UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FABIANA ALVES DOS SANTOS

ESPECTRO DE VARIEDADES COMPLETAS E NÃO-COMPACTAS

FORTALEZA
2017

FABIANA ALVES DOS SANTOS

ESPECTRO DE VARIEDADES COMPLETAS E NÃO-COMPACTAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Montenegro

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S235e Santos, Fabiana Alves dos.
Espectro de Variedades Completas e Não Compactas / Fabiana Alves dos Santos. – 2017.
39 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática , Fortaleza, 2017.
Orientação: Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro.

1. Espectro Essencial. 2. Operador de Laplace Beltrami. 3. Equações de Hill. I. Título.

CDD 510

FABIANA ALVES DOS SANTOS

ESPECTRO DE VARIEDADES COMPLETAS E NÃO-COMPACTAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Análise.

Aprovoda em: 20/01/2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Luiz Antônio Caetano Monte
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ivaldo Tributino de Sousa
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho a Deus, por sua infinita misericórdia.
Aos meus pais, irmãs e sobrinho pelo apoio, incentivo e amor incondicionais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me sustentado até aqui.

Aos meus pais, Osvaldo José dos Santos e Maria de Fátima Alves dos Santos, minhas irmãs, Lidiane Alves de Araújo de Santana e Gabriela Alves dos Santos, meu sobrinho, Márcio Araújo de Santana Filho, e meu cunhado, Márcio Araújo de Santana, por serem meu esteito, por sempre acreditarem e por sempre fazer tudo podiam, e às vezes até o que não podiam, para me ajudarem a concluir este sonho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro, pela cuidadosa orientação.

Aos professores Dr. Barnabé Pessoa Lima, Dr. Gleydson Chaves Ricarte, Dr. Ivaldo Tributino de Souza, Dr. Luiz Antônio Caetano Monte pela participação na banca avaliadora e por suas colaborações e sugestões.

Aos professores e colegas da PGMAT/UFC pela contribuição com o meu crescimento acadêmico. Às secretárias da PGMAT/UFC.

A todos os familiares que torceram de longe.

Aos amigos que o Ceará me deu, Elaine Sampaio, Josué Machado, Jonathan Welson, Rafael Jorge, Tannara Mota, Vanuza Rodrigues e Wanderley Oliveira, e ao amigo, importado da Bahia, Renivaldo Sena.

Às queridas Nívia Azevedo, minha *cheerleader*, e CAP Patrícia Rebouças, por toda sua sensatez.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

“EBENÉZER!”
1 Sm 7.12

RESUMO

Neste trabalho caracterizamos o espectro do operador de Laplace-Beltrami na variedade *warped* $M^n = \mathbb{R} \times_r \mathbb{S}^{n-1}$ cuja função *warping* é suave, positiva, períodica, de período a, e satisfaz $r_0 = \min r(t) < \sqrt{n-1}a/\pi$. Mostramos que tal espectro não possui autovalores, é escrito como a união de intervalos e, da periodicidade de r, utilizamos a clássica teoria a cerca dos operados de Hill, e concluimos e existência de *gaps* no espectro de M.

Palavras-chave: Espectro Essencial. Operador de Laplace Beltrami. Equação de Hill.

ABSTRACT

On this work we study the espectrum of Laplace-Beltrami operator on the warped Riemannian manifold $M^n = \mathbb{R} \times_r \mathbb{S}^{n-1}$, whose warping function is smooth, positive, periodic, with period a and satisfies $r_0 = \min r(t) < \sqrt{n-1}a/\pi$. We show that spectrum there no eingevalue, is formed by a union of closed intervals, and, from the peridicity of r, using the classical Hill's Equations Theory, we conclude the existence of gaps.

Keywords: Essential Spectrum. Laplace-Beltrami's Operator. Hill's Equation.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho iremos consideramos variedades Riemannianas completas, não-compactas na forma $M^n = \mathbb{R} \times_r \mathbb{S}^{n-1}$ com métrica *warped*, $ds^2 = dt^2 + r(t)d\theta^2$, onde r é uma função suave, positiva e periódica, de perído a, tal que $r_0 = \min r < \sqrt{n-1}a/\pi$. Nosso objetivo é caracterizar o espectro do operador de Laplace-Beltrami em M, $-\Delta = div(grad)$.

O operador de Laplace-Beltrami é positivo, auto-adjunto e definido em $C^\infty(M)$, com única extensão contínua em $L^2(M)$. O espectro deste operador, $\sigma(-\Delta)$, que também identificaremos como o espectro da variedade, $\sigma(M)$, é formado por todos os λ reais tais que o operador $(-\Delta - \lambda I)^{-1}$ é ilimitado, e se divide em espectro discreto e espectro essencial. O espectro discreto consiste em todos os $\lambda \in \sigma(M)$ tais que λ é um autovalor de multiplicidade finita de $-\Delta$ e λ é um ponto isolado de $\sigma(M)$. O espectro essencial de $-\Delta$, $\sigma'(M)$, é o complemento em $\sigma(M)$ do espectro discreto.

Se M é uma variedade compacta, o espectro essencial é vazio, ou seja, o espectro da variedade coincide com o espectro discreto e o problema $-\Delta u = \lambda u$ em M possui uma quantidade infinita e enumerável de autovalores $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfazem

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots,$$

tais que $\lambda_n \to \infty$ quando $n \to \infty$.

Para variedades não compactas, o problema de determinar o espectro essencial depende de características geométricas e topológicas da variedade e vem despertando o interesse dos matemáticos nas últimas décadas. Em 1981, Donnely, (DONNELLY, 1981), mostrou que se M é uma variedade de Hadamard, n-dimensional, cuja curvatura, no infinto, se aproxima de $-k < 0$ então o seu espectro essencial é o intervalo $[((n-1)k^2)/4, \infty)$. Em 1992, Escobar-Freire, (ESCOBAR and FREIRE, 1992), mostraram que o espectro é $[0, \infty)$ para variedades de curvatura seccional não negativa com algumas condições adicionais. Em 1994, Zhou, (ZHOU, 1994), mostrou que tais condições eram desnecessárias. Em 1994, Li, (LI, 1994), prova que se a variedade possui um pólo e sua curvatura de Ricci é não negativa então $\sigma'(M) = [0, \infty)$, Chen-Lu, CHEN and LU (1992), chegaram à mesma conclusão quando a curvatura seccional radial é não negativa. Em 1997, Donnelly, (DONNELLY, 1997), prova que se o crescimento do volume é euclidiano e a variedade tem curvatura de Ricci não negativa o espectro essencial é $[0, \infty)$. Em resumo, eles assumiram que a variedade tem um polo, ou usaram a função de Green sob hipóteses restritas, ou considerarm condições de curvatura e crescimento de volume.

Em 1997, Kumura, (KUMURA, 1997), mostrou que se a função distância, r, satisfaz

$$\limsup_{x\to\infty} |\Delta r - c| = 0$$

então $\sigma'(M) = [c^2/4, \infty)$, e que este resultado generaliza os anteriores. Também em 1997, Wang, (WANG, 1997), provou que se a curvatura de Ricci de uma variedade satisfaz $Ric_M \geq -\delta/r^2$, onde r é a distância a um ponto fixo e $\delta = \delta(n)$ é uma contante, então o espectro da variedade é a semirreta não negativa. Em 2011, Lu-Zhou, (LU and ZHOU, 2011), mostraram que $\sigma'(M) = [0, \infty)$ se a curvatura de Ricci satisfaz

$$\liminf_{x \to \infty} Ric_M(x) \geq 0.$$

Em 2014, Lu-Charalambous, (CHARALAMBOUS and LU, 2014), mostraram que se, para algum ponto fixo, temos

$$\liminf_{r \to \infty} Ric\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = 0$$

então o espectro desta variedade é $[0, \infty)$, o mesmo de um sóliton de Ricci shirinking completo. Em 2015, Montenegro-Monte, (MONTE and MONTENEGRO, 2015), para certas condições sobre a curvatura média das esferas geodésicas e sobre a métrica da variedade numa vizinhança de um raio com sistema de coordenadas geodésicas, sem exigir que a variedade seja completa, mostraram que $[(n-1)c/4, \infty) \subset \sigma'(M)$.

Voltando ao nosso problema, na tentativa de caracterizar o espectro de $M^n = \mathbb{R} \times_r \mathbb{S}^{n-1}$ nós chegamos a operadores do tipo

$$L_i f = \frac{1}{r^{n-1}(t)} \left(r^{n-1}(t) f'\right)' - \frac{\lambda_i}{r^2(t)} f,$$

onde λ_i é o i-ésimo autovalor da esfera $\mathbb{S}^{n-1}$, devido a periodicidade de r este é um operador de Hill. Uma equação de Hill é uma equação do tipo $u'' + p(t)u' + q(t)u = 0$, onde p e q são funções periódicas, de mesmo período a, $p(t)$ é contínua, não se anula e $p'(t)$ e $q(t)$ são contínuas por partes, estas equações tem inúmeras aplicações em mecânica, astronomia, circuitos, entre outros. A teoria clássica para operadores de Hill nos diz que este não possui autovalores e seu espectro apresenta gaps, cujo comprimento tende a zero à medida em que nos aproximamos do infinito. Assim, o espectro do laplaciano de M^n fica caracterizado da seguinte forma:

Teorema 1.1 *O espectro do operador de Laplace-Beltrami em $M^n = \mathbb{R} \times_r \mathbb{S}^{n-1}$, onde r é uma função suave, positiva e periódica, de perído a, tal que $r_0 = \min r < \sqrt{n-1}a/\pi$,é formado por uma união de intervalos fechados com mais de uma componente conexa e sem autovalores.*

2 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos um compêndio da teoria necessária para o desenvolvimento deste trabalho, os assuntos abordados neste capítulo podem ser encontrados de maneira mais completa em DAVIES (1995), EASTHAM (1973), GRIGOR'YAN (2009) e MAGNUS and WINKLER (1979). Ele se divide em três seções, na primeira apresentamos resultados importantes sobre equações de Hill, na segunda é apresentada as princiais noções de teoria espectral aqui utilizada e na terceira tratamos das variedades Warped.

2.1 Equações de Hill

O nome *equação de Hill* é dado à equação

$$\{p(x)y'(x)\}' + q(x)y(x) = 0 \tag{1}$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ são funções reais periódicas, de mesmo período a. Ademais, $p(x)$ é contínua, não se anula , e $p'(x)$ e $q(x)$ são contínuas por partes.

Observe que se $\psi(x)$ é solução de (1) então $\psi_a(x) = \psi(x + a)$ também será solução de (1). Entretanto, não temos, em geral, $\psi_a(x) = \psi(x)$; de fato (1) não nescessariamente tem solução não trivial com período a. Por outro lado, o teorema a seguir nos garante que existem uma constante não nula ρ e uma solução não trivial $\psi(x)$ tais que

$$\psi_a(x) = \rho\psi(x). \tag{2}$$

Teorema 2.1 *Existem constante não nula ρ e solução não trivial $\psi(x)$ de (1) que satisfazem (2) .*
Prova: 2.1 *Sejam $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ soluções linearmente independentes de (1) satisfazendo as condições iniciais*

$$\varphi_1(0) = 1, \quad \varphi_1'(0) = 0, \qquad \varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_2'(0) = 1. \tag{3}$$

Como $\varphi_1(x + a)$ e $\varphi_2(x + a)$ também são soluções lineramente independentes, existem constantes $A_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq 2$, tais que

$$\begin{aligned} \varphi_1(x + a) &= A_{11}\varphi_1(x) + A_{12}\varphi_2(x) \\ \varphi_2(x + a) &= A_{21}\varphi_1(x) + A_{22}\varphi_2(x) \end{aligned} \tag{4}$$

com a matriz $A = (A_{i,j})$ não singular. Toda solução $\psi(x)$ de (1) tem a forma

$$\psi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$$

onde c_1 e c_2 são constantes e, por (4),

$$\begin{aligned}
&\psi(x+a) = \rho\psi(x) \\
\Leftrightarrow\ & c_1\varphi_1(x+a) + c_2\varphi_2(x+a) = \rho\left(c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)\right) \\
\Leftrightarrow\ & [c_1(A_{11}-\rho) + A_{21}c_2]\varphi_1(x) + [A_{12}c_1 + (A_{22}-\rho)c_2]\varphi_2(x) = 0
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{cases} (A_{11}-\rho)c_1 + A_{21}c_2 = 0 \\ A_{12}c_1 + (A_{22-}\rho)c_2 = 0 \end{cases}$$

Esta equação é satisfeita para c_1 e c_2, não ambos nulos, se ρ é tal que

$$\rho^2 - (A_{11}+A_{22})\rho + detA = 0 \tag{5}$$

e esta equação tem solução não nula pois $detA \neq 0$.

De (3) e (4) temos

$$\begin{aligned}
\varphi_1(a) = \varphi_1(0+a) = A_{11}\varphi_1(0) + A_{12}\varphi(0) &= A_{11} \\
\varphi_1'(a) = \varphi_1'(0+a) = A_{11}\varphi_1'(0) + A_{12}\varphi_2'(0) &= A_{12} \\
\varphi_2(a) = \varphi_2(0+a) = A_{21}\varphi_1(0) + A_{22}\varphi_2(0) &= A_{21} \\
\varphi_2'(a) = \varphi_2'(0+a) = A_{21}\varphi_1'(0) + A_{22}\varphi_2'(0) &= A_{22}
\end{aligned}$$

e portanto,

$$detA = W(\varphi_1, \varphi_2)(a)$$

e, pela fórmula de Liouville para o wronskiano,

$$detA = \exp\left(\int_0^a \frac{p'(x)}{p(x)}dx\right) = 1.$$

Assim, (5) pode ser reescrita como

$$\rho^2 - [\varphi_1(a) + \varphi_2'(a)]\rho + 1 = 0 \tag{6}$$

e as soluções ρ_1 e ρ_2 satisfazem

$$\rho_1\rho_2 = 1 \tag{7}$$

Teorema 2.2 *Existem soluções linearmente independentes $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ tais que umas das seguintes possibilidades acontece*

(i) $\psi_1(x) = e^{m_1x}P_1(x)$, $\psi_2(x) = e^{m_2x}P_2(x)$, onde m_1 e m_2 são constantes e $P_1(x)$ e $P_2(x)$ são funções periódicas, de período a.

(ii) $\psi_1(x) = e^{mx}P_1(x)$, $\psi_2(x) = e^{mx}[xP_1(x) + P_2(x)]$, onde m é constante, $P_1(x)$ e $P_2(x)$

são funções periódicas, de período a.

Prova: 2.2 *Suponha que (6) tem soluções distintas ρ_1 e ρ_2. Então, por (2.1), existem soluções não triviais $\Psi_1(x)$ e $\Psi_2(x)$ de (1) tais que*

$$\Psi_k(x+a) = \rho_k \Psi_k(x), \quad k = 1, 2. \tag{8}$$

Observe que $\Psi_1(x)$ e $\Psi_2(x)$ são linearmente independentes. Caso contrário teríamos $\rho_1 = \rho_2$. Como ρ_1 e ρ_2 são ambos não nulos podemos escolher m_1 e m_2 tais que

$$e^{am_k} = \rho_k. \tag{9}$$

E definimos

$$P_k(x) = e^{-m_k x} \Psi_k(x) \tag{10}$$

e então

$$P_k(x+a) = e^{-m_k(x+a)} \rho_k \Psi_k(x) = e^{-m_k x} \Psi_k(x),$$

e, por (10),

$$\psi_k(x) = e^{m_k x} P_k(x)$$

onde $P_k(x)$ é periódica, de período a.

Suponha agora que (5) tem solução repetida $\rho \neq 0$, e, como em (9), escolha m tal que $e^{am} = \rho$. Por (2.1), existe solução não trivial $\Psi_1(x)$ tal que

$$\Psi_1(x+a) = \rho \Psi_1(x). \tag{11}$$

Seja $\Psi_2(x)$ solução de (1) linearmente independente a $\Psi_1(x)$. Como $\Psi_2(x+a)$ também é solução de (1), existem constantes d_1 e d_2 tais que

$$\Psi_2(x+a) = d_1 \Psi_1(x) + d_2 \Psi_2(x) \tag{12}$$

e, de (11) e (12), em termos de wronskiano, temos

$$W(\Psi_1, \Psi_2)(x+a) = \rho d_2 W(\Psi_1, \Psi_2)(x).$$

Por outro lado, como ρ é solução repetida de (5), temos $\rho d_2 = \rho^2$, logo $\rho = d_2$. E então, por (12),

$$\Psi_2(x+a) = d_1 \Psi_1(x) + \rho \Psi_2(x).$$

Temos duas possibilidades, se $d_1 = 0$ então

$$\Psi_2(x+a) = \rho \Psi_2(x)$$

e, junto com (11), temos a situação descrita no item (i), com $\rho_1 = \rho_2 = \rho$.

Se $d_1 \neq 0$, definimos

$$P_1(x) = e^{-mx}\Psi_1(x) \text{ e } P_2(x) = e^{-mx}\Psi_2(x) - \frac{d_1}{a\rho}xP_1(x).$$

Observe que $P_1(x)$ e $P_2(x)$ são periódicas, de período a. E, portanto,

$$\psi_1(x) = e^{mx}P_1(x) \text{ e } \psi_2(x) = e^{mx}\left(\frac{d_1}{a\rho}xP_1(x) + P_2(x)\right)$$

Observe que se (i) ocorre então (1) tem duas soluções linearmente independentes; se temos (ii), $|\rho| = 1$ e a equação admite uma solução periódica.

As soluções ρ_k, $k = 1, 2$, de (5) são chamadas *multiplicadores característicos* de (1), m_k são os *expoentes característicos* de (1).

Chamamos de *discriminante* de (2) o número

$$D = \phi_1(a) + \phi_2'(a). \tag{13}$$

Existem cinco possibilidades de valores de D a serem estudadas:

A. $D > 2$: Por (6), ρ_1 e ρ_2 são reais, distintos, positivos e diferentes de 1. Portanto, de (8), existe um número real não nulo m tal que

$$e^{am} = \rho_1, \quad e^{-am} = \rho_2.$$

Assim, do item (i) de (2.2), temos

$$\psi_1(x) = e^{mx}P_1(x), \quad \psi_2(x) = e^{-mx}P_2(x).$$

B. $D < -2$: Análogo a (A), com ρ_1 e ρ_2 negativos e diferentes de -1. E neste caso, o expoente característico será $m + \dfrac{\pi}{a}$.

C. $-2 < D < 2$: Por (6), ρ_1 e ρ_2 são complexos, distintos, de (7) temos que são conjugados logo existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < \pi$, tal que $e^{ia\alpha} = \rho_1$ e $e^{-ia\alpha} = \rho_2$, e então temos

$$\psi_1(x) = e^{i\alpha x}P_1(x), \quad \psi_2(x) = e^{-i\alpha x}P_2(x).$$

D. $D = 2$: Neste caso $\rho_1 = \rho_2 = 1$ e temos duas possibilidades.
   (1) Se $\phi_2(a)$ e $\phi_1'(a)$ são ambos nulos temos $\psi_1(x) = P_1(x)$ e $\psi_2(x) = P_2(x)$ e todas as soluções de (1) são periódicas, de período a.
   (2) Se $\phi_2(a)$ e $\phi_1'(a)$ não são ambos nulos, então $\phi_1(x) = P_1(x)$ e $\psi_2(x) = xP_1(x) + P_2(x)$.

E. $D = -2$: Neste caso $\rho_1 = \rho_2 = -1$ e novamente temos duas possibilidades.
   (1) Se $\phi_2(a)$ e $\phi_1'(a)$ são ambos nulos temos $\psi_1(x) = e^{i\pi x/a}P_1(x)$, $\psi_2(x) = e^{i\pi x/a}P_2(x)$,

e todas as soluções são semiperiódicas, de período a.

(2) Se $\phi_2(a)$ e $\phi_1'(a)$ não são ambos nulos, $\psi_1(x) = P_1(x)$ e $\psi_2(x) = xP_1(x) + P_2(x)$, com $P_k(x)$ semiperiódica, com período a, $k = 1, 2$.

Da análise acima concluimos o seguinte

Teorema 2.3 *Se $|D| > 2$, todas as soluções não triviais de (1) são ilimitadas. Se $|D| < 2$, todas as soluções não triviais de (1) são limitadas.*

A equação (1) é dita *instável* se todas as suas soluções são ilimitadas, *condicionalmente estável* se existe uma solução não trivial limitada, e é chamada *estável* se todas as soluções são limitadas.

Consideremos a equação (1) envolvendo um parâmetro real λ, fazendo

$$p(x) = \lambda s(x) + q(x)$$

onde $s(x)$ e $q(x)$ são contínuas por partes, periódicas, de período a e existe constante $s > 0$ tal que $s(x) \leq s$, para todo x real. E reescrevemos (1),

$$\{p(x)y'(x)\}' + \{\lambda s(x) + q(x)\}y(x) = 0 \tag{14}$$

com soluções lineramente independentes $\phi_k(x, \lambda)$, $k = 1, 2$, associasdas às condições inicias (3), e discriminante

$$D(\lambda) = \phi_1(a, \lambda) + \phi_2'(a, \lambda). \tag{15}$$

Observamos que o discriminante depende continuamente de λ, assim o conjunto $\{\lambda \in \mathbb{R}; |D(\lambda)| < 2\}$ é aberto, não vazio e formado pela união enumerável de intervalos abertos. Assim (14) é estável quando λ pertence a um desses intervalos, e esses intervalos são chamados *intervalos de estabilidade* de (14). Semelhantemente, os intervalos em $\{\lambda \in \mathbb{R}; |D(\lambda)| > 2\}$ são chamados *intervalos de instabilidade* de (14).

Consideremos três problemas de autovalor associados a (14) no intervalos $[0, a]$.

(i) O problema periódico

$$\begin{cases} \{p(x)y'(x)\}' + \{\lambda s(x) + q(x)\}y(x) = 0 \\ y(a) = y(0), \quad y'(a) = y'(0) \end{cases} \tag{16}$$

É um problema autoadjunto, denotaremos suas autofunções por $\psi_n(x)$ e os autovalores λ_n, $n = 0, 1, \ldots$, onde

$$\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \text{ e } \lambda_n \to \infty \text{ quando } n \to \infty.$$

(ii) O problema semiperiódico

$$\begin{cases} \{p(x)y'(x)\}' + \{\lambda s(x) + q(x)\}y(x) = 0 \\ y(a) = -y(0), \quad y'(a) = -y'(0) \end{cases} \tag{17}$$

também é um problema autoadjunto, cujas autofunções serão denotadas por $\xi_n(x)$, e autovalores por $\mu_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots$, com

$$\mu_0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \text{ e } \mu_n \to \infty \text{ quando } n \to \infty$$

(iii) O problema t-periódico

$$\begin{cases} \{p(x)y'(x)\}' + \{\lambda s(x) + q(x)\}y(x) = 0 \\ y(a) = y(0)\exp(i\pi t), \quad y'(a) = y'(0)\exp(i\pi t) \end{cases} \tag{18}$$

onde t é um parâmetro real, $-1 \leq t \leq 1$. Também um operador autoadjunto, cujos autovalores denotaremos por $\lambda_n(t)$. Observe que no caso $t = 1$ o problema t-periódico coincide com o problema semiperiódico.

No próximo resultado comparamos os autovalores em dois problemas semiperiódios diferentes sobre $[0, a]$.

Teorema 2.4 *Seja $\mu_{1,n}$, $(n \geq 0)$, os autovalores do problema semiperiódico sobre $[0, a]$ quando substituimos $p(x)$, $q(x)$ e $s(x)$ por $p_1(x)$, $q_1(x)$ e $s_1(x)$ onde*

$$p_1(x) \geq p(x), \quad q_1(x) \geq q(x), \quad s_1(x) \leq s(x).$$

Então (i) se $s_1(x) = s(x)$, temos $\mu_{1,n} \geq \mu_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; (ii) caso contrário, teremos $\mu_{1,n} \geq \mu_n$, sempre que $\mu_n \geq 0$.

Prova: 2.3 *Seja $\xi_{1,n}$ a autofunção associada ao autovalor $\mu_{1,n}$. Começamos mostrando o caso para $n = 0$. Temos*

$$\mu_{1,0} = \int_0^a \{p_1(\xi'_{1,0})^2 + q_1\xi_{1,0}^2\}dx \geq \int_0^a \{p(\xi'_{1,0})^2 + q\xi_{1,0}^2\}dx \geq \mu_0 \int_0^a s\xi_{1,0}^2 dx \tag{19}$$

Por outro lado,

$$\int_0^a s\xi_{1,0}^2 dx \geq \int_0^a s_1\xi_{1,0}^2 dx = 1$$

com igualdade somente se $s_1(x) = s(x)$. E portanto, $\mu_{1,0} \geq \mu_0$ sempre que $s_1(x) = s(x)$,e $\mu_{1,0} \geq \mu_0$ sempre que $\mu_0 \geq 0$ caso contrário. Provando assim o resultado para $n = 0$. Para $n = 1$, consideramos

$$f(x) = c_0\xi_{1,0}(x) + c_1\xi_{1,1}(x)$$

onde c_0 *e* c_1 *são constantes reais tais que*

$$c_0^2 + c_1^2 = 1 \ \text{ e } c_0 A_0 + c_1 A_1 = 0$$

onde

$$A_r = \int_0^a \xi_{1,r}\xi_0 s dx, \quad r = 0, 1.$$

Tal escolha é sempre possível, fazendo $|c_0| = \dfrac{1}{\sqrt{A_0^2 + A_1^2}}$ *e* $|c_1| = \sqrt{1 - c_0^2}$. *E portanto,*

$$\int_0^a f^2 s_1 dx = 1 \ \text{ e } f_0 = \int_0^a \xi_0 s dx = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^a \{p_1(f')^2 + q_1 f^2\}dx &= \mu_{1,0}c_0^2 + \mu_{1,1}c_1^2 \\ &\leq \mu_{1,1}(c_0^2 + c_1^2) = \mu_{1,1}\end{aligned}$$

E também, pela desigualdade de Parseval,

$$\begin{aligned}\int_0^a \{p_1(f')^2 + q_1 f^2\}dx &\geq \sum_1^\infty \mu_n f_n^2 \\ &\geq \mu_1 \sum_1^\infty f_n^2 = \mu_1 \int_0^a f^2 s dx.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mu_{1,1} = \int_0^a \{p_1(f')^2 + q_1 f^2\}dx \geq \int_0^a \{p(f')^2 + q f^2\}dx \geq \mu_1 \int_0^a f^2 s dx$$

e concluimos como no caso anterior. O argumento segue no caso geral, fazendo

$$f(x) = c_0\xi_{1,0}(x) + \ldots + c_n\xi_{1,n}(x)$$

onde as constantes $c_0, \ldots, c_n$ *são tais que*

$$c_0^2 + \ldots + c_n^2 = 1 \ \text{ e } f_r = 0, \quad 0 \leq r \leq n-1.$$

O próximo teorema caracteriza a função $D(\lambda)$ a partir dos autovalores λ_n e μ_n.

Teorema 2.5 *(i) Os números* λ_n *e* μ_n *são ordenados da seguinte forma*

$$\lambda_0 < \mu_0 \leq \mu_1 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \mu_2 \leq \mu_3 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \ldots$$

(ii) Nos intervalos $[\lambda_{2m}, \mu_{2m}]$ *temos* $D(\lambda)$ *decrescente e* $-2 \leq D(\lambda) \leq 2$.

(iii) Nos intervalos $[\mu_{2m+1}, \lambda_{2m+1}]$, $D(\lambda)$ *cresce e* $-2 \leq D(\lambda) \leq 2$.

(iv) Nos intervalos $(-\infty, \lambda_0)$ *e* $(\lambda_{2m+1}, \lambda_{2m+2})$, $D(\lambda) > 2$.

(v) Nos intervalos (μ_{2m}, μ_{2m+1}), $D(\lambda) < -2$.

Prova: 2.4 *EASTHAM (1973), Teorema 2.3.1, página 27.*

Do teorema acima concluimos que os intervalos de estabilidade de (1) são (λ_{2m}, μ_{2m}) e $(\mu_{2m+1}, \lambda_{2m+1})$, e os intervalos de instabilidade são $(-\infty, \lambda_0)$, (μ_{2m}, μ_{2m+1}) e $(\lambda_{2m+1}, \lambda_{2m+2})$.

Estudaremos agora o comportamento assintótico de λ_n e μ_n quando $n \to \infty$. Suponhamos que $p''(x)$ e $s''(x)$ existem e são contínuas por partes e podemos aplicar em (14) a transformação

$$t = \int_0^x \{s(u)/p(u)\}^{1/2} du, \quad z(t) = \{p(x)s(x)\}^{1/4} y(x)$$

o que nos dá a equação

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \{\lambda - Q(t)\} z(t) = 0$$

onde $Q(t) = q(x) - p^{1/4}(x)s^{-3/4}(x)\dfrac{d}{dx}p(x)\dfrac{d}{dx}\left(p(x)s(x)\right)^{1/4}$.

Considere a equação diferencial

$$\{C(x)y'(x)\}' + D(x)y(x) = 0, \quad x_1 \leq x \leq x_2 \tag{20}$$

com $C(x)$ e $D(x)$ reais, não nescessariamente periódicas, positivas e defina $R(x) = \{C(x)D(x)\}^{1/2}$. Se $y(x)$ é solução não trivial de (20) então

$$R(x)y(x) = \rho(x)\sin(\theta(x)), \quad C(x)y'(x) = \rho(x)\cos(\theta(x))$$

em que

$$\rho(x) = \{R^2(x)y^2(x) + C^2(x)(y')^2(x)\}^{1/2}$$

e

$$\theta(x) = \tan^{-1}(R(x)y(x)/C(x)y'(x)).$$

E escolhemos $a_0 \in [x_1, x_2]$ tal que

$$0 \leq \theta(a_0) < \pi$$

e se, $y(x)$ tem N zeros em $(a_0, a_1]$ e $y(a_0) \geq 0$, com $a_0 < a_1 \leq x_2$, então

$$N\pi \leq \theta(a_1) < (N+1)\pi.$$

Aplicando esta tranformação à equação

$$\{p(x)y'(x)\}' + \{\lambda s(x) - q(x)\}y(x) = 0$$

teremos $\rho(x,\lambda)$ e $\theta(x,\lambda)$, e caso $y(x)$ tenha período a ou semiperíodo a temos

$$\theta(a,\lambda) - \theta(0,\lambda) = 2k\pi$$

ou

$$\theta(a,\lambda) - \theta(0,\lambda) = (2k+1)\pi.$$

Os próximos teoremas nos dão estimativas para μ_n e λ_n quando $n \to \infty$. Considere

$$I = \int_0^a \{s(x)/p(x)\}^{1/2} dx.$$

Teorema 2.6 *Quando $n \to \infty$ temos*

(i) $\lambda_{2m+1}, \ \lambda_{2m+2}$ *satisfazem*

$$\sqrt{\lambda} = 2(m+1)\pi I^{-1} + o(m)$$

(ii) $\mu_{2m}, \ \mu_{2m+1}$ *satisfazem*

$$\sqrt{\mu} = (2m+1)\pi I^{-1} + o(m).$$

Prova: 2.5 *EASTHAM (1973), Teorema 4.2.1, página 56.*

Teorema 2.7 *Se $s'(x)$ existe e é contínua por partes então*

(i) $\lambda_{2m+1}, \ \lambda_{2m+2}$ *satisfazem*

$$\sqrt{\lambda} = 2(m+1)\pi I^{-1} + o(1)$$

(ii) $\mu_{2m}, \ \mu_{2m+1}$ *satisfazem*

$$\sqrt{\mu} = (2m+1)\pi I^{-1} + o(1).$$

Prova: 2.6 *EASTHAM (1973), Teorema 4.2.2, página 57.*

Seja l_n o comprimento do n-ésimo intervalo de instabilidade de (14), como consequência dos últimos resultados podemos estimar o comportamente de l_n quando $n \to \infty$

Teorema 2.8 *Quando $n \to \infty$, l_n satisfaz*

(i) $l_n = o(n^2)$

(ii) $l_n = o(n)$ *se $s'(x)$ existe e é contínua por partes*

Prova: 2.7 *Para a parte (i), observe que*

$$\sqrt{\mu_{2m+1}} - \sqrt{\mu_{2m}} = o(m),$$

portanto,

$$\begin{aligned} l_{2m+1} &= \mu_{2m+1} - \mu_{2m} \\ &= (\sqrt{\mu_{2m+1}} + \sqrt{\mu_{2m}})o(m) \\ &= o(m^2). \end{aligned}$$

O mesmo vale para λ.

Para (ii),

$$\begin{aligned} l_{2m+2} &= \lambda_{2m+2} - \lambda_{2m+1} \\ &= (4(m+1)\pi I^{-1} + o(1))o(1) \\ &= o(m). \end{aligned}$$

O mesmo valendo para μ.

2.2 Teoria espectral

Seja A um operador linear autoadjunto com domínio $\mathcal{D}(A)$ em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, e seja $\sigma(A)$ o espectro de A. O *espectro essencial* de A, $\sigma'(A)$, é o conjunto dos pontos de acumulação de $\sigma(A)$ ou um autovalor de multiplicidade infinita. Portanto,

$$\sigma'(A) = \sigma(A) \setminus \{\lambda \in \sigma(A) : \lambda \text{ é autovalor isolado de multiplicidade finita}\}.$$

Dessa forma, $\sigma'(A)$ é um conjunto fechado cujo complementar em $\mathbb{R}$ é escrito como união enumerável de intervalos abertos disjuntos (α_k, β_k), $k = 0, 1, \ldots$. Esses intervalos são chamados *gaps* de $\sigma'(A)$.

O teorema a seguir apresenta uma desigualdade importante sobre o comportamento dos *gaps*.

Teorema 2.9 *Seja $\{f_n\}$ uma sequência em $\mathcal{D}(A)$ tal que $||f_n|| = 1$, para todo n, e $f_n \to_w 0$ quando $n \to \infty$. Então*

$$\beta_k - \alpha_k = 2 \liminf_{n\to\infty} ||(A - \gamma_k I)f_n||,$$

onde γ_k é o ponto médio de (α_k, β_k).

Prova: 2.8 *EASTHAM (1973), Teorema 5.2.1, página 80.*

O próximo teorema, o conhecido critério de Weyl, caracteriza o espectro essencial de um operador.

Teorema 2.10 *Um número real γ pertence a $\sigma'(A)$ se existe uma sequência $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(A)$ tal que $||f_n|| = 1$, para todo n, $f_n \to_w 0$ quando $n \to \infty$ e $||(A - \gamma I)f_n|| \to 0$ quando $n \to \infty$.*

Se A não possui autovalores isolados de multiplicidade finita, isto é, se $\sigma'(A) = \sigma(A)$, a condição $f_n \to_w 0$ pode ser retirada.

Vamos agora voltar nossas atenções para o operador autoadjunto

$$Lf(x) = \frac{1}{s(x)}\left\{-\{p(x)f'(x)\}' + q(x)f(x)\right\} \tag{21}$$

cujo domínio é o espaço $\mathcal{D}(L)$ das funções reais de derivada absolutamente contínua tais que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)s(x)dx < \infty \text{ e } \int_{-\infty}^{+\infty} (Lf(x))^2 s(x)dx < \infty.$$

Sejam $\sigma(L)$ o espectro de L e S o conjunto dos intervalos de estabilidade de (14). Inicialmente, observamos que L não possui autovalores de multiplicidade finita, isto é, $\sigma'(L) = \sigma(L)$.

Teorema 2.11 *O operador L não possui autovalores.*

Prova: 2.9 *Suponha, por absurdo, que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de L, com autofunção $\psi(x) \in \mathcal{D}(L)$, isto é, $L\psi(x) + \lambda\psi(x) = 0$. Assim $\psi(x)$ é solução não trivial de (14) e satisfaz*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2(x)s(x)dx < \infty.$$

Logo $\psi(x)$ não pode ser uma função ilimitada, e então temos que ter $\psi(x+a) = \rho\psi(x)$, onde $|\rho| = 1$, ou seja, $|\psi(x+a)| = |\psi(x)|$. Mas dessa forma, a integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 s(x)dx$ não converge, o que contradiz $\psi(x) \in \mathcal{D}(L)$. Logo, L não possui autovalores.

O próximo teorema mostra que o espectro deste operador é formado exatamente pelos seus intervalos de estabilidade, isto é, $\sigma(L) = S$.

Teorema 2.12 *Os conjuntos $\sigma(L)$ e S coincidem.*

Prova: 2.10 *Primeiro mostramos que $S \subset \sigma(L)$. Seja $\gamma \in S$, usaremos o 2.10 para mostrar que $\gamma \in \sigma(L)$. Se $\gamma \in S$, então existe uma solução não trivial $\psi(x)$ de (14), com $\lambda = \gamma$, tal que*

$$\psi(x+a) = \rho\psi(x), \quad |\rho| = 1.$$

Seja $g : [0,a] \to \mathbb{R}$, $g \in C^2(\mathbb{R})$, tal que

$$g(0) = 0, \quad g(a) = 1, \quad g'(0) = g'(a) = 0, \quad 0 \leq g(x) \leq 1.$$

Defina $f_n(x) = b_n\psi(x)h_n(x)$ onde

$$h_n(x) = \begin{cases} 1 & se\ |x| \leq (n-1)a \\ g(na - |x|) & se\ (n-1)a \leq |x| \leq na \\ 0 & se\ |x| > na \end{cases}$$

e b_n *é tal que* $||f_n|| = 1$, *ou seja,*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b_n^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 h_n^2(x) s(x) dx \\
&= 2\int_0^{na} |\psi(x)|^2 h_n^2(x) s(x) dx \\
&= 2\left\{\int_0^{(n-1)a} |\psi(x)|^2 s(x) dx + \int_{(n-1)a}^{na} |\psi(x)|^2 h_n(x) s(x) dx\right\} \\
&= 2\left\{\sum_{l=0}^{(n-2)a} |\rho|^l \int_0^a |\psi(x)|^2 s(x) dx + |\rho|^{n-1} \int_0^a g(x) |\psi(x)|^2 s(x) dx\right\} \\
&\geq 2n \int_0^a |\psi(x)|^2 s(x) dx.
\end{aligned}$$

E portanto,

$$b_n \leq \left(2n \int_0^a |\psi(x)|^2 s(x) dx\right)^{-1/2} \quad e \lim_{n\to\infty} b_n = 0. \tag{22}$$

Note que $f_n \in \mathcal{D}(A)$ *e que* $||f_n|| = 1$. *Ademais*

$$\begin{aligned}
(L - \gamma I) f_n(x) &= -s^{-1}(x) b_n \left\{\{p(x)\psi'(x)\}' + \{\gamma s(x) - q(x)\}\psi(x\right\} h_n(x) \\
&\quad -s^{-1}(x) b_n \left\{2p(x)\psi'(x)h_n'(x) + p(x)\psi(x)h_n''(x) + p'(x)\psi(x)h_n'(x)\right\} \\
&= -s^{-1}(x) b_n \left\{2p(x)\psi'(x)h_n'(x) + p(x)\psi(x)h_n''(x) + p'(x)\psi(x)h_n'(x)\right\}.
\end{aligned}$$

No primeiro termo temos

$$2||s(x)^{-1} b_n p(x)\psi'(x)h_n'(x)|| = b_n \left(2\int_0^a |p(x)\psi'(x)g'(x)|^2 / s(x) dx\right)^{1/2}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} ||s(x)^{-1} b_n p(x)\psi'(x)h_n'(x)|| = 0$$

por (22). Os demais termos são semelhantes e então temos

$$\lim_{n\to\infty} ||(L - \gamma I) f_n|| = 0,$$

ou seja, $\gamma \in \sigma(L)$.

Para mostrar que $\sigma(L) \subset S$ *mostraremos que se* $\mu \notin S$ *então* $\mu \notin \sigma(L)$. *Se* $\mu \notin S$ *então estamos considerando o caso instável e as soluções são como nos casos A e B, no Teorema 2.3, o caso B é análogo ao A por isso trabalharemos apenas com o caso A.*

Sejam $\psi_1(x)$ *e* $\psi_2(x)$ *soluções na forma*

$$\psi_1(x) = e^{mx} P_1(x), \quad \psi_2(x) = e^{-mx} P_2(x).$$

E podemos supor, sem perda de generalidade, que $m > 0$. *Definimos a função de Green* $G(x,u,\mu)$ *por*

$$G(x,u,\mu) = \begin{cases} \psi_1(x)\psi_2(x)/c \text{ se } x \leq u \\ \psi_1(u)\psi_2(x)/c \text{ se } x \geq u \end{cases}$$

onde c *é o valor constante de* $p(x)W(\psi_1,\psi_2)(x)$. *Então, para toda* $f \in \mathcal{H}$, *definimos o operador linear*

$$\mathcal{G}f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,u,\mu)f(u)s(u)du.$$

Mostraremos que $\mathcal{G}$ *é um operador limitado e que é o inverso de* $L-\mu I$. *Provando portanto que* $(L-\mu I)^{-1}$ *existe e é limitado, o que significa que* μ *pertence ao resolvente de* L, *ou seja,* $\mu \notin \sigma(L)$.

Observe que

$$|\mathcal{G}f(x)| \leq M^3\{G_1(x) + G_2(x)\}/c,$$

onde $M = \max\{|P_1(x)|, |P_2(x)|, s(x)\}$, *e*

$$G_1(x) = e^{-mx}\int_{-\infty}^{x} e^{mu}|f(u)|du$$

$$G_2(x) = e^{mx}\int_{x}^{+\infty} e^{-mu}|f(u)|du.$$

Para X *e* Y *positivos, integrando por partes temos*

$$\begin{aligned}
\int_{-X}^{Y} G_1^2(x)dx &= \int_{-X}^{Y} e^{-2mx}\left(\int_{-\infty}^{x} e^{mu}|f(u)|du\right)^2 dx \\
&= \left[(-2m)^{-1}e^{-2mx}\left(\int_{-\infty}^{x} e^{mu}|f(u)|du\right)^2\right]_{-X}^{Y} \\
&\quad + m^{-1}\int_{-X}^{Y} e^{-mx}|f(x)|\left(\int_{-\infty}^{x} e^{mu}|f(u)|du\right)dx \\
&\leq (2m)^{-1}G_1^2(-X) + m^{-1}\left(\int_{-X}^{Y} G_1^2(x)dx\int_{-X}^{Y}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\int_{-X}^{Y} G_1^2(x)dx\right)^{1/2} \leq (2m)^{-1}\left(\int_{-X}^{Y} G_1^2(x)dx\right)^{-1/2} G_1^2(-X) + m^{-1}\left(\int_{-X}^{Y}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}.$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Schwarz,

$$G_1(-X) + e^{mX}\int_{-\infty}^{-X} e^{mu}|f(u)|du \leq e^{mX}\left((2m)^{-1}e^{-2mx}\int_{-\infty}^{-X}|f(x)|dx\right)^{1/2}$$

Portanto, $G_1(-X) \to 0$ *quando* $X \to \infty$*. Então fazendo* $X \to \infty$ *e* $Y \to \infty$ *obtemos*

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} G_1^2(x)dx\right)^{1/2} \leq \frac{1}{m}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

Como $0 < s_1 \leq s(x) \leq s_2$ *temos*

$$||G_1(x)|| \leq K||f(x)||,$$

onde K *é cosntante. Analogamente mostra-se um resultado similar para* $G_2(x)$ *e concluímos que* $\mathcal{G}$ *é um operador limitado.*

Resta mostrar que $\mathcal{G}$ *é a inversa de* $L - \mu I$*. Dada* $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ *temos*

$$(L - \mu I)\mathcal{G}f(x) = f(x) \Leftrightarrow (\mathcal{G}f(x), L\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)f(x)s(x)dx.$$

Ora,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}f(x)L\phi(x)s(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,u,\mu)f(u)s(u)du\right)\left(-\{p(x)\phi'(x)\}' + q(x)\phi(x)\right)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)s(u)\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,u,\mu)\left(-\{p(x)\phi'(x)\}' + q(x)\phi(x)\right)dxdu.
\end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned}
&-\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,u,\mu)\{p(x)\phi'(x)\}'dx \\
&= -\int_{-\infty}^{u} G(x,u,\mu)\{p(x)\phi'(x)\}'dx - \int_{u}^{+\infty} G(x,u,\mu)\{p(x)\phi'(x)\}'dx \\
&= \int_{-\infty}^{u} \frac{\partial G}{\partial x}(x,u,\mu)p(x)\phi'(x)dx - p(u)\phi'(u)G(u,u,\mu) \\
&\quad + \int_{u}^{+\infty} \frac{\partial G}{\partial x}(x,u,\mu)p(x)\phi'(x)dx + p(u)\phi'(u)G(u,u,\mu) \\
&= -\int_{-\infty}^{u}\left\{\frac{\partial G}{\partial x}(x,u,\mu)p(x)\right\}'\phi(x)dx - \frac{\partial G}{\partial x}(u^-,u,\mu)p(u)\phi(u) \\
&\quad - \int_{u}^{+\infty}\left\{\frac{\partial G}{\partial x}(x,u,\mu)p(x)\right\}'\phi(x)dx + \frac{\partial G}{\partial x}(u^+,u,\mu)p(u)\phi(u) \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{\partial G}{\partial x}(x,u,\mu)p(x)\right\}'\phi(x)dx + \phi(u)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}f(x)L\phi(x)s(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)s(u)\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\left\{\frac{\partial G}{\partial x}(x,u,\mu)p(x)\right\}' + G(x,u,\mu)q(x)\right)\phi(x)dxdu \\
&\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)s(u)\phi(u)du
\end{aligned}$$

De

$$-\left\{\frac{\partial G}{\partial x}(x,u,\mu)p(x)\right\}' + G(x,u,\mu)q(x) = 0$$

concluimos o resultado.

Seja $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as funções f contínuas em $[0,a]$ com derivada contínua por partes em $[0,a]$. Definimos

$$J(f,g) = \int_0^a \{p(x)f'(x)\overline{g'(x)} + q(x)f(x)\overline{g(x)}\}dx.$$

Sabemos que

$$\lambda_0 = \min\left(J(f,f)/\int_0^a |f(x)|^2 s(x)dx\right) \tag{23}$$

considerando o mínimo entre todas as $f \in \mathcal{F},\ f \not\equiv 0$ que satisfazem 16. E o mínimo é atingido quando $f(x)$ é a autofunção $\psi_0(x)$.

Teorema 2.13 *Sejam $P = \sup p(x)$ e $s = \inf s(x)$. Então, para $-1 \le t \le 1$,*

$$\lambda_0 \le \lambda_0(t) \le \lambda_0 + \pi^2 t^2 P/a^2 s.$$

Prova: 2.11 *Para o lado esquerdo da desigualdade veja o teorema 2.4.2 de EASTHAM (1973). Para a outra desigualdade, de 23,*

$$\lambda_0(t) \le J(f,f)/\int_0^a |f(x)|^2 s(x)dx,$$

com $f \in \mathcal{F}$, satisfazendo 18. Definimos

$$g(x) = f(x)\exp(-i\pi tx/a).$$

Para tal $g(x)$ temos

$$g(a) = f(a)\exp(-i\pi t) = f(0),$$

$$g'(a) = \left(f'(a) - \frac{i\pi t}{a}f(a)\right)\exp(-i\pi tx/a) = f'(0) - \frac{i\pi t}{a}f(0) = g'(0),$$

ou seja, $g(x)$ satisfaz 16. Ademais, $|f(x)| = |g(x)|$ e

$$J(f,f) = \int_0^a \left\{ p(x)\left|g'(x) + \frac{i\pi t}{a} g(x)\right|^2 + q(x)|g(x)|^2 \right\} dx.$$

E, se $g(x)$ é uma função real

$$J(f,f) = J(g,g) + \frac{\pi^2 t^2}{a^2} \int_0^a g^2(x)p(x)dx.$$

Escolhendo $g(x) = \psi_0(x)$, por 23,temos

$$\lambda_0(t) \leq \lambda_0 + \frac{\pi^2 t^2}{a^2} \int_0^a \psi_0^2(x)p(x)dx \Big/ \int_0^a \psi_0^2(x)s(x)dx \leq \lambda_0 + \frac{\pi^2 t^2 P}{a^2 s}.$$

Assim, o comprimento do primeiro intervalo de estabilidade de 14 satisfaz

$$\mu_0 - \lambda_0 \leq \frac{\pi^2 P}{a^2 s}.$$

Corolário 2.1 *Se $q(x) = 0$,*

$$0 \leq \lambda_0(t) \leq \frac{\pi^2 t^2}{a^2} \int_0^a \psi_0^2(x)p(x)dx \Big/ \int_0^a \psi_0^2(x)s(x)dx.$$

2.3 Variedades Warped

Sejam X, Y variedades Riemannianas de dimensão n e m, respectivamente, e seja $M = X \times Y$o produto direto de X e Y enquanto espaços topológicos. O espaço M consiste dos pares ordenados (x, y) onde $x \in X$ e $y \in Y$, e tem uma estrutura natural de variedade diferenciável.

De fato, sejam U e Vvizinhanças coordenadas de X e Y, respectivamente, com cordenadas locais $x^1, \ldots, x^n$ e $y^1, \ldots, y^m$ então $U \times V$ é uma vizinhança coordenada de M com coordenadas locais $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m$. O atlas formado por todas essas cartas torna M uma variedade diferenciável.

Para um ponto $(x, y) \in M$, o espaço tangente $T_{(x,y)}M$ é identificado como a soma direta $T_xX \oplus T_yY$. Com efeito, fixado $(x, y) \in M$, se $\zeta \in T_xX$, para $f \in C^\infty(M)$, fixado y, podemos derivar f com respeito a ζ da seguinte forma

$$\zeta(f) = \zeta(f(\cdot, y)).$$

Assim, T_xX é um subespaço de $T_{(x,y)}M$, da mesma forma concluimos que T_yY é um subespaço de $T_{(x,y)}M$. Ademais, se $\xi \in T_xX \cap T_yY$ então existem vetores $a \in T_xX$ e

$b \in T_yY$ tais que, para toda $f \in C^\infty(M)$,

$$\zeta(f) = a(f(\cdot, y)) = b(f(x, \cdot)),$$

e portanto,

$$a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x,y) = b^j \frac{\partial f}{\partial x^j}(x,y)$$

o que acontece para toda f se, e só se, $a^i = b^j = 0$. Assim, uma vez que $dim(T_xX) = n$, $dim(T_yY) = m$ e $dim(T_{(x,y)}M) = n + m$, concluimos que

$$T_{(x,y)}M = T_xX \oplus T_yY.$$

Se g_X e g_Y são os tensores métricos de X e Y, respectivamente, e dada uma função suave e positiva $r(x)$ definida em X, consideramos em M o tensor métrico

$$g = g_X + r^2(x)g_Y.$$

Neste caso, a variedade (M, g) é chamada *variedade warped* de (X, g_X) e (Y, g_Y). A função r é chamada *função warping*.

Para $(x, y) \in M$ e $\zeta \in T_{(x,y)}M$, $\zeta = \zeta_x + \zeta_y$, onde $\zeta_x \in T_xX$ e $\zeta_y \in T_yY$, e

$$g(x,y)(\zeta,\eta) = g_X(x)(\zeta_x,\eta_x) + r^2(x)g_Y(y)(\zeta_y,\eta_y).$$

Em coordenadas locais temos

$$g = (g_X)_{i,j}dx^idx^j + r^2(x)(g_Y)_{k,l}dy^kdy^l.$$

A matriz g da métrica tem a forma

$$g = \begin{pmatrix} g_X & 0 \\ 0 & r^2 g_Y \end{pmatrix}$$

o que implica em

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} g_X^{-1} & 0 \\ 0 & r^{-2}g_Y^{-1} \end{pmatrix}$$

e

$$detg = r^{2m} detg_X detg_Y.$$

Se ν_X e ν_Y são as medidas riemannianas de X e Y, respectivamente, então a medida ν de M é dada por

$$\begin{aligned} d\nu &= \sqrt{detg}dx^1 \dots dx^n dy^1 \dots dy^m \\ &= r^m \sqrt{detg_X}\sqrt{detg_Y} dx^1 \dots dx^n dy^1 \dots dy^m \\ &= r^m d\nu_x d\nu_y \end{aligned}$$

Denotamos por Δ_X e Δ_Y os operadores de Laplace-Beltrami em X e Y, respectivamente, e por $z^1, \dots z^{n+m}$ as coordenadas $x^1, \dots x^n, y^1, \dots y^m$, obtemos a seguinte expressão para o operador de Laplace-Beltrami Δ em M:

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{\sqrt{detg}} \frac{\partial}{\partial z^i} \left(\sqrt{detg} g^{i,j} \frac{\partial f}{\partial z^j} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{detg}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{detg} g_X^{i,j} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) + \frac{1}{\sqrt{detg}} \frac{\partial}{\partial y^k} \left(\sqrt{detg} \frac{g_Y^{k,l}}{r^2} \frac{\partial f}{\partial y^l} \right) \\ &= \frac{1}{r^m \sqrt{detg_X}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(r^m \sqrt{detg_X} g_X^{i,j} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_Y f. \end{aligned}$$

3 TEOREMA PRINCIPAL

Neste capítulo demonstraremos o teorema:

Teorema 3.1 *O espectro do operador de Laplace-Beltrami em $M^n = \mathbb{R} \times_r \mathbb{S}^{n-1}$, onde r é uma função suave, positiva e periódica, de perído a, tal que $r_0 = \min r < \sqrt{n-1}a/\pi$, é formado por uma união de intervalos fechados com mais de uma componente conexa e sem autovalores.*

Dividiremos o resultado em três proposições. Na primeira mostramos que o espectro não possui autovalores, a seguir descrevemos o espectro como a união de uma quantidade infinita enumerável de intervalos e por fim garantimos a existência de *gaps* no espectro de M.

Seja M^n a variedade warped $M = \mathbb{R} \times_r \mathbb{S}^{n-1}$, com função warping periódica, de período a e $r_0 = \min r < \sqrt{n-1}a/\pi$. Consideramos $\mathbb{R}$ com a métrica canônica e coordenada t, e $\mathbb{S}^{n-1}$ com métrica induzida e coordenada local θ. Temos que o tensor métrico de M é dado por

$$g_M = dt^2 + r^2(t) g_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

e, para $f \in C^\infty(M)$, o operador de Laplace-Beltrami de M aplicado a f é dado por

$$\begin{aligned}
\Delta_M f(t,\theta) &= \frac{1}{r^{n-1}(t)} \frac{\partial}{\partial t}\left(r^{n-1}(t) \frac{\partial f}{\partial t}(t,\theta)\right) + \frac{1}{r^2(t)} \Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} f(t,\theta) \\
&= L_0 f(t,\theta) + \frac{1}{r^2(t)} \Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} f(t,\theta)
\end{aligned}$$

observe que L_0 é um operador na forma (21) com $q(t) = 0$.

Proposição 3.1 *O operador de Laplace-Beltrami em M^n não possui autovalores.*

Prova: 3.1 *O caso $\lambda = 0$ resulta do argumento presente em TAYOSHI (1971). Agora suponhamos que para algum $\lambda > 0$ exista $u \in L^2(M) \cap C^\infty(M)$ satisfazendo $\Delta_M u + \lambda u = 0$. A função $\overline{u}(t)$ definida por*

$$t \longmapsto \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(t,\theta)\, d\theta$$

pertence a $L^2(M)$ e é também uma autofunção para o autovalor λ. De fato,

$$\begin{aligned}
\int_M \overline{u}^2(t) d\nu &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \overline{u}^2(t) r^{n-1}(t) d\theta dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(t,\theta) d\theta \right)^2 r^{n-1}(t) d\theta dt \\
&\leq C \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u^2(t,\theta) r^{n-1}(t) d\theta dt \leq C ||u||^2_{L^2(M)}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Delta_M \overline{u}(t) &= \frac{1}{r^{n-1}(t)}\frac{\partial}{\partial t}\left(r^{n-1}(t)\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}(t,\theta)\right)\\
&= \frac{1}{r^{n-1}(t)}\frac{\partial}{\partial t}\left(r^{n-1}(t)\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{\partial u}{\partial t}(t,\theta)d\theta\right)\\
&= \int_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{1}{r^{n-1}(t)}\left[\frac{1}{r^{n-1}(t)}\frac{\partial}{\partial t}\left(r^{n-1}(t)\frac{\partial u}{\partial t}(t,\theta)\right)\right]d\theta\\
&= \int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\Delta_M u(t,\theta) - \frac{1}{r^2(t)}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}u(t,\theta)\right)d\theta\\
&= -\lambda\int_{\mathbb{S}^{n-1}}u(t,\theta)d\theta = -\lambda\overline{u}
\end{aligned}$$

Ou seja, podemos supor que $u = u(t)$ é radial. Denotemos por $v = v(t)$ uma função satisfazendo

$$\begin{cases} L_0 v(t) = -\lambda v(t)\\ v(t_1) = v(t_1+a) = 0\\ v(t+ka) = c^k v(t)\end{cases} \tag{24}$$

com c constante. Temos

$$\left(r^{n-1}(t)(u'(t)v(t) - u(t)v'(t))\right)' = 0.$$

Integrando de t até $s_j = t + ja$ e usando que $r(s_j) = r(t)$, $v(s_j) = c^j v(t)$, obtem-se

$$u'(t)v(t) - u(t)v'(t) = c^j u'(s_j)v(t) - c^j u(s_j)v'(t)$$

$$[c^j u'(s_j) - u'(t)]v(t) = [c^j u(s_j) - u(t)]v'(t)$$

Chamando de $w(t) = c^j u(s_j) - u(t)$ temos $w'(t)v(t) = w(t)v'(t)$ e para t no intervalo (t_1, t_2), onde t_2 é primeiro zero de v maior que t_1,

$$\frac{w'(t)v(t) - w(t)v'(t)}{v^2(t)} = \left(\frac{w}{v}\right)'(t) = 0$$

ou seja,

$$w(t) = c_0 v(t), \quad \forall\, t \in (t_1, t_2).$$

Mas as funções acima satisfazem (24). Logo, $w(t) = c_0 v(t)$ para todo t. Como $u \in L^2(M)$, temos que $w \in L^2(M)$. Como $v \notin L^2(M)$, temos que $c_0 = 0$ e $w(t) = c^j u(s_j) - u(t) = 0$. Como $u \in L^2(M)$ e $c \neq 0$, só nos resta a possibilidade de $u \equiv 0$.

Uma vez que $\mathbb{S}^{n-1}$ é uma variedade Riemanniana compacta sabemos que $-\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$ é um operador autoadjunto positivo definido e que o problema $-\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}u = \lambda u$

possui uma quantidade infinita e enumerável de autovalores $\{\lambda_i\}$ que satisfazem

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_i \leq \ldots$$

tais que $\lambda_i \to \infty$ quando $i \to \infty$ e as autofunções suaves $\{\xi_i\}$ constituem um sistema ortonormal completo para $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$, isto é,

$$v(\theta) = \sum_{i=0}^{+\infty} \langle v, \xi_i \rangle_{\mathbb{S}^{n-1}} \xi_i(\theta)$$

para toda $v \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ e, em particular, $||v||_{L^2}^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} \langle v, \xi_i \rangle_{\mathbb{S}^{n-1}}^2$. Deste fato segue o seguinte resultado.

Lema 3.1 *O operador de Laplace-Beltrami em M é escrito na forma*

$$\Delta f(t, \theta) = \sum_{i=0}^{+\infty} L_i \langle f, \xi_i \rangle_{\mathbb{S}^{n-1}}(t) \xi_i(\theta)$$

onde $L_i = L_0 - \dfrac{\lambda_i}{r^2(t)} I$.

Prova: 3.2 *Se $f(t, \theta) \in L^2(M) \cap C^\infty(M)$ temos que, para t fixo, $f_t(\theta) = f(t, \theta) \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$, e pode ser escrita na forma*

$$f_t(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \langle f, \xi_i \rangle_{\mathbb{S}^{n-1}} \xi_i(\theta).$$

Observe que $\langle f, \xi_i \rangle_{\mathbb{S}^{n-1}} \in \mathbb{R}$ q.t.p e pertence a $L^2(\mathbb{R})$ para todo i pois,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f, \xi_i \rangle_{\mathbb{S}^{n-1}}^2(t) dt &= \frac{1}{r_0^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f, \xi_i \rangle_{\mathbb{S}^{n-1}}^2(t) r_0^{n-1} dt \\ &\leq \frac{1}{r_0^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} \langle f, \xi_i \rangle_{\mathbb{S}^{n-1}}^2(t) r^{n-1}(t) dt \\ &= \frac{1}{r_0^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} ||f||_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}^2 r^{n-1}(t) dt \\ &= ||f||_{L^2(M)}^2 < +\infty \end{aligned}$$

Dessa forma

$$\begin{aligned}
\Delta f(t,\theta) &= L_0 f(t,\theta) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} f(t,\theta)\\
&= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(L_0\langle f,\xi_i\rangle_{\mathbb{S}^{n-1}}(t)\xi_i(\theta) + \frac{1}{r^2(t)}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}\langle f,\xi_i\rangle_{\mathbb{S}^{n-1}}(t)\xi_i(\theta)\right)\\
&= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(L_0\langle f,\xi_i\rangle_{\mathbb{S}^{n-1}}(t)\xi_i(\theta) - \frac{\lambda_i}{r^2(t)}\langle f,\xi_i\rangle_{\mathbb{S}^{n-1}}(t)\xi_i(\theta)\right)\\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} L_i\langle f,\xi_i\rangle_{\mathbb{S}^{n-1}}(t)\xi_i(\theta).
\end{aligned}$$

O resultado a seguir caracteriza o espectro do operador de Laplace Beltrami em M, $\sigma(M)$.

Proposição 3.2 $\sigma(M) = \bigcup_{i=0}^{+\infty}\sigma(L_i)$

Prova: 3.3 *Inicialmente mostraremos a inclusão* $\bigcup_{i=0}^{+\infty}\sigma(L_i) \subset \sigma(M)$. *Se* $\lambda \in \bigcup_{i=0}^{+\infty}\sigma(L_i)$ *então existem* i_0 *tal que* $\lambda \in \sigma(L_{i_0})$ *e uma sequência* $\{f_k\}_k \subset L^2(\mathbb{R})$ *tal que, para todo* k,

$$||f_k||_{L^2(\mathbb{R})} = 1 \ \textit{e} \lim_{k\to+\infty}||L_{i_0}f_k + \lambda f_k||_{L^2(\mathbb{R})} = 0.$$

Defina $h_k : M \to \mathbb{R}$ *por* $h_k(t,\theta) = f_k(t)\xi_{i_0}(\theta)$. *Observe que*

$$\begin{aligned}
||h_k||^2_{L^2(M)} &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}(f_k(t)\xi_{i_0}(\theta))^2 r^{n-1}(t)\,d\theta dt\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_k^2(t)r^{n-1}(t)dt\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\xi_{i_0}^2(\theta)d\theta \qquad (25)\\
&\le r_1^{n-1} \qquad (26)
\end{aligned}$$

onde $r_1 = \max r(t)$, *por outro lado, temos* $||h_k||^2_{L^2(M)} \ge r_0^{n-1}$ *logo*

$$\lim_{k\to\infty}||h_k||^2_{L^2(M)} \neq 0.$$

e

$$\begin{aligned}
\Delta h_k(t,\theta) &= \sum_{i=0}^{+\infty} L_i\langle h_k,\xi_i\rangle_{\mathbb{S}^{n-1}}(t)\xi_i(\theta)\\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} L_i f_k(t)\delta^i_{i_0}\xi_i(\theta) = L_{i_0}f_k(t)\xi_{i_0}(\theta)
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
||\Delta h_k + \lambda h_k||^2_{L^2(M)} &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} (L_{i_0} f_k(t) + \lambda f_k(t))^2 \xi^2_{i_0}(\theta) r^{n-1}(t) d\theta dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (L_{i_0} f_k(t) + \lambda f_k(t))^2 r^{n-1}(t) dt \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \xi^2_{i_0}(\theta) d\theta \\
&\leq r_1^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} (L_{i_0} f_k(t) + \lambda f_k(t))^2 \, dt \\
&= r_1^{n-1} ||L_{i_0} f_k + \lambda f_k||^2_{L^2(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{k\to+\infty} ||\Delta_m h_k + \lambda h_k||_{L^2(M)} = 0$$

e $\lambda \in \sigma(M)$.

Para a outra inclusão mostraremos que se $\lambda \notin \bigcup_{i=0}^{+\infty} \sigma(L_i)$ *então* $\lambda \notin \sigma(M)$, *ou seja, que*

$$\bigcap_{i=0}^{+\infty} \rho(L_i) \subset \rho(M).$$

Se $\lambda \in \bigcap_{i=0}^{+\infty} \rho(L_i)$ *então* $L_i v(t) + \lambda v(t) = f$ *tem única solução,* $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$, *e* $(L_i + \lambda I)^{-1}$ *é limitado com*

$$||(L_i - \lambda I)^{-1}|| \leq \frac{1}{d(\lambda, \sigma(L_i))}$$

onde

$$d(\lambda, \sigma(L_i)) \geq \min\{d(\lambda, \sigma(L_0)), d(\lambda, \lambda_1/r_0^2)\}, \forall i.$$

Dada $f \in L^2(M)$ *consideramos* $a_i(t) = \langle f, \xi_i \rangle_{\mathbb{S}^{n-1}}$, *para cada* $i \in \mathbb{N}$ *existe* v_i *tal que* $L_i v_i + \lambda v_i = a_i$.

Defina $u_k(t,\theta) = \sum_{i=0}^{k} v_i(t) \xi_i(\theta)$.

Afirmação 1 $u_k(t,\theta) \to u = \sum_{i=0}^{+\infty} v_i(t)\xi_i(\theta)$.

De fato,

$$\begin{aligned}
||u_k - u_{k+l}||^2_{L^2(M)} &= \left|\left| \sum_{i=k+1}^{k+l} v_i(t)\xi_i(\theta) \right|\right|^2_{L^2(M)} \\
&= \sum_{i=k+1}^{k+l} ||v_i||^2_{L^2(\mathbb{R}, r^{n-1}(t))} \leq c \sum_{i=k+1}^{k+l} ||a_i||^2_{L^2(\mathbb{R}, r^{n-1}(t))}
\end{aligned}$$

e o último termo vai a zero quando $k \to \infty$ *pois*

$$||f||^2_{L^2(M)} = \sum_{i \geq 0} ||a_i||^2_{L^2(\mathbb{R}, r^{n-1}(t))} < +\infty.$$

Assim, $\{u_k\}$ *é uma sequência de Cauchy logo converge em* $L^2(M)$.

Vamos mostrar que u é solução, no sentido fraco, de

$$\Delta_M u + \lambda u = f. \tag{27}$$

Para tanto, seja $\phi \in C_0^\infty(M)$, *temos*

$$(u, (\Delta_M + \lambda I)\phi)_M = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} v_i(t)\xi_i(\theta \right) (\Delta_M + \lambda I)\phi(t,\theta) r^{n-1}(t) d\theta dt$$

e, pelo teorema da convergência dominada,

$$\begin{aligned}
\langle u, (\Delta_M + \lambda I)\phi\rangle_M &= \sum_{i=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} v_i(t)\xi_i(\theta)(-\Delta_M - \lambda I)\phi(t,\theta) r^{n-1}(t) d\theta dt \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (-\Delta_M - \lambda I)(v_i(t)\xi_i(\theta))\phi(t,\theta) r^{n-1}(t) d\theta dt \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (L_i - \lambda I)(v_i(t)\xi_i(\theta))\phi(t,\theta) r^{n-1}(t) d\theta dt \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} a_i(t)\xi_i(\theta)\phi(t,\theta) r^{n-1}(t) d\theta dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(t,\theta)\phi(t,\theta) r^{n-1}(t) d\theta dt = (f, \phi)_M
\end{aligned}$$

E portanto, $\Delta_M u + \lambda u = f$ *tem solução para toda* $f \in L^2(M)$

Além disso, a solução é única pois se u_1 *e* u_2 *são soluções de (27) temos* $\Delta_M(u_1 - u_2) + \lambda(u_1 - u_2) = 0$ *mas a única solução desta equação é a solução nula, ou seja,* $u_1 = u_2$.

Resta mostrar que $(\Delta_M + \lambda I)^{-1}$ *é limitado.*

De fato,

$$
\begin{aligned}
||\left(\Delta_M+\lambda I\right)^{-1} f||^2_{L^2(M)} &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left[\left(\Delta_M+\lambda I\right)^{-1} f\right]^2 r^{n-1}(t)d\theta dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u^2(t,\theta)r^{n-1}(t)d\theta dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} v_i(t)\xi_i(\theta)\right)^2 r^{n-1}(t)d\theta dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left[\sum_{i=0}^{+\infty} \left(L_i+\lambda I\right)^{-1} \langle f,\xi_i\rangle_{\mathbb{S}^{n-1}}\xi_i\right]^2 r^{n-1}(t)d\theta dt \\
&\leq \frac{1}{d^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\sum_{i=0}^{+\infty}\langle f,\xi_i\rangle_{\mathbb{S}^{n-1}}\xi_i\right)^2 d\theta\right] r^{n-1}(t)dt \\
&= \frac{1}{d^2}\int_{-\infty}^{+\infty} ||f||^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}r^{n-1}(t)dt = \frac{1}{d^2}||f||^2_{L^2(M)}.
\end{aligned}
$$

Por fim, para mostrarmos a existência de gaps, lembremos que do Corolário 2.1 temos que o primeiro autovalor do problema semiperiódico relacionado ao operador de Laplace-Beltrami em M satisfaz $\mu_0 \leq \frac{\pi^2}{a^2}$. E temos

Proposição 3.3 *Se $\lambda \in \rho(L_0)\cap(\mu_0,\lambda_1/r_0^2)$ então $\lambda \in \rho(M)$.*

Prova: 3.4 *Uma vez que $\mu_0 \leq \pi^2/a^2 < \lambda_1/r_0^2$, a interseção $\rho(L_0)\cap(\mu_0,\lambda_1/r_0^2)$ é não vazia. Defina*

$$\overline{L_i} = L_o - \frac{\lambda_i}{r_0^2}I$$

de $\dfrac{\lambda_i}{r_0^2} \leq \dfrac{\lambda_i}{r^2(t)}$ concluimos que o operador $L_i - \overline{L_i}$ é positivo. Logo

$$\sigma\left(L_i - \overline{L_i}\right) \subset [0,+\infty)$$

e portanto

$$\sigma(Li) \subset \left[\frac{\lambda_i}{r_0^2},+\infty\right) \subset \left[\frac{\lambda_1}{r_0^2},+\infty\right). \tag{28}$$

Assim, se λ é um ponto do intervalo de instabilidade de L_0 e $\mu_0 < \lambda < \dfrac{\lambda_1}{r_0^2}$ então λ é um ponto do intervalo de instabilidade de L_i para todo i. Ou seja, $\lambda \in \displaystyle\bigcap_{i=0}^{+\infty}\rho(L_i) = \rho(M)$.

4 CONCLUSÃO

Nesta tese trabalhamos sobre o espectro de variedades completas não compactas, dando enfoque às variedades warped do tipo $M^n = \mathbb{R} \times_r \mathbb{S}^{n-1}$ cuja função warping r é positiva, suave, periódica, de período a, satisfazendo

$$r_0 = \min r(t) < \sqrt{n-1}a/\pi.$$

Sendo $\mathbb{S}^{n-1}$ uma variedade compacta, existe uma base ortonormal de autofunções para $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ e utilizando esta base conseguimos decompor o operador de Laplace-Beltrami em M^n numa soma de operadores reais, escrevendo o espectro de M^n como a união do espectro de tais operadores.

Da periodicidade de r estes operadores se classificam como operadores de Hill, os quais apresentam *gaps* em seu espectro. A exigência $r_0 = \min r(t) < \sqrt{n-1}a/\pi$ conseguimos estimar a posição do primeiro *gap* no espectro de M^n. O comportamento de tais *gaps* no infinito é uma questão interessante. Da teoria clássica para os operadores de Hill temos que o comprimento dos *gaps* tende a zero à medida em que nos aproximamos do inifinito. No entanto, não conseguimos obter nenhum resultado à respeito dos *gaps* no espectro de M^n próximo do infinito.

REFERÊNCIAS

CHARALAMBOUS, Nelia; LU, Zhiqin. On the spectrum of the laplacian. **Mathematische Annalen.**, v. 359, p. 211–238, 2014.

CHEN, Zhihua; LU, Zhiqin. Essential Spectrum of Complete Riemannian manifolds. **Science in China**, v. 35, n. 3, p. 276–282, 1992.

DAVIES, E. B. **Spectral Theory and Differential Operators**. Cambridge University Press, 1995.

DONNELLY, H. On the essential spectrum of a complete Riemannian manifold. **Topology**, v. 20, p. 1–14, 1981.

DONNELLY, H. Exaustion functions and the spectrum of Riemannian Manifolds. **Indiana Univ. Math. J.**, v. 46, n. 2, p. 505–527, 1997.

EASTHAM, M. S. P. **The spectral theory of periodic differential equations**. Scottish Academic Press, 1973.

ESCOBAR, J. F.; FREIRE, A. The spectrum of the Laplacian of manifolds of positive curvature. **Duke Math. J.**, v. 65, p. 1–21, 1992.

GRIGOR'YAN, A. *Heat Kernel and Annalysis on Manifolds*. Americam Mathematical Society, 2009.

KUMURA, H. On the spectrum of the Laplacian on Complete Manifolds. **Indiana Univ. Math. J.**, v. 49, p. 1–14, 1997.

LI, J. Spectrum of the Laplacian on a complete Riemannian Manifold with nonnegative Ricci curvature which possesses a pole. **J. Math. Soc. Japan**, v. 46, p. 213–216, 1994.

LU, Z.; ZHOU, D. On the essential spectrum of complete non-compact Manifolds. **J. of Functional Analysis**, v. 260, p. 3283–3298, 2011.

MAGNUS, W.; WINKLER, S. **Hill's equation**. Nova York: Dover Publications, 1979.

MONTE, L. A. C.; MONTENEGRO, J. F. B. Essential Spectrum of a Class of Riemannian Manifolds. **J. Geom. Anal.**, v. 25, p. 2241–2261, 2015.

TAYOSHI, T. On the Spectrum of the Laplace-Beltrami Operator on a Non-compact Surface. **Proc. Japan Acad.**, v. 47, p. 187–189, 1971.

WANG, J. The Spectrum of the Laplacian on a Manifold of Nonnegative Ricci

Curvature. **Math. Res. Lett.**, v. 4, n. 4, p. 473–479, 1997.

ZHOU, D. Essential Spectrum of the Laplacian on Manifolds of Nonnegative Curvature. **Int. Math. Res. Not.**, v. 4, p. 209–215, 1994.