UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ROSA TAYANE DE VASCONCELOS

O TENSOR DE RICCI E CAMPOS DE KILLING DE ESPAÇOS SIMÉTRICOS

FORTALEZA

2017

ROSA TAYANE DE VASCONCELOS

O TENSOR DE RICCI E CAMPOS DE KILLING DE ESPAÇOS SIMÉTRICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

V451t Vasconcelos, Rosa Tayane de.
O tensor de Ricci e campos de Killing de espaços simétricos / Rosa Tayane de Vasconcelos. – 2017.
81 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2017.
Orientação: Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto .

1. Espaços Simétricos. 2. Ações de Grupo Transitivas. 3. Campos de Killing. 4. Espaços Homogêneos. 5. Métricas G-invariantes. I. Título.

CDD 510

ROSA TAYANE DE VASCONCELOS

O TENSOR DE RICCI E CAMPOS DE KILLING DE ESPAÇOS SIMÉTRICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovada em: /09/2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ulisses Lima Parente
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dedico este trabalho aos meus familiares e amigos. Em especial ao meu grande amigo e namorado Esdras, que sempre se mostrou meu porto seguro perante as dificuldades durante esse percusso.

AGRADECIMENTOS

À Deus por ter me mantido no caminho do bem e por ter me dado tantas oportunidades de vitória.
Aos meus pais por me trazerem à vida.
Aos meus tios Patrícia e Heleno que não pouparam esforços para me ajudar durante todos os momentos que precisei;
Ao meu orientador Antonio Caminha pela ajuda em todas as etapas deste trabalho e do curso de forma geral;
Aos membros da banca Jonatan Floriano da Silva e Ulisses Lima Parente, pela disponibilidade.
A todos os professores que foram cruciais em minha formação matemática, em especial Aníbal de Oliveira, João Luiz, Airton Lima, Eduardo Garcez, Antonio Caminha, Fernanda Camargo, Diego Moreira, Darlan Girão e Alexandre Fernandes.
Aos meus amigos matemáticos Davi Lopes, Danuso Rocha, Diego Silva, Felipe Fernandes, Walner Mendonça, Janaine Bezerra e Esdras Muniz pelos inúmeros momentos e ensinamentos compartilhados;
Ao CNPq pelo apoio financeiro.

"Se consegui ver mais longe é porque estava sobre os ombros de gigantes..."(ISAAC NEWTON)

RESUMO

Este trabalho traz uma introdução suave e autocontida ao estudo dos aspectos mais básicos de espaços simétricos, tendo como objetivo final a caracterização dos campos de Killing e do tensor de Ricci de tais variedades riemannianas.
Vários dos resultados obtidos nos capítulos iniciais não são encontrados, na literatura de Geometria Diferencial, de maneira tão acessível e autocontida como apresentados aqui. Com isso, acreditamos que o trabalho reveste-se de alguma relevância didática, por oferecer aos alunos interessados no estudo de espaços simétricos um primeiro contato relativamente suave.
Em linhas gerais, veremos espaços simétricos como variedades homogêneas G/H, onde G é um grupo de Lie e H um subgrupo de Lie fechado de G, tais que a aplicação natural $\pi : G \to G/H$ seja uma submersão riemanniana. Através dela, descrevemos relações entre a curvatura, o tensor de Ricci e as geodésicas de G e G/H. Para nossos propósitos, a observação crucial é que, sob certas hipóteses, garantimos a existência, em G/H, de uma métrica cujas translações à esquerda são isometrias. Portanto, uma família a um parâmetro de tais isometrias dá origem a um campo de Killing que, por sua vez, restrito a geodésicas torna-se um campo de Jacobi. Apresentamos expressões para esses campos de Jacobi, mostrando que os mesmos só dependem dos autovalores do operador linear $T_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ dado por $T_X = (ad_X)^2$, para certos campos $X \in \mathfrak{g}$.

Palavras-chave: Espaços simétricos. Ações de grupo transitivas. Campos de Killing. Variedades quociente. Submersões riemannianas. Espaços homogêneos. Métricas G-invariantes.

ABSTRACT

This work brings a smooth and self-contained introduction to the study of the most basic aspects of symmetric spaces, having as its final goal the characterization of the Killing vector fields and of the Ricci tensor of such riemannian manifolds.

Several of the results presented in the initial chapter are not easily found, in the Diferential Geometry literature, in a way as accessible and self-contained as here. This being said, we believe that this work embodies some didactic relevance, for it offers students interested in symmetric spaces a relatively smooth first contact.

We shall generally look at symmetric spaces as homogeneous manifolds G/H, where G is a Lie group and H is a closed Lie subgroup of G, such that the natural mapping $\pi : G \to G/H$ is a riemannian submersion. Ultimately, this map allows us to describe the relationships between the curvature, the Ricci tensor and the geodesics of G and G/H. For our purposes, the crucial remark is that, under appropriate circumstances, one guarantees the existence, in G/H, of a metric for which left translations are isometries. Hence, a one-parameter family of such isometries gives rise to a Killing vector field, which turn into a Jacobi vector field when restricted to a geodesic. We present explicit expressions for such Jacobi vector fields, showing that they only depend on the eigenvalues of the linear operator $T_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ given by $T_X = (ad_X)^2$, for certain vector fields $X \in \mathfrak{g}$.

Keywords: Symmetric spaces. Transitive group actions. Killing fields. Coset manifolds. Riemannian submersions. Homogeneous spaces. G-invariant metrics.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esta dissertação teve como base as notas "*The manifold structure of G/H*", "*Averaging on compact Lie groups*" e "*The Ricci tensor and Killing vector fields in Riemannian symmetric spaces*". (EBERLEIN 2005).

A teoria de espaços simétricos teve seu início em 1926, com Élie Cartan, e foi por ele desenvolvida até o final da mesma década. Inicialmente, Cartan definia um espaço simétrico como uma variedade riemanniana cujo tensor curvatura era invariante por transporte paralelo, ou, equivalentemente, tinha derivada covariante nula.

Dadas variedades riemannianas M e N de mesma dimensão, e uma isometria linear $f : T_pM \longrightarrow T_qN$, onde $p \in M$ e $q = f(p) \in N$, consideremos uma vizinhança normal U de p em M tal que $\exp_q$ está definida em $f(\exp_p^{-1}(U))$; então, a aplicação

$$\phi_f = \exp_q \circ f \circ \exp_p^{-1} : U \longrightarrow N$$

é chamada a aplicação polar de f em U. Aplicações polares sempre existem para vizinhanças U suficientemente pequenas.

Voltemos, agora, à definição de espaço simétrico inicialmente utilizada por Cartan. Seja M uma variedade riemanniana, $p \in M$ e $f : T_pM \longrightarrow T_pM$ a isometria linear dada por $f(v) = -v$. Denotando por ζ_p a aplicação polar associada e escolhendo uma vizinhança aberta U de p de tal modo que $\zeta_p : U \longrightarrow U$ seja um difeomorfismo, dizemos que ζ_p é uma simetria local de M em p. É possível provar que M é um espaço simétrico, no sentido inicialmente definido por Cartan se, e somente se, para cada ponto $p \in M$ a simetria local ζ_p é uma isometria. Essa característica chamou a atenção de Cartan de tal modo que, a partir de 1929, ele a colocou em primeiro plano na definição de espaço simétrico. Obviamente, havia ainda uma subclasse de tais espaços a analisar, qual seja uma variedade riemanniana M seria dita um espaço (globalmente) simétrico se a simetria local em cada ponto fosse induzida por uma isometria global, necessariamente de ordem 2. Apesar de, naquela época, Cartan não fazer uma distinção nítida entre os casos local e global, é possível notar, através de alguns de seus artigos, que em sua mente essa distinção estava presente.

Neste trabalho, começaremos mostrando que se G é um grupo de Lie e H um subgrupo fechado, é possível munir o espaço homogêneo G/H de uma topologia e uma estrutura de variedade diferenciável. Por vezes, veremos que um espaço construído dessa forma se comporta como uma generalização natural de um grupo de Lie. Veremos, ainda, a estreita relação que existe entre espaços simétricos e variedades quociente, e também como podemos utilizar grupos de Lie para entender melhor a estrutura de espaços simétricos. Em particular, tal abordagem nos permitirá deduzir informações sobre a curvatura, as geodésicas e os campos de Killing de tais espaços.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: no capítulo 2, apresentamos alguns fatos preliminares que serão usados ao longo do texto. Os capítulos 3 e 4 formam a parte mais técnica do trabalho. No primeiro deles, inicialmente definimos variedades homogêneas como espaços topológicos, depois construímos cartas coordenadas afim de torná-las variedades diferenciáveis. Por fim, mostramos como usar ações de grupos para obter mais exemplos de variedades homogêneas. No segundo, apresentamos algumas proposições que garantirão a existência de um tipo particular de estrutura riemanniana em um espaço homogêneo G/H, a chamaremos de uma métrica G-invariante.

No último capítulo, veremos que uma métrica G-invariante em G/H torna as translações à esquerda em G/H isometrias, de sorte que seus fluxos darão origem a campos de Killing. Uma vez que campos de Killing restritos a geodésicas são campos de Jacobi, entenderemos aqueles analisando estes últimos. Isso será feito no contexto particular de espaços (globalmente) simétricos, e um subproduto de nossa apresentação será uma descrição do tensor de Ricci de um tal espaço em termos da forma de Killing do grupo G.

2 PRELIMINARES

O principal objetivo deste capítulo é apresentar as definições e resultados que serão utilizados ao longo do restante dessa dissertação. Isso inclui grupos de Lie, subgrupos de Lie, subgrupos fechados, álgebras de Lie e submersões riemannianas. Como de costume em Geometria Diferencial, *diferenciável* significará suave (isto é, de classe C^∞).

2.1 Grupos de Lie

Iniciamos esta seção fazendo uma breve explanação sobre grupos de Lie. Para uma exposição mais ampla e detalhada veja os capítulos 2 e 20 de LEE (2003).

Definição 2.1. *Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável G que é também um grupo no sentido algébrico, com a propriedade de que as aplicações de multiplicação $\mu : G \times G \longrightarrow G$ e inversão $i : G \longrightarrow G$, dadas por $\mu(g\,, h) = gh$ e $i(g) = g^{-1}$, são ambas diferenciáveis.*

Dados $m, n \in \mathbb{N}$, denotemos por $M(m \times n, \mathbb{R})$ o espaço vetorial aditivo das matrizes reais $m \times n$. Munindo $M(m \times n, \mathbb{R})$ com a topologia e estrutura diferenciável induzidas por sua identificação natural com $\mathbb{R}^{mn}$, tornamos $M(m \times n, \mathbb{R})$ uma variedade diferenciável mn-dimensional, difeomorfa a $\mathbb{R}^{mn}$. Denotamos $M(n \times n, \mathbb{R})$ simplesmente por $M(n, \mathbb{R})$.

Exemplo 2.2. *Seja $GL(n; \mathbb{R})$ o grupo (com a multiplicação de matrizes como operação) das matrizes invertíveis $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$, munido com a topologia induzida por $M(n; \mathbb{R})$. A continuidade da função determinante, $\det : M(n; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, garante que $GL(n; \mathbb{R})$ é um aberto de $M(n; \mathbb{R})$. Munindo $GL(n; \mathbb{R})$ com a estrutura diferenciável induzida por $M(n; \mathbb{R})$, é fácil verificar que $GL(n; \mathbb{R})$ é um grupo de Lie.*

Definição 2.3. *Se G e H são grupos de Lie, um homomorfismo de grupos de Lie $F : G \longrightarrow H$ é uma aplicação diferenciável que é também um homomorfismo de grupos. No caso em que F é um difeomorfismo (o que implica que sua inversa também é um homomorfismo de grupos de Lie), F é chamada de isomorfismo de grupos de Lie. Neste caso, dizemos que G e H são grupos de Lie isomorfos. Se $F : G \longrightarrow G$ é um isomorfismo de grupos de Lie, dizemos que F é um automorfismo de grupos de Lie.*

Exemplo 2.4. *A função determinante $\det : GL(n; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$ é uma função diferenciável, já que $\det A$ é uma função polinomial nas entradas da matriz A. Como $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, temos que $\det$ é também um homomorfismo de grupos de Lie.*

No que segue, salvo menção em contrário, G denotará um grupo de Lie com elemento neutro e e aplicações diferenciáveis de multiplicação μ e de inversão i.

Exemplo 2.5. *Fixado $g \in G$, as translações à esquerda $L_g : G \longrightarrow G$ e à direita $R_g : G \longrightarrow G$, dadas por $L_g(x) = \mu(g, x) = gx$ e $R_g(x) = \mu(x, g) = xg$ são difeomorfismos, apesar de não serem automorfismos de grupo de Lie. De fato, sendo $i_g : G \longrightarrow G \times G$ a inclusão, $i_g(x) = (g, x)$, temos que $L_g = \mu \circ i_g$. Logo, por ser composta de aplicações diferenciáveis, L_g é diferenciável. Por outro lado, como $L_g \circ L_{g^{-1}} = L_{g^{-1}} \circ L_g = Id_G$, segue que L_g é, de fato, um difeomorfismo de G, tal que $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$. De modo análogo, é possível verificar que a translação à direita R_g é um difeomorfismo de G. Para $g, h, x \in G$, a associatividade da operação do grupo G fornece $L_{gh}(x) = (gh)x = g(hx) = L_g(hx) = L_g \circ L_h(x)$. Portanto, $L_{gh} = L_g \circ L_h$, para quaisquer $g, h \in G$. A mesma propriedade vale para translações à direita, e é fácil verificar que translações à direita comutam com translações à esquerda, isto é, $L_g \circ R_h = R_h \circ L_g$, para $g, h \in G$ quaisquer.*

Para $g \in G$, a composta $R_g \circ L_{g^{-1}} = L_{g^{-1}} \circ R_g$ é chamada de conjugação por g, sendo denotada por C_g. Denotamos por Ad_g sua diferencial, isto é, $Ad_g = (C_g)_*$. Dessa forma, se $K \subset G$, denotamos por $Ad(K)$ o conjunto de todas as aplicações Ad_g, com $g \in K$. Note que, para todo $g \in G$, a aplicação Ad_g é um automorfismo de grupos de Lie. Isso decorre da regra da cadeia aplicada à igualdade (facilmente verificável) $C_{gh} = C_g \circ C_h$.

Passemos, agora, à definição de um objeto algébrico que apresenta enorme importância no estudo de grupos de Lie.

Uma *álgebra de Lie* (real) é definida como um espaço vetorial $\mathfrak{g}$, munido de uma aplicação $\mathbb{R}$-bilinear e antissimétrica $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ para a qual vale a *identidade de Jacobi*:

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0,$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Tal aplicação é denominada o *colchete de Lie* de $\mathfrak{g}$.

Uma *subálgebra de Lie* de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um subespaço vetorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, para todos $X, Y \in \mathfrak{h}$. Em particular, $\mathfrak{h}$ é ela mesma uma álgebra de Lie, quando munido com a restrição do colchete de Lie de $\mathfrak{g}$.

Exemplo 2.6. *Se M é uma variedade diferenciável, então o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis em M, que denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$, é uma álgebra de Lie com o colchete usual de campos de vetores suaves como colchete de Lie.*

Exemplo 2.7. *O espaço vetorial $M(n; \mathbb{R})$, das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$, é uma álgebra de Lie com o colchete de Lie de matrizes, $[A, B] = AB - BA$, para todas $A, B \in M(n; \mathbb{R})$. De agora em diante, sempre que considerarmos $M(n; \mathbb{R})$ como álgebra de Lie, nós a denotaremos por $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$ e suporemos que o colchete de Lie é definido desta forma.*

Exemplo 2.8. *Seja $\mathfrak{o}(n)$ o subespaço vetorial de $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$ formado pelas matrizes reais $n \times n$ antissimétricas, ou seja, tais que $A + A^T = 0_n$, onde $(\cdot)^T$ denota transposição de matrizes e 0_n denota a matriz nula $n \times n$. Munindo $\mathfrak{o}(n)$ com o colchete de Lie de* *matrizes, temos para* $A, B \in \mathfrak{o}(n)$ *que*

$$\begin{aligned} [A,B] + [A,B]^T &= (AB - BA) + (AB - BA)^T \\ &= (AB - BA) + (B^T A^T - A^T B^T) \\ &= (AB - BA) + (-B)(-A) - (-A)(-B) = 0_n. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathfrak{o}(n)$ *é fechado para o colchete de Lie de matrizes, de sorte que* $\mathfrak{o}(n)$ *é uma subálgebra de Lie de* $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$*.*

É um fato central para o desenvolvimento da teoria dos grupos de Lie que todo grupo de Lie G tem naturalmente associada a si uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(G)$. Para apresentarmos tal álgebra, começamos definindo um campo $X \in \mathfrak{X}(G)$ como *invariante à esquerda* se X for L_g-relacionado a si mesmo, para todo $g \in G$. De outra forma, X é invariante à esquerda se $(L_g)_{*_h} X_h = X_{L_g(h)}$, para todos $g, h \in G$. Se $X, Y \in G$ são campos invariantes à esquerda e $a, b \in \mathbb{R}$, é imediato que $a\,X + b\,Y$ também é invariante à esquerda; por outro lado, a naturalidade do colchete de Lie de campos de vetores (veja, por exemplo, a Proposição 4.16 de LEE (2003)) garante que $[X, Y]$ também é invariante à esquerda. Portanto, de acordo com a discussão acima, podemos seguir para a próxima definição.

Definição 2.9. *A álgebra de Lie de* G*, denotada por* $\mathit{Lie}\,(G)$ *ou simplesmente por* $\mathfrak{g}$*, sempre que não houver perigo de confusão, é a subálgebra de Lie de* $\mathfrak{X}(G)$ *formada pelos campos invariantes à esquerda.*

Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Dado $X_e \in T_e\,G$, podemos definir um campo X em G, a partir desse vetor, pondo $X_g = (L_g)_{*_e} X_e$, para todo $g \in G$, e não é difícil verificar que X é suave. Ademais, X é invariante à esquerda, visto que a regra da cadeia fornece, para $g, h \in G$,

$$(L_h)_{*_g} X_g = (L_h)_{*_g}((L_g)_{*_e} X_e) = (L_{hg})_{*_e} X_e = X_{hg} = X_{L_h(g)}.$$

Uma vez que o campo X construído acima é claramente o único elemento de $\mathfrak{g}$ cujo valor em e coincide com X_e, podemos denotar tal campo X por $\widetilde{X_e}$. Dessa forma, fica bem definida a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \ : T_e\,G &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ X_e &\longmapsto \widetilde{X_e} \end{aligned}$$

a qual é mesmo um isomorfismo de espaços vetoriais (veja, por exemplo, o Teorema 4.20

de LEE (2003)). Em particular,

$$\dim \mathfrak{g} = \dim T_e\, G = \dim G.$$

Exemplo 2.10. *Como caso particular do que foi visto acima, temos um isomorfismo de espaços vetoriais entre* $Lie(GL(n;\mathbb{R}))$ *e* $T_{I_n}\, GL(n;\mathbb{R})$*, onde* I_n *denota a matriz identidade de ordem* n*. Por outro lado, como* $GL(n;\mathbb{R})$ *é um subvariedade aberta do espaço vetorial* $M(n;\mathbb{R})$*, temos uma identificação natural entre* $T_{I_n}\, GL(n;\mathbb{R})$ *e o próprio* $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$*. É possível mostrar que tal identificação respeita colchetes de Lie; com isso, sempre que conveniente identificaremos a álgebra de Lie de* $GL(n;\mathbb{R})$ *com* $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$*. Analogamente, se* V *é um espaço vetorial real* n*-dimensional, podemos identificar* $Lie(GL(V))$ *e* $\mathfrak{gl}(V)$*, sempre que necessário.*

Definição 2.11. *Um subgrupo* H *de* G *é dito um subgrupo de Lie de* G *se é possível dotá-lo de uma topologia e uma estrutura diferenciável que o tornam, ao mesmo tempo, um grupo de Lie e uma subvariedade imersa de* G*.*

Exemplo 2.12. *Seja* $O(n,\mathbb{R}) \subset GL(n,\mathbb{R})$ *o conjunto das matrizes ortogonais (reais) de ordem* n*. Dadas* $A, B \in O(n,\mathbb{R})$*, temos* $(AB^{-1})^{-1} = BA^{-1} = BA^T = (AB^T)^T$*, de sorte que* $O(n,\mathbb{R})$ *é um subgrupo de* $GL(n,\mathbb{R})$*. A discussão a seguir garante que* $O(n,\mathbb{R})$ *é subgrupo de Lie fechado e mergulhado de* $M(n,\mathbb{R})$*.*

Comecemos denotando por $S(n,\mathbb{R})$ *o subespaço de* $M(n,\mathbb{R})$*, de dimensão* $n(n+1)/2$*, das matrizes simétricas de ordem* n*. Definindo* $\Phi : GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow S(n,\mathbb{R})$ *por*

$$\Phi(X) = X^T X,$$

é imediato que $O(n,\mathbb{R}) = \Phi^{-1}(I_n)$*; em particular, como* Φ *é uma função contínua e* I_n *é fechado em* $S(n,\mathbb{R})$*, temos que* $O(n,\mathbb{R})$ *é fechado em* $GL(n,\mathbb{R})$*. Também,* $O(n,\mathbb{R})$ *é limitado, uma vez que cada coluna de uma matriz ortogonal tem norma 1, o que implica que a norma euclidiana de* $A \in O(n,\mathbb{R})$ *é* $(\sum_{ij}(A_i^j)^2)^{1/2}) = \sqrt{n}$*. Portanto,* $O(n,\mathbb{R})$ *é compacto.*

Continuando, mostremos que a matriz identidade I_n *é valor regular de* Φ*, donde seguirá que* $O(n,\mathbb{R}) = \Phi^{-1}(I_n)$ *é uma subvariedade mergulhada de* $GL(n,\mathbb{R})$ *com* $\dim(O(n,\mathbb{R})) = n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$*. Para o que falta, fixe* $X \in O(n,\mathbb{R})$*; identificando os espaços tangentes* $T_X\, GL(n,\mathbb{R})$ *e* $T_{\Phi(X)}\, S(n,\mathbb{R})$ *com* $M(n,\mathbb{R})$ *e* $S(n,\mathbb{R})$*, respectivamente, não é difícil verificar que:*

$$\Phi_{*X}(V) = V^T X + X^T V \qquad \forall,\ V \in M(n,\mathbb{R}).$$

Agora, dada $C \in S(n,\mathbb{R})$, podemos escrever

$$C = \frac{C}{2} + \frac{C}{2} = \frac{C^T X^T X}{2} + \frac{X^T X C}{2} = \left(\frac{XC}{2}\right)^T X + X^T \frac{XC}{2} = \Phi_{*_X}\left(\frac{XC}{2}\right),$$

de modo que Φ_* é sobrejetiva.

Se H é um subgrupo de Lie de G, poderíamos esperar que a álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de H fosse uma subálgebra da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Contudo, como elementos de $\mathfrak{h}$ são campos vetoriais definidos em H, e não em G, rigorosamente falando esse não é o caso. Não obstante, $\mathfrak{h}$ pode ser canonicamente identificada a uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, da seguinte forma: é imediato verificar que todo $X_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}$ se estende unicamente a um campo $\tilde{X}_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{g}$, de maneira tal que a aplicação

$$\begin{aligned} \iota : \quad \mathfrak{h} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ X_{\mathfrak{h}} &\longmapsto \tilde{X}_{\mathfrak{h}} \end{aligned}$$

é injetiva e respeita colchetes de Lie. Assim, se pensarmos em $\mathfrak{h}$ como uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, não estaremos cometendo um erro grave.

Exemplo 2.13. *Pelo Exemplo 2.12,o subgrupo $O(n,\mathbb{R})$ de $GL(n,\mathbb{R})$ é igual ao conjunto de nível $\Phi^{-1}(I_n)$, onde $\Phi : GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow S(n,\mathbb{R})$ é a aplicação tal que $\Phi(X) = X^T X$; dessa forma, $T_{I_n} O(n,\mathbb{R}) = \ker \Phi_{*_{I_n}}$. Mas, como $\Phi_{*_{I_n}} V = V^T + V$, temos*

$$T_{I_n} O(n,\mathbb{R}) = \{V \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \,:\, V^T + V = 0\}.$$

Denotando esse subespaço de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ por $\mathfrak{o}(n)$, nossas identificações anteriores nos permitem considerar $\mathfrak{o}(\mathfrak{n})$ como uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{n},\mathbb{R})$, a qual é canonicamente isomorfa a Lie$(O(n,\mathbb{R}))$.

Recordemos que, se M e N são variedades riemannianas, um difeomorfismo $f : M \longrightarrow N$ é dito uma *isometria* se, para todo $p \in M$, tivermos

$$\langle\langle df_p(v_2), df_p(v_1)\rangle\rangle_{f(p)} = \langle v_1, v_2\rangle_p,$$

onde v_1 e v_2 são vetores arbitrários de T_pM e $\langle\, ,\, \rangle$, $\langle\langle\, ,\, \rangle\rangle$ representam as métricas de M e N, respectivamente. O resultado a seguir é o conteúdo da Proposição 3.62 de O'NEILL (1983).

Proposição 2.14. *Sejam $\varphi, \psi : M \longrightarrow N$ isometrias locais de uma variedade riemanniana conexa M em uma variedade riemanniana N. Se existe um ponto $p \in M$ tal que $\varphi_{*_p} = \psi_{*_p}$ (e, portanto $\varphi(p) = \psi(p)$), então $\varphi = \psi$.*

Definição 2.15. *Uma métrica em um grupo de Lie G é invariante à esquerda se L_g é* *uma isometria, para todo $g \in G$. De modo análogo, se R_g é uma isometria para todo $g \in G$, dizemos que a métrica é invariante à direita. Por fim, uma métrica em G que é simultaneamente invariante à esquerda e à direita é dita biinvariante.*

Para a proposição a seguir, é possível provar que, dado um grupo de Lie G com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $X \in \mathfrak{g}$, a curva integral de X que passa por e tem domínio maximal $\mathbb{R}$. Nesse caso, denotando por $F : \mathbb{R} \to G$ tal curva integral, também é possível provar que F é um homomorfismo de grupos de Lie, de forma que costumamos nos referir a ela como o *subgrupo a um parâmetro de G gerado por X*.

Proposição 2.16. *Seja G um grupo de Lie conexo, munido de um tensor métrico invariante à esquerda $\langle\ ,\ \rangle$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\langle\ ,\ \rangle$ é invariante à direita, portanto biinvariante.

(b) $\langle\ ,\ \rangle$ é $Ad(G)$-invariante, isto é, para cada $g \in G$ a aplicação $Ad_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é uma isometria linear.

(c) A aplicação inversão $g \to g^{-1}$ é uma isometria de G.

(d) $\langle X, [Y, Z]\rangle = \langle [X, Y], Z\rangle$, para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

(e) $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$, para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

(f) As geodésicas que partem de e são precisamente os subgrupos a um parâmetro de G.

Demonstração. Veja a Proposição 11.9 de O'NEILL (1983). □

A propriedade do item (d) da proposição anterior é conhecida como a *identidade de Weyl*. Para nossos propósitos, é importante observar que se G é um grupo de Lie (não necessariamente conexo) munido de uma métrica para qual identidade de Weyl se verifica, então a propriedade do item (b) ainda permanece válida. Nesse sentido, a hipótese de conexidade é indispensável somente para a validade da afirmação recíproca.

A curvatura R de uma variedade riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão riemanniana de M. É possível mostrar que, para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o operador curvatura $R(X, Y)$ é linear e que R é bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, isto é,

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$
$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2)$$

para funções diferenciáveis f, g definidas em M e campos $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$. Dado $p \in M$, se $\sigma \subset T_pM$ é um subespaço bi-dimensional do espaço tangente T_pM e $x, y \in \sigma$

são dois vetores linearmente independentes

$$K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$ (veja a Proposição IV.3.11 de DO CARMO (2015)). Com isso, o número real $K(x,y) = K(\sigma)$ é chamado *curvatura seccional* de σ em p. O resultado a seguir apresenta expressões mais simples para o tensor curvatura e a curvatura seccional de um grupo de Lie munido de uma métrica biinvariante.

Proposição 2.17. *Seja G um grupo de Lie munido com a métrica biinvariante $\langle\ ,\ \rangle$, $R(X,Y)Z = R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z$ então:*

(a) $R(X,Y)Z = \frac{1}{4}[[X,Y],Z]$ para todos $X,Y,Z \in \mathfrak{g}$.

(b) Se X e Y geram um plano não degenerado em $\mathfrak{g}$ e $|X \wedge Y|^2 := |X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2$, então

$$K(X,Y) = \frac{|[X,Y]|^2}{4|X\wedge Y|^2}.$$

Em particular, $K \geq 0$.

Demonstração.
(a) Pela proposição anterior $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$, segue que

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z \\ &= \frac{1}{4}[Y,[X,Z]] - \frac{1}{4}[X,[Y,Z]] + \frac{1}{2}[[X,Y],Z] \\ &= \frac{1}{4}[[Z,X],Y] + \frac{1}{4}[[Y,Z],X] + \frac{1}{2}[[X,Y],Z]. \end{aligned}$$

Por outro lado, a identidade de Jacobi nos diz que $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y] = 0$; então, $\frac{1}{4}[[Z,X],Y] + \frac{1}{4}[[Y,Z],X] = -\frac{1}{4}[[X,Y],Z]$. Agora, é imediato que $R(X,Y)Z = \frac{1}{4}[[X,Y],Z]$.

(b) A identidade de Weyl garante que

$$\langle R(X,Y)X, Y\rangle = \frac{1}{4}\langle[[X,Y],X],Y\rangle = \frac{1}{4}\langle[X,Y],[X,Y]\rangle.$$

A partir daí, o resultado desejado segue prontamente. □

Se G é um grupo de Lie abeliano, é possível mostrar que sua álgebra de Lie também é abeliana, isto é, que $[X,Y] = 0$ para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$. Portanto, se um grupo de Lie abeliano estiver munido com uma métrica biinvariante, então é imediato, a partir da fórmula apresentada acima para a curvatura seccional de G, que $K = 0$.

Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie e $X \in \mathfrak{g}$, definimos $ad_X : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ por $ad_X(Y) =$

$[X, Y]$. Evidentemente, ad_X é um operador linear e, pela identidade de Jacobi, temos

$$ad_Z([X, Y]) = [ad_Z(X), Y] + [X, ad_Z(Y)].$$

Também pela identidade de Jacobi, é imediato verificar que $ad_{[X,Y]} = [ad_X, ad_Y]$.

Definição 2.18. *A forma de Killing de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é a aplicação $B : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$B(X, Y) = \operatorname{tr}(ad_X ad_Y).$$

Lema 2.19. *A forma de Killing B de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um forma bilinear simétrica, invariante pelos automorfismos de $\mathfrak{g}$ e tal que $B([X, Y], Z) = B(X, [Y, Z])$, para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.*

Demonstração. O fato de B ser bilinear segue diretamente da linearidade da aplicação $X \mapsto ad_X$. Que B é simétrica, segue de $\operatorname{tr}(ST) = \operatorname{tr}(TS)$, para todos os operadores lineares $T, S : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

Agora, seja β um automorfismo de $\mathfrak{g}$, ou seja, um isomorfismo linear que preserva colchetes de Lie. Então, $\beta \circ ad_X = ad_{\beta(X)} \circ \beta$ ou, o que é o mesmo, $ad_{\beta(X)} = \beta \circ ad_X \circ \beta^{-1}$. Mas, como o traço de um operador linear é invariante por semelhanças, segue daí que

$$B(\beta(X), \beta(Y)) = \operatorname{tr}\big(\beta \circ ad_X ad_Y \circ \beta^{-1}\big) = B(X, Y).$$

Finalmente, como $ad_{[X,Y]} = [ad_X, ad_Y]$, apelando novamente para as propriedades do traço, obtemos

$$\begin{aligned} B([X, Y], Z) &= \operatorname{tr}(ad_{[X,Y]} ad_Z) = \operatorname{tr}([ad_X, ad_Y] ad_Z) = \operatorname{tr}((ad_X ad_Y - ad_Y ad_X) ad_Z) \\ &= \operatorname{tr}(ad_X ad_Y ad_Z) - \operatorname{tr}(ad_Y ad_X ad_Z) = \operatorname{tr}(ad_X ad_Y ad_Z) - \operatorname{tr}(ad_X ad_Z ad_Y) \\ &= \operatorname{tr}(ad_X(ad_Y ad_Z - ad_Z ad_Y)) = \operatorname{tr}(ad_X [ad_Y, ad_Z]) = B(X, [Y, Z]). \end{aligned}$$

□

De posse do material acima, podemos enunciar mais uma consequência da Proposição 2.17:

c) O tensor de Ricci de G, restrito a $\mathfrak{g}$, é dado por $Ric\big|_{\mathfrak{g}} = -\frac{1}{4}B$, onde B é a forma de Killing de $\mathfrak{g}$.

De fato, temos por definição que

$$Ric(X, Y) = \operatorname{tr}\big(V \mapsto R(X, V)Y\big).$$

Por outro lado, segue do item (a) da proposição citada que

$$R(X,V)Y = \frac{1}{4}[[X,V],Y] = -\frac{1}{4}(ad_Y ad_X)V.$$

Um grupo de Lie G é dito *semisimples* se sua forma de Killing B for não-degenerada. Nesse caso, se G for também conexo, então, munindo-o com o tensor métrico induzido por B, a propriedade $B([X,Y],Z) = B(X,[Y,Z])$ para $X,Y,Z \in \mathfrak{g}$ garante que B é biinvariante. Por fim, pelo item (c) acima, G é uma variedade Einstein.

Concluímos essa explanação acerca de grupos de Lie apresentando uma aplicação canônica muito importante entre $Lie(G)$ e G, chamada *aplicação exponencial* de G. Daremos um importante uso para tal aplicação com a demonstração do teorema do subgrupo fechado, o qual afirma que todo subgrupo topologicamente fechado de um grupo de Lie G é um subgrupo mergulhado e, portanto, um subgrupo de Lie de G. Mais adiante, esse resultado será crucial para a construção de variedades quociente.

Definição 2.20. *Dado um grupo de Lie G com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, definimos a aplicação* $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$*, chamada a aplicação exponencial de G, pondo* $\exp X = F(1)$*, onde F é o subgrupo a um parâmetro de G gerado por $X \in \mathfrak{g}$.*

O próximo resultado lista as propriedades mais importantes da aplicação exponencial. Para uma prova do mesmo, veja o Teorema 20.13 de LEE (2003).

Proposição 2.21. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Então:*

(a) *A aplicação exponencial de G é uma aplicação suave de $\mathfrak{g}$ em G.*

(b) *Para todo $X \in \mathfrak{g}$, $F(t) = \exp(tX)$ é o subgrupo a um parâmetro de G gerado por X.*

(c) *Para todo $X \in \mathfrak{g}$, temos $\exp(s+t)X = \exp(sX)\exp(tX)$.*

(d) *Mediante as identificações canônicas de $T_0\,\mathfrak{g}$ e $T_e\,G$ com $\mathfrak{g}$, a diferencial $\exp_{*_0} : T_0\,\mathfrak{g} \longrightarrow T_e\,G$ é a aplicação identidade.*

(e) *Existem vizinhanças U de 0 em $\mathfrak{g}$ e V de e em G tal que $\exp\big|_U : U \longrightarrow V$ é um difeomorfismo.*

(f) *O fluxo θ de um campo vetorial invariante à esquerda $X \in \mathfrak{g}$ é dado por $\theta_t = R_{\exp(tX)}$.*

(g) *Se H é outro grupo de Lie, com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$, e $f : G \longrightarrow H$ é um homomorfismo de grupos de Lie, então o diagrama a seguir comuta:*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "f"'] & H \end{tikzcd}$$

Lema 2.22. *Sejam G um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie. Para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$,* *existe uma função diferenciável* $Z : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ *satisfazendo* $Z(0) = 0$ *e tal que a identidade a seguir vale para todo* $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$*:*

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp\big(t(X + Y + Z(t))\big). \tag{1}$$

Demonstração. Como a aplicação exponencial é um difeomorfismo em alguma vizinhança da origem em $\mathfrak{g}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que a aplicação $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathfrak{g}$, definida por

$$\gamma(t) = \exp^{-1}(\exp(tX)\exp(tY))$$

é diferenciável. Note que $\gamma(0) = 0$ e

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp\gamma(t).$$

Observe, ainda, que podemos escrever γ como a composição

$$\mathbb{R} \xrightarrow{e_X \times e_Y} G \times G \xrightarrow{\quad\mu\quad} G \xrightarrow{\exp^{-1}} G$$

onde $e_X(t) = \exp(tX)$ e $e_Y(t) = \exp(tY)$. Como $\mu_*(X, Y) = X + Y$ para $X, Y \in T_e G$ (veja o Problema 3.6 de LEE (2003)), temos que

$$\gamma'(0) = \exp_*^{-1}(e'_X(0) + e'_Y(0)) = X + Y.$$

Portanto, pela fórmula de Taylor de primeira ordem para γ, obtemos

$$\gamma(t) = t(X + Y) + tZ(t),$$

para alguma função diferenciável Z satisfazendo $Z(0) = 0$. $\square$

Lema 2.23. *Seja* G *um grupo de Lie com álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$*. Se* $A, B \subset \mathfrak{g}$ *são subespaços complementares de* $\mathfrak{g}$*, a aplicação* $\psi : A \oplus B \longrightarrow G$ *dada por* $\psi(X, Y) = (\exp X)(\exp Y)$ *é um difeomorfismo de uma vizinhança de* $(0, 0)$ *em* $A \oplus B$ *para uma vizinhança de* e *em* G*.*

Demonstração. Uma vez que $\dim T_eG = \dim\mathfrak{g} = \dim(A \oplus B)$ e $\dim(A \oplus B) = \dim T_{(0,0)}(A \oplus B)$, temos que $\dim T_eG = \dim T_{(0,0)}(A \oplus B)$. Então, para mostrarmos que ψ é não singular em $(0, 0)$, isto é, que $\psi_{*(0,0)}$ é um isomorfismo linear, basta verificarmos que a aplicação $\psi_{*(0,0)} : T_{(0,0)}(A \oplus B) \longrightarrow T_eG$ é sobrejetiva.

Se $X \in A$ e $\alpha(t) = \psi(tX, 0) = \exp(tX)$, então $X(e) = \psi_{*(0,0)}(X, 0)$. Portanto, $\psi_{*(0,0)}(T_{(0,0)}(A \oplus B))$ contém o subespaço de T_eG naturalmente identificado com A. De modo análogo, obtemos que $\psi_{*(0,0)}(T_{(0,0)}(A \oplus B))$ contém o subespaço de T_eG naturalmente identificado com B. Usando mais uma vez que $\dim T_eG = \dim(A \oplus B)$ obtemos

$\psi_{*(0,0)}(T_{(0,0)}(A \oplus B)) = T_e G$, como queríamos demonstrar.

Dessa forma, pelo teorema da aplicação inversa, existem vizinhanças $U \subset A \oplus B$ e $V \subset G$, respectivamente contendo $(0,0)$ e $\psi(0,0) = e$, tais que $\psi\big|_U : U \longrightarrow V$ é um difeomorfismo. $\square$

O teorema a seguir é conhecido na literatura como o *teorema do subgrupo fechado*, sendo devido a Élie Cartan. Uma vez que ele será de crucial importância nessa dissertação, apresentamos sua demonstração, conforme constante do capítulo 20 de LEE (2003).

Teorema 2.24. *Seja G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo que é também um subconjunto fechado de G. Então, H é um subgrupo de Lie mergulhado de G.*

Demonstração. Se $m = \dim G$, iniciaremos definindo um subespaço de $Lie(G)$ que será, a menos de identificação, a álgebra de Lie de H. Por simplicidade, denotemos $Lie(G)$ por $\mathfrak{g}$ e consideremos o subconjunto $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ dado por

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \,:\, \exp(tX) \in H \;\; \forall\, t \in \mathbb{R}\};$$

mostraremos que $\mathfrak{h}$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$.

Da definição de $\mathfrak{h}$ é evidente que se $X \in \mathfrak{h}$, então $sX \in \mathfrak{h}$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Basta, pois, mostrarmos que $\mathfrak{h}$ é fechado para a operação de adição vetorial. Dados $X, Y \in \mathfrak{h}$, usando a fórmula obtida em (1) concluímos que para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo inteiro n suficientemente grande, vale

$$\left(\exp \frac{t}{n}X\right)\left(\exp \frac{t}{n}Y\right) = \exp \frac{t}{n}\left(X + Y + Z\left(\frac{t}{n}\right)\right),$$

com Z diferenciável e satisfazendo $Z(0) = 0$. Usando uma simples indução no item (c) da proposição 2.21, obtemos

$$\left(\left(\exp \frac{t}{n}X\right)\left(\exp \frac{t}{n}Y\right)\right)^n = \left(\exp \frac{t}{n}\left(X + Y + Z\left(\frac{t}{n}\right)\right)\right)^n = \exp t\left(X + Y + Z\left(\frac{t}{n}\right)\right).$$

Fixando t e fazendo $n \to \infty$ na igualdade acima, temos das continuidades de exp e de Z que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\exp \frac{t}{n}X\right)\left(\exp \frac{t}{n}Y\right)\right)^n = \exp\, t(X + Y).$$

Como $\exp((t/n)X), \exp((t/n)Y) \in H$ (uma vez que $X, Y \in \mathfrak{h}$) e H é um subgrupo de G, concluímos que o produto $\exp((t/n)X)\exp((t/n)Y)$, bem como suas sucessivas potências, também são elementos de H. Usando agora que H é um subgrupo topologicamente fechado, teremos que o ponto limite $\exp t(X + Y)$ é um elemento de H para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, $X + Y \in \mathfrak{h}$ e, com isso, $\mathfrak{h}$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$.

Fixada uma base $(E_1, \ldots, E_k)$ de $\mathfrak{h}$, podemos escolher $(E_{k+1}, \ldots, E_m)$ de modo a estender a base de $\mathfrak{h}$ à uma base $(E_1, \ldots, E_k, E_{k+1}, \ldots, E_m)$ de $\mathfrak{g}$.

Suponhamos, por um instante, que seja possível garantir a existência de uma vizinhança U da origem de $\mathfrak{g}$ satisfazendo as seguintes condições:

i. A restrição $\exp\big|_U$ é difeomorfismo sobre $\exp(U)$.

ii. $\exp(U \cap \mathfrak{h}) = (\exp\, U) \cap H$.

Sendo $E : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathfrak{g}$ o isomorfismo linear determinado pela base canônica de $\mathbb{R}^m$ e pela base $(E_1, \ldots, E_m)$, é imediato verificar que a composta $\varphi = E^{-1} \circ \exp^{-1} : \exp\, U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é uma carta do atlas diferenciável maximal de G. Como $\exp\big|_U$ é difeomorfismo e para U vale a propriedade expressa no item (ii), temos

$$\varphi((\exp\, U) \cap H) = E^{-1}(U \cap \mathfrak{h}).$$

Pela escolha de base feita anteriormente, o conjunto acima é a *fatia* de $\mathbb{R}^m$ obtida impondo as últimas $m-k$ coordenadas como sendo iguais a zero. Agora, dado $h \in H$, a translação L_h é um difeomorfismo de $\exp\, U$ para uma vizinhança de h, visto que U é uma vizinhança da origem em $\mathfrak{g}$ e $\exp 0 = e$. Como H é um subgrupo, temos $L_h(H) = H$, logo,

$$L_h((\exp\, U) \cap H) = L_h(\exp\, U) \cap L_h(H) = L_h(\exp\, U) \cap H$$

e $\varphi \circ L_h^{-1}$ é facilmente visto como uma carta adaptada para H numa vizinhança de h.

Assim, se mostrarmos que existe uma vizinhança U da origem em $\mathfrak{g}$ satisfazendo as condições (i) e (ii), concluiremos que H é uma subvariedade mergulhada de G e, portanto, um subgrupo de Lie de G (a esse respeito, veja também o Teorema 8.30 de LEE (2003)).

Para o que falta, seja U uma vizinhança da origem em $\mathfrak{g}$ na qual exp é um difeomorfismo (a existência de tal vizinhança é garantida pela proposição 2.21 item (e)). Pela definição de $\mathfrak{h}$, vale $\exp(U \cap \mathfrak{h}) \subset (\exp\, U) \cap H$. Para obtermos (i), basta mostrarmos que é possível diminuir U de modo a valer a inclusão contrária. Suponha, por contradição, que isso não seja possível. Seja $\{U_i\}$ base enumerável de vizinhanças para $\mathfrak{g}$ em 0, encaixante (por exemplo, uma sequência enumerável de bolas cujos raios formem uma sequência decrescente convergindo para zero). Nossa afirmação implica que para cada i existe $h_i \in (\exp\, U_i) \cap H$ tal que $h_i \notin \exp(U_i \cap \mathfrak{h})$.

Se $\mathfrak{m} = \mathrm{span}(E_{k+1}, \ldots, E_m)$, então $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$. Pelo lema 2.23, para i suficientemente grande a aplicação de $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ em G dada por $X + Y \longrightarrow \exp X \exp Y$ é um difeomorfismo de U_i para uma vizinhança de e em G. Portanto, podemos escrever

$$h_i = \exp\, X_i \exp\, Y_i$$

para $X_i \in U_i \cap \mathfrak{h}$ e $Y_i \in U_i \cap \mathfrak{m}$, com $Y_i \neq 0$ já que $h_i \notin \exp(U_i \cap \mathfrak{h})$. Como $\{U_i\}$ é uma base de vizinhanças, temos que $Y_i \to 0$ quando $i \to +\infty$. Observe que $\exp X_i \in H$ pela definição de $\mathfrak{h}$, de sorte que $\exp Y_i = (\exp X_i)^{-1} h_i \in H$.

Tomemos em $\mathfrak{g}$ o produto interno para o qual a base $(E_1, \ldots, E_m)$ é ortonormal. Seja $|\,.\,|$ a norma associada a esse produto interno e defina $c_i = |Y_i|$. Como $Y_i \to 0$ quando $i \to +\infty$, temos que $c_i \to +\infty$ quando $i \to +\infty$. A sequência $\{c_i^{-1} Y_i\}$ está contida na esfera unitária em $\mathfrak{m}$ com respeito a essa norma. Então, a menos de subsequência, podemos supor que $c_i^{-1} Y_i \to Y \in \mathfrak{m}$, com $|Y| = 1$. Em particular, $Y \neq 0$. Se mostrarmos que $Y \in \mathfrak{h}$, isto é, $\exp tY \in H$ para todo $t \in \mathbb{R}$, teremos uma contradição, visto que $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$.

Dado $t \in \mathbb{R}$, para cada $i \in \mathbb{N}$ seja n_i o maior inteiro menor ou igual a t/c_i. Então,

$$\left| n_i - \frac{t}{c_i} \right| \leq 1,$$

logo

$$|n_i c_i - t| \leq c_i \xrightarrow{i} 0.$$

Com isso, $n_i c_i \to t$ quando $i \to +\infty$ e, daí,

$$n_i Y_i = (n_i c_i)(c_i^{-1} Y_i) \xrightarrow{i} tY.$$

Por continuidade de exp, obtemos $\exp n_i Y_i \to \exp tY$ quando $i \to +\infty$. Mas, $\exp n_i Y_i = (\exp Y_i)^{n_i} \in H$ e, sendo H topologicamente fechado, isso implica que o ponto limite $\exp tY$ está em H. Isso completa a prova da existência de uma vizinhança U da origem satisfazendo as condições (i) e (ii). $\square$

Corolário 2.25. *Seja G um grupo de Lie, e denotemos por G_0 a componente conexa de G contendo o elemento identidade. Então, G_0 é um subgrupo conexo de G, o qual é aberto, fechado e satisfaz $gG_0g^{-1} = G_0$ para todo $g \in G$. Além disso, G_0 é um subgrupo de Lie de G.*

Demonstração. Como G_0 é uma componente conexa, por definição, G_0 é conexa; além disso, como toda componente conexa, G_0 é fechado em G. Portanto, para que G_0 seja um subgrupo de Lie de G é suficiente, pelo teorema do subgrupo fechado, mostrarmos que G_0 é um subgrupo algébrico de G.

Sendo G_0 conexo, também é conexo o produto $G_0 \times G_0$. Pela continuidade da aplicação multiplicação μ, segue que $\mu(G_0 \times G_0)$ é um subconjunto conexo de G e, como $(e, e) \in G_0 \times G_0$, vemos que $e = \mu(e, e) \in \mu(G_0 \times G_0)$. Pela maximalidade na definição de componente conexa, segue que $\mu(G_0 \times G_0) \subset G_0$. Daí, G_0 é fechado para a operação do grupo G. Argumentando de modo similar com a aplicação de inversão $\iota : G \longrightarrow G$, vemos que G_0 também é fechado para a operação de inversão. Dessa forma, G_0 é um subgrupo de G.

A propriedade $gG_0g^{-1} = G_0$ para todo $g \in G$ segue da continuidade, para todo $g \in G$, da aplicação $R_{g^{-1}} \circ L_g : G \to G$. De fato, tal continuidade garante que a imagem $(R_{g^{-1}} \circ L_g)(G_0)$ é um subconjunto conexo de G contendo G_0. Portanto, pela maximalidade de G_0 temos que $g^{-1}G_0g = (R_{g^{-1}} \circ L_g)(G_0) = G_0$.

Finalmente, para mostrarmos que G_0 é aberto em G, observemos que sendo G uma variedade, para o elemento neutro e de G podemos considerar uma vizinhança $U \subset G$ de e, aberta e conexa. Pela definição de G_0, temos $U \subset G_0$. Agora, como G_0 é um subgrupo de G, para $g \in G_0$ o conjunto $L_g(U) = gU$ está contido em G_0. Note que gU é uma vizinhança aberta de g, pois L_g é um homeomorfismo de G e $e \in G_0$. Como $g \in G_0$ foi tomado arbitrariamente, segue que G_0 é aberto. $\square$

Corolário 2.26. *Seja G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo fechado. Então, H é um subgrupo de Lie de G e a aplicação exponencial de H é a restrição da aplicação exponencial de G a $Lie(H)$.*

Demonstração. A primeira afirmação segue diretamente do teorema anterior. Para o que falta, considere um subgrupo a um parâmetro $F : \mathbb{R} \longrightarrow H$. Então, a composta

$$\mathbb{R} \xrightarrow{F} H \hookrightarrow G$$

é um homomorfismo de grupos de Lie e, portanto, um subgrupo a um parâmetro de G, o qual claramente satisfaz $F'(0) \in T_eH$. Reciprocamente, suponha que $F : \mathbb{R} \longrightarrow G$ é um subgrupo a um parâmetro de G com $F'(0) \in T_eH$. Seja $\tilde{F} : \mathbb{R} \longrightarrow H$ o subgrupo a um parâmetro de H tal que $\tilde{F}'(0) = F'(0) \in T_eH$. Como na primeira parte da prova, por composição com a aplicação inclusão podemos considerar $\tilde{F}$ como subgrupo a um parâmetro de G. Mas, como F e $\tilde{F}$ têm o mesmo vetor tangente em 0, eles devem ser iguais. $\square$

2.2 Submersões riemannianas

Nesta seção, estudamos um tipo específico de submersão entre variedades riemannianas, denominada uma submersão riemanniana. Assim como no estudo de imersões isométricas, nosso propósito é, para submersões riemannianas, encontrar relações entre as conexões riemannianas e as curvaturas seccionais das variedades envolvidas.

A fim de definir o objeto de nosso interesse, comecemos recordando que uma aplicação $\pi : M \longrightarrow B$ entre variedades diferenciáveis é uma submersão se, para todo $p \in M$, a diferencial $(\pi_{*_p}) : T_pM \to T_{\pi(p)}B$ for sobrejetiva. Nesse caso, é bem sabido (veja, por exemplo LEE (2003)) que, se $b \in B$, a fibra $\pi^{-1}(b)$ é uma subvariedade de M, com

$$T_p(\pi^{-1}(b)) = \ker(\pi_{*_p})$$

para todo $p \in \pi^{-1}(b)$.

Seja $\pi : M \longrightarrow B$ uma submersão entre variedades riemannianas. Dado $b \in B$ e $p \in \pi^{-1}(b)$ o espaço tangente T_pM se decompõe nos subespaços ortogonais

$$\mathcal{V}_p = T_p(\pi^{-1}(b)) \ \text{ e } \ \mathcal{H}_p = T_p(\pi^{-1}(b))^{\perp}.$$

Dizemos que um vetor em T_pM é *vertical* se ele for um vetor tangente à fibra $\pi^{-1}(b)$ e *horizontal* se ele for normal a tal fibra. Como $T_p(\pi^{-1}(b)) = \ker(\pi_{*_p})$ e π_{*_p} é sobrejetiva, é imediato que $\pi_{*_p} : \mathcal{H}_p \longrightarrow T_bB$ é um isomorfismo linear.

Definição 2.27. *Uma submersão riemanniana é uma submersão $\pi : M \longrightarrow B$ entre variedades riemannianas, tal que π_* preserva produto escalar de vetores normais às fibras.*

Podemos, então, dizer que uma submersão riemanniana $\pi : M \longrightarrow B$ é uma submersão entre as variedades riemanninas M e B tal que, cada para cada $b \in B$ e $p \in \pi^{-1}(b)$, a aplicação $\pi_{*_p} : \mathcal{H}_p \longrightarrow T_bB$ é uma isometria linear. A partir de agora, dado um vetor tangente $X_b \in T_bB$, denotaremos por $\overline{X}_p$ o único vetor em $\mathcal{H}_p$ tal que $\pi_{*_p}(\overline{X}_p) = X_b$. É possível provar que, dado um campo suave X em B, existe um único *levantamento horizontal* $\overline{X}$ de X a M, isto é, um único campo suave $\overline{X}$ em M, o qual é $\pi-$relacionado a X e tal que $\overline{X}_p \in \mathcal{H}_p$, para todo $p \in M$.

Lema 2.28. *Seja $\pi : M \longrightarrow B$ uma submersão riemanniana. Se X, Y são campos suaves em B, então:*

(a) $\langle \overline{X}, \overline{Y} \rangle = \langle X, Y \rangle \circ \pi$.

(b) $[\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{H}} = \overline{[X, Y]}$, *onde* $[\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{H}}$ *denota a componente horizontal do campo* $[\overline{X}, \overline{Y}]$.

(c) $(\bar{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\mathcal{H}} = \overline{\nabla_X Y}$, *onde* $\bar{\nabla}$ *denota a conexão riemanniana de* M *e* ∇ *a conexão riemanniana de* B.

(d) Se $T \in \mathfrak{X}(M)$ *é um campo vertical, então* $\langle [\overline{X}, T], \overline{Y} \rangle = 0$.

(e) $(\bar{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\mathcal{V}} = \frac{1}{2}[\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}}$ *e, portanto,* $\bar{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = (\overline{\nabla_X Y}) + \frac{1}{2}[\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}}$.

Demonstração. O item (a) segue diretamente da definição; de fato, sendo π uma submersão riemanniana e $\overline{X}, \overline{Y}$ campos horizontais, temos que

$$\langle \overline{X}, \overline{Y} \rangle = \langle \pi_*\overline{X}, \pi_*\overline{Y} \rangle = \langle X, Y \rangle \circ \pi.$$

Para (b), como $\overline{X}$ é $\pi-$relacionado a X e $\overline{Y}$ é $\pi-$relacionado a Y, a naturalidade do colchete de Lie garante que $[\overline{X}, \overline{Y}]$ é $\pi-$relacionado a $[X, Y]$. Mas, como a componente vertical de $[\overline{X}, \overline{Y}](p)$ está no núcleo de π_{*_p} para todo $p \in M$, segue que $\pi_*([\overline{X}, \overline{Y}]) = \pi_*([\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{H}})$. Com isso, concluímos que $[X, Y] = \pi_*([\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{H}})$ ou, o que é o mesmo, $\overline{[X, Y]} = [\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{H}}$.

Para demonstrar o item (c), note inicialmente que, pelo item (b), temos $\langle \nabla_X Y, Z \rangle \circ \pi = \langle \overline{\nabla_X Y}, \overline{Z} \rangle$. Como os campos $(\bar{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\mathcal{H}}$ e $\overline{\nabla_X Y}$ são horizontais, é suficiente mostrarmos que

$$\langle \bar{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}, \overline{Z} \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle \circ \pi \tag{2}$$

para todo campo horizontal $\overline{Z}$ em M, levantamento de um campo suave Z em B.

Para o que falta, usando a fórmula de Koszul para a conexão de Levi-Civita (veja, por exemplo, o Teorema 3.11 de O'NEILL (1983)), temos, por um lado,

$$\begin{aligned}
2\langle \bar{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}, \overline{Z} \rangle &= \overline{X}\langle \overline{Z}, \overline{Y} \rangle + \overline{Y}\langle \overline{X}, \overline{Z} \rangle - \overline{Z}\langle \overline{X}, \overline{Y} \rangle \\
&\quad -\langle [\overline{X}, \overline{Z}], \overline{Y} \rangle - \langle [\overline{Y}, \overline{Z}], \overline{X} \rangle - \langle [\overline{Y}, \overline{X}], \overline{Z} \rangle \\
&= \overline{X}[\langle Z, Y \rangle \circ \pi] + \overline{Y}[\langle X, Z \rangle \circ \pi] - \overline{Z}[\langle X, Y \rangle \circ \pi] \\
&\quad -\langle [\overline{X}, \overline{Z}]^{\mathcal{H}}, \overline{Y} \rangle - \langle [\overline{Y}, \overline{Z}]^{\mathcal{H}}, \overline{X} \rangle - \langle [\overline{Y}, \overline{X}]^{\mathcal{H}}, \overline{Z} \rangle \\
&= \overline{X}[\langle Z, Y \rangle \circ \pi] + \overline{Y}[\langle X, Z \rangle \circ \pi] - \overline{Z}[\langle X, Y \rangle \circ \pi] \\
&\quad -\langle \overline{[X, Z]}, \overline{Y} \rangle - \langle \overline{[Y, Z]}, \overline{X} \rangle - \langle \overline{[Y, X]}, \overline{Z} \rangle \\
&= \overline{X}[\langle Z, Y \rangle \circ \pi] + \overline{Y}[\langle X, Z \rangle \circ \pi] - \overline{Z}[\langle X, Y \rangle \circ \pi] \\
&\quad -\langle [X, Z], Y \rangle \circ \pi - \langle [Y, Z], X \rangle \circ \pi - \langle [Y, X], Z \rangle \circ \pi.
\end{aligned}$$

Por outro,

$$\begin{aligned}
2\langle \nabla_X Y, Z \rangle \circ \pi &= X\langle Z, Y \rangle \circ \pi + Y\langle X, Z \rangle \circ \pi - Z\langle X, Y \rangle \circ \pi \\
&\quad -\langle [X, Z], Y \rangle \circ \pi - \langle [Y, Z], X \rangle \circ \pi - \langle [Y, X], Z \rangle \circ \pi.
\end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\overline{X}[\langle Z, Y \rangle \circ \pi] = \pi_*(\overline{X})(\langle Z, Y \rangle) = X\langle Z, Y \rangle \circ \pi,$$

sendo igualdades análogas válidas para os outros termos. Com isso, obtemos a igualdade $2\langle \bar{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}, \overline{Z} \rangle = 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle \circ \pi$ para todo campo horizontal $\overline{Z}$ em M, levantamento de um campo suave Z em B.

O item (d) segue, mais uma vez, da naturalidade do colchete. Realmente, sendo T um campo vertical e π uma submersão riemanniana, vale

$$\begin{aligned}
\langle [\overline{X}, T], \overline{Y} \rangle &= \langle [\overline{X}, T]^{\mathcal{H}}, \overline{Y} \rangle = \langle \pi_*([\overline{X}, T]^{\mathcal{H}}), \pi_* \overline{Y} \rangle \circ \pi \\
&= \langle \pi_*([\overline{X}, T]), \pi_* \overline{Y} \rangle \circ \pi = \langle [\pi_* \overline{X}, \pi_* T], \pi_* \overline{Y} \rangle \circ \pi = 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, para o item (e), observemos que pelo item (c) é suficiente mostrar que a projeção vertical de $\bar{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}$ é $\frac{1}{2}[\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}}$. Usando novamente o item (a) (e com T vertical), temos

$$T\langle \overline{X}, \overline{Y} \rangle = T(\langle X, Y \rangle \circ \pi) = \pi_*(T)\langle X, Y \rangle = 0.$$

Com essa observação, usando o item anterior e novamente a fórmula de Koszul, obtemos

$$\begin{aligned} 2\langle \bar{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, T\rangle &= \overline{X}\langle T, \overline{Y}\rangle + \overline{Y}\langle \overline{X}, T\rangle - T\langle \overline{X}, \overline{Y}\rangle - \langle [\overline{X}, T], \overline{Y}\rangle - \langle [\overline{Y}, T], \overline{X}\rangle + \langle [\overline{X}, \overline{Y}], T\rangle \\ &= \overline{X}\langle T, \overline{Y}\rangle + \overline{Y}\langle \overline{X}, T\rangle + \langle [\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}}, T\rangle. \end{aligned}$$

Mas, uma vez que $\langle T, \overline{Y}\rangle = \langle \overline{X}, T\rangle = 0$, os dois primeiros termos também são zero. Logo,

$$\langle \bar{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, T\rangle = \frac{1}{2}\langle [\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}}, T\rangle,$$

igualdade claramente equivalente ao que desejamos. □

Para o que segue, dada uma submersão riemannniana $\pi : M \longrightarrow B$, dizemos que uma curva γ em M é *horizontal* se γ' é um campo horizontal ao longo de γ. Ademais, segue da teoria de equações diferenciais ordinárias que se, $\alpha : [0,1] \longrightarrow B$ é uma curva e $q = \alpha(0)$, então existe uma única curva $\bar{\alpha} : [0,1] \longrightarrow M$ tal que $\bar{\alpha}(0) = q$, $\pi \circ \bar{\alpha} = \alpha$ e $\bar{\alpha}$ é horizontal.

Corolário 2.29. *Seja $\pi : M \longrightarrow B$ uma submersão riemannniana. Se $\alpha : [0,1] \longrightarrow B$ é uma curva em B e $\bar{\alpha} : [0,1] \longrightarrow M$ é um levantamento horizontal de α, então α é geodésica em B se e somente se $\bar{\alpha}$ é uma geodésica em M.*

Demonstração. Observemos primeiramente que, como $\bar{\alpha}$ é um levantamento horizontal de α, vale a igualdade $\pi_*(\bar{\alpha}') = \alpha'$. Com isso, α é regular se e somente se $\bar{\alpha}$ é regular. Sendo esse o caso, sejam X uma extensão local de α' e $\overline{X}$ o levantamento horizontal correspondente. Então, $\overline{X}$ é uma extensão local de $\bar{\alpha}'$, e uma extensão imediata do item (e) do lema anterior ao presente contexto fornece

$$\bar{\nabla}_{\bar{\alpha}'}\bar{\alpha}' = \overline{\nabla_{\alpha'}\alpha'} + \frac{1}{2}[\overline{X}, \overline{X}]^{\mathcal{V}} = \overline{\nabla_{\alpha'}\alpha'}.$$

O resultado desejado segue, agora, imediatamente. □

O corolário a seguir decorre diretamente do corolário anterior.

Corolário 2.30. *Seja $\pi : M \longrightarrow B$ uma submersão riemannniana. Dada uma geodésica horizontal γ em M, temos que $\pi \circ \gamma$ é uma geodésica em B.*

Demonstração. Localmente, γ é levantamento horizontal de $\pi \circ \gamma$. □

O lema 2.28 também nos ajudará na demonstração do teorema a seguir, o qual relaciona as curvaturas seccionais da base e do espaço total de uma submersão.

Teorema 2.31 (O'Neill)**.** *Seja $\pi : M \longrightarrow B$ uma submersão riemanniana e X e Y campos suaves em B, com levantamentos horizontais $\overline{X}$ e $\overline{Y}$. Se em cada ponto de B os campos X e Y geram um subespaço 2-dimensional, então o mesmo sucede com $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ em*

M. Além disso,

$$K_B(X,Y)\circ\pi = K_M(\overline{X},\overline{Y}) + \frac{3}{4}\frac{\langle[\overline{X},\overline{Y}]^{\mathcal{V}},[\overline{X},\overline{Y}]^{\mathcal{V}}\rangle}{|\overline{X}\wedge\overline{Y}|^2},$$

onde $|\overline{X}\wedge\overline{Y}|^2 = |\overline{X}|^2\,|\overline{Y}|^2 - \langle\overline{X},\overline{Y}\rangle^2$.

Demonstração. Denotemos por R o tensor curvatura de B e por $\bar{R}$ o tensor curvatura de M. Se mostrarmos que

$$\langle\bar{R}(\overline{X},\overline{Y})\overline{X},\overline{Y}\rangle = \langle R(X,Y)X,Y\rangle\circ\pi - \frac{3}{4}\langle[\overline{X},\overline{Y}]^{\mathcal{V}},[\overline{X},\overline{Y}]^{\mathcal{V}}\rangle \tag{3}$$

então, como

$$|\overline{X}\wedge\overline{Y}|^2 = (|\overline{X}|^2\circ\pi)(|\overline{Y}|^2\circ\pi) - \langle\overline{X},\overline{Y}\rangle^2\circ\pi = |X\wedge Y|^2\circ\pi,$$

ficaremos com

$$\frac{\langle\bar{R}(\overline{X},\overline{Y})\overline{X},\overline{Y}\rangle}{|\overline{X}\wedge\overline{Y}|^2} = \frac{\langle R(X,Y)X,Y\rangle\circ\pi}{|X\wedge Y|^2\circ\pi} - \frac{3}{4}\frac{\langle[\overline{X},\overline{Y}]^{\mathcal{V}},[\overline{X},\overline{Y}]^{\mathcal{V}}\rangle}{|\overline{X}\wedge\overline{Y}|^2}$$

ou, o que é o mesmo,

$$K_M(\overline{X},\overline{Y}) = K_B(X,Y)\circ\pi - \frac{3}{4}\frac{\langle[\overline{X},\overline{Y}]^{\mathcal{V}},[\overline{X},\overline{Y}]^{\mathcal{V}}\rangle}{|\overline{X}\wedge\overline{Y}|^2}.$$

É, pois, suficiente mostrarmos (3). Para tanto, sejam W e Z campos em B, com levantamentos horizontais $\overline{W}$ e $\overline{Z}$. Pelo lema 2.28, item (e), temos que

$$\langle\bar{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z},\overline{W}\rangle = \langle\overline{\nabla_Y Z},\overline{W}\rangle = \langle\nabla_Y Z,W\rangle\circ\pi.$$

Com isso, segue que

$$\overline{X}\langle\bar{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z},\overline{W}\rangle = \overline{X}(\langle\nabla_Y Z,W\rangle\circ\pi) = \pi_*(\overline{X})\langle\nabla_Y Z,W\rangle = X\langle\nabla_Y Z,W\rangle\circ\pi.$$

Portanto,

$$\langle\bar{\nabla}_{\overline{X}}\bar{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z},\overline{W}\rangle = \overline{X}\langle\bar{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z},\overline{W}\rangle - \langle\bar{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z},\bar{\nabla}_{\overline{X}}\overline{W}\rangle = X\langle\nabla_Y Z,W\rangle\circ\pi - \langle\bar{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z},\bar{\nabla}_{\overline{X}}\overline{W}\rangle. \tag{4}$$

Pela decomposição vista no lema 2.28, temos que

$$\bar{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z} = \overline{\nabla_Y Z} + \frac{1}{2}[\overline{Y},\overline{Z}]^{\mathcal{V}}$$

e

$$\bar{\nabla}_{\overline{X}}\overline{W} = \overline{\nabla_X W} + \frac{1}{2}[\overline{X}, \overline{W}]^{\mathcal{V}}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z}, \bar{\nabla}_{\overline{X}}\overline{W} \rangle &= \langle \overline{\nabla_Y Z}, \overline{\nabla_X W} \rangle + \frac{1}{4}\langle [\overline{Y}, \overline{Z}]^{\mathcal{V}}, [\overline{X}, \overline{W}]^{\mathcal{V}} \rangle \\ &= \langle \nabla_Y Z, \nabla_X W \rangle \circ \pi + \frac{1}{4}\langle [\overline{Y}, \overline{Z}]^{\mathcal{V}}, [\overline{X}, \overline{W}]^{\mathcal{V}} \rangle. \end{aligned}$$

Retornando à igualdade (4), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_{\overline{X}}\bar{\nabla}_{\overline{Y}}Z, \overline{W} \rangle &= X\langle \nabla_Y Z, W \rangle \circ \pi - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X W \rangle \circ \pi - \frac{1}{4}\langle [\overline{Y}, \overline{Z}]^{\mathcal{V}}, [\overline{X}, \overline{W}]^{\mathcal{V}} \rangle \\ &= \langle \nabla_X \nabla_Y Z, W \rangle \circ \pi - \frac{1}{4}\langle [\overline{Y}, \overline{Z}]^{\mathcal{V}}, [\overline{X}, \overline{W}]^{\mathcal{V}} \rangle \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle \bar{\nabla}_{\overline{X}}\bar{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z}, \overline{W} \rangle = \langle \nabla_X \nabla_Y Z, W \rangle \circ \pi - \frac{1}{4}\langle [\overline{Y}, \overline{Z}]^{\mathcal{V}}, [\overline{X}, \overline{W}]^{\mathcal{V}} \rangle \tag{5}$$

Utilizando a igualdade acima para $\overline{Z} = \overline{X}$ e $\overline{W} = \overline{Y}$, juntamente com algumas das identidades demonstradas no lema 2.28, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(\overline{X}, \overline{Y})\overline{X}, \overline{Y} \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{\overline{Y}}\bar{\nabla}_{\overline{X}}\overline{X}, \overline{Y} \rangle - \langle \bar{\nabla}_{\overline{X}}\bar{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X}, \overline{Y} \rangle + \langle \bar{\nabla}_{[\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{H}} + [\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}}}\overline{X}, \overline{Y} \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\overline{Y}}\bar{\nabla}_{\overline{X}}\overline{X}, \overline{Y} \rangle - \langle \nabla_X \nabla_Y X, Y \rangle \circ \pi + \frac{1}{4}\langle [\overline{Y}, \overline{X}]^{\mathcal{V}}, [\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}} \rangle \\ &\quad + \langle \bar{\nabla}_{\overline{[X,Y]}}\overline{X}, \overline{Y} \rangle + \langle \bar{\nabla}_{[\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}}}\overline{X}, \overline{Y} \rangle. \end{aligned}$$

Trocando X por Y em (5) e fazendo novamente $\overline{Z} = \overline{X}$ e $\overline{W} = \overline{Y}$, temos que

$$\begin{aligned} \bar{R}(\overline{X}, \overline{Y})\overline{X}, \overline{Y} \rangle &= \langle R(X, Y)X, Y \rangle \circ \pi - \frac{1}{4}\langle [\overline{X}, \overline{X}]^{\mathcal{V}}, [\overline{Y}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}} \rangle + \frac{1}{4}\langle [\overline{Y}, \overline{X}]^{\mathcal{V}}, [\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}} \rangle + \\ &\quad \langle \bar{\nabla}_{[\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}}}\overline{X}, \overline{Y} \rangle \\ &= \langle R(X, Y)X, Y \rangle \circ \pi - \frac{1}{4}\langle [\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}}, [\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}} \rangle + \langle \bar{\nabla}_{[\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}}}\overline{X}, \overline{Y} \rangle. \end{aligned}$$

A fim de obtermos a identidade em (3), precisamos, então, mostrar que

$$\langle \bar{\nabla}_{[\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}}}\overline{X}, \overline{Y} \rangle = -\frac{1}{2}\langle [\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}}, [\overline{X}, \overline{Y}]^{\mathcal{V}} \rangle. \tag{6}$$

Primeiramente, observemos que se T é um campo vertical em M, o item (e) do lema 2.28 garante que $\langle \bar{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, T \rangle = \frac{1}{2}\langle [\overline{X}, \overline{Y}], T \rangle$. Mas, como $\langle T, \overline{Y} \rangle = 0$, segue que

$$0 = \overline{X}\langle T, \overline{Y} \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\overline{X}}T, \overline{Y} \rangle + \langle T, \bar{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} \rangle.$$

Assim, $\langle \bar{\nabla}_{\overline{X}} T, \overline{Y} \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}, T \rangle = -\frac{1}{2}\langle [\overline{X}, \overline{Y}], T \rangle$. Usando essa última relação juntamente com o item (d) do lema citado, obtemos

$$\langle \bar{\nabla}_T \overline{X}, \overline{Y} \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\overline{X}} T, \overline{Y} \rangle + \langle [T, \overline{X}], \overline{Y} \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\overline{X}} T, \overline{Y} \rangle = -\frac{1}{2}\langle [\overline{X}, \overline{Y}], T \rangle$$

Por fim, fazendo $T = [\overline{X}, \overline{X}]^{\mathcal{V}}$ na igualdade acima, obtemos a igualdade que precisávamos.

$\square$

3 A ESTRUTURA DE VARIEDADE PARA G/H

Nesta seção, descreveremos de maneira simples como construir outras variedades diferenciáveis a partir de grupos de Lie. Mais precisamente, se G um grupo de Lie conexo e H é um subgrupo fechado de G, mostraremos que o espaço quociente G/H é uma variedade diferenciável de dimensão $dim\, G - dim\, H$. Essa construção se revelará essencial para a descrição de espaços homogêneos e simétricos.

3.1 O espaço quociente G/H

Começamos construindo as relações de equivalência que darão origem ao conceito de espaço quociente. A construção em si fará uso somente das propriedades referentes a um grupo; entretanto, como estamos trabalhando com variedades diferenciáveis, posteriormente pediremos que os grupos envolvidos sejam também grupos de Lie.

Definição 3.1. *Sejam H um subgrupo de um grupo G e $a, b \in G$. Dizemos que a é congruente à esquerda a b, módulo H, e denotamos $a \equiv_l b$, se $a^{-1}b \in H$. De modo análogo, define-se congruência à direita módulo H pondo $a \equiv_r b$ se $ab^{-1} \in H$.*

Se H é um subgrupo de um grupo G, é fácil verificar que as noções de congruência à esquerda e à direita módulo H são relações de equivalência em G. É também fácil verificar que a classe de equivalência de um elemento $a \in G$ com respeito à congruência à esquerda módulo H é o conjunto

$$aH = \{ah; h \in H\};$$

por outro lado, a classe de equivalência de $a \in G$ em relação à congruência à direita módulo H é o conjunto:

$$Ha = \{ha; h \in H\}.$$

Dessa forma, as classes aH são chamadas de classes (laterais) à esquerda de H em G, enquanto as classes Ha são chamadas de classes (laterais) à direita de H em G. Não é difícil mostrar que as cardinalidades dos conjuntos de classes laterais à esquerda e à direita de H em G coincidem. Tal cardinalidade comum é chamada de *índice de H em G*, sendo denotada por $[G : H]$.

Se G é um grupo abeliano, as noções de congruência à esquerda e à direita módulo H coincidem. De fato, como H é subgrupo de G, temos que $a^{-1}b \in H \Leftrightarrow (a^{-1}b)^{-1} \in H$; mas $(a^{-1}b)^{-1} = b^{-1}a$ e, sendo G abeliano, temos $b^{-1}a = ab^{-1}$.

Existem, ainda, grupos não abelianos G com subgrupos H cujas congruências à esquerda e à direita coincidem, o que nos leva à próxima definição.

Definição 3.2. *Um subgrupo H de um grupo G é dito normal se as relações de con-*

gruência à esquerda e à direita módulo H coincidem, isto é, definem relações de equivalência idênticas em G.

Uma outra forma de apresentar essa definição seria dizermos que G é um grupo normal se $gHg^{-1} = H$ para todo $g \in G$. Se H é um subgrupo normal de um grupo G, e G/H denota o conjunto quociente de G com respeito às relações de equivalência idênticas estudadas acima, podemos definir a seguinte operação em G/H :

$$(aH)(bH) = abH.$$

A normalidade de H em G permite mostrar que tal operação está bem definida e que, com ela munido, G/H é um grupo de ordem $[G : H]$. Tal grupo é chamado o *grupo quociente* de G módulo H.

No caso em que H não seja normal em G, continuaremos denotando por G/H o conjunto quociente das classes laterais à esquerda de H em G. Também, a aplicação $\pi : G \longrightarrow G/H$, tal que $\pi(g) = gH$, será dita a *projeção canônica* de G sobre G/H.

Consideremos G/H como um espaço topológico, munido com a topologia quociente induzida pela aplicação natural $\pi : G \longrightarrow G/H$. Dessa forma, por vezes nos referiremos a G/H como o *espaço quociente de G módulo H*. Então, a propriedade característica da topologia quociente (veja LEE (2010)) garante que, para todo espaço topológico B, uma aplicação $f : G/H \longrightarrow B$ é contínua se e somente se $f \circ \pi : G \longrightarrow B$ é contínua (veja o diagrama abaixo).

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f \circ \pi"] & \\
G/H \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

O exemplo a seguir, de aplicação da propriedade característica, será útil mais adiante.

Exemplo 3.3. *Para $g \in G$, a aplicação $\tau_g : G/H \longrightarrow G/H$, dada por $\tau_g(xH) = gxH$, é uma bijeção com inversa $\tau_{g^{-1}}$. De fato, $\tau_g(\tau_{g^{-1}}(xH)) = \tau_g(g^{-1}xH) = gg^{-1}xH = xH$ e $\tau_{g^{-1}}(\tau_g(xH)) = \tau_{g^{-1}}(gxH) = g^{-1}gxH = xH$. Afirmamos que τ_g é contínua. Para tanto, pela propriedade característica da topologia quociente, τ_g é contínua se e somente se $\tau_g \circ \pi$ o for; mas, $\pi \circ L_g = \tau_g \circ \pi$ e $\pi \circ L_g$ é contínua, de forma que τ_g é realmente contínua. Como τ_g^{-1} é também contínua, segue que τ_g é um homeomorfismo.*

3.2 A construção das cartas coordenadas

Sejam G um grupo de Lie conexo e H um subgrupo fechado de G. O material desta e das próximas duas subseções garante que o espaço quociente G/H pode ser munido com uma estrutura de variedade diferenciável. Nesta subseção, estabelecemos alguns resultados preliminares.

Lema 3.4. *A aplicação quociente* $\pi : G \longrightarrow G/H$ *é aberta.*

Demonstração. Para cada subconjunto aberto $U \subset G$, é imediato verificar que o conjunto $\pi^{-1}(\pi(U))$ é igual à união de todos os conjuntos da forma $L_h(U)$ com $h \in H$. Como $L_h : G \to G$ é um homeomorfismo para cada $h \in H$, cada um dos conjuntos $L_h(U)$ é aberto, portanto $\pi^{-1}(\pi(U))$ é um aberto de G. Sendo π uma aplicação quociente, isso implica que $\pi(U)$ é aberto em G/H. □

Proposição 3.5. *O espaço quociente* G/H *é espaço de Hausdorff e possui base enumerável.*

Demonstração. Como G é uma variedade diferenciável, podemos tomar uma base enumerável $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ para a topologia de G. Considere, então, a família $\mathcal{B}_{G/H} = \{\pi(U_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$. Sendo π aberta, segue que $\mathcal{B}_{G/H}$ é uma família de abertos de G/H. Por outro lado, dado um aberto $A \subset G/H$, temos que $\pi^{-1}(A) \subset G$ é um aberto de G. Pela definição de base, existe um conjunto de índices $I \subset \mathbb{N}$ tal que $\pi^{-1}(A) = \bigcup_{i\in I} B_i$. A sobrejetividade de π garante, então, que

$$A = \pi(\pi^{-1}(A)) = \pi\big(\bigcup_{i\in I} B_i\big) = \bigcup_{i\in I} \pi(B_i).$$

Portanto, $\mathcal{B}_{G/H}$ é uma base enumerável para G/H.

Sejam, agora, $g_1H, g_2H \in G/H$, com $g_1H \neq g_2H$; então, $g_1^{-1}g_2 \notin H$. Considere a aplicação (diferenciável, logo contínua) $f : G \times G \longrightarrow G$ dada por $f(x, y) = x^{-1}y$, de sorte que $f(g_1, g_2) \in G\backslash H$. Sendo H fechado, temos $G\backslash H$ aberto em G; sendo $A \subset G\backslash H$ uma vizinhança $g_1^{-1}g_2$, segue que $f^{-1}(A)$ é uma vizinhança de (g_1, g_2) em $G \times G$; logo, podemos tomar vizinhanças U_1 de g_1 e U_2 de g_2 em G, tais que $U_1 \times U_2 \subset f^{-1}(A)$. Como $\pi : G \to G/H$ é aberta, segue que $\pi(U_1)$ e $\pi(U_2)$ são vizinhanças de g_1H e g_2H, respectivamente, e é fácil verificar que são disjuntas. □

Pelo que demonstramos acima, para que G/H seja uma variedade diferenciável, basta construirmos uma carta coordenada em uma vizinhança de cada ponto de G/H, de modo que a família de cartas assim obtida seja compatível.

Para o que falta, sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ as álgebras de Lie de G e de H, respectivamente. Seja $\mathfrak{m}$ um espaço vetorial complementar a $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$, isto é, tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$. Observando que $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h} \simeq \mathfrak{m} \times \mathfrak{h}$, defina a aplicação $\psi : \mathfrak{m} \times \mathfrak{h} \longrightarrow G$ pondo

$$\psi(X, Y) = \exp(X)\exp(Y) = \mu(\exp(X), \exp(Y)),$$

onde $\mu : G \times G \longrightarrow G$ é a aplicação (diferenciável) de multiplicação de G. Por ser uma composição de aplicações diferenciáveis, temos que ψ é diferenciável.

Lema 3.6. *Sendo* 0 *a origem do espaço vetorial* $\mathfrak{g}$*, a aplicação* ψ *definida acima é não singular em* $(0,0)$*.*

Demonstração. Inicialmente, note que $\dim T_eG = \dim \mathfrak{g} = \dim(\mathfrak{m}\times\mathfrak{h}) = \dim T_{(0,0)}(\mathfrak{m}\times\mathfrak{h})$. Então, para mostrarmos que ψ é não singular em $(0,0)$, isto é, que $\psi_{*(0,0)}$ é um isomorfismo linear, basta verificarmos que a aplicação $\psi_{*(0,0)} : T_{(0,0)}(\mathfrak{m}\times\mathfrak{h}) \longrightarrow T_eG$ é sobrejetiva.

Para o que falta, se $X \in \mathfrak{m}$ e $\alpha(t) = \psi(tX,0) = \exp(tX)$, então $X(e) = \psi_{*(0,0)}(X,0)$. Portanto, $\psi_{*(0,0)}(T_{(0,0)}(\mathfrak{m}\times\mathfrak{h}))$ contém o único subespaço de T_eG que é identificado com $\mathfrak{m}$. De modo análogo, mostramos que $\psi_{*(0,0)}(T_{(0,0)}(\mathfrak{m}\times\mathfrak{h}))$ contém o único subespaço de T_eG que é identificado com $\mathfrak{h}$. Mas, como $\psi_{*(0,0)}$ é linear, ela contém a soma de tais subespaços, a qual é igual a $\mathfrak{g}$. □

Lema 3.7. *Sejam* $O_1 \subset \mathfrak{m}$ *e* $O_2 \subset \mathfrak{h}$ *subconjuntos abertos contendo a origem e tais que* $\psi : O_1 \times O_2 \longrightarrow U$ *é um difeomorfismo sobre um subconjunto aberto* U *de* G *contendo* e*. Então, existem abertos* $U_1 \subset O_1$ *e* $U_2 \subset O_2$ *tal que*

$$\big(\exp(U_1)^{-1}\cdot\exp(U_1)\big)\cap H = \mu(\exp(U_1)^{-1},\exp(U_1))\cap H \subset \exp(U_2).$$

Demonstração. Observe que a existência dos abertos O_1, O_2 e U do enunciado é garantida pelo lema anterior, juntamente com o teorema da aplicação inversa. Além disso, como H é fechado em G, o Teorema 2.24 garante que H é um subgrupo de Lie de G, o qual é mergulhado. Pelo item (e) da Proposição 2.21, podemos considerar um aberto $U_2 \subset O_2$ tal que $\exp\big|_{U_2}$ é um difeomorfismo sobre sua imagem. Então, como (cf. Corolário 2.26) a aplicação exponencial de H é a restrição da aplicação exponencial de G a $\mathfrak{h}$, concluímos que $\exp(U_2)$ é um aberto de H contendo a identidade.

Consideremos, agora, um aberto $W \subset G$ contendo a identidade, tal que $W \cap H \subset \exp(U_2)$ (isso é possível, pelo fato de H ser mergulhado em G). Pela continuidade da aplicação μ, podemos escolher um aberto $U_1 \subset O_1$ de modo que $\big(\exp(U_1)^{-1}\cdot\exp(U_1)\big) \subset W$. Portanto, $\big(\exp(U_1)^{-1}\cdot\exp(U_1)\big)\cap H \subset W\cap H \subset \exp(U_2)$. □

No que segue, continuamos sob as mesmas notações e hipóteses do lema anterior. Observe que, como π é uma aplicação aberta e $(0,0) \in U_1\times U_2$, temos que $\pi(U)$ é um aberto de G/H contendo eH.

Lema 3.8. *A aplicação* $\varphi_0 : U_1 \longrightarrow \pi(U)$*, definida por* $\varphi_0(X) = \exp(X)H$*, é uma bijeção.*

Demonstração. Por definição, $U = \psi(U_1\times U_2) = \exp(U_1)\cdot\exp(U_2)$. Além disso, como $\exp(U_2) \subset H$, temos $\pi(U) = \pi(\exp(U_1)) = \varphi_0(U_1)$. Concluímos, portanto, que φ_0 é sobrejetiva.

Agora, suponha que existam $X, Y \in U_1$ tais que $\varphi_0(X) = \varphi_0(Y)$, isto é, $\exp(X)H = \exp(Y)H$. Então, $\exp(X)^{-1}\cdot\exp(Y) \in \big(\exp(U_1)^{-1}\cdot\exp(U_1)\big)\cap H \subset \exp(U_2)$, de sorte que podemos tomar $Z \in U_2$ tal que $\exp(X)^{-1}\cdot\exp(Y) = \exp(Z)$. Com isso, $\psi(Y,0) = \exp(Y) = \exp(X)\cdot\exp(Z) = \psi(X,Z)$. Mas, como $(Y,0),(X,Z) \in U_1\times U_2$ e a aplicação $\psi : U_1 \times U_2 \longrightarrow U$ é um difeomorfismo, obtemos $(Y, 0) = (X, Z)$. Logo, $X = Y$ e φ_0 é injetiva. $\square$

3.3 Definição das cartas coordenadas

Continuando com as notações da seção anterior, nesta seção construiremos cartas coordenadas que tornarão G/H uma variedade diferenciável de dimensão $\dim G - \dim H$.

Para cada $g \in G$, defina $\varphi_g : U_1 \longrightarrow g \cdot \pi(U)$ por $\varphi_g = \tau_g \circ \varphi_0$. Como τ_g e φ_0 são bijeções, temos que, para cada $g \in G$ fixado, φ_g é também uma bijeção.

Dado $g \in G$, seja $U_g = \varphi_g(U_1) = g \cdot \pi(U)$. Mostraremos que o conjunto de aplicações

$$\mathcal{A} = \{\varphi_g : U_1 \longrightarrow U_g \ ; \ g \in G\}$$

forma um atlas diferenciável para G/H. Para tanto, lembre-se de que U_1, que é o domínio de todas essas cartas coordenadas, foi definido como uma vizinhança aberta de $0 \in \mathfrak{m}$, sendo $\mathfrak{m}$ um subespaço de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$. Então, $\dim \mathfrak{m} = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h} = \dim G - \dim H$. Segue, portanto, que uma vez demonstrado que $\mathcal{A}$ é um atlas diferenciável para G/H, teremos mostrado que G/H é uma variedade diferenciável de dimensão igual a $\dim G - \dim H$.

Sendo $\pi_1 : U_1 \times U_2 \longrightarrow U_1$ a projeção canônica, é imediato verificar que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
U_1 \times U_2 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi_1"'] & U \arrow[d, "\pi"] \\
U_1 \arrow[r, "\varphi_0"'] & \pi(U)
\end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, que $\varphi_0 \circ \pi_1 = \pi \circ \psi$. Então, uma vez demonstrado que $\mathcal{A}$ é um atlas diferenciável, teremos que $\pi = \varphi_0 \circ \pi_1 \circ \psi^{-1}$ é diferenciável na vizinhança aberta U da identidade e. Note que isso é o suficiente para que $\pi : G \to G/H$ seja diferenciável. Realmente, para todo $g \in G$ o difeomorfismo $L_g : G \to G$ satisfaz $\pi \circ L_g = \tau_g \circ \pi$; dessa forma, $\pi : L_g(U) \longrightarrow \tau_g(\pi(U))$ será diferenciável.

3.4 A diferenciabilidade das aplicações de transição

Só nos resta mostrar que $\mathcal{A}$, como definido na seção anterior, é um atlas diferenciável para G/H. Para tanto, por definição, temos que demonstrar a diferenciabilidade das aplicações de transição.

Tome $\xi \in U_{g_1} \cap U_{g_2}$, para $g_1, g_2 \in G$, com $\xi = g_1 \cdot \exp(X)H = g_2 \cdot \exp(Y)H$

para certos $X, Y \in U_1$. Então, a aplicação de transição

$$\varphi_{g_2}^{-1} \circ \varphi_{g_1} : \varphi_{g_1}^{-1}(U_{g_1} \cap U_{g_2}) \longrightarrow \varphi_{g_2}^{-1}(U_{g_1} \cap U_{g_2})$$

é tal que $(\varphi_{g_2}^{-1} \circ \varphi_{g_1})(X) = Y$.

Sendo $\xi = g_1 \cdot \exp(X)H = g_2 \cdot \exp(Y)H$, temos que $\exp(X)H = g_1^{-1}g_2 \cdot \exp(Y)H$; fazendo $p_0 = \exp(X)$ e $q_0 = g_1^{-1}g_2 \cdot \exp(Y)$, deve existir $h_0 \in H$ tal que $p_0h_0 = q_0$. Como $\exp(Y) \in U$, temos que $q_0 = L_{g_1^{-1}g_2}(\exp(Y)) \in L_{g_1^{-1}g_2}(U)$. Com isso, $q_0 = R_{h_0}(p_0) = R_{h_0}(\exp(X)) \in L_{g_1^{-1}g_2}(U)$ e $X = \varphi_{g_1}^{-1}(\xi) \in \varphi_{g_1}^{-1}(U_{g_1} \cap U_{g_2})$ que é um aberto contido em U_1.

Pela continuidade da aplicação de multiplicação $\mu : G \times G \longrightarrow G$, existe um aberto $A \subset \varphi_{g_1}^{-1}(U_{g_1} \cap U_{g_2}) \subset U_1$ contendo X, tal que $R_{h_0}(\exp(A)) \subset L_{g_1^{-1}g_2}(U)$. Defina $\sigma = (R_{h_0} \circ \exp) : A \to L_{g_1^{-1}g_2}(U)$. Pela regra da cadeia, σ é diferenciável. Também o é a aplicação $\rho = (\pi_1 \circ \psi^{-1} \circ L_{g_2^{-1}g_1}) : L_{g_1^{-1}g_2}(U) \longrightarrow U_1$, onde $\pi_1 : U_1 \times U_2 \longrightarrow U_1$ é a projeção e $\psi : U_1 \times U_2 \longrightarrow U$ é o difeomorfismo do início da discussão.

Para concluir que $\varphi_{g_2}^{-1} \circ \varphi_{g_1} : \varphi_{g_1}^{-1}(U_{g_1} \cap U_{g_2}) \longrightarrow \varphi_{g_2}^{-1}(U_{g_1} \cap U_{g_2})$ é diferenciável, é suficiente mostrar que $\varphi_{g_2}^{-1} \circ \varphi_{g_1} = \rho \circ \sigma$ em $A \subset \varphi_{g_1}^{-1}(U_{g_1} \cap U_{g_2}) \subset U_1$, tendo em vista que diferenciabilidade é uma propriedade local.

Para o que falta, dado $X' \in A$, segue da definição de A que $\sigma(X') = \exp(X')h_0 \in L_{g_1^{-1}g_2}(U)$. Consequentemente, existe um único par $(Y_1', Y_2') \in U_1 \times U_2 = \psi^{-1}(U)$ tal que $\exp(X')h_0 = (g_1^{-1}g_2) \cdot \exp(Y_1') \cdot \exp(Y_2')$. Passando ao quociente e usando que $\exp(Y_2') \in H$, temos $g_1 \cdot \exp(X')H = g_2 \cdot \exp(Y_1')H$. Mas, pelo que vimos no início dessa discussão, $(\varphi_{g_2}^{-1} \circ \varphi_{g_1})(X') = Y_1'$. Portanto, a definição de ρ garante que

$$\begin{aligned}(\rho \circ \sigma)(X') &= \rho((g_1^{-1}g_2) \cdot \exp(Y_1') \cdot \exp(Y_2')) \\ &= \rho(L_{g_1^{-1}g_2}(\psi(Y_1', Y_2'))) = Y_1' \\ &= (\varphi_{g_2}^{-1} \circ \varphi_{g_1})(X').\end{aligned}$$

Como $X' \in A$ foi arbitrário, temos que $\varphi_{g_2}^{-1} \circ \varphi_{g_1} = \rho \circ \sigma$ em $A \subset \varphi_{g_1}^{-1}(U_{g_1} \cap U_{g_2}) \subset U_1$, conforme desejado.

3.5 A projeção natural tem posto máximo

Nesta seção, mostraremos que $\pi : G \longrightarrow G/H$ é uma submersão. Para tanto, comecemos estendendo os subespaços $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g} = T_eG$ a distribuições invariantes à esquerda em G, definidas por $\mathfrak{m}(g) = (L_g)_*(\mathfrak{m}) \subset T_gG$ e $\mathfrak{h}(g) = (L_g)_*(\mathfrak{h}) \subset T_gG$, para todo $g \in G$. Então, $T_gG = \mathfrak{m}(g) \oplus \mathfrak{h}(g)$ para todo $g \in G$. Como os elementos de $\mathfrak{g}$ são campos vetoriais em G invariantes à esquerda, temos que $\mathfrak{m}(g) = \{X(g) : X \in \mathfrak{m}\}$ e $\mathfrak{h}(g) = \{X(g) : X \in \mathfrak{h}\}$.

Proposição 3.9. *Seja $\pi : G \longrightarrow G/H$ a projeção canônica. Para $g \in G$, a aplicação $(\pi_*)_g : T_gG \longrightarrow T_{gH}(G/H)$ é sobrejetiva. Mais precisamente:*

(a) A restrição $(\pi_*)_g : \mathfrak{m}(g) \longrightarrow T_{gH}(G/H)$ é um isomorfismo.

(b) $\mathfrak{h}(g) = \ker\big((\pi_*)_g\big)$.

Demonstração. Comecemos demonstrando o item (a). Dado $g \in G$ consideremos a carta coordenada $\varphi_g : U_1 \to g \cdot \pi(U)$ em torno de $gH \in G/H$. Como φ_g é um difeomorfismo, a aplicação $(\varphi_g)_{*0} : T_0U_1 \longrightarrow T_{gH}(G/H)$ é um isomorfismo. Com isso, dado $\xi \in T_{gH}(G/H)$, existe $X \in U_1 \subset \mathfrak{m}$ tal que $\xi = \alpha'(0)$, onde

$$\alpha(t) = \varphi_g(tX) = g \cdot \exp(tX)H = \pi(g \cdot \exp(tX)) = \pi \circ L_g(\exp(tX)).$$

Então, $\xi = \pi_{*_g}((L_g)_{*_e}X(e)) = \pi_{*_g}(X(g))$, com $X(g) \in \mathfrak{m}(g) \subset T_gG$. Isso prova que $(\pi_*)_g : \mathfrak{m}(g) \longrightarrow T_{gH}(G/H)$ é sobrejetiva para todo $g \in G$. Segue que

$$\dim \mathfrak{m} = \dim \mathfrak{m}(g) \geq \dim T_{gH}(G/H) = \dim(G/H) = \dim G - \dim H = \dim \mathfrak{m}.$$

Portanto, a desigualdade acima é uma igualdade, o que implica que $(\pi_*)_g : \mathfrak{m}(g) \longrightarrow T_{gH}(G/H)$ é um isomorfismo.

Demonstremos, agora, o item (b). Considerando $(\pi_*)_g$ como $(\pi_*)_g : T_gG \longrightarrow T_{gH}(G/H)$ e usando o item anterior, temos que $\dim\ker\big((\pi_*)_g\big) = \dim T_gG - \dim T_{gH}(G/H)$; mas,

$$\dim T_gG - \dim T_{gH}(G/H) = \dim G - (\dim G - \dim H) = \dim H = \dim \mathfrak{h},$$

de sorte que $\dim\ker\big((\pi_*)_g\big) = \dim \mathfrak{h}(g)$. Com isso, se mostrarmos que $\mathfrak{h}(g) \subset \ker\big((\pi_*)_g\big)$, a prova estará terminada.

Para o que falta, dado $\xi \in \mathfrak{h}(g)$ podemos escrever $\xi = (L_g)_{*_e}(X(e)) = X(g)$, para algum $X \in \mathfrak{h}$. Como $\pi \circ L_g = \tau_g \circ \pi$, vale que $\pi_* \circ (L_g)_* = (\tau_g)_* \circ \pi_*$ e, portanto, $(\pi_*)_g(\xi) = (\tau_g)_{*_{eH}}((\pi_*)_e X(e))$. Assim, é suficiente mostrar que, se $X \in \mathfrak{h}$, então $(\pi_*)_e X(e) = 0$. Mas, se $X \in \mathfrak{h}$, então $(\pi_*)_e X(e) = \alpha'(0)$, onde $\alpha(t) = \pi(\exp(tX)) = \exp(tX)H$. Portanto, $\alpha(t) = eH$ para todo t, já que $\exp(tX) \in H$, e concluímos que $\alpha'(0) = 0$, como desejado. $\square$

Sendo π uma submersão, a propriedade característica da topologia quociente, a qual nos dava informações sobre a continuidade ou não de funções, pode ser refinada na versão dada pelo teorema a seguir.

Teorema 3.10. *Sejam M, N e P variedades diferenciáveis, $\pi : M \longrightarrow N$ uma submersão sobrejetiva e $F : N \longrightarrow P$ uma aplicação qualquer. Então, F é diferenciável se, e somente se, $F \circ \pi$ é diferenciável.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "F \circ \pi"] & \\ N \arrow[r, "F"'] & P \end{tikzcd}$$

Demonstração. Veja a Proposição 7.17 de LEE (2003). □

Como caso particular do teorema anterior (e nas notações da discussão que o precede), segue do fato de $\pi : G \longrightarrow G/H$ ser uma submersão sobrejetiva que, dadas uma variedade diferenciável P e uma aplicação $F : G/H \longrightarrow P$, temos F diferenciável se, e somente se, $F \circ \pi$ diferenciável.

Exemplo 3.11. *Dado $g \in G$, considere o homeomorfismo $\tau_g : G/H \longrightarrow G/H$, apresentado anteriormente. Afirmamos que, para cada $g \in G$, a translação à esquerda τ_g é um difeomorfismo. De fato, como $\tau_g \circ \pi = \pi \circ L_g$, a qual é uma aplicação diferenciável, a discussão do parágrafo anterior garante que τ_g é diferenciável. Mas, como $(\tau_g)^{-1} = \tau_{g^{-1}}$, segue que $(\tau_g)^{-1}$ também é diferenciável.*

3.6 Ações de grupo e a variedade G/H

Vimos na seção anterior que se H é um subgrupo fechado de um grupo de Lie G, então o espaço quociente G/H pode ser munido de uma estrutura diferenciável de modo a tornar-se uma variedade diferenciável de dimensão igual a $\dim G - \dim H$. Nesta seção, veremos um método bastante útil para a construção de variedades desse tipo.

Definição 3.12. *Uma ação de um grupo de Lie G em uma variedade M é uma aplicação diferenciável $G \times M \longrightarrow M$, denotada por $(g, p) = gp$, onde $g \in G$ e $p \in M$, e satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $(gh)p = g(hp)$, para todo $h \in G$.

(ii) $ep = p$, onde e denota o elemento identidade de G.

Dada uma dada ação como acima, se fixamos $g \in G$, então $p \mapsto gp$ é um difeomorfismo com inversa $p \mapsto g^{-1}p$. Uma ação $G \times M \longrightarrow M$ é dita *transitiva* se, para todos $p, q \in M$, existir $g \in G$ tal que $gp = q$.

Exemplo 3.13. *Sob as convenções de vetor coluna, definimos a aplicação $GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, que associa $(A, x) \in GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ a Ax. A associatividade da operação de produto de matrizes assegura a validade da condição (i), na definição de ação. Quanto a (ii), se $I \in GL(n, \mathbb{R})$ denota a matriz identidade de ordem n, é imediato que $Ix = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Então, a aplicação acima define uma ação de $GL(n, \mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^n$, e afirmamos que tal ação não é transitiva; realmente, dados $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $0 \in \mathbb{R}^n$, não existe $A \in GL(n, \mathbb{R})$ tal que $A0 = x$. Observe que essa mesma ação, se restrita a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,* *torna-se transitiva; de fato, dados $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, Álgebra Linear elementar garante a existência de $A \in GL(n, \mathbb{R})$ tal que $Ax = y$.*

Exemplo 3.14. *Para $n \geq 2$ inteiro, denotemos por $\mathfrak{P}_n$ a coleção de todas matrizes $n \times n$ reais, simétricas e positivas definidas. Então, $\mathfrak{P}_n$ pode ser identificado com o conjunto das matrizes correspondentes a produtos internos em $\mathbb{R}^n$, e é um subconjunto aberto e convexo do espaço vetorial $S(n, \mathbb{R})$ das matrizes $n \times n$ reais e simétricas. Dessa forma, $\mathfrak{P}_n$ é uma variedade suave de dimensão $\frac{n(n+1)}{2}$. A correspondência biunívoca entre $\mathfrak{P}_n$ e o conjunto dos produtos internos em $\mathbb{R}^n$ associa, a $B \in \mathfrak{P}_n$, o produto interno $\langle \ , \ \rangle$ tal que $\langle x, y \rangle = y^T Bx$, para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$.*

Definamos uma aplicação $GL(n, \mathbb{R}) \times \mathfrak{P}_n \longrightarrow \mathfrak{P}_n$ por $g(B) = gBg^T$, para todo par $(g, B) \in GL(n, \mathbb{R}) \times \mathfrak{P}_n$. Para ver que tal aplicação está bem definida, veja que, por um lado, $g(B)^T = (gBg^T)^T = gB^T g^T = gBg^T$, e portanto $g(B)$ é simétrica. Por outro, dado $v \in \mathbb{R}^n$ não nulo, segue de $g \in GL(n, \mathbb{R})$ que $g^T(v) \in \mathbb{R}^n$ também é não nulo; logo, $v^T(g(B))v = v^T(gBg^T)v = (g^T v)^T B(g^T v) > 0$, haja vista B ser positiva definida.

Mostremos que $GL(n, \mathbb{R}) \times \mathfrak{P}_n \longrightarrow \mathfrak{P}_n$, como definida acima, é uma ação. Primeiramente, é claro que $I_n(B) = I_n B {I_n}^T = B$, onde $I_n \in GL(n, \mathbb{R}^n)$ denota a matriz identidade. Também, dados $g, h \in GL(n, \mathbb{R}^n)$, temos $g(h(B)) = g(hBh^T) = ghBh^T g^T = (gh)B(gh)^T = (gh)(B)$.

Afirmamos que a ação acima é transitiva. Para mostrar isso, precisamos provar que, dados $B, C \in \mathfrak{P}_n$, existe $g \in GL(n, \mathbb{R}^n)$ para o qual $g(B) = C$. Mostremos primeiramente que, dada $B \in \mathfrak{P}_n$, existe $B_1 \in \mathfrak{P}_n \subset GL(n, \mathbb{R}^n)$ tal que ${B_1}^2 = B$: sendo B simétrica, o Teorema Espectral garante a existência de $g \in O(n)$ tal que $B = g^T Dg$, com $D = diag\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os autovalores de B, repetidos de acordo com suas multiplicidades. Por outro lado, como B é positiva definida, seus autovalores são positivos. Podemos, então, definir $D_1 = diag\,(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$, de sorte que $D = D_1^2$ e

$$B = g^T Dg = g^{-1} D_1^2 g = (g^{-1} D_1 g)^2.$$

Assim, sendo $B_1 = g^{-1} D_1 g$, temos que $B_1 \in \mathfrak{P}_n$ e $B_1^2 = B$. Voltando ao problema original, dados $B, C \in \mathfrak{P}_n$ existem $B_1, C_1 \in \mathfrak{P}_n$ tais que ${B_1}^2 = B$ e ${C_1}^2 = C$. Então, $B_1(I) = B_1 B_1^T = {B_1}^2 = B$ e, analogamente, $C_1(I) = C$. Tomando $g = C_1 {B_1}^{-1} \in GL(n, \mathbb{R}^n)$, temos

$$g(B) = g(B_1(I)) = (gB_1)(I) = (C_1 {B_1}^{-1} B_1)(I) = C_1(I) = C.$$

Exemplo 3.15. *Se G é um grupo de Lie e H é um subgrupo fechado de G, então existe uma ação natural $G \times G/H \longrightarrow G/H$, que associa $g'gH$ ao par (g', gH). Isso de fato define uma ação de grupos de Lie, já que $(g'g)H = g'(gH)$ e $eH = H$. Tal ação é transitiva, pois para $gH, g'H \in G/H$, temos $g'g^{-1} \in G$ e $(g'g^{-1})gH = g'H$. Note que essa* *ação nada mais é do que aquela dada pelas translações τ_g, com $g \in G$.*

Se $G \times M \longrightarrow M$ é uma ação de um grupo de Lie G sobre a variedade diferenciável M e $p \in M$, então $I_p = \{g \in G; gp = p\}$ é um subgrupo fechado de G, denominado o *subgrupo de isotropia de* p. Fixado $p \in M$ fazendo $H := I_p$, existe uma aplicação natural j da variedade quociente G/H em M que associa a cada classe gH o ponto gp. Tal aplicação está bem definida, isto é, não depende da escolha do representante da classe gH. De fato, se $g_1H = g_2H$, então, por definição, $g_1^{-1}g_2 \in H$ e, daí, $g_1^{-1}g_2p = p$; portanto, $g_2p = g_1p$. Na proposição a seguir, veremos a importância dessa aplicação natural, a qual é, em verdade, um difeomorfismo entre as variedades M e G/H se a ação de G sobre M for transitiva.

Proposição 3.16. *Seja $\theta : G \times M \longrightarrow M$ uma ação transitiva do grupo de Lie G sobre a variedade diferenciável M, e seja H o subgrupo de isotropia de um ponto $p \in M$. A aplicação natural $j : G/H \longrightarrow M$, dada por $j(gH) = \theta(g, p) = gp$, é um difeomorfismo. Em particular, a projeção $\tilde{\pi} : G \longrightarrow M$, dada por $\tilde{\pi}(g) = gp$, é uma submersão.*

Demonstração. Fixado $g \in G$, denotemos por $\theta_g : M \longrightarrow M$ a aplicação dada por $\theta_g(x) = \theta(g, x)$, para todo $x \in M$. Note que j é diferenciável, pois $\pi : G \to G/H$ é uma submersão sobrejetiva e $j \circ \pi$ é diferenciável, por ser a restrição da ação $\theta : G \times M \longrightarrow M$ a $\theta : G \times \{p\} \longrightarrow M$. Além disso, dados $aH, bH \in G/H$ tais que $j(aH) = j(bH)$, isto é, $ap = bp$, temos $a^{-1}bp = p$; pela definição de H, segue que $a^{-1}b \in H$ e, portanto, $aH = bH$. Com isso, j é injetiva.

Pela transitividade da ação, dado $m \in M$ existe $g \in G$ tal que $gp = m$. Daí, j é sobrejetiva. Resta apenas mostrar que a inversa de j é diferenciável. Se mostrarmos que j tem posto constante, o Teorema 7.15 de LEE (2003) garantirá que nada mais haverá a fazer (uma vez que j é uma bijeção diferenciável). Observe que, pela definição da ação, temos $j(abH) = (ab)p = a(bp) = aj(bH)$, isto é, $j \circ \tau_a = \theta_a \circ j$. Logo,

$$j_* \circ (\tau_a)_* = (\theta_a)_* \circ j_*$$

para cada $a \in G$. Mostremos que, para $gH, g'H \in G/H$, as transformações lineares $j_{*_{gH}}$ e $j_{*_{g'H}}$ têm postos iguais. Para tanto, seja $g_0 = g'g^{-1}$, de modo que $\tau_{g_0}(gH) = g'H$. A igualdade de composições acima garante que o diagrama

$$\begin{tikzcd} T_{gH}(G/H) \arrow[r, "j_{*_{gH}}"] \arrow[d, "(\tau_{g_0})_{*_{gH}}"'] & T_{gp}M \arrow[d, "(\theta_{g_0})_{*_{gp}}"] \\ T_{g'H}(G/H) \arrow[r, "j_{*_{g'H}}"'] & T_{g'p}M \end{tikzcd}$$

comuta. Como as aplicações lineares verticais são isomorfismos, as transformações lineares horizontais têm postos iguais.

Por fim, como $\tilde{\pi} = j \circ \pi$, sendo j um difeomorfismo e π uma submersão, temos que $\tilde{\pi}$ é submersão. $\square$

Exemplo 3.17. *Seja $SO(n+1) \subset GL(n+1, \mathbb{R})$ o conjunto formado pelas matrizes ortogonais $(n+1) \times (n+1)$ de determinante igual a 1. A restrição da ação $GL(n+1, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ do Exemplo 3.13 a $SO(n+1) \times \mathbb{S}^n$ fornece uma ação transitiva $SO(n+1) \times \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$. De fato, dados $x, y \in \mathbb{S}^n$, podemos considerar bases ortonormais positivas α e β, com α contendo x e β contendo y, e assim tomar uma matriz ortogonal A, que preserva orientação e aplica x em y. Então, A tem determinante 1 e é tal que $Ax = y$.*

O subgrupo de isotropia de $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{S}^n$ consiste dos elementos de $SO(n+1)$ da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

com $B \in SO(n)$. Identificando esse subgrupo com $SO(n)$, o difeomorfismo natural j do exemplo anterior garante que $\mathbb{S}^n = SO(n+1)/SO(n)$. Dessa forma, vemos a esfera $\mathbb{S}^n$ como uma variedade quociente.

Proposição 3.18. *Seja G um grupo de Lie que age transitivamente em uma variedade diferenciável conexa M. Se G_0 denota a componente conexa da identidade de G, então G_0 age transitivamente em M.*

Demonstração. Sendo $p \in M$ e $H = \{g \in G\,;\, gp = p\}$ o subgrupo de isotropia de p, a Proposição 3.16 garante que a aplicação natural $j : G/H \longrightarrow M$, dada por $j(gH) = gp$, é um difeomorfismo. Sendo $\pi : G \to G/H$ a projeção canônica, é imediato que basta mostrar que $\pi(G_0) = G/H$.

Para o que falta, note que, como π é uma submersão, temos que π é aberta; como (pela Proposição 2.25) G_0 é aberto em G, segue que $\pi(G_0)$ é aberto em G/H. Basta, então, mostrar que $\pi(G_0)$ é fechado em G/H. Para tanto, seja Λ um conjunto de índices tal que $G = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_0 g_\lambda$. Como $G_0 g_\lambda$ é homeomorfo a G_0 e π é aberta, para cada $\lambda \in \Lambda$ a imagem $\pi(G_0 g_\lambda)$ é aberta em G/H. Denote por Λ_0 o subconjunto de Λ formado pelos índices λ tais que $\pi(G_0 g_\lambda) \cap \pi(G_0) = \emptyset$. Se mostrarmos que $\pi(G_0 g_\lambda) \cap \pi(G_0) = \emptyset$ ou $\pi(G_0 g_\lambda) = \pi(G_0)$ para todo $\lambda \in \Lambda$, concluiremos que

$$\pi(G_0) = G/H \setminus \Big(\bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} \pi(G_0 g_\lambda) \Big)$$

e, portanto, $\pi(G_0)$ será fechado, uma vez que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} \pi(G_0 g_\lambda)$ é uma união de abertos de

G/H.

Se $\pi(G_0) \cap \pi(G_0 g_\lambda) \neq \emptyset$, existem $g_0, \tilde{g}_0 \in G_0$ tais que $g_0 H = \tilde{g}_0 g_\lambda H$; então, $H = g_0^{-1} \tilde{g}_0 g_\lambda H$. Agora, dado $gH \in \pi(G_0)$, mostremos que $gH \in \pi(G_0 g_\lambda)$. Como $gH \in \pi(G_0)$, existe $g_0' \in G_0$ tal que $gH = g_0' H$. Portanto, pelo que vimos acima,

$$gH = g_0'(g_0^{-1} \tilde{g}_0 g_\lambda H) = (g_0' g_0^{-1} \tilde{g}_0) g_\lambda H.$$

Mas, novamente pela Proposição 2.25, G_0 é um subgrupo de G, de sorte que $g_0' g_0^{-1} \tilde{g}_0 \in G_0$. Portanto, as igualdades acima garantem que $gH \in \pi(G_0 g_\lambda)$.

Logo, $\pi(G_0) \subset \pi(G_0 g_\lambda)$, e um argumento inteiramente análogo nos permite estabelecer a inclusão contrária. □

No que concerne ações de grupos de Lie sobre variedades riemannianas, o teorema a seguir, devido a R. Palais, é o resultado de nosso interesse.

Teorema 3.19. *Sejam M uma variedade riemanniana e $I(M)$ grupo das isometrias de M, munido com a operação de composição. Sendo ϕ a aplicação que associa $(\phi, p) \in I(M) \times M$ a $\phi(p)$, existe uma única maneira de tornar $I(M)$ uma variedade diferenciável tal que:*

(i) $I(M)$ é um grupo de Lie.

(ii) A ação natural $I(M) \times M \longrightarrow M$ é diferenciável.

(iii) Um homomorfismo $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow I(M)$ é diferenciável se a aplicação $\mathbb{R} \times M \longrightarrow M$, que associa (t, p) a $\beta(t)p$, o for.

Demonstração. Veja o capítulo IV de PALAIS (1957). □

Exemplo 3.20. *Nas notações da Proposição* 3.19 *e tendo em vista o resultado do Teorema de Palais, concluímos que se M é uma variedade riemanniana conexa tal que o grupo $I(M)$ de suas isometrias age transitivamente em M, então a componente conexa de $I(M)$ contendo a aplicação identidade $id : M \to M$, denotada por $I_0(M)$, também age transitivamente em M. Assim, fixado $p \in M$ e denotando por H o subgrupo de isotropia de p pela ação de $I_0(M)$, a Proposição 3.16 garante que a aplicação natural $j : I_0(M)/H \to M$ é um difeomorfismo. Logo, como variedade diferenciável, podemos identificar M com a variedade quociente $I_0(M)/H$.*

Observação 3.21. *Ignorando diferenciabilidade por um instante, suponhamos que um grupo de Lie G age transitivamente num conjunto Σ (a definição de ação em tal caso é idêntica à dada anteriormente). Se H é o subgrupo de isotropia de um elemento $p \in \Sigma$, então ainda podemos considerar a aplicação natural j de G/H sobre Σ, que, pelos mesmos argumentos de antes, é uma bijeção. Se o subgrupo H for fechado em G, então é possível tornar Σ uma variedade impondo que j seja um difeomorfismo. Procedendo dessa forma, a ação de G sobre Σ será diferenciável e a projeção $g \longrightarrow gp$ de G em Σ será uma* *submersão. Doravante, assumiremos tal fato sem maiores comentários.*

4 MÉDIAS EM GRUPOS DE LIE COMPACTOS

O principal resultado que apresentaremos neste capítulo se refere à existência de estruturas riemannianas invariantes por uma dada família da aplicações. Para isso, precisaremos passar pela definição de uma medida de Haar. Ela nos dará uma forma de integrar sobre grupos de Lie compactos.

4.1 A medida de Haar

Seja G um grupo de Lie conexo de dimensão n. Consideremos em G campos $X_1, \ldots, X_n$, invariantes à esquerda e que, em cada ponto $g \in G$, formam uma base de T_gG. Os campos vetoriais $\{X_1, \ldots, X_n\}$ determinam uma orientação para G, a qual suporemos fixada. Sejam $\theta_1, \ldots, \theta_n$ $1-$formas em G que, em cada ponto $g \in G$, formam a base de T_g^*G algebricamente dual de $\{X_1, \ldots, X_n\}$, isto é, tais que $\theta_i(X_j) = \delta_{ij}$ para $i, j = 1, \ldots, n$. Note que

$$((L_g)^*\theta_i)X_j = \theta_i((L_g)_*X_j) = \theta_i(X_j) = \delta_{ij}$$

para todos i, j, de sorte que

$$(L_g)^*\theta_i = \theta_i$$

para todos $1 \leq i \leq n$ e $g \in G$. Graças a essa igualdade dizemos que cada θ_i é uma $1-$forma invariante à esquerda.

Se $dG = \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n$, uma n-forma em G, observemos que dG também merece ser dita invariante à esquerda, já que

$$((L_g)^*dG) = ((L_g)^*\theta_1) \wedge \ldots \wedge ((L_g)^*\theta_n) = \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n.$$

Também, dG não se anula em ponto algum de G, pois $dG(X_1, \ldots, X_n) = 1$ em G.

O resultado a seguir garante que toda $n-$forma em G invariante à esquerda é um múltiplo de dG.

Lema 4.1. *Se Ω é uma n-forma invariante à esquerda em G, então $\Omega = \lambda dG$, para algum número real λ. Em particular, o espaço vetorial das n-formas em G invariantes à esquerda tem dimensão* 1.

Demonstração. Como G é uma variedade de dimensão n, existe um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\Omega_e = \lambda(dG)_e$. Mas, a invariância à esquerda de ambas Ω e dG garante que, para $g \in G$,

$$\Omega_g = (L_{g^{-1}})^*\Omega_e = \Omega_e = \lambda(dG)_e = \lambda(L_{g^{-1}})^*(dG_e).$$

Com isso, $\Omega_g = \lambda(dG)_g$, conforme desejado. □

Se G é um grupo de Lie compacto e conexo, então, multiplicando dG por uma constante positiva, se necessário, podemos supor que $\int_G dG = 1$. Por outro lado, uma vez assumida tal normalização, o lema anterior garante que se Ω é uma $n-$forma invariante à esquerda em G tal que $\int_G \Omega = 1$, então $\Omega = dG$. Doravante, suporemos fixada em G uma $n-$forma invariante à esquerda dG como acima, à qual nos referiremos como a *medida de Haar* de G.

A Proposição 4.3 a seguir estabelece algumas propriedades importantes da medida de Haar. Antes, contudo, precisamos de um resultado auxiliar que também é importante em si mesmo.

Lema 4.2. *Se G é um grupo topológico compacto e $f : G \to \big((0, +\infty), \cdot\big)$ é um homomorfismo contínuo, então $f(g) = 1$ para todo $g \in G$.*

Demonstração. Como G é compacto e f é contínua, $f(G)$ é um subconjunto compacto de $(0, +\infty)$, logo fechado e limitado. Se $f(g) \neq 1$ para algum $g \in G$, temos dois casos a considerar:

i. Se $f(g) < 1$, então, como f é homomorfismo, teríamos $f(g^n) = (f(g))^n \to 0$. Mas, como $f(G)$ é fechado, deveríamos ter $0 \in f(G) \subset (0, +\infty)$, o que é um absurdo.

i. Se $f(g) > 1$, então, argumentando essencialmente como em i., concluímos que $(f(g^n))_{n\in\mathbb{N}}$ seria uma sequência ilimitada contida no subconjunto limitado $f(G)$, o que é um absurdo.

Como os dois casos apresentados acima não são possíveis, temos $f \equiv 1$. □

Proposição 4.3. *Sejam G um grupo de Lie compacto e conexo e dG a medida de Haar de G. Então:*

(a) dG é invariante à direita, isto é, $(R_g)^*dG = dG$, para todo $g \in G$.

(b) Se $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $g \in G$, temos

$$\int_G \varphi dG = \int_G (\varphi \circ L_g) dG = \int_G (\varphi \circ R_g) dG.$$

Demonstração. Para o item (a), note primeiramente que $L_g \circ R_h = R_h \circ L_g$, para todos $g, h \in G$. Com isso,

$$\begin{aligned} (L_g)^*((R_h)^*dG) &= ((L_g)^* \circ (R_h)^*)dG = (R_h \circ L_g)^*dG = (L_g \circ R_h)^*dG \\ &= (R_h)^*((L_g)^*dG) = (R_h)^*dG, \end{aligned}$$

uma vez que dG é invariante à esquerda. Assim, a n-forma $(R_h)^*dG$ é invariante à esquerda, para todo $h \in G$, e o Lema 4.1 garante que, para cada $h \in G$ fixado, existe um escalar $f(h) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $(R_h)^*dG = f(h)dG$.

O argumento do parágrafo anterior fornece uma função $f : G \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, que associa a $h \in G$ o escalar $f(h)$ e satisfaz $(R_h)^* dG = f(h) dG$. Se mostrarmos que f é um homomorfismo contínuo cuja a imagem está contida em $(0, +\infty)$, o lema anterior nos dará $f \equiv 1$ e, com isso, $(R_h)^* dG = dG$ para todo $h \in G$, isto é dG será invariante à direita.

Para o que falta, lembrando que $dG(X_1, \ldots, X_n) = 1$, obtemos

$$(R_h)^* dG(X_1, \ldots, X_n) = f(h) dG(X_1, \ldots, X_n) = f(h).$$

Com isso, f é claramente contínua em G, e é imediato que $f(e) = 1$. Agora, como G é conexo e f contínua, segue que $f(G) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é conexo; mas, como $1 \in f(G)$, temos que $f(G) \subset (0, +\infty)$. Por fim, para ver que f é um homomorfismo, sejam dados $g, h \in G$; temos:

$$\begin{aligned} f(gh) dG &= (R_{gh})^* dG = (R_g \circ R_h)^* dG = (R_h)^* \circ (R_g)^* dG \\ &= (R_h)^* ((R_g)^* dG) = (R_h)^* (f(g) dG) \\ &= f(g)(R_h)^* dG = f(g) f(h) dG, \end{aligned}$$

de sorte que $f(g)f(h) = f(gh)$.

Para provar (b), seja dado $g \in G$. Como G é conexo por caminhos, existe um caminho contínuo $\alpha : [0,1] \longrightarrow G$ tal que $\alpha(0) = e$ e $\alpha(1) = g$. Logo, $H : [0,1] \times G \longrightarrow G$, dada por $H(t, x) = L_{\alpha(t)}(x)$, é uma homotopia entre $L_e = Id_G$ e L_g (visto que $L_{\alpha(t)}$ depende continuamente de t). Pelo Teorema de Aproximação de Whitney (veja o Teorema 10.21 de LEE (2003)), existe uma aplicação diferenciável $\tilde{H} : [0,1] \times G \longrightarrow G$ homotópica a H. Então, o Teorema de Stokes, juntamente com a comutação entre pull-backs e derivadas exteriores, fornece

$$\begin{aligned} \int_{\partial(G\times[0,1])} \tilde{H}^*((L_g)^*(\varphi dG)) &= \int_{G\times[0,1]} d(\tilde{H}^*((L_g)^*(\varphi dG))) = \int_{G\times[0,1]} (\tilde{H}^* \circ (L_g)^*)(d(\varphi dG)) \\ &= \int_{G\times[0,1]} (\tilde{H}^* \circ (L_g)^*)(0) = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\int_{\partial(G\times[0,1])} \tilde{H}^*((L_g)^*(\varphi dG)) = \int_G (Id_G)^*(\varphi dG) - \int_G (L_g)^*(\varphi dG),$$

de sorte que

$$\int_G (Id_G)^*(\varphi dG) = \int_G (L_g)^*(\varphi dG).$$

Segue daí e da invariância à esquerda de dG que

$$\int_G \varphi dG = \int_G (\varphi \circ L_g)(L_g)^* dG = \int_G (\varphi \circ L_g) dG.$$

A outra igualdade pode ser obtida de modo análogo, utilizando o fato de que dG também é invariante à direita. $\square$

4.2 Produtos internos invariantes

Nesta seção, mostraremos como construir um produto interno em um espaço vetorial real de dimensão finita V que seja invariante por uma família de operadores lineares que seja um subgrupo compacto de $\mathrm{GL}(V)$. Esse resultado será de fundamental importância para a demonstração da existência de uma métrica riemanniana invariante por um subgrupo compacto.

Proposição 4.4. *Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita e G um subgrupo compacto de $\mathrm{GL}(V)$. Então, existe um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ em V tal que $\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle = \langle x, y\rangle$, para todos $x, y \in V$ e todo operador linear $\varphi \in G$.*

Demonstração. Consideremos primeiramente o caso em que G é conexo.

Sendo $\langle\ ,\ \rangle_0$ um produto interno qualquer em V e dG a medida de Haar em G, defina, para $v, w \in V$,

$$\langle v, w\rangle := \int_G f_{v,w}(g)dG,$$

onde $f_{v,w}(g) = \langle g(v), g(w)\rangle_0$. É imediato verificar que $\langle\ ,\ \rangle$ é uma forma bilinear simétrica em V. Para mostrarmos que $\langle\ ,\ \rangle$ é positiva-definida, basta observar que, fixado $v \in V\backslash\{0\}$, a aplicação $g \mapsto f_{v,v}(g)$ é contínua e estritamente positiva; assim, $\int_G f_{v,v}(g)dG > 0$.

Para concluir a demonstração no caso em que G é conexo, resta mostrar que os elementos de G preservam o produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Para tanto, dados $v, w \in V$ e $\varphi \in G$, note que

$$\langle \varphi(v), \varphi(w)\rangle = \int_G f_{\varphi(v),\varphi(w)}(g)dG = \int_G f_{v,w}(g\varphi)dG = \int_G (f_{v,w} \circ R_\varphi)(g)dG.$$

Mas, como G é um subgrupo compacto e conexo de $\mathrm{GL}(V)$, a Proposição 4.3 garante que

$$\int_G (f_{v,w} \circ R_\varphi)(g)dG = \int_G f_{v,w}(g)dG = \langle v, w\rangle.$$

Consideremos, agora, o caso em que G não é conexo. Pelo Corolário 2.25 e nas notações que o precede, G_0 é um subgrupo de Lie de G normal e aberto. Escolha um conjunto Λ de índices para o qual

$$G = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} G_0 g_\lambda = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda G_0.$$

Como G_0 aberto e $L_g : G \to G$ é um homeomorfismo para todo $g \in G$, segue que $g_\lambda G_0$

é também aberto. Como G é compacto por hipótese, da cobertura aberta $\{g_\lambda G_0\}_{\lambda\in\Lambda}$ podemos extrair uma subcobertura finita $\{x_i G_0\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$.

Agora, como $G_0 \subset \mathrm{GL}(V)$ é um subgrupo compacto e conexo, o caso anterior garante a existência de um produto interno $\langle\ ,\ \rangle_0$ em V que é invariante por todos os elementos de G_0. Definindo em V a forma bilinear $(v,w) \mapsto \langle v,w\rangle$ por

$$\langle v,w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i(v), x_i(w)\rangle_0,$$

é imediato verificar que $\langle\ ,\ \rangle$ é um produto interno em V. Se H é o conjunto dos elementos $h \in G$ tais que h preservam o produto interno $\langle\ ,\ \rangle$, vamos mostrar que $H = G$. Para isto, é suficiente mostraremos que H é um subgrupo de G que contém $\{x_1,\ldots,x_n\}$ e G_0:

i. $H < G$: para $\tilde{h}, h \in H$ e $v,w \in V$, vale

$$\begin{aligned}\langle \tilde{h}h^{-1}(v), \tilde{h}h^{-1}(w)\rangle &= \langle \tilde{h}(h^{-1}(v)), \tilde{h}(h^{-1}(w))\rangle = \langle h^{-1}(v), h^{-1}(w)\rangle \\ &= \langle h(h^{-1}(v)), h(h^{-1}(w))\rangle = \langle v,w\rangle.\end{aligned}$$

Com isso, $\tilde{h}h^{-1} \in H$.

ii. $G_0 \subset H$: dados $g \in G_0$ e $v,w \in V$, a normalidade de G_0 em G garante que, para cada índice $1 \le i \le n$, existe um elemento $g_i \in G_0$ tal que $x_i g = g_i x_i$. Então, uma vez que $\langle\ ,\ \rangle_0$ é invariante pelos elementos de G_0, temos

$$\begin{aligned}\langle g(v), g(w)\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \langle x_i(g(v)), x_i(g(w))\rangle_0 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle g_i(x_i(v)), g_i(x_i(w))\rangle_0 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle x_i(v), x_i(w)\rangle_0 = \langle v,w\rangle.\end{aligned}$$

iii. $x_k \in H$, para $1 \le k \le n$: dados $v,w \in V$, temos

$$\langle x_k(v), x_k(w)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i(x_k(v)), x_i(x_k(w))\rangle_0.$$

Como $x_i x_k \in G = \bigsqcup_{j=1}^{n} x_j G_0$, para cada índice $1 \le i \le n$, existem únicos $\sigma(i) \in \{1,\ldots,n\}$ e $g_{ik} \in G_0$ tais que $x_i x_k = g_{ik} x_{\sigma(i)}$. Então,

$$\langle x_k(v), x_k(w)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle g_{ik}(x_{\sigma(i)}(v)), g_{ik}(x_{\sigma(i)}(w))\rangle_0 = \sum_{i=1}^{n} \langle x_{\sigma(i)}(v), x_{\sigma(i)}(w)\rangle_0,$$

onde, na última igualdade acima, utilizamos mais uma vez o fato de que $\langle\ ,\ \rangle_0$ é invariante pelos elementos de G_0. Agora, é fácil ver que a aplicação $\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ é uma bijeção, de sorte que o último somatório acima nos dá

$$\sum_{i=1}^{n} \langle x_{\sigma(i)}(v), x_{\sigma(i)}(w)\rangle_0 = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i(v), x_i(w)\rangle_0 = \langle v, w\rangle.$$

Combinando as duas igualdades acima, concluímos que $x_k \in H$, conforme desejado. $\square$

Corolário 4.5. *Sejam $n \geq 2$ e G um subgrupo compacto de $GL(n,\mathbb{R})$. Então, existe um elemento $g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ tal que $gGg^{-1} \subset O(n,\mathbb{R})$.*

Demonstração. Pela proposição anterior, existe um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ em $\mathbb{R}^n$ tal que $\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\varphi \in G$. Seja B a matriz que representa $\langle\ ,\ \rangle$ em relação à base canônica de $\mathbb{R}^n$, isto é, tal que $\langle x, y\rangle = y^T Bx$, para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$. Então, é imediato que a invariância de $\langle\ ,\ \rangle$ pelos elementos de G se traduz na igualdade $h^T Bh = B$, para todo $h \in G$.

Consideremos, agora, a ação $GL(n,\mathbb{R}) \times \mathfrak{P}_n \longrightarrow \mathfrak{P}_n$ definida no Exemplo 3.14, onde $\mathfrak{P}_n$ denota o conjunto das matrizes quadradas reais de ordem n, simétricas e positivas definidas. Uma vez que B é simétrica e positiva definida, aquele exemplo garante a existência de $g \in \mathfrak{P}_n$ tal que $g^2 = B$. Mostremos que $gGg^{-1} \subset O(n,\mathbb{R})$.

Para o que falta, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $h \in G$, temos de mostrar que

$$\langle (ghg^{-1})x, (ghg^{-1})y\rangle = \langle x, y\rangle$$

ou, o que é o mesmo, que $(ghg^{-1})^T(ghg^{-1}) = Id$. Mas, como g é simétrica e tal que $g^2 = B$, temos

$$(ghg^{-1})^T(ghg^{-1}) = (g^{-1})^T h^T g^T ghg^{-1} = (g^{-1})^T h^T g^2 hg^{-1} = (g^{-1})^T h^T Bhg^{-1}.$$

Por fim, utilizando que $h^T Bh = B$ e novamente que $B = g^2$, com g simétrica, podemos escrever

$$(ghg^{-1})^T(ghg^{-1}) = (g^{-1})^T Bg^{-1} = (g^{-1})^T g^2 g^{-1} = (g^{-1})^T g^T = (gg^{-1})^T = Id.$$

$\square$

Observação 4.6. *Uma consequência do teorema de Peter-Weyl (ver Proposição 4.1 de BRÖCKER (2013)) é que todo grupo de Lie compacto é isomorfo a um subgrupo compacto de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, para um inteiro n suficientemente grande. Usando esse resultado juntamente com o corolário anterior, concluímos que todo grupo de Lie compacto é isomorfo a um subgrupo de $O(n,\mathbb{R})$, para um inteiro n suficientemente grande. Então, os grupos de Lie* *compactos são precisamente (a menos de isomorfismo) os subgrupos fechados de* $O(n,\mathbb{R})$*, com* n *variando sobre todos os inteiros positivos. Para* $n=1$ *o círculo unitário* $\mathbb{S}^1$ *dos números complexos de módulo* 1 *é o único grupo de Lie conexo* 1*-dimensional.*

4.3 Estruturas riemannianas invariantes

Nesta seção, estenderemos largamente os argumentos da seção anterior a variedades diferenciáveis. Começamos demonstrando a existência de métricas riemannianas invariantes por subgrupos compactos de seus grupos de difeomorfismos. Nesse sentido, a demonstração da proposição a seguir é muito similar àquela da Proposição 4.4; por isso, alguns detalhes serão omitidos.

Proposição 4.7. *Sejam* M *uma variedade diferenciável e* G *um grupo de Lie compacto, que é também um subgrupo do grupo de difeomorfismos de* M*. Então, existe uma métrica riemanniana* $\langle\ ,\ \rangle$ *em* M *tal que os elementos de* G *são isometrias de* $\{M, \langle\ ,\ \rangle\}$*.*

Demonstração. Como antes, consideremos primeiramente o caso em que G é conexo. Seja $\langle\ ,\ \rangle_0$ uma métrica riemanniana qualquer em M. Dados $p\in M$ e $v,w\in T_pM$ definamos

$$\langle v,w\rangle_p = \int_G f_p(g)dG,$$

onde $f_p(g) = \langle (g_*)_p(v), (g_*)_p(w)\rangle_0$ e dG denota a medida de Haar de G. Da mesma forma que na prova da Proposição 4.4, garantimos que os elementos de G preservam o produto interno $\langle\ ,\ \rangle_p$ de T_pM. Também, é fácil verificar que $p\mapsto \langle\ ,\ \rangle_p$ define uma métrica riemanniana em M.

Agora, suponhamos que G não é necessariamente conexo, e seja G_0 a componente conexa de G contendo a identidade. Pelo Corolário 2.25, sabemos que G_0 é um subgrupo de Lie normal de G, de sorte que podemos escrever $G=\bigsqcup_{g_\lambda\in\Lambda} G_0 g_\lambda = \bigsqcup_{g_\lambda\in\Lambda} g_\lambda G_0$, para algum conjunto Λ de índices. Argumentando como antes, a compacidade de G garante que podemos extrair, da cobertura aberta $\{g_\lambda G_0\}_{\lambda\in\Lambda}$, uma subcobertura finita $\{x_i G_0\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$.

Uma vez que G_0 é um subgrupo de Lie compacto e conexo, o caso anterior assegura a existência de uma estrutura riemanniana $\langle\ ,\ \rangle_0$ em M, a qual é invariante pelos elementos de G_0. A partir desta, definimos uma nova métrica em M pondo $\langle v,w\rangle_p = \sum_{i=1}^n \langle (x_i)_{*_p}(v), (x_i)_{*_p}(w)\rangle_0$, para todos $p\in M$ e $v,w\in T_pM$. A mesma demonstração apresentada na Proposição 4.4 garante que G preserva o produto interno $\langle\ ,\ \rangle_p$, para todo $p\in M$. Por fim, também aqui, é imediato que $p\mapsto\langle\ ,\ \rangle_p$ é uma estrutura riemanniana em M. $\square$

O próximo resultado relaxa a suposição de compacidade de G, assumida na proposição anterior. Para seu enunciado, recorde que se um grupo de Lie G age em uma variedade diferenciável M e p é um ponto de M, então o subgrupo de isotropia de p é o subgrupo H de G, definido por $H = \{g \in G\,;\, g(p) = p\}$. Assim, vendo os elementos de H como difeomorfismos de M, é imediato que H age naturalmente sobre T_pM; nesse caso, dizemos que um produto interno $\langle\ ,\ \rangle_0$ em T_pM é *invariante por* H se todo $h \in H$ for uma transformação ortogonal de $\{T_pM, \langle\ ,\ \rangle_0\}$.

Proposição 4.8. *Sejam M uma variedade diferenciável e G um grupo de Lie que age transitivamente em M. Suponha que, para algum $p \in M$, o espaço tangente T_pM possa ser munido com um produto interno $\langle\ ,\ \rangle_0$, invariante pelo subgrupo de isotropia H de p. Então, $\langle\ ,\ \rangle_0$ pode ser estendido unicamente a uma estrutura riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$ em M, tal que os elementos de G sejam isometrias de $\{M, \langle\ ,\ \rangle\}$.*

Demonstração. Para $q \in M$, definamos, a partir de $\langle\ ,\ \rangle_0$, um produto interno $\langle\ ,\ \rangle_q$ em T_qM como segue: uma vez que G age transitivamente em M, podemos tomar $g \in G$ tal que $g(p) = q$. Dados $v, w \in T_qM$, como $(g_*)_p : T_pM \to T_qM$ é um isomorfismo, existem únicos $v_0, w_0 \in T_pM$ tais que $(g_*)_p(v_0) = v$ e $(g_*)_p(w_0) = w$. Então, definimos

$$\langle v, w\rangle_q = \langle v_0, w_0\rangle_0.$$

Como queremos que os elementos de G sejam isometrias de M, se tal estrutura existir ela deve ser dada como acima. Portanto, se tal estrutura existir, ela é única.

Uma vez que $\langle\ ,\ \rangle_q$ foi definido utilizando-se um elemento $g \in G$ tal que $g(p) = q$, precisamos mostrar que $\langle\ ,\ \rangle_q$ não depende da escolha de um tal g. Para tanto, seja $g' \in G$ é um outro elemento satisfazendo $g'(p) = q$. Sendo g' um difeomorfismo de M, existem únicos $v_0', w_0' \in T_pM$ tais que $(g_*')_p(v_0') = v$ e $(g_*')_p(w_0') = w$. Mostremos que $\langle v_0', w_0'\rangle_0 = \langle v_0, w_0\rangle_0$.

Para o que falta, se $h = g^{-1}g'$, então $h \in H$, pois $h(p) = g^{-1}g'(p) = g^{-1}(q) = p$. Então, como $\langle\ ,\ \rangle_0$ invariante por H, segue que

$$\langle v_0', w_0'\rangle_0 = \langle (h_*)_p(v_0'), (h_*)_p(w_0')\rangle_0.$$

Mas, pela regra da cadeia,

$$(h_*)_p(v_0') = (g_*^{-1})_{g'(p)}(g_*')_p(v_0') = (g_*^{-1})_q(v) = v_0$$

e, analogamente, $(h_*)_p(w_0') = w_0$. Então, $\langle\ ,\ \rangle_q$ realmente está bem definida.

É imediato que $q \mapsto \langle\ ,\ \rangle_q$ é uma métrica riemanniana em M. Resta mostrar que os elementos de G são isometrias de $\{M, \langle\ ,\ \rangle\}$. Para isto, sejam dados $q \in M$, $v, w \in T_qM$ e $\varphi \in G$. Tome $g \in G$ tal que $g(p) = \varphi(q)$, e $v_0, w_0 \in T_pM$ tais que

$(g_*)_p(v_0) = (\varphi_*)_q(v)$ e $(g_*)_p(w_0) = (\varphi_*)_q(w)$. Então, por definição,

$$\langle (\varphi_*)_q(v), (\varphi_*)_q(w) \rangle = \langle v_0, w_0 \rangle_0. \tag{7}$$

Por outro lado, $\varphi^{-1}g(p) = q$ e, pela regra da cadeia,

$$(\varphi^{-1}g)_{*_p}(v_0) = (\varphi_*^{-1})_{\varphi(q)}(g_*)_p(v_0) = v$$

e, analogamente, $(\varphi^{-1}g)_{*_p}(w_0) = w$. Portanto, novamente pela definição da métrica, temos

$$\langle v, w \rangle = \langle v_0, w_0 \rangle_0. \tag{8}$$

Por fim, combinando (7) e (8), segue o resultado desejado. □

O corolário a seguir aplica o resultado anterior a um caso em que o ponto p e o produto interno $\langle\ ,\ \rangle_0$ são dados explicitamente. Para tanto, recorde que, dado um inteiro $n \geq 2$, denotamos por $\mathfrak{P}_n$ o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem n, simétricas e positivas definidas; o Exemplo 3.14, mostrou que $\mathfrak{P}_n$ é um aberto do espaço vetorial $S(n, \mathbb{R})$ das matrizes quadradas de ordem n simétricas, na qual $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ age transitivamente por meio de $g(B) = gBg^T$, para todos $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $B \in \mathfrak{P}_n$.

Corolário 4.9. *Para $n \geq 2$ inteiro, existe uma estrutura riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$ em $\mathfrak{P}_n$ tal que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ é um grupo transitivo de isometrias de $\{\mathfrak{P}_n, \langle\ ,\ \rangle\}$.*

Demonstração. Em relação à ação acima de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ sobre $\mathfrak{P}_n$, denotando por H o subgrupo de isotropia de $I \in \mathfrak{P}_n$ (a matriz identidade de ordem n), temos

$$H = \{X \in GL(n, \mathbb{R})\,;\, XIX^T = I\} = O(n, \mathbb{R}),$$

o grupo das matrizes ortogonais de ordem n. Tencionamos definir em $T_I\mathfrak{P}_n$ um produto interno $\langle\ ,\ \rangle_0$, invariante pelos elementos de H, aplicando em seguida o resultado da proposição anterior.

Para a definição de $\langle\ ,\ \rangle_0$, dado $X \in S(n, \mathbb{R})$ escreva X_I para denotar X, visto como elemento de $T_I\mathfrak{P}_n$. Para $A, B \in S(n, \mathbb{R})$, ponha

$$\langle A_I, B_I \rangle_0 = \mathrm{tr}(AB),$$

onde $\mathrm{tr}(AB)$ denota o traço da matriz AB. Como $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ segue que $\langle\ ,\ \rangle_0$ é simétrico; também, a linearidade de $X \to \mathrm{tr}(X)$ segue que $\langle\ ,\ \rangle_0$ é bilinear. Por fim, para $A = (a_{ij}) \in S(n, \mathbb{R})$, temos

$$\langle A_I, A_I \rangle_0 = \mathrm{tr}(A^2) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2,$$

de sorte que $\langle A_I, A_I\rangle_0 = 0 \Rightarrow A_I = 0$; assim, $\langle\ ,\ \rangle_0$ é positivo definido. Portanto, $\langle\ ,\ \rangle_0$ é um produto interno em $T_I\mathfrak{P}_n$.

Resta mostrarmos que $\langle\ ,\ \rangle_0$ é invariante por $H = O(n,\mathbb{R})$. Para tanto, dados $g \in O(n,\mathbb{R})$ e $A_I, B_I \in T_I\mathfrak{P}_n$, é imediato que $(g_*)_I(A_I) = (gAg^T)_I$ e, analogamente, $(g_*)_I(B_I) = (gBg^T)_I$. Assim,

$$\begin{aligned}\langle (g_*)_I(A_I), (g_*)_I(B_I)\rangle_0 &= \langle (gAg^T)_I, (gBg^T)_I\rangle_0 = \mathrm{tr}(gAg^TgBg^T)\\ &= \mathrm{tr}(gABg^{-1}) = \mathrm{tr}(AB) = \langle A_I, B_I\rangle_0.\end{aligned}$$

□

Dados um grupo de Lie G e um subgrupo fechado H de G, vimos no capítulo anterior como munir o espaço quociente G/H de uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão $\dim G - \dim H$. O resultado principal desta seção garante que, se $\mathrm{Ad}(H)$ tem fecho compacto em $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, então G/H admite uma estrutura riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$ tal que, em relação à ação natural $g'(gH) \mapsto g'gH$ de G sobre G/H (cf. Exemplo 3.15), G é um grupo transitivo de isometrias de $\{G/H, \langle\ ,\ \rangle\}$. Assim, o resultado que nos propomos a demonstrar garantirá que, munindo G/H com a métrica riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$, as translações $\tau_g : G/H \to G/H$ serão isometrias, para todo $g \in G$. Comecemos examinando um caso particular, cuja demonstração é mais simples.

Proposição 4.10. *Se G é um grupo de Lie conexo e H é um subgrupo compacto de G, então a variedade quociente G/H admite uma estrutura riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$ tal que G é um grupo transitivo de isometrias de $\{G/H, \langle\ ,\ \rangle\}$.*

Demonstração. A ação natural de G sobre G/H é transitiva e, se $p = eH$, então seu subgrupo de isotropia é $\{g \in G\,;\, g(eH) = eH\} = H$. Portanto, para aplicarmos a Proposição 4.8, é suficiente garantir a existência de um produto interno em $T_p(G/H)$ que seja invariante por elementos de H.

Como H é compacto, a Proposição 4.7 garante a existência de uma métrica riemanniana $\langle\ ,\ \rangle^*$ em G/H tal que os elementos de H são isometrias de $\{G/H, \langle\ ,\ \rangle^*\}$. Em particular, essa estrutura nos dá um produto interno $\langle\ ,\ \rangle_p^*$ em $T_p(G/H)$. Mas, como H fixa p, concluímos que $\langle\ ,\ \rangle_p^*$ é invariante pelos elementos de H. □

Chegamos finalmente ao resultado principal desta seção, em toda sua generalidade.

Teorema 4.11. *Sejam G um grupo de Lie conexo e H um subgrupo fechado de G tal que $\mathrm{Ad}(H)$ tem fecho compacto em $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, onde $\mathfrak{g}$ denota a álgebra de Lie de G. Então, a variedade quociente G/H admite uma estrutura riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$ tal que G é um grupo transitivo de isometrias de $\{G/H, \langle\ ,\ \rangle\}$.*

Demonstração. Denotando por K o fecho de $\mathrm{Ad}(H)$ em $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, afirmamos que K também é um subgrupo de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$. De fato, para $a, b \in K$, existem sequências $(a_i)_{i\geq 1}$ e $(b_i)_{i\geq 1}$ em $\mathrm{Ad}(H)$ tais que $\lim\limits_i a_i = a$ e $\lim\limits_i b_i = b$. Uma vez que $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ é um homomorfismo, $(a_i b_i^{-1})_{i\geq 1}$ é uma sequência em $\mathrm{Ad}(H)$. Portanto, a continuidade das aplicações de multiplicação e inversão em $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ garante que $\lim\limits_i a_i b_i^{-1} = ab^{-1}$, e $ab^{-1} \in K$.

A discussão do parágrafo anterior, juntamente com as hipóteses do teorema, garantem que K é um subgrupo compacto de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$. Dessa forma, a Proposição 4.4 garante a existência de um produto interno $\langle \ , \ \rangle^*$ em $\mathfrak{g}$, invariante pelos elementos de K; em particular, tal produto interno é invariante pelos elementos de $\mathrm{Ad}(H)$.

Denotemos por $\mathfrak{h}$ a álgebra de Lie de H e, como de costume, consideremos $\mathfrak{h}$ como uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Também, denotemos por $\mathfrak{m}$ o complemento ortogonal de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$ segundo $\langle \ , \ \rangle^*$.

A Proposição 3.9 garante que $(\pi_*)_e : \mathfrak{m}(e) \longrightarrow T_{eH}(G/H)$ é um isomorfismo linear, onde $\mathfrak{m}(e) = \{X(e)\,;\, X \in \mathfrak{m}\}$. Seja $\langle \ , \ \rangle_0$ o único produto interno em $T_{eH}(G/H)$ que torna $(\pi_*)_e : \{\mathfrak{m}(e), \langle \ , \ \rangle^*\} \longrightarrow \{T_{eH}(G/H), \langle \ , \ \rangle_0\}$ uma isometria linear.

Se mostrarmos que H preserva o produto interno $\langle \ , \ \rangle_0$ de $T_{eH}(G/H)$ e usarmos o fato de que a ação natural de G sobre G/H é transitiva, com H sendo o subgrupo de isotropia de eH, a Proposição 4.8 garantirá que podemos estender $\langle \ , \ \rangle_0$ a uma estrutura riemanniana $\langle \ , \ \rangle$ em G/H em relação à qual os elementos de G são isometrias.

Para o que falta, precisaremos dos dois resultados auxiliares a seguir.

Lema 4.12. *O subespaço $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$ é invariante por* $\mathrm{Ad}(H)$.

Demonstração. Se mostrarmos que $\mathfrak{h}$ é invariante por $\mathrm{Ad}(H)$, então a invariância de $\mathfrak{m}$ por $\mathrm{Ad}(H)$ seguirá do fato de $\mathfrak{m}$ ser o complemento ortogonal de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$ em relação a $\langle \ , \ \rangle^*$, juntamente com o fato de que $\langle \ , \ \rangle^*$ é invariante pelos elementos de $\mathrm{Ad}(H)$.

Para o que falta, dados $X \in \mathfrak{h}$ e $\varphi \in H$, temos que $X(e) = \alpha'(0)$, onde $\alpha(t) = \exp(tX)$ é uma curva em H. Então, sendo $C_\varphi : G \to G$ a conjugação por φ, temos

$$(\mathrm{Ad}(\varphi)X)(e) = (C_\varphi)_{*_e} X(e) = \beta'(0),$$

com $\beta(t) = (C_\varphi \circ \alpha)(t)$ também uma curva em H, uma vez que $\varphi \in H$. Portanto, a identificação natural de $\mathfrak{h}$ como subespaço de $\mathfrak{g}$ garante que $\mathrm{Ad}(\varphi)X \in \mathfrak{h}$, conforme desejado.

□

Lema 4.13. *Dados $\varphi \in H$ e $X \in \mathfrak{m}$, temos $(\varphi_*)_{eH}(\pi_*)_e X(e) = (\pi_*)_e(\mathrm{Ad}(\varphi)X)(e)$.*

Demonstração. Como $X \in \mathfrak{m}$, temos $(\pi_*)_e X(e) = \alpha'(0)$, onde $\alpha(t) = \pi(\exp(tX))$. Com isso, $(\varphi_*)_{eH}(\pi_*)_e X(e) = \beta'(0)$, onde

$$\begin{aligned}\beta(t) &= (\varphi \circ \alpha)(t) = \varphi(\exp(tX)H) = \varphi \exp(tX)H \\ &= \varphi \exp(tX)\varphi^{-1}H = C_\varphi(\exp(tX))H,\end{aligned}$$

já que $\varphi^{-1} \in H$. Usando agora que C_φ é um automorfismo de G, o item (g) da Proposição 2.21 garante que $C_\varphi(\exp(tX)) = \exp(\mathrm{Ad}(\varphi)tX)$. Assim, $\beta(t) = \pi(\exp(t\mathrm{Ad}(\varphi)X))$, de sorte que, pela regra da cadeia, $\beta'(0) = (\pi_*)_e(\mathrm{Ad}(\varphi)X)(e)$, como queríamos demonstrar. $\square$

De posse dos resultados acima, voltemos à demonstração do teorema. Como observamos antes, para o que falta é suficiente mostrarmos que H preserva o produto interno $\langle\ ,\ \rangle_0$ de $T_{eH}(G/H)$. Para tanto, dados $\varphi \in H$ e $X, Y \in T_{eH}(G/H)$, como $(\pi_*)_e : \mathfrak{m}(e) \to T_{eH}(G/H)$ é um isomorfismo, existem únicos $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{m}$ tais que $(\pi_*)_e\bar{X}(e) = X$ e $(\pi_*)_e\bar{Y}(e) = Y$. Então, segue do lema anterior que

$$\begin{aligned}\langle(\varphi_*)_{eH}(X), (\varphi_*)_{eH}(Y)\rangle_0 &= \langle(\varphi_*)_{eH}(\pi_*)_e\bar{X}(e), (\varphi_*)_{eH}(\pi_*)_e\bar{Y}(e)\rangle_0 \\ &= \langle(\pi_*)_e(\mathrm{Ad}(\varphi)\bar{X})(e), (\pi_*)_e(\mathrm{Ad}(\varphi)\bar{Y})(e)\rangle_0.\end{aligned}$$

Agora, recorde que $\langle\ ,\ \rangle_0$ foi definido de modo a tornar $(\pi_*)_e : \{\mathfrak{m}(e), \langle\ ,\ \rangle^*\} \longrightarrow \{T_{eH}(G/H), \langle\ ,\ \rangle_0\}$ uma isometria linear. Então, uma vez que o Lema 4.12 garante que $(\mathrm{Ad}(\varphi)\bar{X})(e)$, $(\mathrm{Ad}(\varphi)\bar{Y})(e) \in \mathfrak{m}(e)$, a última igualdade acima, juntamente com o fato de que $\langle\ ,\ \rangle^*$ é invariante pelos elementos de $\mathrm{Ad}(H)$, fornece

$$\langle(\varphi_*)_{eH}(X), (\varphi_*)_{eH}(Y)\rangle_0 = \langle(\mathrm{Ad}(\varphi)\bar{X})(e), (\mathrm{Ad}(\varphi)\bar{Y})(e)\rangle^* = \langle\bar{X}(e), \bar{Y}(e)\rangle^*.$$

Utilizando mais uma vez que $(\pi_*)_e : \{\mathfrak{m}(e), \langle\ ,\ \rangle^*\} \longrightarrow \{T_{eH}(G/H), \langle\ ,\ \rangle_0\}$ é uma isometria linear, temos

$$\langle\bar{X}(e), \bar{Y}(e)\rangle^* = \langle(\pi_*)_e\bar{X}(e), (\pi_*)_e\bar{Y}(e)\rangle_0 = \langle X, Y\rangle_0.$$

Por fim, combinando as duas últimas igualdades acima, chegamos a

$$\langle(\varphi_*)_{eH}(X), (\varphi_*)_{eH}(Y)\rangle_0 = \langle X, Y\rangle_0,$$

como queríamos demonstrar. $\square$

4.4 Espaços homogêneos redutíveis

Conforme veremos nesta seção, a definição a seguir colocará o teorema anterior em um contexto mais adequado.

Definição 4.14. *Uma variedade quociente G/H é dita redutível quando existe um su-*

bespaço complementar $\mathfrak{m}$ *de* $\mathfrak{h}$ *em* $\mathfrak{g}$ *que é* $\mathrm{Ad}(H)$*-invariante. Dizemos, então, que* $\mathfrak{m}$ *é um subespaço de Lie para* G/H*.*

Em relação a uma variedade quociente G/H, a demonstração do Teorema 4.11 garante que se $\mathrm{Ad}(H)$ tem fecho compacto em $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, então G/H é redutível, com subespaço de Lie $\mathfrak{m}$ igual ao complemento ortogonal de $\mathfrak{h}$ em relação ao produto interno $\mathrm{Ad}(H)-$invariante induzido em $\mathfrak{g}$. A última parte da demonstração daquele resultado, aplicada a espaços quociente redutíveis quaisquer, fornece a proposição a seguir; por completude, apresentaremos sua demonstração.

Proposição 4.15. *Se* G/H *é uma variedade quociente redutível, com subespaço de Lie* $\mathfrak{m}$*, então:*

(a) A ação natural de $\mathrm{Ad}(H)$ *sobre* $\mathfrak{m}$ *induz, por conjugação via* $(\pi_*)_e$*, uma ação do grupo linearizado* $\{(\tau_h)_{*_{eH}}\,;\, h \in H\}$ *sobre* $T_{eH}(G/H)$*.*

(b) Exigindo que $(\pi_*)_e : \mathfrak{m} \longrightarrow T_{eH}(G/H)$ *seja uma isometria linear, temos que* $(\pi_*)_e$ *estabelece uma correspondência biunívoca entre produtos internos* $\mathrm{Ad}(H)$*-invariantes em* $\mathfrak{m}$ *e métricas riemannianas* G*-invariantes em* M*.*

Demonstração. O primeiro item segue ao combinarmos a igualdade

$$\tau_h \circ \pi = \pi \circ C_h,$$

que vale para todo $h \in H$, com a hipótese de que $\mathfrak{m}$ é um subespaço de Lie. Realmente, por definição temos $\mathrm{Ad}(h)(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$ para todo $h \in H$; por outro lado, derivando ambos os lados da igualdade acima, obtemos $(\tau_h)_{*_{eH}} \circ (\pi_*)_e = (\pi_*)_e \circ \mathrm{Ad}_h$ para todo $h \in H$, o que garante que a ação natural de $\mathrm{Ad}(H)$ sobre $\mathfrak{m}$ induz uma ação de $\{(\tau_h)_{*_{eH}}\,;\, h \in H\}$ sobre $T_{eH}(G/H)$.

Para o item (b), suponha que $\langle\ ,\ \rangle$ é um produto interno $\mathrm{Ad}(H)$-invariante em $\mathfrak{m}$. Como estamos impondo que $(\pi_*)_e : \mathfrak{m} \longrightarrow T_{eH}(G/H)$ seja uma isometria linear, o produto interno em $T_{eH}(G/H)$ é unicamente determinado; denotemo-lo por $\langle\ ,\ \rangle_0$. O item (a), então, garante que $(\tau_h)_{*_{eH}}$ é uma isometria, para cada $h \in H$. Utilizaremos este fato para estender $\langle\ ,\ \rangle_0$ a uma estrutura G-invariante em G/H.

Afirmamos que, se $p = \tau_a(eH) = \tau_b(eH)$, então os produtos internos em $T_p(G/H)$ induzidos pelos isomorfismos $(\tau_{a^{-1}})_{*_p}$ e $(\tau_{b^{-1}})_{*_p}$ coincidem, isto é, que dados $x, y \in T_p(G/H)$, temos $\langle(\tau_{a^{-1}})_{*_p}(x), (\tau_{a^{-1}})_{*_p}(y)\rangle = \langle(\tau_{b^{-1}})_{*_p}(x), (\tau_{b^{-1}})_{*_p}(y)\rangle$. De fato, $\tau_a(eH) = \tau_b(eH)$ equivale a $aH = bH$ ou, o que é o mesmo, $b^{-1}a = h \in H$. Como $(\tau_h)_{*_{eH}}$ é uma isometria, segue que

$$\langle(\tau_{a^{-1}})_{*_p}(x), (\tau_{a^{-1}})_{*_p}(y)\rangle = \langle(\tau_h)_{*_{eH}}((\tau_{a^{-1}})_{*_p}(x)), (\tau_h)_{*_{eH}}((\tau_{a^{-1}})_{*_p}(y))\rangle.$$

Agora, $\tau_h = \tau_{b^{-1}} \circ \tau_a$ implica $(\tau_h)_{*_{eH}} \circ (\tau_{a^{-1}})_{*_p} = (\tau_{b^{-1}})_{*_p}$, de sorte que a igualdade anterior fornece $\langle(\tau_{a^{-1}})_{*_p}(x), (\tau_{a^{-1}})_{*_p}(y)\rangle = \langle(\tau_{b^{-1}})_{*_p}(x), (\tau_{b^{-1}})_{*_p}(y)\rangle$. Por fim, é fácil checar que o tensor $\langle\ ,\ \rangle$ é G-invariante, e sua diferenciabilidade segue do critério de diferenciabilidade obtido em 3.5.

Reciprocamente, se $\langle\ ,\ \rangle$ é uma métrica G-invariante em G/H, então é imediato que o grupo linearizado $\{(\tau_h)_{*_{eH}}\,;\, h \in H\}$ consiste de isometrias. Impondo que $(\pi_*)_e : \mathfrak{m} \longrightarrow T_{eH}(G/H)$ seja uma isometria linear, o item (a) garante que o pull-back de $\langle\ ,\ \rangle_{eH}$ por $(\pi_*)_e$ nos dá um produto interno em $\mathfrak{m}$, o qual é $\mathrm{Ad}(H)-$invariante. □

O resultado a seguir completa a relação entre o Teorema 4.11 e variedades quociente redutíveis.

Proposição 4.16. *Seja G/H uma variedade quociente redutível, com subespaço de Lie $\mathfrak{m}$. Se G/H admite uma métrica $G-$invariante cujo produto interno induzido em $\mathfrak{m}$ é $\mathrm{Ad}(H)-$invariante, então $\mathrm{Ad}(H)$ tem fecho compacto em $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$.*

Demonstração. Como $Ad_h : \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{m}$ preserva o produto interno induzido em $\mathfrak{m}$ para cada $h \in H$, temos $\mathrm{Ad}(H) \subset O(\mathfrak{m})$. Então, o fecho de $\mathrm{Ad}(H)$ é um subconjunto fechado do compacto $O(\mathfrak{m})$, de forma que é, ele mesmo, compacto. □

Se G/H é uma variedade quociente redutível com subespaço de Lie $\mathfrak{m}$, então $\mathfrak{m}$ é apenas um subespaço complementar a $\mathfrak{h}$ que é $\mathrm{Ad}(H)-$invariante; em particular, não é necessário que $\mathfrak{m}$ seja fechado em relação ao colchete de Lie. Apesar disso, o colchete de um elemento de $\mathfrak{m}$ com um elemento de $\mathfrak{h}$ é sempre um elemento de $\mathfrak{m}$; em símbolos, vale que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$. Para tanto, precisamos de um resultado preliminar.

Lema 4.17. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Se $X, Y \in \mathfrak{g}$, então*

$$[X, Y] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\{\mathrm{Ad}_{\alpha(t)}Y - Y\},$$

onde $\alpha(t) = \exp(tX)$ é o subgrupo a um parâmetro de X.

Demonstração. Primeiramente, note que o fluxo de X é $\{R_{\alpha(t)}; t \in \mathbb{R}\}$, pois, sendo α a curva integral de X partindo da identidade e dado $g \in G$, a invariância à esquerda de X garante que a composta $L_g \circ \alpha$ é a curva integral de X partindo de g. Mas, como $L_g(\alpha(t)) = R_{\alpha(t)}(g)$ para todo t real, segue que $\{R_{\alpha(t)}\}$ é o fluxo de X.

Sendo $\{R_{\alpha(t)}\}$ é o fluxo de X, é bem sabido (cf. DO CARMO (2015)) que podemos calcular o colchete $[X, Y]$ pelo limite

$$[X, Y] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\{(R_{\alpha(-t)})_* Y - Y\}.$$

Mas, como $\mathrm{Ad}_a = (C_a)_* = (R_{a^{-1}})_* \circ (L_a)_*$, segue que Ad_a e $(R_{a^{-1}})_*$ têm o mesmo efeito sobre elementos de $\mathfrak{g}$. Então, trocando $(R_{\alpha(-t)})_*$ por $\mathrm{Ad}_{\alpha(t)}$ no limite acima, obtemos a igualdade desejada. □

Corolário 4.18. *Seja G/H uma variedade quociente redutível, com subespaço de Lie $\mathfrak{m}$, então $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$.*

Demonstração. Se $X \in \mathfrak{h}$ e $Y \in \mathfrak{m}$, a $\mathrm{Ad}(H)$-invariância de $\mathfrak{m}$ garante que $\mathrm{Ad}_{\alpha(t)} Y \in \mathfrak{m}$. Portanto, o lema anterior, juntamente com o fato de que $\mathfrak{m}$ é fechado em $\mathfrak{g}$, garante que $[X, Y] \in \mathfrak{m}$. □

Podemos ver uma variedade quociente G/H como uma generalização natural de um grupo de Lie G. A palavra generalização é apropriada, já que, ao tomar $H = \{e\}$, o quociente G/H fica essencialmente reduzido a G. Desse ponto de vista, o isomorfismo $\mathfrak{m} \approx T_{eH}(G/H)$ generaliza o isomorfismo canônico $\mathfrak{g} \approx T_e G$, e métricas G-invariantes em G/H generalizam métricas invariantes à esquerda em G. Vejamos, agora, como generalizar métricas biinvariantes.

Definição 4.19. *Seja G/H uma variedade quociente redutível, com subespaço de Lie $\mathfrak{m}$. Dizemos que G/H é naturalmente redutível se estiver munida com uma métrica G-invariante tal que o produto interno induzido em $\mathfrak{m}$ seja* $\mathrm{Ad}(H)-$*invariante e satisfaça a igualdade*

$$\langle [X, Y]^{\mathfrak{m}}, Z \rangle = \langle X, [Y, Z]^{\mathfrak{m}} \rangle \tag{9}$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$, onde $W^{\mathfrak{m}}$ denota a projeção ortogonal de $W \in \mathfrak{g}$ em $\mathfrak{m}$.

Nas notações da definição anterior, nos referiremos a (9) como a propriedade de $\mathfrak{m}-$*shift*. Observe que, quando $H = \{e\}$, temos $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}$ e a propriedade de $\mathfrak{m}-$shift nada mais é do que a identidade de Weyl (cf. Proposição 2.16). Por isso é que podemos entender essa definição como uma extensão do conceito de métrica biinvariante.

Daqui em diante, sempre que nos referirmos a uma variedade quociente naturalmente redutível G/H, consideraremos em G a métrica descrita a seguir: estendemos o produto interno induzido em $\mathfrak{m}$ a um produto interno em $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$, impondo que $\mathfrak{h} \perp \mathfrak{m}$; em seguida, utilizamos tal produto interno para definir uma métrica invariante à esquerda em G. Assim fazendo, ao considerarmos a submersão $\pi : G \longrightarrow G/H$, os elementos de $\mathfrak{h}$ serão verticais (tangentes às fibras), enquanto os elementos de $\mathfrak{m}$ serão horizontais (normais às fibras). Afirmamos que $\pi : G \longrightarrow G/H$ é uma submersão riemanniana. Para verificarmos isto, dado $g \in G$, seja $\mathcal{H}_g$ o subespaço dos vetores horizontais em $T_g G$. Então, $(L_{g^{-1}})_{*g}$ leva $\mathcal{H}_g$ em $\mathcal{H}_e$, e a identidade $\tau_g \circ \pi = \pi \circ L_g$ mostra que $(\pi_*)_g : \mathcal{H}_g \to T_{\pi(g)}(G/H)$ pode ser expressa como composição das isometrias lineares $(\tau_g)_{*eH} \circ (\pi_*)_e \circ (L_{g^{-1}})_{*g}$. Portanto $(\pi_*)_g : T_g G \to T_{\pi(g)}(G/H)$ preserva o comprimento de vetores horizontais.

De posse da discussão do parágrafo anterior, examinamos a seguir as geodésicas e a curvatura seccional de uma variedade quociente naturalmente redutível. Para tanto, precisamos de dois resultados preliminares.

Lema 4.20. *Seja G/H uma variedade quociente naturalmente redutível com subespaço* *de Lie $\mathfrak{m}$. Em relação ao produto interno induzido em $\mathfrak{m}$, temos*

$$\langle [X, V], Y\rangle = \langle X, [V, Y]\rangle \tag{10}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{m}$ e $V \in \mathfrak{h}$.

Demonstração. Inicialmente, note que o enunciado faz sentido, uma vez que, pelo Corolário 4.18, temos $[X, V], [V, Y] \in \mathfrak{m}$. Para o que falta, observe que, por polarização, basta mostrarmos que para $X \in \mathfrak{m}$ e $V \in \mathfrak{h}$ vale $\langle [X, V], X\rangle = 0$. Para tanto, sendo α o subgrupo a 1-parâmetro de V, a $\mathrm{Ad}(H)-$invariância do produto interno de $\mathfrak{m}$ garante que a função $f(s) = \langle \mathrm{Ad}_{\alpha(s)}X, \mathrm{Ad}_{\alpha(s)}X\rangle$ é constante. Derivando f com o auxílio do Lema 4.17, segue que $0 = f'(0) = 2\langle [V, X], X\rangle$. □

Nas notações do lema anterior, nos referiremos a (10) como a propriedade de $\mathfrak{h}$-*shift*.

Lema 4.21. *Seja G/H uma variedade quociente naturalmente redutível com subespaço de Lie $\mathfrak{m}$. Se ∇ é a conexão de Levi-Civita da métrica de G, então $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$, para todos $X, Y \in \mathfrak{m}$.*

Demonstração. Para $W \in \mathfrak{g}$, a fórmula de Koszul para a conexão de Levi-Civita, juntamente com a invariância à esquerda da métrica, nos dá

$$2\langle \nabla_X Y, W\rangle = -\langle [Y, W], X\rangle - \langle [X, W], Y\rangle - \langle [Y, X], W\rangle.$$

Se $W \in \mathfrak{m}$, a propriedade de $\mathfrak{m}$-shift aplicada às duas primeiras parcelas fornece

$$2\langle \nabla_X Y, W\rangle = -\langle [Y, X], W\rangle.$$

Se $W \in \mathfrak{h}$, a propriedade de $\mathfrak{h}$-shift produz o mesmo resultado. Portanto, $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$. □

Proposição 4.22. *Sejam G/H uma variedade quociente naturalmente redutível com subespaço de Lie $\mathfrak{m}$, e $X \in \mathfrak{m}$. Se $\gamma_X : \mathbb{R} \to G/H$ denota a geodésica de G/H partindo de eH na direção de $(\pi_*)_e(X_e)$, então*

$$\gamma_X(t) = \alpha(t)H = \pi(\alpha(t))$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, onde $\alpha : \mathbb{R} \to G$ é o subgrupo a um parâmetro de X.

Demonstração. Pelo Corolário 2.29, basta mostrar que α é uma geodésica de G. Mas isso segue imediatamente do lema anterior, uma vez que, sendo ∇ a conexão de Levi-Civita de G, temos

$$\alpha'' = \nabla_X X = \frac{1}{2}[X, X] = 0.$$

□

Agora que encontramos uma relação entre as geodésicas de G e as de G/H, estabeleçamos uma relação análoga para as curvaturas seccionais.

Proposição 4.23. *Seja G/H uma variedade quociente naturalmente redutível com subespaço de Lie $\mathfrak{m}$. Se $X, Y \in \mathfrak{m}$ são linearmente independentes, então*

$$K_{G/H}(X,Y) = \frac{\frac{1}{4}\langle [X,Y]^{\mathfrak{m}}, [X,Y]^{\mathfrak{m}}\rangle + \langle [[X,Y]^{\mathfrak{h}}, X], Y\rangle}{|X \wedge Y|^2}$$

onde $K_{G/H}(X,Y)$ denota a curvatura seccional de G/H em eH, segundo o plano gerado por $\{(\pi_*)_e(X_e), (\pi_*)_e(Y_e)\}$.

Demonstração. Uma vez que π é uma submersão riemanniana com componentes verticais na direção de $\mathfrak{h}$, o Teorema 2.31 fornece

$$\begin{aligned} K_{G/H}(X,Y) &= K_G(X,Y) + \frac{3}{4}\frac{\langle [X,Y]^{\mathfrak{h}}, [X,Y]^{\mathfrak{h}}\rangle}{|X \wedge Y|^2} \\ &= \frac{\langle R(X,Y)X, Y\rangle + \frac{3}{4}\langle [X,Y]^{\mathfrak{h}}, [X,Y]^{\mathfrak{h}}\rangle}{|X \wedge Y|^2}, \end{aligned} \tag{11}$$

onde R denota o operador de curvatura de G.

Aplicando um $\mathfrak{h}-$shif ao último termo acima, obtemos

$$\langle [X,Y]^{\mathfrak{h}}, [X,Y]^{\mathfrak{h}}\rangle = \langle [X,Y]^{\mathfrak{h}}, [X,Y]\rangle = \langle [[X,Y]^{\mathfrak{h}}, X], Y\rangle. \tag{12}$$

Quanto ao primeiro termo, observemos inicialmente que

$$\begin{aligned} \langle R(X,Y)X, Y\rangle &= \langle \nabla_Y\nabla_X X - \nabla_X\nabla_Y X + \nabla_{[X,Y]}X, Y\rangle \\ &= \langle -\nabla_X\nabla_Y X, Y\rangle + \langle \nabla_{[X,Y]^{\mathfrak{m}}}X, Y\rangle + \langle \nabla_{[X,Y]^{\mathfrak{h}}}X, Y\rangle, \end{aligned} \tag{13}$$

onde utilizamos o Lema 4.21 na segunda igualdade para concluir que $\nabla_X X = 0$. Analisemos, agora, cada uma das parcelas do segundo membro:

(i) Novamente pelo Lema 4.21, temos $\nabla_Y X = \frac{1}{2}[Y,X] \in \mathfrak{g}$. Portanto, a invariância à esquerda da métrica garante que

$$0 = X\langle \nabla_Y X, Y\rangle = \langle \nabla_X\nabla_Y X, Y\rangle + \langle \nabla_Y X, \nabla_X Y\rangle.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X \nabla_Y X, Y\rangle &= -\langle \nabla_Y X, \nabla_X Y\rangle = -\frac{1}{4}\langle [Y,X],[X,Y]\rangle \\ &= \frac{1}{4}\langle [X,Y]^{\mathfrak{h}},[X,Y]\rangle + \frac{1}{4}\langle [X,Y]^{\mathfrak{m}},[X,Y]\rangle.\end{aligned} \tag{14}$$

(ii) Para a segunda parcela de (13), utilizamos uma vez mais o Lema 4.21, juntamente com a propriedade de $\mathfrak{m}$-shift, para obter

$$\langle \nabla_{[X,Y]^{\mathfrak{m}}} X, Y\rangle = \frac{1}{2}\langle [[X,Y]^{\mathfrak{m}},X],Y\rangle = \frac{1}{2}\langle [X,Y]^{\mathfrak{m}},[X,Y]\rangle. \tag{15}$$

(iii) Por fim, para a terceira parcela de (13), faça $V = [X,Y]^{\mathfrak{h}}$. Segue da fórmula de Koszul e da invariância à esquerda da métrica que

$$2\langle \nabla_V X, Y\rangle = -\langle [X,Y],V\rangle - \langle [V,Y],X\rangle - \langle [X,V],Y\rangle.$$

Mas, a propriedade de $\mathfrak{h}$-shift garante que os dois últimos termos são iguais, de sorte que

$$\langle \nabla_V X, Y\rangle = -\frac{1}{2}\langle [X,Y],V\rangle - \langle [X,V],Y\rangle.$$

Então, substituindo a expressão de V, ficamos com

$$\langle \nabla_{[X,Y]^{\mathfrak{h}}} X, Y\rangle = -\frac{1}{2}\langle [X,Y],[X,Y]^{\mathfrak{h}}\rangle - \langle [X,[X,Y]^{\mathfrak{h}}],Y\rangle. \tag{16}$$

Por fim, substituindo (14), (15) e (16) em (13), e em seguida (12) e (13) em (11), chegamos à formula do enunciado. □

5 A GEOMETRIA DE ESPAÇOS SIMÉTRICOS

Este capítulo utiliza todo o material desenvolvido até aqui para estudar certos aspectos da geometria de espaços simétricos riemannianos. Mais precisamente, nosso propósito é completar a introdução a esse tema feita em O'NEILL (1983), descrevendo o tensor de Ricci os campos de Killing e de Jacobi de um espaço simétrico riemanniano em termos dos dados de Lie correspondentes.

5.1 Rudimentos de espaços simétricos

Apresentaremos aqui, de maneira breve, algumas definições que serão importantes para o entendimento do capítulo. Para uma apresentação mais detalhada veja, por exemplo, O'NEILL (1983).

Definição 5.1. *Uma variedade riemanniana é homogênea se, para todos $p, q \in M$, existir uma isometria $\phi : M \longrightarrow M$ tal que $\phi(p) = q$.*

Uma outra forma de apresentar essa definição seria dizermos que uma variedade riemanniana é homogênea se a ação $I(M) \times M \to M$, apresentada na Proposição 3.19, for transitiva.

Definição 5.2. *Uma variedade riemanniana M, com operador curvatura R, é localmente simétrica se, para toda curva suave por partes α em M e todo terno (X, Y, Z) de campos paralelos ao longo de α o campo $R(X, Y)Z$ ao longo de α também for paralelo.*

Geralmente define-se uma variedade riemanniana como localmente simétrica quando $\nabla R \equiv 0$. Pode-se provar que tal definição é equivalente à que demos acima, mas esta será suficiente para nossos propósitos.

Definição 5.3. *Uma variedade riemanniana conexa é um espaço simétrico (riemanniano) se, para todo $p \in M$, existir uma isometria $\zeta_p : M \longrightarrow M$ tal que $\zeta_p(p) = p$ e $d\zeta_p = -id : T_pM \to T_pM$. Neste caso, a isometria ζ_p é dita a simetria global de M em p.*

Não é difícil mostrar que se M é um espaço simétrico e ζ é uma isometria de M, então ζ é uma simetria global em $p \in M$ se, e somente se, ζ é involutivo (isto é, $\zeta^2 = Id$) e p é um ponto fixo isolado de ζ. Também, o Corolário 8.16 de O'NEILL (1983) garante que espaços simétricos são, em particular, espaços localmente simétricos.

Exemplo 5.4. *O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é simétrico, já que, para cada $p \in \mathbb{R}^n$, a aplicação $p + x \to p - x$ é uma simetria global em p.*

Exemplo 5.5. *A esfera $\mathbb{S}^n$ é um espaço simétrico, pois, para $p \in \mathbb{S}^n$, podemos tomar $\zeta_p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ como a restrição a $\mathbb{S}^n$ da simetria de $\mathbb{R}^{n+1}$ em relação à reta que passa por p e $-p$.*

Uma variedade riemanniana localmente simétrica não necessariamente é completa, no sentido de suas geodésicas estarem definidas para todo instante $t \in \mathbb{R}$. Um exemplo onde isso fica bem evidente é aquele de uma subvariedade aberta de um espaço simétrico. Contudo, espaços simétricos são completos, conforme garante o lema a seguir.

Lema 5.6. *Se M é um espaço simétrico, então M é uma variedade riemanniana completa.*

Demonstração. Para mostrar que uma geodésica $\gamma : [0, b) \longrightarrow M$ é estendível, escolha $c \in \left(\frac{b}{2}, b\right)$ e seja $\zeta_{\gamma(c)}$ a simetria global de M em $\gamma(c)$. Como $\zeta_{\gamma(c)}$ muda o sentido de geodésicas que passam por $\gamma(c)$, ao tomarmos uma reparametrização de $\zeta_{\gamma(c)} \circ \gamma$ obtemos uma extensão para γ. De modo inteiramente análogo, é possível estender geodésicas definidas em um intervalo da forma $(b, 0]$. $\square$

O próximo resultado mostra que todo espaço simétrico é uma variedade homogênea.

Lema 5.7. *Seja M um espaço simétrico. Dados $p, q \in M$, existe uma isometria $\phi : M \longrightarrow M$ tal que $\phi(p) = q$.*

Demonstração. Como espaços simétricos são variedades riemannianas conexas, o Teorema de Hopf-Rinow garante que, dados $p, q \in M$, existe uma geodésica $\sigma : [0, 1] \to M$ ligando p a q. A simetria global de M em $\sigma(1/2)$ é uma isometria que muda o sentido de percurso de σ, então aplica $p = \sigma(0)$ em $q = \sigma(1)$. $\square$

O lema acima mostra que, se M é um espaço simétrico, então seu grupo $I(M)$ de isometrias age em M transitivamente. Portanto, pelo Exemplo 3.20, podemos identificar M com o quociente $I_0(M)/H$, onde H é o subgrupo de isotropia de um ponto $p \in M$ fixado. Veremos a seguir (cf. Teorema 5.10) que, sob certas condições, dado um subgrupo fechado H de um grupo de Lie conexo G, qualquer métrica riemanniana G-invariante em $M = G/H$ torna M um espaço simétrico. (Desta forma, vemos a importância de garantir a existência de um tensor métrico para M que seja G-invariante, que foi objeto da última seção do capítulo anterior). O lema a seguir dá uma pista sobre quais devem ser as condições aludidas acima.

Lema 5.8. *Seja $M = I_0(M)/H$ um espaço simétrico, onde H é o subgrupo de isotropia de um ponto $p \in M$ fixado. Se ζ é a simetria global de M em idH, então:*

(a) A aplicação $\sigma : I(M) \to I(M)$, que associa $g \in I_0(M)$ a $\zeta g \zeta$, induz um automorfismo involutivo de $I_0(M)$.

(b) O conjunto $F = Fix(\sigma) = \{g \in I_0(M); \sigma(g) = g\}$ dos pontos fixos de σ é um subgrupo fechado de $I_0(M)$, tal que $F_0 \subset H \subset F$, onde F_0 denota a componente conexa de F que contém a aplicação identidade de M.

Demonstração. Como ζ é involutivo, temos $\zeta^{-1} = \zeta$, de sorte que σ é a conjugação por

ζ; portanto, σ é um automorfismo involutivo de $I(M)$. Como $I(M)$ é um grupo de Lie, σ leva $I_0(M)$ em si mesmo. Isto prova o item (a).

Para (b), que F é fechado é óbvio. Por outro lado, o fato de σ ser automorfismo de $I_0(M)$ garante que F é um subgrupo de $I_0(M)$.

Mostremos, agora, que $H \subset F$. Para tanto, seja dado $h \in H$. A regra da cadeia, juntamente com o fato de que $(\zeta_*)_{idH} = -id_{idH}$ (por abuso de notação, denotamos por id tanto a identidade de M como a identidade de $T_{idH}M$), fornece

$$\begin{aligned}(\sigma(h)_*)_{idH} &= ((\zeta \circ h \circ \zeta)_*)_{idH} = (\zeta_*)_{h(\zeta(idH))}(h_*)_{\zeta(idH)}(\zeta_*)_{idH} \\ &= (\zeta_*)_{h(idH)}(h_*)_{idH}(-id)_{idH} = (h_*)_{idH}.\end{aligned}$$

Como M é conexa e $(\sigma(h)_*)_{idH} = (h_*)_{idH}$, podemos aplicar a Proposição 2.14 para obter $\sigma(h) = h$. Então, $h \in F$.

Para mostrar que $F_0 \subset H$, note primeiramente que F_0 é gerado pelos pontos da forma $\alpha(t)$, em que α é um subgrupo a um parâmetro de F. Portanto, é suficiente mostrar que $\alpha(t) \in H$ para todo t. Como $\alpha(t) \in F$, temos $\sigma(\alpha(t)) = \alpha(t)$, de forma que ζ e α comutam. Daí,

$$\zeta(\alpha(t)idH) = \alpha(t)\zeta(idH) = \alpha(t)idH$$

para todo t. Mas, uma vez que idH é um ponto fixo isolado de ζ, concluímos da igualdade acima que $\alpha(t)idH = idH$ para $|t|$ suficientemente pequeno; mas, como α é um subgrupo a um parâmetro, isso vale para todo t . Então, $\alpha(t) \in H$ para todo t, como queríamos provar. □

De posse do lema anterior, vamos mostrar agora que as conclusões nele obtidas formam exatamente as condições necessárias para a construção de espaços simétricos riemannianos. Antes, precisamos de mais um resultado auxiliar, de natureza essencialmente algébrica, no qual tais condições já aparecem como hipóteses.

Lema 5.9. *Seja H um subgrupo fechado de um grupo de Lie conexo G. Seja σ um automorfismo involutivo de G, tal que $F_0 \subset H \subset F = Fix(\sigma)$, onde F_0 é a componente conexa de F contendo a identidade e de G. Se $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ denotam respectivamente as álgebras de Lie de G e H, com $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, então:*

(a) $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g}\,;\, \sigma_*(X) = X\}$.

(b) $\mathfrak{g}$ *é a soma direta dos subespaços* $\mathfrak{h}$ *e* $\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g}\,;\, \sigma_*(X) = -X\}$.

(c) $\mathrm{Ad}_h(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$, *para todo* $h \in H$.

(d) $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ *e* $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$.

Demonstração.

(a) Como $\sigma\big|_H = id$, se $X \in \mathfrak{h}$ temos $\sigma_*(X) = X$. Reciprocamente, suponha que $\sigma_*(X) = X$ para um certo $X \in \mathfrak{g}$. Se α é o subgrupo a um parâmetro de X, então

α e $\sigma \circ \alpha$ são subgrupos a um parâmetro com o mesmo vetor velocidade inicial; portanto, $\sigma \circ \alpha = \alpha$. Isso significa que a imagem de α por σ está contida em F, e mais especificamente na componente conexa da identidade, F_0. Mas, como $F_0 \subset H$, segue que $X \in \mathfrak{h}$.

(b) Para $X \in \mathfrak{g}$, sejam $X_{\mathfrak{h}} = \frac{1}{2}(X + \sigma_*(X))$ e $X_{\mathfrak{m}} = \frac{1}{2}(X - \sigma_*(X))$, de sorte que $X = X_{\mathfrak{h}} + X_{\mathfrak{m}}$. Como $\sigma \circ \sigma = id$, temos também $\sigma_* \circ \sigma_* = id$. Então, um cálculo imediato garante que $X_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}$ e $X_{\mathfrak{m}} \in \mathfrak{m}$. Por outro lado, se $Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{m}$, temos

$$Y = (\sigma_* \circ \sigma_*)(Y) = \sigma_*(Y) = -Y,$$

de sorte que $Y = 0$. Logo, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$.

(c) Se $X \in \mathfrak{m}$ e $h \in H$, precisamos mostrar que $\sigma_*(\mathrm{Ad}_h(X)) = -\mathrm{Ad}_h(X)$. Como $\sigma(h) = h$, é imediato verificar que $\sigma \circ C_h = C_h \circ \sigma$. Derivando, obtemos

$$\begin{aligned} \sigma_*(\mathrm{Ad}_h(X)) &= (\sigma \circ C_h)_*(X) = (C_h \circ \sigma)_*(X) \\ &= \mathrm{Ad}_h(\sigma_*(X)) = Ad_h(-X) = -Ad_h(X). \end{aligned}$$

(d) A primeira inclusão segue do fato de $\mathfrak{h}$ ser uma subálgebra de Lie. Para a segunda inclusão, o fato de σ_* ser um homomorfismo de $\mathfrak{g}$ fornece, para $X \in \mathfrak{h}$ e $Y \in \mathfrak{m}$,

$$\sigma_*\big([X, Y]\big) = [\sigma_*(X), \sigma_*(Y)] = [X, -Y] = -[X, Y],$$

de modo que $[X, Y] \in \mathfrak{m}$. Por fim, a terceira inclusão pode ser provada de modo análogo. $\square$

Podemos finalmente enunciar e provar o resultado desejado.

Teorema 5.10. *Seja H um subgrupo fechado de um grupo de Lie conexo G. Seja σ um automorfismo involutivo de G, tal que $F_0 \subset H \subset F = Fix(\sigma)$, onde F_0 é a componente conexa de F contendo a identidade e de G. Então, todo tensor métrico G-invariante em $M = G/H$ torna M um espaço simétrico tal que $\zeta \circ \pi = \pi \circ \sigma$, onde ζ é a simetria global de M em eH e π é a projeção natural $\pi : G \longrightarrow M$.*

Demonstração. Definamos ζ como a (única) função que associa a cada ponto $g \in G$ o ponto $\zeta(\pi(g)) = \pi(\sigma(g))$. Para mostrar que essa é uma definição consistente, tome $g_1, g_2 \in G$ tais que $\pi(g_1) = \pi(g_2)$, isto é, $g_1 H = g_2 H$. Como $H \subset F$, temos que σ fixa H, e daí $\sigma(g_1)H = \sigma(g_2)H$; mas isso é o mesmo que $\pi(\sigma(g_1)) = \pi(\sigma(g_2))$.

Uma vez que ζ está bem definida e satisfaz a condição $\zeta \circ \pi = \pi \circ \sigma$, mostremos agora que ζ é um difeomorfismo. A diferenciabilidade de ζ segue diretamente do Teorema 3.5, já que $\pi \circ \sigma$ é diferenciável. Sendo σ involutiva, a igualdade $\zeta \circ \pi = \pi \circ \sigma$ implica $\zeta \circ \pi \circ \sigma = \pi$. Mas, como π é submersão, a existência de seções locais para π garante que

$\zeta \circ \zeta = id$. Com isso, $\zeta = \zeta^{-1}$ é um difeomorfismo.

Para $(\zeta_*)_{eH} = -id$, observe primeiro que, claramente, temos $\zeta(eH) = eH$. Por outro lado, para $y \in T_{eH}M$, o item (b) do lema anterior, juntamente com o fato de que $(\pi_*)_e : T_eG \to T_{eH}M$ é sobrejetiva com núcleo T_eH, garante a existência de $Y \in \mathfrak{g}$ tal que $\sigma_*(Y) = -Y$ e $(\pi_*)_e(Y) = y$. Então,

$$(\zeta_*)_{eH}(y) = (\zeta_*)_{eH}((\pi_*)_e(Y)) = (\pi_*)_e((\sigma_*)_e(Y)) = (\pi_*)_e(-Y) = -y.$$

Para o que falta, seja $\langle\ ,\ \rangle$ uma métrica G-invariante definida em M. Se mostrarmos que ζ é uma isometria em relação a $\langle\ ,\ \rangle$, teremos que ζ é simetria global de $\{M, \langle\ ,\ \rangle\}$ em eH. A partir daí, é imediato verificar a validade da afirmação a seguir, que detacamos para referência futura:

$$\text{dado } g \in G, \text{ a aplicação } \tau_g\zeta\tau_g^{-1} \text{ é simetria global de } M \text{ em } gH. \tag{17}$$

Para mostrarmos que ζ é uma isometria em relação a $\langle\ ,\ \rangle$, começamos observando que

$$\tau_{\sigma(g)} = \zeta\tau_g\zeta \tag{18}$$

para todo $g \in G$. De fato, para todo $\tilde{g} \in G$ vale

$$\zeta\tau_g\pi(\tilde{g}) = \zeta\pi(g\tilde{g}) = \pi(\sigma(g\tilde{g})) = \pi(\sigma(g)\sigma(\tilde{g})) = \tau_{\sigma(g)}(\pi(\sigma(\tilde{g}))) = \tau_{\sigma(g)}\zeta\pi(\tilde{g}).$$

Então, uma vez mais pela existência de seções locais para π, obtemos $\zeta\tau_g = \tau_{\sigma(g)}\zeta$. Agora, para $v \in T_{gH}M$, seja $v_0 = ((\tau_{g^{-1}})_*)_{gH}(v)$. Temos

$$\begin{aligned}
\langle(\zeta_*)_{gH}(v), (\zeta_*)_{gH}(v)\rangle &= \langle(\zeta_*)_{gH}(((\tau_g)_*)_{eH}(v_0)), (\zeta_*)_{gH}(((\tau_g)_*)_{eH}(v_0))\rangle \\
&= \langle((\tau_{\sigma(g)})_*)_{\zeta(eH)}((\zeta_*)_{eH}(v_0)), ((\tau_{\sigma(g)})_*)_{\zeta(eH)}((\zeta_*)_{eH}(v_0))\rangle \\
&= \langle(\zeta_*)_{eH}(v_0), (\zeta_*)_{eH}(v_0)\rangle = \langle -v_0, -v_0\rangle = \langle v, v\rangle,
\end{aligned}$$

conforme desejado. □

De posse da discussão acima, temos a seguinte definição importante.

Definição 5.11. *Diremos que* $(G/H, \sigma, \langle\ ,\ \rangle)$ *são* dados simétricos *se:*

(a) H é um subgrupo fechado de um grupo de Lie conexo G.

(b) σ é um automorfismo involutivo de G tal que $F_0 \subset H \subset F = Fix(\sigma)$

(c) $\langle\ ,\ \rangle$ é um produto interno $\mathrm{Ad}(H)$*-invariante em* $\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g}\,;\, \sigma_*(X) = -X\}$.

O Teorema 5.10 mostra como um conjunto de dados simétricos permite tornar a variedade quociente G/H um espaço simétrico riemanniano. Um espaço simétrico como esse é uma variedade quociente naturalmente redutível, tendo $\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g}\,;\, \sigma_*(X) =$

$-X\}$ como subespaço de Lie. De fato, pelo Lema 5.9, $\mathfrak{m}$ é um subespaço $\mathrm{Ad}(H)$-invariante complementar a $\mathfrak{h}$, de sorte que a Proposição 4.15, o item (c) garante a existência de uma métrica G-invariante em M; a condição de $\mathfrak{m}$-shift da definição de variedade quociente naturalmente redutível é trivialmente satisfeita, uma vez que $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$. Doravante, a menos de menção contrária, sempre assumiremos que $\mathfrak{m}$ é o autoespaço associado ao autovalor 1 de σ_*.

Finalizamos esta seção reexaminando as proposições 4.22 e 4.23 para espaços simétricos.

Proposição 5.12. *Se $M = G/H$ é um espaço simétrico, então:*

(a) As geodésicas de M partindo de eH são dadas por

$$\gamma_X(t) = \alpha(t)H = \pi(\alpha(t)),$$

onde α é o subgrupo a um parâmetro de G gerado por $X \in \mathfrak{m}$.

(b) O operador de curvatura R de M em eH é dado, para $x, y, z \in T_{eH}M$, por

$$R(x, y)z = (\pi_*)_{eH}([[X, Y], Z]),$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$ são os únicos levantamentos horizontais de x, y, z, respectivamente. Além disso, se x e y são linearmente independentes, então

$$K_M(x, y) = \frac{\langle [[X, Y], X], Y \rangle}{|X \wedge Y|^2}.$$

Demonstração. Como $M = G/H$ é naturalmente redutível com subespaço de Lie $\mathfrak{m}$, a Proposição 4.22 garante a validade do item (a).

A segunda parte do item (b) segue diretamente da Proposição 4.23, juntamente com o Lema 5.9, onde vimos que $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$. Para obtermos a fórmula para o operador de curvatura, usaremos o Lema IV.3.3 de DO CARMO (2015), aplicado à função multilinear

$$(X, Y, Z, W) \longmapsto \langle [[X, Y], Z], W \rangle.$$

Uma vez que já temos a validade da fórmula para as curvaturas seccionais, precisamos apenas mostrar que a função acima é *tipo-curvatura* em $\mathfrak{m}$, isto é, que ela possui as mesmas simetrias do operador de curvatura. Para o que falta, observe que a antissimetria em X e Y segue da antissimetria do colchete de Lie, ao passo que a simetria cíclica em X, Y, Z decorre da identidade de Jacobi. Resta, pois, mostrarmos que, para $X, Y, Z, W \in \mathfrak{m}$, vale $\langle [[X, Y], Z], W \rangle = -\langle [[X, Y], W], Z \rangle$. Mas, isto decorre da propriedade de $\mathfrak{h}$-shift; de fato, sendo $V = [X, Y] \in \mathfrak{h}$, tal propriedade garante que

$$\langle [V, Z], W\rangle = \langle [W, V], Z\rangle = -\langle [V, W], Z\rangle = -\langle [[X, Y], W], Z\rangle,$$

como queríamos. □

Observamos que diversos exemplos não triviais ilustram a teoria apresentada até aqui. Para uma apresentação detalhada dos mesmos, remetemos o leitor ao Exemplo 11.32 de O'NEILL (1983).

5.2 O tensor de Ricci de um espaço simétrico

Nesta seção, prosseguiremos com as mesmas notações da seção anterior. Considerando os dados de simetria $(G/H, \sigma, \langle\ ,\ \rangle)$, escreveremos simplesmente $M = G/H$ para denotar a variedade quociente naturalmente redutível cuja álgebra de Lie é determinada pelos autoespaços associados aos autovalores -1 e 1 do automorfismo σ_*. Mostraremos aqui que, independentemente da métrica G-invariante adotada em G/H, ou ainda, independentemente do produto escalar $\mathrm{Ad}(H)$-invariante adotado em $\mathfrak{m}$, o tensor de Ricci de M aplicado a vetores em $T_{eH}(G/H)$ (ou, o que é o mesmo, aos campos $G-$invariantes em M obtidos a partir deles) é sempre um múltiplo da forma de Killing de $\mathfrak{g}$.

Vimos anteriormente que, se G é um grupo de Lie conexo e semisimples munido da métrica biinvariante induzida por B, então $\{G, B\}$ é uma variedade Einstein. Dessa forma, mais uma vez propriedades de espaços simétricos generalizam propriedades de certos tipos de grupos de Lie.

Teorema 5.13. *Seja $M = G/H$ um espaço simétrico munido de uma estrutura G-invariante $\langle\ ,\ \rangle$. Dados $x, y \in T_{eH}(G/H)$ considere seus respectivos levantamentos horizontais $X, Y \in \mathfrak{m}$. Então,*

$$\mathrm{Ric}_M(x, y) = -\frac{1}{2}B(X, Y),$$

onde Ric_M denota o tensor de Ricci de M e B denota a forma de Killing de $\mathfrak{g}$.

Antes de passarmos à demonstração propriamente dita, é conveniente tecermos algumas considerações e estabelecermos alguns resultados preliminares.

I. A métrica $\langle\ ,\ \rangle^*$ em $\mathfrak{m}$: se $\pi : G \longrightarrow G/H$ denota a projeção natural, sabemos que $(\pi_*)_e : \mathfrak{m}(e) \to T_{eH}M$ é um isomorfismo. Podemos então, tomar em $\mathfrak{m}$ o único produto escalar $\langle\ ,\ \rangle^*$ tal que $\langle X, Y\rangle^* = \langle (\pi_*)_e(X(e)), (\pi_*)_e(Y(e))\rangle$, para todos $X, Y \in \mathfrak{m}$.

Lema 5.14. *Sejam $x \in T_{eH}M$ e $X \in \mathfrak{m}$ seu levantamento horizontal. Então, $x = (\pi_*)_e(X) = \widetilde{X}(eH)$, onde $\widetilde{X}$ é o campo vetorial em M com transformações de fluxo*

$\{\tau_{\exp(tX)}\}$.

Demonstração. Consideremos em M a curva α, dada por $\alpha(t) = (\pi \circ \beta)(t)$, onde $\beta(t) = \exp(tX)$. Então, $\alpha(t) = \beta(t)H = \tau_{\exp(tX)}(eH)$ é uma curva integral de $\widetilde{X}$, com $\alpha'(0) = (\pi \circ \beta)'(0) = (\pi_*)_e(X) = x$. □

Lema 5.15. *Sejam $x, y \in T_{eH}M$ e $X, Y \in \mathfrak{m}$ seus respectivos levantamentos horizontais. Seja $T_X : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ a aplicação dada por $T_X = (ad_X)^2$ e seja $R_x : T_{eH}M \longrightarrow T_{eH}M$ a transformação de curvatura, dada por $R_x(y) = R(x,y)x$. Então:*

(a) T_X deixa os subespaços $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{h}$ invariantes.

(b) O levantamento horizontal de $R_x(y)$ é $-T_X(Y) \in \mathfrak{m}$.

(c) $T_X : \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{m}$ é auto-adjunto relativamente à métrica $\langle\ ,\ \rangle^*$.

Demonstração.
(a) Pelo Lema 5.9, dados $X \in \mathfrak{m}$ e $Y \in \mathfrak{h}$ temos

$$T_X(Y) = ad_X([X,Y]) = [X,[X,Y]] \in [\mathfrak{m},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h};$$

com isso, T_X deixa o subespaço $\mathfrak{h}$ invariante. Um argumento análogo garante que T_X deixa invariante o subespaço $\mathfrak{m}$: dados $X, Y \in \mathfrak{m}$, temos

$$T_X(Y) = ad_X([X,Y]) = [X,[X,Y]] \in [\mathfrak{m},\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{m}.$$

(b) Pela proposição 5.12, temos $R_x(y) = R(x,y)x = (\pi_*)_{eH}([[X,Y],X])$, com $[[X,Y],X] = -[X,[X,Y]] = -(ad_X)^2(Y) = -T_X(Y)$. Portanto, o levantamento horizontal de $R_x(y)$ é $-T_X(Y)$.

(c) Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$ os levantamentos horizontais de $x, y, z \in T_{eH}M$, respectivamente. Na demonstração da Proposição 5.12, vimos que a função multilinear $(X,Y,Z,W) \mapsto \langle [[X,Y],Z],W\rangle^*$ é de tipo curvatura, logo, satisfaz $\langle [[X,Y],X],Z\rangle^* = \langle [[X,Z],X],Y\rangle^*$. Assim, por um lado, temos

$$\langle [[X,Y],X],Z\rangle^* = -\langle [X,[X,Y]],Z\rangle^* = -\langle T_X(Y),Z\rangle^*.$$

por outro,

$$\langle [[X,Z],X],Y\rangle^* = -\langle [X,[X,Z]],Y\rangle^* = -\langle T_X(Z),Y\rangle^*.$$

Com isso, $\langle T_X(Y),Z\rangle^* = \langle Y, T_X(Z)\rangle^*$, como queríamos. □

II. A ação do operador linear T_X em $\mathfrak{m}$: vimos, no item (a) do lema anterior, que T_X deixa invariante os subespaços $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{h}$; por outro lado, vimos no item (c) do mesmo lema que $T_X : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ é auto-adjunto em relação a $\langle\ ,\ \rangle^*$, portanto diagonalizável sobre $\mathbb{R}$. Nosso objetivo, agora, será mostrar que $T_X : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ também é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$. No que segue, denotaremos tais operadores simplesmente por $T_X\big|_{\mathfrak{m}}$ e $T_X\big|_{\mathfrak{h}}$.

Lema 5.16. *Para $X \in \mathfrak{m}$, temos:*

(a) Os autovalores não nulos de $T_X\big|_{\mathfrak{m}}$ coincidem com aqueles de $T_X\big|_{\mathfrak{h}}$.

(b) Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor não nulo dos operadores do item (a), e $\mathfrak{m}_\lambda$ e $\mathfrak{h}_\lambda$ denotam os autoespaços correspondentes, então:

i. ad_X aplica $\mathfrak{m}_\lambda$ em $\mathfrak{h}_\lambda$ e vice-versa.

ii. As aplicações $ad_X : \mathfrak{m}_\lambda \longrightarrow \mathfrak{h}_\lambda$ e $ad_X : \mathfrak{h}_\lambda \longrightarrow \mathfrak{m}_\lambda$ são isomorfismos.

Demonstração.
(a) e parte i. do item (b): denotemos por $\Lambda_{\mathfrak{m}} \subset \mathbb{R}$ o conjunto dos autovalores não nulos de $T_X\big|_{\mathfrak{m}}$, e por $\Lambda_{\mathfrak{h}}$ o conjunto dos autovalores não nulos de $T_X^{\mathbb{C}} : \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$, onde $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} = \{U + iV; U, V \in \mathfrak{h}\}$ denota a complexificação de $\mathfrak{h}$ e $T_X^{\mathbb{C}}(U + iV) = T(U) + iT(V)$ denota a complexificação de $T_X\big|_{\mathfrak{h}}$. O que é preciso fazer decorre das três asserções a seguir:

• $\underline{\Lambda_{\mathfrak{m}} \subset \Lambda_{\mathfrak{h}} \text{ e } ad_X(\mathfrak{m}_\lambda) \subset \mathfrak{h}_\lambda}$: dado $\lambda \in \Lambda_{\mathfrak{m}}$, seja $Y \in \mathfrak{m}$ um vetor não nulo tal que $T_X\big|_{\mathfrak{m}}(Y) = \lambda Y$. Como ad_X comuta com $T_X = (ad_X)^2$, temos que

$$T_X(ad_X(Y)) = ad_X(T_X(Y)) = \lambda\, ad_X(Y);$$

além disso, $ad_X(Y)$ é não nulo, visto que $0 \neq \lambda Y = T_X(Y) = ad_X(ad_X(Y))$. Como $ad_X(Y) \in [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$, segue que λ é um autovalor não nulo de $T_X\big|_{\mathfrak{h}}$ com autovetor associado $ad_X(Y)$; portanto, $\lambda \in \Lambda_{\mathfrak{h}}$ e $ad_X(\mathfrak{m}_\lambda) \subset \mathfrak{h}_\lambda$.

• $\underline{\Lambda_{\mathfrak{h}} = \Lambda_{\mathfrak{m}} \subset \mathbb{R}}$: dado $\mu \in \Lambda_{\mathfrak{h}}$, seja $Z \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ tal que $T_X^{\mathbb{C}}(Z) = \mu Z$. Observemos que

$$ad_X^{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) \subset \{ad_X(\mathfrak{h})\}^{\mathbb{C}} \subset [\mathfrak{m}, \mathfrak{h}]^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}.$$

Em particular, se $Z' = ad_X^{\mathbb{C}}(Z) \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$, então

$$(T_X\big|_{\mathfrak{m}})^{\mathbb{C}}(Z') = T_X^{\mathbb{C}}(Z') = (T_X^{\mathbb{C}} \circ ad_X^{\mathbb{C}})(Z) = (ad_X^{\mathbb{C}} \circ T_X^{\mathbb{C}})(Z) = \mu\, ad_X^{\mathbb{C}}(Z) = \mu\, Z'.$$

Ademais, $Z' \neq 0$, pois $0 \neq \mu\, Z = T_X^{\mathbb{C}}(Z) = ad_X^{\mathbb{C}}(ad_X^{\mathbb{C}}(Z)) = ad_X^{\mathbb{C}}(Z')$. Com isso, segue que μ é um autovalor não nulo de $(T_X\big|_{\mathfrak{m}})^{\mathbb{C}}$. Contudo, os autovalores de $T_X\big|_{\mathfrak{m}}$ são todos reais, de sorte que os autovalores de $(T_X\big|_{\mathfrak{m}})^{\mathbb{C}}$ são os mesmos de $T_X\big|_{\mathfrak{m}}$. Portanto, $\Lambda_{\mathfrak{h}} \subset \Lambda_{\mathfrak{m}}$ e, como o item anterior nos deu a inclusão contrária, concluímos que $\Lambda_{\mathfrak{h}} = \Lambda_{\mathfrak{m}} \subset \mathbb{R}$. A priori, os autovetores correspondentes aos elementos de $\Lambda_{\mathfrak{h}}$ poderiam ser complexos não reais, mas a discussão acima garante que eles, de fato, são reais. Portanto, os autovalores não nulos e autovetores de $(T_X\big|_{\mathfrak{h}})^{\mathbb{C}}$ coincidem com aqueles de $T_X\big|_{\mathfrak{h}}$, de sorte que $\Lambda_{\mathfrak{h}} = \Lambda_{\mathfrak{m}}$ é o conjunto dos autovalores não nulos de $T_X\big|_{\mathfrak{h}}$.

• <u>$ad_X(\mathfrak{h}_\lambda) \subset \mathfrak{m}_\lambda$</u>: graças à assertiva anterior, a demonstração deste fato é inteiramente análoga àquela da primeira asserção acima.

Para provar a parte ii. do item (b), mostraremos que tanto $ad_X : \mathfrak{h}_\lambda \longrightarrow \mathfrak{m}_\lambda$ quanto $ad_X : \mathfrak{m}_\lambda \longrightarrow \mathfrak{h}_\lambda$ são injetivas, com o que teremos $\dim \mathfrak{h}_\lambda = \dim \mathfrak{m}_\lambda$; além disso, uma aplicação linear injetiva entre espaços vetoriais de mesma dimensão é um isomorfismo. Para o que falta, seja $Z \in \mathfrak{h}_\lambda$ um elemento tal que $ad_X(Z) = 0$. Então, $Z \in \ker(ad_X) \subset \ker(ad_X)^2 = \ker T_X$. Isto implica que $Z \in \mathfrak{h}_\lambda \cap \mathfrak{h}_0$, onde $\mathfrak{h}_0$ é o autoespaço associado ao autovalor 0 do operador $T_X\big|_{\mathfrak{h}}$. Todavia, $\mathfrak{h}_\lambda \cap \mathfrak{h}_0 = \{0\}$ e, assim, $\ker(ad_X : \mathfrak{h}_\lambda \to \mathfrak{m}_\lambda) = \{0\}$. De modo similar mostra-se que $ad_X : \mathfrak{m}_\lambda \longrightarrow \mathfrak{h}_\lambda$ é também injetiva. $\square$

Lema 5.17. *$T_X : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}$ é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Nas notações da discussão acima, sejam $\lambda_1 \ldots, \lambda_r$ os elementos distintos de $\Lambda := \Lambda_{\mathfrak{h}} = \Lambda_{\mathfrak{m}}$. Para $1 \leq i \leq r$, sejam n_i a multiplicidade de λ_i como autovalor de $T_X\big|_{\mathfrak{h}}$ e

$$\mathfrak{h}^*_{\lambda_i} = \{Z \in \mathfrak{h}\,;\, (T_X - \lambda_i\, I)^{n_i}(Z) = 0\}, \quad \mathfrak{m}^*_{\lambda_i} = \{Z \in \mathfrak{m}\,;\, (T_X - \lambda_i\, I)^{n_i}(Z) = 0\}.$$

Se 0 for autovalor de $T_X\big|_{\mathfrak{h}}$, sejam n_0 sua multiplicidade e $\mathfrak{h}^*_0 = \{Z \in \mathfrak{h}\,;\, (T_X)^{n_0}(Z) = 0\}$; se 0 não for autovalor de $T_X\big|_{\mathfrak{h}}$, façamos $n_0 = 0$ e $\mathfrak{h}^*_0 = \{0\}$. Analogamente, se 0 for um autovalor de $T_X\big|_{\mathfrak{m}}$, sejam $\tilde{n}_0$ sua multiplicidade e $\mathfrak{m}^*_0 = \{Z \in \mathfrak{m}\,;\, (T_X)^{\tilde{n}_0}(Z) = 0\}$; se 0 não for autovalor de $T_X\big|_{\mathfrak{m}}$, façamos $\tilde{n}_0 = 0$ e $\mathfrak{m}^*_0 = \{0\}$.

Como os autovalores de $T_X\big|_{\mathfrak{m}}$ e de $T_X\big|_{\mathfrak{h}}$ são reais, o Teorema da Decomposição Primária garante que $\dim \mathfrak{h}^*_{\lambda_i} = n_i = \dim \mathfrak{m}^*_{\lambda_i}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^*_0 \oplus \mathfrak{h}^*_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{h}^*_{\lambda_r}$ e $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^*_0 \oplus \mathfrak{m}^*_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{m}^*_{\lambda_r}$. Para concluir a prova do lema, basta mostrarmos que, para $1 \leq i \leq r$, tem-se $\mathfrak{h}_{\lambda_i} = \mathfrak{h}^*_{\lambda_i}$ e $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}^*_0$, onde $\mathfrak{h}_0$ denota o núcleo de $T_X\big|_{\mathfrak{h}}$.

Claramente, $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{h}^*_0$ e $\mathfrak{h}_{\lambda_i} \subset \mathfrak{h}^*_{\lambda_i}$. Basta, pois, demonstrarmos as inclusões contrárias. Dado $Z \in \mathfrak{h}^*_{\lambda_i}$, vale $(T_X - \lambda_i\, I)^{n_i}(Z) = 0$. Se $Y := ad_X(Z)$, então $Y \in [\mathfrak{m}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{m}$. Por outro lado, como ad_X comuta com T_X, ele também comuta com $(T_X - \lambda_i\, I)^{n_i}$. Com isso,

$$(T_X - \lambda_i\, I)^{n_i}(Y) = (T_X - \lambda_i\, I)^{n_i}(ad_X(Z)) = ad_X((T_X - \lambda_i\, I)^{n_i}(Z)) = 0,$$

de sorte que $Y \in \mathfrak{m}^*_{\lambda_i} = \mathfrak{m}_{\lambda_i}$ (já que $T_X\big|_{\mathfrak{m}}$ é diagonalizável). Portanto,

$$0 = (T_X - \lambda_i\, I)(Y) = (T_X - \lambda_i\, I)(ad_X(Z)) = ad_X((T_X - \lambda_i\, I)(Z)),$$

de modo que

$$(T_X - \lambda_i I)(Z) \in \ker\left(ad_X\big|_{\mathfrak{h}}\right) \subset \ker\left((ad_X)^2\big|_{\mathfrak{h}}\right) = \ker\left(T_X\big|_{\mathfrak{h}}\right) = \mathfrak{h}_0.$$

Concluímos, então, que

$$(T_X - \lambda_i I)(Z) \in \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{h}^*_{\lambda_i} \subset \mathfrak{h}^*_0 \cap \mathfrak{h}^*_{\lambda_i} = \{0\},$$

e assim $Z \in \mathfrak{h}_{\lambda_i}$.

Por fim, ao trocarmos λ_i por $\lambda_0 = 0$ na demonstração acima, obtemos $\mathfrak{h}^*_0 \subset \mathfrak{h}_0$. Mas, como já tínhamos a inclusão contrária, segue a igualdade. $\square$

Podemos, finalmente, voltar à demonstração do Teorema 5.13.

Demonstração. Sejam $x, y \in T_{eH}M$ e $X, Y \in \mathfrak{m}$ seus respectivos levantamentos horizontais. Queremos mostrar que $\mathrm{Ric}_M(x, y) = -\frac{1}{2}B(X, Y)$. Como Ric_M e B são formas bilineares simétricas, por polarização é suficiente mostrarmos que $\mathrm{Ric}_M(x, x) = -\frac{1}{2}B(X, X)$.

Pelo item (b) do Lema 5.15, temos

$$\mathrm{Ric}_M(x, x) = \mathrm{tr}(R_x) = -\mathrm{tr}(T_X\big|_{\mathfrak{m}}).$$

Por outro lado,

$$B(X, X) = \mathrm{tr}((ad_X)^2) = \mathrm{tr}((ad_X)^2\big|_{\mathfrak{m}}) + \mathrm{tr}(((ad_X)^2\big|_{\mathfrak{h}})) = \mathrm{tr}(T_X\big|_{\mathfrak{m}}) + \mathrm{tr}(T_X\big|_{\mathfrak{h}});$$

então, é suficiente mostrarmos que $\mathrm{tr}(T_X\big|_{\mathfrak{m}}) = \mathrm{tr}(T_X\big|_{\mathfrak{h}})$. Mas, como $T_X\big|_{\mathfrak{m}}$ e $T_X\big|_{\mathfrak{h}}$ são diagonalizáveis, tais traços correspondem às somas de todos os autovalores não nulos dos operadores correspondentes, contados de acordo com suas multiplicidades; então, o Lema 5.16 garante que

$$\mathrm{tr}(T_X\big|_{\mathfrak{m}}) = \sum_{\lambda \in \Lambda_{\mathfrak{m}}} \lambda \dim \mathfrak{m}_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda_{\mathfrak{h}}} \lambda \dim \mathfrak{h}_\lambda = \mathrm{tr}(T_X\big|_{\mathfrak{h}}).$$

$\square$

5.3 Campos de Killing e os autovalores de $\mathbf{T_X}$

Seja dado um espaço simétrico $M = G/H$, com subespaço de Lie $\mathfrak{m}$. Fixado $X \in \mathfrak{m}$, nesta última seção estudaremos a relação entre os autovalores do operador diagonalizável T_X com campos de Jacobi em M. Mais precisamente, conseguiremos determinar tais campos em termos de equações diferenciais lineares de segunda ordem que dependem unicamente dos autovalores de T_X. Dada a relevância do papel dos campos de Jacobi de

Geometria Riemanniana, consideramos esta última seção como a parte mais importante do presente trabalho.

A definição a seguir desempenhará um papel importante nesta seção.

Definição 5.18. *Dada uma variedade riemanniana completa M, dizemos que uma isometria $\phi : M \longrightarrow M$ é uma transvecção ao longo da geodésica $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M$ se as duas condições a seguir forem satisfeitas:*

(i) ϕ translada γ, ou seja, existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(\gamma(s)) = \gamma(s+c)$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

(ii) Para todo $s \in \mathbb{R}$, a aplicação linear $(\phi_*)_{\gamma(s)} : T_{\gamma(s)}M \to T_{\phi(\gamma(s))}M$ coincide com o transporte paralelo ao longo de γ.

Um exemplo simples de transvecção é dado por uma rotação ϕ da esfera $\mathbb{S}^2$ sobre o eixo $Oz \in \mathbb{R}^3$, em cujo caso ϕ é a transvecção ao longo do círculo equatorial $\{z = 0\}$ de $\mathbb{S}^2$. Para nossos propósitos, é um fato importante que, em um espaço simétrico M, existe uma transvecção ao longo de cada geodésica.

Lema 5.19. *Sejam γ uma geodésica em um espaço simétrico M, e ζ_s a simetria global de M em $\gamma(s)$. Então, para cada $c \in \mathbb{R}$, a isometria $\zeta_{c/2} \circ \zeta_0$ de M é uma transvecção ao longo de γ, que a translada por c.*

Demonstração. Para cada $s \in \mathbb{R}$, temos $\zeta_0(\gamma(s)) = \gamma(-s)$. Então, uma vez que $c/2$ é o ponto médio do intervalo $[-s, s+c]$, temos que $(\zeta_{c/2} \circ \zeta_0)(\gamma(s)) = \gamma(s+c)$. Isso garante a validade do item (i) da definição anterior.

Agora, seja $t \mapsto X_{\gamma(t)}$ um campo paralelo ao longo de γ. Para cada $s \in \mathbb{R}$ fixado, o fato de ζ_s ser uma isometria de M garante que o campo $t \mapsto ((\zeta_s)_*)_{\gamma(t)}(X_{\gamma(t)})$ é paralelo ao longo de $\zeta_s \circ \gamma$, que, pelo parágrafo anterior, é uma reparametrização de γ. Mas, como o transporte paralelo independe de reparametrizações, concluímos que o campo $t \mapsto ((\zeta_s)_*)_{\gamma(t)}(X_{\gamma(t)})$ é paralelo ao longo de γ.

Dado $x \in T_{\gamma(t)}M$ temos que x é paralelo ao longo de γ a um vetor $y \in T_{\gamma(0)}M$. Com isso, segue do parágrafo anterior que $((\zeta_0)_*)_{\gamma(t)}(x)$ é paralelo ao longo de γ a $((\zeta_0)_*)_{\gamma(0)}(y) = -y$, e também a um vetor $z \in T_{\gamma(c/2)}M$. Portanto, novamente pelo parágrafo anterior, $((\zeta_{c/2})_*)_{\gamma(-t)} \circ ((\zeta_0)_*)_{\gamma(t)}(x)$ é paralelo a $((\zeta_{c/2})_*)_{\gamma(c/2)}(z) = -z$ ao longo de γ. Mas, como z é paralelo a $-y$ ao longo de γ, temos que $-z$ é paralelo a y ao longo de γ, e assim $((\zeta_{c/2} \circ \zeta_0)_*)_{\gamma(t)}(x) = ((\zeta_{c/2})_*)_{\gamma(-t)} \circ ((\zeta_0)_*)_{\gamma(t)}(x)$ é paralelo a y ao longo de γ. Por fim, recordando que y é paralelo a x ao longo de γ segue por transitividade que $((\zeta_{c/2} \circ \zeta_0)_*)_{\gamma(t)}(x)$ é paralelo a x ao longo de γ. Isso demonstra a validade do item (ii) da Definição 5.18. $\square$

Proposição 5.20. *Seja $M = G/H$ um espaço simétrico com subespaço de Lie $\mathfrak{m}$. Se α é o subgrupo a um parâmetro de G associado a um elemento de $\mathfrak{m}$ e $\gamma = \pi \circ \alpha$, então $((\tau_{\alpha(s)})_*)_{eH} : T_{eH}M \longrightarrow T_{\gamma(s)}M$ é o transporte paralelo ao longo de γ.*

Demonstração. Se Z é um campo paralelo ao longo de γ, temos de mostrar que $Z(s) = (\tau_{\alpha(s)})_{*_{eH}}(Z(0))$. Para isso, fixemos $c \in \mathbb{R}$ e consideremos $\phi \in I(M)$ dada por $\phi = \zeta_{c/2} \circ \zeta_0$. Pelo lema anterior, ϕ é uma transvecção de M ao longo de γ, que translada γ por c; portanto, $W(c) = (\phi_*)_{eH}(Z(0)) \in T_{\gamma(c)}M$ é o transporte paralelo de $Z(0)$ ao longo de γ. Com isso, basta mostrarmos que $(\phi_*)_{eH} = (\tau_{\alpha(c)})_{*_{eH}}$.

Para o que falta, note primeiro que, como $\gamma = \pi \circ \alpha$ e $\gamma(s) = \alpha(s)eH = \tau_{\alpha(s)}(eH)$, temos que $\phi(eH) = \phi(\gamma(0)) = \gamma(c) = \tau_{\alpha(c)}(eH)$. Basta, pois, mostrarmos que $\phi = \tau_{\alpha(c)}$. Para tanto, observe inicialmente que, como α é um subgrupo a um parâmetro, temos $\alpha(c) = \alpha(c/2 + c/2) = \alpha(c/2)\alpha(c/2)$. Também, pondo $g = \alpha(c/2)$ em (17) (e omitindo os sinais de composição, por simplicidade de notação), segue que $\tau_{\alpha(c/2)}\zeta_0\tau^{-1}_{\alpha(c/2)}$ é a simetria global de M em $\gamma(c/2)$. Portanto,

$$\begin{aligned}\phi = \tau_{\alpha(c)} &\Leftrightarrow \zeta_{c/2}\zeta_0 = \tau_{\alpha(c)} \Leftrightarrow \tau_{\alpha(c/2)}\zeta_0\tau^{-1}_{\alpha(c/2)}\zeta_0 = \tau_{\alpha(c/2)}\tau_{\alpha(c/2)}\\ &\Leftrightarrow \zeta_0\tau_{\alpha(-c/2)}\zeta_0 = \tau_{\alpha(c/2)} \Leftrightarrow \tau_{\alpha(-c/2)} = \zeta_0\tau_{\alpha(c/2)}\zeta_0,\end{aligned}$$

onde a última equivalência decorre da involutividade de ζ_0. Agora, segue de (18) que

$$\tau_{(\sigma\circ\alpha)(c/2)} = \zeta_0\tau_{\alpha(c/2)}\zeta_0,$$

de sorte que nossa tarefa ficou reduzida a mostrar que $(\sigma \circ \alpha)(c/2) = \alpha(-c/2)$. Mas, como α é um subgrupo a um parâmetro de G tal que $\alpha'(0) \in \mathfrak{m}$, segue do Lema 5.9 que $(\sigma\circ\alpha)'(0) = \sigma_*(\alpha'(0)) = -\alpha'(0)$, de modo que a unicidade dos subgrupos a um parâmetro de G fornece $(\sigma \circ \alpha)(t) = \alpha(-t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. □

A proposição e o lema apresentados acima têm consequências bastante interessantes. Por exemplo (veja O'NEILL (1983)), decorre do lema anterior que toda geodésica não constante definida em um espaço simétrico ou é injetiva ou é periódica. Além disso, uma vez que o transporte paralelo ao longo de geodésicas determina a conexão de Levi-Civita, a proposição anterior garante que, em um espaço simétrico M, tal conexão independe da escolha da métrica G-invariante para M.

Voltemos, agora, às definições e resultados que ainda precisamos apresentar.

Definição 5.21. *Dada uma variedade riemanniana M um campo suave X em M é um campo de Killing (ou, ainda, uma isometria infinitesimal) se suas transformações de fluxo forem isometrias locais.*

Definição 5.22. *Sejam M uma variedade riemanniana e $\gamma : [0, a] \longrightarrow M$ uma geodésica de M. Um campo de vetores J ao longo de γ é dito um campo de Jacobi se J for o campo variacional de uma variação geodésica de γ.*

Nas notações da definição anterior é possível provar (veja o Capítulo 5 de DO CARMO (2015), por exemplo) que um campo J é de Jacobi se e só se satisfaz ao

longo de γ a equação
$$J'' + R(\gamma', J)\gamma' = 0.$$
Por isso, tal equação é conhecida como a equação de Jacobi.

Uma vez que a equação de Jacobi é linear e de segunda ordem, um campo de Jacobi fica inteiramente determinado pelas condições iniciais $J(0)$ e $J'(0)$. Mais precisamente, sejam $n = \dim M$ e $e_1(t), \ldots, e_n(t)$ campos paralelos e ortonormais ao longo de γ; escrevendo
$$J(t) = \sum_{i=1}^{n} = f_i(t)e_i(t) \ \text{ e } \ a_{ij} = \langle R(\gamma'(t), e_i(t))\gamma'(t), e_j(t)\rangle$$
para $1 \leq i, j \leq n$, temos
$$\frac{D^2 J}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} f_i''(t)e_i(t)$$
e
$$R(\gamma', J)\gamma' = \sum_{j=1}^{n} \langle R(\gamma', J)\gamma', e_j\rangle e_j = \sum_{i,j=1}^{n} f_i \langle R(\gamma', e_i)\gamma', e_j\rangle e_j = \sum_{i,j=1}^{n} f_i a_{ij} e_j.$$
Portanto, a equação de Jacobi equivale ao sistema de EDOs lineares de segunda ordem
$$f_j''(t) + \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t) f_i(t) = 0, \ \ j = 1, \ldots, n.$$
Assim, dadas as condições iniciais $J(0)$ e $J'(0)$ (ou, equivalentemente, os valores para $f_i(0)$ e $f_i'(0)$, para $1 \leq i \leq n$), a teoria de EDO's garante a existência de uma única solução diferenciável para o sistema acima, a qual é definida em todo o intervalo $[0, a]$.

Lema 5.23. *Sejam M uma variedade riemanniana e γ uma geodésica em M. Se X é um campo de Killing em M, então sua restrição a γ é um campo de Jacobi.*

Demonstração. Sejam $p \in M$ e $U \subset M$ um aberto no qual está definido o fluxo local $\varphi : (-\delta, \delta) \times U \to M$ de X. Considere a variação $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \to M$ de γ, dada por $F(t, s) = \varphi_t(\gamma(s)) = \varphi(t, \gamma(s))$. Como $\varphi_t : U \to \varphi_t(U)$ é uma isometria, as curvas $s \mapsto \varphi_t(\gamma(s))$ são geodésicas. Observe, agora, que $F(0, s) = \gamma(s)$. Definindo $J = \frac{\partial F}{\partial t}\big|_{t=0}$, temos que J é o campo variacional de uma variação geodésica, de forma que J é um campo de Jacobi ao longo de γ. Por outro lado,
$$J(s) = \frac{\partial F}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, \gamma(s))\bigg|_{t=0} = X(\varphi(0, \gamma(s))) = X(\gamma(s)).$$
□

Voltando a um espaço simétrico $M = G/H$, dado $Z \in \mathfrak{g}$, denotemos por $\widetilde{Z}$ o campo vetorial em M com transformações de fluxo $\{\tau_{\exp(tZ)}\}$. Uma vez que estamos considerando em M uma métrica G-invariante, as transformações de fluxo de $\widetilde{Z}$ são isometrias, e daí $\widetilde{Z}$ é um campo de Killing em M. Portanto, segue do lema anterior que a restrição de $\widetilde{Z}$ a qualquer geodésica γ de M é um campo de Jacobi. O resultado a seguir dá uma descrição mais precisa de tais campos. Para o enunciado do mesmo, o leitor pode achar interessante rever o item (a) da Proposição 5.12.

Teorema 5.24. *Sejam $M = G/H$ um espaço simétrico com subespaço de Lie $\mathfrak{m}$. Seja $X \in \mathfrak{m}$ e $\gamma_X(s) = \exp(sX)H$ uma geodésica em M, partindo de eH. Dado $Z \in \mathfrak{g}$, considere a variação geodésica $F(t,s) = \exp(tZ)\gamma_X(s) = \exp(tZ)\exp(sX)H$ de γ_X, com campo variacional $J = \frac{\partial F}{\partial t}\big|_{t=0}$.*

(a) Se $Z \in \mathfrak{h}$, então J é o único campo de Jacobi ao longo de γ_X tal que $J(0) = 0$ e $J'(0) = \widetilde{[Z,X]}(eH)$.

(b) Se $Z \in \mathfrak{m}$, então $J(s)$ é o único campo de Jacobi ao longo de γ_X tal que $J(0) = \widetilde{Z}(eH)$ e $J'(0) = 0$.

Demonstração. Conforme comentamos imediatamente antes do enunciado do teorema, em qualquer um dos casos acima J é um campo de Jacobi ao longo de γ_X. Vimos também que um campo de Jacobi J é unicamente determinado pelas condições iniciais $J(0)$ e $J'(0)$. Basta, portanto, verificarmos que, em cada um dos itens acima, tais condições são exatamente as listadas.

Uma vez que $J = \frac{\partial F}{\partial t}\big|_{t=0}$, o lema de simetria para superfícies parametrizadas (Lema III.3.4 de DO CARMO (2015)) garante que

$$J'(0) = \frac{D}{\partial s}\frac{\partial F}{\partial t}(0,0) = \frac{D}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial s}(0,0).$$

Analisemos, agora, os itens (a) e (b).

(a) Como $Z \in \mathfrak{h}$, temos para todo $t \in \mathbb{R}$ que $\exp(tZ) \in H$. Com isso, $F(t,0) = \exp(tZ)H = eH$ para todo t, de sorte que $J(0) = \frac{\partial F}{\partial t}(t,0)\big|_{t=0} = 0$.

Para calcular $J'(0)$, utilizando novamente que $\exp(tZ) \in H$ para todo $t \in \mathbb{R}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} F(t,s) &= \exp(tZ)\exp(sX)H = \exp(tZ)\exp(sX)\exp(tZ)^{-1}H \\ &= C_{\exp(tZ)}(\exp(sX))H = \exp(s\mathrm{Ad}_{\exp(tZ)}(X))H, \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, invocamos o item (g) da Proposição 2.21. Fazendo $X(t) = \mathrm{Ad}_{\exp(tZ)}(X)$, a igualdade acima fornece $F(t,s) = \exp(sX(t))H = \pi(\exp(sX(t)))$. Então,

$$\frac{\partial F}{\partial s}(t,s)\Big|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s}\pi(\exp(sX(t)))\Big|_{s=0} = (\pi_*)_e(X(t)) = \widetilde{X(t)}(eH) \in T_{eH}M,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Agora, a derivada covariante do campo $\frac{\partial F}{\partial s}(t,s)\Big|_{s=0}$ ao longo da curva $t \mapsto F(t,0)$ coincide com a derivada usual, já que $F(t,0) \equiv eH$ é uma curva constante.

Daí, fazendo $Y = \lim_{t\to 0} \frac{X(t)-X(0)}{t}$ e usando a linearidade da aplicação $Z \mapsto \widetilde{Z}$ definida de $\mathfrak{g}$ para o espaço dos campos suaves em M, obtemos

$$\begin{aligned} J'(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{\widetilde{X(t)}(eH) - \widetilde{X(0)}(eH)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(\widetilde{X(t)} - \widetilde{X(0)})(eH)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(X(\widetilde{t) - X}(0))}{t}(eH) = \widetilde{Y}(eH). \end{aligned}$$

Finalmente, como $X(t) = \mathrm{Ad}_{\exp(tZ)}(X)$, o Lema 4.17 nos dá

$$Y = \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{Ad}_{\exp(tZ)}(X) - X}{t} = [Z, X].$$

Então, $J'(0) = \widetilde{Y}(eH) = \widetilde{[Z,X]}(eH)$, como queríamos demonstrar (observemos que $[Z, X] \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$).

(b) Se $Z \in \mathfrak{m}$, então $F(t, 0) = \exp(tZ)H = \gamma_Z(t)$ é uma geodésica em M partindo de eH. Segue que

$$J(0) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, 0)\Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}(\pi(\exp(tZ)))\Big|_{t=0} = (\pi_*)_e(Z) = \widetilde{Z}(eH).$$

Para o cálculo de $J'(0)$, observemos inicialmente que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial s}(t, s)\Big|_{s=0} &= \frac{\partial}{\partial s}(\exp(tZ)\gamma_X(s))\Big|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s}\big(\tau_{\exp(tZ)}(\gamma_X(s))\big)\Big|_{s=0} \\ &= \big((\tau_{\exp(tZ)})_*\big)_{eH}(\gamma_X'(0)). \end{aligned}$$

Como M é um espaço simétrico e $Z \in \mathfrak{m}$, sabemos pela Proposição 5.20 que a aplicação linear $\big((\tau_{\exp(tZ)})_*\big)_{eH} : T_{eH}M \to T_{\gamma_Z(t)}M$ é o transporte paralelo ao longo da geodésica γ_Z. Portanto, $\frac{\partial F}{\partial s}(t, s)\big|_{s=0}$ é um campo vetorial paralelo ao longo de $F(t, 0) = \gamma_Z(t)$. Logo, $J'(0) = 0$. $\square$

Vimos anteriormente que, para $X \in \mathfrak{m}$, os autovalores não nulos de $T_X\big|_{\mathfrak{m}}$ e de $T_X\big|_{\mathfrak{h}}$ são os mesmos números reais, com as mesmas multiplicidades. Lembremos também que, se $\mathfrak{h}_\lambda$ e $\mathfrak{m}_\lambda$ denotam respectivamente os autoespaços de T_X em $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{h}$ associados ao autovalor não nulo λ, então as aplicações lineares $ad_X : \mathfrak{m}_\lambda \longrightarrow \mathfrak{h}_\lambda$ e $ad_X : \mathfrak{h}_\lambda \longrightarrow \mathfrak{m}_\lambda$ são isomorfismos. Nosso último resultado especializa o teorema anterior, para $Z \in \mathfrak{m}_\lambda$ ou $\mathfrak{h}_\lambda$.

Teorema 5.25. *Sejam $M = G/H$ um espaço simétrico com subespaço de Lie $\mathfrak{m}$. Seja $X \in \mathfrak{m}$ e $\gamma_X(s) = \exp(sX)H$ uma geodésica em M, partindo de eH. Dado $Z \in \mathfrak{g}$, considere a variação geodésica $F(t, s) = \exp(tZ)\gamma_X(s) = \exp(tZ)\exp(sX)H$ de γ_X, com campo variacional $J = \frac{\partial F}{\partial t}\big|_{t=0}$. Se λ é um autovalor não nulo de T_X, então:*

(a) Para $Z \in \mathfrak{h}_\lambda$, temos $J = fE$, onde E é um campo vetorial paralelo ao longo de γ e

f é a função suave tal que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e $f'' - \lambda f = 0$.

(b) Para $Z \in \mathfrak{m}_\lambda$, temos $J = fE$, onde E é um campo vetorial paralelo ao longo de γ e f é a função suave tal que $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ e $f'' - \lambda f = 0$.

Antes de passarmos à demonstração do teorema, precisamos de um resultado bastante simples, mas que ainda não provamos. Para o enunciado do mesmo, lembremos que, para $x \in T_{eH}M$, a transformação de curvatura $R_x : T_{eH}M \to T_{eH}M$ é definida por $R_x(y) = R(x,y)x$.

Lema 5.26. *Nas notações do enunciado do teorema anterior, sejam dados $X \in \mathfrak{m}$ e um autovalor não nulo λ de T_X. Sejam $\gamma(s) = \exp(sX)H$ uma geodésica em M e E um campo vetorial paralelo ao longo de γ, tal que $E(0) = \widetilde{Z}(eH)$ para algum $Z \in \mathfrak{m}_\lambda$. Então, $R_{\gamma'(s)}(E(s)) = -\lambda E(s)$, para todo $s \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Evidentemente, $-\lambda E$ é um campo paralelo ao longo de γ, de sorte que $R_{\gamma'}(E)$ também o é (uma vez que espaços simétricos são, em particular, localmente simétricos). Por unicidade, nos resta apenas provar que $-\lambda E$ e $R_{\gamma'}(E)$ têm o mesmo valor em $s = 0$. Mas, $-\lambda E(0) = -\lambda\widetilde{Z}(eH) \in T_{eH}M$ tem levantamento $-\lambda Z \in \mathfrak{m}$. Além disso, como $\gamma'(0)$ e $E(0)$ têm levantamentos X e Z, respectivamente, segue do item (b) do Lema 5.15 que $R_{\gamma'(0)}(E(0))$ tem levantamento $-T_X Z = -\lambda Z \in \mathfrak{m}$. □

Voltemo-nos, agora, à demonstração do teorema.

Demonstração do Teorema 5.25. Para o item (a) lembremos que, no item (a) do Teorema 5.24, vimos que J é o único campo de Jacobi ao longo de γ, tal que $J(0) = 0$ e $J'(0) \in T_{eH}M$ corresponde a $[Z,X] \in \mathfrak{m}$. Como $Z \in \mathfrak{h}_\lambda$, segue do Lema 5.16 que $[Z,X] = -ad_X(Z) \in \mathfrak{m}_\lambda$.

Agora, seja $\tilde{J} = fE$, onde E é o campo vetorial paralelo ao longo de γ tal que $E(0) \in T_{eH}M$ tem levantamento horizontal $[Z,X] \in \mathfrak{m}_\lambda$, e f é a função suave tal que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e $f'' - \lambda f = 0$. É suficiente provarmos que $\tilde{J}$ é um campo de Jacobi ao longo de γ, com as mesmas condições iniciais que J.

Para o que falta, como E é paralelo ao longo de γ, temos que $\tilde{J}''(s) = f''(s)E(s)$ para todo s. Pelo lema anterior, vale também que $R_{\gamma'(s)}(\tilde{J}(s)) = f(s)R_{\gamma'(s)}(E(s)) = -\lambda f(s)E(s)$. Então,

$$\tilde{J}''(s) + R_{\gamma'(s)}(\tilde{J}(s)) = (f''(s) - \lambda f(s))E(s) = 0,$$

de sorte que $\tilde{J}$ satisfaz a equação de Jacobi e, logo, é um campo de Jacobi ao longo de γ. Por outro lado, segue da definição de f que $\tilde{J}(0) = f(0)E(0) = 0$ e $\tilde{J}'(0) = f'(0)E(0) = E(0)$, que corresponde a $[Z,X] \in \mathfrak{m}_\lambda$. Isso mostra que J e $\tilde{J}$ têm as mesmas condições iniciais em $s = 0$.

Para provar (b), usemos o item (b) do Teorema 5.24, o qual garante que J é o único campo de Jacobi ao longo de γ, tal que $J(0) \in T_{eH}M$ corresponde a $Z \in \mathfrak{m}_\lambda$ e $J'(0) = 0$. De modo análogo ao item anterior, definamos $\tilde{J} = fE$, onde E é o campo vetorial paralelo ao longo de $\gamma(s)$ tal que $E(0) \in T_{eH}M$ tem levantamento horizontal $Z \in \mathfrak{m}_\lambda$, e f é a única função suave tal que $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ e $f'' - \lambda f = 0$.

Como no item anterior, temos que $\tilde{J}$ é um campo de Jacobi. Além disso, $\tilde{J}(0) = f(0)E(0) = E(0)$, que corresponde a $Z \in \mathfrak{m}_\lambda$, e $\tilde{J}'(0) = f'(0)E(0) = 0$. Portanto, J e $\tilde{J}$ têm as mesmas condições iniciais, o que completa a prova. $\square$

6 CONCLUSÃO

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho, nos foi possível compreender a importância de identificar espaços simétricos com certas variedades quociente particulares. Mais precisamente, vimos que, dado um espaço simétrico M, podemos identificá-lo com o quociente $I_0(M)/H$, onde $I_0(M)$ é a componente conexa do grupo $I(M)$ de suas isometrias que contém a identidade e H é o subgrupo de isotropia de um ponto fixado de M. Depois de garantir a existência de uma tal identificação, passamos a tratar um espaço simétrico apenas pelo que chamamos de seus dados simétricos. Um desses dados é exatamente o produto interno $\mathrm{Ad}(H)$-invariante fixado em $\mathfrak{m}$, e vimos também como relacionar tais produtos internos, de forma biunívoca, com métricas G-invariantes em M. A culminância do trabalho foi mostrar como o tensor de Ricci e os campos de Killing de M também só dependem das álgebras de Lie de G e H e do subespaço de Lie $\mathfrak{m}$ correspondente. Em particular, o tensor de Ricci de M sempre tem a mesma expressão obtida no caso (muito mais simples) em que tratamos de um grupo de Lie semisimples, munido com a métrica (Einstein) induzida por sua forma de Killing. Isto não é mera coincidência. De fato, para classificação, a menos de isomorfismos locais, dos espaços simétricos, E. Cartan sugeriu duas maneiras de proceder, uma delas semelhante à tratada aqui. A segunda maneira, por sua vez, conduz ao problema de classificar álgebras de Lie reais semisimples, algo que o próprio Cartan já resolvera em 1914.

REFERÊNCIAS

BRÖCKER, Tammo, Theodor; TOM DIECK. *Representations of compact Lie groups*, v. 98. Springer Science & Business Media, 2013.

DO CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana.* 5 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

EBERLEIN, Patrick. The manifold structure of G/H, Averaging on compact Lie groups, The Ricci tensor and Killing vector fields in Riemannian symmetric spaces. 2005.

LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds.* New York: Springer, 2003.

LEE, J. M. *Introduction to topological manifolds*, v. 940. Springer Science & Business Media, 2010.

O'NEILL, B. *Semi-Riemannian Geometry, with Applications to Relativity.* Los Angeles: Academic Press, 1983.

PALAIS, R. S. *A global formulation of the Lie theory of transformation groups.* Mem. Amer. Math. Soc. 22, 1957.