad (48)$$

Além disso, das equações (14) e (22), obtemos

$$B_{ij} = \frac{1}{n-2} \left(\nabla^k C_{kij} + W_{ikjl} R^{kl} \right). \quad (49)$$

Se g é uma métrica crítica para $\mathcal{F}_{t,s}$ sobre $\mathcal{M}_1$, usamos a Proposição 3.3 para obter

$$\begin{aligned} (1+4s)\Delta \mathring{R}_{ij} &= (1+2t+2s)(\mathring{\nabla}^2 R)_{ij} - (2+4s) R_{ikjl} \mathring{R}_{kl} - \frac{2+2nt-4s}{n} R \mathring{R}_{ij} \\ &+ \frac{2}{n}(|\mathring{Ric}|^2 + s|Rm|^2) g_{ij} - 2s R_{ikpq} R_{jkpq} + 4s \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jk}. \end{aligned} \quad (50)$$

Agora, usando (48) e (50) temos

$$\begin{aligned} (1+4s)\nabla^k C_{kij} &= (1+2t+2s)(\mathring{\nabla}^2 R)_{ij} - (2+4s) R_{ikjl} \mathring{R}_{kl} - \frac{2+2nt-4s}{n} R \mathring{R}_{ij} \\ &+ \frac{2}{n}(|\mathring{Ric}|^2 + s|Rm|^2) g_{ij} - 2s R_{ikpq} R_{jkpq} + 4s \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jk} \\ &- (1+4s)\Big(\frac{n-2}{2n}\Big) \nabla_i \nabla_j R - (1+4s) R_{ip} \mathring{R}_{pj} + (1+4s) R_{kipj} \mathring{R}_{kp} \\ &+ (1+4s)\Big(\frac{n-2}{2n(n-1)}\Big)((\Delta R) g_{ij} - \nabla_j \nabla_i R). \end{aligned}$$

De onde concluímos que

$$\begin{aligned} (1+4s)\nabla^k C_{kij} &= \Big(\frac{n+4(n-1)t+4s}{2(n-1)}\Big)(\mathring{\nabla}^2 R)_{ij} - R_{ikjl} \mathring{R}_{kl} - (3+2nt)\frac{R}{n} \mathring{R}_{ij} \\ &+ \frac{2}{n}\Big(|\mathring{Ric}|^2 + s|Rm|^2\Big) g_{ij} - 2s R_{ikpq} R_{jkpq} - \mathring{R}_{ip} \mathring{R}_{pj}. \end{aligned} \quad (51)$$

Por outro lado, podemos usar a equação (12) para deduzir

$$\begin{aligned} R_{ikjp} &= W_{ikjp} + \frac{1}{n-2}\big(\mathring{R}_{ij} g_{kp} + \mathring{R}_{kp} g_{ij} - \mathring{R}_{ip} g_{kj} - \mathring{R}_{kj} g_{ip}\big) \\ &+ \frac{R}{n(n-1)}\big(g_{ij} g_{kp} - g_{ip} g_{kj}\big). \end{aligned} \quad (52)$$

Logo, por (52) temos

$$W_{ikjp} \mathring{R}_{kp} = R_{ikjp} \mathring{R}_{kp} - \frac{1}{n-2}(|\mathring{Ric}|^2 g_{ij} - 2\mathring{R}_{ip} \mathring{R}_{pj}) + \frac{R}{n(n-1)} \mathring{R}_{ij}. \quad (53)$$

De fato, observe que $W_{ikjp}R_{kp} = W_{ikjp}\mathring{R}_{kp}$, então teremos

$$\begin{aligned} W_{ikjp}\mathring{R}_{kp} &= R_{ikjp}\mathring{R}_{kp} - \frac{1}{n-2}(\mathring{R}_{ij}g_{kp} + \mathring{R}_{kp}g_{ij} - \mathring{R}_{ip}g_{kj} - \mathring{R}_{kj}g_{ip})\mathring{R}_{kp} \\ &- \frac{R}{n(n-1)}(g_{ij}g_{kp} - g_{ip}g_{kj})\mathring{R}_{kp} \\ W_{ikjp}\mathring{R}_{kp} &= R_{ikjp}\mathring{R}_{kp} - \frac{1}{n-2}(|\mathring{Ric}|^2 g_{ij} - 2\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}) + \frac{R}{n(n-1)}\mathring{R}_{ij}, \end{aligned}$$

o qual é nossa afirmação.

Baseado nas equações (49), (51) and (53), provamos a seguinte expressão para o tensor de Bach de uma métrica crítica de $\mathcal{F}_{t,s}$ sobre $\mathcal{M}_1$.

Proposição 3.4. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana fechada de dimensão $n \geq 4$. Se g é uma métrica crítica para $\mathcal{F}_{t,s}$ sobre $\mathcal{M}_1$, então o tensor de Bach é dado por*

$$\begin{aligned} (n-2)(1+4s)B_{ij} &= \Big(\frac{n+4(n-1)t+4s}{2(n-1)}\Big)(\mathring{\nabla}^2 R)_{ij} + 4sR_{ikjp}\mathring{R}_{kp} \\ &- \Big(\frac{(n-2)-4s}{(n-1)} + 2 + 2nt\Big)\frac{R}{n}\mathring{R}_{ij} + \frac{(n-4)-4ns}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^2 g_{ij} \\ &+ 2s\Big(\frac{1}{n}|Rm|^2 g_{ij} - R_{ikpq}R_{jkpq}\Big) - \frac{(n-4)-8s}{(n-2)}\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}. \end{aligned}$$

Demonstração: Fazendo uso das equações (49), (51) e (53), obtemos

$$\begin{aligned} (1+4s)(n-2)B_{ij} &= \Big(\frac{n+4(n-1)t+4s}{2(n-1)}\Big)(\mathring{\nabla}^2 R)_{ij} - R_{ikjl}\mathring{R}_{kl} - (3+2nt)\frac{R}{n}\mathring{R}_{ij} \\ &+ \frac{2}{n}\Big(|\mathring{Ric}|^2 + s|Rm|^2\Big)g_{ij} - 2sR_{ikpq}R_{jkpq} - \mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj} + (1+4s)R_{ikjp}\mathring{R}_{kp} \\ &- \frac{1+4s}{n-2}(|\mathring{Ric}|^2 g_{ij} - 2\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}) + (1+4s)\frac{R}{n(n-1)}\mathring{R}_{ij} \\ &= \Big(\frac{n+4(n-1)t+4s}{2(n-1)}\Big)(\mathring{\nabla}^2 R)_{ij} + 4sR_{ikjp}\mathring{R}_{kp} \\ &+ \Big(\frac{1+4s}{n-1} - (3+2nt)\Big)\frac{R}{n}\mathring{R}_{ij} + \Big(\frac{2}{n} - \frac{1+4s}{n-2}\Big)|\mathring{Ric}|^2 g_{ij} + \frac{2s}{n}|Rm|^2 g_{ij} \\ &- 2sR_{ikpq}R_{jkpq} + \Big(\frac{2(1+4s)}{n-2} - 1\Big)\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (n-2)(1+4s)B_{ij} &= \Big(\frac{n+4(n-1)t+4s}{2(n-1)}\Big)(\mathring{\nabla}^2 R)_{ij} + 4sR_{ikjp}\mathring{R}_{kp} \\ &- \Big(\frac{(n-2)-4s}{(n-1)} + 2 + 2nt\Big)\frac{R}{n}\mathring{R}_{ij} + \frac{(n-4)-4ns}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^2 g_{ij} \\ &+ 2s\Big(\frac{1}{n}|Rm|^2 g_{ij} - R_{ikpq}R_{jkpq}\Big) - \frac{(n-4)-8s}{(n-2)}\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}, \end{aligned}$$

o que completa nossa prova. □

3.3 Métricas críticas para $\mathcal{F}_t$

Nesta seção, apresentaremos os resultados obtidos no artigo *A characterization of critical metrics for quadratic curvature functionals* (2017a), escrito pelo autor em parceria com A. Barros. De acordo com o Corolário 3.3, uma métrica de Einstein nem sempre é ponto crítico para o funcional $\mathcal{F}_{t,s}$ sobre $\mathcal{M}_1$. Porém, como será visto mais adiante (ver também Catino (2015)), isto sempre acontece no caso $s = 0$. Sendo assim, dedicaremos esta seção ao estudo das métricas que são pontos críticos para o funcional

$$\mathcal{F}_t(g) = \int_M |Ric|^2 dV_g + t \int_M R^2 dV_g, \tag{54}$$

$t \in \mathbb{R}$, restritas ao espaço $\mathcal{M}_1$.

Utilizando a Proposição 3.3 para o caso $s = 0$, obtemos a equação de Euler-Lagrange das métricas críticas para o funcional $\mathcal{F}_t$ sobre $\mathcal{M}_1$.

Proposição 3.5 (Catino, 2015). *Seja M^n uma variedade Riemanniana fechada de dimensão $n \geq 3$. Uma métrica g é ponto crítico para $\mathcal{F}_t$ sobre $\mathcal{M}_1$ se, e somente se, satisfaz as seguintes equações:*

$$\Delta \mathring{R}_{ij} = (1+2t)(\mathring{\nabla}^2 R)_{ij} - 2R_{ikjl}\mathring{R}_{kl} - \frac{2+2nt}{n} R\mathring{R}_{ij} + \frac{2}{n}|\mathring{Ric}|^2 g_{ij} \tag{55}$$

e

$$(n + 4(n-1)t)\Delta R = (n-4)(|Ric|^2 + tR^2 - \mathcal{F}_t(g)). \tag{56}$$

Imediatamente temos os seguintes corolários:

Corolário 3.6. *Qualquer métrica de Einstein é ponto crítico de $\mathcal{F}_t$ sobre $\mathcal{M}_1$.*

Corolário 3.7. *Seja M^4 uma variedade Riemanniana fechada. Se g é uma métrica crítica para $\mathcal{F}_t$ sobre $\mathcal{M}_1$ para algum $t \neq -\frac{1}{3}$, então g possui curvatura escalar constante.*

Demonstração: Em dimensão 4 e $t \neq -\frac{1}{3}$, a equação (56) nos fornece $\Delta R = 0$. Desde que M^4 é fechada, devemos ter R constante sobre M^4.

□

Observe que, em dimensão 4, a fórmula de Chern-Gauss-Bonnet (32) implica que $\mathcal{F}_{-1/3}$ é proporcional, a menos de um termo topológico, ao funcional de Weyl (24). Logo, as métricas críticas são Bach-*flats*, que em geral, não têm curvatura escalar constante. Com isto, estaremos interessados em encontrar condições de forma que (M^n, g) seja de Einstein quando g é um ponto crítico de $\mathcal{F}_t$ sobre $\mathcal{M}_1$.

Catino (2015) provou alguns resultados nesta direção. Por exemplo, mostrou dentre outros resultados, os seguintes teoremas:

Teorema 3.1 (Catino 2015). *Seja M^n uma variedade Riemanniana fechada de dimensão $n \geq 3$. Se g é uma métrica crítica para $\mathcal{F}_t$ sobre $\mathcal{M}_1$ para algum $t < -1/2$ e com curvatura seccional não negativa, então g é uma métrica de Einstein.*

Teorema 3.2 (Catino, 2015). *Seja M^n uma variedade Riemanniana fechada de dimensão $n \geq 3$. Se g é uma métrica crítica para $\mathcal{F}_{-1/2}$ sobre $\mathcal{M}_1$ com curvatura seccional não-negativa, então g ou é de Einstein, ou as seguintes possibilidades podem ocorrer:*

(i) Se $n = 3$, então o recobrimento universal $(\widetilde{M}^3, \tilde{g})$ é isométrico a $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, ag_{\mathbb{S}^2} + bg_{\mathbb{R}})$, para algumas constantes positivas $a, b > 0$.

(ii) Se $n = 4$, então o recobrimento universal $(\widetilde{M}^4, \tilde{g})$, ou é isométrico a $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2, ag_{\mathbb{S}^2} + bg_{\mathbb{S}^2})$, ou é isométrico a $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2, ag_{\mathbb{S}^2} + bg_{\mathbb{R}^2})$, para algumas contantes positivas $a, b > 0$.

(iii) Se $n > 4$, então o recobrimento universal $(\widetilde{M}^n, \tilde{g})$ é isométrico a $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}, ag_{\mathbb{S}^2} + bg_{\mathbb{R}^{n-2}})$, para algumas constantes positivas $a, b > 0$.

Teorema 3.3 (Catino, 2015). *Seja M^3 uma variedade Riemanniana fechada de dimensão 3. Se g é uma métrica crítica para $\mathcal{F}_t$ sobre $\mathcal{M}_1$ para algum $-1/3 \leq t \leq -1/6$ e a curvatura escalar R é não negativa, então g possui curvatura seccional constante positiva se*

$$|\mathring{Ric}|^2 < \frac{(1+6t)^2}{24} R^2.$$

Para obter nossos resultados, utilizaremos as seguintes fórmulas integrais, as quais o leitor pode encontrar também em Catino (2015).

Proposição 3.6. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana fechada de dimensão n. Se g é uma métrica crítica para $\mathcal{F}_t$ sobre $\mathcal{M}_1$, então*

$$\int_M \big(|\nabla \mathring{Ric}|^2 - \frac{(n-2)(1+2t)}{2n} |\nabla R|^2\big) dV_g = 2 \int_M \big(R_{ikjl} \mathring{R}_{ij} \mathring{R}_{kl} + \frac{1+nt}{n} R |\mathring{Ric}|^2\big) dV_g.$$

Demonstração: De acordo com a Proposição 3.5, podemos obter

$$(\Delta \mathring{R}_{ij}) \mathring{R}_{ij} = (1+2t)(\mathring{\nabla}^2 R)_{ij} \mathring{R}_{ij} - 2R_{ikjl} \mathring{R}_{kl} \mathring{R}_{ij} - \frac{2+2nt}{n} R |\mathring{Ric}|^2.$$

Integrando esta igualdade sobre M, por um lado obtemos

$$\int_M (\Delta \mathring{R}_{ij}) \mathring{R}_{ij} \, dV_g = -\int_M |\nabla \mathring{Ric}|^2 dV_g \tag{57}$$

utilizando o Teorema da divergência. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\int_M (\Delta \mathring{R}_{ij})\mathring{R}_{ij}\,dV_g &= (1+2t)\int_M (\nabla_i\nabla_j R - \frac{\Delta R}{n}g_{ij})\mathring{R}_{ij}\,dV_g - 2\int_M R_{ikjl}\mathring{R}_{kl}\mathring{R}_{ij}dV_g \\
&- \frac{2+2nt}{n}\int_M R|\mathring{Ric}|^2 dV_g \\
&= -\frac{(n-2)(1+2t)}{2n}\int_M |\nabla R|^2 dV_g - 2\int_M R_{ikjl}\mathring{R}_{kl}\mathring{R}_{ij}dV_g \\
&- 2\int_M \frac{1+nt}{n}R|\mathring{Ric}|^2 dV_g. \qquad (58)
\end{aligned}$$

Igualando as equações (57) e (58) obtemos a fórmula integral desejada.

□

Proposição 3.7. *Seja M^n uma variedade Riemanniana fechada de dimensão $n \geq 3$. Então vale*

$$\int_M \big(|\nabla \mathring{Ric}|^2 - \frac{(n-2)^2}{4n(n-1)}|\nabla R|^2 - \frac{1}{2}|C|^2\big)dV_g = \int_M \big(R_{ikjl}\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{kl} - \mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{il}\mathring{R}_{jl} - \frac{1}{n}R|\mathring{Ric}|^2\big)dV_g.$$

Demonstração: Não é difícil verificar que devido à equação (46), encontramos

$$\frac{1}{2}|C|^2 = |\nabla \mathring{Ric}|^2 - \frac{(n-2)^2}{4n^2(n-1)}|\nabla R|^2 - \nabla_k \mathring{R}_{ij}\nabla_i \mathring{R}_{kj}. \qquad (59)$$

Integrando por partes o último termo, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_M \nabla_k \mathring{R}_{ij}\nabla_i \mathring{R}_{kj}dV_g &= -\int_M \mathring{R}_{ij}\nabla_k\nabla_i \mathring{R}_{kj}dV_g \\
&= -\int_M \Big(\mathring{R}_{ij}\nabla_i\nabla_k \mathring{R}_{kj} - \mathring{R}_{ij}R_{kik}{}^{p}\mathring{R}_{pj} - \mathring{R}_{ij}R_{kij}{}^{p}\mathring{R}_{kp}\Big)dV_g \\
&= -\int_M \Big(\frac{n-2}{2n}\mathring{R}_{ij}\nabla_i\nabla_j R + \mathring{R}_{ij}R_{ip}\mathring{R}_{pj} - \mathring{R}_{ij}R_{kipj}\mathring{R}_{kp}\Big)dV_g \\
&= \int_M \Big(\frac{(n-2)^2}{4n^2}|\nabla R|^2 - \mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj} + R_{ikjp}\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{kp} - \frac{1}{n}R|\mathring{Ric}|^2\Big)dV_g.
\end{aligned}$$

Usando esta identidade e integrando a eq. (59), obtemos a fórmula integral desejada.

□

Partimos então para prova de nossos resultados. Fazendo $s = 0$ na Proposição 3.4, obtemos a seguinte expressão para o tensor de Bach.

Proposição 3.8. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana fechada de dimensão $n \geq 4$. Se g é uma métrica crítica para $\mathcal{F}_t$ sobre $\mathcal{M}_1$, então o tensor de Bach é dado por*

$$\begin{aligned}(n-2)B_{ij} &= \Big(\frac{n+4(n-1)t}{2(n-1)}\Big)(\mathring{\nabla}^2 R)_{ij} - \Big(\frac{(n-2)}{(n-1)} + 2 + 2nt\Big)\frac{R}{n}\mathring{R}_{ij} \\ &+ \frac{(n-4)}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^2 g_{ij} - \frac{(n-4)}{(n-2)}\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}.\end{aligned}$$

Em particular, se $n = 4$ e $t \neq -\frac{1}{3}$, temos

$$B_{ij} = -\Big(\frac{1+3t}{3}\Big)R\mathring{R}_{ij}.$$

Demonstração: Basta fazer $s = 0$ na Proposição 3.4. Em dimensão 4, desde que $t \neq -1/3$, o Corolário 3.7 garante que R é constante sobre M, o que finaliza a prova da proposição.

□

Como consequência, obtemos nosso primeiro resultado de rigidez para variedades Riemannianas de dimensão 4.

Corolário 3.8. *Seja (M^4, g) uma variedade Riemanniana Bach-flat, fechada de dimensão 4. Se g é uma métrica crítica para $\mathcal{F}_t$ sobre $\mathcal{M}_1$ para algum $t \neq -\frac{1}{3}$, então devemos ter $R \equiv 0$ ou M^4 é uma variedade de Einstein.*

Demonstração: Pela proposição anterior temos

$$B_{ij}\mathring{R}_{ij} = -\Big(\frac{1+3t}{3}\Big)R|\mathring{Ric}|^2.$$

Desde que $t \neq -\frac{1}{3}$ e g é Bach-flat, isto é, $B \equiv 0$, então devemos ter

$$R|\mathring{Ric}|^2 = 0.$$

Do Corolário 3.7, temos que R é constante. Portanto, se $R \neq 0$ então $|\mathring{Ric}| = 0$, como queríamos provar. □

Agora, note que para $t = -n/4(n-1)$, o tensor de Bach na Proposição 3.8 pode se reescrever como

$$B_{ij} = (n-4)\Big(\frac{1}{2n(n-1)}R\mathring{R}_{ij} + \frac{1}{n(n-2)^2}|\mathring{Ric}|^2 g_{ij} - \frac{1}{(n-2)^2}\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}\Big). \quad (60)$$

Além disso, quando $n \neq 4$ e $t = -n/4(n-1)$, utilizando a expressão para a função $\sigma_2(A)$ dada em (45), temos a seguinte igualdade

$$\mathcal{F}_{-n/4(n-1)} = -2(n-2)^2 \int_M \sigma_2(A) dV_g.$$

A proposição a seguir, relacionada ao valor de t acima, foi provada por Catino (2015) e pode ser obtida diretamente da equação (56) no Corolário 3.5.

Proposição 3.9. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana fechada de dimensão $n \neq 4$. Se g é uma métrica crítica para $\mathcal{F}_{-n/4(n-1)}$ sobre $\mathcal{M}_1$, então g possui σ_2-curvatura constante.*

Seguindo método análogo ao utilizado por Hu e Li (2003), mostraremos que uma métrica Bach-flat que é crítica para $\mathcal{F}_{-n/4(n-1)}$ sobre $\mathcal{M}_1$, com $\sigma_2(A) > 0$ e $n \neq 4$, tem que ser de Einstein. Para isto, provemos o seguinte lema.

Lema 3.2. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana fechada, $n \neq 4$. Se $g \in \mathcal{M}_1$ é uma métrica Bach-flat e crítica para $\mathcal{F}_{-n/4(n-1)}$, então*

$$\frac{1}{2n(n-1)} R|\mathring{Ric}|^2 = \frac{1}{(n-2)^2} \mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}\mathring{R}_{ij}.$$

Demonstração: Usando a relação (60), deduzimos

$$B_{ij}\mathring{R}_{ij} \;=\; \frac{(n-4)}{2n(n-1)} R|\mathring{Ric}|^2 - \frac{n-4}{(n-2)^2} \mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}\mathring{R}_{ij}.$$

Logo, o resultado segue desde que $B \equiv 0$. $\square$

Portanto, como a σ_2-curvatura é constante sobre M^n quando g é métrica crítica para $\mathcal{F}_{-n/4(n-1)}$, $n \neq 4$ (ver Proposição 3.9), podemos melhorar o seguinte resultado em Hu e Li (2003).

Teorema 3.4 (Hu e Li, 2003)**.** *Seja (M^n, g) uma variedade Riamanniana fechada de dimensão $n \neq 4$ e $g \in \mathcal{M}_1$ uma métrica localmente conformemente plana. Se g é um ponto crítico para $\mathcal{F}_2 = \int_M \sigma_2(A) dV_g$ com $\sigma_2(A) > 0$, então (M^n, g) é uma forma espacial.*

Antes de mostrar isso, relembremos o seguinte lema algébrico, o qual pode ser encontrado em Okumura (1974).

Lema 3.3. *Para quaisquer números reais $a_1, \ldots, a_n$ com $\sum_i a_i = 0$, vale*

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{3/2} \leq \sum_{i=1}^n a_i^3 \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{3/2},$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, pelo menos $n-1$ dos a_i's são iguais. Em particular, para $\sum_{i=1}^n a_i^2 \neq 0$, se $\sum_{i=1}^n a_i^3 = -\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{3/2}$, então os $n-1$ dos a_i's, os quais são iguais, devem ser positivos; se $\sum_{i=1}^n a_i^3 = \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{3/2}$, então os $n-1$ dos a_i's, os quais são iguais, devem ser negativos.

Assim, podemos provar o seguinte teorema de rigidez.

Teorema 3.5. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana fechada de dimensão $n \neq 4$ e $g \in \mathcal{M}_1$ uma métrica Bach-flat. Se g é um ponto crítico para $\mathcal{F}_{-n/4(n-1)}$ com $\sigma_2(A) > 0$, então (M^n, g) é uma variedade de Einstein.*

Demonstração: Iremos demonstrar por contradição. Suponha que g não é métrica de Einstein, então existe um ponto $p \in M^n$ tal que $|\mathring{Ric}|(p) > 0$. Pela eq. (45), concluímos que

$$\frac{1}{2\sqrt{n(n-1)}}|R| > \frac{1}{(n-2)}|\mathring{Ric}| \geq 0, \tag{61}$$

sobre M^n.

Desde que M^n é conexa, por (61) temos que R não muda de sinal sobre M^n. Se $R > 0$, então em p, temos pelo Lema 3.2

$$\frac{1}{2n(n-1)}R|\mathring{Ric}|^2 - \frac{1}{(n-2)^2}\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}\mathring{R}_{ij} = 0. \tag{62}$$

Usando o Lema 3.3 e (61) em (62), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{1}{2n(n-1)}R|\mathring{Ric}|^2 - \frac{1}{(n-2)^2}\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|\mathring{Ric}|^3 \\ &= \Big(\frac{1}{2n(n-1)}R - \frac{1}{(n-2)\sqrt{n(n-1)}}|\mathring{Ric}|\Big)|\mathring{Ric}|^2 > 0, \end{aligned} \tag{63}$$

o que nos dá uma contradição.

Por outro lado, se $R < 0$, usando a outra desigualdade do Lema 3.3 e (61) em (62), temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2n(n-1)}R|\mathring{Ric}|^2 + \frac{1}{(n-2)^2}\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|\mathring{Ric}|^3 \\ &= \Big(\frac{1}{2n(n-1)}R + \frac{1}{(n-2)\sqrt{n(n-1)}}|\mathring{Ric}|\Big)|\mathring{Ric}|^2 < 0, \end{aligned} \tag{64}$$

o qual também nos dá uma contradição. Portanto, finalizamos a prova do teorema. □

Observe que se g é localmente conformemente plana no Teorema 3.5, então (M^n, g) será uma forma espacial. Este foi exatamente o resultado obtido por Hu e Li (2003) no Terorema 3.4.

No caso de métricas localmente conformemente planas, também obtemos resultados interessantes. Antes de dar prosseguimento, consideremos a seguinte função sobre M.

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{2}|\nabla \mathring{Ric}|^2 - \frac{(n-2)(1+2t)}{4n}|\nabla R|^2 + \frac{1}{n}\Big(\frac{1}{n-1} - (1+nt)\Big)R|\mathring{Ric}|^2.$$

Continuando, o próximo lema será importante para os dois teoremas a seguir.

Lema 3.4. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana localmente conformemente plana, fechada com dimensão $n \geq 3$. Se g é uma métrica crítica para $\mathcal{F}_t$ sobre $\mathcal{M}_1$, então*

$$\int_M \mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}\mathring{R}_{ij}dV_g = -\frac{n-2}{2}\int_M \mathfrak{F}dV_g.$$

Demonstração: Primeiro, note que (53) nos fornece

$$R_{ikjp}\mathring{R}_{kp}\mathring{R}_{ij} = -\frac{2}{n-2}\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}\mathring{R}_{ij} - \frac{R}{n(n-1)}|\mathring{Ric}|^2.$$

Assim, usando a Proposição 3.6, obtemos

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{n-2}\int_M \mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}\mathring{R}_{ij}dV_g &= \int_M \Big(R_{ikjp}\mathring{R}_{kp}\mathring{R}_{ij} + \frac{1}{n(n-1)}R|\mathring{Ric}|^2\Big)dV_g \\
&= \int_M \Big(\frac{1}{2}|\nabla \mathring{Ric}|^2 - \frac{(n-2)(1+2t)}{4n}|\nabla R|^2 - \frac{1+nt}{n}R|\mathring{Ric}|^2\Big)dV_g \\
&+ \int_M \frac{1}{n(n-1)}R|\mathring{Ric}|^2 dV_g \\
&= \int_M \mathfrak{F}dV_g,
\end{aligned}$$

isto completa a prova do lema. □

Com isto podemos provar os seguintes teoremas.

Teorema 3.6. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana fechada, localmente conformemente plana, com curvatura escalar R não negativa e de dimensão $n \geq 5$. Se g é uma métrica crítica para o funcional $\mathcal{F}_t$ sobre $\mathcal{M}_1$ para algum $t \leq -\frac{n^2-3n+4}{2n(n-1)}$, então devemos ter*

(i) ou $R_g \equiv 0$, ou o recobrimento universal de M^n é isométrico à esfera euclidiana $\mathbb{S}^n$, quando $t < -\frac{n^2-3n+4}{2n(n-1)}$;

(ii) ou $R_g \equiv 0$ e nesse caso g não é uma métrica de Einstein, ou o recobrimento universal de M^n é isométrico à esfera euclidiana $\mathbb{S}^n$ ou ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, quando $t = -\frac{n^2-3n+4}{2n(n-1)}$.

Demonstração: Pela Proposição 3.8, para qualquer t temos

$$\begin{aligned}(n-2)B_{ij}\mathring{R}_{ij} &= \Big(\frac{n+4(n-1)t}{2(n-1)}\Big)(\nabla_i\nabla_j R)\mathring{R}_{ij} - \Big(\frac{(n-2)}{(n-1)}+2+2nt\Big)\frac{R}{n}|\mathring{Ric}|^2 \\ &- \frac{(n-4)}{(n-2)}\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}\mathring{R}_{ij}.\end{aligned}$$

Note que $B\equiv 0$ pois M é localmente conformemente plana. Integrando esta equação sobre M, deduzimos

$$\begin{aligned}0 &= \Big(\frac{n+4(n-1)t}{2(n-1)}\Big)\int_M(\nabla_i\nabla_j R)\mathring{R}_{ij}\,dV_g - \Big(\frac{(n-2)}{(n-1)}+2+2nt\Big)\int_M\frac{R}{n}|\mathring{Ric}|^2 dV_g \\ &- \frac{(n-4)}{(n-2)}\int_M\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}\mathring{R}_{ij}\,dV_g.\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema da divergência na primeira integral e usando o Lema 3.4 na última integral da igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}0 &= -\Big(\frac{n+4(n-1)t}{2(n-1)}\Big)\Big(\frac{n-2}{2n}\Big)\int_M|\nabla R|^2 dV_g - \Big(\frac{(n-2)}{(n-1)}+2+2nt\Big)\int_M\frac{R}{n}|\mathring{Ric}|^2 dV_g \\ &+ \frac{n-4}{2}\int_M\mathfrak{F}dV_g.\end{aligned}$$

Portanto, teremos

$$\begin{aligned}0 &= -\Big(\frac{(n-2)(n+4(n-1)t)}{4n(n-1)}+\frac{(n-2)(n-4)(1+2t)}{8n}\Big)\int_M|\nabla R|^2 dV_g \\ &+ \frac{n-4}{4}\int_M|\nabla\mathring{Ric}|^2 dV_g - \Big(\frac{n}{2(n-1)}+\frac{n(1+nt)}{2}\Big)\int_M\frac{R}{n}|\mathring{Ric}|^2 dV_g,\end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned}0 &= -\Big(\frac{n-2}{4n}\Big)\Big(\frac{n^2-3n+4}{2(n-1)}+nt\Big)\int_M|\nabla R|^2 dV_g + \frac{n-4}{4}\int_M|\nabla\mathring{Ric}|^2 dV_g \qquad (65)\\ &- \Big(\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1+nt}{2}\Big)\int_M R|\mathring{Ric}|^2 dV_g.\end{aligned}$$

As hipóteses sobre t, n, e R nos garante que o lado direito de (65) é não negativo. Consequentemente, se $t < -\frac{n^2-3n+4}{2n(n-1)}$, usamos novamente (65) para obter

$$\int_M|\nabla R|^2 dV_g = \int_M|\nabla\mathring{Ric}|^2 dV_g = \int_M R|\mathring{Ric}|^2 dV_g = 0.$$

Assim, concluímos que R é constante sobre M. Se $R\neq 0$, então a identidade $\int_M R|\mathring{Ric}|^2 dV_g = 0$ nos permite concluir que g é uma métrica de Einstein. Portanto, se $R\neq 0$, e levando em conta que $W\equiv 0$, podemos usar a equação (21) para deduzir que g possui curvatura seccional constante positiva, isto é, o recobrimento universal de M^n é isométrico à esfera euclidiana $\mathbb{S}^n$.

Em seguida, calculamos (65) para $t = -\frac{n^2-3n+4}{2n(n-1)}$. Neste caso, obtemos

$$\int_M |\nabla \mathring{Ric}|^2 dV_g = \int_M R|\mathring{Ric}|^2 dV_g = 0. \tag{66}$$

Logo, $|\nabla \mathring{Ric}|^2 = 0$ e $R|\mathring{Ric}|^2 = 0$. Pela desigualdade de Kato, obtemos que $|\nabla|\mathring{Ric}|| \leq |\nabla \mathring{Ric}| = 0$. Assim, $|\mathring{Ric}|$ é constante sobre M^n. Portanto, $R|\mathring{Ric}|^2 = 0$ implica que se g não é métrica de Einstein, então $R \equiv 0$. Caso contrário, se $|\mathring{Ric}| = 0$, então g possui curvatura seccional constante não negativa, isto é, o recobrimento universal de M^n é isométrico ou à esfera euclidiana $\mathbb{S}^n$ ou ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, e isto completa a prova.

□

No caso tridimensional, temos um resultado similar ao teorema anterior. Além disso, a condição de pinching sobre a curvatura escalar no Teorema 3.3 não é necessária quando g é suposta localmente conformemente plana e $t > -1/3$.

Teorema 3.7. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana fechada, localmente conformemente plana, com curvatura escalar R não negativa e g uma métrica crítica para $\mathcal{F}_t$ sobre $\mathcal{M}_1$ para algum $t \geq -1/3$. Então,*

(i) ou $R_g \equiv 0$, ou o recobrimento universal de M^3 é isométrico à esfera euclidiana $\mathbb{S}^3$, se $t > -1/3$;

(ii) ou $R_g \equiv 0$ e nesse caso g não é uma métrica de Einstein, ou o recobrimento universal de M^3 é isométrico à esfera euclidiana $\mathbb{S}^3$ ou ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, se $t = -1/3$.

Demonstração: Considerando $n = 3$ no Lema 3.4 temos

$$\begin{aligned}
\int_M \mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}\mathring{R}_{ij} dV_g &= -\frac{1}{2}\int_M \mathfrak{F} dV_g \\
&= -\frac{1}{2}\int_M \Big[\frac{1}{2}|\nabla \mathring{Ric}|^2 - \frac{1+2t}{12}|\nabla R|^2 + \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2} - (1+3t)\Big)R|\mathring{Ric}|^2\Big] dV_g \\
&= -\frac{1}{2}\int_M \Big[\frac{1}{2}|\nabla \mathring{Ric}|^2 - \frac{1+2t}{12}|\nabla R|^2 - \frac{1+6t}{6}R|\mathring{Ric}|^2\Big] dV_g.
\end{aligned}$$

Agora, usando isto na Proposição 3.7, juntamente com o fato de que $C \equiv 0$ pois g é localmente conformemente plana, obtemos

$$\int_M \Big(|\nabla \mathring{Ric}|^2 - \frac{1}{24}|\nabla R|^2\Big) dV_g = \int_M \Big(R_{ikjp}\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{kp} - \mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{jp} - \frac{1}{3}R|\mathring{Ric}|^2\Big) dV_g.$$

Pela eq. (53) temos

$$\begin{aligned}\int_M\Big(|\nabla\overset{\circ}{Ric}|^2-\frac{1}{24}|\nabla R|^2\Big)dV_g &= \int_M\Big(-2\overset{\circ}{R}_{ip}\overset{\circ}{R}_{pj}\overset{\circ}{R}_{ij}-\frac{R}{6}|\overset{\circ}{Ric}|^2-\overset{\circ}{R}_{ij}\overset{\circ}{R}_{ip}\overset{\circ}{R}_{jp}-\frac{1}{3}R|\overset{\circ}{Ric}|^2\Big)dV_g\\ &= -3\int_M\overset{\circ}{R}_{ip}\overset{\circ}{R}_{pj}\overset{\circ}{R}_{ij}dV_g-\frac{1}{2}\int_M R|\overset{\circ}{Ric}|^2dV_g\\ &= \frac{3}{4}\int_M|\nabla\overset{\circ}{Ric}|^2dV_g-\frac{1+2t}{8}\int_M|\nabla R|^2dV_g\\ &- \Big(\frac{1+6t}{4}+\frac{1}{2}\Big)\int_M R|\overset{\circ}{Ric}|^2dV_g.\end{aligned}$$

Isto nos dá

$$\int_M|\nabla\overset{\circ}{Ric}|^2dV_g+\Big(t+\frac{1}{3}\Big)\int_M|\nabla R|^2dV_g+3(2t+1)\int_M R|\overset{\circ}{Ric}|^2dV_g=0. \qquad (67)$$

As hipóteses sobre t e R implicam que o lado esquerdo de (67) é não negativo. Portanto, se $t>-1/3$, concluímos que

$$\int_M|\nabla R|^2dV_g=\int_M|\nabla\overset{\circ}{Ric}|^2dV_g=\int_M R|\overset{\circ}{Ric}|^2dV_g=0.$$

Assim, R é constante sobre M. Se $R\neq 0$, então g tem que ser métrica de Einstein, i.e., g possui curvatura seccional constante positiva. Portanto, o recobrimento universal de M^3 é isométrico à esfera euclidiana $\mathbb{S}^3$. Para a segunda afirmação, fazendo $t=-1/3$ em (67), temos

$$\int_M|\nabla\overset{\circ}{Ric}|^2dV_g=\int_M R|\overset{\circ}{Ric}|^2dV_g=0. \qquad (68)$$

Assim, argumentando como na identidade (66), usamos a desigualdade de Kato para concluir que $|\overset{\circ}{Ric}|$ é constante sobre M^3. Portanto, $R|\overset{\circ}{Ric}|^2=0$ implica novamente que ou g é uma métrica de Einstein, donde concluímos que g possui curvatura seccional constante não negativa (neste caso, o recobrimento universal de M^3 é isométrico ou à esfera euclidiana $\mathbb{S}^3$ ou ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$), ou $R_g\equiv 0$ com g não sendo uma métrica de Einstein, como queríamos mostrar.

$\square$

3.4 Métricas críticas para $\mathcal{F}_{t,s}$

Nesta seção, voltaremos ao estudo das métricas que são pontos críticos para o funcional

$$\mathcal{F}_{t,s}=\int_M|Ric_g|^2dV_g+t\int_M R_g^2dV_g+s\int_M|Rm_g|^2dV_g,$$

com $s\neq 0$.

Os resultados que serão apresentados aqui, foram obtidos em Barros e Da Silva (2017c). De acordo com Corolário 3.4, sabemos que a métrica de qualquer forma espacial é crítica para $\mathcal{F}_{t,s}$ sobre $\mathcal{M}_1$. Porém, em geral, métricas de Einstein não são críticas (ver Corolário 3.3). Assim, estamos interessados aqui, em encontrar condições para uma métrica crítica ser isométrica a uma forma espacial.

Conforme já foi dito nas seções anteriores, em dimensão 4, a fórmula de Chern-Gauss-Bonnet (32) implica que o funcional de Weyl (24) pode se escrever, a menos de um termo topológico, como combinação linear dos outros dois funcionais em (30). Portanto, do ponto de vista variacional, o funcional $\mathcal{F}_{t,s}$ difere de $\mathcal{F}_t$ somente em dimensão maior do que 4. Logo, assumiremos a partir de agora $n > 4$.

Em particular, tomando $s = -\frac{n+4(n-1)t}{4}$ na Proposição 3.4 com $s \neq -\frac{1}{4}$, encontramos

$$
\begin{aligned}
(n-1)(n-2)(1+4t)B_{ij} &= (n+4(n-1)t)R_{ikjp}\mathring{R}_{kp} \\
&+ \Big(\frac{(n-2)+n+4(n-1)t}{(n-1)} + 2 + 2nt\Big)\frac{R}{n}\mathring{R}_{ij} \\
&+ \Big(\frac{(n-4)+2(n+4(n-1)t)}{(n-2)}\Big)\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj} \\
&- \Big(\frac{(n-4)+n(n+4(n-1)t)}{n(n-2)}\Big)|\mathring{Ric}|^2 g_{ij} \\
&+ \frac{n+4(n-1)t}{2}\Big(\frac{1}{n}|Rm|^2 g_{ij} - R_{ikpq}R_{jkpq}\Big).
\end{aligned}
$$

Assim, considerando $Q_{ij} = (n-1)(n-2)(1+4t)B_{ij}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
Q_{ij} &= (n+4(n-1)t)R_{ikjp}\mathring{R}_{kp} + 2(2+2t+nt)\frac{R}{n}\mathring{R}_{ij} \\
&+ \Big(\frac{(n-4)+2(n+4(n-1)t)}{(n-2)}\Big)\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj} - \Big(\frac{(n-4)+n(n+4(n-1)t)}{n(n-2)}\Big)|\mathring{Ric}|^2 g_{ij} \\
&+ \frac{n+4(n-1)t}{2}\Big(\frac{1}{n}|Rm|^2 g_{ij} - R_{ikpq}R_{jkpq}\Big).
\end{aligned}
$$

Agora, usando (53) na última identidade, também temos

$$
\begin{aligned}
Q_{ij} &= (n+4(n-1)t)\Big[W_{ikjp}\mathring{R}_{kp} + \frac{1}{n-2}(|\mathring{Ric}|^2 g_{ij} - 2\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}) - \frac{R}{n(n-1)}\mathring{R}_{ij}\Big] \\
&+ 2(2+2t+nt)\frac{R}{n}\mathring{R}_{ij} + \Big(\frac{(n-4)+2(n+4(n-1)t)}{(n-2)}\Big)\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj} \\
&- \Big(\frac{(n-4)+n(n+4(n-1)t)}{n(n-2)}\Big)|\mathring{Ric}|^2 g_{ij} + \frac{n+4(n-1)t}{2}\Big(\frac{1}{n}|Rm|^2 g_{ij} - R_{ikpq}R_{jkpq}\Big),
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
Q_{ij} = (n+4(n-1)t)W_{ikjp}\mathring{R}_{kp} - \frac{n-4}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^2 g_{ij} + \frac{n-4}{(n-2)}\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}
$$

$$+ \quad \Big(\frac{4(n-1)+2n(n-1)t-n}{(n-1)}\Big)\frac{R}{n}\mathring{R}_{ij} + \frac{n+4(n-1)t}{2}\Big(\frac{1}{n}|Rm|^2 g_{ij} - R_{ikpq}R_{jkpq}\Big). \tag{69}$$

Pela eq. (52), depois de um longo cálculo, não é difícil verificar a seguinte relação

$$\begin{aligned} R_{ikpq}R_{jkpq} &= W_{ikpq}W_{jkpq} + \frac{4}{n-2}(W_{ikjq}\mathring{R}_{kq}) + \frac{2(n-4)}{(n-2)^2}\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj} \\ &+ \frac{2}{(n-2)^2}|\mathring{Ric}|^2 g_{ij} + \frac{2}{n^2(n-1)}R^2 g_{ij} + \frac{4}{n(n-1)}R\mathring{R}_{ij}. \end{aligned} \tag{70}$$

Por outro lado, quando g é localmente conformemente plana obtemos um lema nos moldes do Lema 3.2.

Lema 3.5. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana fechada de dimensão $n > 4$. Se $g \in \mathcal{M}_1$ é uma métrica localmente conformemente plana, crítica para $\mathcal{F}_{t,-\frac{n+4(n-1)t}{4}}$ tal que $t \notin \{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2(n-1)}\}$, então*

$$\frac{1}{2n(n-1)}R|\mathring{Ric}|^2 = \frac{1}{(n-2)^2}\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}\mathring{R}_{ij}.$$

Demonstração: Primeiramente, observe que se $s = -\frac{n+4(n-1)t}{4}$, então $s = -\frac{1}{4}$ se, e somente se, $t = -\frac{1}{4}$. Em geral, para uma métrica crítica de $\mathcal{F}_{t,-\frac{n+4(n-1)t}{4}}$ sobre $\mathcal{M}_1$ tal que $t \neq -\frac{1}{4}$, temos devido à equação (69) que

$$\begin{aligned} Q_{ij}\mathring{R}_{ij} &= (n+4(n-1)t)W_{ikjp}\mathring{R}_{kp}\mathring{R}_{ij} + \frac{n-4}{(n-2)}\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}\mathring{R}_{ij} \\ &+ \Big(\frac{4(n-1)+2n(n-1)t-n}{(n-1)}\Big)\frac{R}{n}|\mathring{Ric}|^2 - \frac{n+4(n-1)t}{2}R_{ikpq}R_{jkpq}\mathring{R}_{ij}. \end{aligned}$$

Então, usamos (70) para escrever

$$\begin{aligned} Q_{ij}\mathring{R}_{ij} &= (n+4(n-1)t)W_{ikjp}\mathring{R}_{kp}\mathring{R}_{ij} + \frac{n-4}{(n-2)}\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}\mathring{R}_{ij} \\ &+ \Big(\frac{4(n-1)+2n(n-1)t-n}{(n-1)}\Big)\frac{R}{n}|\mathring{Ric}|^2 - \frac{n+4(n-1)t}{2}\Big\{W_{ikpq}W_{jkpq}\mathring{R}_{ij} \\ &+ \frac{4}{n-2}(W_{ikjp}\mathring{R}_{kp}\mathring{R}_{ij}) + \frac{2(n-4)}{(n-2)^2}\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}\mathring{R}_{ij} + \frac{4}{n(n-1)}R|\mathring{Ric}|^2\Big\}. \end{aligned}$$

Do qual obtemos

$$\begin{aligned} Q_{ij}\mathring{R}_{ij} &= (n+4(n-1)t)W_{ikjp}\mathring{R}_{kp}\mathring{R}_{ij} - \frac{2(n-4)(1+2(n-1)t)}{(n-2)^2}\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}\mathring{R}_{ij} \\ &+ \Big(\frac{(n-4)(1+2(n-1)t)}{(n-1)}\Big)\frac{R}{n}|\mathring{Ric}|^2 - \frac{n+4(n-1)t}{2}W_{ikpq}W_{jkpq}\mathring{R}_{ij} \end{aligned}$$

$$- \quad \frac{2(n+4(n-1)t)}{(n-2)} W_{ikjp} \mathring{R}_{kp} \mathring{R}_{ij}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Q_{ij}\mathring{R}_{ij} &= \frac{(n-4)(n+4(n-1)t)}{(n-2)} W_{ikjp}\mathring{R}_{kp}\mathring{R}_{ij} - \frac{n+4(n-1)t}{2} W_{ikpq}W_{jkpq}\mathring{R}_{ij} \\ &+ \Big(\frac{(n-4)(1+2(n-1)t)}{(n-1)}\Big)\frac{R}{n}|\mathring{Ric}|^2 - \frac{2(n-4)(1+2(n-1)t)}{(n-2)^2}\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}\mathring{R}_{ij}. \end{aligned}$$

Levando em conta que g é localmente conformemente plana e $t \notin \{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2(n-1)}\}$, temos $Q_{ij} = 0$. Consequentemente, a última identidade nos fornece o resultado desejado.

□

Com isso, provamos o seguinte teorema para o caso $4s + n + 4(n-1)t = 0$.

Teorema 3.8. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana fechada de dimensão $n > 4$. Se $g \in \mathcal{M}_1$ é uma métrica localmente conformemente plana e crítica para $\mathcal{F}_{t, -\frac{n+4(n-1)t}{4}}$ tal que $t \notin \{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2(n-1)}\}$ e $\sigma_2(A) > 0$, então (M^n, g) é uma forma espacial.*

Demonstração: A prova é feita tal como foi a demonstração do Teorema 3.5. É suficiente mostrar que $|\mathring{Ric}| = 0$ sobre M^n. Suponha por contradição, que existe um ponto $p \in M^n$ tal que $|\mathring{Ric}|(p) > 0$. Pelo Corolário 3.5, sabemos que

$$-\frac{n+4(n-1)t}{4}|W|^2 + 4(n-2)(1+2(n-1)t)\sigma_2(A)$$

é constante sobre M^n. Como $W \equiv 0$, obtemos que $\sigma_2(A) > 0$ é constante sobre M^n. Assim, $\forall p \in M$, usamos a eq. (45) para obter

$$\frac{1}{2\sqrt{n(n-1)}}|R| > \frac{1}{n-2}|\mathring{Ric}| \geq 0. \tag{71}$$

A conexidade de M^n juntamente com (71) nos garante que R não muda de sinal sobre M^n. Analisando o caso $R > 0$, em p, pelo Lema 3.5 temos

$$0 = \frac{1}{2n(n-1)}R|\mathring{Ric}|^2 - \frac{1}{(n-2)^2}\mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}\mathring{R}_{ij}. \tag{72}$$

Aplicando o Lema 3.3 e (71) em (72), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{1}{2n(n-1)}R|\mathring{Ric}|^2 - \frac{1}{(n-2)^2}\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|\mathring{Ric}|^3 \\ &= \Big(\frac{1}{2n(n-1)}R - \frac{1}{(n-2)\sqrt{n(n-1)}}|\mathring{Ric}|\Big)|\mathring{Ric}|^2 > 0, \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Por outro lado, no caso $R < 0$, o procedimento é análogo, apenas usamos a desigualdade oposta no Lema 3.3 para obter novamente uma contradição. Isso completa a prova do teorema. $\square$

Já no caso $4s + n + 4(n-1)t \neq 0$ e $s = -\frac{n-2}{4}$, a condição sobre a segunda função simétrica $\sigma_2(A)$ não é necessária. Com isto, outro resultado de rigidez obtido foi o teorema abaixo.

Teorema 3.9. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana fechada, localmente conformemente plana de dimensão $n > 4$ e curvatura escalar não-negativa. Se $g \in \mathcal{M}_1$ é uma métrica crítica para $\mathcal{F}_{t,s}$ tal que $s = -\frac{n-2}{4}$ e $t \neq -\frac{1}{2(n-1)}$, então ou $R \equiv 0$, ou o recobrimento universal de (M^n, g) é isométrico à esfera euclidiana $\mathbb{S}^n$.*

Demonstração: Primeiramente, temos $B \equiv 0$, pois (M, g) é localmente conformemente plana. Portanto, fazendo uso da Proposição 3.4, temos $\int_M B_{ij}\mathring{R}_{ij}dV = 0$, isto é,

$$\begin{aligned} 0 &= \Big(\frac{n+4(n-1)t+4s}{2(n-1)}\Big)\int_M (\nabla_i\nabla_j R)\mathring{R}_{ij}dV + 4s\int_M R_{ikjp}\mathring{R}_{kp}\mathring{R}_{ij}dV \\ &- \Big(\frac{(n-2)-4s}{(n-1)} + 2 + 2nt\Big)\int_M \frac{R}{n}|\mathring{Ric}|^2 dV - 2s\int_M R_{ikpq}R_{jkpq}\mathring{R}_{ij}dV \\ &- \frac{(n-4)-8s}{(n-2)}\int_M \mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}\mathring{R}_{ij}dV. \end{aligned}$$

Desde que $div(\mathring{Ric}) = \frac{n-2}{2n}\nabla R$, temos $\int_M(\nabla_i\nabla_j R)\mathring{R}_{ij}dV = -\frac{n-2}{2n}\int_M |\nabla R|^2$. Portanto, usando (53) e (70) na identidade acima, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= -\Big(\frac{n-2}{2n}\Big)\Big(\frac{n+4(n-1)t+4s}{2(n-1)}\Big)\int_M |\nabla R|^2 dV - \frac{8s}{(n-2)}\int_M \mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}\mathring{R}_{ij}dV \\ &- \frac{4s}{(n-1)}\int_M \frac{R}{n}|\mathring{Ric}|^2 dV - \Big(\frac{(n-2)-4s}{(n-1)} + 2 + 2nt\Big)\int_M \frac{R}{n}|\mathring{Ric}|^2 dV \\ &- \frac{4s(n-4)}{(n-2)^2}\int_M \mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}\mathring{R}_{ij}dV - \frac{8s}{(n-1)}\int_M \frac{R}{n}|\mathring{Ric}|^2 dV \\ &- \frac{(n-4)-8s}{(n-2)}\int_M \mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}\mathring{R}_{ij}dV. \end{aligned}$$

Em seguida, colocando $c(n,s) = \frac{(n-4)(4s+(n-2))}{(n-2)^2}$, obtemos

$$\begin{aligned} c(n,s)\int_M \mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{pj}\mathring{R}_{ij}dV &= -\Big(\frac{n-2}{2n}\Big)\Big(\frac{n+4(n-1)t+4s}{2(n-1)}\Big)\int_M |\nabla R|^2 dV \\ &- \Big(\frac{(n-2)+(2+2nt)(n-1)+8s}{(n-1)}\Big)\int_M \frac{R}{n}|\mathring{Ric}|^2 dV. \end{aligned}$$

Levando em conta que $n > 4$, escolhemos $s = -\frac{n-2}{4}$ para obter

$$\Big(\frac{1+2(n-1)t}{(n-1)(n-3)}\Big)\Big(\frac{n-2}{2n}\int_M |\nabla R|^2 dV + \int_M R|\mathring{Ric}|^2 dV\Big) \;=\; 0.$$

Porém, $R \geq 0$ e $t \neq -\frac{1}{2(n-1)}$, nos permite concluir que $\int_M |\nabla R|^2 dV = 0$, bem como $\int_M R|\mathring{Ric}|^2 dV = 0$. Portanto, R é constante sobre M. Se $R \neq 0$, então devemos ter que g é uma métrica de Einstein, e por (21) concluímos que (M^n, g) possui curvatura seccional constante positiva, o que finaliza a nossa demonstração.

$\square$

4 MÉTRICAS CRÍTICAS DO FUNCIONAL VOLUME

Neste capítulo, iremos obter estimativas para o volume do bordo Σ de uma variedade Riemanniana compacta (M^n, g), cuja métrica g é ponto crítico do funcional volume. Tal estudo ganhou bastante força a partir do trabalho de Miao e Tam (2009), onde os autores obtiveram uma caracterização de tais pontos críticos através do estudo variacional para o funcional volume restrito ao espaço das métricas de curvatura escalar constante e com métrica prescrita no bordo. Tais pontos críticos, serão chamados mais adiante neste trabalho, de métricas críticas de Miao-Tam. Eles mostraram que as bolas geodésicas das formas espaciais $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$ satisfazem tal caracterização. Em 2011, Miao e Tam mostraram também, que se a métrica crítica for de Einstein, então a variedade Riemanniana tem que ser isométrica a uma bola geodésica em uma das formas espaciais simplesmente conexas $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{H}^n$. Deixando assim, o seguinte questionamento:

Será que as bolas geodésicas das formas espaciais simplesmente conexas $\mathbb{R}^n$*,* $\mathbb{S}^n$ *e* $\mathbb{H}^n$ *são as únicas métricas críticas de Miao-Tam?*

Inúmeras respostas parciais foram obtidas em relação a esta questão, algumas delas serão apresentadas mais adiante. Porém, um importante resultado para o desenvolvimento deste capítulo, foi a estimativa no caso tridimensional para a área do bordo Σ^2 obtida por Batista et al. (2017), o qual foi inspirado por um teorema devido à Boucher-Gibbons-Horowitz (1984) e Shen (1997) sobre métricas estáticas.

Neste capítulo, mostraremos que sob certas condições, é possível estender para dimensão $n \geq 4$, o resultado de Batista et al. (2017) para métricas críticas de Miao-Tam, assim como o análogo para métricas estáticas devido à Boucher-Gibbons-Horowitz (1984) e Shen (1997). Através disso, obteremos uma resposta parcial para o questionamento acima e para uma famosa conjectura chamada *Cosmic no-hair conjecture*. Este capítulo baseia-se no artigo *Rigidity for critical metrics of the volume functional* (2017b), escrito pelo autor em parceira com A. Barros.

4.1 Definições e resultados existentes

Motivados pela caracterização variacional das métricas de Einstein sobre variedades fechadas, as quais podem ser encontradas em Schoen (1989) ou Besse (1987), Miao e Tam (2009) iniciaram o estudo dos pontos críticos do funcional volume. Eles estudaram o problema variacional do funcional volume restrito às métricas de curvatura escalar constante e com uma métrica fixada no bordo.

Com isto, consideremos (M^n, g) uma variedade Riemanniana com bordo suave conexo Σ e seja γ uma métrica Riemanniana fixada no bordo. Consideremos ainda, o seguinte espaço

$$\mathcal{M}_\gamma = \{g \text{ métrica Riemanniana em } M \text{ tal que } g_{|T\Sigma} = \gamma\},$$

o qual é uma variedade suave, veja (Freed e Groisser (1989); Gil-Medrano e Michor (1991)).

Neste mesmo trabalho, Miao e Tam mostraram que o conjunto

$$\mathcal{M}_\gamma^R = \{g \in \mathcal{M}_\gamma; \text{a curvatura escalar } R_g \text{ é constante igual a } R\}$$

é localmente uma subvariedade de $\mathcal{M}_\gamma$ desde que zero não seja um autovalor de Dirichlet do operador $(n-1)\Delta_g + R$. Com este resultado em mãos, eles provaram um teorema que servirá como base para definir as métricas críticas de Miao-Tam.

Relembremos que o funcional volume $V : \mathcal{M}_\gamma \to \mathbb{R}$ é dado por

$$V(g) = \int_M dV_g,$$

cuja linearização é escrita como

$$V_g'(h) = \frac{\partial}{\partial t} V(g(t))\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\int_M \mathrm{tr}_g h \, dV_g.$$

A saber, Miao e Tam (2009) mostraram o seguinte resultado de caracterização para as métricas críticas do funcional V restrito ao espaço $\mathcal{M}_\gamma^R$.

Teorema 4.1 (Miao e Tam, 2009)**.** *Seja $g \in \mathcal{M}_\gamma^R$ tal que o primeiro autovalor de Dirichlet de $(n-1)\Delta_g + R$ é positivo. Então g é ponto crítico do funcional volume $V(\cdot)$ em $\mathcal{M}_\gamma^R$ se, e somente se, existe uma função f em $\overline{M}$ tal que*

$$\begin{cases} -(\Delta_g f)g + \nabla_g^2 f - fRic_g = g, & \text{em } M \\ f = 0, & \text{sobre } \Sigma. \end{cases} \tag{73}$$

De acordo com Barros et al. (2015), chamaremos tais pontos críticos de métricas críticas de Miao-Tam, isto é, temos a seguinte definição.

Definição 4.1. *Uma* ***métrica crítica de Miao-Tam*** *é uma tripla (M^n, g, f), $n \geq 3$, onde (M^n, g) é uma variedade Riemanniana compacta e conexa com bordo suave $\partial M = \Sigma$ e f é uma função suave em M tal que $f^{-1}(0) = \Sigma$ e satisfaz ao seguinte sistema de equações:*

$$-(\Delta_g f)g + \nabla_g^2 f - fRic_g = g, \tag{74}$$

onde $\nabla_g^2 f$ denota o Hessiano de f. Tal função f será chamada de função potencial.

Alguns exemplos foram construidos por Miao e Tam (2009). O primeiro, trata-se das bolas geodésicas do espaço euclidiano com a métrica canônica.

Exemplo 4.1. *Considere* $M^n \subset \mathbb{R}^n$ *uma bola geodésica centrada na origem de raio* R_0 *e a função* f *definida por* $f(x) = \frac{R_0^2}{2(n-1)} - \frac{|x|^2}{2(n-1)}$. *Consideremos em* $\mathbb{R}^n$ *a métrica canônica* g *e em* M *a métrica restrita. Daí* $\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{n-1}$, *e assim temos*

$$\nabla^2 f = -\frac{1}{n-1} g$$

e

$$\Delta f = -\frac{n}{n-1}.$$

Portanto,

$$-(\Delta f)g + \nabla^2 f - fRic = \frac{n}{n-1}g - \frac{1}{n-1}g = g,$$

e além disso $f^{-1}(0) = \partial M$. *Logo* $(M^n,\, g,\, f)$ *é uma métrica crítica de Miao-Tam.*

Em seguida, temos que as bolas geodésicas do espaço hiperbólico também representam uma métrica crítica de Miao-Tam.

Exemplo 4.2. *Considere* $\mathbb{R}^{n,1} = (\mathbb{R}^{n+1},\, ds^2)$, *onde* $ds^2 = dx_1^2 + ... + dx_n^2 - dt^2$. *Considere* $\mathbb{H}^n = \{(x_1, ..., x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1};\, x_1^2 + ... + x_n^2 - t^2 = -1, t \geq 1\}$ *mergulhado em* $\mathbb{R}^{n,1}$ *e seja* g *a métrica induzida. Nessas condições* g *é uma métrica Riemanniana. Agora fixe* $p = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{H}^n$ *e considere* $M^n \subset \mathbb{H}^n$ *uma bola geodésica centrada em* p *de raio* R_0 *e a função* f *definida por* $f(x_1, ..., x_n, t) = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{\cosh r}{\cosh R_0}\right) = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{t}{\cosh R_0}\right)$, *onde* r *é a distância geodésica de* $(x_1, ..., x_n, t)$ *à* p. *Assim* $t = \cosh r$ *e* t *é a função altura relativa a* p. *Daí,*

$$\nabla^2 f = -\frac{1}{(n-1)\cosh R_0}\nabla^2(t) = -\frac{t}{(n-1)\cosh R_0} g.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} -(\Delta f)g + \nabla^2 f - fRic &= \frac{nt}{(n-1)\cosh R_0}g - \frac{t}{(n-1)\cosh R_0}g \\ &\quad + \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{t}{\cosh R_0}\right)(n-1)g \\ &= \frac{nt - t + (n-1)\cosh R_0 - (n-1)t}{(n-1)\cosh R_0}g \\ &= g, \end{aligned}$$

e $f^{-1}(0) = \partial M$. *Assim* $(M^n,\, g,\, f)$ *é uma métrica crítica de Miao-Tam.*

Por fim, também temos as bolas geodésicas da esfera canônica como exemplo.

Exemplo 4.3. *Considere* $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *e* $p = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{S}^n$. *Sejam* $M^n \subset \mathbb{S}^n$ *um bola geodésica centrada em* p *de raio* $R_0 < \frac{\pi}{2}$ *e* f *a função definida por* $f(x_1, ..., x_n, t) = \frac{1}{n-1}\left(\frac{t}{\cos R_0} - 1\right) = \frac{1}{n-1}\left(\frac{\cos r}{\cos R_0} - 1\right)$, *onde* r *é a distância geodésica de* $(x_1, ..., x_n, t)$ *à* p. *Assim* $t = \cos r$ *e* t *é a função altura relativa a* p. *Daí, obtemos*

$$\nabla^2 f = \frac{1}{(n-1)\cos R_0}\nabla^2(t) = -\frac{t}{(n-1)\cos R_0}g.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} -(\Delta f)g + \nabla^2 f - fRic &= \frac{nt}{(n-1)\cos R_0}g - \frac{t}{(n-1)\cos R_0}g \\ &\quad -\frac{1}{n-1}\left(\frac{t}{\cos R_0} - 1\right)(n-1)g \\ &= \frac{nt - t - (n-1)t + (n-1)\cos R_0}{(n-1)\cosh R_0}g \\ &= g, \end{aligned}$$

e $f^{-1}(0) = \partial M$. *Assim* $(M^n,\, g,\, f)$ *é uma métrica crítica de Miao-Tam.*

Vale observar que os três exemplos acima possuem curvatura escalar constante, isto não deve nos surpreender uma vez que se (M^n, g) satisfaz isoladamente à equação (74) para alguma função suave f sobre M, então sua curvatura escalar deve ser constante. De fato, tomando o divergente na equação (74), obtemos

$$f\nabla R_g = 0. \tag{75}$$

Logo, se $\nabla R_g(p) \neq 0$ para algum $p \in M$, então $\nabla R_g \neq 0$ em algum conjunto aberto não-vazio $U \subset M$. Assim, deveríamos ter $f \equiv 0$ em U, o que não pode ocorrer devido (74). Portanto, R_g é constante sobre M. Consequentemente, podemos assumir que $R_g = n(n-1)\varepsilon$, $\varepsilon = -1, 0, 1$. Para simplificar a notação, a partir de agora, exceto quando necessário, denotaremos as quantidades relacionadas à métrica g sem o subíndice g.

Motivados pela caracterização do Teorema 4.1, Miao e Tam provaram a seguinte caracterização variacional das métricas críticas em formas espaciais.

Teorema 4.2 (Miao, Tam, 2009)**.** *Se* M *é um domínio limitado com bordo suave em* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ *ou* $\mathbb{S}^n$ *(se* $M^n \subset \mathbb{S}^n$, *suponha ainda que* $V(M) < \frac{1}{2}V(\mathbb{S}^n)$*). Então a correspondente métrica nesse espaço é um ponto crítico do funcional volume* $V(\cdot)$ *em* $\mathcal{M}^R_\gamma$ *se, e somente se,* M *é uma bola geodésica.*

Em função do Teorema 4.2, um questionamento a ser feito é o seguinte.

Questão 4.1. *As bolas geodésicas das formas espaciais simplesmente conexas $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$ são as únicas métricas críticas de Miao-Tam?*

Em busca de respostas para a Questão 4.1, Miao-Tam (2011) consideraram este problema com a hipótese da métrica ser de Einstein e obtiveram a seguinte resposta.

Teorema 4.3 (Miao, Tam, 2011)**.** *Seja $(M^n,\, g,\, f)$ uma métrica crítica de Miao-Tam Einstein e bordo Σ suave. Então $(M^n,\, g)$ é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$.*

Em 2017, Baltazar e Ribeiro Jr. mostraram que a hipótese Einstein sobre a variedade pode ser substituída por tensor de Ricci paralelo, melhorando o Teorema 4.3.

Baseados nas técnicas de Kobayashi e Obata (1981), Miao e Tam substituíram a hipótese sobre a métrica ser de Einstein por localmente conformemente plana e bordo isométrico à esfera. Mais precisamente, eles provaram o seguinte teorema.

Teorema 4.4 (Miao, Tam, 2011)**.** *Seja $(M^n,\, g,\, f)$ uma métrica crítica de Miao-Tam simplesmente conexa e com bordo isométrico à esfera canônica. Se $(M^n,\, g)$ é localmente conformemente plana, então $(M^n,\, g)$ é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$.*

Em dimensão $n = 3, 4$, Barros et al. (2015) mostraram que o Teorema 4.4 é verdadeiro se considerarmos g uma métrica Bach-*flat* ao invés de localmente conformemente plana.

Vale ressaltar que, de forma geral, a Questão 4.1 tem resposta negativa, uma vez que Miao e Tam (2011) construíram exemplos de métricas críticas na forma de produto *warped* que são localmente conformemente planas e não são métricas de Einstein. Porém, no caso de métricas críticas em variedades simplesmente conexas, a Questão 4.1 ainda encontra-se sem resposta.

Neste capítulo, apresentaremos resultados que irão nos auxiliar a encontrar respostas para a Questão 4.1. Em particular, encontramos estimativas para o volume do bordo para métricas críticas de Miao-Tam, bem como para métricas estáticas, cuja definição é dada a seguir.

Definição 4.2. *Uma variedade Riemanniana completa e conexa (M^n, g) com bordo Σ (possivelmente não-vazio) é dita ser estática, se existe uma função não negativa f sobre M satisfazendo*

$$-(\Delta_g f)g + \nabla_g^2 f - fRic_g = 0 \tag{76}$$

em $M \setminus \Sigma$ e $\Sigma = f^{-1}(0)$. Neste caso, (M^n, g, f) é chamada uma tripla estática ou simplesmente uma métrica estática.

Métricas estáticas apareceram no contexto de Relatividade Geral através do estudo das equações de Einstein. De fato, o núcleo do operador

$$\mathfrak{L}_g^*(f) = -(\Delta_g f)g + \nabla_g^2 f - fRic_g$$

está relacionado a espaços-tempo estáticos em Relatividade Geral. Do ponto de vista físico,

$$\mathcal{V} = \mathbb{R} \times M, \qquad \overline{g} = -f^2 dt^2 + g,$$

onde (M, g) é uma variedade Riemanniana e f é uma função positiva sobre M, representa uma variedade Lorentziana de dimensão $n + 1$. Neste caso, dizemos que $(\mathcal{V}, \overline{g})$ é um *vacuum* espaço-tempo estático com constante cosmológica Λ, se ela satisfaz à equação de Einstein

$$Ric_{\overline{g}} = \Lambda \overline{g}. \tag{77}$$

A equação de Einstein (77) pode ser reescrita em termos de g e f como

$$\nabla_g^2 f = f(Ric_g - \Lambda g) \tag{78}$$

$$\Delta_g f = -\Lambda f, \tag{79}$$

onde Ric_g, ∇_g^2 e Δ_g denotam, respectivamente, o tensor de Ricci, a forma hessiana e o operador de Laplace sobre a variedade Riemanniana (M, g). Tomando o traço na equação (78) e usando (79), obtemos a relação

$$R_g = (n - 1)\Lambda,$$

de onde vem a motivação para a Definição 4.2. A hipersuperfície $\mathbb{R} \times \Sigma$ do espaço-tempo $\mathcal{V}$ é chamada de horizonte de evento cosmológico. Com um abuso de linguagem, o bordo Σ de M também é chamado de horizonte de evento cosmológico.

Muitos resultados de classificação são conhecidos, principalmente nos casos de curvatura escalar nula e curvatura escalar negativa, por exemplo, o leitor pode verificar: Israel (1967), Chase (1970), Wald (1984), Anderson (2000), Anderson et al. (2002) e Wang (2005).

Ademais, um fato bastante conhecido é que a curvatura escalar de uma métrica estática é constante, tal como acontece no caso de métricas críticas de Miao-Tam. Uma prova deste resultado pode ser encontrada em Corvino (2000). Sendo assim, nesta tese daremos atenção às métricas estáticas com curvatura escalar constante positiva, a qual podemos considerar, a menos de *scaling*, $R_g = n(n - 1)$.

Exemplo 4.4 (Métrica estática com curvatura escalar positiva). *Considere* $(M^n, g) = (\mathbb{S}^n_+, g)$ *o hemisfério superior unitário em* $\mathbb{R}^{n+1}$ *dotado com a métrica euclidiana* g. *Con-*

sequentemente, o bordo $\Sigma = \mathbb{S}^{n-1}$ *é o equador e se* p *é o pólo de* $\mathbb{S}^n_+$*, a função altura correspondente dada por*

$$h(x) = g(x,p), \quad \forall x \in \mathbb{S}^n_+$$

é positiva sobre $\mathbb{S}^n_+$*, se anula ao longo de* Σ *e satisfaz à equação tipo Obata*

$$\nabla^2 h = -hg.$$

Portanto, a Definição 4.2 é satisfeita, concluindo que $(\mathbb{S}^n_+, g, h)$ *é uma tripla estática com curvatura escalar positiva.*

Para este caso, em (1984), Boucher, Gibbons e Horowitz propuseram um problema, ainda em aberto, que ficou conhecido como *Cosmic no-hair conjecture.*

Conjectura 4.1 (Cosmic no-hair conjecture)**.** *A única tripla estática compacta* (M^n, g, f) *de dimensão* n*, com curvatura escalar positiva e bordo conexo* Σ *é dada por um hemisfério canônico* $\mathbb{S}^n_+$*, onde a função* f *é a função altura correspondente.*

A conexidade do bordo é essencial na Conjectura 4.1 uma vez que exemplos de métricas estáticas com bordo duplo são conhecidos, por exemplo, o espaço-tempo de Nariari. Para detalhes, veja Hijazi et al. (2015).

Algumas respostas parciais para esta conjectura foram obtidas. Por exemplo, se (M^n, g) é de Einstein, o Teorema B (tipo Obata) em Reilly (1980) resolve a conjectura. Assumindo que a métrica estática g seja localmente conformemente plana, Kobayashi (1982) e Lafontaine (1983) provaram, independentemente, que a conjectura é verdadeira.

Outro grande resultado obtido nesta direção, foi devido à Boucher-Gibbons-Horowitz (1984) e Shen (1997), o qual serviu de inspiração para parte desta tese.

Teorema 4.5 (Boucher-Gibbons-Horowitz (1984), Shen (1997))**.** *Seja* (M^3, g, f) *uma tripla estática compacta, orientada, com bordo conexo* Σ *e curvatura escalar* 6*. Então* Σ *é uma esfera bidimensional cuja área satisfaz à desigualdade*

$$|\Sigma| \leq 4\pi,$$

com igualdade acontecendo se, e somente se, M *é isométrica ao hemisfério canônico* $\mathbb{S}^3_+$*.*

Observe que o Teorema 4.5 garante que a *Cosmic no-hair conjecture* é verdadeira no caso tridimensional quando o bordo tem área igual a 4π. Recentemente, Batista et al. (2017) provaram um teorema análogo para métricas críticas de Miao-Tam.

Teorema 4.6 (Batista-Diógenes-Ranieri-Ribeiro Jr., 2017)**.** *Seja* (M^3, g, f) *uma métrica crítica de Miao-Tam, compacta, orientada, com bordo conexo* Σ *e curvatura escalar não negativa. Então,* Σ *é uma esfera bidimensional e*

$$|\Sigma| \leq \frac{4\pi}{C(R)}, \tag{80}$$

onde $C(R) = \frac{R}{6} + \frac{1}{4|\nabla f|^2}$ *é constante. Além disso, a igualdade em* (80) *ocorre se, e somente se,* (M^3, g) *é isométrica a bola geodésica em alguma forma espacial simplesmente conexa* $\mathbb{R}^3$ *ou* $\mathbb{S}^3$.

Ainda em 2016, Barbosa et al. mostraram que o Teorema 4.6 também é válido no caso de curvatura escalar negativa, supondo a curvatura média do bordo $H > 2$. Além disso, provaram o mesmo resultado acima em dimensão $n = 5$ desde que o bordo Σ^4 seja de Einstein. Neste capítulo iremos mostrar que vale uma estimativa para o volume de métricas críticas de Miao-Tam e métricas estáticas, tipo Teorema 4.6 e Teorema 4.5, no caso de dimensão $n \geq 4$.

4.2 Resultados chaves

Nesta seção apresentaremos alguns fatos e resultados sobre métricas críticas de Miao-Tam e triplas estáticas que serão de extrema importância para nossos resultados.

Métricas críticas de Miao-Tam

Consideremos (M^n, g, f), $n \geq 3$, uma métrica crítica de Miao-Tam. De acordo com a Definição 4.1, a equação fundamental (74) pode ser reescrita em linguagem tensorial da seguinte forma:

$$-(\Delta f)g_{ij} + \nabla_i\nabla_j f - fR_{ij} = g_{ij}. \tag{81}$$

Em particular, tomando o traço na identidade acima, obtemos

$$(n-1)\Delta f + Rf = -n, \tag{82}$$

onde R denota a curvatura escalar de M. Além disso, usando (81) e (82) podemos deduzir que

$$\begin{aligned} f\mathring{Ric} &= fRic - f\frac{R}{n}g \\ &= \nabla^2 f + \frac{R}{n-1}fg + \frac{n}{n-1}g - g - \frac{Rf}{n}g \\ &= \nabla^2 f + \frac{Rf+n}{n(n-1)}g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g \\ &= \overset{\circ}{\nabla^2} f, \end{aligned} \tag{83}$$

onde $\overset{\circ}{T} = T - \frac{trT}{n} g$ representa o tensor sem traço (*traceless*) associado a T.

Como o bordo Σ é dado por $\Sigma = f^{-1}(0)$, temos que f não muda de sinal e $|\nabla f| \neq 0$ sobre Σ. Sem perda de generalidade, podemos assumir f não negativa, em particular, $f > 0$ no interior de M. Além disso, como já foi mostrado na Seção 4.1, a curvatura escalar tem que ser constante, o qual será assumida $R = n(n-1)\varepsilon$, $\varepsilon = -1, 0, 1$. Outro fato importante a ressaltar é que f e g são analíticas, de acordo com Corvino et al. (2013) (veja detalhes em Diógenes (2015, Proposição 2.3)). Portanto, f não pode ser nula em um conjunto aberto não-vazio de M. Com isto, o conjunto dos pontos regulares de f é denso em M e, desde que $f \geq 0$, o campo normal unitário exterior ao bordo Σ é dado por $\nu = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$.

De posse destas informações, podemos verificar que $|\nabla f|$ é constante sobre Σ. De fato, seja $X \in T\Sigma$, então usando as eqs. (81) e (82), obtemos $X(|\nabla f|^2) = 2\nabla^2 f(X, \nabla f) = -\frac{2}{n-1}\langle X, \nabla f\rangle = 0$.

Continuando, considere $\{e_1, \ldots, e_{n-1}, \nu\}$ um referencial ortonormal adaptado sobre Σ. A segunda forma fundamental sobre Σ se escreve como a seguir

$$h_{ij} = \langle \nabla_{e_i} \nu, e_j \rangle = -\frac{1}{|\nabla f|} \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_j \rangle,$$

o que nos fornece

$$h_{ij} = \frac{1}{(n-1)|\nabla f|} g_{ij}, \tag{84}$$

para $i, j = 1, \ldots, n-1$. Assim, o bordo Σ é uma hipersuperfície totalmente umbílica com curvatura média constante dada por

$$H = \frac{1}{|\nabla f|}. \tag{85}$$

Por outro lado, a equação de Gauss para Σ é dada a seguir

$$R^{\Sigma}_{ijkl} = R_{ijkl} - h_{il} h_{jk} + h_{ik} h_{jl}. \tag{86}$$

Tomando o traço nas coordenadas j, l e usando a equação (84), obteremos

$$R^{\Sigma}_{ik} = R_{ik} - R_{i\nu k\nu} + \frac{n-2}{(n-1)^2 |\nabla f|^2} g_{ik}. \tag{87}$$

Novamente, tomando o traço em (87), concluímos

$$2Ric(\nu,\nu) + R^{\Sigma} = R + \frac{n-2}{n-1}H^2, \tag{88}$$

onde R^{Σ} denota a curvatura escalar de Σ.

Desde que a curvatura escalar R é constante em M, pela equação (83) a seguinte identidade é verdadeira

$$div(\mathring{Ric}(\nabla f)) = \langle \mathring{Ric}, \mathring{\nabla}^2 f\rangle = f|\mathring{Ric}|^2. \tag{89}$$

Desta maneira, integrando (89) sobre M, usando que $|\nabla f|$ é constante sobre Σ e aplicando o Teorema da divergência, deduzimos o seguinte lema (veja também em Batista et al. 2017).

Lema 4.1. *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam compacta, orientada, conexa e com bordo suave conexo Σ. Então,*

$$\int_M f|\mathring{Ric}|^2 dV_g = -H\int_{\Sigma} \mathring{Ric}(\nabla f, \nabla f)ds. \tag{90}$$

Observação 4.1. *Note que se considerarmos a função f não positiva, então a fórmula* (90) *no Lema 4.1 continua verdadeira, porém a curvatura média do bordo satisfaz*

$$H = -\frac{1}{|\nabla f|}.$$

Outro resultado necessário para dar continuidade ao trabalho pode ser encontrado em Barbosa et al. (2016). Porém, por efeito de completude, incluimos a prova aqui.

Proposição 4.1. *Seja (M^n, g, f), $n \geq 3$, uma métrica crítica de Miao-Tam compacta, orientada, conexa, com bordo suave conexo Σ e curvatura escalar $R = n(n-1)\varepsilon$, onde $\varepsilon = -1, 0, 1$. Então, a seguinte identidade ocorre*

$$\int_{\Sigma} R^{\Sigma} ds = 2H\int_M f|\mathring{Ric}|^2 dV_g + C(R)|\Sigma|,$$

onde $|\Sigma|$ representa o volume do bordo e $C(R)$ é uma constante dada por

$$C(R) = \frac{n-2}{n-1}\big(H^2 + (n-1)^2\varepsilon\big). \tag{91}$$

Demonstração: De acordo com o Lema 4.1 e a equação de Gauss (88), obtemos

$$\begin{aligned}\int_M f|\mathring{Ric}|^2 dV_g &= -\frac{1}{H}\int_\Sigma Ric(\nu,\nu)dV_g + \frac{1}{H}\int_\Sigma \varepsilon(n-1)ds\\ &= -\frac{1}{H}\int_\Sigma \frac{1}{2}\Big(\varepsilon n(n-1) - R^\Sigma + \frac{n-2}{n-1}H^2\Big)ds + \frac{1}{H}\varepsilon(n-1)|\Sigma|\\ &= \frac{1}{2H}\int_\Sigma R^\Sigma ds - \frac{1}{2H}\Big(\varepsilon(n-1)(n-2) + \frac{n-2}{n-1}H^2\Big)|\Sigma|.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_\Sigma R^\Sigma ds = 2H\int_M f|\mathring{Ric}|^2 dV_g + \frac{n-2}{n-1}\big(H^2 + \varepsilon(n-1)^2\big)|\Sigma|,$$

como queríamos demonstrar. □

Métricas estáticas

Agora, trataremos sobre triplas estáticas. Porém, não entraremos em detalhes, pois estes fatos seguem *mutatis mutandis* como em métricas críticas de Miao-Tam. Seja (M^n, g, f), $n \geq 3$, uma tripla estática. De acordo com a Definição 4.2, a equação fundamental (76) é dada por

$$-(\Delta f)g_{ij} + \nabla_i\nabla_j f - fR_{ij} = 0, \tag{92}$$

cujo traço nos fornece

$$\Delta f = -\frac{R}{n-1}f. \tag{93}$$

Além disso, também podemos reescrever a equação (92) como a seguir

$$f\mathring{Ric} = \mathring{\nabla}^2 f. \tag{94}$$

Assim como em métricas críticas de Miao-Tam, $|\nabla f|$ também é constante positiva sobre Σ, visto que 0 é um valor regular de f, bem como M^n possui curvatura escalar constante R (veja Corvino et al. (2013)). Aqui, iremos assumir R positiva sendo $R = n(n-1)$. A diferença em relação ao caso anterior é que o bordo Σ, agora, é totalmente geodésico. De fato, pelas equações (92) e (93), a segunda forma fundamental de Σ é dada por

$$h_{ij} = \langle\nabla_{e_i}\nu, e_j\rangle = -\frac{1}{|\nabla f|}\langle\nabla_{e_i}\nabla f, e_j\rangle,$$

i.e.,

$$h_{ij} = -\frac{1}{|\nabla f|}\big(R_{ij} - \frac{R}{n-1}g_{ij}\big)f = 0, \tag{95}$$

para um referencial ortonormal adaptado $\{e_1, \ldots, e_{n-1}, \nu = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\}$ associado a Σ. Com isto, Σ é uma hipersuperfície mínima cuja equação de Gauss torna-se

$$2Ric(\nu,\nu) = R - R^{\Sigma}, \tag{96}$$

onde R^{Σ}, como antes, é a curvatura escalar de Σ.

Desde que ocorre a expressão (94), então vale também o Lema 4.1 para métricas estáticas.

Lema 4.2. *Seja (M^n, g, f) uma tripla estática compacta, orientada, conexa e com bordo suave conexo Σ. Então,*

$$\int_M f|\mathring{Ric}|^2 dV_g = -\frac{1}{|\nabla f|}\int_\Sigma \mathring{Ric}(\nabla f, \nabla f) ds.$$

Assim, podemos provar um análogo à Proposição 4.1 para métricas estáticas.

Proposição 4.2. *Seja (M^n, g, f), $n \geq 3$, uma tripla estática compacta, orientada, conexa, com bordo suave conexo Σ e curvatura escalar $R = n(n-1)$. Então, vale*

$$\int_\Sigma R^{\Sigma} ds = \frac{2}{|\nabla f|}\int_M f|\mathring{Ric}|^2 dV_g + (n-1)(n-2)|\Sigma|.$$

Demonstração: Usando a equação de Gauss (96) no Lema 4.2, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_M f|\mathring{Ric}|^2 dV_g &= -\frac{1}{|\nabla f|}\int_\Sigma \mathring{Ric}(\nabla f, \nabla f) ds = -|\nabla f|\int_\Sigma (Ric(\nu,\nu) - (n-1)) ds \\
&= -|\nabla f|\int_\Sigma \frac{1}{2}(n(n-1) - R^{\Sigma}) ds + (n-1)|\nabla f||\Sigma| \\
&= \frac{|\nabla f|}{2}\int_\Sigma R^{\Sigma} ds - \frac{|\nabla f|}{2}(n-1)(n-2)|\Sigma|,
\end{aligned}$$

como queríamos provar. $\square$

4.3 Estimativas e Resultados de rigidez

Agora, nesta seção iremos apresentar os resultados principais deste capítulo. Para isso, precisamos recordar alguns fatos básicos sobre a constante de Yamabe de uma variedade Riemanniana.

Considere (M^n, g) uma variedade Riemanniana fechada de dimensão $n \geq 3$ e denote por $[g]$ a classe conforme de uma métrica Riemanniana g sobre M. A constante de Yamabe $Y(M, [g])$ de $[g]$, é definida pelo ínfimo do funcional curvatura escalar total normalizado restrito à classe $[g]$:

$$Y(M,[g]) = \inf_{\tilde{g}\in[g]} \frac{\int_M R_{\tilde{g}} dV_{\tilde{g}}}{\left(\int_M dV_{\tilde{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}}},$$

onde $R_{\tilde{g}}$ é a curvatura escalar associada à métrica $\tilde{g}$ e $dV_{\tilde{g}}$ seu elemento de volume. Certamente, a constante de Yamabe pode ser expressa em termos de funções suaves positivas (basta considerar $\tilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-2}} g$, φ suave e positiva sobre M):

$$Y(M,[g]) = \inf_{\varphi\in C_+^\infty(M)} \frac{\int_M (4\frac{n-1}{n-2}|\nabla\varphi|^2 + R\varphi^2) dV_g}{\left(\int_M |\varphi|^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{n}}}.$$

Este ínfimo sempre existe devido a um Teorema fundamental obtido em várias etapas por Yamabe (1960), Trudinger (1968), Aubin (1976) e Schoen (1984). É bem conhecido, e não é difícil verificar, que a constante de Yamabe da esfera padrão $\mathbb{S}^n$ é dada por

$$Y(\mathbb{S}^n,[g_{can}]) = n(n-1)\omega_n^{2/n}, \tag{97}$$

onde ω_n denota o volume da esfera canônica unitária $\mathbb{S}^n$.

Por fim, enunciaremos um resultado fundamental devido a Ilias (1983) que será bastante útil na prova dos principais teoremas deste capítulo. Antes, introduzimos as seguintes constantes:

$$K(n,2) = \sqrt{\frac{4}{n(n-2)\omega_n^{2/n}}}, \tag{98}$$

bem como

$$\mathcal{R}(M,g) = \inf\{Ric(V,V) \mid V \in TM, |V|_g = 1\}. \tag{99}$$

Tal resultado afirma:

Teorema 4.7 (Ilias, 1983)**.** *Seja (M^n,g), $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana compacta sem bordo. Suponha que $\mathcal{R}(M,g) \geq \mathcal{R}(\mathbb{S}^n, \frac{1}{\delta}g_{can}) = (n-1)\delta > 0$, então*

$$\left(\int_M |f|^{\frac{2n}{n-2}} dV_g\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq [K(n,2)]^2 \left(\frac{\omega_n(\delta)}{|M|}\right)^{\frac{2}{n}} \int_M |\nabla f|^2 dV_g + |M|^{-\frac{2}{n}} \int_M |f|^2 dV_g,$$

para toda $f \in H^{1,2}(M)$, onde $\omega_n(\delta) = \delta^{-\frac{n}{2}}\omega_n$.

Para provar a versão do Teorema 4.6 para variedades de dimensão $n = 5$, Barbosa et al. (2016) assumiram a condição do bordo Σ^4 ser uma variedade Einstein e então utilizaram a fórmula de Chern-Gauss-Bonnet para variedades Riemannianas de dimensão 4 (veja Eq. (32)) para obter tal resultado. Na falta de uma fórmula de Chern-Gauss-Bonnet explícita para dimensão $n \geq 5$, procuramos alternativas para provar nossos resultados. A saída encontrada foi exatamente o Teorema 4.7.

Com estas informações, podemos provar o primeiro teorema deste capítulo. Assumindo que o bordo Σ seja uma variedade de Einstein, é possível estender o Teorema 4.6 para dimensão $n \geq 4$.

Teorema 4.8. *Seja (M^n, g, f), $n \geq 4$, uma métrica crítica de Miao-Tam, compacta, orientada, com bordo conexo Σ e curvatura escalar $R = n(n-1)\varepsilon$, onde $\varepsilon = -1, 0, 1$. Suponha que o bordo Σ seja uma variedade de Einstein com curvatura escalar R^Σ positiva. Se $\varepsilon = -1$, assumimos ainda que a curvatura média de Σ satisfaz $H > n-1$. Então temos*

$$|\Sigma|^{\frac{2}{n-1}} \leq \frac{Y(\mathbb{S}^{n-1}, [g_{can}])}{C(R)}, \tag{100}$$

onde $C(R) = \frac{n-2}{n}R + \frac{n-2}{n-1}H^2$ é uma constante positiva. Além disso, a igualdade ocorre em (100) *se, e somente se, (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica em alguma das formas espaciais simplesmente conexas $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{H}^n$.*

Demonstração: Para a prova, o Teorema 4.7 é fundamental. De fato, como Σ é variedade de Einstein com $R^\Sigma > 0$, basta tomar $\delta = \frac{R^\Sigma}{(n-1)(n-2)} > 0$ para obter

$$\mathcal{R}(\Sigma, g_\Sigma) = \inf\{Ric^\Sigma(V,V) \mid V \in T\Sigma, |V|_g = 1\} = (n-2)\delta.$$

Portanto, aplicando à variedade Σ^{n-1} o teorema citado devido à Ilias, obtemos

$$\Big(\int_\Sigma |\varphi|^{\frac{2(n-1)}{n-3}} ds\Big)^{\frac{n-3}{n-1}} \leq [K(n-1,2)]^2 \Big(\frac{\omega_{n-1}(\delta)}{|\Sigma|}\Big)^{\frac{2}{n-1}} \int_\Sigma |\nabla\varphi|^2 ds + |\Sigma|^{-\frac{2}{n-1}} \int_\Sigma |\varphi|^2 ds \tag{101}$$

para toda $\varphi \in H^{1,2}(\Sigma)$, onde $\omega_{n-1}(\delta) = \delta^{-\frac{n-1}{2}}\omega_{n-1}$, $\omega_{n-1} = |\mathbb{S}^{n-1}|$ e $K(n-1,2)$ dada em (98) é a melhor constante para desigualdades do tipo Sobolev:

$$\Big(\int_\Sigma |\varphi|^p ds\Big)^{\frac{1}{p}} \leq A\Big(\int_\Sigma |\nabla\varphi|^q ds\Big)^{\frac{1}{q}} + B\Big(\int_\Sigma |\varphi|^q ds\Big)^{\frac{1}{q}}, \tag{102}$$

onde $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n-1}$, $1 \leq q < n-1$ e $q \in \mathbb{R}$. Logo, pela eq. (101), temos

$$\Big(\int_\Sigma |\varphi|^{\frac{2(n-1)}{n-3}} ds\Big)^{\frac{n-3}{2(n-1)}} \leq [K(n-1,2)]\Big(\frac{\omega_{n-1}(\delta)}{|\Sigma|}\Big)^{\frac{1}{n-1}} \Big(\int_\Sigma |\nabla\varphi|^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}} + |\Sigma|^{-\frac{1}{n-1}} \Big(\int_\Sigma |\varphi|^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Em seguida, comparamos esta última desigualdade com a relação (102) para inferir que o coeficiente de $K(n-1,2)$ deve ser maior ou igual do que 1, pois $K(n-1,2)$ é a melhor constante de Sobolev, i.e. $\Big(\frac{\omega_{n-1}(\delta)}{|\Sigma|}\Big)^{\frac{1}{n-1}} \geq 1$. Levando em conta que $\omega_{n-1}(\delta) = \delta^{-\frac{n-1}{2}}\omega_{n-1}$, temos

$$(\omega_{n-1})^{\frac{2}{n-1}} \geq \delta|\Sigma|^{\frac{2}{n-1}}. \tag{103}$$

Substituindo o valor de $\delta = \frac{R^{\Sigma}}{(n-1)(n-2)}$ na Eq. (103) teremos

$$(n-1)(n-2)(\omega_{n-1})^{\frac{2}{n-1}} \geq R^{\Sigma}|\Sigma|^{\frac{2}{n-1}}.$$

Consequentemente, usando (97), deduzimos

$$Y(\mathbb{S}^{n-1},[g_{can}]) \geq R^{\Sigma}|\Sigma|^{\frac{2}{n-1}}. \tag{104}$$

Agora, integrando (104) sobre Σ e usando a Proposição 4.1, obtemos

$$\begin{aligned} Y(\mathbb{S}^{n-1},[g_{can}])|\Sigma|^{\frac{n-3}{n-1}} &\geq \int_{\Sigma} R^{\Sigma} ds \\ &= 2H\int_M f|\mathring{Ric}|^2 dV_g + \frac{n-2}{n-1}\big(H^2+\varepsilon(n-1)^2\big)|\Sigma| \\ &\geq C(R)|\Sigma|. \end{aligned} \tag{105}$$

Desde que $C(R)>0$, concluímos que

$$|\Sigma|^{\frac{2}{n-1}} \leq \frac{Y(\mathbb{S}^{n-1},[g_{can}])}{C(R)}. \tag{106}$$

Finalmente, da equação (105), note que ocorrendo a igualdade em (106), devemos ter

$$\int_M f|\mathring{Ric}|^2 dV_g = 0.$$

Isto é, (M^n,g) é uma variedade de Einstein. Então, usamos o Teorema 4.3 para concluir que M^n é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{H}^n$. Reciprocamente, se (M^n,g) é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{H}^n$, então $|\mathring{Ric}|=0$ e Σ é uma esfera $\mathbb{S}^{n-1}(r)$ de raio r. Pela Proposição 4.1, devemos ter

$$R^{\Sigma} = (n-1)(n-2)\varepsilon + \frac{n-2}{n-1}H^2. \tag{107}$$

Logo,

$$Ric^{\Sigma} = \frac{R^{\Sigma}}{n-1}g_{\Sigma} = (n-2)\Big(\frac{H^2+(n-1)^2\varepsilon}{(n-1)^2}\Big)g_{\Sigma}. \tag{108}$$

Portanto, por (108), obtemos $\delta = \frac{H^2+(n-1)^2\varepsilon}{(n-1)^2}$ e $r=\delta^{-1/2}$. Com isto, deduzimos que

$$\begin{aligned} C(R)|\Sigma|^{\frac{2}{n-1}} &= (n-2)\big(\frac{H^2+(n-1)^2\varepsilon}{(n-1)}\big)|\mathbb{S}^{n-1}(r)|^{\frac{2}{n-1}} \\ &= (n-2)\big(\frac{H^2+(n-1)^2\varepsilon}{(n-1)}\big)r^2(\omega_{n-1})^{\frac{2}{n-1}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (n-2)\Big(\frac{H^2+(n-1)^2\varepsilon}{(n-1)}\Big)\delta^{-1}(\omega_{n-1})^{\frac{2}{n-1}}\\
&= Y(\mathbb{S}^{n-1},[g_{can}]),
\end{aligned}
$$

como afirmado. $\square$

A grande importância do Teorema 4.8 é que ele nos fornece uma resposta parcial para a Questão 4.1. Mais precisamente, temos o seguinte corolário.

Corolário 4.1. *Seja (M^n, g, f), $n \geq 4$, uma métrica crítica de Miao-Tam, compacta, orientada, com bordo conexo Σ isométrico à esfera canônica $\mathbb{S}^{n-1}(r)$ de raio $r = \Big(\frac{(n-1)(n-2)}{C(R)}\Big)^{1/2}$, e curvatura escalar $R = n(n-1)\varepsilon$, onde $\varepsilon = -1, 0, 1$. Além disso, se $\varepsilon = -1$, assumimos que a curvatura média de Σ satisfaz $H > n-1$. Então (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica em alguma das formas espaciais simplesmente conexas $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{H}^n$.*

Demonstração: É suficiente observar que a escolha do raio

$$
r = \Big(\frac{(n-1)(n-2)}{C(R)}\Big)^{1/2} = \Big(\frac{(n-1)^2}{H^2+(n-1)^2\varepsilon}\Big)^{1/2}
$$

nos dá $r = \delta^{-1/2}$ em (108), o qual implica na igualdade em (100) do teorema anterior.

$\square$

Quando uma métrica crítica de Miao-Tam possui curvatura escalar não negativa é possível estimar o volume da variedade M^n de acordo com o corolário a seguir.

Corolário 4.2. *Com as mesmas condições do Teorema 4.8, porém $R \geq 0$, deduzimos*

$$
\Big(\frac{nH}{n-1}\Big)^{\frac{2}{n-1}}|M|^{\frac{2}{n-1}} \leq \frac{Y(\mathbb{S}^{n-1},[g_{can}])}{C(R)}. \tag{109}
$$

Ainda, a igualdade acontece em (109) *se, e somente se, (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração: Integrando (82) sobre M e usando a equação (85) chegamos à seguinte identidade

$$
|\Sigma| \;=\; \frac{nH}{n-1}|M| + \frac{RH}{n-1}\int_M f dV_g.
$$

Assim, desde que $R \geq 0$, obtemos

$$
|\Sigma| \geq \frac{nH}{n-1}|M|. \tag{110}
$$

Além disso, a igualdade é atingida se, e somente se, $R = 0$, pois $H > 0$ e $\int_M f dV_g > 0$.

Agora, afirmamos que

$$\left(\frac{nH}{n-1}\right)^{\frac{2}{n-1}} |M|^{\frac{2}{n-1}} \leq |\Sigma|^{\frac{2}{n-1}} \leq \frac{Y(\mathbb{S}^{n-1}, [g_{can}])}{C(R)}. \tag{111}$$

De fato, a primeira desigualdade segue de (110), para a segunda, basta aplicar o Teorema 4.8. Com isto, estabelecemos a desigualdade do corolário. Ainda, a igualdade ocorre no corolário citado se, e somente se, também ocorre em cada etapa da cadeia de desigualdades acima. Então, é suficiente usar a identidade (110) e o Teorema 4.8 para concluir a prova do corolário. □

Tratando agora de triplas estáticas, é possível mostrar que vale uma extensão do Teorema 4.5 para dimenão $n \geq 4$, supondo ainda que o bordo Σ seja uma variedade de Einstein.

Teorema 4.9. *Seja (M^n, g, f), $n \geq 4$, uma tripla estática, compacta, orientada, com bordo conexo Σ e curvatura escalar positiva $R = n(n-1)$. Suponha que o bordo Σ seja uma variedade de Einstein com curvatura escalar R^Σ positiva, então vale a seguinte estimativa*

$$|\Sigma| \leq \omega_{n-1}. \tag{112}$$

Além disso, a igualdade em (112) *é atingida somente para o hemisfério canônico $\mathbb{S}^n_+$.*

Demonstração: A prova deste teorema é similar aquela apresentada para o Teorema 4.8. De fato, a hipótese sobre o bordo Σ, assim como as etapas utilizadas no início da demonstração do Teorema 4.8, nos permite concluir que

$$(n-1)(n-2)(\omega_{n-1})^{\frac{2}{n-1}} \geq R^\Sigma |\Sigma|^{\frac{2}{n-1}}. \tag{113}$$

Integrando (113) sobre Σ, encontramos

$$(n-1)(n-2)(\omega_{n-1})^{\frac{2}{n-1}} |\Sigma|^{\frac{n-3}{n-1}} \geq \int_\Sigma R^\Sigma ds.$$

De acordo com a Proposição 4.2, temos $\int_\Sigma R^\Sigma ds = \frac{2}{|\nabla f|} \int_M f |\mathring{Ric}|^2 dV_g + (n-1)(n-2)|\Sigma|$. Isto nos permite encontrar a seguinte desigualdade

$$(n-1)(n-2)(\omega_{n-1})^{\frac{2}{n-1}} |\Sigma|^{\frac{n-3}{n-1}} \geq \frac{2}{|\nabla f|} \int_M f |\mathring{Ric}|^2 dV_g + (n-1)(n-2)|\Sigma|. \tag{114}$$

Desde que $\int_M f |\mathring{Ric}|^2 dV_g \geq 0$, concluímos que

$$|\Sigma| \leq \omega_{n-1}. \tag{115}$$

Ademais, se $|\Sigma| = \omega_{n-1}$, então por (114), devemos ter

$$\frac{2}{|\nabla f|}\int_M f|\mathring{Ric}|^2 dV_g = 0,$$

i.e., (M^n, g) é uma variedade de Einstein. Em seguida, usamos a identidade (94) para obter o seguinte problema com condição no bordo:

$$\mathring{\nabla}^2 f\Big|_{M^n} = 0, \qquad f|_\Sigma = 0. \tag{116}$$

Porém, usando o Teorema B obtido em Reilly (1980), concluímos que (M^n, g) é isométria a um hemisfério canônico $(\mathbb{S}^n_+, g_{can})$, como afirmado.

□

De acordo com Teorema 4.9, reobtemos uma resposta parcial para a *Cosmic no-hair conjecture* (Conjectura 4.1) no caso de dimensão $n \geq 4$, previamente obtida por Chruściel (2003). Tal resultado afirma que:

Corolário 4.3. *A Cosmic no-hair conjecture é verdadeira quando o bordo Σ é isométrico à esfera canônica $\mathbb{S}^{n-1}$.*

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho estudamos os pontos críticos de alguns funcionais Riemannianos com o intuito de encontrar resultados de rigidez envolvendo a curvatura escalar. No primeiro momento tratamos de funcionais quadráticos na curvatura e obtivemos êxito em resultados de rigidez com a hipótese da métrica crítica ser localmente conformemente plana ou Bach-*flat*. Vale ressaltar a importância da expressão (veja Proposição 3.4) que encontramos para o tensor de Bach de uma métrica crítica para estes funcionais.

No segundo momento, estudamos os pontos críticos do funcional volume, onde o objetivo era mostrar que os Teoremas 4.5 e 4.6 poderiam ser estendidos para dimensão $n \geq 4$. Novamente, obtivemos sucesso considerando que o bordo Σ seja uma variedade de Einstein. Tal condição sobre o bordo foi necessária para utilizar a desigualdade tipo Sobolev (Teorema 4.7) devido a Ilias (1983), uma vez que a técnica apresentada por Barbosa et al. (2016) para provar o Teorema 4.6 em dimensão 5 falhava em dimensão alta, visto que não possuímos uma fórmula de Chern-Gauss-Bonnet tal como existe em dimensão quatro. Com isto, obtivemos uma estimativa ótima para o volume do bordo de métricas críticas de Miao-Tam e métricas estáticas. Além disso, no caso da igualdade obtivemos rigidez, isto é, as bolas geodésicas nas formas espaciais $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$ admitem o volume máximo para o bordo, dentre todas a métricas críticas de Miao-Tam (com a hipótese sobre a geometria do bordo) e, para métricas estáticas, concluímos que o hemisfério canônico $\mathbb{S}^n_+$ possui o valor máximo para o volume do bordo. Isto nos permitiu responder parcialmente a questão 4.1 e a *Cosmic no-hair conjecture*, onde neste último, o resultado já foi previamente obtido por Chruściel (2003).

REFERÊNCIAS

ANDERSON, M. On the structure of solutions to the static vacuum Einstein equations. **Annales Henri Poincaré 1**, p. 995–1042, 2000.

ANDERSON, M.; CHRUSCIEL, P.; DELAY, E. Non-trivial, static, geodesically complete, vacuum space-times with a negative cosmological constant. **Journal of High Energy Physics**, v. 2002, p. 1–26, 2002.

AUBIN, T. Equations différentielles non-linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire. **J. Math. Pures Appl.**, v. 55, p. 269–296, 1976.

BACH, R. Zur Weylschen Relativitätstheorie und der Weylschen Erweiterung des Krümmungstensorbegriffs. **Mathematische Zeitschrift**, v. 9, p. 110–135, 1921.

BALTAZAR, H.; RIBEIRO JR., E. Critical metrics of the volume functional on manifolds with boundary. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 145, p. 3513–3523, 2017.

BARBOSA, E.; LIMA, L.; FREITAS, A. **The generalized Pohozaev-Schoen identity and some geometric applications** arXiv:1607.03073v1 [math.DG], 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1607.03073>. Acesso em: 13 mar. 2017.

BARROS, A.; DA SILVA, A. **A characterization of critical metrics for quadratic curvature functionals.**, 2017a. (Preprint).

BARROS, A.; DA SILVA, A. **Rigidity for critical metrics of the volume functional.** arXiv:1706.07367v1 [math.DG], 2017b. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1706.07367.pdf>. Acesso em: 24 jul. 2017.

BARROS, A.; DA SILVA, A. On locally conformally flat critical metrics for quadratic functionals. **Annals of Global Analysis and Geometry**, v. 52, n. 1, p. 1–9, 2017c.

BARROS, A.; DIÓGENES, R.; RIBEIRO JR., E. Bach-flat critical metrics of the volume functional on 4-dimensional manifolds with boundary. **The Journal of Geometric Analysis**, v. 25, p. 2698–2715, 2015.

BATISTA, R.; DIÓGENES, R.; RANIERI, M.; RIBEIRO JR., E. Critical metrics of the volume functional on compact three-manifolds with smooth boundary. **The Journal of Geometric Analysis**, v. 27, p. 1530–1547, 2017.

BERGER, M. Quelques formules de variation pour une structure riemannienne. **Annales Scientifiques de l' É.N.S.**, v. 3, n. 3, p. 285–294, 1970.

BESSE, A. **Einstein manifolds**. New York: Springer-Verlag, 1987.

BOUCHER, W.; GIBBONS, G.; HOROWITZ, G. Uniqueness theorem for anti-de Sitter spacetime. **Physical Review D**, v. 30, p. 2447–2451, 1984.

CATINO, G. Some rigidity results on critical metrics for quadratic functionals. **Calculus of Variations**, v. 54, p. 2921–2937, 2015.

CHASE, J. Event horizons in static scalar-vacuum space-times. **Commun. Math. Phys.**, v. 19, p. 276–288, 1970.

CHOW, B.; LU, P.; NI, L. **Hamilton's Ricci flow.** Providence: American Mathematical Society, 2006.

CHRUŚCIEL, P. T. **Remarks on rigidity of the de Sitter metric.**, 2003. Disponível em: <homepage.univie.ac.at/piotr.chrusciel/ papers/deSitter/deSitter2>. Acesso em: 10 mar. 2017.

CORVINO, J. Scalar Curvature Deformation and a Gluing Construction for the Einstein Constraint Equations. **Communications in Mathematical Physics**, v. 214, n. 1, p. 137–189, 2000.

CORVINO, J.; EICHMAIR, M.; MIAO, P. Deformation of scalar curvature and volume. **Mathematische Annalen**, v. 357, p. 551–584, 2013.

COTTON, E. Sur une généralisation du problème de la représentation conforme aux variétés à trois dimensions. **C. r. hebd. séances Acad. sci.**, v. 125, p. 225–228, 1897.

DIÓGENES, R. **Métricas críticas do funcional volume, volume mínimo e curvatura mínima em variedades de dimensão quatro.** 2015. 82 f. Tese (Doutorado em Matemática) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.

FREED, D.; GROISSER, D. The basic geometry of the manifold of Riemannian metrics and of its quotient by the diffeomorphism group. **Michigan Mathematical Journal**, v. 36, n. 3, p. 323–344, 1989.

GIBBONS, G.; HARTNOLL, S.; POPE, C. Bohm and Einstein-Sasaki metrics, black holes and cosmological event horizons. **Physical Review D**, v. 67, 2003.

GIL-MEDRANO, O.; MICHOR, P. The Riemannian manifold of all Riemannian metrics. **Quarterly Journal of Mathematics Oxford**, v. 42, n. 2, p. 183–202, 1991.

GURSKY, M.; VIACLOVSKY, J. A new variational characterization of three-dimensional space forms. **Inventiones Mathematicae**, v. 145, p. 251–278, 2001.

GURSKY, M.J.; VIACLOVSKY, J.A. Rigidity and stability of Einstein metrics for quadratic curvature functionals. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**,

v. 2015, n. 700, p. 37–91, 2015.

HIJAZI, O.; MONTIEL, S.; RAULOT, S. Uniqueness of de Sitter spacetime among static vacua with positive cosmological constant. **Annals of Global Analysis and Geometry**, v. 47, n. 2, p. 167–178, 2015.

HILBERT, D. Die Grundlagen der Physik. **Annales scientifiques de l' É.N.S.** , v. 4, p. 461–472, 1915.

HU, Z.; LI, H. A new variational characterization of n-dimensional space forms. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 356, n. 8, p. 3005–3023, 2003.

ILIAS, S. Constantes explicites pour les inégalités de Sobolev sur les variétés riemanniennes compactes. **Annales de l'institut Fourier**, v. 33, n. 2, p. 151–165, 1983.

ISRAEL, W. Event horizons in static vacuum space-times. **Physical Review**, v. 164, n. 5, p. 1776–1779, 1967.

KOBAYASHI, O. A differential equation arising from scalar curvature function. **Journal of the Mathematical Society of Japan**, v. 34, n. 4, p. 665–675, 1982.

KOBAYASHI, O.; OBATA, M. Conformally-flatness and static space-time. *In*: HANO, J. and MORIMOTO, A. and MURAKAMI, S. and OKAMOTO, K. and OZEKI, H. (Org.). **Manifolds and Lie Groups.** Boston, MA: Birkhäuser, 1981. p. 197-206.

LAFONTAINE, J. Sur la géométrie d'une généralisation de l'équation différentielle d'Obata. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, v. 62, n. 1, p. 63–72, 1983.

MIAO, P.; TAM, L.-F. On the volume functional of compact manifolds with boundary with constant scalar curvature. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, v. 36, n. 2, p. 141–171, 2009.

MIAO, P.; TAM, L.-F. Einstein and conformally flat critical metrics of the volume functional. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 363, n. 6, p. 2907–2937, 2011.

OKUMURA, M. Hypersurfaces and a pinching problem on the second fundamental tensor. **American Journal of Mathematics**, v. 96, n. 1, p. 207–213, 1974.

PETERSEN, P. **Riemannian Geometry.** 2nd edition. GTM 171. New York: Springer-Verlag, 2006.

REILLY, R. On the hessian of a function and the curvatures of its graph. **The Michigan Mathematical Journal**, v. 20, n. 4, p. 373–383, 1974.

REILLY, R. Geometric applications of the solvability of Neumann problems on a Riemannian manifold. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, v. 75, n. 1, p. 23–29, 1980.

SCHOEN, R. Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature. **Journal of Differential Geometry**, v. 20, n. 2, p. 479–495, 1984.

SCHOEN, R. **Variational theory for the total scalar curvature functional for riemannian metrics and related topics. In: Topics in Calculus of Variations. Lectures Notes in Mathematics, vol 1365.** Springer, Berlin, Heidelberg, 1989.

SCHOUTEN, J. Über die konforme Abbildung n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten mit quadratischer Maßbestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer Maßbestimmung. **Mathematische Zeitschrift**, v. 11, p. 58–88, 1921.

SHEN, Y. A note on Fischer-Marsden's conjecture . **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 125, n. 3, p. 901–905, 1997.

SMOLENTSEV, N. Spaces of Riemannian metrics. **Journal of Mathematical Sciences**, v. 142, p. 2436–2519, 2007.

TANNO, S. Deformations of Riemannian metrics on 3-dimensional manifolds. **Tôhoku Mathematical Journal**, v. 27, n. 3, p. 437–444, 1975.

TRUDINGER, N. Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds. **Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa**, v. 22, n. 2, p. 265–274, 1968.

VIACLOVSKI, J. **Critical metrics for Riemannian curvature functionals.** arXiv:1405.6080v1 [math.DG], 2014. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1405.6080.pdf>. Acesso em: 11 fev. 2017.

WALD, R. **General Relativity.** The University of Chicago Press, Chicago and London, 1984.

WANG, X. On the uniqueness of the ADS spacetime. **Acta Mathematica Sinica, English Series**, v. 21, n. 4, p. 917–922, 2005.

WEYL, H. Reine infinitesimalgeometrie. **Mathematische Zeitschrift**, v. 2, p. 384–411, 1918.

YAMABE, H. On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds. **Osaka Mathematical Journal**, v. 12, n. 1, p. 21–37, 1960.