

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA E PRODUÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO EM ENGENHARIA E CIÊNCIA DE MATERIAIS**

**APLICAÇÃO DA MECÂNICA DA DANIFICAÇÃO EM MATERIAIS
COMPÓSITOS POLIMÉRICOS REFORÇADOS POR FIBRAS DE
VIDRO.**

Audelis de Oliveira Marcelo Júnior, Eng. Civil

ORIENTADOR: Prof. DSc. Enio Pontes de Deus

**Fortaleza – CE
Novembro de 2004**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA E PRODUÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO EM ENGENHARIA E CIÊNCIA DE
MATERIAIS**

**APLICAÇÃO DA MECÂNICA DA DANIFICAÇÃO EM MATERIAIS
COMPÓSITOS POLIMÉRICOS REFORÇADOS POR FIBRAS DE VIDRO.**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Engenharia e Ciência de Materiais da universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia e Ciência de Materiais.

Audelis de Oliveira Marcelo Júnior, Eng. Civil

ORIENTADOR: Prof. DSc. Enio Pontes de Deus

**Fortaleza – CE
Novembro de 2004**

A DEUS, o Senhor e Criador de tudo que há.
Aos Meus Pais, de acordo com o 1º mandamento de
promessa.

À minha Esposa, Danielle

Aos meus irmãos, Daniela, Dirceu e Diogo

Aos nossos líderes e intercessores, Luiz Eduardo e
Márcia

AGRADECIMENTOS

Ao professor, orientador Dr. Enio pontes de Deus, pela amizade, incentivo, sugestões, dedicação e apoio durante esta pesquisa. Além de ser um grande irmão em Cristo Jesus.

Ao Prof. Dr. Francisco Alcides Germano, pelo empenho em nos fornecer subsídios à realização deste trabalho, na coordenação deste curso.

Aos professores do departamento de Engenharia Mecânica e de Produção e do Departamento de Física da UFC, pelos conhecimentos transmitidos ao longo do curso de mestrado e por se mostrarem sempre disponíveis a ajudar.

Ao Prof. PhD. Benallal, pelo apoio e momentos de conversas bastantes elucidativas.

A Profa. Dra. Sandra, pelo apoio no processo de caracterização química do composto polimérico, e a Professora Judith, pelos esclarecimentos a respeito da interpretação dos resultados obtidos nas análises químicas.

À COELCE, pelo fornecimento de materiais e informações importantes, em especial a Eng. Jacinta Mota, chefe do departamento de P&D.

Ao Núcleo de Tecnologia do Estado do Ceará (NUTEC), por ceder equipamentos para realização de ensaios.

Ao Laboratório de Mecânica da Fratura e Fadiga (LAMEFF) e seus integrantes, por nos apoiar a realização desta pesquisa, em particular ao Eng. Msc. Gerson Melo de Almeida por sempre nos incentivar, mesmo nos momentos mais difíceis.

Ao Prof. Rodrigo Amaral de Codes, pelos sólidos fundamentos transmitidos ainda na graduação.

Ao amigo Rodrigo Nogueira de Codes, por nos auxiliar nesta pesquisa.

Aos graduandos Júlio César, Laércio Capistrano Bezerra, Osmayr dos Santos Sousa e José Haroldo M. Martins Neto, por nos auxiliarem na digitação desta dissertação.

A Danielle Marcelo, minha amada esposa, pela compreensão e dedicação a esta pesquisa.

Aos nossos incontáveis irmãos, em Cristo, pelas horas gastas em oração e jejum por mim e minha esposa, em particular aos irmãos que compõem a nossa célula de estudo bíblico.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	i
LISTA DE TABELAS	v
LISTA DE SIMBOLOS	vi
RESUMO	ix
ABSTRACT	x
1. Introdução	1
2. Revisão Bibliográfica	5
2.1. Materiais compósitos	5
2.1.1. Histórico	5
2.1.2. Definição e Introdução aos Materiais Compósitos	10
2.1.3. Elementos Constituintes: Matriz, Fibras e Interface Fibra/Matriz ...	15
2.1.4. As Vantagens e Desvantagens	25
2.1.5. Algumas Aplicações	31
2.2. Mecânica do Dano	35
2.2.1. Histórico	35
2.2.2. Definição e Introdução à Mecânica do Dano	36
2.3. Aspectos Fenomenológicos do Dano	38
2.3.1. Natureza Física do Dano no Estado Sólido	39
2.3.1.1. Átomos, Elasticidade e Dano	39
2.3.1.2. Deslizamentos, Plasticidade e Deformações Irreversíveis.....	41
2.3.1.3. Escala do Fenômeno de Deformação e Dano.....	42
2.3.1.4. Diferentes Manifestações do Dano.....	43
3. Fundamentos Teóricos	49
3.1. Constantes Elásticas dos Materiais Compósitos	49
3.1.1. Equações Constitutivas para Materiais Compósitos	49
3.1.2. Efeito da Temperatura	55
3.2. Constantes Elásticas dos Materiais Compósitos numa Direção Qualquer	55
3.2.1. Equações Constitutivas dos Materiais Compósitos numa Direção Qualquer	55
3.2.2. Efeito da Temperatura	61

3.3. Comportamento Mecânico de Placas Laminadas.....	62
3.3.1. Teoria Clássica dos Laminados	63
3.3.1.1. Comportamento da Membrana.....	63
3.3.1.2. Comportamento em Flexão.....	67
3.3.1.3. Efeito da Temperatura.....	71
3.4. Critérios de Ruptura.....	72
3.4.1. Critérios de Tensão Máxima	73
3.4.2. Critérios de Deformação Máxima.....	73
3.4.3. Critérios Interativos	75
3.4.3.1. Revisão de Critério de Von Mises	75
3.4.3.2. Critério de Hill.....	78
3.4.3.3. Critério de Tsai – Hill	80
3.4.3.4. Critério de Hoffman	81
3.4.3.5. Critério de Tsai – Wu.....	82
3.4.4. Método de Degradação.....	83
3.5. Método dos Elementos Finitos Aplicados aos Materiais Compósitos ..	83
3.5.1. Campo de Deslocamentos.....	84
3.5.2. Energia de Deformação Elementar.....	88
3.5.3. Energia Cinética Elementar	91
3.5.4. Trabalho Realizado pelas Forças Externas	94
3.5.5. Princípio dos Trabalhos Virtuais	94
3.5.5.1. Determinação das Tensões	95
3.6. Elementos de Mecânica do Dano	99
3.6.1. Definição do Elemento de Volume Representativo.....	99
3.6.2. Definição de Tensão Efetiva	100
3.6.3. Definição de Deformação Efetiva.....	102
3.6.4. Princípios Gerais de Equivalências de Resposta Constitutivas ...	104
3.6.4.1 Relação Constitutiva Envolvendo Equivalência de Energia	105
3.6.4.2. Relação Constitutiva Envolvendo Equivalência de Deformação	106
3.6.4.3. Relação Constitutiva Envolvendo Equivalência de Tensão.....	107
3.6.5. Forma Generalizada das Relações Constitutivas para casos	

Multiaxiais	107
3.6.6. Tensores Isótopos e Anisotrópicos de Rigidez Secante com Dano Escalar.....	110
3.7. Autotensores na elasticidade anisotrópica.....	114
3.8. Revisão breve de critérios de falhas em materiais Anisotrópicos	115
3.9. Aspectos Gerais de a Respeito de Medições	116
3.9.1. Medida Direta.....	117
3.9.1.1. Variação do Módulo de Elasticidade	118
3.9.1.2. Propagação de Ondas Ultrasônicas	121
3.9.1.3. Variação da Densidade	122
3.9.1.4. Variação da Resistência Elétrica.....	123
4. Análise Experimental e Simulação Numérica.....	126
4.1. Análise Experimental	126
4.1.1. Caracterização do Material	126
4.1.1.1. Caracterização Química do Material	126
4.1.1.2. Caracterização Mecânica do Material	134
4.1.2. Análise Metalográfica.....	142
4.2. Simulação Numérica.....	144
4.2.1. Avaliação do Histórico de Degradação do Material.	145
5. Análise Computacional	149
5.1 Aspectos Gerais.....	149
5.2 Descrição da Simulação Computacional.	150
5.2.1 Definição da Geometria do Modelo.	151
5.2.2. Tipo do Elemento.	152
5.2.3. Restrições e Carregamentos.....	152
5.2.4. Resultados das Simulações.	153
5.3. Análise Numérica.....	156
5.4. Análise dos Resultados.	161
6. Conclusões e Sugestões	163
6.1. Conclusões	164
6.1.1. Simulação Computacional.....	164
6.1.2. Estudo Experimental	165
6.1.3. Institucional	165
6.1.4. Sugestões para Trabalhos Futuros	165

Apêndice A – Notação Indicial.....	A1
A.1. Notação Tensorial	A1
Apêndice B – Elementos de Física dos Polímeros.....	B1
B.1. Tipos de propriedades moleculares	B1
B.2. Elasticidade das redes macromoleculares	B3
Referencias Bibliográficas	B8
Nomenclatura	B9
Letras gregas.....	B9
Outros símbolos	B10

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 2

Figura 2.1- Mesopotâmia.....	7
Figura 2.2: Desenho publicado em 1850, mostrando a utilização do concreto	8
Figura 2.3: Organograma de Classificação dos Materiais Compósitos (MATTHEUS & RAWLINGS, 1994).....	12
Figura 2.4: Exemplos de compósitos reforçados (a) por partículas aleatórias; (b) por fibras descontínuas unidirecionais; (c) por fibras descontínuas aleatórias; (d) por fibras contínuas unidirecionais (MATTHEUS & RAWLINGS, 1994).	12
Figura 2.5: Efeito da deformação ao redor da fibra na Matriz sob tensão: (a) Fibra contínua; (b) Fibra descontínua (Adaptado de MATTHEWS & RAWLINGS, 1994).	20
Figura 2.6: Gráficos tensão x posição quando o comprimento da fibra (a) é igual ao comprimento crítico, (b) é maior do que o comprimento crítico (CALLISTER, 2002).	21
Figura 2.7: Gráfico comparativo entre alguns Materiais Compósitos e Ligas Metálicas.	26
Figura 2.8: Comparação das Propriedades Mecânicas de alguns Compósitos Poliméricos Reforçados por Fibra de vidro, com Metais mais usuais. [Adaptado do Catalogo da Owens Corning, 2003].	27
Figura 2.9: Processo de Fabricação de fibras.	30
Figura 2.10: Componentes da aeronave T-27, fabricados em compósitos, utilizando como reforço fibras de vidro, carbono e <i>Kevlar</i> ® (REZENDE & BOTELHO, 2000).	32
Figura 2.11: Representação esquemática de uma pultrusora.	34
Figura 2.12: Processo de Transição entre o Dano e a Fratura, segundo DRIEMEIER [1995].	38
Figura 2.16: Tensão plástica elementar devido ao movimento da discordância.	41
Figura 2.17: Dano Elementar por nucleação da microtrinca devido ao acúmulo de discordâncias	41

Figura 2.18: Fractografia mostrando danos de microtrincas em volta de uma inclusão cerâmica e ao lado a curva de tensão deformação até a ruptura.	44
Figura 2.19: Fractografia mostrando danos de microcavidades nos contornos de grão de um aço e a curva tensão x deformação do AISI 1010 aço recozido.	45
Figura 2.20: Mostra intergranular de danos por cavidade formada a 800°C em uma liga níquel-base	46
Figura 2.21: Fractografia mostrando estrias dúcteis do ciclo de fadiga em um aço austenítico e a curva do ciclo de tensão de compressão.	47
Figura 2.22 : Fractografia de uma fratura de fadiga transcristalina em uma liga de Níquel e a curva do ciclo de tensão por compressão pelo alto ciclo de fadiga.....	48

CAPÍTULO 3

Figura 3.1 - Sistema de eixos de ortotropia	50
Figura 3.2 - Ilustração de uma placa unidirecional de dimensões a, b, e espessura e	51
Figura 3.3 - Sistema de eixo x de ortotropia e de referência	56
Figura 3.4 – Balanço de forças nas direções x e y sobre um elemento plano.....	56
Figura 3.5 – Elemento Esquemático.....	57
Figura 3.6 – Modos de deformação.....	61
Figura 3.7 – Distribuição de tensões.	64
Figura 3.8 – Modelagem matemática	68
Figura 3.9 - Exemplos de flexão de placas.....	71
Figura 3.10 – Mudanças Volumétricas	76
Figura 3.11 – Energia de Distorção	76
Figura 3.12 – Diagramas de Mohr	77
Figura 3.13 – Cisalhamento transversal a uma placa laminada	84
Figura 3.14 – Elemento submetido a um estado de tensões triaxiais.....	96
Figura 3.15: Elemento de Volume Representativo de um Sólido com Dano.....	100
Figura 3.16: Acréscimo de comprimento devido à abertura de defeitos.....	103
Figura 3.17: Variação da rigidez secante do meio contínuo equivalente.	106
Figura 3.18: Modelo de uma Microestrutura e a Evolução Direta do Dano. (J. Lemaitre (1996) <i>apud</i> L. Engel, H. Klingele e C. Lienard)	117

Figura 3.19: Medidas de dano dúctil em um cobre (99,9% de pureza), em sala com temperatura controlada.(Por J. Lemaitre (1996) <i>apud</i> J. Dufailly)	119
Figura 3.20: Evolução do Dano frágil em um compósito carbono-carbono (Por J. Lemaitre (1996) <i>apud</i> M. Poss).	120
Figura 3.21: Evolução do Dano frágil em compressão em concreto de $\sigma_u = 40MPa$ (Por J. Lemaitre (1996) <i>apud</i> J. Mazars).	120
Figura 3.22: Comparação entre a medida do dano por variação do potencial elétrico e por a) Mudança do módulo de elasticidade para o aço inoxidável A316, por fadiga a tensão controlada, b) mudança do módulo de elasticidade por fadiga a deformação controlada, mo aço inoxidável A316, c) método por fluência terciária em uma superliga IN 100 a 1.000 °C, d) Resposta cíclica plástica com tensão controlada de uma superliga IN 1000°C. (Por J. Lemaitre (1996) <i>apud</i> G. Cailletaud).....	125

CAPÍTULO 4

Figura 4.1. Compósito na forma original.....	128
Figura 4.2. Amostra das partes solúvel no clorofórmio.....	128
Figura 4.3. Material solubilizado em clorofórmio.	129
Figura 4.4. Material não solúvel em clorofórmio.	129
Figura 4.5. Fibra seca sem vestígios de solvente.....	130
Figura 4.6. TGA em atmosfera de ar.	131
Figura 4.7. TGA em atmosfera de nitrogênio.....	132
Figura 4.8. Curva DSC relacionada a transição vítrea, provavelmente em PMMA.	133
Figura 4.9. Curva DSC relacionada a transição vítrea em polímero + Fibra de Vidro.....	133
Figura 4.10. Ensaio de tração em corpos-de-prova de fibra de vidro.	134
Figura 4.11. Desenho do Corpo de Prova.	134
Figura 4.12. Ensaio de tração em corpos-de-prova de fibra de vidro (detalhe da Fixação).....	135
Figura 4.13. Ensaio de tração em corpos-de-prova de fibra de vidro (detalhe da ruptura).....	135
Figura 4.14. Força x deformação (d=19,1 mm e L=595 mm).	136

Figura 4.15. Tensão x deformação (d=19,1 mm e L=595 mm).....	137
Figura 4.16. Força x deformação (d =19.1 mm e l= 670 mm).....	138
Figura 4.17. Tensão x deformação(d =19.1 mm e l= 670 mm).....	138
Figura 4.18. Força x deformação (d =19.1 mm e l= 590 mm).....	139
Figura 4.19. Tensão x deformação (d =19.1 mm e l= 590 mm).....	139
Figura 4.20. Força x deformação (d =19.1 mm e l= 670 mm).....	140
Figura 4.21. Tensão x deformação (d =19.1 mm e l= 670 mm).....	141
Figura 4.22. Foto evidenciando o CP- 01 (mais claro) e o CP -02.	141
Figura 4.23. Ampliação de 400 vezes da superfície do compósito.	142
Figura 4.24. EDX do Núcleo do Isolador.	143
Figura 4.25. Ampliação de 100 vezes da superfície do compósito.....	143
Figura 4.26. Ampliação de 800 vezes da superfície do compósito.....	143
Figura 4.27. Gráfico $\sigma \times \varepsilon$ obtido em ensaio de tração para os corpos-de-prova tipo 01, confrontado com a resposta numérica proposta.....	144
Figura 4.28. Gráfico $\sigma \times \varepsilon$ obtido em ensaio de tração para os corpos-de-prova tipo 02, confrontado com a resposta numérica proposta.....	145
Figura 4.29. Gráfico Dano x Deformação.	146
Figura 4.30. Gráfico Dano x Deformação com o Dano Inicial.....	148

CAPÍTULO 5

Figura 5.1. Viga modelada.....	151
Figura 5.2. Detalhe do carregamento e suas restrições.	152
Figura 5.3. Malha Gerada para o modelo com a trinca de a = 5,00mm.....	152
Figura 5.4. Detalhe da malha Gerada na trinca com a = 5,00mm.	153
Figura 5.5. Tensões de Von Mises para o modelo sem trinca e carga de 1 kN.....	153
Figura 5.6. Tensões de Von Mises para o modelo com trinca de a=5,00 mm e carga de 2,5 kN.	154
Figura 5.7. Tensões de Von Mises na ponta da trinca, para o modelo com trinca de a=5,00 mm e carga de 2,5 kN.	154
Figura 5.8. Diagrama F x Δ x a.	156
Figura 5.9. Confronto da curva teórica com a curva obtida via método dos elementos finitos (MEF) do modelo com a = 0,0 mm.	157
Figura 5.10. Confronto da curva teórica com a curva obtida via método dos elementos finitos (MEF) do modelo com a = 1,0 mm.	158

Figura 5.11. Confronto da curva teórica com a curva obtida via método dos elementos finitos (MEF) do modelo com $a = 2,0$ mm.	158
Figura 5.12. Confronto da curva teórica com a curva obtida via método dos elementos finitos (MEF) do modelo com $a = 3,0$ mm.	159
Figura 5.13. Confronto da curva teórica com a curva obtida via método dos elementos finitos (MEF) do modelo com $a = 4,0$ mm.	159
Figura 5.14. Confronto da curva teórica com a curva obtida via método dos elementos finitos (MEF) do modelo com $a = 5,0$ mm.	160
Figura 5.15. Diagrama $D \times \Delta \times a$	160
APÊNDICE B	
Figura 1: Junções elasticamente ativas e inativas, cadeias elasticamente ativas e pendentes, numa rede macromolecular. As cadeias infinitas são representadas com uma seta na ponta. As cadeias pendentes partem das junções inativas, e tanto podem ser finitas como infinitas.	B3

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO 2

Tabela 2.1: Comparação das Faixas Típicas das Propriedades das Resinas Poliméricas.....	18
Tabela 2.2: Propriedades de fibras de reforço para compósitos, adaptado de MATTHEWS AND RAWLINGS [1994].	22
Tabela 2.3: Algumas Propriedades Mecânicas de Fibras e Metais	23

CAPÍTULO 4

Tabela 4.1: Atribuição das bandas de absorção na região do infravermelho das amostras.....	130
Tabela 4.2: Resultados do Ensaio de Tração Uniaxial.	137
Tabela 4.3: Resultados do Ensaio de Tração Uniaxial.	138
Tabela 4.4: Resultados do Ensaio de Tração Uniaxial.	140
Tabela 4.5: Resultados do Ensaio de Tração Uniaxial.	141
Tabela 4.6. Parametrização da função tangente-hiperbólica para CP – 01.....	145
Tabela 4.7. Parametrização da função tangente-hiperbólica para CP – 02.....	145

CAPÍTULO 5

Tabela 5.1. Resultados obtidos nas Simulações Computacionais.....	155
Tabela 5.2. Constantes de Parametrização – $a = 0,0$	157
Tabela 5.3. Constantes de Parametrização – $a = 1,0$	158
Tabela 5.4. Constantes de Parametrização – $a = 2,0$	158
Tabela 5.5. Constantes de Parametrização – $a = 3,0$	159
Tabela 5.6. Constantes de Parametrização – $a = 4,0$	159
Tabela 5.7. Constantes de Parametrização – $a = 5,0$	160
Tabela 5.8. Valores para Δ em função de $D_c = 0,3333$ e do comprimento da trinca (a).	161
Tabela 5.9. Valores de $D_{0,a}$, para $\Delta = 0,9543173166$ mm.....	162

Lista de Símbolos

Gregas

α_1	coeficiente de dilatação térmica das fibras
α_2	coeficiente de dilatação térmica da resina
α_3	coeficiente de dilatação térmica da resina
α e β	inclinações das seções nos planos (x,y) e (x,z)
δS_D	área total fissurada
δS	área total da superfície
$\delta_{(T)}^A$	autotensão de tração
ε	deformação obtida no ensaio de tração
ε_e	módulo de elasticidade
ε_{ij}	Deformações normais na direção i
γ_{ij}	Deformações angulares no primeiro plano ij;
ρ	Densidade
$\tilde{\rho}$	Densidade modificada.
σ	tensão
σ_R	Tensão de ruptura.
σ_{ij}	Tensões normais na direção i;
σ_f	resistência à tração na ruptura da fibra
ν	Coefficiente de Poisson
$\lambda(d)$	é uma função de valor escalar envolvendo a variável de dano
τ_{ij}	Tensões de cisalhamento no plano ij;
τ_f	menor resistência ao cisalhamento da matriz ou da interface
ν_{ij}	Coefficiente de Poisson
ν_2	coeficiente de Poisson no plano de isotropia transversa

Latinas

A_e	Tensão plástica limite no ponto de rendimento inferior.
A_g	Porcentagem de deformação até a fratura.
a_i	trinca de tamanho aparente ""
a, b	Constantes características do material;
D	Dano
d	diâmetro da fibra
E	Módulo de Elasticidade Longitudinal
E_i	Módulo de elasticidade na direção i ;
\tilde{E}	Módulo de Elasticidade Longitudinal danificado
F_m	Carga Máxima.
G_{ij}	Módulo de cisalhamento no plano ij .
K	é a matriz de rigidez global,
K	número de modos Kelvin
l	Comprimento
l_c	comprimento crítico da fibra
P	vetor forças externas global
R_m	Resistência à tração do material.
ReH	Ponto de rendimento superior.
ReL	Ponto de rendimento inferior.
R_p	Tensão limite na região plástica.
r	Resistividade
S	Área
S_{12}	tensão de cisalhamento no plano (1,2)
T	matriz de transformação
U	é o vetor dos graus de liberdade de todo sistema
U	vetor de deslocamento nodal
u_o, v_o, w_o	são os deslocamentos transversais da superfície neutra
V	diferença de potencial
X_{ec} e X_{et}	deformações máximas na direção longitudinal em compressão e em tração
Y_{ec} e Y_{et}	deformações máximas na direção transversal em compressão e em tração

RESUMO

Dentre os materiais comumente utilizados há um destaque em especial para os materiais compósitos poliméricos, desde a fabricação de brinquedos a artifícios bélicos.

Dessa forma faz-se necessária uma investigação ampla sobre todos os aspectos referentes a esses materiais. Assim, a presente pesquisa objetiva avaliar os processos de danificação de um compósito polimérico (polimetil metacrilato – PMMA, reforçado com fibra de vidro) através de um modelo matemático para a tensão normal.

Primeiramente, foi realizada uma análise experimental seguida de simulações numéricas, onde foram encontrados os parâmetros matemáticos característicos deste material, foram apresentados também, os aspectos relativos a caracterização química e metalográfica. A seguir foram realizados Análises Computacionais pelo método dos elementos finitos em um código de cálculo internacionalmente conhecido, com o objetivo de verificar a relação existente entre o comprimento de trincas e o valor da variável dano. De posse destes dados foram determinados os valores para a variável D_c , e os intervalos de validade da expressão apresentada.

Finalmente concluímos a importância de estudos como este a fim de que se possa obter históricos de degradação do material, para posterior análise de vida remanescente do mesmo. Ainda nesta tônica determinou-se a relação dano x comprimento da trinca, algo original em nossa literatura nacional, além da apresentação de sugestões para novos trabalhos, relacionados com a mecânica do dano em diversos materiais.

ABSTRACT

Among the materials used commonly in the world, there is a detached one that is special for polymeric composite materials, from the manufacture of toys to devices.

In this way, it is necessary an ample inquiry on all the referring aspects to these materials. Thus, this research intend to evaluate the damage processes of a polymeric composite (PMMA, reinforced by glass fibers) through a mathematical model for the normal stress.

Firstly, many tension tests were made and then, they were numerically simulated, where mathematical characteristic parameters of this material had been found. Relative aspects of the chemical and the metallographic characterization are also presented in this research. After that, numerical analysis were made by the Finite Element Method in a an internationally known software with the objective to verify the existing relation between the length of cracks and the value of the damage variable. With these data, the values for the D_c variable and the intervals of validity of the presented expression had been determined.

Finally, it is concluded the importance of studies as this to obtain descriptions of degradation of the material for a for posterior analysis of remaining life of it. In this research, the relation damage x length of the crack was determined, something original in our national literature, beyond the presentation of suggestions for new works, related with the damage mechanics in diverse materials.

1 INTRODUÇÃO

“Digam agora os que temem ao SENHOR que a sua benignidade dura para sempre... É melhor confiar no SENHOR do que confiar no homem. É melhor confiar no SENHOR do que confiar nos príncipes...”

(Salmos 118:8-9).

Os materiais compósitos, principalmente os poliméricos reforçados com fibras, têm alcançado níveis bastante elevados de utilização. Estes materiais são utilizados nas mais diversas áreas de interesse tais como: indústria naval, autopeças, próteses, isoladores elétricos, elementos estruturais, etc. O crescimento desse tipo de material ocorre principalmente, por ser exemplo, de elevada eficiência estrutural, que se caracteriza por alta resistência mecânica associada a um baixo peso específico. Outros fatores

que contribuem para essa crescente utilização são de ordens estética, funcional e facilidade de moldagem, dentre outros.

Devido à relativa novidade na utilização de compósitos poliméricos, o comportamento mecânico, assim como os processos de falha desses elementos, ainda não foram exaustivamente estudados. Dessa forma faz-se necessária uma investigação ampla sobre todos os aspectos referentes a esses materiais. Assim, a presente pesquisa objetiva avaliar os processos de danificação de um compósito polimérico (polimetil metacrilato – PMMA, reforçado com fibra de vidro) através de um modelo matemático para a tensão normal, considerando o dano. Tais processos de danificação são importantes por precederem a falha que ocorrerá com o material submetido aos esforços (de utilização) inerentes ao seu emprego.

Esse trabalho foi iniciado com uma pesquisa bibliográfica apresentando um histórico da utilização de materiais compósitos ao longo da existência do homem e histórico da aplicação da mecânica do dano em compósitos. No capítulo referente a esta pesquisa foram apresentadas também as definições básicas relacionadas com estes materiais e sua respectiva classificação.

No capítulo seguinte, foram apresentados os fundamentos teóricos que observam as características mecânicas dos materiais compósitos através de métodos analíticos e numéricos (utilizando o método dos elementos finitos – MEF). O objetivo deste capítulo é fundamentar não só esta pesquisa, mas também facilitar a fundamentação de futuros trabalhos nesta área. Daí a necessidade de abordar aspectos mais específicos do comportamento mecânico destes materiais, além de também apresentar os aspectos gerais que regem a mecânica do dano, aspectos estes importantes e necessários à compreensão dos capítulos seguintes. Contudo, as devidas hipóteses simplificadoras inerentes a esta pesquisa são apresentadas nos capítulos seguintes.

No capítulo de Análise Experimental e Simulação Numérica foram encontrados os aspectos relativos às caracterizações química, mecânica e numérica do material estudado nesta pesquisa. Inicialmente, foi apresentada uma visão ampla do que há disponível hoje a respeito do aspecto experimental de caracterização do dano em materiais. Contudo, foi

dada uma ênfase maior ao tópico 4.1.1.2, uma vez que este tópico foi utilizado na caracterização do dano no compósito estudado. Ainda neste capítulo, foi apresentada a caracterização química com suas propriedades físicas, de formação de filmes, análise térmica, solubilidade, análise de espectroscopia na região do infravermelho, análise Termogravimétrica (TGA) e por fim apresentou-se análise por Calorimetria Exploratória Diferencial (DSC). Ainda neste capítulo, apresentou-se a caracterização mecânica por meio de ensaios de tração, pois havia a necessidade de se caracterizar o comportamento segundo a curva tensão x deformação para assim acoplar a mecânica do Dano nesta análise. Foi feita também uma análise micrográfica, com o objetivo de verificar possíveis falhas internas destes materiais, falhas estas que interferem no processo de análise final. Ainda na micrografia, realizou-se uma análise por energia dispersiva de raios-X (EDX) Link Analytical QX-2000, para qualitativamente levantar os devidos elementos ali presentes. Ao fim, apresentou-se a simulação numérica lançando mão dos dados levantados anteriormente, nos ensaios de tração. Na simulação numérica adotou-se o modelo de tensão apresentado por COFER (1999) e foi introduzido o conceito de dano para os materiais compósitos poliméricos reforçados por fibras, segundo a calibração das curvas teóricas com as curvas experimentais. Foram traçados vários gráficos com este intuito. Em seguida, foi apresentada a análise do histórico de degradação destes elementos estudados. Contudo, foi verificada a existência de danos iniciais, que foram inclusive observados na microscopia e determinados por meio do uso de um método inverso, pois é definido que ao falhar a variável dano apresenta valor $D=1$. Estes valores dos danos iniciais foram encontrados e explícitos neste capítulo. Ainda neste capítulo, apresentou-se um valor característico deste tipo de material, o chamado D_c , dano crítico, que se manteve dentro de uma faixa já esperada.

O capítulo de Análise Computacional apresentou-se uma simulação computacional, realizada com o objetivo de verificar a relação existente entre o comprimento de trincas e o valor da variável dano. Este capítulo se inicia com uma breve descrição do processo que rege a simulação computacional, usando uma ferramenta de análise por elementos finitos

(MEF), seguido das hipóteses simplificadoras utilizadas nesta análise, assim como da definição da geometria simplificada tridimensional. Ainda neste capítulo, apresentou-se o modelo de restrição e de carregamento, assim como, da malha de elementos finitos adotados na simulação. Apresentaram-se os resultados obtidos em forma de gráficos, tabelas e figuras comentando-os sempre que possível. Com o objetivo de avaliar o processo de danificação do material simulado, foi realizada de forma análoga ao capítulo 4, a parametrização das curvas $F_x\Delta$, obtidas nestas simulações computacionais. As mesmas se apresentaram dentro do esperado, ou seja, todas tiveram o mesmo valor calculado para D_c , no capítulo anterior. Uma visão geral foi apresentada em forma gráfica, conforme pode ser visto na figura 5.12, deste capítulo. Verificou-se que todas as curvas têm a mesma resposta para valores de Δ menores que 0,2 mm e para valores de Δ maiores que 5,6 mm, o que nos garante que o modelo matemático proposto, não este habilitado para analisar o fenômeno de danificação nestes intervalos, contudo para valores que pertençam ao intervalo $0,2 \text{ mm} \leq \Delta \leq 5,6 \text{ mm}$, esta função apresentou resultados significativos e, portanto satisfaz as expectativas.

No capítulo de conclusões e sugestões apresentaram-se as devidas conclusões observadas no contexto desta pesquisa, dentre elas o fato da relação dano x comprimento da trinca ser algo original, em nossa bibliografia nacional. Ainda neste capítulo apresentaram-se algumas sugestões para novos trabalhos, relacionados com a mecânica do dano em diversos materiais.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

“Quem primeiro me deu, para que Eu haja de Retribuir-lhe? Pois o que está debaixo de todos os céus é meu...”

(Jô 41:11).

2.1. Materiais Compósitos

2.1.1 Histórico

A concepção de materiais compósitos ou conjugados é muito antiga. Encontram-se facilmente na literatura referências bibliográficas que relatam o uso destes materiais. Segundo KAEFER [1998] há 12.000.000 a.C., em Israel ocorreram reações entre o Calcário e a Argila xistosa durante combustão espontânea formando um depósito natural de compósitos de cimento. Estes depósitos foram caracterizados por geólogos israelenses na

década de 70, vindo a ser o primeiro cimento que os homens, milhões de anos depois, utilizaram, que é o cimento natural.

Segundo KAEFER [1998] entre 8000 e 4000 a.C. na Europa, somente no final do período e início da idade do bronze que surgem as primeiras construções de pedra.

Por volta do ano 4000 a.C. no Iraque, segundo escavações arqueológicas, ocorreram construções executadas parcialmente em concreto, conforme os escritos de KAEFER [1998].

De acordo com KAEFER [1998], há 3500 a.C. na Suméria, os seus habitantes fundaram a civilização mais antiga do Oriente Próximo, nas terras da Mesopotâmia, figura 1, e erigiu uma das civilizações mais esplendorosas do mundo antigo.

A arquitetura da Mesopotâmia empregou nos seus estágios iniciais tijolos de barro cozido, maleáveis, mas pouco resistentes, o que explica o alto grau de desgaste das edificações encontradas.

Devido à escassez de outros materiais de construção no Egito (pedra, madeira) os povos desta região desenvolveram a técnica de fabricação de tijolos de barro reforçados por palhas (secos ao ar livre) e de argamassas de gipsita e de cal; isto ocorreu entre 3000 a.C. e 2500 a.C., no período da construção das pirâmides. A idéia de combinar materiais frágeis e dúcteis é de fato utilizada.

BEAUMONT [1989], afirma que arcos laminados de madeira, tendões de animais e seda já eram utilizados na Mongólia, por volta de 700 a.C.

De acordo com KAEFER [1998], barras de ferro em formato cilíndrico foram usadas para reforço de alvenaria no século 19, vindo a ser o início do desenvolvimento do concreto reforçado com aço, ou melhor, concreto armado.

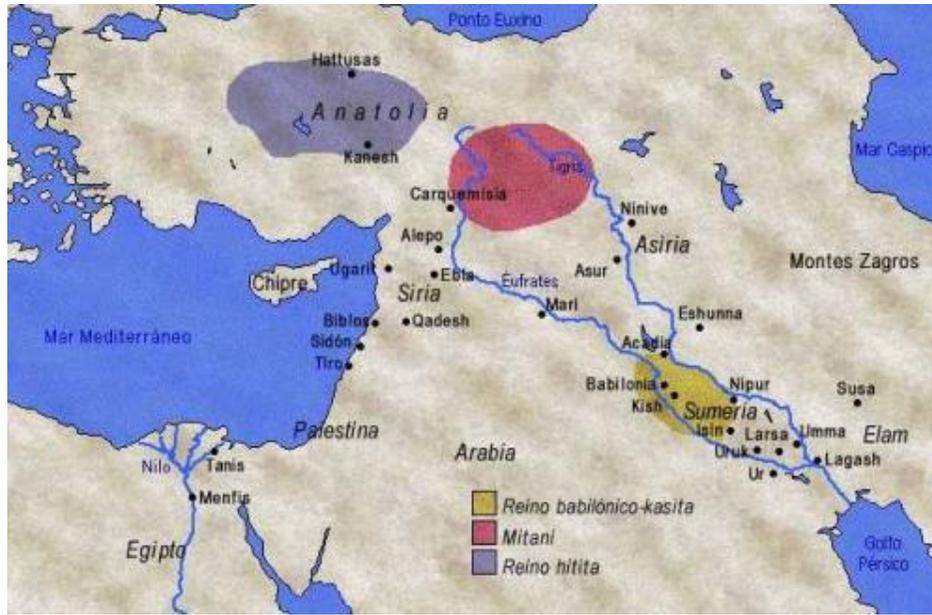


Figura 2.1- Mesopotâmia.

As resinas fenólicas reforçadas com fibras de amianto começaram a serem introduzidas no século 20.

Na década de 10, as superfícies de aviões eram revestidas por tecidos, já na década de 30 os fenólicos eram reforçados por tecidos. Na década de 40 os plásticos reforçados por fibras de vidro começaram a ser utilizados, segundo BEAUMONT [1989]. Segundo KAEFER [1998] o primeiro barco de fibra de vidro foi feito em 1942. Plásticos reforçados também foram usados em aeronaves e componentes elétricos nesta época. Filamentos bobinados foram inventados em 1946 e incorporados em aplicações de mísseis em 1950.

O boro e as fibras de carbono de alta resistência foram introduzidos ao final dos anos 50, sendo utilizados primeiramente como uma aplicação de compósitos avançados em componentes de aeronaves em 1968. Ao final de 1963, uma série de experiências na *Royal Aircraft Establishment* em *Farnborough*, Inglaterra, levou à descoberta, em meados de 1964, das fibras de carbono de alta resistência, alta rigidez e dos seus compósitos. Nas duas décadas seguintes, a produção de Materiais Compósitos Reforçados por Fibras (MCRF) cresceu uma taxa desfrutada apenas pelo aço, até o seu apogeu.

Na década de 70, os compósitos com matriz de metal, tal como, boro-alumínio foram introduzidos. Em 1973 a Dupont desenvolveu a fibra de *Kevlar*® (ou aramida). As fibras de Aramida são tipicamente na cor dourada e exigem lâminas de tesoura muito afiadas para o seu corte. *Kevlar*® é a marca registrada da Dupont para Aramida. A aramida é muito difícil de ser lixada e é afetado adversamente pela luz UV, de tal modo que muitas vezes é colocado por baixo de fibra de vidro ou outro material.



Figura 2.2: Desenho publicado em 1850, mostrando a utilização do concreto.

Ao final dos anos 70 as aplicações dos materiais compósitos começaram a expandir-se com aplicações em aeronaves, automóveis, bem como em artigos esportivos, nas indústrias e em biomateriais. Os anos 80 foram marcados por um aumento significativo da utilização de fibras com altos módulos de elasticidade longitudinal. Agora dá-se ênfase ao desenvolvimento de novos compósitos metal-matriz e cerâmico-matriz, bem como o compósito carbono-carbono, para aplicações em altas temperaturas.

Em março de 1997 foi publicado um artigo na NASA *Facts*, uma das formas de divulgação da principal agência espacial do mundo, intitulado *Orbit Thermal Protection System*, onde é descrito como os cientistas desta agência resolveram o problema da alta temperatura, na reentrada na atmosfera terrestre, onde a velocidade excede 17.000 mph (27.359 km/h), provocando assim uma temperatura de 3.000° F (1.649° C). Houve então um grande esforço da comunidade científica e como resultado, obtiveram um combinado de 03 materiais e dentre eles estava o compósito Carbono-Carbono, como principal elemento de proteção térmica, ou como foi batizado pela NASA *Thermal Materials*.

No início, o grande estímulo à produção de MCRF, estava relacionado à característica de combinar alta resistência e/ou rigidez com baixo peso específico, o que conferia uma grande eficiência estrutural.

Atualmente, existe uma maior variedade de fibras do que originalmente disponíveis na década de 60, onde estes dados são uma pequena quantidade do vasto universo de informações empíricas acumuladas por meio de experimentos. O projeto empírico de componentes em materiais compósitos baseia-se nesta coleção de dados. Porém, a exploração dos dados experimentais requer, também, a capacidade de prever um modelo matemático adequado para o comportamento do compósito.

Alguns exemplos de fibras mais recentes são: a Alumina (Al_2O_3); Carbetto de Silício (SiC); Alumina-Boro-Sílica (Nextel®); Nitreto de Boro; Diboreto de Titânio; Quartzo Fundido; Alumina-Sílica (Kaowool®); Polietileno (Spectra®).

Aplicações diversas, incluindo tubos subterrâneos e reservatórios, embarcações, automóveis, aeronaves, estruturas aeroespaciais, componentes automobilísticos, equipamentos esportivos, produtos biomédicos e muitos outros produtos estão sendo projetados para apresentarem elevada performance mecânica e/ou estabilidade ao meio ambiente associada a baixa densidade e a alta rigidez.

Contudo, certos obstáculos ainda dificultam a integração dos compósitos entre os materiais estruturais utilizados convencionalmente, como o aço ou o alumínio, a dificuldade de prever o modo de falha exato dos materiais compósitos, é um exemplo das dificuldades encontradas. Isto interfere na

confiabilidade dos componentes fabricados e torna-se ainda mais sério, para componentes de alta responsabilidade, onde a combinação de fadiga, danos por impacto e efeitos do meio ambiente pode causar falhas catastróficas. Já sabemos que os compósitos são amplamente aceitos, no que diz respeito a sua boa resistência a corrosão, contudo projetistas ainda não estão totalmente convencidos sobre sua resistência à ação prolongada de combustíveis, lubrificantes e produtos químicos altamente corrosivos; mesmo com todos os esforços para automatizar os processos de manufatura de compósitos, a produção manual (Hand Lay-up) é ainda amplamente utilizada, o que eleva sensivelmente os custos de fabricação. Outros processos podem ser excessivamente lentos e envolvem grandes perdas de material, tais como, Spray-Up e enrolamento filamentar (Filament Winding). A relutância de projetistas e fabricantes habituados ao uso de materiais convencionais, limitando assim, o número de informações sobre o comportamento de componentes e/ou elementos mecânicos confeccionados em materiais compósitos.

Portanto, mesmo com as supra citadas dificuldades há um esforço em manter-se em foco projetos de peças em compósitos que possuam uma ótima combinação de desempenho, manufaturabilidade e custos.

2.1.2 Definição e Introdução aos materiais Compósitos

Segundo JONES [1998], a palavra Compósitos significa que dois ou mais materiais são combinados, em escala macroscópica, para formar um terceiro material, distinto dos demais. Um exame macroscópico de material e de seus componentes pode ser feito a olho nu. Diferentes materiais podem ser combinados em escala microscópica, como nas ligas metálicas, mas como resultado prático, temos um material macroscopicamente homogêneo e seus componentes não podem ser, portanto distinguidos a olho nu.

Naturalmente, estas propriedades devem ser aprimoradas de acordo com a utilização do material, prevista em projeto. De fato algumas propriedades estão em conflito, como por exemplo, as propriedades de condutividade térmica e a de isolamento térmico. O objetivo é meramente criar um material com as características necessárias a um bom desempenho do projeto.

Já segundo SILVESTRE FILHO [2001], ainda hoje não há uma definição realmente adequada para os materiais compósitos. REINHART & CLEMENTS [1987], definem um compósito como uma combinação macroscópica de dois ou mais materiais distintos, havendo uma interface reconhecível entre eles. Nesta combinação, os constituintes retêm suas identidades, ou melhor, eles não se dissolvem ou se descaracterizam completamente e atuam em conjunto, fazendo com que as propriedades do compósito sejam superiores às de cada constituinte individualmente. Em virtude dos compósitos serem normalmente empregados em função de suas propriedades estruturais, a definição pode ser restringida a incluir somente aqueles materiais que contenham um reforço e um material aglomerante. O aglomerante tem como função manter os reforços unidos, transmitindo a estes o carregamento aplicado, enquanto os reforços têm como função suportar os carregamentos transmitidos pelo aglomerante.

Deste modo, os compósitos têm, tipicamente, uma ou mais fases descontínuas envolvidas por uma fase contínua. A fase descontínua é (reforço), usualmente, mais rígida e mais resistente do que a fase contínua (aglomerante), denominada de matriz. Com o intuito de garantir e assegurar o reforço, geralmente deve haver uma fração volumétrica substancial da fase descontínua.

Classificação e Características dos Materiais Compósitos

Segundo MATTHEUS & RAWLINGS [1994], a geometria da fase descontínua é um dos principais parâmetros a ser considerado, visto que a forma e dimensão das mesmas são responsáveis pelas propriedades mecânicas do compósito. Portanto, descrevem-se os reforços usualmente como fibrosos ou particulados. Desta forma, MATTHEUS & RAWLINGS [1994], classificam os compósitos com base na geometria dos seus componentes estruturais, conforme organograma. Apresentado na figura 2.3.

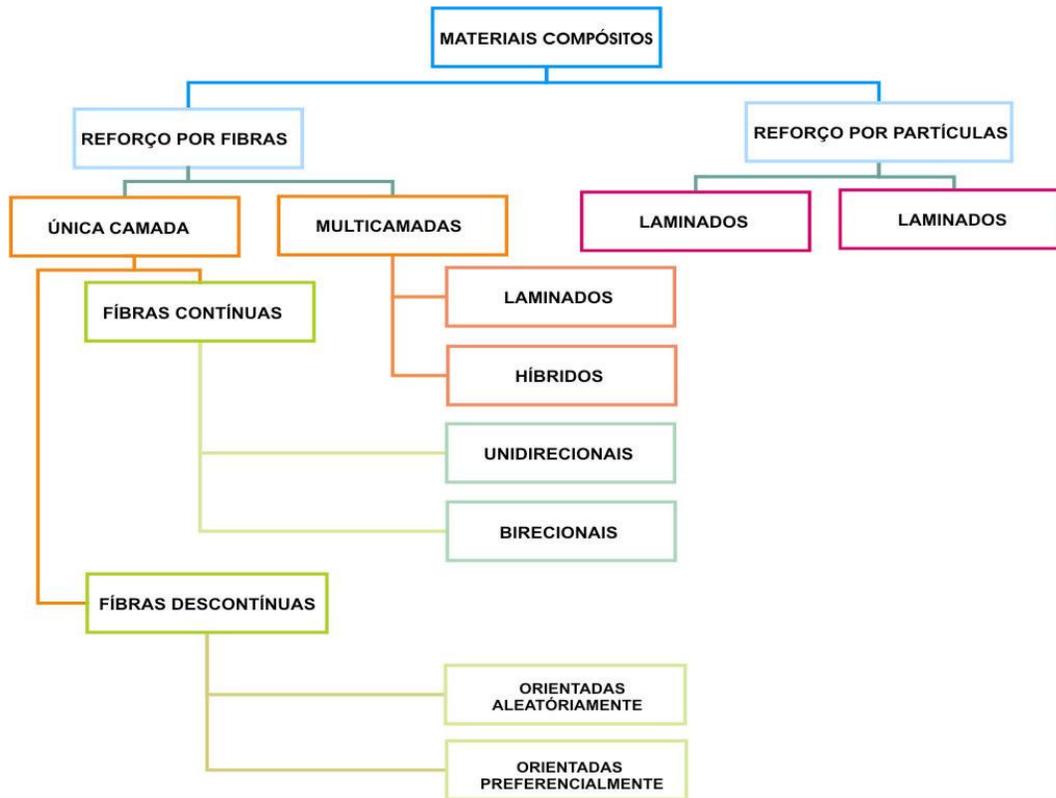


Figura 2.3: Organograma de Classificação dos Materiais Compósitos (MATTHEUS & RAWLINGS, 1994)

Com respeito a esta classificação, o reforço particulado tem dimensões aproximadamente iguais em todas as direções e o seu arranjo pode ser aleatório ou orientado. Na maioria dos compósitos reforçados por partículas a orientação das partículas é considerada aleatória para fins práticos, conforme é mostrado, esquematicamente, na figura 2.4.

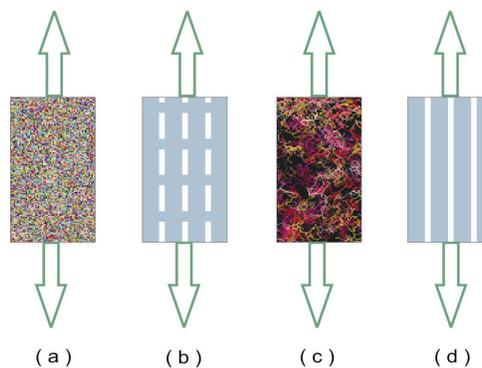


Figura 2.4: Exemplos de compósitos reforçados (a) por partículas aleatórias; (b) por fibras descontínuas unidirecionais; (c) por fibras descontínuas aleatórias; (d) por fibras contínuas unidirecionais (MATTHEUS & RAWLINGS, 1994).

Segundo AGARWAL & BROUTMAN [1990], uma característica marcante dos materiais compósitos é que eles têm suas propriedades fortemente influenciadas pela distribuição, interação e pelas propriedades dos seus componentes. Muitas propriedades dos compósitos podem ser estimadas por meio da fração volumétrica (v) de seus constituintes, ou por meio da fração em massa (ω), de acordo com MATTHEUS & RAWLINGS [1998]. Em análises experimentais no entanto, é mais fácil obter uma medida de massa do que uma medida de volume, correspondentes dos elementos constituintes, por isso utilizando-se a conexão analítica existente entre fração volumétrica e fração em massa, converte-se a fração em massa em fração volumétrica e vice-versa. Considerando que a fração volumétrica é uma palavra-chave para cálculos de propriedades elásticas, esta conexão se torna importante. As expressões necessárias para este desenvolvimento são:

$$v_f = \frac{V_f}{V_c} \quad \text{e} \quad \omega_f = \frac{W_f}{W_c} \quad (2.1)$$

$$v_m = \frac{V_m}{V_c} \quad \text{e} \quad \omega_m = \frac{W_m}{W_c} \quad (2.2)$$

Onde os índices m , f e c referem-se à matriz, à fibra e ao compósito respectivamente, V ao Volume e W à massa.

Sabe-se ainda que $v_f + v_m = 1$ e $\omega_f + \omega_m = 1$. Tem-se ainda que a relação entre a fração em massa e a fração volumétrica é a densidade, ρ , do compósito e dos constituintes. Portanto teremos,

$W_c = W_f + W_m$, e como $W = \rho V$, temos:

$$\rho_c V_c = \rho_f V_f + \rho_m V_m \quad (2.3)$$

Esta equação pode ser reescrita em função da fração volumétrica, bastando para isso que ambos os membros seja divididos por V_c , portanto teremos:

$$\rho_c = \rho_f v_f + \rho_m v_m \quad (2.4)$$

que pode ser escrita em função das massas dos constituintes. Então:

$$W_c / \rho_c = W_f / \rho_f + W_m / \rho_m .$$

$$\frac{1}{\rho_c} = \frac{\omega_f}{\rho_f} + \frac{\omega_m}{\rho_m} \quad (2.5)$$

Ainda podemos relacionar a massa, o volume e a densidade, tendo então:

$$\omega_f = \frac{W_f}{\rho_c} = \frac{\rho_f V_f}{\rho_c V_c} = \frac{\rho_f}{\rho_c} v_f \quad (2.6)$$

e de forma análoga,

$$\omega_m = \frac{W_m}{\rho_c} = \frac{\rho_m V_m}{\rho_c V_c} = \frac{\rho_m}{\rho_c} v_m \quad (2.7)$$

A relação entre v_f e v_m em termos de ω_f e ω_m pode ser obtida facilmente pela inversão da eq.(2.6) e da eq.(2.7), a partir do conhecimento da densidade do reforço (ρ_f) e da matriz (ρ_m). Pode-se ainda combinar a eq. (2.6) com a eq.(2.4) e a eq.(2.7) com a eq. (2.4), respectivamente, tendo como resultado uma expressão de conversão entre a fração em massa e a fração volumétrica da fibra ou matriz, conforme abaixo.

$$\omega_f = \frac{\frac{\rho_f}{\rho_m} v_f}{\frac{\rho_f}{\rho_m} v_f + v_m} \quad (2.8)$$

$$\omega_f = \frac{v_m}{\frac{\rho_f}{\rho_m}(1-v_m) + v_m} \quad (2.9)$$

A eq.(2.4) é de veras importante, pois mostra que a densidade do compósito é uma média ponderada das densidades dos constituintes, onde os pesos são as frações volumétricas dos elementos constituintes. Esta relação não é só válida para a densidade, ela vale também em certas situações, para outras propriedades dos materiais compósitos. Esta expressão tem como forma geral:

$$X_c = X_m v_m + X_f v_f \quad (2.10)$$

Onde X_c representa uma certa propriedade do compósito, v é a fração volumétrica e os índices m e f referem-se à matriz e à fibra, respectivamente. Esta equação é conhecida como Regra das Misturas (*Rules of Mixtures*) e será abordada mais adiante.

Geralmente as propriedades de um compósito são funções de vários parâmetros, onde os constituintes interagem normalmente de modo sinérgico. Desta forma algumas destas propriedades não são totalmente avaliadas pela Regra das Misturas. Neste caso, as características químicas e de resistência da interface entre as fibras e a matriz são particularmente importantes para a determinação das propriedades do compósito.

Outra característica dos MCRF é com relação à anisotropia. Um material é dito anisotrópico quando as suas propriedades mecânicas, físicas, térmicas e elétricas num ponto do material, variam em função da direção nas quais estão sendo analisadas. Isto permite ao engenheiro projetista desenvolver as propriedades do material juntamente com as características geométricas e funcionais da peça, com o objetivo de obter um melhor desempenho, sendo assim, possível *projetar* o material de acordo com os carregamentos aplicados.

Uma grande vantagem dos MCRF é a possibilidade de planejamento das tensões máximas em serviço na direção que haja a mais alta resistência. Este planejamento é possível através do projeto e da fabricação.

2.1.3 Elementos Constituintes: Matriz, Fibras e Interface Fibra / Matriz

Fibras longas em várias formas são responsáveis pela dureza e a resistência para uma mesma forma volumétrica. Obviamente a geometria é muito importante na definição da resistência e de outras considerações em aplicações estruturais. Mas o paradoxo a respeito das fibras está relacionado com o arranjo destas por unidade de volume, sendo isto o principal responsável pelas propriedades mecânicas das fibras. Nas fibras, os cristais estão alinhados ao longo do eixo das fibras. Contudo, estes possuem poucos defeitos internos por unidade de volume.

Segundo EDWARDS [1998], além das recomendações válidas para os materiais tradicionais, o projetista ao projetar com materiais compósitos, tem que considerar também a seleção dos seus materiais constituintes, ou seja, a proporção, tipo, distribuição e orientação, dependendo das propriedades requeridas, seleção do processo, geometria do compósito e requisitos de produção. Devido a grande variação de matrizes e reforços, serão abordados especificamente, neste trabalho, os compósitos de matrizes poliméricas reforçadas por fibras contínuas.

MATRIZES

Os materiais poliméricos, metálicos, cerâmicos ou carbono podem ser utilizados como matriz. A escolha do material da matriz dependerá das propriedades físicas, mecânicas e térmicas exigidas, como também do processo de fabricação escolhido e do custo associado. As matrizes poliméricas são as mais utilizadas devido ao seu baixo custo, a facilidade de moldar, a boa resistência química e seu baixo peso específico. Por outro lado possuem uma aplicação limitada, se comparadas com as matrizes metálicas e cerâmicas, tais como: baixa resistência mecânica, baixo módulo de elasticidade e baixa temperatura de serviço. As matrizes poliméricas também se degradam por meio da exposição prolongada à luz ultravioleta e alguns solventes, AGARWAL & BROUTMAN [1990].

O papel da matriz é manter a integridade estrutural do compósito através da ligação simultânea com as fibras em virtude de suas características

coesivas e adesivas, segundo REINHART & CLEMENTS [1987]. A transferência do carregamento para as fibras e proteção contra as intempéries, como corrosão, abrasão e danos devidos ao manuseio, são algumas das funções das matrizes. Conforme CALLISTER [2001], é de fundamental importância que as forças adesivas da interface fibra-matriz sejam fortes e por isso a resistência da adesão é uma importante consideração na escolha da combinação fibra-matriz. A resistência à ruptura dos MCRF depende diretamente da intensidade desta adesão, ou seja, uma adesão adequada é essencial para otimizar o desempenho de materiais compósitos, pois há a maximização da transferência de carregamentos da matriz para as fibras.

As resinas, como são chamadas as matrizes poliméricas e são consideradas o *elo fraco* do compósito, pois ainda hoje, elas não suportam os níveis de tensões que as fibras são capazes de resistir. Contudo são o tipo mais comum de matriz e têm a maioria de suas aplicações onde a temperatura não excede aproximadamente 100 a 200° C. Por exemplo, materiais de fibra de vidro produzidos com fibras curtas de vidro aglomeradas numa matriz poliéster plástica são usados em eletrodomésticos, barcos e em estruturas de carros, por serem mais leves, mais fácil de fabricar em formas complexas, resistência à corrosão e por terem custo moderado.

As matrizes poliméricas podem ser classificadas como resinas termoplásticas e resinas termofixas. As resinas termoplásticas sofrem deformações com o aumento da temperatura e por essa razão são largamente utilizadas em processos de injeção plástica. Já as resinas termofixas entram num regime chamado de *cura* quando aquecidas, sendo essa uma reação irreversível. A cura é uma interligação química de cadeias moleculares, formando assim moléculas maiores e mais complexas, tornando o componente mais resistente. A cura ainda é acelerada na presença de catalisadores adequados e na proporção certa para cada tipo de resina. Quando se solidificam, assim permanecem e mesmo reaquecidas não se refundem. Sob aquecimento a temperaturas elevadas, haverá combustão do material. Deste modo, não podem ser reutilizadas.

Por outro lado, as resinas termoplásticas consistem de cadeias moleculares lineares ou ramificadas que, ao serem aquecidas sob pressão, a sua consistência altera-se de sólida a líquida viscosa. Neste processo não

ocorrem reações químicas ou decomposição e os produtos obtidos podem ser reaquecidos repetidamente. Por ser um processo exotérmico, a temperatura irá influenciar no tempo de cura, sendo, portanto realizado dentro de fornos ou estufas com temperatura controlada para cada tipo de matriz. As resinas termofixas são mais comuns para uso estrutural, pois apresentam um enorme número de aplicações e suas características geralmente são as mais desejáveis. LUCATO [1991] observou que dentre as termofixas, existem as epoxilicas que apresentam inúmeras vantagens para o desenvolvimento de projetos, tais como:

1. Apresentam baixa viscosidade, facilitando a modelagem;
2. Fornecem baixa contração, evitando tensões residuais;
3. Possibilitam a cura à temperatura ambiente;
4. Possuem alto módulo de elasticidade e compressão;
5. Propiciam aplicações estruturais de alto desempenho.

Algumas propriedades mecânicas de matrizes poliméricas termofixas e termoplásticas são apresentadas na tabela 2.1, segundo MATTHEWS & RAWLINGS [1994]:

Tabela 2.1: Comparação das Faixas Típicas das Propriedades das Resinas Poliméricas.

Propriedades	Termofixos	Termoplásticas
Módulo de Elasticidade (GPa)	1,3 – 6,0	1,0 – 4,8
Resistência à tração (GPa)	0,02 – 0,18	0,04 – 0,19
Temperatura Máxima de serviço (°C)	50 – 450	25 – 230

Entretanto, segundo BLASS [1985] as resinas apresentam algumas características negativas, tais como: aderência indesejável às paredes do molde em que estão sendo processadas, além de não possuírem a característica de reciclagem, pois pertencem ao grupo das resinas termofixas. Exposição a condições adversas podem diminuir bastante o desempenho da matriz antes da fibra ser danificada. Entretanto, as resinas exercem muitas funções essenciais; além daquelas mencionadas no parágrafo acima, elas mantêm as fibras na posição e orientação adequada de modo que possam suportar as cargas desejadas, distribuem as cargas quase uniformemente entre

as fibras, servem como uma barreira à propagação de trincas e garantem toda a resistência ao cisalhamento interlaminar do compósito. Um importante fator observado por *HYER* [1998], é que a limitação de um compósito pode ser perfeitamente uma função das propriedades da matriz. As resinas epoxídicas, apesar de também apresentarem essas limitações, são usadas em grande escala.

Devido a grande importância da matriz e suas propriedades, estudaram-se alguns *Elementos de Física de Polímeros*, estudo este que se encontra em anexo (Apêndice B), ao final deste trabalho.

Os materiais compósitos Plásticos, utilizados antes do século XX, eram baseados em produtos resinosos naturais, tais como: piche, caseína e albumina. As primeiras resinas laminares sintéticas foram produzidas por Berzelius em 1847. Estas resinas foram precursoras das resinas fenólicas introduzidas no início da década. Pequenas quantidades de papel e tecidos impregnados com resina fenólica formando laminas foram utilizados por várias décadas, mas o verdadeiro início da era dos compósitos plásticos aconteceu com a produção de poliéster insaturado reforçado com fibra de vidro, segundo *BEBER* [2001].

Propriedades das Fibras

O comportamento e as propriedades dos materiais compósitos dependem da natureza, da forma, do arranjo estrutural e da interação entre os componentes. Naturalmente, as propriedades e características intrínsecas de cada componente determinam as propriedades gerais do compósito. Entretanto, a interação entre os componentes resultará em um novo grupo de propriedades, derivadas da combinação das propriedades individuais de cada componente. A distribuição e a quantidade relativa de cada componente são fatores importantes que contribuem para o desempenho do compósito. Estas inúmeras variáveis conferem aos materiais compostos a sua versatilidade, segundo *HOLLAWAY et al* *BEBER* [1999; 2001].

Dentre todos os tipos de compósitos, aqueles constituídos com fibras têm atraído a atenção de muitos pesquisadores envolvidos em aplicações estruturais. Como a forma fibrosa da maioria dos materiais é inerentemente

mais resistente do que o mesmo material em sua forma a granel, a utilização de fibras torna-se muito interessante sob o ponto de vista estrutural. O método mais eficiente encontrado consiste em combinar um material fibroso de alta resistência à tração e alto módulo de elasticidade com um material de baixo módulo e baixa resistência.

Diversas fibras podem ser utilizadas, incluindo-se o vidro, carbono e boro, além das fibras produzidas a partir de polímeros sintéticos. Projetar fibras implica alinhar as moléculas do material. A alta resistência à tração está associada à melhoria da atração intermolecular resultante deste alinhamento. As fibras de vidro, carbono e *kevlar*® (Aramida – *Aromatic polyamid*) são utilizadas em conjuntos com polímeros como poliéster, éster-vinílico e epóxi.

Conforme a classificação de MATTHEWS & RAWLINGS [1994] com relação aos reforços dos compósitos, as fibras apresentam-se em duas formas: fibras contínuas ou fibras descontínuas. Como componentes estruturais, ambas têm a função de suportar os esforços provenientes da matriz, porém com características distintas que influenciam o desempenho mecânico dos compósitos.

Segundo CALLISTER [2002] as características mecânicas dos compósitos Poliméricos Reforçados com fibras não dependem somente das propriedades das fibras, mas também da intensidade com que o carregamento é função do comprimento da fibra e da adesão interfacial entre a fibra e a matriz. Assim, para cada combinação fibra-matriz é necessário estabelecer um comprimento mínimo da fibra capaz de garantir a rigidez e resistência do compósito.

Por isso, MATTHEWS & RAWLINGS [1994] definem como comprimento crítico da fibra (l_c) o comprimento mínimo da fibra, para um dado diâmetro, que admita a tensão de ruptura a tração da fibra e ao cisalhamento da interface, isto é, o comprimento mínimo de fibra necessário para a tensão transmitida alcançar a tensão de ruptura a tração da fibra. Então:

$$l_c = \frac{\sigma_f d}{2\tau_f} \quad (2.11)$$

onde:

l_c = comprimento crítico da fibra;

σ_f = resistência à tração na ruptura da fibra;

τ_f = menor resistência ao cisalhamento da matriz ou da interface;

d = diâmetro da fibra.

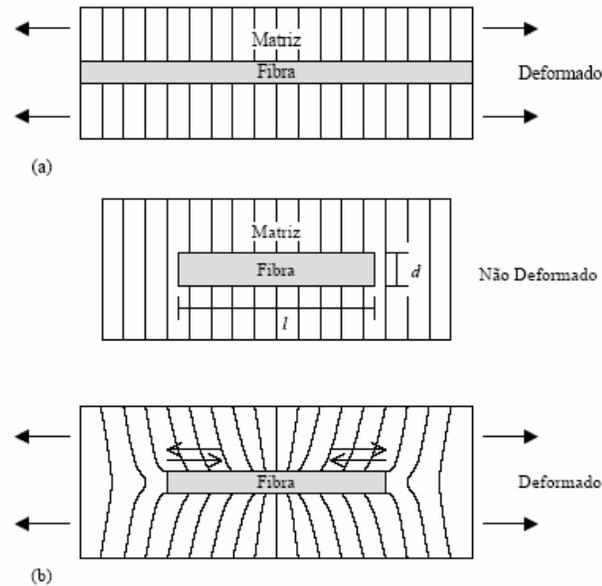


Figura 2.5: Efeito da deformação ao redor da fibra na Matriz sob tensão: (a) Fibra contínua; (b) Fibra descontínua (Adaptado de MATTHEWS & RAWLINGS, 1994).

Quando uma tensão igual a σ_f é aplicada à fibra, cujo comprimento é igual ao comprimento crítico ($l = l_c$), o perfil de posição da tensão aplicada alcança o carregamento máximo apenas no centro axial da fibra.

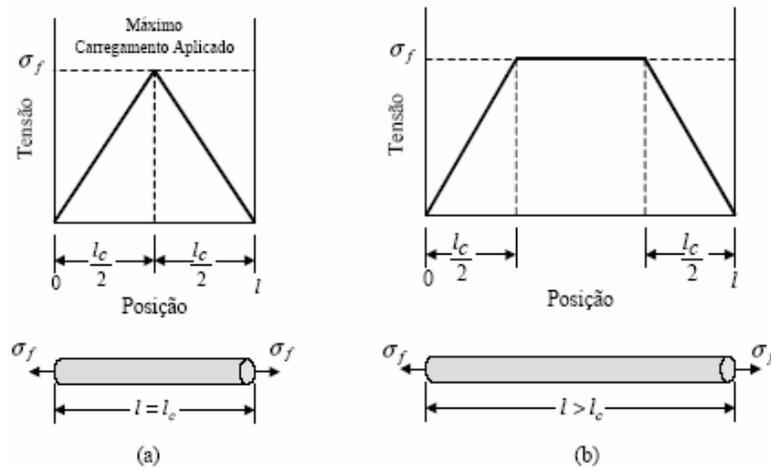


Figura 2.6: Gráficos tensão x posição quando o comprimento da fibra (a) é igual ao comprimento crítico, (b) é maior do que o comprimento crítico (CALLISTER, 2002).

Com o aumento do comprimento da fibra, a resistência do reforço aumenta, pois o máximo carregamento se distribui ao longo de boa parte da fibra; como mostra a figura anterior, pelo perfil de posição da tensão axial para $l > l_c$. Neste caso, a matriz se deforma ao redor da fibra, de modo que não há uma transferência efetiva da tensão e, conseqüentemente como compósitos particulados.

As fibras para as quais $l \gg l_c$ (normalmente $l > 1,5l_c$) são denominadas contínuas; enquanto que as fibras mais curtas são denominadas descontínuas. Para várias combinações de matrizes com fibras de carbono ou vidro, o comprimento crítico é da ordem de 1mm, que varia entre 20 e 150 vezes o diâmetro da fibra.

Um importante fator a ser considerado em projetos com compósitos reforçados é a orientação que a fibra assume no produto final. A fração volumétrica da fibra empregada é responsável principalmente pelas propriedades mecânicas. Fibras em forma de mantas e fios (fibra contínua) se caracterizam por fornecer reforços apenas na direção em que estão dispostas. Já os tecidos possuem fibras ortogonais (fibra contínua) que permitem reforços em duas direções, e as fibras descontínuas produzem na sua grande maioria reforços aleatórios. Portanto, o arranjo pode ser unidirecional, bidirecional ou aleatório. Os dois primeiros possuem características anisotrópicas, ou seja,

suas propriedades dependem das direções do reforço no produto final [HANDBOOK of COMPOSITES, 1982]. As direções são fixadas a partir das direções dos esforços que atuam no componente.

Das diversas fibras existentes, podem ser utilizadas tanto na forma contínua como na descontínua às suas diversas aplicações, propriedades mecânicas relativamente boas e de baixo custo. A tabela 2.2 compara algumas propriedades da fibra de vidro com as outras fibras (*E-glass*), que possuem custos mais elevados.

Tabela 2.2: Propriedades de fibras de reforço para compósitos, adaptado de MATTHEWS AND RAWLINGS [1994].

Fibra	Densidade (ρ) (MN / m^3)	Módulo de Young da fibra – E_f (GPa)	Resistência à tração da fibra - σ_{tf} (MPa)
Fibra de Vidro (tipo E)	2,54	70	2200
Aramida (Kevlar®)	1,45	130	2900
SIC (Nicalon)	2,60	250	2200
Alumina	3,90	380	1400
Boro	2,65	380	3500
Polietileno com alto peso moléculas	0,97	172	2964
Carbono	1,86	380	2700

Tais informações tornam as fibras de vidro muito mais atrativas para a produção de compósitos, principalmente com fibras contínuas. Desta forma, o presente trabalho visa a utilização de fibra de vidro contínua como material reforçante da matriz epoxídica.

Uma fibra é caracterizada geometricamente não somente por ter uma alta relação comprimento – diâmetro, mas por sua classificação na relação diâmetro – cristal (*Near – Cristal – Sized diameter*). A resistência e a rigidez de algumas fibras são classificadas de acordo com a média crescente da relação S/ρ e E/ρ , como podemos ver na Tabela 2.3 (Adaptada das notas de aula do Professor A.G.H. Dietz [1995]). Os materiais estruturais mais comuns,

tais como, alumínio, titânio e o aço, são listados para que se possa ter uma idéia de grandeza. Contudo, uma comparação direta entre as fibras e metais estruturais não é válida, porque as fibras necessitam ser envolvidas por uma matriz para garantir um bom desempenho como membro estrutural, enquanto que os metais estruturais já estão aptos ao uso. A densidade de cada material também é listada para que se possa relacioná-la com a resistência e a rigidez, estas relações são comumente utilizadas como indicadores de desempenho de uma fibra, especialmente o peso próprio, que é fundamental em aplicações tais como em aeronaves e veículos espaciais.

Tabela 2.3: Algumas Propriedades Mecânicas de Fibras e Metais

Fibras ou Metais	Densidade ρ (kN / m³)	Resistência à tração, S (GN / m²)	S / ρ (km)	Rigidez à tração, E (GN / m²)	E / ρ (Mm)
Alumínio	26,30	0,62	24,00	73,00	2,80
Titânio	46,10	1,90	41,00	115,00	2,50
Aço	76,60	4,10	54,00	207,00	2,70
E – Glass	25,00	3,40	136,00	72,00	2,90
S – Glass	24,40	4,80	197,00	86,00	3,50
Carbono	13,80	1,70	123,00	190,00	14,00
Berílio	18,20	1,70	123,00	190,00	16,00
Boro	25,20	3,40	137,00	400,00	16,00
Grafite	13,80	1,70	123,00	250,00	18,00

Interface Fibra com Matriz

A interface fibra – matriz é uma região essencialmente bidimensional. Portanto a zona interfacial consiste de camadas superficiais próximas à fibra e matriz e qualquer camada de material existente entre estas superfícies. Por ser a área superficial interna ocupada pela interface, externa, a interface em um compósito torna-se extremamente importante. Conseqüentemente, é fundamental entender o que exatamente ocorre nesta região, em um dado sistema compósito, sob certas condições, CHAWLA, K.K. [1987].

O comportamento de um compósito é resultante do comportamento combinado dos seus componentes, assim como, da interface entre estes e, por conseguinte, a estrutura e propriedades da interface têm um papel marcante sobre as propriedades mecânicas e físicas destes materiais. Contudo, a molhabilidade das fibras pela matriz e o tipo de ligação entre dois constituintes são primordiais para análise do comportamento do compósito, visto que as tensões atuantes na matriz são transmitidas para as fibras por meio da interface, segundo HULL D. & CHAWLA K.K. [1981,1998].

Das diversas propriedades dos materiais compósitos em que a interface é um fator dominante tem-se a *Tenacidade à Fratura* e a resposta nos *meios aquosos e corrosivos*. Compósitos com interfaces fracas têm relativamente baixa resistência mecânica e rigidez, porém elevada resistência à fratura, enquanto que os compósitos fortes possuem elevada resistência e rigidez, sendo porém muito frágeis, isto de acordo com os escritos de HULL [1981]. Nesse trabalho HULL destaca algumas hipóteses que devem ser adotadas com relação às propriedades da interface: (i) a matriz e a fibra se comportam como materiais elásticos; (ii) a interface é infinitamente delgada; (iii) a interação entre a fibra e a matriz é perfeita, de forma que não ocorre descontinuidade de deformação ao longo da interface; (iv) a interface que se forma ao redor da fibra tem as mesmas propriedades que um material no estado sólido; (v) a geometria do empacotamento das fibras é regular. Entretanto, as hipóteses (ii) e (iv) não estão totalmente corretas, porque a interface real apresenta uma estrutura física e química complexa.

Contudo, a natureza da interação é dependente das propriedades da fibra e matriz, segue que a interface é específica para cada sistema fibra – matriz. Este fato exerce influência direta na escolha dos materiais a serem empregados, pois a combinação de fases quaisquer nem sempre estabelecerá a interação adequada da fibra e matriz, sendo às vezes necessário um tratamento superficial na fibra para que esta interaja fortemente com a matriz. Quando não há esta forte interação, o material ficará sujeito a falhas, tais como, perda de aderência e podendo também estar sujeito a propagações de trincas em maiores escalas, segundo SHACKELFORD [1996]. Tal fato influi diretamente na escolha dos materiais a serem empregados, pois a combinação

de quaisquer fases nem sempre propiciará a interação adequada fibra-matriz, sendo às vezes necessário um tratamento superficial nas fibras para que estas interajam de uma maneira melhor com as matrizes.

Pela grande importância da interface fibra – matriz sobre o desempenho mecânico e integridade estrutural dos compósitos, cresce o interesse na capacidade de entender os mecanismos físicos e químicos responsáveis pela adesão fibra – matriz. Assim, é desejável ter um método de teste que seja reproduzível e fidedigno para investigar e quantificar a adesão entre estes componentes. HERRERA – FRANCO & DRZAL [1992] comparam os principais métodos de avaliação das interações mecânicas fibra – matriz para compósitos e discutem as análises teóricas nas quais estes métodos são baseados, como também os dispositivos experimentais e procedimentos de ensaio, e por último, discutem as vantagens e limitações de cada método.

2.1.4 As Vantagens e Desvantagens

Segundo NOTON [1987], quando se compara os compósitos com os materiais estruturais convencionais, na fase de seleção dos materiais no desenvolvimento do projeto, é essencial comparar as vantagens das tecnologias dos compósitos com as tecnologias dos materiais estruturais convencionais, ou seja, processos de fabricação e configurações de projeto. Sob este ponto de vista, HOLMANN¹ apud MAGAGNIN FILHO [1996] explica que ao escolher um material para aplicações estruturais, diversas variáveis são consideradas. Porém, as mais importantes são o custo e a eficiência estrutural. Por outro lado, a eficiência estrutural do material é a relação entre sua rigidez ou sua resistência com seu peso específico, ou seja E/ρ e σ/ρ , respectivamente. Em geral, quanto menor o peso específico do material, maior é sua eficiência estrutural e seu custo e vice – versa. Assim, ao optar pelo uso de um material com custos ainda elevados, como os compósitos, deve-se considerar que a eficiência estrutural necessária para uma certa condição de serviço, compense seus custos, a Figura 2.7 apresenta uma comparação entre alguns Compósitos e Ligas Metálicas.

¹ HOLLMANN, M. [1986]. *Composite aircraft design*. Curpetino, U.S.A.

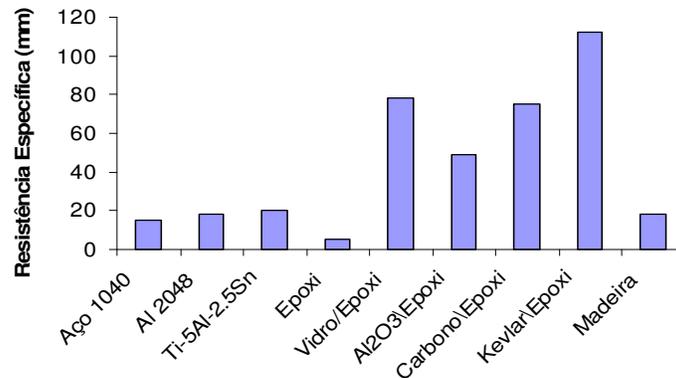


Figura 2.7: Gráfico comparativo entre alguns Materiais Compósitos e Ligas Metálicas.

A utilização de fibras leves e resistentes como reforço nos compósitos confere, aos mesmos, alta rigidez e alta resistência com baixa densidade, quando comparados aos materiais metálicos tradicionais. Na Figura 2.8 apresenta-se outra tabela que compara alguns compósitos poliméricos reforçados por fibra de vidro com alguns metais, largamente utilizado, segundo ensaios normalizados pela ASTM.

Segundo McCULLOUGH² apud MAGAGNIN FILHO [1996], compósitos de carbono/epóxi com 30% em fibra e vidro/epóxi com 60% em fibra tem uma rigidez muito próxima a maioria das ligas de alumínio, que tem densidade maior do que ambos os compósitos. McCULLOUGH afirma ainda que a mesma comparação é válida entre aço e o compósito carbono/epóxi e boro/epóxi, ambos com 60 % em fibra, o que evidencia as vantagens dos materiais compósitos poliméricos em relação aos metais estruturais usuais. Uma outra característica destas comparações é o peso destes compósitos em relação ao peso dos metais.

² McCULLOUGH, R.L. [1971]. *Concepts of fiber-resin composites*. New York, Marcel Dekker, Inc.

Material	Propriedade	Fibra de Vidro Por Peso	Resistência à Flexão	Módulo de Flexão	Resistência à Compressão	Resistência ao Impacto IZOD	Resistência à Tração	Módulo de Tração	Alongamento	
	Unidades	%	10 ³ psi	10 ⁶ psi	10 ³ psi	pe-ll-poi encunado a 73°F	10 ³ psi	10 ⁶ psi	%	
	Método de Teste ASTM		D790	D790	D695	D256	D638	D638	D638	
Termofixos Reforçados com Fibra de Vidro	Poliéster SMC (Compressão)	30,0	26,00	1,60	24,00	16,00	12,00	1,70	1,0	
	Poliéster SMC (Compressão)	20,0	16,00	1,40	23,00	8,20	5,30	1,70	0,4	
	Poliéster SMC (Compressão)	50,0	45,00	2,00	32,00	19,40	23,00	2,27	1,7	
	Poliéster SMC (Compressão)	22,0	12,80	1,58	20,00	4,26	6,00	1,75	0,5	
	Poliéster BMC (Injeção)	22,0	12,45	1,44	—	2,89	4,86	1,53	0,5	
	Epoxi (Enrolamento)	80,0	100,00	5,00	45,00	45,00	80,00	4,00	1,6	
	Poliéster (Pulverizado)	55,0	30,00	1,60	30,00	25,00	30,00	2,50	—	
	Poliuretano, Fibras Moladas (FRSM)	13,0	—	0,037-0,053	—	—	—	2,80	—	140,0
	Poliuretano, Escamas de Vidro (FRIM)	23,0	—	0,15	—	2,10	4,41	—	—	38,9
	Poliéster (A Pistola Manual)	30,0	28,0	0,75	22,00	13,00-15,00	12,50	1,00	—	1,3
Termoplásticos Reforçados com Fibra de Vidro	Poliéster, Tecido (Manual)	50,0	46,00	2,25	27,00	33,00	37,00	2,25	1,6	
	Acetal	25,0	28,00	1,10	17,00	1,80	18,50	1,25	3,0	
	Nylon 6	30,0	29,00	1,11	24,00	2,20	24,00	1,05	3,0	
	Nylon 6/6	30,0	35,00	0,80	26,50	2,20	23,00	1,20	1,9	
	Polycarbonato	10,0	16,00	0,60	14,00	2,00	12,00	0,75	9,0	
	Polipropileno	20,0	8,50	0,52	25,00	1,10	6,50	0,54	3,0	
	Sulfato de Polifenileno	40,0	37,00	1,90	21,00	1,50	22,00	2,05	3,0	
	Acrílonitrila Butadieno Estireno (ABS)	20,0	15,50	0,87	14,00	1,20	11,00	0,90	2,0	
	Oxido de Polifenileno (PPO)	20,0	18,50	0,75	17,60	1,80	14,50	0,92	5,0	
	Poliestireno Acrilonitrila (SAN)	20,0	19,00	1,10	17,50	1,10	14,50	1,25	1,8	
Termoplásticos Não-Reforçados	Poliéster (PET)	30,0	28,00	1,17	18,00	1,80	19,00	1,20	4,0	
	Poliéster (PET)	30,0	32,00	1,25	25,00	1,80	21,00	1,30	6,6	
	Acetal	—	13,00	0,38	16,00	1,00	8,80	0,41	40	
	Nylon 6	—	15,70	0,39	13,00	0,60	11,80	0,38	30	
	Nylon 6/6	—	17,00	0,42	15,00	0,80	11,50	0,40	60,0	
	Polycarbonato	—	13,50	0,34	12,50	16,00	9,50	0,34	110,0	
	Polipropileno	—	5,00	0,13-0,20	3,50	1,30	5,00	0,10	200,0	
	Sulfato de Polifenileno	—	14,00	0,55	16,00	0,50	9,50	0,48	1,0	
	Acrilonitrila Butadieno Estireno (ABS)	—	11,00	0,35-0,40	10,00	3-6	6,00	0,30	5,0	
	Oxido de Polifenileno (PPO)	—	12,80	0,33-0,40	12,00	5,00	7,80	0,38	50,0	
Metais	Poliestireno Acrilonitrila (SAN)	—	14,00	0,55	14,00	0,30-0,45	9,50	0,40	0,5	
	Poliéster (PET)	—	12,00	0,33-0,40	8,60	0,80	8,20	0,28	50,0	
	Poliéster (PET)	—	14,00	0,35-0,45	11,00	0,25-0,65	8,50	0,40	50,0	
	Aço (Laminado a Frio) ASTM A-606 HSLA	—	—	—	65,00	—	65,00	30,00	22,0	
	Aço com Baixo Teor de Carbono (Laminado a Frio) SAE 1008	—	—	—	48,00	—	48,00	30,00	37,0	
	Aço Inoxidável AISI 304	—	—	—	80,00	—	80,00	28,00	40,0	
	Alumínio (Forjado) TA 2036	—	—	—	49,00	—	49,00	10,20	23,0	
	Alumínio (Fundido) ASTM B85	—	—	—	48,00	—	48,00	10,30	2,5	
	Magnésio (Fundido) ASTM AZ91E	—	—	—	33,00	—	33,00	65,00	3,0	
	Zinco (Fundido) ASTM AG40A	—	—	—	41,00	—	41,00	10,90	10,0	

Figura 2.8: Comparação das Propriedades Mecânicas de alguns Compósitos Poliméricos Reforçados por Fibra de vidro, com Metais mais usuais. [Adaptado do Catalogo da Owers Corning, 2003].

Ao analisar a tabela anterior, conclui-se que os compósitos possuem uma alta eficiência se comparados com os metais estruturais convencionais, ou melhor, baixo peso e boas propriedades de rigidez e resistência. De acordo com NOTON [1987], as aplicações dos diferentes processos de manufatura e alto desempenho dos compósitos estruturais reforçados por fibras são provas de suas vantagens sobre os materiais estruturais mais usados. Porém, em alguns casos, estas vantagens não são obtidas por um único tipo de fibra como reforço; uma combinação com diferentes tipos de fibras (Compósitos Híbridos) é necessária para conseguir as propriedades de projeto exigidas. De modo geral, as outras vantagens dos compósitos são:

- ✚ Possuem um aspecto Multifuncional que satisfaz as diversas exigências de projeto;
- ✚ A economia de peso é significativa, freqüentemente, varia de 25% a 50% em relação aos metais convencionais;
- ✚ Possuem alta rigidez torcional, que é a principal exigência em projetos de vários elementos, necessária em veículos e aeronaves;
- ✚ Excelente resistência à corrosão;
- ✚ Ótima tenacidade à fratura e resistência à fadiga;
- ✚ Flexibilidade geométrica com baixos custos;
- ✚ Baixa expansão térmica, relacionada com a escolha da matriz, da fibra e da orientação desta;

Mesmo com todas as vantagens supracitadas, existem alguns fatores que podem retardar a efetiva aceitação destes materiais. Dentre estes fatores pode-se citar:

- ✚ O custo do material é inibidor para algumas aplicações de produção em grande escala;
- ✚ Alguns processos de manufatura são complexos e de alto custo, conforme figura 2.9;
- ✚ O conhecimento insuficiente, sobre a real resposta a solicitações de impacto e fadiga, reflete na confiabilidade dos componentes fabricados;

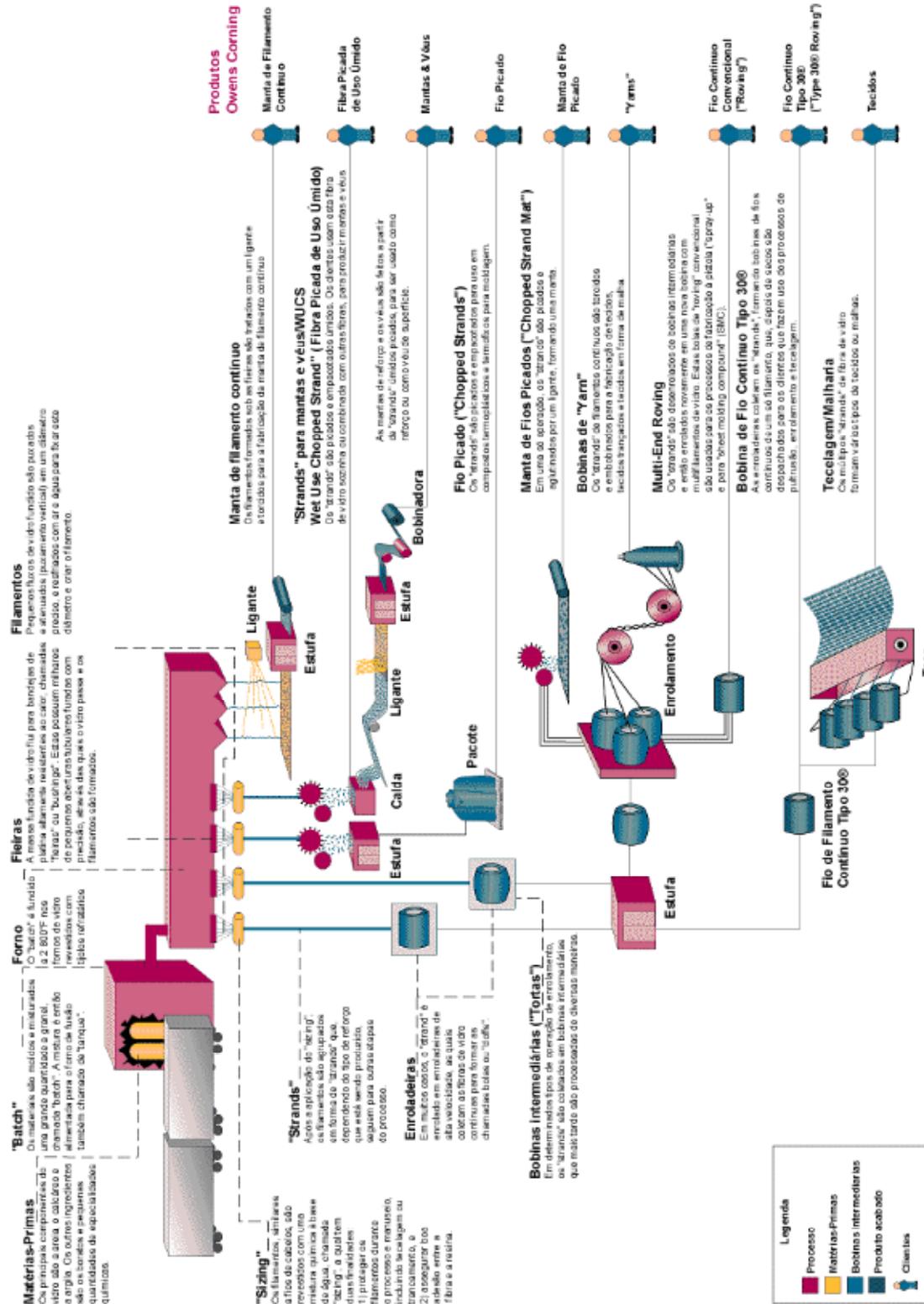


Figura 2.9: Processo de Fabricação de fibras.

O avanço tecnológico da produção e da manufatura destes materiais influencia diretamente no custo de produção deste, sendo inversamente proporcional a este, ou seja, quanto maior for a evolução tecnológica nestes eventos menor será o custo da produção em grande escala. Inerente ao avanço tecnológico, há um constante desenvolvimento de modelos matemáticos mais precisos para o estudo da resposta do material quando solicitado em condições adversas, que de fato são uma importante contribuição para ampliar as possibilidades de aplicações estruturais dos compósitos.

2.1.5 Algumas Aplicações

Segundo REZENDE & BOTELHO [2000], após décadas de uso restrito em setores bem específicos, devido ao elevado custo de obtenção, os materiais compósitos poliméricos estruturais, também denominados avançados, têm notoriamente ampliado a sua faixa de utilização em diferentes setores de indústria moderna. Atualmente estes materiais tem sido utilizados nas indústrias automotiva, biomédica, de construção civil, aeroespacial, de artigos esportivos, de utensílios domésticos, dentre outros.

Em particular na industria aeroespacial, o crescente uso de polímeros reforçados por fibras de carbono deve-se, principalmente, ao constante desafio que esta indústria enfrenta no desenvolvimento de componentes que exibam os maiores valores de resistência mecânica e de rigidez específicas entre os materiais disponíveis. A substituição das ligas de alumínio aeronáuticas por compósitos poliméricos estruturais, por exemplo, permite uma redução de 20% 30% do peso, além de 25% na redução do custo final de obtenção das peças.

Atualmente, os compósitos de fibras contínuas com matriz termofixas estão sendo utilizados na obtenção de diversos componentes na industria aeronáutica, tais como: elementos internos; elementos externos; nas nervuras de asas; em trens de pouso, nos radomes (nariz do avião), flaps, bordos de ataque, sistema de freios de aeronaves supersônicas militares e civis, entre outras.

Os compósitos termoplásticos reforçados por fibras contínuas tem tido o seu uso ampliado no setor aeroespacial, segundo algumas propriedades: melhor resistência à fadiga; maior resistência ao impacto e ao fogo; baixa

absorção de umidade; possuem temperatura de serviço menos elevada; possuem grande versatilidade na produção em série, exibindo propriedades mecânicas iguais ou superiores às apresentadas pelos compósitos termofixos. Na indústria aeronáutica os usos dos compósitos termoplásticos é promissor na confecção da fuselagem, permitindo uma redução de peso em torno de 25%, em relação as estruturas metálicas convencionais.

No setor de transporte, a tendência mundial mostra que a indústria automotiva a médio e longo prazo será a maior usuária dos compósitos poliméricos reforçados por fibras. Contudo, esta possibilidade só ocorrerá se o preço dos compósitos de fibra de carbono e fibra de vidro apresentam preços competitivos com o alumínio e o aço. A confecção de chassis e carrocerias, principalmente pelo processo de moldagem por transferência de resina (*Resin Transfer Molding - RTM*), podendo ainda ser aplicado na manufatura do tanque de combustível, pelo processo de bobinagem (*Filament Winding*). Hoje, esta indústria já faz uso de polímeros e de compósitos com fibras picadas na fabricação de componentes sem exigência estrutural primária.

Na indústria da construção civil, os compósitos são amplamente utilizados quer seja como material de reforço estrutural de edificações danificadas, quer seja como o material principal da estrutura. Os materiais compósitos reforçados por fibras são hoje uma das principais soluções para a confecção de estruturas leves e de alta eficiência estrutural.

No setor de eletrônicos, os compósitos poliméricos reforçados por fibras de carbono têm sido utilizados, também, em sistemas de antenas, devido às suas excelentes propriedades de reflexão de radio – frequência, alta estabilidade dimensional e boa condutividade elétrica. A aplicação deste material é ampliada às antenas parabólicas, a os sub-refletores e estruturas traseiras de emissoras de rádio – frequência. Já os compósitos com fibras de vidro e *Kevlar®* vem sendo utilizados como material transparente à radiação eletromagnética na faixa de microndas, sendo aplicados na manufatura de radomes de aeronaves, tendo como função proteger o radar de busca e geração de imagem, sem interferir na radiação emitida ou recebida pelo radar.

Na área medica os compósitos poliméricos têm encontrado aplicações em dois grupos: na confecção de aparelhos e em próteses ortopédicas externas e internas. Na construção de aparelhos, temos como exemplo, a

confeção de cadeiras de rodas feitas a partir de compósitos poliméricos reforçados por fibras de carbono com vantagens na redução de peso. Na confeção de próteses ortopédicas externas e internas, SHACKELFORD [1996] mostra que uma das aplicações bem sucedidas, no campo da medicina, é a utilização destes materiais como implante cirúrgico, em particular em próteses artificiais de quadril. As fibras de carbono têm um campo de aplicação promissor, devido à excelente compatibilidade como o tecido humano e devido a sua alta rigidez e resistência.

Na indústria de equipamentos esportivos, os compósitos poliméricos obtidos pelo processo de trançamento e/ou pultrusão (*Pultrusion*) têm sido utilizados na manufatura de artigos, tais como: varas de pescar; quadros de bicicletas; raquetes de tênis; mastros de veleiros, wind surf; dentre outros.

A pultrusão é o único processo contínuo para fabricação de compósitos de alto desempenho reforçados por fibras longas que possui algum significado industrial. É usado para produzir continuamente produtos de seção transversal constante e é capaz de produzir uma larga variedade de perfis sólidos e ocas. Um produto pultrusado consiste em materiais de reforço que são unidos por uma resina.

O processo consiste na tiragem de fibras impregnadas através de um molde pré-aquecido. Sob condições normais de processamento o calor é conduzido da parede ao centro do pultrudado, promovendo desta forma as reações de cura da matriz termorrígida. A estabilidade dimensional deve ser alcançada para que o compósito deixe o molde, desta forma, a resina deverá alcançar seu ponto de reticulação dentro do molde.

O molde, por sua vez, está, geralmente, dividido em três zonas: a primeira zona é onde a mistura resina/reforço entra no molde e produz o fluxo de retrocesso da resina que provoca um aumento na pressão. Na segunda zona, a resina é aquecida pela parede do molde e o aumento de pressão é causado pela expansão volumétrica da resina. No entanto, o sistema químico começa a reagir e curar a partir de um líquido viscoso convertendo-se num gel e logo num material de textura gomosa. Devido a este material ser um líquido viscoso, há geração de forças cortantes viscosas. À medida que a resina cura e se transforma num material sólido, na terceira zona a contração volumétrica faz com que as forças de pressão diminuam e o produto desmolda-se facilmente.

Na última zona, uma força de fricção é gerada entre a parede do molde e o compósito é solidificado antes que ocorra a contração total. Se a resina permanecer no estado gel por um longo tempo há uma grande possibilidade de que uma capa de resina se forme na parede do molde e deixem as fibras expostas à superfície do molde.

Reforços de fibra usados em pultrusão incluem vidro, aramida, fibras vegetais e carbono em várias formas; por exemplo: rovings, tecido e mantas. As matrizes usadas mais comuns são geralmente poliésteres insaturados e resinas fenólicas.

A ilustração esquemática da pultrusora e de seus componentes tais como: reforços, banho de resina, molde, aquecimento e aparagem podem ser vistos detalhadamente na figura 2.11.

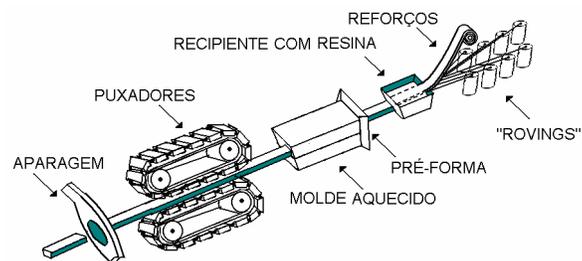


Figura 2.11: Representação esquemática de uma pultrusora.

O uso de compósitos obtidos pelo processo de bobinagem tem oferecido muitas vantagens nesta área, permitindo o projeto de tubos com características desejadas à aplicação, em função da escolha das fibras durante a bobinagem.

2.2 Mecânica do Dano

2.2.1 Histórico

O trabalho pioneiro que introduziu o conceito de Dano foi elaborado por KARCHANOV [1958]. Nesse trabalho procura-se justificar a ruptura, precocemente observada em relação ao esperado em metais em regime de

deformação lenta, como uma consequência da existência de defeitos no material. Para a consideração dos defeitos numa abordagem de meio contínuo, define-se uma variável escalar v , denominada então de continuidade, tal que apresenta localmente um valor unitário para um material completamente livre de defeitos, enquanto que $v=0$ caracteriza um material sem qualquer capacidade de carga. A quantidade complementar $D = (1 - v)$ é, por conseguinte, uma medida do estado local de deterioração ou dano. Para um material completamente livre de defeitos tem-se $D = 0$, enquanto $D = 1$ corresponde a um estado de completa perda de integridade da estrutura interna do material.

Enquanto KACHANOV [1958] assumiu D como uma variável de natureza escalar, estudos posteriores levaram à proposição de quantidades tensoriais para descrever o dano. Um outro trabalho importante é o de RABOTNOV [1969], que propôs a utilização da variável de dano como um redutor da rigidez inicial do material. Mais recentemente a chamada mecânica do Dano em Meios Contínuos (*Continuum Damage Mechanics*) foi formalizada por LEMAITRE & CHABOCHE [1985] com base numa metodologia fundamentada na termodinâmica dos processos irreversíveis.

Mais de 40 anos se passaram desde que L.M. Kachanov apresentou a primeira idéia de Mecânica do Dano (1958), seguido de vinte anos de intensas pesquisas que serviram de base para tentar responder algumas questões. Do ponto de vista histórico a mecânica do dano tornou-se interessante a partir da associação da evolução do dano com pequenas deformações, tanto elásticas como plásticas, segundo LEMAITRE [2000].

A propagação do dano foi primeiramente estudada nos anos 70 na interação das falhas a fadiga e nos danos dúcteis com plasticidade. Fadiga em baixo ciclo; danos em compósitos e em concreto foram o alvo destes estudos nos anos 80. Já nos anos 90 associou-se o dano em cerâmicas através de análise micromecânica. A partir de 2000 estes trabalhos foram fisicamente melhor compreendidos e rapidamente usados em análises estruturais.

O estado do dano médio é agora melhor compreendido mas a sua evolução necessitará de melhorias, particularmente após a descrição de iniciação de mesotrincas. A definição dos parâmetros de identificação do material, os quais são governados pelas equações constitutivas, necessitarão

certamente de um longo e subjetivo processo até serem postas, de fato no papel, conforme LEMAITRE [2000]. As condições iniciais dos materiais são conhecidas apenas por nomes, pelos efeitos da temperatura e as heterogeneidades são uma questão embaraçosa. É possível usar as equações constitutivas do dano como um pós – processador nas análises por elementos finitos em materiais elásticos ou elasto-plásticos, mas ao utilizar estas equações acopladas de deformação tem-se grandes dificuldades.

2.2.2 Definição e Introdução à Mecânica do Dano

A resposta não-linear dos sólidos, observada macroscopicamente, é uma manifestação de processos irreversíveis que ocorrem em sua microestrutura, tais como: escorregamento relativos entre cristais, perdas de coesão em planos de clivagem ou contornos de grãos, mudanças de porosidade, mudanças de fase, difusão de elementos químicos e outros. Alguns desses processos têm origem em microdefeitos constituídos por inclusões ou mesmo vazios, os quais, pelas suas características, favorecem a concentração de microtensões. Esses microdefeitos constituem o que se entende por dano inicial do material.

Dependendo das condições ambientais e devido à existência de solicitações mecânicas, mesmo que a resposta global do material se mantenha dentro dos limites do regime elástico, o dano inicial pode evoluir em consequência do rompimento das ligações entre os átomos ou por rupturas na interface entre componentes distintos. Macroscopicamente, esse processo de evolução do dano inicial, ou danificação, acaba tendo uma influência direta sobre as propriedades elásticas, conforme evidenciam as reduções de resistência e de rigidez. Já num estágio mais avançado de solicitação, a danificação leva à formação e ao crescimento de microfissuras, que se traduzem em parcelas adicionais de deformação permanentes.

Nos processos de plastificação dos metais, o dano não tem influência direta sobre o mecanismo em si, no sentido em que cada um dos fenômenos pode ser analisado de forma desacoplada. Entretanto, há uma dependência indireta entre eles, uma vez que a redução da área resistente devida a danificação pode alterar a velocidade de movimentação das discordâncias.

Assim, associando-se a cada um dos fenômenos uma variável representativa, a relação de dependência entre plasticidade e dano pode se estabelecer nas relações que exprimem a evolução daquelas variáveis (o dano, por exemplo, pode ser inserido na lei de evolução da variável de plasticidade), numa forma de acoplamento dita cinética.

A mecânica do dano em meios contínuos leva em conta os efeitos da degradação em modo difuso e progressivo de sólidos, submetidos a ações de natureza mecânica ou não – mecânica, por meio de redução das propriedades de resistência e rigidez do material. É importante notar desde logo a diferença em relação à mecânica da fratura. Enquanto que a mecânica da fratura lida com as condições de propagação de uma fissura macroscopicamente imersa num meio contínuo íntegro, a mecânica do dano se ocupa do efeito, sobre a resposta, de um processo de microfissuração distribuída que se desenvolve numa etapa preliminar à formação da fissura discreta. A teoria permite descrever localmente, observando-se um *volume representativo* do material em torno do ponto considerado, a evolução dos fenômenos que se desenvolvem entre estado inicial, relativo a uma situação de material íntegro, e um estado final, caracterizado pela formação de uma fissura macroscópica que equivale à ruptura do elemento de volume.

A maioria dos materiais ditos granulares tem no dano a razão básica de sua resposta não-linear. No caso do concreto, um material no qual a fissuração difusa é responsável de modo dominante pela resposta inicial não-linear, a mecânica do dano é sem dúvida capaz de formular modelos constitutivos bastante representativos, que se aplicam também à análise de estruturas em concreto armado, particularmente nos regimes de serviço nos quais a fissuração discreta apresenta-se em inúmeros casos com distribuição sistemática.

Não se pode considerar que o dano seja mensurável diretamente, pois procedimentos voltados para tal fim não são viáveis. Porém, como se verá, é possível quantificá-lo de forma indireta medindo-se a redução progressiva de uma propriedade mecânica global, como por exemplo, o módulo de elasticidade. No que se refere à transição de um estado de dano distribuído para uma fratura discreta, esta pode ser considerada como o resultado de um processo de localização do dano numa certa região de pequena largura do

meio, seguido de sua evolução numa faixa progressivamente mais estreita até a formação da descontinuidade. Em síntese, a diferença entre Mecânica do Dano e Mecânica da Fratura pode ser colocada, segundo JANSON & HULT [1977], da seguinte forma:

- ✚ na Mecânica do Dano a resistência de uma estrutura carregada é determinada em função da evolução de um campo de defeitos (micro-fissuras ou poros) considerado continuamente distribuído;
- ✚ na Mecânica da Fratura a resistência de uma estrutura carregada é determinada em função da evolução de um único defeito, como uma fissura pontiaguda pré-definida, num meio mecanicamente intacto.

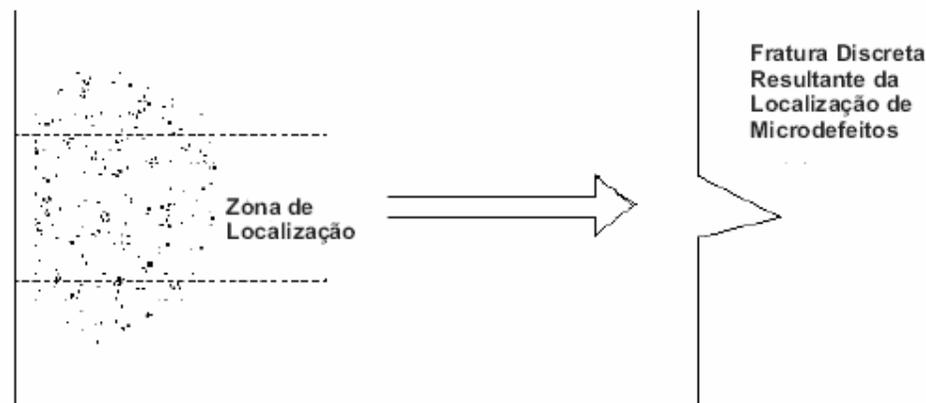


Figura 2.12: Processo de Transição entre o Dano e a Fratura, segundo DRIEMEIER [1995].

2.3 Aspectos Fenomenológicos do Dano

O dano em materiais é o processo físico progressivo devido à ruptura de ligações atômicas. A mecânica do dano é o estudo, através das variáveis mecânicas, dos mecanismos envolvidos nesta deterioração quando os materiais são submetidos a carregamentos. No nível micro – escalar, isto é, a

acumulação de micro – tensões na vizinhança dos defeitos ou interfaces e quebrando as ligações, ambos danificam o material. Ao nível de uma média escala do elemento de volume representativo há o crescimento e a junção de micro – trincas ou micro – lacunas que iniciam uma trinca. Ao nível macro – escalar é a propagação desta trinca. Os dois primeiros estágios podem ser estudados por meio de variáveis de danos da mecânica dos meios contínuos definidos em uma meso – escala. O terceiro estágio é geralmente estudado com variáveis definidas para o nível macroescalar.

Quando se estuda em engenharia e ciência de materiais, metais e suas ligas, polímeros, compósitos, cerâmicas, rochas, concretos e madeira. Existe uma surpreendente verificação, pois tais materiais, que têm diferentes estruturas físicas podem ser tão similares em seus comportamentos mecânicos. Todos mostram comportamento elástico, escoamento, como forma plástica ou tensão irreversível, anisotropia causada por tensão, voltas cíclicas de histerese, dano por carregamento uniforme ou por fadiga, e trincas com crescimento sob carregamentos estáticos e dinâmicos. Isto significa que as propriedades comuns a média escala, podem ser explicadas por alguns mecanismos de energia que são similares para todos estes materiais. Desta forma é possível explicar com sucesso o comportamento destes materiais, com a mecânica dos meios contínuos e a termodinâmica de processos irreversíveis. Deste modo pode-se modelar os materiais sem detalhar a complexidade de suas micro - estruturas físicas.

2.3.1 Natureza Física do Dano no Estado Sólido.

2.3.1.1 Átomos, Elasticidade e Dano

Todos os materiais são compostos por átomos, os quais são unidos por ligações que são o resultado da interação de campos eletromagnéticos. A elasticidade é diretamente relacionada ao movimento relativo dos átomos. O estudo físico das propriedades de um retículo atômico conduz à teoria da elasticidade, mas uma maneira muito mais fácil é escrever diretamente as equações matemáticas constitutivas no nível de média escala, usando

propriedades de reversibilidade de tensão, que implica um relacionamento um a um, e eventualmente incorporando a propriedades de linearidade e isotropia.

Quando ocorre uma quebra de ligação, isto inicia o processo de danificação. Por exemplo, os metais são organizados em cristais ou grãos: uma ordem regular de átomos exceto em algumas linhas de discordâncias onde faltam átomos. Se uma tensão de cisalhamento é aplicada, a discordância pode mover-se devido a mudança da natureza da ligação, assim criando uma tensão plástica por escorregamento de discordâncias, como mostra a Figura 2.16.

Se a discordância é parada por um microdefeito ou uma concentração de microtensão, é criada uma zona de contenção na qual outra discordância pode ser parada. Este segundo processo não pode ocorrer sem o dano por descolamento como mostrado na Figura 2.17. Onde em suas faces são nucleadas discordâncias que geram as microtrincas. Outro mecanismo de dano em metais é o descolamento intergranular que decorre de inclusões na matriz.

Todos estes mecanismos criam microdeformações plásticas.

- Nos polímeros, a danificação ocorre a partir da quebra de ligações que compõem as cadeias moleculares;
- Nos compósitos, dano e a separação entre a fibra e a matriz polimérica;
- Na cerâmica isso significa perda de coesão entre as inclusões e a matriz, em micro escala;
- No concreto, o mecanismo de dano primário é também uma perda de coesão entre cimento e agregados com uma influência complexa da água;
- Na madeira, o ponto fraco onde o dano ocorre são as ligações das células de celulose.

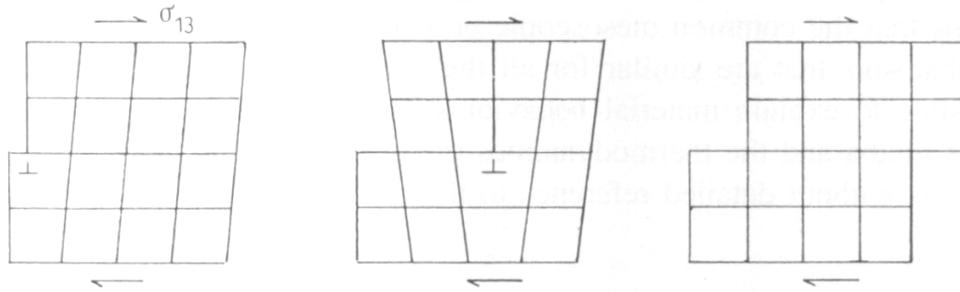


Figura 2.16: Tensão plástica elementar devido ao movimento da discordância (por J. Lemaître)

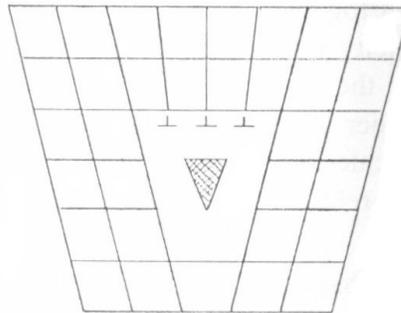


Figura 2.17: Dano Elementar por nucleação da microtrinca devido ao acúmulo de discordâncias (por D. Krajcinovic)

Em todos os casos a elasticidade é diretamente influenciada pelo dano, partindo do princípio de que o número de ligações atômicas são responsáveis pela diminuição da elasticidade com o dano. Esse acoplamento, que ocorre no estado do material definido aqui pela deformação elástica e o dano, é chamado um “estado de acoplamento”.

2.3.1.2 Deslizamentos, Plasticidade e Deformações Irreversíveis.

Plasticidade está diretamente relacionada aos deslizamentos. Nos metais, deslizamentos ocorrem pelo movimento de lacunas, como mostrado esquematicamente na Figura 2.16 ou pela elevação dessas lacunas. Em nenhum caso há uma variação relevante de volume. Em outros materiais, deformação irreversível pode ocorrer por diferentes mecanismos.

- Rearranjo de moléculas em polímeros;

- Microfraturas na cerâmica, onde a grande resistência de reticulado não implica o movimento de lacunas;
- Deslizamentos ao longo das superfícies de discordância no concreto;
- Rearranjo das células em madeira.

Elas podem induzir mudança de volume.

Em todos os casos, o dano influencia deformações plásticas e irreversíveis somente pelo fato de a área de resistência diminuir com o número de ligações. O dano não influencia o mecanismo de deslizamento por si só; isto é, não há estado de acoplamento. O acoplamento indireto que se deve a um aumento na tensão efetiva aparece somente na equação constitutiva cinética, é chamado de acoplamento cinético.

2.3.1.3 Escala do Fenômeno de Deformação e Dano

- Elasticidade toma lugar num nível atômico;
- Plasticidade é regida por deslizamentos em uma dimensão de cristais e moléculas;
- Dano é o desligamento em uma dimensão atômica para uma escala média até um início de fratura.

A mecânica do contínuo trabalha com quantidades definidas num aspecto matemático. Do ponto de vista físico, essas quantidades representam uma média num certo volume. O “elemento de volume representativo” deve ser pequeno o suficiente para evitar gradientes suaves ou abruptos, mas grande o bastante para representar uma média dos micro processos.

Para um propósito experimental na análise numérica são comumente consideradas as seguintes ordens de magnitude do elemento de volume representativo que é de escala meso mecânica.

- Metais e cerâmica $(0.1 \text{ mm})^3$;
- Polímeros e a maioria dos compósitos $(1 \text{ mm})^3$;

- Madeira (10 mm)³ ;
- Concreto (100 mm)³.

Outra importante propriedade a ser considerada é que o dano é sempre muito mais localizado que a deformação. Lembre-se de que o dano, ou desligamento de átomos, é restrito a uma superfície, enquanto as deformações, são movimentos de átomos por variação de suas distâncias ou por deslizamentos através de um volume. Se o dano existe em um plano simples numa escala média, não existe nenhuma maneira de ser estudado pela mecânica do contínuo clássica. Felizmente, o mais freqüente é que estes ocorram em vários planos numa microescala, mas sempre com um gradiente de espaço grande. A micromecânica ajuda bastante para a modelagem no comportamento do dano.

Concluindo:

- A microescala é usada para definir deformações e dano;
- A média escala é onde se escrevem as equações para análise mecânica;
- A macroescala é aquela para estruturas de engenharia.

2.3.1.4 Diferentes Manifestações de Dano

Mesmo o dano numa microescala sendo regido por um mecanismo geral de desligamento, numa média escala este pode se manifestar de várias maneiras dependendo da natureza do material, tipo de carregamento e temperatura.

Dano Frágil

O dano é chamado frágil quando a fratura se inicia numa média escala sem muita deformação plástica. Só para dar uma ordem de magnitude, vamos considerar que a razão entre deformação plástica e elástica seja menor que uma unidade:

$$\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_e} < 1 \quad (2.59)$$

Isso significa que as forças de clivagem são mais baixas que as forças necessárias para causar um deslizamento, porém são mais altas que as de ruptura. A densidade de defeitos é alta, um exemplo é dado na figura 2.18.

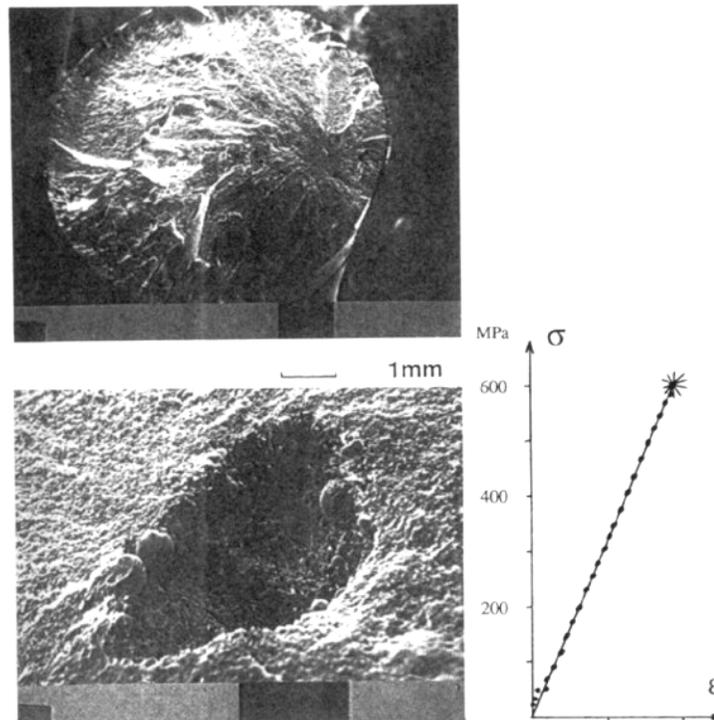


Figura 2.18: Fractografia mostrando danos de microtrincas em volta de uma inclusão cerâmica e ao lado a curva de tensão deformação até a ruptura (por F. Hild, 1996).

Dano Dúctil

Por outro lado, o dano é chamado dúctil quando ocorre simultaneamente com as deformações plásticas maiores que um ponto inicial p_D . Isso resulta do acúmulo de cavidades devido às discordâncias entre inclusões e a matriz seguido pelo crescimento e sua coalescência através do fenômeno de instabilidade plástica como uma consequência, o grau de localização do dano dúctil é comparado ao da deformação plástica, como exemplificado na Figura 2.19.

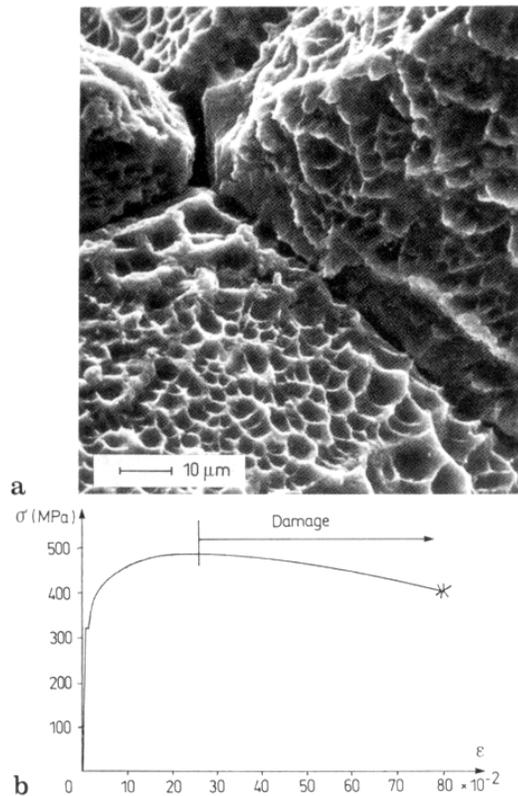


Figura 2.19: Fractografia mostrando danos de microcavidades nos contornos de grão de um aço e a curva tensão x deformação do AISI 1010 aço recozido (por, J. Dufailly, 1996).

Dano por Fluência

Quando um metal é carregado até elevada temperatura, por exemplo, uma temperatura acima 1/3 da temperatura de fusão, a deformação plástica envolve a viscosidade, que acontece por deformação constante. Quando a deformação é grande, há uma descoesão intergranular que produz um dano e um aumento da razão de deformação através do período de fluência acelerada. Como para dano dúctil, o gradiente de dano de fluência é similar para o gradiente de deformação visco-plástico. Um exemplo é mostrado na Figura 2.20.

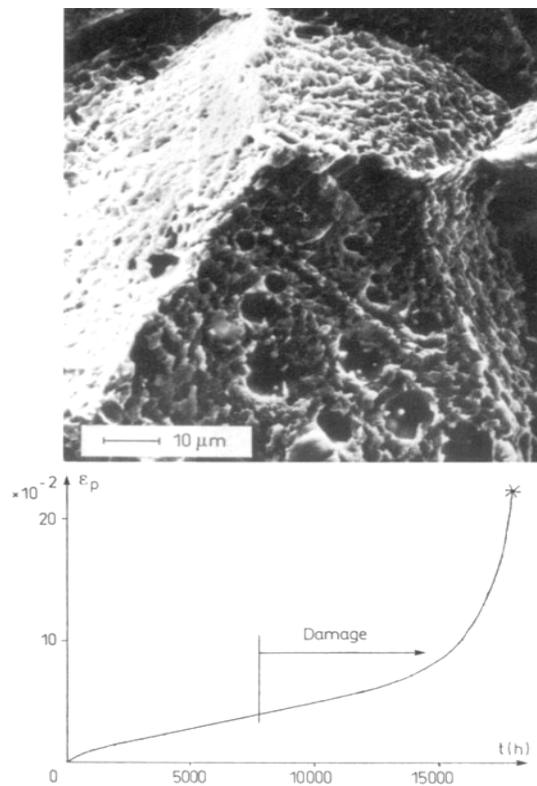


Figura 2.20: Mostra intergranular de danos por cavidade formada a 800°C em uma liga níquel-base (por, A. Benallal, 1996).

Dano por Fadiga de Baixo Ciclo

Quando um material é sujeito a um carregamento cíclico a elevados valores de tensão ou deformação, dano desenvolve juntamente com ciclo de deformação plástica, depois de um período de incubação precedendo a fase de

nucleação e propagação de microtrincas. O grau de localização do dano é mais alto para dúctil ou dano por fluência. Por causa dos altos valores para tensão, o baixo ciclo de fadiga é caracterizado por valores abaixo do número de ciclos para ruptura, N_R :

$$N_R < 10000 \text{ ciclos.}$$

Se o material é carregado por uma tensão, o dano induz uma queda da amplitude, como mostra a Figura 2.21, para duas voltas de tensão x deformação correspondente para o ciclo estabilizado e um ciclo fechado para a ruptura.

Dano por Fadiga de Alto Ciclo

Quando um material é carregado com baixos valores de tensão, a deformação plástica para o nível médio permanece pequena e é freqüentemente insignificante. Isto pode ser alto para alguns pontos na microescala, onde ocorre microtrincas transgranular somente em alguns planos e mais freqüentemente para as superfícies do corpo-de-prova pelo mecanismo de intrusão – extrusão. O número de ciclos para falhar pode ser muito grande:

$$N_R > 10000 \text{ ciclos}$$

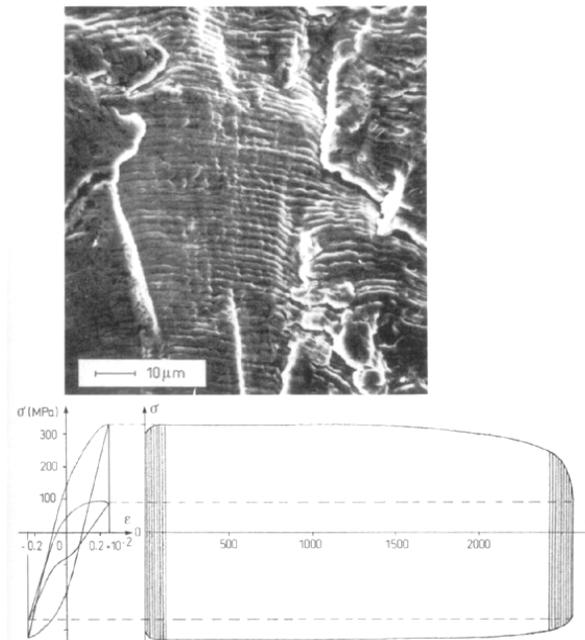


Figura 2.21: Fractografia mostrando estrias dúcteis do ciclo de fadiga em um aço austenítico e a curva do ciclo de tensão de compressão (por, J. Dufailly).

Como conseqüência, a localização dos danos é elevada e a queda de tensão no nível intermediário para uma experiência similar aquela da Figura 2.21 ocorre mais tarde na Figura 2.22.

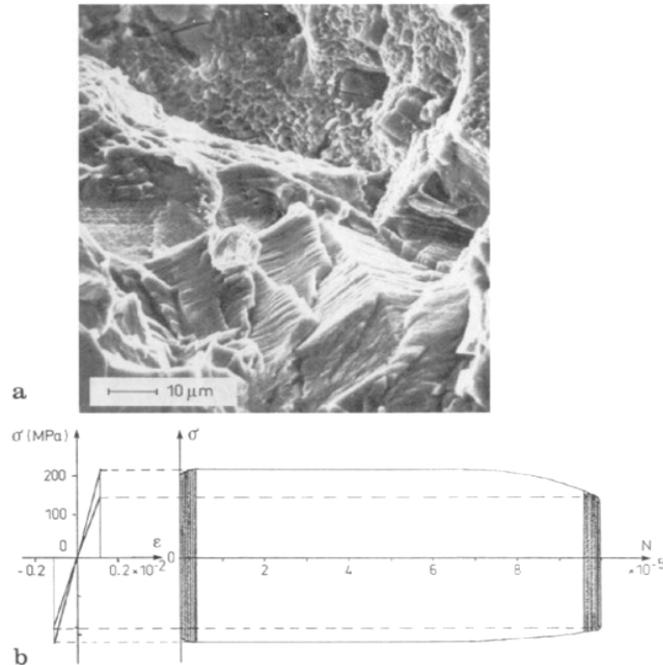


Figura 2.22 : Fractografia de uma fratura de fadiga transcristalina em uma liga de Níquel e a curva do ciclo de tensão por compressão pelo alto ciclo de fadiga (por, L. Engel e H. Klingele, 1996).

Note que para dano frágil e dano por fadiga de alto ciclo, uma curva tensão x deformação obtida de um teste clássico de tensão x compressão em que a escala intermediária não representa o “verdadeiro” comportamento para deformação e dano porque a localização do espaço induz micro vazios e zonas de dano muito menores que aquelas das experiências. Não obstante, isto é usado porque experimentos mecânicos para a micro escala são de difícil execução; mas deve-se ter em mente que os resultados são médias de quantidades não uniformes sobre um volume intermediário. O teste de microdureza pode ajudar para caracterizar um microvolume, como isso envolve um tamanho da ordem de microns, mas o estado de tensão é complexo.

3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

“E os que de ti procederem edificarão as antigas ruínas; e levantarás os fundamentos de geração em geração; e chamar-te-ão reparador das roturas, e restaurador de veredas para morar....”

(Isaías 58:12).

3.1. Constantes Elásticas dos Materiais Compósitos

3.1.1. Equações Constitutivas para Materiais Compósitos

Para os materiais Compósitos, pode-se definir um sistema de eixos ortogonais, dentro dos quais as propriedades mecânicas são identificadas. Um eixo designado 1 (ou l) é colocado longitudinalmente às fibras, outro designado 2 (ou t) é colocado transversalmente às fibras e um outro

designado 3 (ou t') é colocado ortogonalmente aos dois anteriores (JONES,1999).

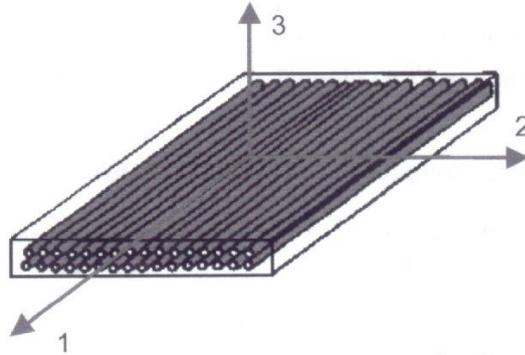


Figura 3.1. Sistema de eixos de ortotropia (JONES, 1999)

A lei de comportamento destes materiais relaciona a deformação com a tensão a partir da matriz de flexibilidade, dentro do sistema de eixos de ortotropia (1, 2,3), contém 9 constantes elásticas independentes, é da seguinte maneira:

$$\begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{matrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\nu_{21} & -\nu_{31} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\nu_{32} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} = \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{matrix} \quad (3.1)$$

onde:

ε_{ij} : Deformações normais na direção i;

γ_{ij} : Deformações angulares no primeiro plano ij;

σ_{ij} : Tensões normais na direção i;

τ_{ij} : Tensões de cisalhamento no plano ij;

ν_{ij} : Coeficiente de Poisson (deformações causadas na direção j devido a uma solitação na direção i);

E_i : Módulo de elasticidade na direção i;

G_{ij} : Módulo de cisalhamento no plano ij.

Como a matriz de comportamento é simétrica, tem-se que:

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2} \quad (3.2)$$

Para a demonstração da simetria da matriz de comportamento, considere uma placa unidirecional de dimensões a , b e espessura e :

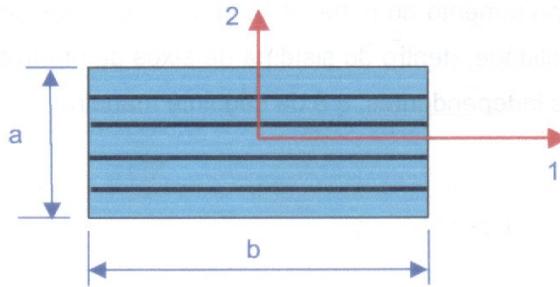


Figura 3.2. Ilustração de uma placa unidirecional de dimensões a , b , e espessura e . (Carlos J, P. C., 2000)

Deformações devidas a σ_1 (na direção longitudinal):

$$(\varepsilon_1)_1 = \frac{\Delta b_1}{b} = \frac{\sigma_1}{E_1}, \quad (\varepsilon_2)_2 = \frac{\Delta a_1}{a} = -\nu_{12}(\varepsilon_1)_1 = -\nu_{12} \frac{\sigma_1}{E_1} \quad (3.3)$$

Deformações devidas a σ_2 (na direção transversal):

$$(\varepsilon_2)_2 = \frac{\Delta a_2}{a} = \frac{\sigma_2}{E_2}, \quad (\varepsilon_1)_2 = \frac{\Delta b_2}{b} = -\nu_{21}(\varepsilon_2)_2 = -\nu_{21} \frac{\sigma_2}{E_2} \quad (3.4)$$

Considerando a energia acumulada devida ao carregamento σ_1 e depois a σ_2 , mantendo σ_1 :

$$W = \frac{1}{2}(\sigma_1 a e) \Delta b_1 + \frac{1}{2}(\sigma_2 b e) \Delta a_2 + (\sigma_1 a e) \Delta b_2 \quad (3.5)$$

Considerando agora a energia acumulada devido ao carregamento σ_2 e depois a σ_1 , mantendo σ_2 :

$$W' = \frac{1}{2}(\sigma_1 b e) \Delta a_2 + \frac{1}{2}(\sigma_1 a e) \Delta b_1 + (\sigma_2 b e) \Delta a_1 \quad (3.6)$$

Sendo a energia final a mesma, $W = W'$:

$$(\sigma_1 a e) \Delta b_2 = (\sigma_2 b e) \Delta a_1, \quad \sigma_1 a e \left(-\nu_{21} \frac{\sigma_2}{E_2} \right) b = \sigma_2 b e \left(-\nu_{12} \frac{\sigma_1}{E_1} \right) a \quad (3.7)$$

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1} \quad (3.8)$$

Segundo JONES (1999), em alguns casos, é possível considerar que as propriedades mecânicas nas direções 2 e 3 são idênticas, já que como mostrado pela Figura 3.1, estas direções são direções perpendiculares à direção 1. Para este caso de materiais, ditos isotrópicos transversos, a matriz de comportamento se simplifica, necessitando somente de 5 constantes elásticas independentes:

$$\begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{array} \Bigg|_x \begin{array}{ccccccc} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{12}}{E_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_2)}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \end{array} \Bigg| = \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{array} \quad (3.9)$$

onde:

ν_2 = coeficiente de Poisson no plano de isotropia transversa

Nota-se que, devida a isotropia transversa, $\frac{1}{G_{23}} = \frac{2(1+\nu_2)}{E_2}$.

A relação tensão deformação é dada pela matriz constitutiva do material, inversa da matriz de flexibilidade dada na eq. (3.1):

$$\begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{array} \Bigg| = \begin{array}{cccccc} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{array} \Bigg|_x \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{array} \quad (3.10)$$

onde os termos não nulos são:

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \frac{1 + \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & C_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} & C_{44} &= G_{23} \\
 C_{22} &= \frac{1 + \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & C_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & C_{55} &= G_{31} \\
 C_{33} &= \frac{1 + \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} & C_{23} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & C_{66} &= G_{12}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\text{com } \Delta = \frac{1 + \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$$

Considerando somente o estado plano de tensão (placas laminadas com $\sigma_{33} = 0$, $\tau_{23} = 0$ e $\tau_{13} = 0$), a matriz de rigidez do material composto pode ser freqüentemente encontrada da seguinte forma:

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{vmatrix} \tag{3.12}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{E_1}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \\
 Q_{22} &= \frac{E_2}{(1 - \nu_{12}\nu_{12})} \\
 Q_{12} &= \frac{\nu_{21} E_2}{(1 - \nu_{12}\nu_{12})} \\
 Q_{66} &= G_{12}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

3.1.2. Efeito da Temperatura

Segundo JONES (1999), quando se deseja levar em consideração os efeitos de variação de temperatura em estruturas de materiais compósitos, na lei de comportamento do material de ser considerando as deformações devido a este efeito:

$$\begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{matrix} \begin{matrix} x \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{E_1} & -\nu_{21} & -\nu_{31} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12} & \frac{1}{E_2} & -\nu_{32} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{E_1} & -\nu_{12} & -\nu_{32} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13} & -\nu_{23} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ E_1 & E_2 & E_3 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{vmatrix} = \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{matrix} + \Delta T \begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \quad (3.14)$$

onde α_1 é o coeficiente de dilatação térmica das fibras, α_2 é o coeficiente de dilatação térmica da resina e α_3 é o coeficiente de dilatação térmica da interface resina/fibra.

A forma inversa da relação anterior colocada de maneira compacta é:

$$\{ \sigma^1 \} = [C^1] \{ \varepsilon^1 - \varepsilon^1_t \} \quad (3.15)$$

3.2. Constantes Elásticas dos Materiais Compósitos numa Direção Qualquer

3.2.1 Equações Constitutivas dos Materiais Compósitos numa Direção Qualquer

Para a análise do comportamento mecânico de placas laminadas é necessário definir um sistema de eixos de referência (x,y,z) para o conjunto de lâminas e expressar as constantes elásticas de cada lâmina neste sistema de referência. Para isto é considerada uma lâmina sobre a qual estão definidos os eixos de ortotropia $(1,2,3)$. O sistema de eixos de referência é girado em torno do eixo 3 com ângulo θ .

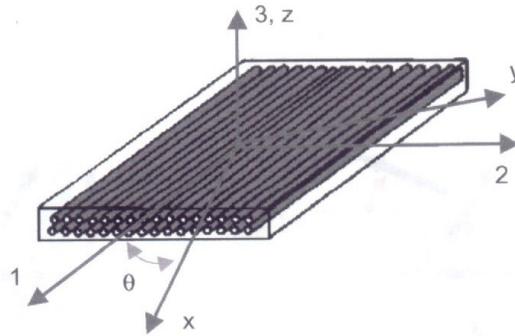


Figura 3.3. Sistema de eixo x de ortotropia e de referência (Carlos J, P. C., 2000)

Uma das maneiras de determinar a matriz de transformação, que relaciona as tensões dadas no sistema de eixos de referência com as tensões no sistema de eixos de ortotropia, é fazendo o balanço de forças nas direções x e y sobre um elemento plano, conforme mostrado na figura abaixo.

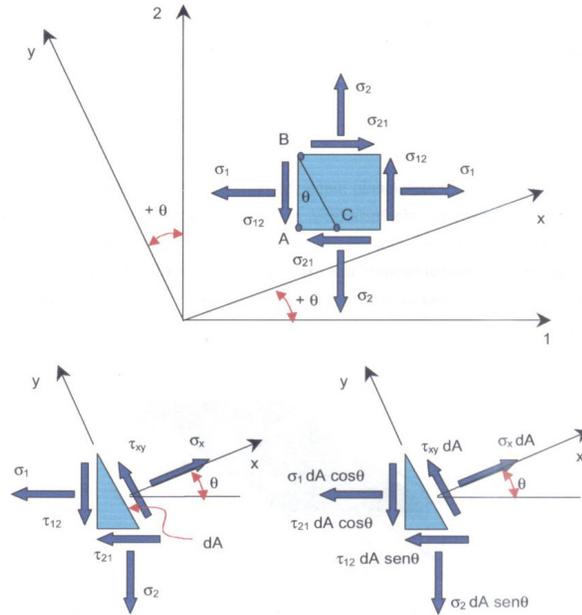


Figura 3.4. Balanço de forças nas direções x e y sobre um elemento plano. (Carlos J, P. C., 2000)

Aplicando as equações de equilíbrio estático:

$$\sum F_x = 0,$$

$$\sigma_x dA - \sigma_1 dA \cos \theta - \tau_{12} dA \cos \theta \operatorname{sen} \theta - \sigma_2 dA \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta - \tau_{12} dA \operatorname{sen} \theta \cos \theta = 0 \quad (3.16)$$

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \operatorname{sen}^2 \theta + 2\tau_{12} \cos \theta \operatorname{sen} \theta \quad (3.17)$$

$$\sum F_y = 0,$$

$$\tau_{xy} dA + \sigma_1 dA \cos \theta \operatorname{sen} \theta - \tau_{12} dA \cos \theta \cos \theta - \sigma_2 dA \operatorname{sen} \theta \cos \theta - \tau_{12} dA \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (3.18)$$

$$\tau_{xy} = -\sigma_1 \cos \theta \operatorname{sen} \theta + \sigma_2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \tau_{12} (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) \quad (3.19)$$

A tensão normal σ_{yy} é obtida fazendo $\theta = \theta + 90^\circ$ na equação para σ_{xx} .

$$\sigma_y = \sigma_1 \operatorname{sen}^2 \theta + \sigma_2 \cos^2 \theta - 2\tau_{12} \cos \theta \operatorname{sen} \theta \quad (3.20)$$

Considerando o elemento abaixo, podemos determinar a tensão σ_{xz} :

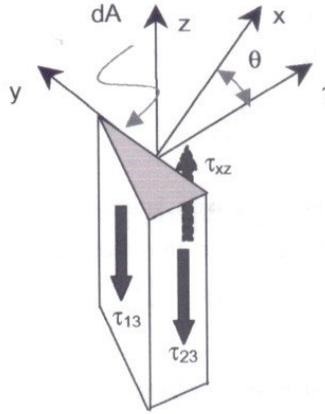


Figura 3.5. Elemento Esquemático. (JONES, 1999)

$$\sum F_z = 0,$$

$$\tau_{xy} dA - \tau_{13} dA \cos \theta - \tau_{23} dA \sin \theta = 0 \quad (3.21)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{23} dA \sin \theta - \tau_{13} dA \cos \theta \quad (3.22)$$

A tensão σ_{yz} é obtida fazendo $\theta = \theta + 90^\circ$ na equação para σ_{xz} .

$$\sigma_{yz} = \sigma_{23} \cos \theta - \sigma_{13} \sin \theta \quad (3.23)$$

A matriz de transformação [T], pode então ser escrita da forma:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 2sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -2sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -sc & sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} \quad x$$

$$\text{ou } \{\sigma^x\} = [T_\sigma] \{\sigma^1\} \quad (3.24)$$

O tensor de deformações medido no sistema de referência tem a mesma forma que o tensor de tensões dado no sistema de referência (x,y,z), ou seja:

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right| = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccccc} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -2sc & 2sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{array} \right| \end{array} \left| \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{array} \right| \end{array} \quad x$$

$$\text{ou } \{\varepsilon^x\} = [T_\varepsilon] \{\varepsilon^1\} \quad (3.25)$$

onde $[T_\varepsilon] = ([T_\sigma]^{-1})^t$ ou $[T_\varepsilon]^{-1} = [T_\sigma]^t$

Considerando o comportamento elástico linear, a lei de comportamento do material composto, expressa no sistema de eixos de referência (x,y,z), é da seguinte forma:

$$\{\sigma^x\} = [T_\sigma] \{\sigma^1\} = [T_\sigma] [C^1] \{\varepsilon^1\} = [T_\sigma] [C^1] [T_\varepsilon]^{-1} \{\varepsilon^x\} = [T_\sigma] [C^1] [T_\sigma]^t \{\varepsilon^x\} \quad (3.26)$$

Logo, a matriz de rigidez ou matriz constitutiva $[C^x]$, dada no sistema de eixos de referencia (x,y,z) é:

$$[C^x] = [T_\sigma] [C^1] [T_\sigma]^t \quad (3.27)$$

Considerado somente o estado plano de tensão (placas laminadas com $\sigma_{33} = 0$, $\tau_{23} = 0$ e $\tau_{13} = 0$), a matriz de rigidez do material composto obtida no sistema de eixos de referência é freqüentemente encontrada da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{63} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

com:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= c^4 Q_{11} + s^4 Q_{22} + 2c^2 s^2 (Q_{12} + 2Q_{66}) \\ Q_{22} &= s^4 Q_{11} + c^4 Q_{22} + 2c^2 s^2 (Q_{12} + Q_{66}) \\ Q_{66} &= c^2 s^2 (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12}) + (c^2 - s^2) Q_{66} \\ (3.29) \\ Q_{12} &= c^2 s^2 (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) + (c^4 + s^4) Q_{12} \\ Q_{16} &= -cs [c^2 Q_{11} - s^2 Q_{22} - (c^2 - s^2) (Q_{12} + 2Q_{66})] \\ Q_{23} &= -cs [s^2 Q_{11} - c^2 Q_{22} + (c^2 - s^2) (Q_{12} + 2Q_{66})] \end{aligned}$$

onde Q_{11} , Q_{12} , Q_{12} e Q_{66} são dados da na equação (3.13).

A matriz de flexibilidade $[S]$, que relaciona deformação x tensão, dada no sistema de eixos de referência (x,y,z) é:

$$\{\varepsilon\} = [T_\varepsilon] \{\varepsilon^1\} = [T_\varepsilon] [S^1] \{\sigma^1\} = [T_\varepsilon] [S^1] [T_\sigma]^{-1} \{\sigma^x\} = [T_\varepsilon] [S^1] [T_\varepsilon]^t \{\sigma^x\} \quad (3.30)$$

$$\text{ou} \quad [S^x] = [T_\varepsilon] [S^1] [T_\varepsilon]^t \quad (3.31)$$

Após a multiplicação de matrizes, a matriz de flexibilidade pode ser expressa da seguinte maneira (GAY, 1991).

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & \frac{\eta_{xy}}{G_{xy}} \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & \frac{\mu_{xy}}{G_{xy}} \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & \frac{\zeta_{xy}}{G_{xy}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & \frac{\xi_{xz}}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\xi_{yz}}{G_{yz}} & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Observa-se que surgem termos de acoplamento que relacionam tensões de cisalhamento com deformações normais: η_{xy}/G_{xy} , μ_{xy}/G_{xy} , ζ_x/G_{xy} ; e termos de acoplamento que relacionam tensões normais com deformações angulares η_x/E_x , μ_y/E_x , ζ_z/E_z . Estes termos surgem quando, por exemplo, aplicando uma tensão normal, a lamina se deforma de seguinte maneira:

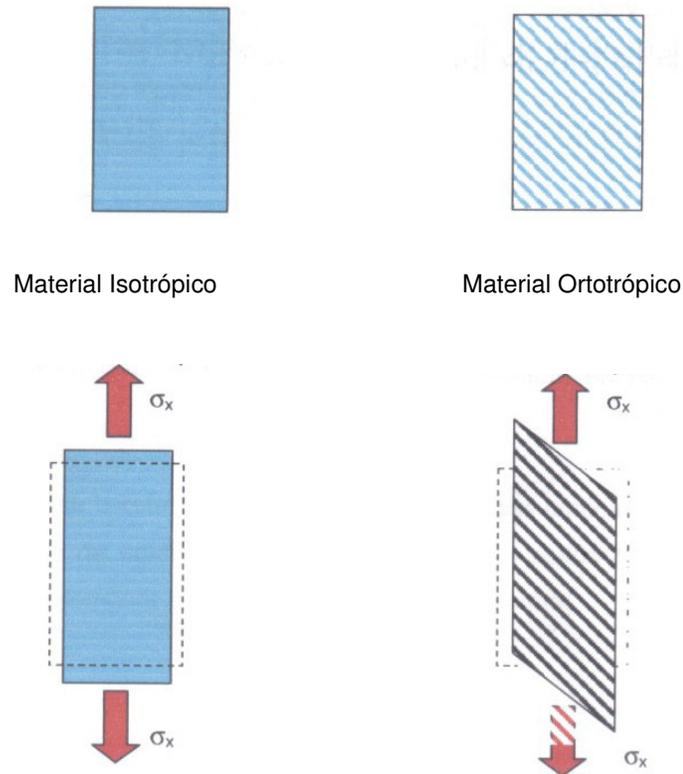


Figura 3.6. Modos de deformação. (Carlos J, P. C., 2000)

3.2.2. Efeito da Temperatura

Segundo JONES (1999), o efeito da temperatura sobre os materiais Compósitos considerados em uma direção qualquer é dado da forma:

$$\{\varepsilon_i^x\} = [T_\varepsilon]\{\varepsilon^1\} \quad (3.33)$$

ou seja:

$$\begin{matrix} \varepsilon_{xt} \\ \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \\ \gamma_{yzt} \\ \gamma_{xzt} \\ \gamma_{xyt} \end{matrix} = \begin{matrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -2sc & 2sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{matrix} \begin{matrix} \Delta T \alpha_1 \\ \Delta T \alpha_2 \\ \Delta T \alpha_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \quad (3.34)$$

A relação tensão deformação considerando o efeito da temperatura, dada no sistema de eixos de referência (x,y,z) pode ser obtida pela equação (3.34) e utilizando a matriz de transformação dada pelas eqs. (3.24) ou (3.25):

$$[T_\sigma]\{\sigma^1\} = [T_\sigma] [C^1] \{\varepsilon^1 - \varepsilon_i^1\} = [T_\sigma] [C^1] T_\varepsilon^{-1} \{\varepsilon^1 - \varepsilon_i^x\} = [T_\sigma] [C^1] [T_\sigma]^t \{\varepsilon^x - \varepsilon_i^x\} \quad (3.35)$$

Ou seja:

$$\{\sigma^x\} = [C^x] \{\varepsilon^x - \varepsilon_i^x\} \quad (3.36)$$

A relação tensão x deformação considerando somente o estado plano de tensão é do tipo:

$$\begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{matrix} = \begin{matrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{63} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{matrix} \begin{matrix} \varepsilon_x - \varepsilon_{xt} \\ \varepsilon_y - \varepsilon_{yt} \\ \gamma_{xy} - \gamma_{xyt} \end{matrix} \quad (3.37)$$

3.3. Comportamento Mecânico de Placas Laminadas

Os materiais Compósitos são na maioria dos casos utilizados na forma de laminados, onde as lâminas são coladas umas sobre as outras com orientações e espessura das fibras podendo ser diferentes uma das outras. No caso de placas, uma dimensão é muito pequena com relação às outras duas. Em consequência disto, a tensão normal na direção da espessura da placa é considerada desprezível ($\sigma_z=0$).

As deformações são determinadas em função do campo de deslocamentos definido para o laminado. Na teoria clássica de laminados, na definição do campo de deslocamentos, o cisalhamento transversal é considerado nulo ($\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$). Na teoria de primeira ordem, na definição do campo de deslocamentos, o cisalhamento transversal é considerado não nulo ($\sigma_{xz} \neq 0, \sigma_{yz} \neq 0$), porém constante ao longo da espessura da placa.

3.3.1. Teoria Clássica de Laminados

Da definição do campo de deslocamento na teoria clássica de laminados, o cisalhamento transversal é considerado nulo, o que resulta num estado plano de tensão, onde as únicas tensões não nulas são: σ_x , σ_y , σ_{xy} .

3.3.1.1. Comportamento em Membrana

No estudo do comportamento em membrana dos materiais Compósitos é considerado um laminado de espessura total h com n lâminas de espessura e_k cada uma. As solicitações no plano do laminado são denotadas N_x , N_y (forças normais por unidade de comprimento transversal); T_{xy} e T_{yx} (forças cisalhantes por unidade de comprimento transversal). Os eixos x , y e z são eixos de referência, conforme visto no item 3.

Os esforços N_x , N_y , T_{xy} e T_{yx} são determinados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 N_x \cdot 1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x (dz \cdot 1) = \sum_{k=1}^n \sigma_x^k h_k \\
 N_y \cdot 1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y (dz \cdot 1) = \sum_{k=1}^n \sigma_y^k h_k \\
 N_{yx} \cdot 1 &= N_{xy} \cdot 1 \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} (dz \cdot 1) = \sum_{k=1}^n \tau_{xy}^k h_k
 \end{aligned}
 \tag{3.38}$$

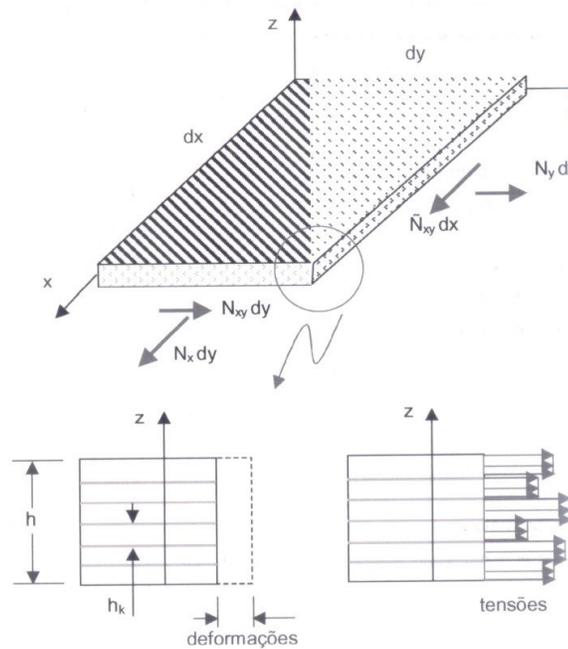


Figura 3.7. Distribuição de tensões. (JONES, 1999)

Considerando que os deslocamentos na direção x e y são u e v , respectivamente, as deformações normais e angulares correspondentes a estas solicitações são:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
 \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
 \gamma_{yx} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}
 \end{aligned}
 \tag{3.39}$$

As tensões σ_x , σ_y , σ_{xy} são obtidas no sistema de eixos de referencia x, y e z, e estão relacionadas com as deformações pela matriz de rigidez, eq. (3.28). Considerando somente os esforços de membrana, os esforços N_x , N_y e T_{xy} são determinados em função das constantes elásticas de cada lâmina:

$$N_x = \sum_{k=1}^n \{Q_{11}^k \varepsilon_x + Q_{12}^k \varepsilon_y + Q_{16}^k \gamma_{xy}\} h_k \quad (3.40)$$

que de maneira mais compacta pode ser escrito:

$$N_x = A_{11} \varepsilon_x + A_{12} \varepsilon_y + A_{16} \gamma_{xy} \quad (3.41)$$

onde:

$$A_{11} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{11}^k h_k$$

$$A_{12} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{12}^k h_k$$

(3.42)

$$A_{16} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{16}^k h_k$$

De maneira análoga:

$$N_y = A_{21} \varepsilon_x + A_{22} \varepsilon_y + A_{26} \gamma_{xy}$$

(3.43)

com:

$$A_{2j} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{2j}^k h_k \quad (3.44)$$

$$N_{xy} = A_{61} \varepsilon_x + A_{62} \varepsilon_y + A_{66} \gamma_{xy} \quad (3.45)$$

com:

$$A_{6j} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{6j}^k h_k \quad (3.46)$$

Exprimindo os esforços N_x , N_y , T_{xy} em forma matricial, temos:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

com:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^k h_k \quad (3.48)$$

Observações:

- As expressões acima são independentes da ordem de empilhamento das lâminas.
- Os termos de acoplamento A_{16} , A_{26} , A_{61} , A_{62} se anulam quando o laminado é simétrico e equilibrado (mesmo número de lâminas de mesma espessura na direção $+\theta$ e $-\theta$) ou anti-simétrico.

A partir dos esforços N_x , N_y e T_{xy} , pode-se determinar as tensões globais (fictícias), considerando o laminado como sendo homogêneo:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{h}$$

$$\sigma_y = \frac{N_y}{h}$$

(3.49)

$$\tau_{xy} = \frac{N_{xy}}{h}$$

A lei de comportamento em membrana do laminado “homogêneo” é da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

Os componentes da matriz de comportamento acima podem também ser apresentados em termos de porcentagem de lâminas numa mesma orientação em relação à espessura total (JONES,1999).

$$\frac{1}{h} A_{ij} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^k \frac{h_k}{h} \quad (3.51)$$

Da inversão da matriz de comportamento acima, Obtêm-se as constantes elásticas aparentes ou homogeneizadas do laminado.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{E}_x} & \frac{-\bar{\nu}_{yx}}{\bar{E}_y} & \frac{\bar{\eta}_{xy}}{\bar{G}_{xy}} \\ \frac{-\bar{\nu}_{xy}}{\bar{E}_x} & \frac{1}{\bar{E}_y} & \frac{\bar{\mu}_{xy}}{\bar{G}_{xy}} \\ \frac{\bar{\eta}_{xy}}{\bar{E}_x} & \frac{\bar{\mu}_{xy}}{\bar{E}_y} & \frac{1}{\bar{G}_{xy}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

A partir destas constantes elásticas, conhecido o carregamento do laminado (N_x, N_y, N_{xy}) é possível determinar as deformações.

3.3.1.2. Comportamento em Flexão

No estudo do comportamento em flexão dos materiais Compósitos é considerado um laminado de espessura total h com n lâminas de espessura e_k cada uma. As solicitações no laminado são denotadas M_x , M_y (momentos fletores por unidade de comprimento). Os eixos x , y e z são novamente eixos de referência.

Os esforços M_x , M_y , M_{xy} , M_{yx} são determinados da seguinte maneira:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x (dz)z$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y (dz)z \quad (3.53)$$

$$M_{yx} = M_{xy} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} (dz)z$$

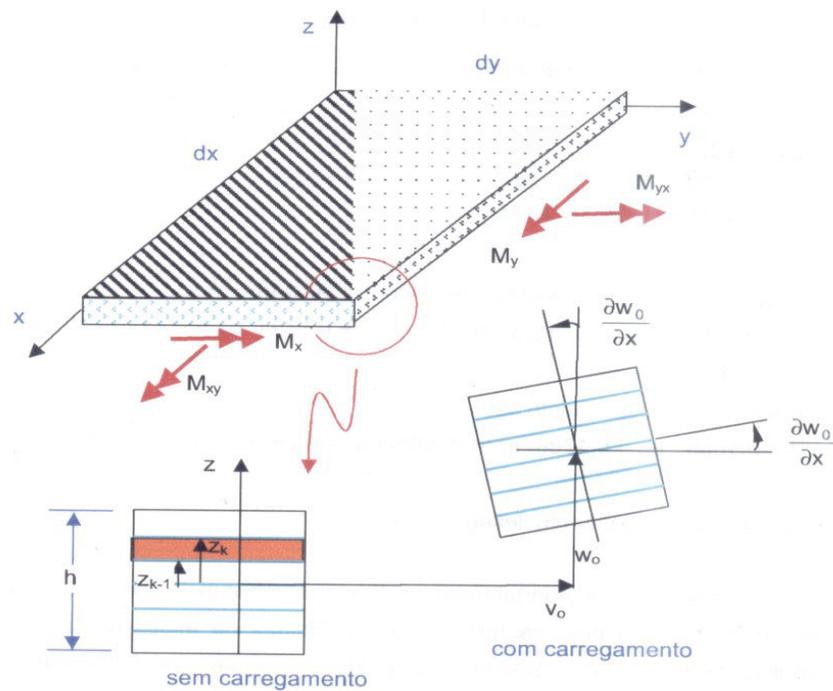


Figura 3.8. Modelagem matemática (Carlos J, P. C., 2000).

Os deslocamentos nas direções x , y , e z da superfície neutra são u_0 , v_0 e W_0 são definidos como segue:

$$\begin{aligned} u &= u_0 - Z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v &= v_0 - Z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w &= w_0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

e as deformações normais e angulares são:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 - Z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 - Z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 - Z 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (3.55)$$

As deformações ε_x^0 , ε_y^0 e γ_{xy}^0 ocorrem na linha neutra. As curvaturas são normalmente escritas da forma: $-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = k_x$, $-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = k_y$, $-2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = k_{xy}$ logo as deformações podem ser redefinidas como segue:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 - Z k_x \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 - Z k_y \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 - Z 2 k_{xy} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Considerando a matriz de comportamento de cada lâmina no sistema de eixos de referência, os momentos são de forma:

$$\mathbf{M}_x = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left(\bar{Q}_{11}^k \varepsilon_x + \bar{Q}_{12}^k \varepsilon_y + \bar{Q}_{16}^k \gamma_{xy} \right) z dz \right\} \quad (3.57)$$

que, levando em conta as deformações, dadas pela eq. (4.26):

$$\mathbf{M}_x = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left(\bar{Q}_{11}^k (\epsilon_x^0 + z^2 k_x) + \bar{Q}_{12}^k (\epsilon_y^0 + z^2 k_y) + \bar{Q}_{16}^k (\gamma_{xy}^0 + z^2 k_{xy}) \right) dz \right\} \quad (3.58)$$

Se considerarmos que o laminado é simétrico, as integrais do tipo $\int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{Q}_{1j}^k z dz$, se anulam com as integrais $\int_{-z_k}^{-z_{k-1}} \bar{Q}_{1j}^k z dz$, consideradas para as lâminas simétricas com relação à superfície neutra, logo:

$$\mathbf{M}_x = \sum_{k=1}^n \left\{ \bar{Q}_{11}^k \frac{(z_k^3 + z_{k-1}^3)}{3} k_x + \bar{Q}_{12}^k \frac{(z_k^3 + z_{k-1}^3)}{3} k_y + \bar{Q}_{16}^k \frac{(z_k^3 + z_{k-1}^3)}{3} k_{xy} \right\} \quad (3.59)$$

que de forma mais compacta, pode ser colocado:

$$\mathbf{M}_x = D_{11} k_x + D_{12} k_y + D_{16} k_{xy} \quad (3.60)$$

com:

$$D_{1j} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{1j}^k \frac{(z_k^3 + z_{k-1}^3)}{3} \quad (3.61)$$

Os momentos M_y e M_{xy} podem ser também obtidos de forma análoga. Assim, colocadas em forma matricial, as expressões de momentos são:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{M}_x \\ \mathbf{M}_y \\ \mathbf{M}_{xy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{vmatrix} \quad (3.62)$$

com:

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^k \frac{(z_k^3 + z_{k-1}^3)}{3} \quad (3.63)$$

Observações:

- As expressões acima dependem da ordem de empilhamento das lâminas.
- Os coeficientes D_{16} e D_{26} são termos de acoplamento que torcem o laminado quando aplicados somente momentos de flexão e os coeficientes D_{61} e D_{62} são termos de acoplamento que estendem o laminado quando aplicados somente momentos de torção.

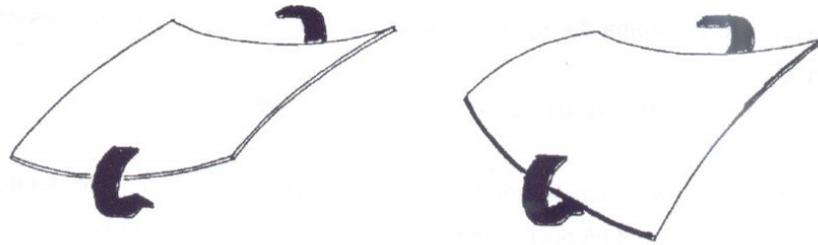


Figura 3.9. Exemplos de flexão de placas (Carlos J, P. C., 2000)

3.3.1.3. Efeito da Temperatura

Segundo JONES (1999), o comportamento de estruturas laminadas pode ser estudado incluindo o efeito da temperatura. Considerando o comportamento em membrana e em flexão, as tensões nas lâminas podem ser definidas da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x^0 - z k_x \\ \epsilon_y^0 - z k_y \\ \gamma_{xy}^0 - z k_{xy} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xT} \\ \epsilon_{yT} \\ \gamma_{xyT} \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

Os esforços de membrana e de flexão do laminado, eqs, (3.37) e (3.60) respectivamente, podem então ser obtidos como sendo:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{pmatrix} N_{xt} \\ N_{yt} \\ N_{xyt} \\ M_{xt} \\ M_{yt} \\ M_{xyt} \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

onde:

$$M_x = \sum_{k=1}^n \left\{ \bar{Q}_{11}^k \varepsilon_{xt} + \bar{Q}_{12}^k \varepsilon_{yt} + \bar{Q}_{16}^k \gamma_{xyt} \right\} h_k \quad (3.66)$$

e:

$$M_x = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left(\bar{Q}_{11}^k \varepsilon_{xt} + \bar{Q}_{12}^k \varepsilon_{yt} + \bar{Q}_{16}^k \gamma_{xyt} \right) z dz \right\} \quad (3.67)$$

Os esforços N_{yt} , T_{xyt} , M_{yt} , M_{xyt} são obtidos por analogia.

3.4. Critérios de Ruptura

Os critérios de ruptura têm por objetivo permitir ao projetista avaliar a resistência mecânica destas estruturas laminadas. A ruptura dos materiais compósitos pode se dar por diferentes mecanismos: ruptura das fibras, ruptura da matriz, de coesão *fibra x matriz*, delaminação (descolamento das laminas), etc.

Os critérios de ruptura podem ser classificados da seguinte maneira:

Critérios de tensão máxima,

➤ Critérios de deformação máxima

3.4.1. Critério de Tensão Máxima

As tensões máximas analisadas são atingidas quando uma das três tensões sob as quais a lâmina está submetida que pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} X_c < \sigma_1 < X_t \\ Y_c < \sigma_2 < Y_t \\ -S < \tau_{12} < S \end{aligned} \quad (3.68)$$

onde: σ_1 , σ_2 e τ_{12} representam as tensões longitudinais, transversal e de cisalhamento no plano da lamina. X_c e X_t representam as resistências mecânicas na direção longitudinal em compressão e em tração Y_c e Y_t representam as resistências mecânicas na direção transversal em compressão e em tração e S representa a resistência mecânica ao cisalhamento. Se as inequações acima são verificadas, a lâmina não se romperá devido ao estado de tensão σ_1 , σ_2 e τ_{12} . Como normalmente as lâminas estão orientadas segundo o sistema de eixos de referência (x, y, z), girado de θ com relação ao sistema de eixos de ortotropia (1,2,3), a matriz de transformação dada pela eq.(3.9) deve ser utilizada:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & s & 2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \{\sigma^x\} = [T]\{\sigma\} \quad (3.69)$$

$$\{\sigma^1\} = [T_\sigma]^{-1}\{\sigma^x\} \quad (3.70)$$

3.4.2. Critério de Deformação Máxima

O critério de deformação máxima estipula que a resistência mecânica da lâmina analisada é atingida quando umas das três deformações às quais a lâmina está sendo submetida atingir o valor da deformação de ruptura

correspondente. Desta forma, o critério pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} X_{ec} < \varepsilon_1 < X_{et} \\ Y_{ec} < \varepsilon_2 < Y_{et} \\ -S_{\varepsilon} < \gamma_{12} < S_{\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.71)$$

onde representam as deformações longitudinal, transversal e de cisalhamento no plano da lamina, X_{ec} e X_{et} representam as deformações máximas na direção longitudinal em compressão e em tração, Y_{ec} e Y_{et} representam as deformações máximas na direção transversal em compressão e em tração e S_{ε} representa a deformação máxima em cisalhamento. Se as inequações acima são verificadas, a lâmina não se romperá devido as deformações ε_{11} , ε_{22} e γ_{12} .

Como normalmente as lâminas estão orientadas segundo os eixos ortogonais x e y , girados de θ com relação aos eixos de ortotropia, a matriz de transformação, eq. (3.72), deve ser utilizada:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \{\varepsilon^x\} = [T_{\varepsilon}]\{\varepsilon^1\} \quad (3.72)$$

A inversão da matriz de transformação fornece a relação das deformações medidas no sistema de eixos (x,y,z) com as deformações nos eixos de ortotropia $(1,2,3)$ utilizadas no critério de deformação máxima:

$$\{\varepsilon^1\} = [T_{\varepsilon}]^{-1} \{\varepsilon^x\} \quad (3.73)$$

3.4.3. Critérios Interativos

Nos critérios de tensão máxima e deformação máxima, assume-se que os mecanismos de rupturas longitudinais, transversais e de cisalhamento se produzem de forma independente. De maneira a levar em consideração todos estes mecanismos simultaneamente os critérios interativos ou energéticos.

3.4.3.1. Revisão de Critério de Von Mises

Considere a energia de deformação total por unidade de volume em um material isotrópico (densidade de energia de deformação) para um estado multiaxial de tensões:

$$U_{total} = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \frac{1}{2G}(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (3.74)$$

Esta energia de deformação total, medida nos eixos principais é da forma:

$$U_{total} = \frac{1}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \quad (3.75)$$

A energia de deformação total acima é dividida em duas partes: uma causando dilatação do material (mudanças volumétricas), e outra causando distorções de cisalhamento. É interessante lembrar que em um material dúctil, admite-se que o escoamento do material depende apenas da máxima tensão de cisalhamento.

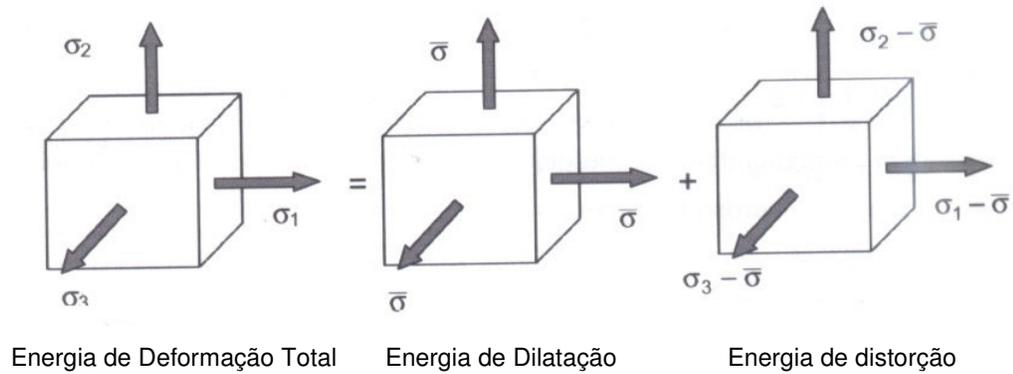


Figura 3.10. Mudanças Volumétricas (Carlos J, P. C., 2000)

A fim de facilitar a compreensão, somente o estado de tensão uniaxial será considerado. A passagem para um estado de tensão multiaxial é automática. Desta forma, para um estado de tensão uniaxial, as energias de dilatação e de distorção são representadas da seguinte forma:

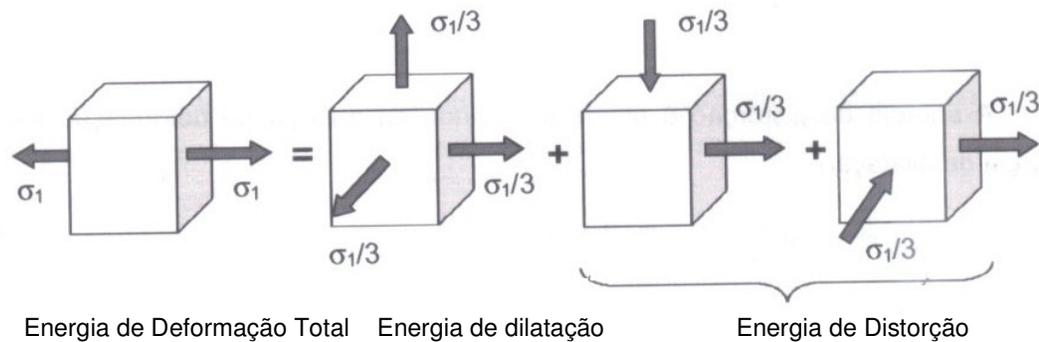


Figura 3.11. Energia de Distorção (JONES, 1999)

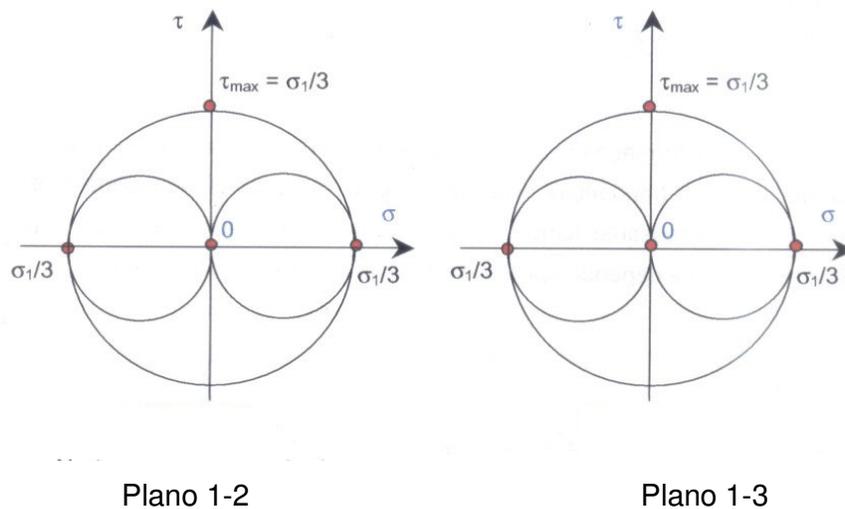


Figura 3.12. Diagramas de Mohr (Carlos J, P. C., 2000)

No tensor correspondente a energia de dilatação, os componentes são definidos como sendo a tensão “hidrostática” média:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (3.76)$$

onde $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p = \bar{\sigma}$.

A energia de dilatação é determinada substituindo $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$ na expressão de energia de deformação total e em seguida substituindo

$$p = \bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} :$$

$$U_{dilatacao} = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (3.77)$$

A energia de distorção é obtida subtraindo da energia de deformação total a energia de dilatação:

$$U_{distorcao} = \frac{1}{12G} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (3.78)$$

A energia de distorção em um ensaio de tração simples, onde neste caso $\sigma_1 = \sigma_{esc}$ e $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ é da forma:

$$U_{distorcao} = \frac{2\sigma_{esc}^2}{12G} \quad (3.79)$$

Igualando a energia de distorção de cisalhamento com a energia no ponto de escoamento á tração simples, estabelece-se o critério de escoamento para tensão combinada.

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_{esc}^2 \quad (3.80)$$

ou:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{esc}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{esc}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_{esc}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_{esc} \sigma_{esc}}\right) - \left(\frac{\sigma_2 \sigma_3}{\sigma_{esc} \sigma_{esc}}\right) - \left(\frac{\sigma_3 \sigma_1}{\sigma_{esc} \sigma_{esc}}\right) = 1 \quad (3.81)$$

A equação acima é conhecida como sendo o critério de *Von Mises* para um estado multiaxial de tensões para materiais isotrópicos. Para um estado plano de tensão, $\sigma_3 = 0$, tem-se:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{esc}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{esc}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_{esc} \sigma_{esc}}\right) = 1 \quad (3.82)$$

3.4.3.2. Critério de Hill

A energia de distorção para um material ortotrópico onde as tensões de cisalhamento τ_{12}, τ_{23} e τ_{31} são diferentes de zero, é obtida de maneira análoga a obtida por um material isotrópico. Igualando a energia de distorção de cisalhamento com a energia no ponto de ruptura, estabeleceu-se o critério de ruptura para tensão combinada para materiais Compósitos.

$$F(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + G(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + H(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 2L\tau_{12}^2 + 2M\tau_{23}^2 + 2N\tau_{31}^2 = 1 \quad (3.83)$$

As constantes F, G, H, L, M e N são parâmetros da lâmina analisada e estão ligadas as tensões de ruptura do material.

Colocando a equação acima sob uma outra forma tem-se:

$$\begin{aligned} (F + H)\sigma_1^2 + (F + G)\sigma_2^2 + (G + H)\sigma_3^2 - 2F\sigma_1\sigma_2 - 2H\sigma_1\sigma_3 \dots \\ \dots - 2F\sigma_2\sigma_3 + 2L\tau_{12}^2 + 2L\tau_{23}^2 + 2L\tau_{31}^2 = 1 \end{aligned} \quad (3.84)$$

Para um ensaio em tração (ou compressão) na direção longitudinal (1), o critério se reduz:

$$(F + H)X^2 = 1 \therefore (F + H) = \frac{1}{X^2} \quad (3.85)$$

onde X é a tensão de ruptura em tração (ou compressão) na direção longitudinal.

Da mesma forma, para um ensaio em tração (ou compressão) nas direções transversais (2 e 3), o critério se reduz:

$$(F + G)Y^2 = 1, \quad (F + G) = \frac{1}{Y^2} \quad (3.86)$$

$$(G + H)Z^2 = 1, \quad (G + H) = \frac{1}{Z^2} \quad (3.87)$$

onde Y e Z são as tensões de ruptura em tração (ou compressão) nas direções transversais.

Para um ensaio de cisalhamento no plano (1,2), o critério se reduz:

$$2L = \frac{1}{S_{12}^2} \quad (3.88)$$

onde S_{12} é a tensão de cisalhamento no plano (1,2). Analogamente:

$$2M = \frac{1}{S_{23}^2} \quad (3.89)$$

$$2N = \frac{1}{S_{31}^2} \quad (3.90)$$

Substituindo os parâmetros F , G , H , L , M e N na equação do critério de ruptura para tensão combinada para os materiais compósitos, eq.(4.17), tem-se:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3}{Z}\right)^2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2}\right)\sigma_1\sigma_2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2}\right)\sigma_2\sigma_3 \dots \\ & \dots - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2}\right)\sigma_3\sigma_1 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{23}}{S_{23}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{31}}{S_{31}}\right)^2 = 1 \end{aligned} \quad (3.91)$$

Para um estado plano de tensão, onde $\sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$:

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2}\right)\sigma_1\sigma_2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 = 1 \quad (3.92)$$

3.4.3.3. Critério de Tsai – Hill

No critério de Tsai – Hill, o critério de Hill analisado para o estado de tensão é simplificado fazendo-se $Z = Y$.

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2}\right) + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 = 1 \quad (3.93)$$

3.4.3.4. Critério de Hoffman

No critério de Hoffman é levado em consideração à diferença do comportamento em tração e em compressão. Este critério admite que a ruptura acontece quando a igualdade é verificada:

$$C_1(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + C_2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + C_3(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + C_4\sigma_1 + C_5\sigma_2 + C_6\sigma_3 + C_7\tau_{12}^2 + C_8\tau_{23}^2 + C_9\tau_{31}^2 = 1 \quad (3.94)$$

Observe que a diferença do critério de *Hoffman* para o critério de *Hill* está na adição dos termos relativos aos parâmetros C_4 , C_5 , C_6 .

As constantes C_i são determinadas a partir de ensaios experimentais para a obtenção das tensões de ruptura em tração e em compressão.

$$C_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{Y_t Y_c} + \frac{1}{Z_t Z_c} - \frac{1}{X_t X_c} \right]$$

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{Z_t Z_c} + \frac{1}{X_t X_c} - \frac{1}{Y_t Y_c} \right] \\
C_3 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} - \frac{1}{Z_t Z_c} \right] \\
C_4 &= \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \\
C_5 &= \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \\
C_6 &= \frac{1}{Z_t} - \frac{1}{Z_c} \\
C_7 &= \frac{1}{S_{12}^2} \\
C_8 &= \frac{1}{S_{32}^2} \\
C_9 &= \frac{1}{S_{31}^2}
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Considerando somente o estado plano de tensão, o critério de *Hoffman* se resume da seguinte maneira:

$$\frac{\sigma_1^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_2^2}{Y_t Y_c} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X_t X_c} + \frac{X_c - X_t}{X_t X_c} \sigma_1 + \frac{Y_c - Y_t}{Y_t Y_c} \sigma_2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}} \right)^2 = 1 \tag{3.96}$$

3.4.3.5. Critério de Tsai - Wu

O critério de *Tsai - Wu* foi desenvolvido de maneira a melhorar a correlação entre os resultados experimentais e teóricos a partir da introdução de parâmetros adicionais. Considerando somente o estado plano de tensão, o critério de *Tsai - Wu* se pode da seguinte forma:

$$\frac{\sigma_1^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_2^2}{Y_t Y_c} + 2F_{12} \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X_t X_c} + \left(\frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c} \right) \sigma_1 + \left(\frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c} \right) \sigma_2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}} \right)^2 = 1 \tag{3.97}$$

onde F_{12} é um coeficiente de acoplamento expresso da forma:

$$F_{12} = \frac{1}{2\sigma^2} \left\{ 1 - \left[X_c - X_t + \frac{X_t X_c}{Y_t Y_c} (Y_c - Y_t) \right] \sigma + \left(1 + \frac{X_t X_c}{Y_t Y_c} \right) \sigma^2 \right\} \quad (3.98)$$

ou:

$$F_{12} = \frac{2}{2\sigma_{45}^2} \left\{ 1 - \left[X_c - X_t + \frac{X_t X_c}{Y_t Y_c} (Y_c - Y_t) \right] \frac{\sigma_{45}}{2} + \left(1 + \frac{X_t X_c}{Y_t Y_c} + \frac{X_t X_c}{S_{12c}} \right) \frac{\sigma_{45}^2}{2} \right\} \quad (3.99)$$

onde σ e σ_{45} são as tensões de ruptura determinadas respectivamente em ensaios biaxial e de tração a 45° (σ_{45}). O coeficiente de acoplamento F_{12} é normalmente utilizado para ajustar aos resultados obtidos experimentalmente e pode variar de $-1 < F_{12} < 1$. Fazendo $F_{12} = -1/2$, o critério de *Tsai – Wu* se transforma no critério de *Hoffman*. Se, além disso fizermos $X_t = X_c = X$ e $Y_t = Y_c = Y$, o critério se transforma no critério de *Tsai – Hill*.

3.4.4. Método de Degradação

Os métodos de degradação aplicados a estruturas laminadas são métodos iterativos de avaliação de falha em lâminas, que consistem em alterar as propriedades mecânicas de lâminas rompidas segundo o modo de falha identificado, de forma a melhor avaliar o processo de ruptura da estrutura (JONES, 1999). Os modos de falha de uma lâmina podem ser: *trinca da matriz*, *ruptura da fibra*, *delaminação*, *etc.* são inúmeros os métodos de degradação utilizados para alterar as propriedades mecânicas de lâminas rompidas. Um dos métodos mais simples considera que, na falha por trinca da matriz, as propriedades $E_2, E_3, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}, G_{12}, G_{13}$ e G_{23} são anuladas, E_1 permanecendo inalterado. Na falha por ruptura da fibra, as propriedades $E_1, \nu_{12}, \nu_{13}, G_{12}, G_{13}$ são anuladas, enquanto $E_2, E_3, \nu_{23}, G_{23}$

permanecem inalteradas. Na falha por delaminação, as propriedades G_{13} e G_{23} são anuladas, enquanto que as restantes permanecem inalteradas.

3.5. Método dos Elementos Finitos Aplicados aos Materiais Compósitos

TEORIA DE PRIMEIRA ORDEM:

A teoria de Primeira Ordem considera que as seções que eram planas antes de aplicar o carregamento, permanecem planas após aplicar o carregamento, mas não perpendiculares à superfície neutra. Esta hipótese considera portanto que o cisalhamento transversal é não nulo, $\gamma_{xy} \neq 0$ e $\gamma_{yz} \neq 0$. Seja então uma placa laminada carregada no plano (x,y) onde $w_x = \frac{\partial w}{\partial x}$.

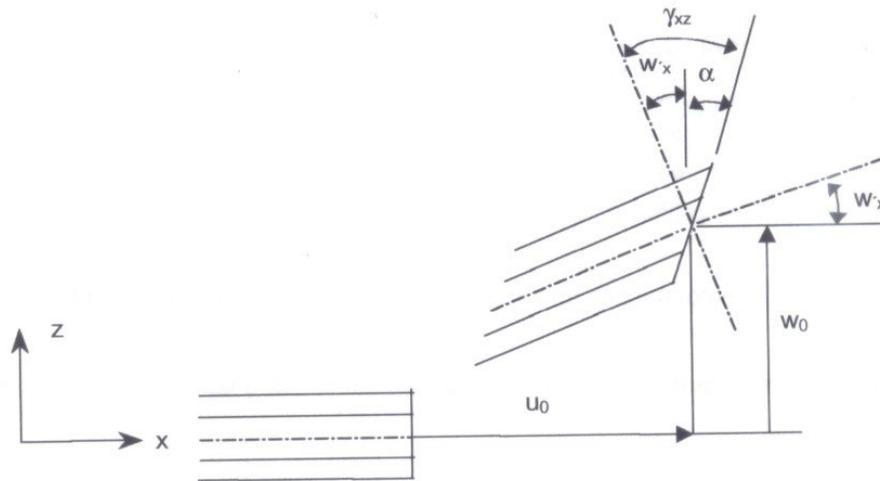


Figura 3.13. Cisalhamento transversal a uma placa laminada

3.5.1. Campo de Deslocamentos

O deslocamento de um ponto genérico distante z da superfície neutra é dado da forma:

$$\begin{aligned}
 u &= u_0 + z\alpha \\
 v &= v_0 + z\beta \\
 w &= w_0
 \end{aligned}
 \tag{3.100}$$

onde u_0 , v_0 , w_0 são os deslocamentos transversais da superfície neutra, e α e β são inclinações das seções nos planos (x,y) e (x,z) , respectivamente.

ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{yx}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{yx} \end{Bmatrix}
 \tag{3.101}$$

onde ε_x^0 , ε_y^0 são deformações normais nas direções x e y na superfície neutra, γ_{yx}^0 é a deformação angular no plano (x,y) na superfície neutra, k_x , k_y e k_{yx} são as curvaturas.

DEFORMAÇÕES CISALHANTES TRANSVERSAIS

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \alpha + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix}
 \tag{3.102}$$

onde γ_{xz} e γ_{yz} são as deformações angulares transversas nos planos (x,z) e (y,z) .

Os esforços cortantes por unidade de comprimento, Q_x e Q_y podem ser definidos da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dz \quad (3.103)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^z \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dz \quad (3.104)$$

A matriz constitutiva no sistema de ortotropia considerando somente os efeitos de cisalhamento transversal é da forma:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{23} & 0 \\ 0 & G_{13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (3.105)$$

A relação das tensões medidas no sistema de referência com as tensões medidas no sistema de ortotropia, considerando somente os efeitos de cisalhamento transversal é dada pela matriz de transformação:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}_\tau] \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (3.106)$$

De maneira análoga, a relação das deformações medidas no sistema de referência com as deformações medidas no sistema de ortotropia é dada pela mesma matriz de transformação:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}_\tau] \begin{Bmatrix} \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} \quad (3.107)$$

Multiplicando a matriz de transformação na relação constitutiva na qual considerados somente os efeitos do cisalhamento transversal, eq.(5.6), temos:

$$[\mathbf{T}_\tau] \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}_\tau] \begin{bmatrix} G_{23} & 0 \\ 0 & G_{13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (3.108)$$

e, substituindo a eq. (5.8) na eq. (5.9), temos:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}_\tau] \begin{bmatrix} G_{23} & 0 \\ 0 & G_{13} \end{bmatrix} [\mathbf{T}_\tau]^t \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44}^x & C_{45}^x \\ C_{45}^x & C_{55}^x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.109)$$

Substituindo a eq. (5.10) na eq. (5.5), e considerando que as deformações cisalhantes são constantes ao longo da espessura, temos:

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z-1}^z \begin{bmatrix} C_{44}^x & C_{45}^x \\ C_{45}^x & C_{55}^x \end{bmatrix}^k dz \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.110)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n h^k \begin{bmatrix} C_{44}^x & C_{45}^x \\ C_{45}^x & C_{55}^x \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.111)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{54} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.112)$$

A equação de comportamento que inclui o efeito do cisalhamento transversal é portanto da forma:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{21} & B_{61} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{61} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{54} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{xt} \\ N_{yt} \\ N_{xyt} \\ M_{xt} \\ M_{yt} \\ M_{xyt} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.113)$$

É importante lembrar que as tensões de cisalhamento são constantes e descontínuas quando obtidas na forma:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} C_{44}^x & C_{45}^x \\ C_{45}^x & C_{55}^x \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.114)$$

Segundo JONES (1999), para corrigir esta falha da Teoria de Primeira Ordem, as tensões de cisalhamento transverso são multiplicadas por um fator de correção k , obtido através da equivalência da energia de deformação exata, na qual a distribuição é parabólica ao longo da espessura, com a energia de deformação obtida com esta teoria. Assim, a eq. (5.15) se coloca da forma:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^k = k \begin{bmatrix} C_{44}^x & C_{45}^x \\ C_{45}^x & C_{55}^x \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.115)$$

3.5.2. Energia de Deformação Elementar

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dV + \frac{1}{2} \int_V \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dV \quad (3.116)$$

onde, a primeira integral corresponde a energia devido ao estado plano de tensão e a segunda corresponde a energia devido cisalhamento transverso:

Substituindo as deformações obtidas anteriormente, temos:

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \int_{A-h/2}^{h/2} \int \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 + z & k_x \\ \varepsilon_y^0 + z & k_y \\ \gamma_{xy}^0 + z & k_{xy} \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz dx dy \\ &+ \frac{1}{2} \int_{A-h/2}^{h/2} \int \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dz dx dy \end{aligned} \quad (3.117)$$

Desenvolvendo a expressão acima temos:

$$\begin{aligned}
U_e = & \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz dx dy + \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz dx dy + \\
& \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dz dx dy
\end{aligned} \tag{3.118}$$

Sabe-se que:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz, \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad e \quad \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dz \tag{3.119}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
U_e = & \frac{1}{2} \int_A \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} dx dy + \frac{1}{2} \int_A \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} dx dy \\
& + \frac{1}{2} \int_A \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} dx dy
\end{aligned} \tag{3.120}$$

Reagrupando a eq. (3.121):

$$U_e = \frac{1}{2} \int_A \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} dx dy \tag{3.121}$$

Sabe-se que, desconsiderando os efeitos térmicos:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.122)$$

Substituindo a eq. (3.123) na eq. (3.122), tem-se finalmente:

$$U_e = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} dx dy \quad (3.123)$$

Considerando que os deslocamentos e as inclinações possam ser definidas como sendo interpoladas nodais da forma:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{i=1}^n N_i(x, y) u_i \\ v(x, y) &= \sum_{i=1}^n N_i(x, y) v_i \\ w(x, y) &= \sum_{i=1}^n N_i(x, y) w_i \quad \text{ou} \quad \{u^e(x, y)\} = [N(x, y)] \{U^e\} \end{aligned} \quad (3.124)$$

$$\alpha(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \alpha_i$$

$$\beta(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \beta_i$$

onde $u^e(x,y)$ é o vetor deslocamento elementar, $N_i(x,y)$ são funções de interpolação obtidas em função do número de nós n do elemento e U^e é o vetor deslocamento nodal do elemento contendo u_i, v_i, w_i, α_i e β_i .

A relação deformação-deslocamento pode então, segundo as eq.(3.102) e (3.103), ser dada da forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \\ \alpha + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \beta + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & N_1 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & N_1 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{Bmatrix} = [B]\{U^e\} \quad (3.125)$$

Substituindo a eq. (3.126) na eq. (3.124), temos:

$$U_\varepsilon = \frac{1}{2} \int_A \{U^e\}^t [B]^t \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix} [B] \{U^e\} dx dy \quad (3.126)$$

3.5.3. Energia Cinética Elementar

$$T_e = \frac{1}{2} \int_V \rho(x, y, z) \left[\left(\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v(x, y, z)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w(x, y, z)}{\partial t} \right)^2 \right] dV \quad (3.127)$$

Considerando o campo de deslocamento definido pela eq. (3.101), temos:

$$T_e = \frac{1}{2} \int_V \rho(x, y, z) \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} + z \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} + z \frac{\partial \beta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] dz dx dy \quad (3.128)$$

Desenvolvendo a eq.(3.129), temos:

$$T_e = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x, y, z) \left[\left(\dot{u}_0^2 + \dot{v}_0^2 + \dot{w}_0^2 \right) + 2z \left(\dot{u}_0 \dot{\alpha} + \dot{v}_0 \dot{\beta} \right) + z^2 \left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 \right) \right] dz dx dy \quad (3.129)$$

Para uma placa laminada, a densidade de cada lâmina pode ser considerada constante ao longo da espessura, logo $\rho^k = \rho(x, y)$. Definido $\rho_0(x, y)$ como sendo uma densidade de massa por unidade de área da superfície média da placa como sendo:

$$\rho_0(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho^k z dz \quad (3.130)$$

é definido $\rho_1(x, y)$ como sendo o primeiro momento de massa por

$$\rho_1(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho^k z^2 dz \quad (3.131)$$

Observe que, se a densidade for constante ao longo da espessura, como no caso de uma placa homogênea, $\rho_1(x, y) = 0$. Definido também $\rho_2(x, y)$ como sendo o segundo momento de massa por:

$$\rho_2(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho^k z^3 dz \quad (3.132)$$

Para uma placa homogênea, $\rho_2 = \frac{\rho^k h^3}{12}$.

Substituindo as eqs. (3.131), (3.132), (3.133) na eq. (3.130), temos:

$$T_e = \frac{1}{2} \int_A \left[\rho(x, y) \left(\dot{u}_0^2 + \dot{v}_0^2 + \dot{w}_0^2 \right) + 2\rho_1(x, y) \left(\dot{u}_0 \dot{\alpha} + \dot{v}_0 \dot{\beta} \right) + \rho_2(x, y) \left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 \right) \right] dx dy \quad (3.133)$$

Reagrupando a eq. (3.134) na forma de vetores, temos:

$$T_e = \frac{1}{2} \int_A \left[\begin{matrix} \left[\begin{matrix} \dot{u}_0 \\ \dot{v}_0 \\ \dot{w}_0 \end{matrix} \right]^t \\ \rho(x, y) \left[\begin{matrix} \dot{u}_0 \\ \dot{v}_0 \\ \dot{w}_0 \end{matrix} \right] \\ + \left[\begin{matrix} \dot{u}_0 \\ \dot{v}_0 \end{matrix} \right]^t \\ 2\rho_1(x, y) \left[\begin{matrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{matrix} \right] \\ + \left[\begin{matrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{matrix} \right]^t \\ \rho_2(x, y) \left[\begin{matrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{matrix} \right] \end{matrix} \right] dx dy \quad (3.134)$$

A eq.(3.135) pode ser reescrita através da definição de uma matriz [m] do tipo:

$$[m] = \begin{bmatrix} \rho_0(x, y) & 0 & 0 & \rho_1(x, y) & 0 \\ 0 & \rho_0(x, y) & 0 & 0 & \rho_1(x, y) \\ 0 & 0 & \rho_0(x, y) & 0 & 0 \\ \rho_1(x, y) & 0 & 0 & \rho_2(x, y) & 0 \\ 0 & \rho_1(x, y) & 0 & 0 & \rho_2(x, y) \end{bmatrix} \quad (3.135)$$

Logo:

$$T_e = \frac{1}{2} \int_A \left[\begin{matrix} \left[\begin{matrix} \dot{u}_0 \\ \dot{v}_0 \\ \dot{w}_0 \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{matrix} \right]^t \\ [m] \left[\begin{matrix} \dot{u}_0 \\ \dot{v}_0 \\ \dot{w}_0 \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{matrix} \right] \end{matrix} \right] dx dy \quad (3.136)$$

Considerando a derivada temporal da eq.(3.125), temos:

$$\left\{ \dot{u}^e(x, y, t) \right\} = [N(x, y)] \left\{ \dot{U}^e(t) \right\} \quad (3.137)$$

Substituindo a eq. (3.138) na eq. (3.137), tem-se:

$$T_e = \frac{1}{2} \int_A \left[\left\{ \dot{U}^e \right\}^t [N]^t [m] [N] \left\{ \dot{U}^e \right\} \right] dx dy \quad (3.138)$$

3.5.4. Trabalho Realizado pelas Forças Externas

$$W_e = \frac{1}{2} \int_A q(x, y) \{U^e\} dx dy + \frac{1}{2} \{F\} \{U^e\} \quad (3.139)$$

onde $q(x, y)$ é o carregamento transversal e $\{F\}$ são os esforços concentrados do tipo força e momento.

3.5.5. Princípio dos Trabalhos Virtuais

Este princípio considera que o trabalho virtual realizado pelas forças externas é igual ao trabalho virtual realizado pelos esforços internos quando da aplicação de deslocamento virtuais do tipo $\{\delta U^e\}$. Assim das eq. (3.127) e eq. (3.140) e considerando o trabalho realizado nos elementos, temos:

$$\int_A \{U^e\}^t [B]^t \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix} [B] \{U^e\} dx dy = \int_A \{\delta U^e\}^t q(x, y) dx dy + \{\delta U^e\}^t \{F\} \quad (3.140)$$

Colocando os deslocamentos virtuais em evidência, tem-se:

$$\{\delta U^e\}^t \left\{ \int_A \begin{bmatrix} [B]^t \\ A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix} [B] dx dy \right\} \{\delta U^e\}^t - \int_A q(x, y) dx dy + \{F\} = 0 \quad (3.141)$$

Como a solução da eq. (3.142) é válida para qualquer deslocamento virtual, o problema a ser resolvido, após a superposição das matrizes elementares, é da forma:

$$[K] \{U\} = \{P\} \quad (3.142)$$

A eq. (3.143) é a equação que descreve o comportamento estático do sistema, onde $[K]$ é a matriz de rigidez global, $\{P\}$ é o vetor forças externas global e $\{U\}$ é o vetor dos graus de liberdade de todo sistema.

3.5.5.1. Determinação das Tensões

Após a resolução do sistema de equações lineares dado pela eq. (3.143), obtêm-se o vetor de deslocamento nodal $\{U\}$. Aplicando as eq. (3.126), obtêm-se as deformações na superfície neutra, as curvaturas e as deformações cisalhantes transversas. Multiplicando as deformações na forma das eqs. (3.102) e (3.103) pela matriz construtiva obtida no sistema de coordenadas de referência (x, y) , obtêm-se as tensões medidas no sistema de referência $\{\sigma^x\}$. Multiplicando o resultado destas tensões pela matriz de transformação $[T]$ dada pela eq. (3.24), obtêm-se as tensões medidas no sistema de ortotropia $\{\sigma^t\}$. Finalmente, pode-se aplicar um critério de falha sobre qualquer elemento.

As tensões de cisalhamento, como visto anteriormente, são constantes ao longo da espessura de cada lâmina, quando determinadas pela Teoria de Primeira Ordem. Para obter a distribuição correta destas tensões, considere um elemento infinitesimal de volume dx , dy e dz , submetido a um estado de tensões triaxiais. Por comodidade, somente as tensões na direção x são mostradas na Fig.3.14:

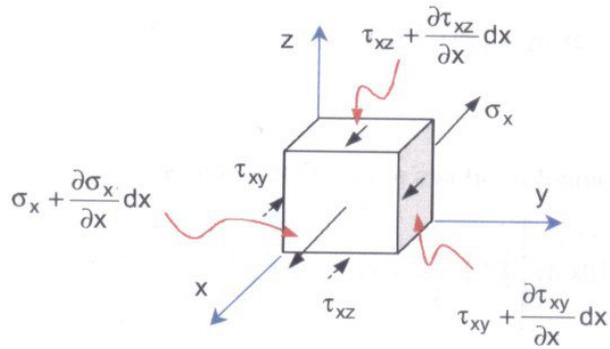


Figura 3.14. Elemento submetido a um estado de tensões triaxiais.

Impondo o equilíbrio estático da direção x , temos:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, \\ -\sigma_x dydz \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \tau_{xy} dx dz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dy & \quad (3.143) \\ -\tau_{xy} dx dz y + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} dz \right) dx dy &= 0 \end{aligned}$$

Que resulta na equação diferencial que representa o equilíbrio na direção x :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (3.144)$$

As equações diferenciais que representam o equilíbrio na direção y e z podem ser obtidas de maneira análoga:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (3.145)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (3.146)$$

A distribuição da tensão cisalhante transversa τ_{xz} , pode ser obtida a partir da eq. (3.146), e de σ_x e τ_{xy} obtidas da eq. (3.64):

$$\tau_{xz} = - \int \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} \right) dz \quad (3.147)$$

Assim, desprezando os efeitos térmicos, temos:

$$\tau_{xz} = - \int \left[\begin{aligned} & \bar{Q}_{11}^k \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_x^0 + zk_x) + \bar{Q}_{12}^k \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_y^0 + zk_y) + \bar{Q}_{16}^k \frac{\partial}{\partial x} (\gamma_{xy}^0 + zk_{xy}) + \\ & \bar{Q}_{61}^k \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon_x^0 + zk_x) + \bar{Q}_{62}^k \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon_y^0 + zk_y) + \bar{Q}_{66}^k \frac{\partial}{\partial y} (\gamma_{xy}^0 + zk_{xy}) \end{aligned} \right] dz \quad (3.148)$$

Considerando o estado plano de deformações dado pela eq. (3.102). temos:

$$\tau_{xz} = - \int \left[\begin{aligned} & \bar{Q}_{11}^k \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \right) + \bar{Q}_{12}^k \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} \right) + \bar{Q}_{16}^k \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} \right) + \\ & \bar{Q}_{61}^k \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} \right) + \bar{Q}_{62}^k \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right) + \bar{Q}_{66}^k \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \right] dz \quad (3.149)$$

Como os deslocamentos u_0 e v_0 e as rotações α e β são medidos na superfície neutra, portanto independente da posição z , tem-se:

$$\tau_{xz} = - \left[\begin{aligned} & \bar{Q}_{11}^k \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \right) + \bar{Q}_{12}^k \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} \right) + \\ & \bar{Q}_{16}^k \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} \right) + \\ & \bar{Q}_{61}^k \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} \right) + \bar{Q}_{62}^k \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right) + \\ & \bar{Q}_{66}^k \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \right] + a^k(x, y) \quad (3.150)$$

onde a^k é uma constante de integração determinada pela imposição da continuidade das tensões na interface das lâminas e da nulidade desta tensão nas superfícies inferior e superior do laminado. Observa-se na eq. (3.151) que a distribuição da tensão cisalhante transversa τ_{xz} é parabólica. A distribuição da tensão cisalhante τ_{yx} , pode ser obtida a partir da eq. (3.146), e de σ_x e τ_{xy} obtidas da eq. (3.146):

$$\tau_{yx} = -\int \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) dz \quad (3.151)$$

Assim, desprezando os efeitos térmicos, temos:

$$\tau_{yz} = -\int \left[\begin{array}{l} \bar{Q}_{61}^k \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_x^0 + zk_x) + \bar{Q}_{62}^k \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_y^0 + zk_y) + \bar{Q}_{66}^k \frac{\partial}{\partial x} (\gamma_{xy}^0 + zk_{xy}) + \\ \bar{Q}_{21}^k \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon_x^0 + zk_x) + \bar{Q}_{22}^k \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon_y^0 + zk_y) + \bar{Q}_{26}^k \frac{\partial}{\partial y} (\gamma_{xy}^0 + zk_{xy}) \end{array} \right] dz \quad (3.152)$$

Considerando o estado de deformações dado pela eq. (3.102), temos:

$$\tau_{xz} = -\int \left[\begin{array}{l} \bar{Q}_{61}^k \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \right) + \bar{Q}_{62}^k \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} \right) + \\ \bar{Q}_{66}^k \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} \right) + \\ \bar{Q}_{21}^k \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} \right) + \bar{Q}_{22}^k \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right) + \\ \bar{Q}_{26}^k \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} \right) \end{array} \right] dz \quad (3.153)$$

Como os deslocamentos u_0 e v_0 e as rotações α e β são medidos na superfície neutra, portanto independente da posição z , tem-se:

$$\tau_{xz} = - \left[\begin{aligned} & \bar{Q}_{61}^k \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \right) + \bar{Q}_{62}^k \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} \right) + \\ & \bar{Q}_{66}^k \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} \right) + \\ & \bar{Q}_{21}^k \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} \right) + \bar{Q}_{22}^k \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right) + \\ & \bar{Q}_{26}^k \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \right] + b^k(x, y) \quad (3.154)$$

onde b^k é uma constante de integração determinada pela imposição da continuidade das tensões na interface das lâminas e da nulidade desta tensão nas superfícies inferior e superior do laminado. Observa-se na eq. (3.155) que a distribuição da tensão cisalhante transversa τ_{yz} é parabólica.

A distribuição da tensão normal σ_z , pode ser obtida a partir das eqs. (3.147), (3.151) e (3.155):

$$\sigma_z = - \int \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) dz \quad (3.155)$$

3.6. Elementos de Mecânica do Dano

3.6.1 Definição do Elemento de Volume Representativo

Considere-se um sólido com defeitos em sua microestrutura. Um elemento de volume representativo possui dimensões suficientemente grandes para que se possa admitir homogeneidade para a distribuição dos defeitos nele contidos, mas ao mesmo tempo suficientemente pequenas para que se evitem gradientes elevados de grandezas locais de interesse, como a deformação. Dessa forma, pode-se admitir continuidade para as funções representativas dos fenômenos que ocorrem no elemento e as propriedades nele medidas são valores médios que podem ser associados a um ponto material.

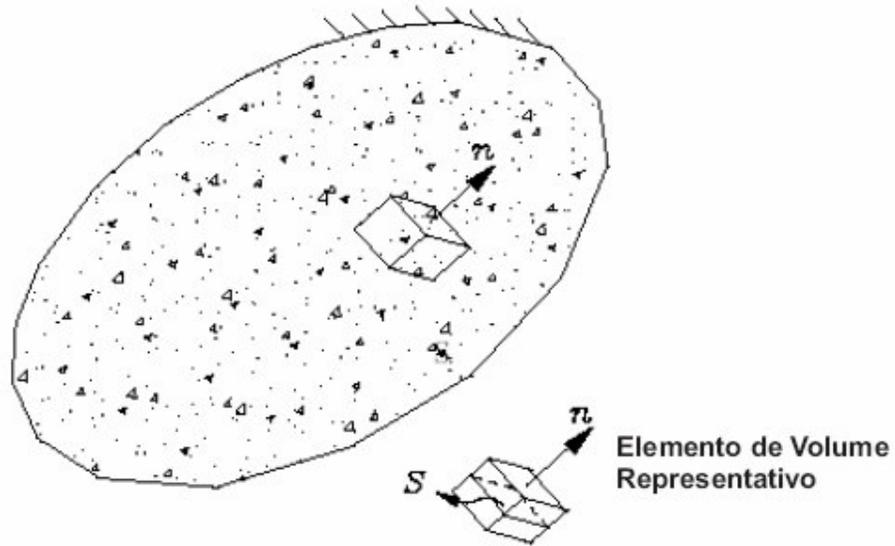


Figura 3.15. Elemento de Volume Representativo de um Sólido com Dano.

3.6.2 Definição de Tensão Efetiva

Considere-se uma situação de solitação sobre o elemento de volume definido no item anterior, constituída por forças F aplicadas nas faces opostas orientadas pelo versor n . Seja ainda S a área total de uma seção de normal n no interior do elemento. Nessas condições, $\sigma = F/S$ é a tensão nominal em qualquer ponto da seção genérica.

Admitindo-se que o conjunto de defeitos seja totalmente incapaz de transferir tensões, pode-se definir uma tensão dita efetiva levando-se em conta somente a parte íntegra da seção. Nesse sentido, seja \tilde{S} a parcela íntegra da área total S da seção considerada. Então a diferença:

$$S_o = S - \tilde{S} \quad (3.156)$$

define a área dos defeitos medidos. Por definição, LEMAITRE & CHABOCHE (1985) e LEMAITRE (1994), o dano D_n , no caso associado a um plano de normal n , fica definido pela relação:

$$D_n = \frac{S_o}{S} \quad (3.157)$$

Nota-se que a variável de dano assume valores contidos no intervalo $0 < D_n < 1$, sendo que $D_n = 0$ tem correspondência com a situação de material íntegro e $D_n = 1$ indica um estado total de deterioração. Assim sendo, a parcela de seção efetivamente resistente pode ser expressa em função da variável de dano como:

$$\tilde{S} = S - S_o = S(1 - D_n) \quad (3.158)$$

Dessa forma, as tensões nominal σ e efetiva $\tilde{\sigma}$ são definidas por:

$$\sigma = \frac{F}{S} \text{ e } \tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} \quad (3.159)$$

Portanto, teremos:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{(1 - D_n)} \quad (3.160)$$

Como área íntegra é menor do que a nominal, para uma mesma força aplicada a tensão efetiva num meio danificado resulta comparativamente maior do que a tensão nominal. Em particular, nota-se que:

- ✚ $\tilde{\sigma} = \sigma$ Para material localmente íntegro;
- ✚ $\tilde{\sigma} \rightarrow \infty$ Para material totalmente danificado localmente.

Nota-se que no mesmo ponto a variável D_n pode assumir valores diferentes de acordo com a orientação da normal n . Essa característica

indica uma natureza tensorial para a variável que representa o dano no elemento de volume.

O chamado dano escalar tem correspondência com uma situação em que os microdefeitos apresentam no elemento de volume uma distribuição mais ou menos uniforme, de modo que segundo qualquer plano a medida de dano resulta a mesma, ou seja, independente da orientação da normal n . Em outras palavras, um único valor da variável de dano é suficiente para caracterizar completamente o estado local de deterioração.

$$D = D_n \forall n \quad (3.161)$$

3.6.3 Definição de Deformação Efetiva

Um conceito dual ao de tensão efetiva é o de deformação efetiva e também decorre da análise de uma situação de deformação uniaxial imposta ao elemento de volume orientado segundo uma certa direção definida pelo versor n . Seja, então Δl a variação do comprimento inicial l_o por efeito da deformação imposta. A medida de deformação linear nominal é definida pela relação:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_o} \quad (3.161)$$

Entretanto, se o elemento de volume possui inicialmente defeitos ou descontinuidades internas, elas se abrem de uma certa quantidade, que em conjunto pode ser representada por Δd . Assim sendo, no processo de deformação somente a parcela $\Delta l - \Delta d$ é que efetivamente deve ser considerada numa medida da deformação.

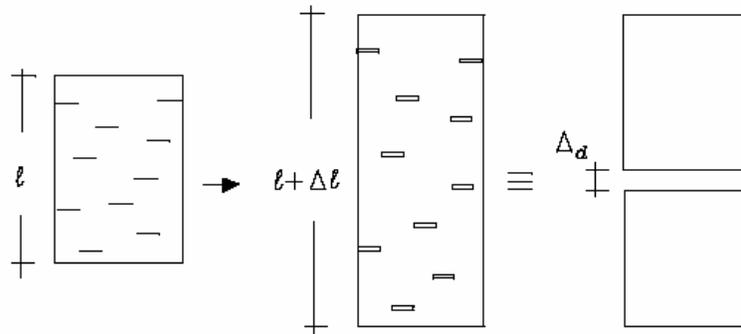


Figura 3.16. Acréscimo de comprimento devido à abertura de defeitos.

Segue daí que a medida efetiva da deformação linear pode ser definida como:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l - \Delta d}{l_o} \quad (3.162)$$

Uma segunda definição para uma variável de dano pode então ser proposta:

$$D_n^* = \frac{\Delta d}{\Delta l} \quad (3.163)$$

Nota-se que essa definição é também associada a uma certa direção n . levando-se em conta a nova variável do dano, segue que as medidas nominal e efetiva da deformação linear se relacionam por:

$$\tilde{\varepsilon} = (1 - D_n^*)\varepsilon \quad (3.164)$$

As duas variáveis escalares de dano outrora introduzidas (S_o e Δd) podem ser unificadas se for considerado que o volume correspondente à parte danificada é o mesmo nos dois casos. Esta consideração é bastante lógica, pois se trata de uma situação de solitação uniaxial sobre um mesmo volume, onde ora se analisa o equilíbrio das tensões ora a

compatibilidade das deformações. Assim sendo, o volume danificado pode ser representado de duas formas:

$$V_d = S_o \Delta l = S \Delta d \quad (3.165)$$

Levando-se em conta as relações anteriores é fácil verificar que $D_n = D_n^*$.

3.6.4 Princípios Gerais de Equivalências de Resposta Constitutivas

Os princípios descritos a seguir permitem que se formulem relações constitutivas para meios contínuos com dano, envolvendo medidas nominais de tensão e de deformação.

No âmbito dos meios contínuos, um axioma constitutivo fundamental é o da ação local, isto é: a resposta constitutiva num ponto não depende daquilo que ocorre nos elementos vizinhos. Estendendo-se esse axioma ao meio com dano, resulta que a relação constitutiva para um ponto na parte íntegra não é afetada pelo dano, porém nessa parte é importante lembrar que devem ser consideradas a tensão efetiva e a deformação efetiva.

Assim sendo, pode-se estabelecer um princípio geral de equivalência de resposta constitutiva:

“A lei constitutiva do meio danificado é obtida da lei constitutiva do meio íntegro donde o tensor de tensões é substituído pelo tensor de tensão efetiva e o tensor linear de deformações pelo tensor de deformação efetiva.”

(J. LEMAITRE & J.-L. CHABOCHE, 2002)

Restringindo-se a análise ainda ao caso uniaxial, e sendo o meio íntegro supostamente elástico linear, o princípio enunciado leva à seguinte relação:

$$\tilde{\sigma} = E \tilde{\varepsilon} \quad (3.166)$$

3.6.4.1 Relação Constitutiva Envolvendo Equivalência de Energia

Substituindo-se na relação anterior que definem $\tilde{\varepsilon}$ e $\tilde{\sigma}$, considerando que $\tilde{\varepsilon} = (1 - D_n^*)\varepsilon$, segue-se que:

$$\sigma = (1 - D)^2 E \varepsilon \quad (3.167)$$

Essa última relação vale então para o meio contínuo equivalente e envolve quantidades nominais. Nota-se, por outro lado, que:

$$\tilde{\sigma} \tilde{\varepsilon} = \sigma \varepsilon \quad (3.168)$$

Portanto, pode-se afirmar que o meio contínuo equivalente reproduz a mesma quantidade de energia do meio danificado. Por outro lado, observando-se a penúltima relação, pode-se definir o módulo secante de rigidez elástica \tilde{E} do meio danificado como :

$$\tilde{E} = (1 - D)^2 E \quad (3.169)$$

A relação anterior coloca em evidência a degradação do módulo de rigidez elástico inicial do material causada pela danificação. Isolando-se a variável de dano, obtém-se:

$$D = 1 - \left(\frac{\tilde{E}}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.170)$$

Essa relação indica que é possível identificar os valores de dano com base em medidas experimentais do módulo secante de rigidez elástica em ensaios uniaxiais com deformação controlada.

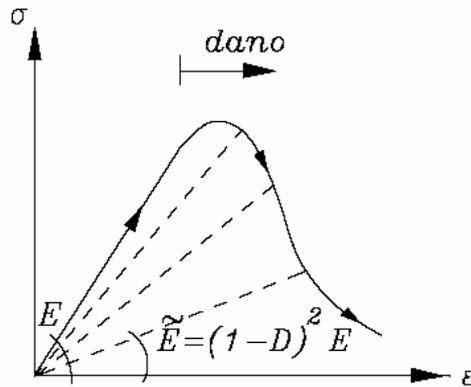


Figura 3.17. Variação da rigidez secante do meio contínuo equivalente.

3.6.4.2. Relação Constitutiva Envolvendo Equivalência de Deformação.

O princípio da equivalência de deformação, proposto por LEMAITRE & CHABOCHE (1985), diz que a deformação do meio íntegro onde atua a tensão efetiva é a mesma do meio danificado, ou seja: $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$. De modo mais formal, a redação do princípio é a seguinte:

“O estado de deformação de um material com dano é obtido da lei do comportamento do material íntegro onde o tensor de tensões é substituído pelo tensor de tensão efetiva.”

Esse princípio decorre da idéia de assimilar o meio, para fins da resposta unidimensional em estudo, como um arranjo de infinitas fibras em paralelo com resistências ligeiramente diferentes entre si, as quais se impõem uma mesma deformação. Em função das diferentes resistências as fibras vão progressivamente se rompendo, o que representa o processo de danificação.

Valendo o princípio, temos:

$$\frac{\sigma}{1-D} = E\varepsilon \quad \text{ou} \quad \sigma = (1-D)E\varepsilon \quad (3.171)$$

Nessa forma, o módulo secante de rigidez elástica \tilde{E} para um meio contínuo de resposta equivalente ao meio deteriorado resulta:

$$\tilde{E} = (1 - D)E \quad (3.172)$$

e a variável de dano pode ser identificada por :

$$D = 1 - \left(\frac{\tilde{E}}{E} \right) \quad (3.173)$$

3.6.4.3. Relação Constitutiva Envolvendo Equivalência de Tensão

A forma dual da equivalência anterior consiste em admitir que a tensão do meio íntegro onde atua a deformação efetiva é a mesma do meio danificado, ou seja: $\tilde{\sigma} = \sigma$. Uma justificativa para essa hipótese é a idealização do meio como um arranjo de estratos superpostos em série na direção do carregamento (sempre se tendo em vista o caso unidimensional).

Com a nova hipótese de equivalência temos:

$$\sigma = E \tilde{\varepsilon} \quad \text{ou} \quad \sigma = (1 - D)E\varepsilon \quad (3.174)$$

Segue que a variável de dano pode ser identificada por meio de uma relação idêntica ao que já foi demonstrado.

3.6.5 Forma Generalizada das Relações Constitutivas para casos Multiaxiais

A forma generalizada estabelece uma relação entre os tensores de segunda ordem de tensão e de deformação por meio de um tensor

constitutivo de rigidez secante elástica com dano. Esse tensor constitutivo pertence à família dos tensores de quarta ordem e um aspecto fundamental consiste em discutir suas propriedades, particularmente a simetria que, como se mostra em seguida, depende do tipo de equivalência adotada.

Um primeiro passo na direção da generalização em questão é a extensão dos conceitos de tensão e deformação efetivas apresentados no caso uniaxial.

De uma maneira geral é razoável imaginar que se um certo material inicialmente isótropo é submetido a um carregamento com uma certa direção definida, a microfissuração induzida também apresentará uma certa orientação. Assim sendo, pode-se então esperar que a danificação gere anisotropia. A danificação com preservação da isotropia pode ser admitida como um caso particular, justificável se a micro – fissuração se apresentar com orientação difusa.

Desses comentários conclui-se que as formas gerais devem contemplar a anisotropia e, nesse sentido a variável escalar de dano do caso unidimensional passa a assumir a natureza de um operador tensorial de quarta ordem.

Chama-se a atenção para a notação a ser adotada no que segue: os tensores de segunda ordem estarão representados por letras maiúsculas e os de quarta ordem por letras maiúsculas em negrito. Em particular o tensor de deformações passará a ser representado também pela letra E .

Introduzindo-se o tensor identidade de quarta ordem (\mathbf{II}), as formas generalizadas das expressões (2.16) e (2.20), referentes aos tensores de tensão e de deformação efetivas, podem ser dadas por:

$$\tilde{T} = (\mathbf{II} - \mathbf{D})^{-1} T \quad \text{e} \quad \tilde{E} = (\mathbf{II} - \mathbf{D})^T E \quad (3.175)$$

Observa-se que a transposição indicada no operador de deformação efetiva é proposital e facilita os desenvolvimentos algébricos que seguirão. Nota-se que, necessariamente, os tensores de quarta ordem das relações anteriores devem apresentar a chamada propriedade de simetria menor, pois relacionam tensores simétricos de segunda ordem.

A relação geral entre os tensores efetivos é então dada por:

$$\tilde{T} = \mathbf{E} \tilde{E} \quad (3.176)$$

onde \mathbf{E} é o tensor de rigidez secante elástica, de quarta ordem, simétrico, positivo e definido. Combinando-se as relações, obtém-se:

$$\begin{aligned} (\mathbf{II} - \mathbf{D})^{-1} T &= \mathbf{E}(\mathbf{II} - \mathbf{D})^T E \\ T &= (\mathbf{II} - \mathbf{D})\mathbf{E}(\mathbf{II} - \mathbf{D})^T E \end{aligned} \quad (3.177)$$

A expressão anterior pode ainda ser escrita na forma:

$$T = \tilde{\mathbf{E}} E \quad (3.178)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{E}} = (\mathbf{II} - \mathbf{D})\mathbf{E}(\mathbf{II} - \mathbf{D})^T \quad (3.179)$$

é o tensor de rigidez secante elástica do meio danificado. Nota-se que esse tensor é simétrico (com simetrias menor e maior).

Uma outra observação importante decorre do desenvolvimento da operação de produto interno entre os tensores efetivos das relações (2.179):

$$\begin{aligned} \tilde{T} \tilde{E} &= (\mathbf{II} - \mathbf{D})^{-1} T \cdot (\mathbf{II} - \mathbf{D})^T E \\ &= T \cdot (\mathbf{II} - \mathbf{D})^{-T} (\mathbf{II} - \mathbf{D})^T E \\ &= T \cdot E \end{aligned} \quad (3.180)$$

Portanto, a equivalência em energia é verificada com formas propostas para os tensores efetivos.

Dois outros tensores constitutivos de dano podem ser deduzidos considerando-se as equivalências em deformação e em tensão.

Assim, na primeira delas tem-se como condição que : $\tilde{E} = E$.
Combinando-se (2.180) e (2.178) tem-se então:

$$T = (\mathbf{II} - \mathbf{D})\mathbf{E} E \quad (3.181)$$

Nesse caso, o tensor de rigidez secante elástica do meio danificado fica expresso na forma:

$$\tilde{\mathbf{E}} = (\mathbf{II} - \mathbf{D})\mathbf{E} \quad (3.182)$$

o qual apresenta apenas a simetria menor.

Na equivalência em tensão tem-se como condição que $\tilde{T} = T$.
Combinando-se a segunda parte de (3.181) e (3.182), resulta, neste caso:

$$T = \mathbf{E}(\mathbf{II} - \mathbf{D})^T E \quad (3.183)$$

e o tensor de rigidez secante elástica do meio danificado passa a ser expresso na forma:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}(\mathbf{II} - \mathbf{D})^T \quad (3.184)$$

que também apresenta apenas simetria menor.

3.6.6 Tensores Isótopos e Anisotrópicos de Rigidez Secante com Dano Escalar

Entre as três possibilidades de equivalência analisadas, a de deformação tem sido a mais freqüentemente empregada e com base nela, expressa pela relação (3.184), é que se fazem os comentários que seguem.

Em primeiro lugar, nota-se que até o momento nada foi admitido quanto à forma do tensor de dano \mathbf{D} . Em particular, o caso de dano escalar é

recuperado adotando-se para sua forma: $\mathbf{D} = d\mathbf{II}$, onde d é um escalar. De fato, da relação (3.183) segue que:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}} &= (\mathbf{II} - d\mathbf{II})\mathbf{E} \\ &= (1-d)\mathbf{II}\mathbf{E} \\ &= (1-d)\mathbf{E}\end{aligned}\tag{3.185}$$

o que constitui uma generalização direta da relação (3.172).

O conceito de isotropia pode também estar associado à preservação das direções principais dos tensores de tensão correspondentes aos estados de meio íntegro e danificado. Claramente é o que ocorre com essa primeira particularização feita para o tensor \mathbf{D} , pois o escalar $(1-d)$ não altera as direções principais do tensor de tensões. Mas há algo mais: todas as componentes de tensor constitutivo são penalizadas igualmente por uma variável escalar de dano.

Ainda no âmbito da isotropia, ao tensor de dano pode-se dar a seguinte forma:

$$\mathbf{D} = d(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})\tag{3.186}$$

onde \mathbf{I} é um tensor identidade de segunda ordem. Nessas condições a relação fornece:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}} &= [\mathbf{II} - d(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})]\mathbf{E} \\ &= \mathbf{II}\mathbf{E} - d(\mathbf{I} \otimes \mathbf{E})\mathbf{I}\end{aligned}\tag{3.187}$$

A aplicação da relação anterior sobre um tensor de deformação leva à seguinte expressão para o tensor do meio danificado:

$$\begin{aligned}T &= [\mathbf{II} - d(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})]\mathbf{E}\mathbf{E} = \mathbf{E}\mathbf{E} - d(\mathbf{I} \otimes \mathbf{E})\mathbf{I}\mathbf{E} \\ &= \mathbf{E}\mathbf{E} - d(\mathbf{E}\mathbf{I}\mathbf{E})\mathbf{I} \\ &= \mathbf{E}\mathbf{E} - d\text{tr}(\mathbf{E}\mathbf{E})\mathbf{I}\end{aligned}\tag{3.188}$$

Ora, ocorre que a segunda parcela da relação acima é por definição a parte hidrostática do tensor de tensão do meio íntegro. Então, nesse caso a danificação tem reflexo sobre a parte hidrostática do tensor de tensão e não altera, portanto, as direções principais do tensor inicial; trata-se, portanto, de um caso de dano isótropo. Entretanto, vale observar que somente as componentes de tensão normal são penalizadas.

Os dois casos anteriores podem ser reunidos adotando-se para o tensor de dano a seguinte representação:

$$\mathbf{D} = d_1 \mathbf{II} + d_2 (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \quad (3.189)$$

Onde: d_1 e d_2 são agora duas variáveis escalares de dano.

Nessas condições resulta a seguinte relação para o tensor constitutivo de dano:

$$\tilde{\mathbf{E}} = [\mathbf{II} - d_1 \mathbf{II} - d_2 (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})] \mathbf{E} = (1 - d_1) \mathbf{E} - d_2 (\mathbf{I} \otimes \mathbf{E} \mathbf{I}) \quad (3.190)$$

A aplicação da relação anterior sobre um tensor de deformações conduz à seguinte expressão para o tensor de tensão do meio danificado:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= [(1 - d_1) \mathbf{II} - d_2 (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})] \mathbf{E} \mathbf{E} \\ &= (1 - d_1) \mathbf{E} \mathbf{E} - d_2 \text{tr}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{E} \mathbf{E}) \mathbf{I} \end{aligned} \quad (3.191)$$

Definindo-se a tensão normal média como: $\sigma_m = \frac{\text{tr}(\mathbf{E} \mathbf{E})}{3}$ e tomando-se um caso particular em que $3d_2 = 1 - d_1$, a expressão acima, passa a ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= (1 - d_1) (\mathbf{E} \mathbf{E} - \sigma_m \mathbf{I}) \\ &= (1 - d_1) \mathbf{S} \end{aligned} \quad (3.192)$$

Onde S simboliza a parte de desvio do tensor de tensões original.

Todas as formas adotadas até agora para o tensor de dano geram modelos escalares isotrópicos. Entretanto é possível propor modelos de dano escalar anisotrópicos e, nesses casos, os tensores de dano podem ser representados pela seguinte forma geral:

$$\mathbf{D} = \lambda(d)\mathbf{M} \quad (3.193)$$

onde $\lambda(d)$ é uma função de valor escalar envolvendo a variável de dano e \mathbf{M} é um tensor constante dito de anisotropia, pois seu efeito pode ser o de gerar um operador anisotrópico de rigidez secante com dano.

Concluindo, observa-se, sem maiores comentários, que modelos não – escalares de dano anisotrópico podem ser obtidos propondo-se para o tensor de dano a seguinte forma geral:

$$\mathbf{D} = \mathbf{M}(d) \quad (3.194)$$

Onde \mathbf{M} não é mais um tensor constante, mas dependente do nível de danificação e d pode ser uma variável de natureza tensorial superior (primeira ou segunda ordem).

Para o dano anisotrópico, temos:

$$\tilde{T} = M(D):T \quad (3.195)$$

Onde o símbolo $(:)$ indica o produto tensorial “contraído” de 2ª ordem e $M(D)$ é chamado de tensor efetivo de dano, como definido por Zhu e Cescotto (Zhu e Cescotto, 1995), em uma análise tri-dimensional:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-D_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-D_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-D_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{(1-D_1)(1-D_2)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{(1-D_1)(1-D_3)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{(1-D_2)(1-D_3)}} \end{bmatrix} \quad (3.196)$$

3.7 Autotensores na elasticidade anisotrópica

Como discutido em inúmeros artigos (MEHRABI & COWIN, 1990; BIEGLER & MEHRABADI, 1995; ARRAGON, *Et Al.*, 1999), os modelos para materiais anisotrópicos podem ser definidos em termos de autovalores e autotensores, como o resultado da decomposição espectral do tensor de elasticidade. Neste trabalho esta idéia foi aplicada para os materiais compósitos poliméricos reforçados por fibras. MEHRABADI e COWIN (1990) generalizaram as propriedades dos autotensores de elasticidade:

1. Na simetria do tensor de elasticidade, o tensor de tensões e o tensor de deformações podem ser decompostos como uma soma de seis ou menos autotensores de forma idêntica.
2. Na simetria do tensor de elasticidade, encontramos autotensores de tensão proporcionais aos autotensores de deformação, com uma forma idêntica.
3. Na simetria do tensor de elasticidade, a densidade de energia de deformação total, pode ser decomposta como uma soma de seis ou menos termos, cada termo contém um valor escalar produto dos autotensores de tensão e deformação. Estes termos representam os modos de energia separados.

Para identificar a relação entre os autotensores de tensão e deformação em um sólido anisotrópico, um tensor de rigidez de segunda categoria, $\underline{\underline{C}}$, como desenvolvido por MEHRABADI & COWIN (1990). Este tensor de tensão é representado por \underline{T} e o tensor de deformação é representado por \underline{E} . Os A-ésimos autovalores $\Lambda_{(A)}$ de $\underline{\underline{C}}$ satisfazem a equação

$$(\underline{\underline{C}} - \Lambda_{(A)} \underline{\underline{I}}) \underline{\underline{\hat{E}}^{(A)}} = 0 \quad (3.197)$$

onde $\underline{\underline{\hat{E}}^{(A)}}$ é o A-ésimo autotensor de deformação e $\underline{\underline{I}}$ é o tensor identidade.

Para a primeira propriedade, a deformação total é a soma de todas as autodeformações. Similarmente, a tensão total pode ser encontrada somando-se os autotensores. A segunda propriedade pode ser escrita, em função dos A-ésimos autovalores, como,

$$\underline{\underline{\hat{T}}^{(A)}} = \Lambda_{(A)} \underline{\underline{\hat{E}}^{(A)}} \quad (3.198)$$

A terceira propriedade pode ser representada, por:

$$2.\zeta = \sum_{A=1}^n \underline{\underline{\hat{T}}^{(A)}} \cdot \underline{\underline{\hat{E}}^{(A)}}, \quad (3.199)$$

onde ζ é a densidade de energia de deformação total contudo, nota-se que existem autos modos de energia independentes. Estes modos de energia disjuntos são usados para configurar os critérios de falha.

3.8 Revisão breve de critérios de falhas em materiais Anisotrópicos

Esta pesquisa foi desenvolvida a partir da idéia de MEHRABADI e COWIN (1990), BIEGLER e MEHRABADI (1995), SCHREYER e ZUO (1995), e ARROMON, et Al (2000). As formulações baseadas nos critérios

de falha partem para a idéia de decomposição espectral do tensor de elasticidade, chamado de modos Kelvin, MEHRABADI e COWIN (1990) introduziram esta idéia e definiram os modos Kelvin detalhadamente.

De acordo com estas teorias, a energia de deformação, U , é decomposta em uma soma de modos de energia, $U^{(A)}$. Após estes modos de energia terem sido definidos para um determinado material, os valores limites são determinados a partir de ensaios. BIEGLE e MEHRABADI (1995) e SCHREYER e ZUO (1995) predisseram a ocorrência de falhas para valores limites em cada modo. Este critério de falhas é baseado nos modos de Kelvin. Este método apresenta diferenças na resistência à compressão na tração, ARRAMON, *et al* (2000) propôs avaliar o critério de falha para autotensores máximas e mínimas, separadamente.

$$2.\Lambda_{(A)}U_{(T)}^A = (\delta_T^{(A)})^2 \text{ e } 2.\Lambda_{(A)}U_{(C)}^A = (\delta_C^{(A)})^2 \quad (3.200)$$

onde δ_T^A são as autotensões de tração determinados a partir dos ensaios e δ_C^A são as autotensões de compressão, também determinados em ensaios.

Aplicando o modo Kelvin temos:

$$(\delta^{(A)} - \delta_T^{(A)}).(\delta^{(A)} - \delta_C^{(A)}) = 0 \quad (3.201)$$

ARRAMOL, *et al* (2000) apresenta uma abordagem para tensões principais.

$$(\delta^{(P)} - \delta_T^{(P)}).(\delta^{(P)} - \delta_C^{(P)}) = 0 \quad (3.202)$$

onde:

$\delta_T^{(P)}$: Tensão máxima principal de tração

$\delta_C^{(P)}$: Tensão máxima principal de compressão

de uma forma geral, temos:

$$(\delta^{(P)} - \delta_T^{(P)}).(\delta^{(P)} - \delta_C^{(P)}) = 0, \text{ e } (\delta^{(A)} - \delta_T^{(A)}).(\delta^{(A)} - \delta_C^{(A)}) = 0, A= 1, k \quad (3.203)$$

onde K é o número de modos Kelvin.

3.9 Aspectos Gerais a Respeito de Medições

Dentre as diversas formas existentes para medir a danificação em um material, apresentam-se alguns conceitos básicos utilizados para sua medida.

3.9.1 Medida Direta:

Define-se o dano (D) como sendo a medida direta que consiste na relação entre a área total fissurada (δS_D) e a área total da superfície (δS), em média escala. Portanto tem-se:

$$D = \frac{\delta S_D}{\delta S} \quad (3.204)$$

Uma técnica auxiliar para a determinação da área fissurada é a verificação da superfície do Elemento de Volume Representativo (EVR), por meio de uma análise por geometria fractal, por exemplo.

Se o dano consiste em microtrincas que não são homogeneamente distribuídas no EVR, há a possibilidade de se obter uma trinca em algum plano de intersecção. Este dano só poderá ser avaliado por medidas em linha com a intersecção e o plano de observação das microtrincas. Um dano isotrópico equivalente pode ser obtido da seguinte forma: considera-se uma micromecânica composta por “ n ” células de medidas $dx dx dx$, onde é localizada uma trinca de tamanho aparente “ a_i ”, conforme a figura 3.18., considerando uma trinca em cada quadrado, para simplificar o dano no plano da trinca para cada célula “ i ” é:

$$D_i = \frac{\delta S_D}{\delta S} \cong \frac{a_i^2}{d^2} \quad (3.205)$$

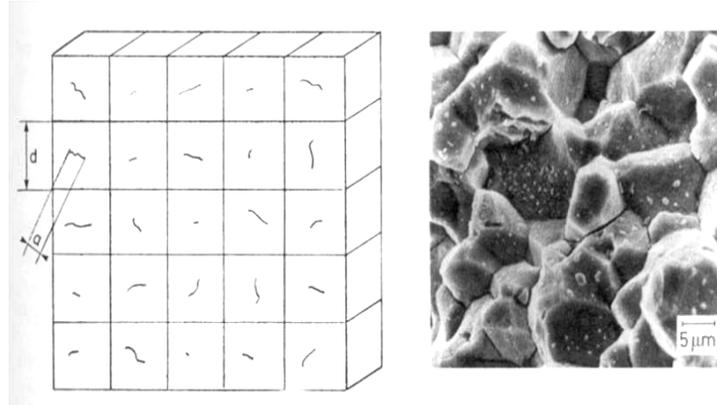


Figura 3.18. Modelo de uma Microestrutura e a Evolução Direta do Dano. (J. Lemaitre (1996) *apud* L. Engel, H. Klingele e C. Lienard)

O dano isotrópico equivalente no plano de observação das “ n ” células é dado como a medida de cada célula. A variável contínua é definida para uma quantidade discreta e homogênea, como sendo:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{d^2}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{nd^2} \quad (3.206)$$

Se considerarmos uma micrografia com dimensão “ l^2 ”, considerando corresponder a “ n ” células e “ n ” fissuras, a superfície da micrografia pode ser expressa, como:

$$l^2 = n.d^2 \quad (3.207)$$

O valor do Dano é dado, como simplesmente.

$$D = \frac{\sum a_i^2}{l^2} \quad (3.208)$$

3.9.1.1 Variação do Módulo de Elasticidade:

Esta é uma medida indireta, baseada na influência do dano na elasticidade.

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E(1-D)} \quad (3.209)$$

Esta técnica, por ser um método destrutivo requer a confecção de corpos-de-prova, para se realizar o ensaio mecânico. É assumida uma distribuição de dano uniforme e homogêneo na seção analisada.

Se $\tilde{E} = E(1-D)$ é considerado como sendo o módulo de elasticidade do material danificado, os valores do dano podem ser obtidos a partir da medida de \tilde{E} , assim teremos:

$$D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E} \quad (3.210)$$

Este método requer medidas muito precisas das deformações, por meio de “*Strain Gauges*” (Extensômetros de resistência elétrica) que são comumente utilizados. A variável \tilde{E} é medida durante o descarregamento.

Um exemplo é dado na figura 3.19, para um dano dúctil em cobre, induzido por meio de grandes deformações, onde σ_v é a tensão real, dada por $\sigma_v = \sigma(1 + \varepsilon)$.

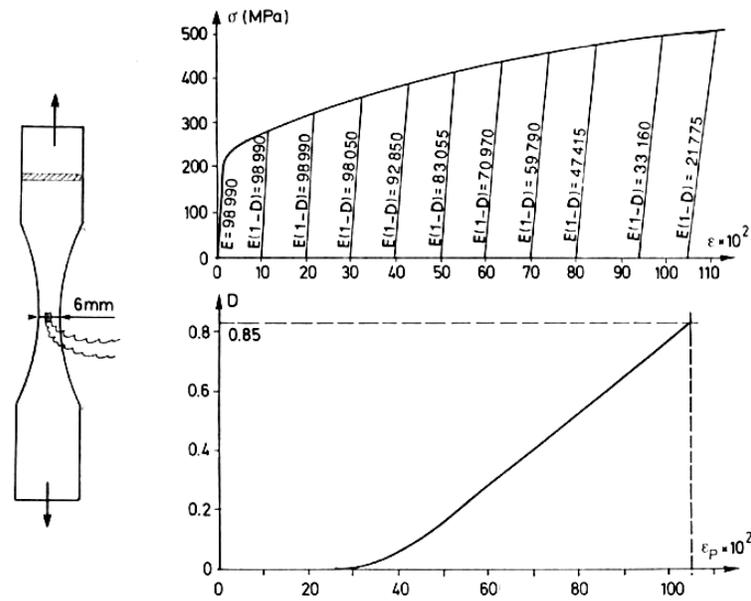


Figura 3.19. Medidas de dano dúctil em um cobre (99,9% de pureza), em sala com temperatura controlada. (Por J. Lemaitre (1996) *apud* J. Dufailly)

Em polímeros ou compósitos, para considerar os efeitos de viscosidade e viscoelasticidade a taxa de deformação durante o descarregamento deve ser a mesma utilizada na determinação do E e \tilde{E} . Um exemplo de medição do dano em um compósito carbono-carbono é visto na figura 3.20.

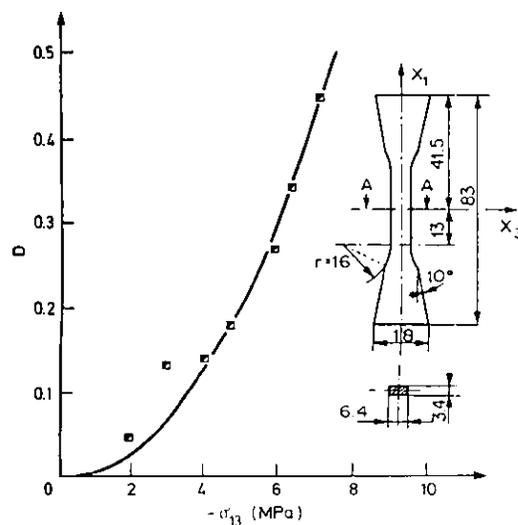


Figura 3.20. Evolução do Dano frágil em um compósito carbono-carbono (Por J. Lemaitre (1996) *apud* M. Poss).

Obs.: para concreto é importante checar a “uniformidade” da distribuição das trincas, pois o método não é válido para uma má distribuição das trincas. Um exemplo é mostrado na figura 3.21.

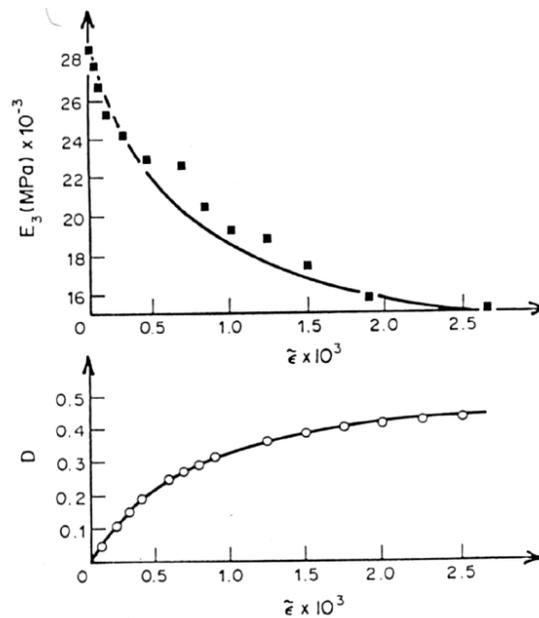


Figura 3.21. Evolução do Dano frágil em compressão em concreto de $\sigma_u = 40MPa$ (Por J. Lemaître (1996) *apud* J. Mazars).

3.9.1.2 Propagação de Ondas Ultrasônicas:

Outra técnica para avaliar o dano baseado na variação do módulo de elasticidade, consiste em medir a velocidade de ondas ultrasônicas.

Para freqüências acima de 200 MHz a velocidade longitudinal v_L e a velocidade transversal v_T , podem ser dadas por:

$$v_L^2 = \frac{E}{\rho} \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{e} \quad v_T^2 = \frac{E}{\rho} \frac{1}{2(1+\nu)} \quad (3.211)$$

Onde:

E : Módulo de Elasticidade Longitudinal

ρ : Densidade

ν : Coeficiente de Poisson

Podemos ainda escrever o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson, como função das velocidades longitudinais e transversais das ondas. Portanto, tem-se:

$$E = \rho v_T^2 \frac{3v_L^2 - 4v_T^2}{v_L^2 - v_T^2} \quad \text{e} \quad \nu = \frac{1}{2} \frac{v_L^2 - 2v_T^2}{v_L^2 - v_T^2} \quad (3.212)$$

Assim, a medida da velocidade longitudinal da onda em um material danificado, é dada por:

$$\tilde{\nu} = \frac{\tilde{E}}{\tilde{\rho}} \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (3.213)$$

Onde:

\tilde{E} : Módulo de Elasticidade Longitudinal danificado.

$\tilde{\rho}$: Densidade modificada.

O coeficiente de Poisson não varia com o dano, para o caso de um material isotrópico e a variável dano um escala. Portanto, pode-se calcular o dano, como sendo:

$$D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E} = 1 - \frac{\tilde{\rho} v_L^2}{\rho v_L^2} \quad (3.214)$$

Se o dano consistir basicamente em microtrincas ou pequenas cavidades, pode-se considerar $\left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho} = 1 \right)$. Assim tem-se:

$$D \cong 1 - \frac{v_L^2}{v_L^2} \quad (3.215)$$

Este método é considerado não-destrutivo. Para medir a velocidade v_L ou o tempo de propagação da onda, ao longo de uma espessura é necessário limitá-la por duas superfícies. Caso a distribuição de dados não seja uniforme pode-se dividir a espessura em medidas coerentes com o EVR.

A limitação deste método está relacionada com o tamanho, a ser analisado, por exemplo, em metais o tamanho necessário é bem menor que os transdutores ultrassônicos. Normalmente este método dá bons resultados, quando aplicado a estruturas de concreto.

As faixas de freqüências de uso, são:

- ✚ 1,0 a 5,0 MHz para Metais
- ✚ 0,1 a 5,0 MHz para Polímeros
- ✚ 0,1 a 5,0 MHz para Madeiras
- ✚ 0,1 a 1,0 MHz para Concreto

Este método pode ser utilizado em “*situ*”.

3.9.1.3 Variação da Densidade:

No caso do dano dúctil, os defeitos são cavidades, as quais pode-se assumir como sendo esferas, cuja soma dos seus volumes incrementa o dano. O correspondente decréscimo da densidade é mensurável a partir do princípio de Arquimedes.

Se $\frac{(\tilde{\rho} - \rho)}{\rho}$ é a variação relativa da densidade entre o estado danificado

$(\tilde{\rho})$ e o estado inicial integro (ρ) , é fácil adequar medidas micromecânicas, considerando as cavidades esferas de raio r em um EVR esférico de raio R e massa m . Relacionando o dano D com a variação da densidade ou porosidade, desprezando microtensões residuais, tem-se:

$$\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad \text{e} \quad \tilde{\rho} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)} \quad (3.216 \text{ e } 3.217)$$

Logo,

$$\frac{\tilde{\rho} - \rho}{\rho} = \frac{R^3}{R^3 + r^3} - 1 = -\frac{r^3}{R^3 + r^3}, \text{ portanto,}$$

$$D = \frac{\delta S_D}{\delta S} = \frac{\pi r^2}{\pi (R^3 + r^3)^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{r^3}{R^3 + r^3} \right)^{\frac{2}{3}} \therefore D = \left(1 - \frac{\tilde{\rho}}{\rho} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (3.218)$$

3.9.1.4. Variação da Resistência Elétrica:

A intensidade da corrente elétrica efetiva pode ser definida de forma análoga à tensão efetiva, como:

$$\tilde{i} = \frac{i}{(1-D)} \quad (3.219)$$

Dada uma diferença de potencial V , a lei de Ohm para o estado íntegro, garante que:

$$V = r \frac{l}{S} i \quad (3.220)$$

Onde:

l : Comprimento

S : Área

r : Resistividade

Analogamente, tem-se para o estado danificado,

$$\tilde{V} = \tilde{r} \frac{l}{S} \tilde{i} \quad (3.221)$$

Como a resistividade \tilde{r} é afetada pelo dano, devido unicamente à mudança do volume $\frac{(\tilde{\rho} - \rho)}{\rho}$. A lei de Bridgman nos dá \tilde{r} , como:

$$\tilde{r} = r \left(1 + k \frac{\rho - \tilde{\rho}}{\rho} \right) = r \left(1 + k D^{\frac{3}{2}} \right) \quad (3.222)$$

K é um coeficiente que para metais é aproximadamente igual a 2.

Se a intensidade de corrente i é considerada para os elementos danificados e íntegros, o dano D pode ser expresso de duas formas,

$$\frac{V}{\tilde{V}} = \frac{r}{\tilde{r}} \frac{\frac{l}{S} i}{\frac{l}{S} i} \therefore D = 1 - \frac{V}{\tilde{V}} \frac{\tilde{r}}{r} \quad (3.223)$$

Mas,

$$\lim_{D \rightarrow 0} \left(\frac{\tilde{r}}{r} \right) = 1, \text{ logo } D \cong 1 - \frac{V}{\tilde{V}} \quad (3.224)$$

Este método é chamado de “Potencial Drop Method” (J. Lemaitre, 1996)

Algumas comparações entre os resultados obtidos a partir deste método e o método de variação do módulo de Elasticidade $D = 1 - \left(\tilde{E}/E \right)$ são mostradas na figura 3.22.

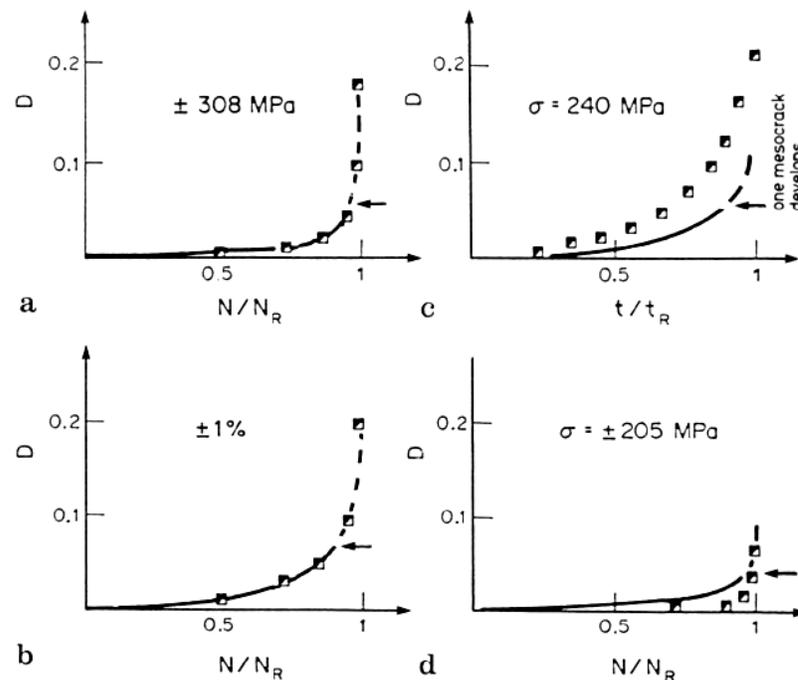


Figura 3.22. Comparação entre a medida do dano por variação do potencial elétrico e por **a)** Mudança do módulo de elasticidade para o aço inoxidável A316, por fadiga a tensão controlada, **b)** mudança do módulo de elasticidade por fadiga a deformação controlada, mo aço inoxidável A316, **c)** método por fluência terciária em uma superliga IN 100 a 1.000 °C, **d)** Resposta cíclica plástica com tensão controlada de uma superliga IN 1000°C. (Por J. Lemaitre (1996) *apud* G. Caillaud)

O dano medido durante o ensaio de tração necessita de uma correção no comprimento $[l(l + \varepsilon)]$ e na área $[S(1 - 2\nu\varepsilon_e - \varepsilon_p)]$. Os resultados obtidos neste método são notáveis, na prática.

4 ANÁLISE EXPERIMENTAL E SIMULAÇÃO NUMÉRICA

“Onde está o sábio? Onde está o escriba? Onde está o inquiridor deste século? Porventura não tornou Deus louca a sabedoria deste mundo?. Porque os judeus pedem sinal, e os gregos buscam sabedoria;”

(1 Co 1:20, 22).

4.1 ANÁLISE EXPERIMENTAL

4.1.1. Caracterização do Material

4.1.1.1. Caracterização Química do Material

O material utilizado nesta pesquisa foi doado pela COELCE. Este material consiste do núcleo dos isoladores poliméricos de alta tensão, composto por matriz epóxi reforçada por fibras de vidro. Recebeu-se 20 amostras destes isoladores, cujas características foram investigadas em

laboratório para se identificar a proporção de carga inorgânica deste compósito e assim iniciar o processo de análise mecânica necessária a caracterização do processo de danificação do material.

Características Físicas:

Material sólido, moldado na forma de bastão. Muito duro. Quando "quebrado" apresenta-se de duas formas: parte como um pó de aspecto vítreo cortante e parte na forma de filamentos fibrosos.

Preparação de Filmes:

A amostra foi solúvel em clorofórmio (sob aquecimento). A parte solúvel foi colocada em placas de vidro e expostas à temperatura ambiente para eliminação do solvente. Foram obtidos filmes não muito transparentes. Os filmes foram também aquecidos em estufa a 80°C por 2h, procedimento adequado para completa eliminação do solvente. A capacidade de formar filmes com essas características é própria de materiais poliméricos.

Obs.: O teor de material polimérico contido na mistura é aparentemente muito pequeno.

Análise Térmica:

Filmes preparados, por evaporação do solvente, em placas de vidro foram submetidos a aquecimento em estufa por 3 horas a 80°C. Após o aquecimento manteve-se inalterada. Tais características são próprias de polímeros acrílicos.

Solubilidade:

Pequenas quantidades da amostra foram colocadas em tubos de ensaio e a cada um deles foi adicionado um pequeno volume de solvente. O sistema foi testado (também sob aquecimento) apenas para os solventes (acetona, clorofórmio, toluol, metanol, álcool) abaixo relacionados, registrados na tabela 1.

Obs.: As amostras não foram totalmente solúveis na maioria dos solventes orgânicos.

Análise Espectroscopia na Região do Infravermelho:

Os espectros foram obtidos em equipamentos FTIR/Perkin Elmer-Spectrum-one.

Condições de Análise:

Na forma de pastilha em KBr, obteve-se:

- Do compósito na forma original (I)
- Da parte do material solúvel em clorofórmio (I)
- Do material não solubilizado em clorofórmio (III)

Os espectros de absorção na região do infravermelho (FTIR) das amostras são mostrados nas figuras 4.1, 4.2 e 4.3. As atribuições das principais bandas são apresentadas na tabela 4.1.

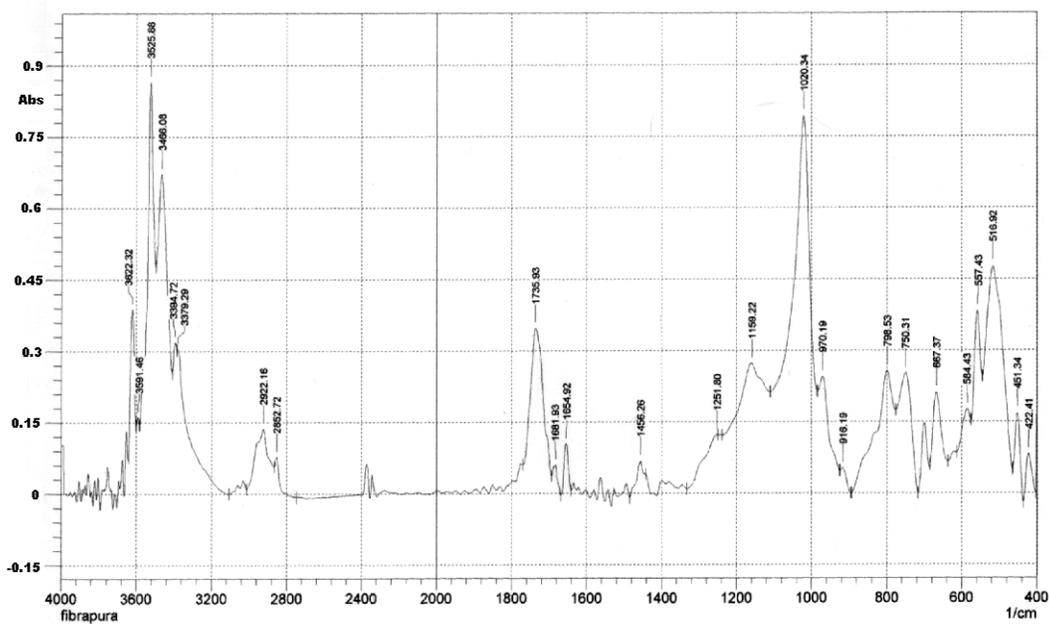


Figura 4.1. Compósito na forma original.

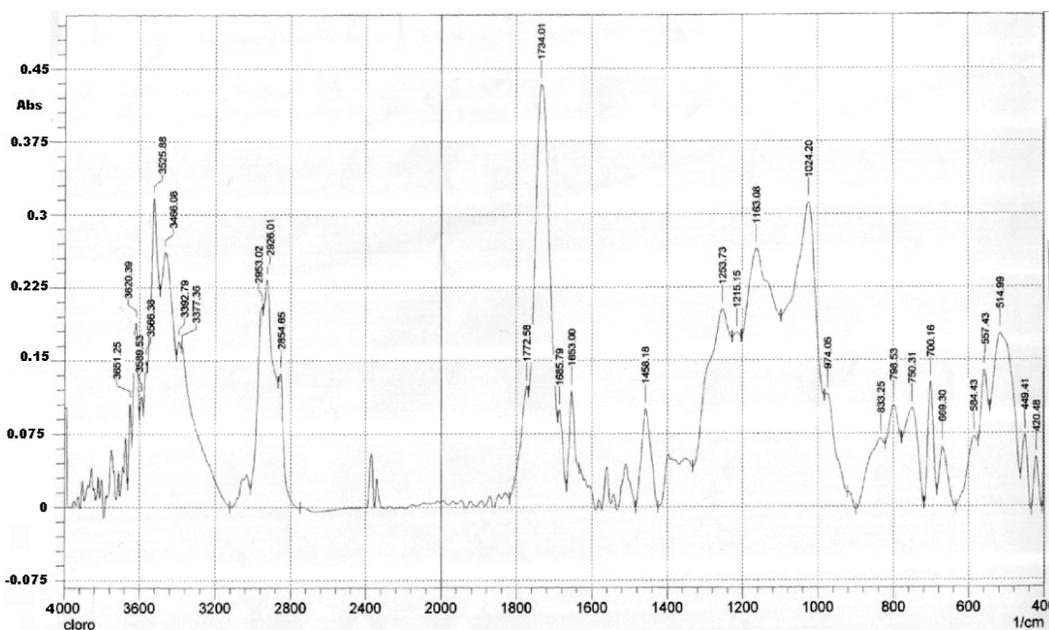


Figura 4.2. Amostra das partes solúvel no clorofórmio.

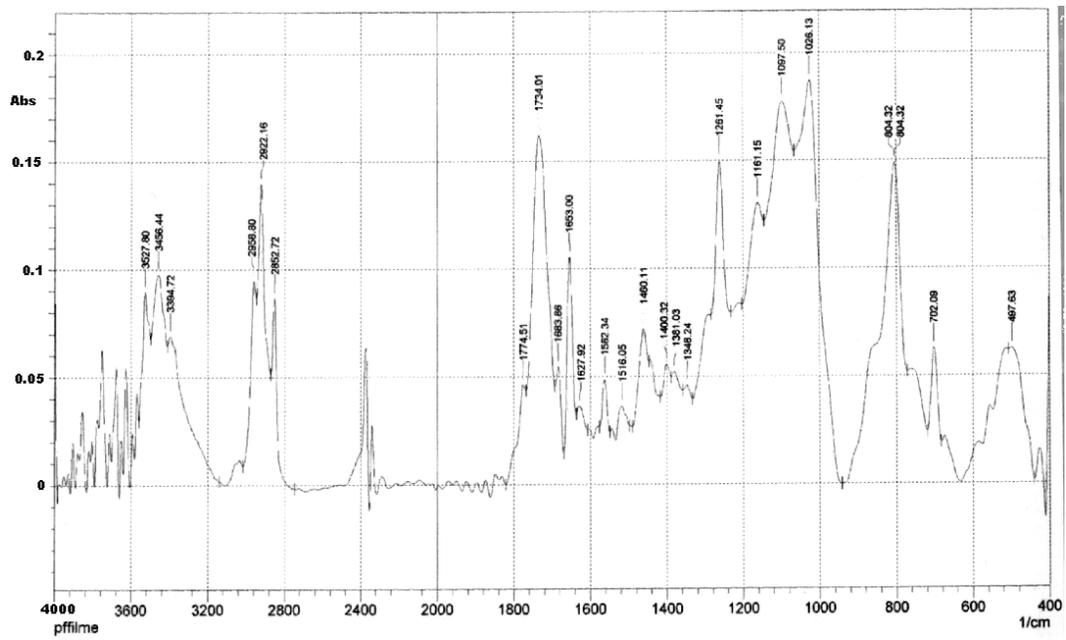


Figura 4.3. Material solubilizado em cloróformio.

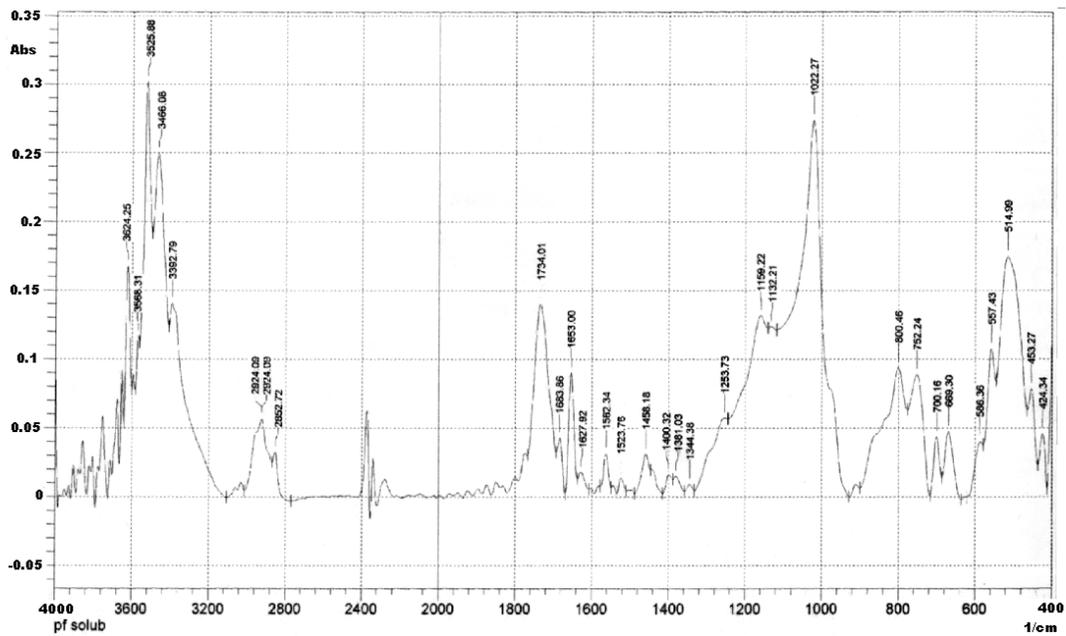


Figura 4.4. Material não solúvel em cloróformio.

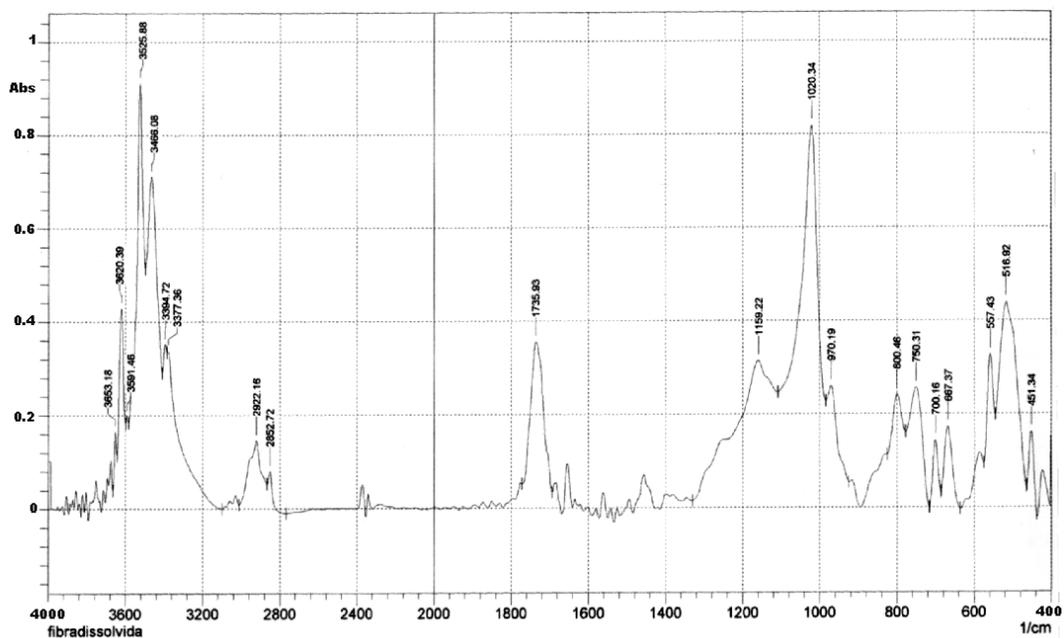


Figura 4.5. Fibra seca sem vestígios de solvente.

Tabela 4.1: Atribuição das bandas de absorção na região do infravermelho das amostras:

N° de ordem (cm^{-1}) (I)	Atribuições
3640~3250	ν OH
~2950	ν C-H
~2922	ν C-H
2852	ν C-H
~1730	$\nu_{\text{sim}} \text{C}=\text{O}$
~1653	$\nu_{\text{assim}} \text{C}=\text{O}$
~1460	δCH_2
~1255	ν C-O-C
~1020	δ C-O
~645-575	δ O-C-O

A análise espectral mostrou a presença de grupos predominantes, como os apresentados na tabela (OH, CH, C=O, CH₂), indicando a presença de polímero acrílico. Esta característica foi evidenciada pela presença da banda em torno de 1730 cm^{-1} , atribuídas a carbonila e reforçada pela observação de que a amostra não foi alterada no teste do aquecimento a 80°C (para diferenciar entre polímeros acrílico e polímeros vinílicos).

Os espectros de todas as amostras apresentaram o mesmo perfil. Em todas as amostras (material original/compósito), parte solúvel em clorofórmio e parte insolúvel em clorofórmio há indícios da presença de polímero acrílico. Na parte solúvel no solvente (e que forma um filme) o teor de componentes acrílico é maior (identificado pela maior intensidade das amostras das bandas representativas)

Análise Termogravimétrica (TGA):

Para obtenção da curva TGA foi utilizado o equipamento da Shimadzu-TGA 50, do laboratório de polímeros vinculado ao departamento de química orgânica e inorgânica da Universidade Federal do Ceará. Cerca de 10 mg da amostra foi aquecida a uma taxa de aquecimento de 10°C/min, atmosfera de nitrogênio. A curva termogravimétrica está ilustrada na figura 4.6.

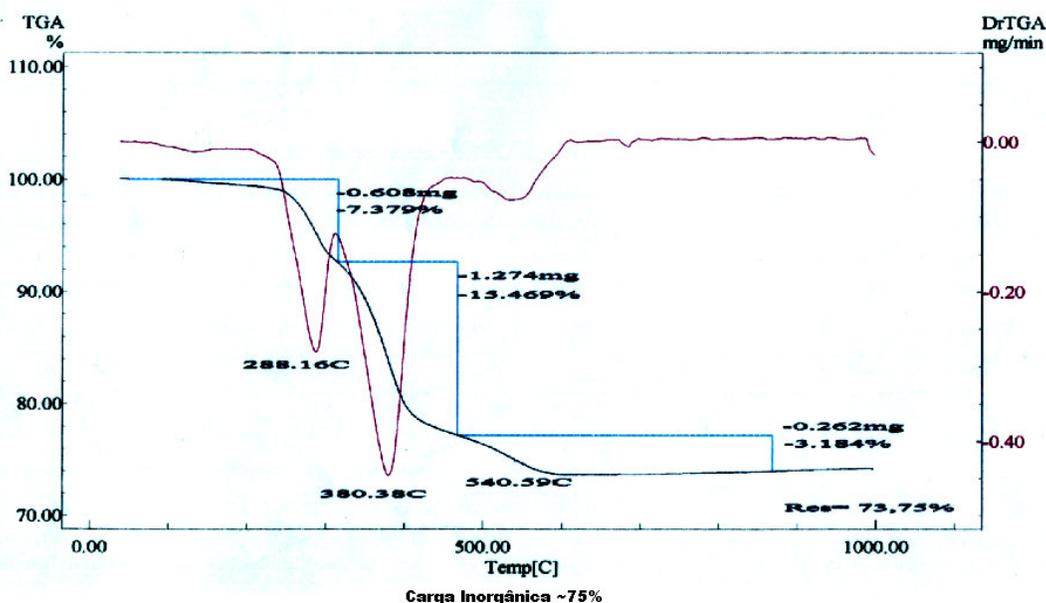


Figura 4.6. TGA em atmosfera de ar.

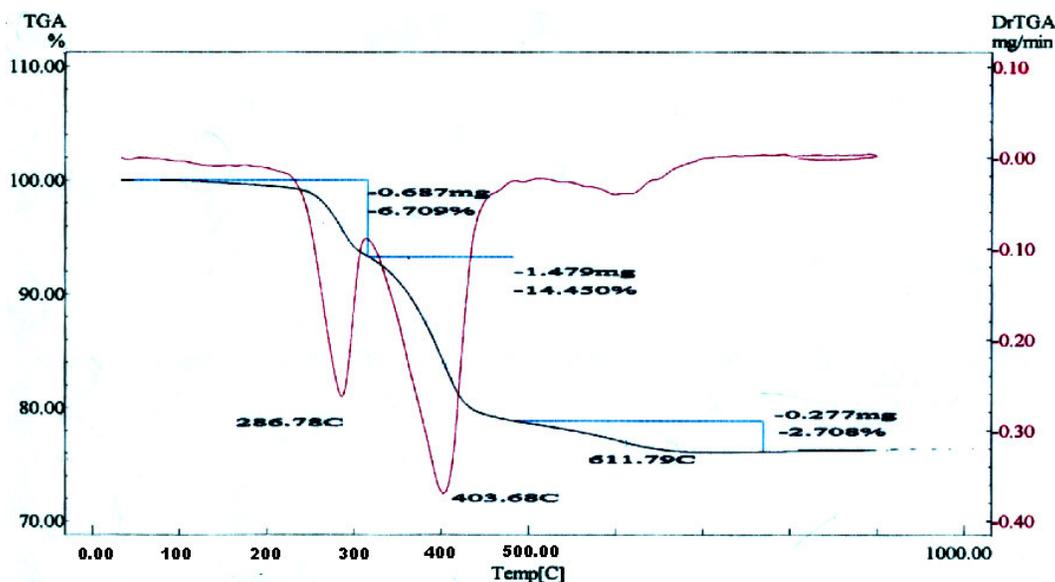


Figura 4.7. TGA em atmosfera de nitrogênio.

A amostra apresenta estabilidade térmica até ~240°C quando inicia o processo de decomposição, que ocorre em 3 etapas principais, até formar um resíduo de cerca de 75%, constituído provavelmente de carga inorgânica.

O evento máximo de decomposição ocorre em 380°C, sendo também observados outros eventos em 288 e 545°C. O teor residual de cerca de 75%. Este conteúdo refere-se a carga inorgânica (provavelmente óxidos de silício e/ou outros óxidos metálicos (Al, Ba, Zr, Ca, dentre outros) e de carbono.

Calorimetria Exploratória Diferencial (DSC):

Este experimento identifica propriedades físicas do componente polimérico do compósito. (Para obtenção da curva DSC foi utilizado o equipamento da Shimadzu-50). Esta caracterização foi realizada também no Laboratório de Polímeros do departamento de química orgânica e inorgânica da Universidade Federal do Ceará.

A curva DSC (figura 4.8) apresenta um evento em torno de 105°C, provavelmente relacionado à transição vítrea (T_g) do material. Esta característica é própria de polímero acrílico, provavelmente PMMA (polimetil metacrililato)

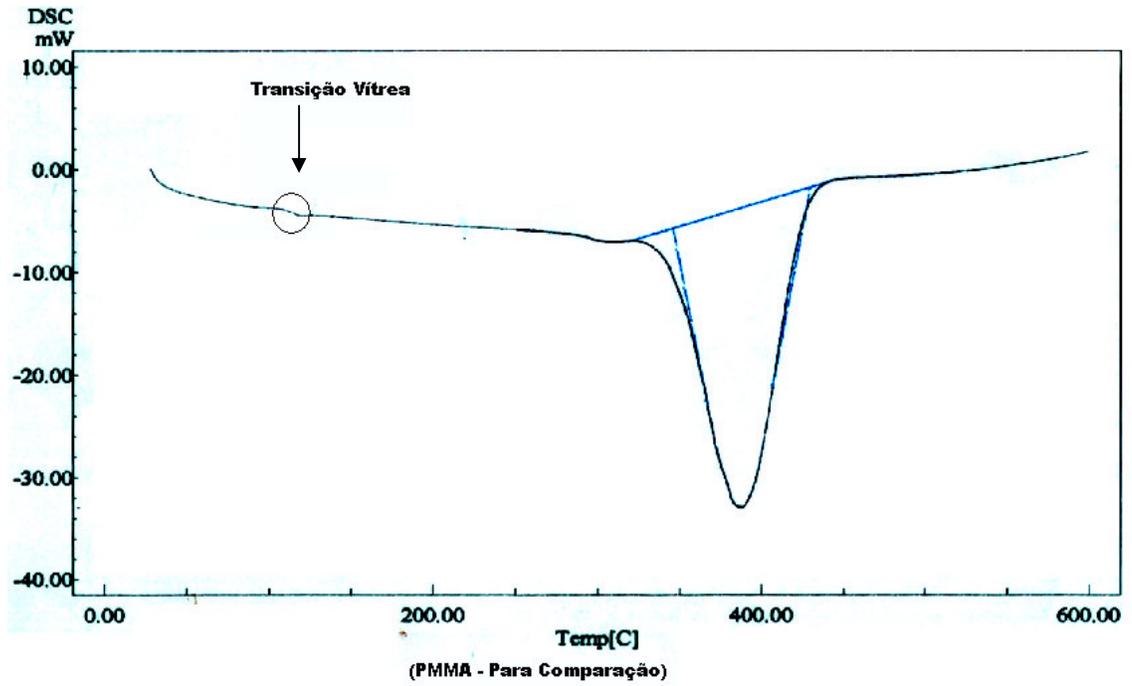


Figura 4.8. Curva DSC relacionada a transição vítrea, provavelmente em PMMA.

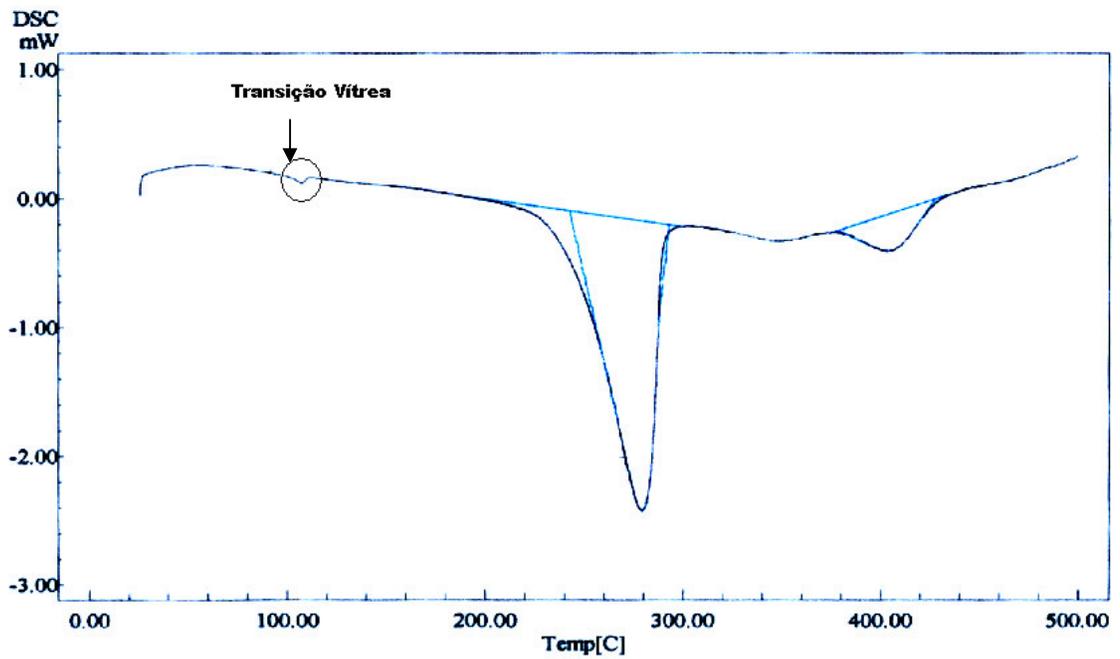


Figura 4.9. Curva DSC relacionada a transição vítrea em polímero + Fibra de Vidro.

4.1.1.2. Caracterização Mecânica do Material

Ensaio de Tração

Para obtenção da curva Tensão x Deformação, foi utilizada a Máquina Universal de Ensaio marca MAN, modelo TIRA Test 24250 da Divisão Tecnológica de engenharia civil do Núcleo de Tecnologia do Estado do Ceará. Esta máquina apresenta certificado de calibração DIMME nº 1730.

A partir de diversos ensaios de tração em corpos-de-prova, conforme apresentado na figura 4.10.



Figura 4.10. Ensaio de tração em corpos-de-prova de fibra de vidro.

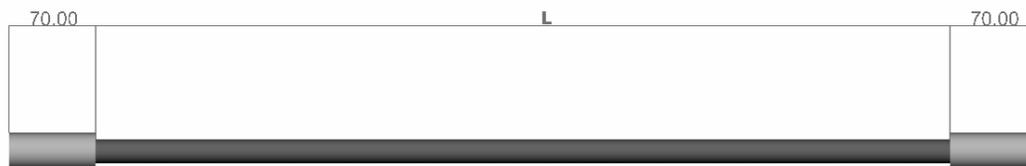


Figura 4.11. Desenho do Corpo de Prova.

Os gráficos apresentaram oscilações, isto se deve ao rompimento das fibras e da modificação da interação fibra/matriz. Assim, a capacidade de resistência mecânica do bastão diminuiu. Porém, verificou-se que esta degeneração é gradativa havendo trechos de recuperação.

Estas amostras foram projetadas para suportar uma carga máxima de até 120 kN.



Figura 4.12. Ensaio de tração em corpos-de-prova de fibra de vidro (detalhe da Fixação).

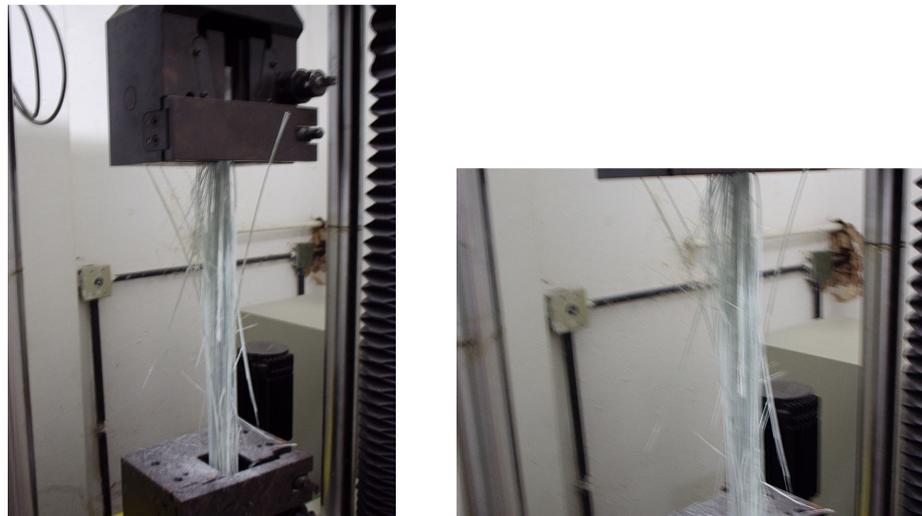


Figura 4.13. Ensaio de tração em corpos-de-prova de fibra de vidro (detalhe da ruptura).

Procedimento

Para o ensaio foram utilizados dez amostras, do Núcleo de Isoladores Poliméricos de Alta Tensão, de Fibra de Vidro, doados pela Companhia de Eletricidade do Estado do Ceará (COELCE). Estes têm o formato cilíndrico e dispõem de fibras contínuas no sentido longitudinal.

Para todas as amostras utilizou-se os mesmos parâmetros de velocidade e critério de parada.

Um Corpo-de-Prova de cada vez foi sendo fixado na máquina através de suas garras, nas superfícies de ferro fundido que existem nas suas extremidades para garantir que o mesmo não venha a ser submetido a tensões de esmagamento.

Resultados do Ensaio de Tração

Corpo-de-Prova 1

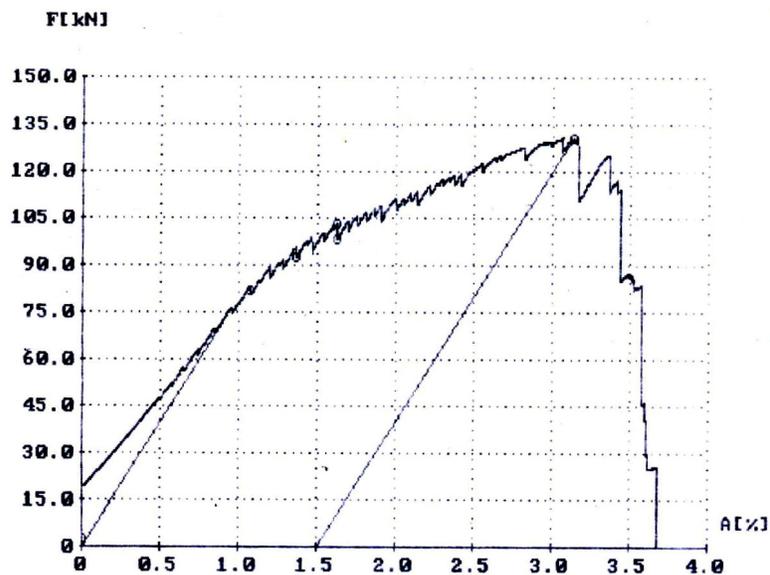


Figura 4.14. Força x deformação (d=19,1 mm e L=595 mm).

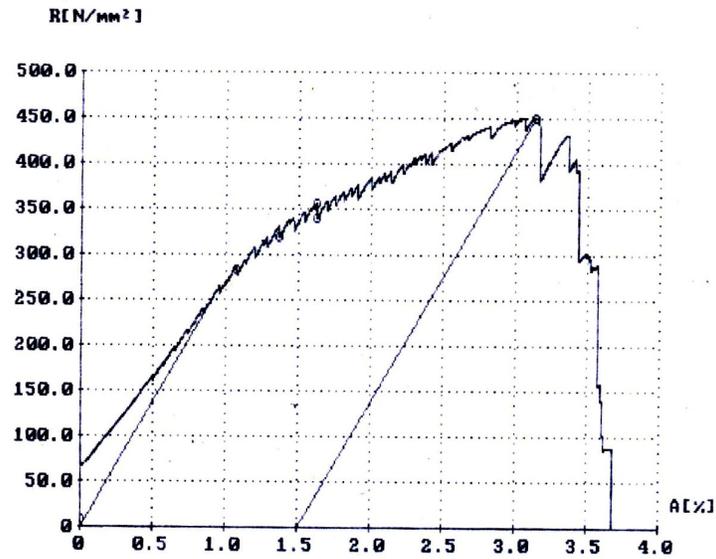


Figura 4.15. Tensão x deformação (d=19,1 mm e L=595 mm).

Resultados Obtidos:

Tabela 4.2: Resultados do Ensaio de Tração Uniaxial.

F_m (N)	R_m (N/mm ²)	ReH (N/mm ²)	ReL (N/mm ²)	Ae (%)	$Rp\ 0,05$ (N/mm ²)	$Rp\ 0,2$ (N/mm ²)	Ag (%) / mm
130740	451,56	357,73	340,10	0,41	284,80	319,79	1,51 / 8,925

Onde:

F_m – Carga Máxima.

R_m – Resistência à tração do material.

ReH – Ponto de rendimento superior.

ReL – Ponto de rendimento inferior.

Ae – Tensão plástica limite no ponto de rendimento inferior.

Rp – Tensão limite na região plástica.

Ag – Porcentagem de deformação até a fratura.

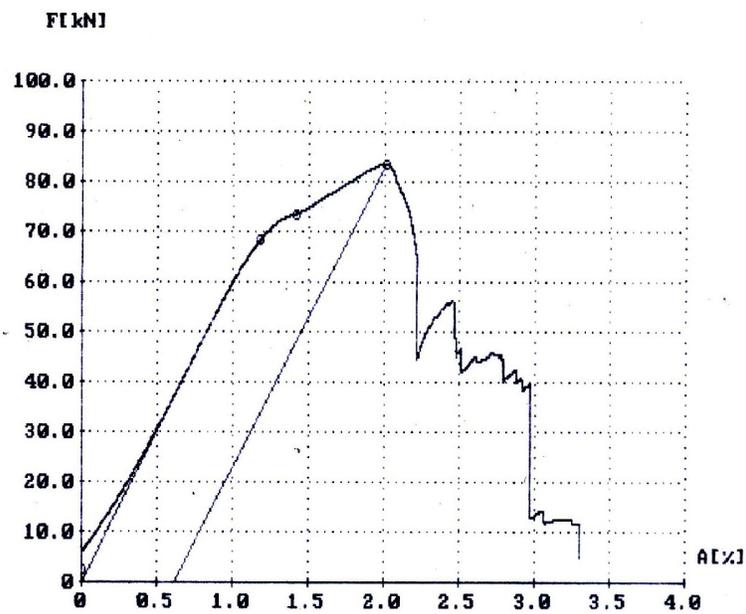
Corpo-de-Prova 2:

Figura 4.16. Força x deformação (d =19.1 mm e l= 670 mm).

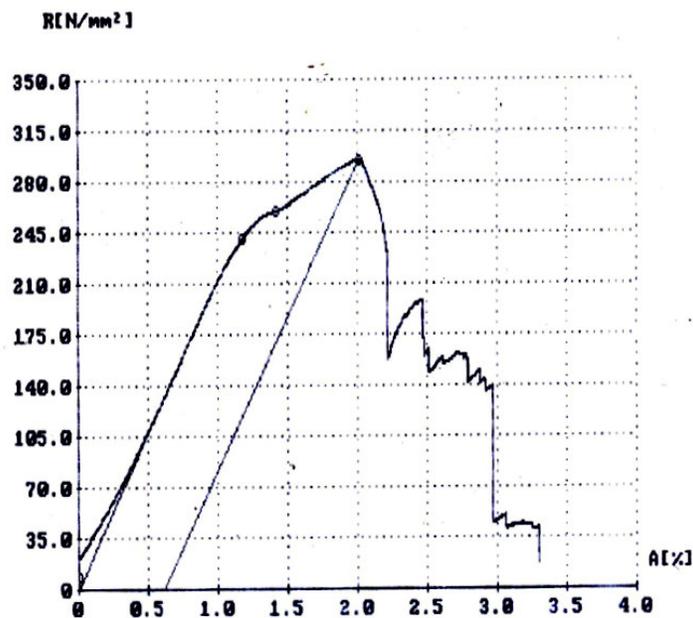


Figura 4.17. Tensão x deformação(d =19.1 mm e l= 670 mm).

Resultados Obtidos:

Tabela 4.3: Resultados do Ensaio de Tração Uniaxial.

F_m (N)	R_m (N/mm ²)	R_p 0,05 (N/mm ²)	R_p 0,2 (N/mm ²)	A_g (%) / mm
83769,48	295,45	241,92	260,22	0,62/ 4,154

Nesta amostra ocorreu uma falha no material na região de interação do compósito com o ferro fundido, rompendo muito antes do esperado pelo projeto, ou seja, a carga de ruptura foi de 83,769 kN.

Corpo-de-Prova 3:

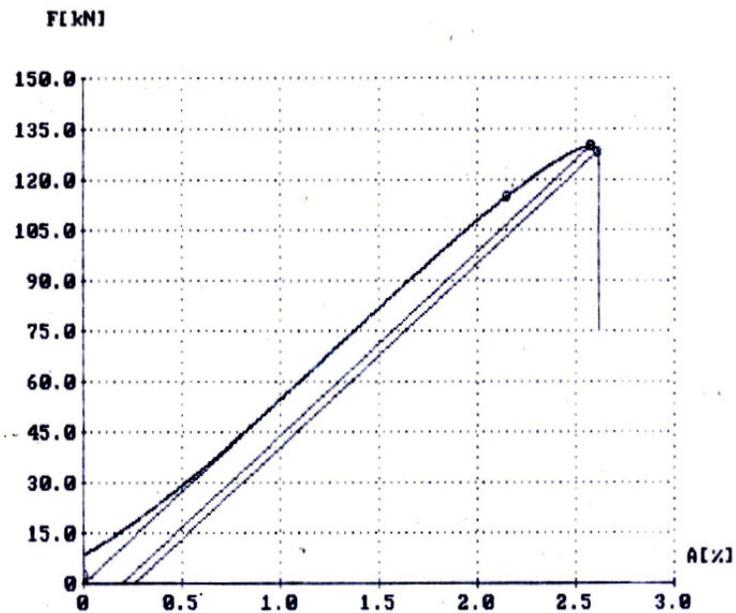


Figura 4.18. Força x deformação (d =19.1 mm e l= 590 mm).

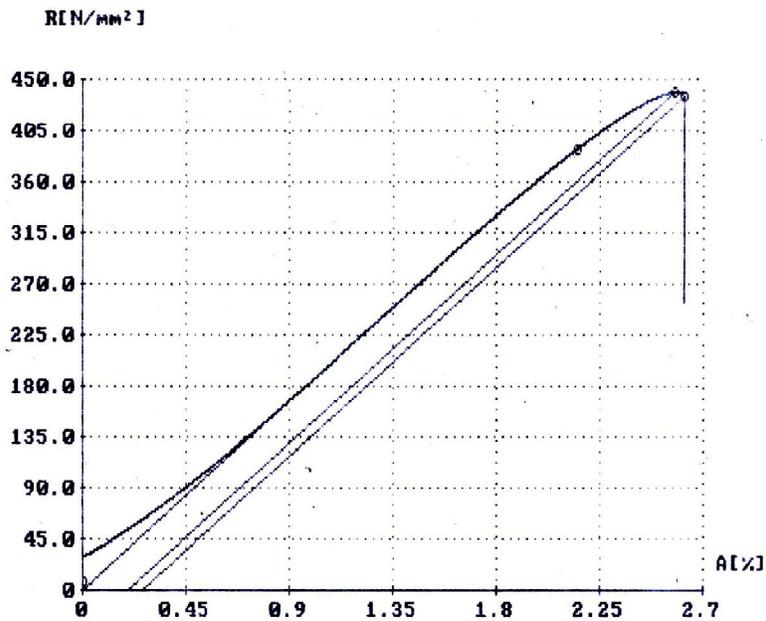
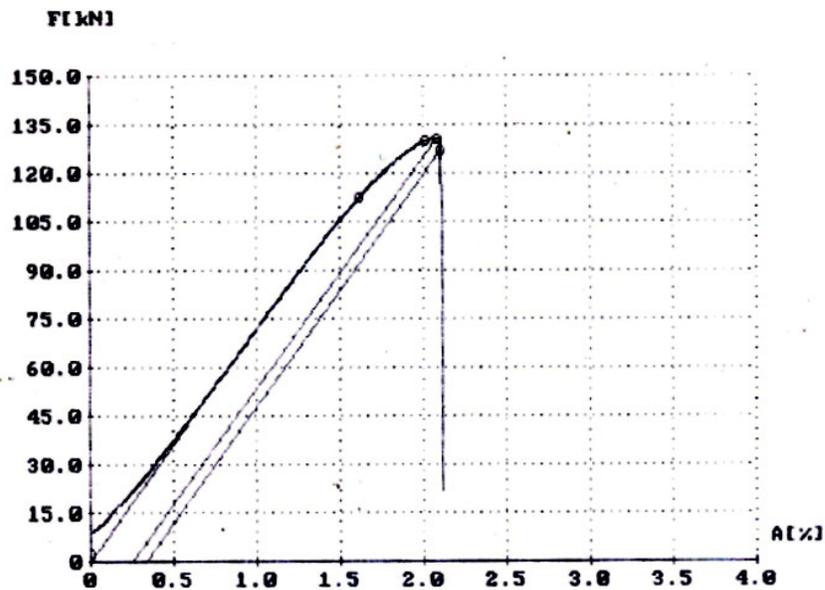


Figura 4.19. Tensão x deformação (d =19.1 mm e l= 590 mm).

Resultados Obtidos:**Tabela 4.4:** Resultados do Ensaio de Tração Uniaxial.

F_m (N)	R_m (N/mm ²)	F_B (N)	R_p 0,05 (N/mm ²)	R_p 0,2 (N/mm ²)	Ag (%) / mm	A590mm (%) / mm
130173,6	440,38	128672,9	389,88	44,28	0,20/1,18	0,27/1,59

Já nesta amostra o compósito se comportou como esperado, porém ocorreu um problema na interação do compósito com o ferro fundido: quando se ultrapassou a carga de 130,173 KN, houve um deslizamento entre a superfície do compósito e do ferro fundido.

Corpo-de-Prova 4:**Figura 4.20.** Força x deformação (d =19.1 mm e l= 670 mm).

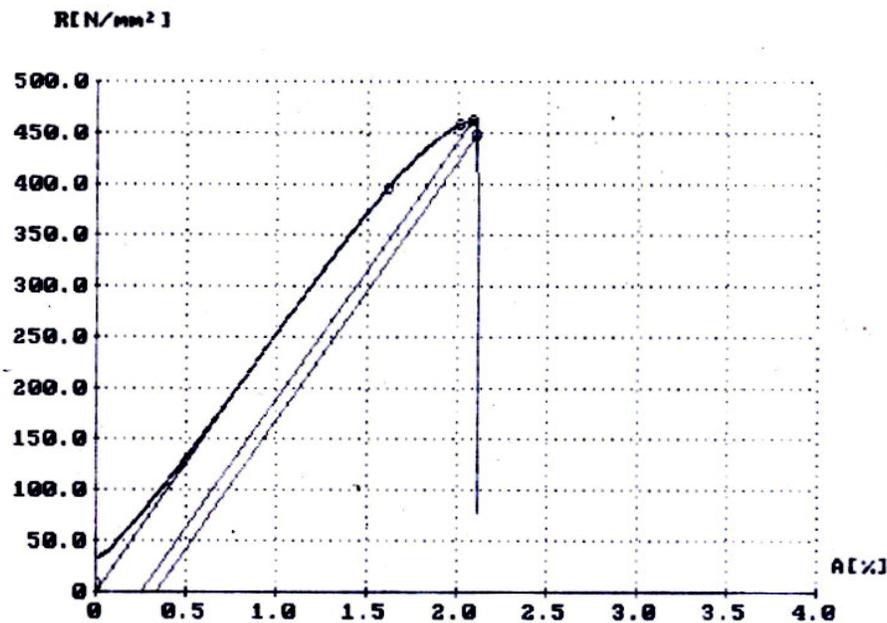


Figura 4.21. Tensão x deformação (d =19.1 mm e l= 670 mm).

Resultados Obtidos:

Tabela 4.5: Resultados do Ensaio de Tração Uniaxial.

F_m (N)	R_m (N/mm ²)	F_B (N)	R_p 0,05 (N/mm ²)	R_p 0,2 (N/mm ²)	Ag (%) / mm	A590mm (%) / mm
131170,3	462,64	127293,7	397,07	458,62	0,26/1,74	0,34/2,28

Na quarta amostra ocorreu algo parecido com a terceira variando um pouco em termos de força aplicada, porque neste caso o deslizamento do compósito se deu a 131,170 KN.

Ao final dos ensaios verificou-se que as amostras se dividiam, na verdade, em duas classes, muito bem definidas, ou seja, haviam alguma características que evidenciavam que se tratava de amostras com períodos de fabricação diferentes, assim tomou-se como meta dividir as análises em duas partes, chamando-as de CP-01 e CP-02.



Figura 4.22. Foto Evidenciando o CP-01 (Mais escuro) e o CP-02.

4.1.2. Análise Metalográfica

Para a realização dos ensaios metalográficos, amostras do compósito medindo aproximadamente 3,5mm de espessura com 10mm de largura e 20mm de comprimento foram embutidas a quente em baquelite, seguida de um polimento com papel de carbetto de silício, em granulometria decrescente até 1200, seguido de polimento com pasta de diamante com granulometria de 6 μ m a 0,25 μ m.

Após o corte da amostra a ser analisada e faz-se a determinação da seção a ser caracterizada a transversal ou a longitudinal. Com a seleção da seção.

Em seguida, as amostras foram analisadas em microscópio eletrônico de varredura Philips XL-30 acoplado a um sistema de análise por energia dispersiva de raios-X (EDX) Link Analytical QX-2000. com o bjetivo de se terminar a composição química elementar do compósito, como pode ser visto na figura 4.23.

Com o uso das fotos tiradas, foi possível evidenciar o aleatoriedade de distribuição das fibras, na seção. Isto influência o histórico de degradação do compósito, pela técnica escolhida, nesta pesquisa, pode-se observar esta aleatoriedade pelas figuras 4.23 4.25 e 4.26.

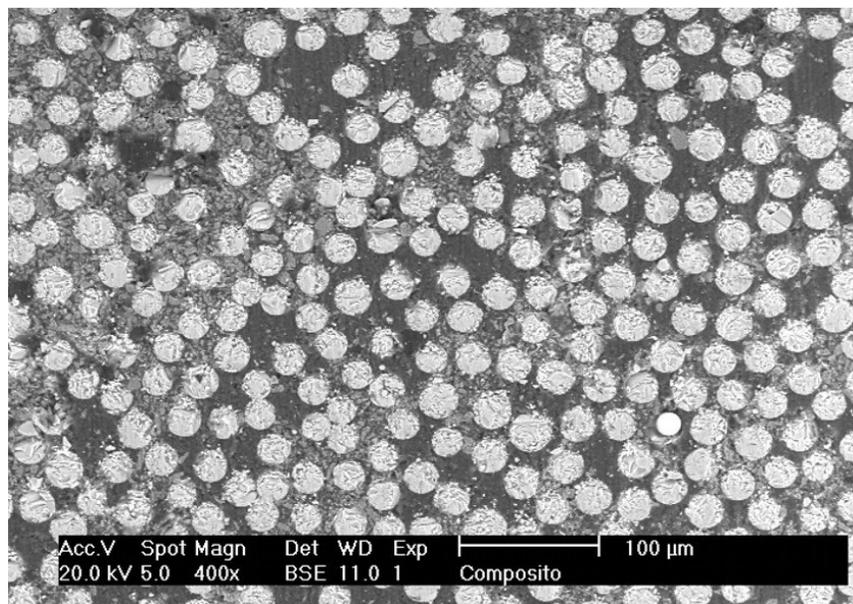


Figura 4.23. Ampliação da superfície do compósito.

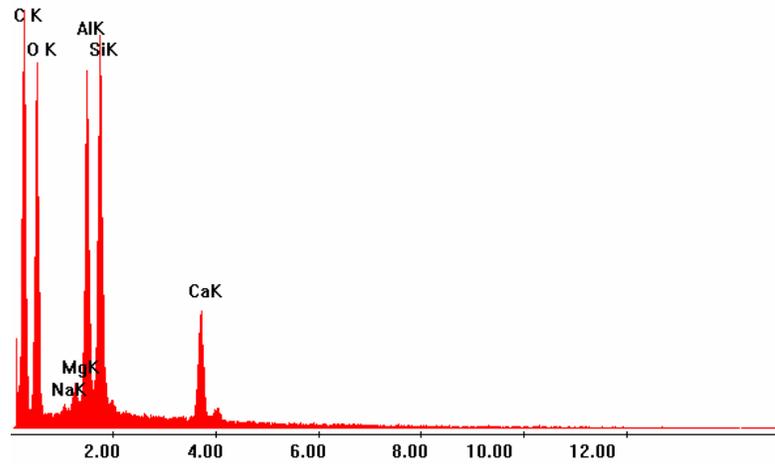


Figura 4.24. EDX do Núcleo do Isolador.

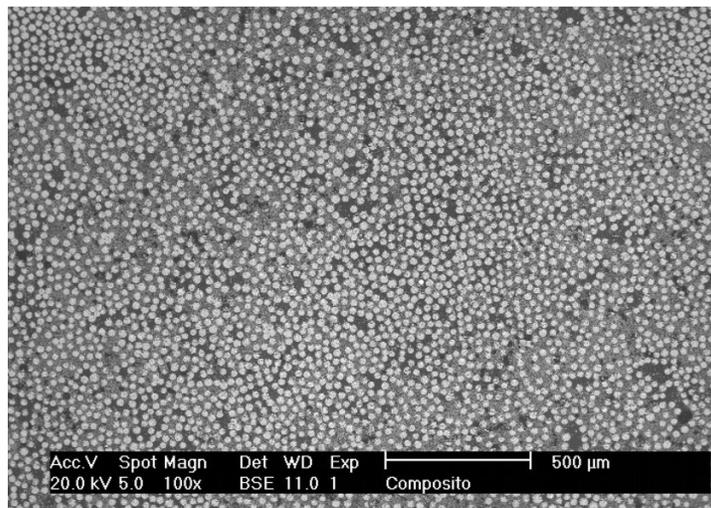


Figura 4.25. Ampliação da superfície do compósito.

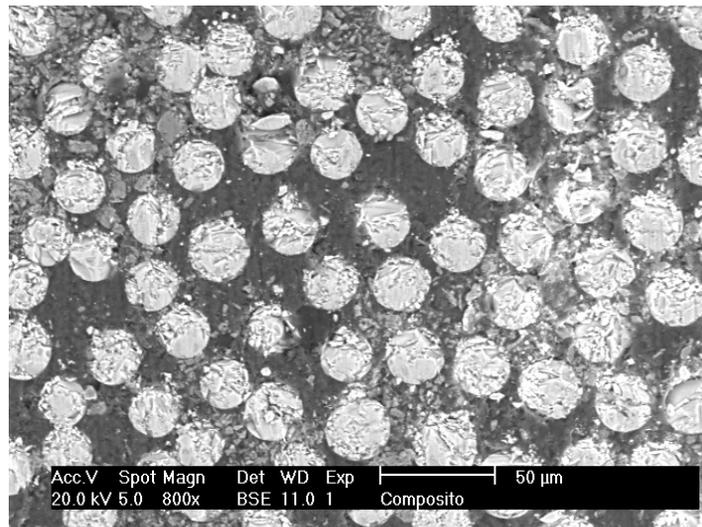


Figura 4.26. Ampliação de 800 vezes da superfície do compósito.

4.2. SIMULAÇÃO NUMÉRICA.

Segundo COFER (1999), o comportamento mecânico à compressão ou à tração de materiais compósitos poliméricos reforçados por fibras, pode ser representado por intermédio de uma função tangente-hiperbólica. Assim tem-se:

$$\sigma = a \tanh(b\varepsilon) \quad (4.1)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \frac{a \cdot b}{\cosh^2(b\varepsilon)} \quad (4.2)$$

Onde:

a, b : Constantes características do material;

σ, ε : Tensão e Deformação obtidos no ensaio de tração, respectivamente.

Por definição temos ainda que,

$$\left. \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = a \cdot b = E \text{ (Módulo de Elasticidade)}$$

desta forma tem-se condição de avaliar o processo de degradação do material numericamente, comparando-se com os resultados experimentais, conforme é apresentado na figura 4.27.

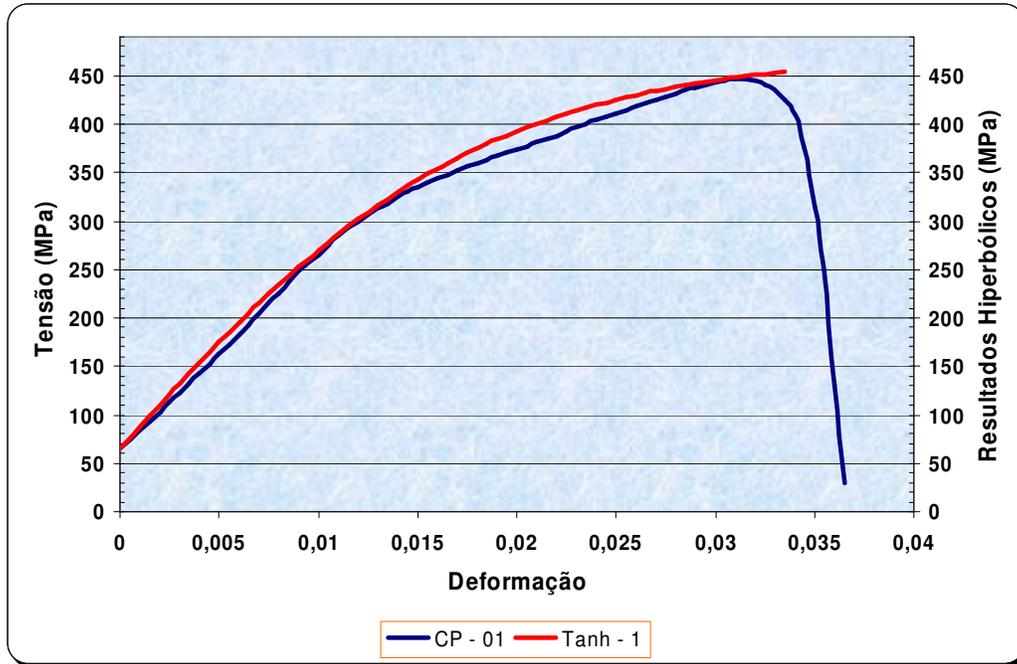


Figura 4.27. Gráfico $\sigma \times \varepsilon$ obtido em ensaio de tração para os corpos-de-prova tipo 01, confrontado com a resposta numérica proposta.

Tabela 4.6. Parametrização da função tangente-hiperbólica para CP – 01.

Descrição	$\varepsilon_{\text{Máx}}$	a	b
Tração	0,0315	409,09	55

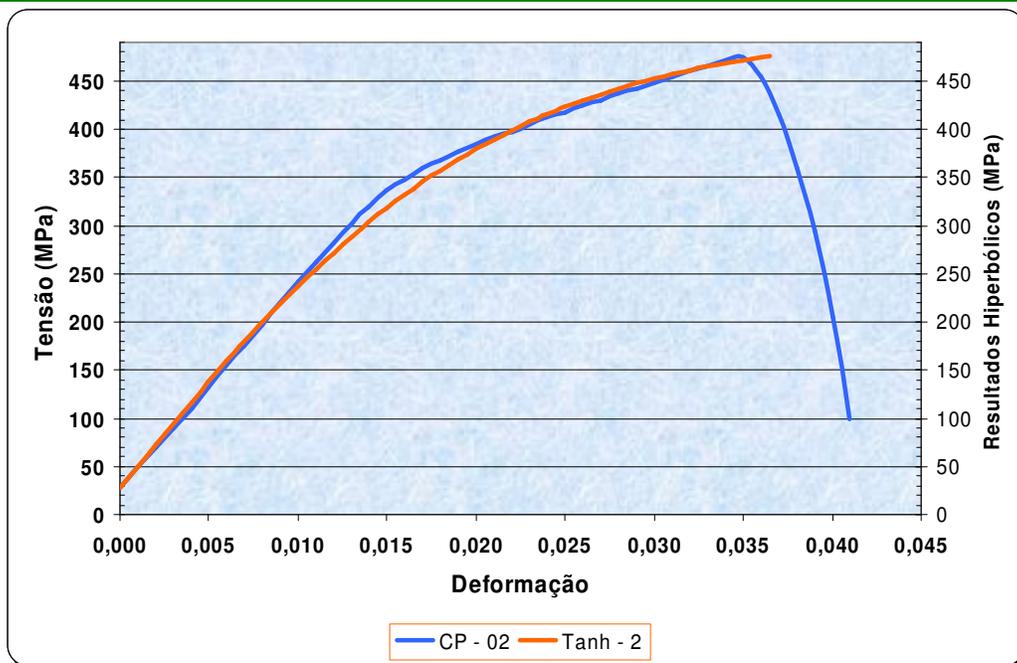


Figura 4.28. Gráfico $\sigma \times \varepsilon$ obtido em ensaio de tração para os corpos-de-prova tipo 02, confrontado com a resposta numérica proposta.

Tabela 4.7. Parametrização da função tangente-hiperbólica para CP – 02.

D e s c r i ç ã o	$\epsilon_{\text{Máx}}$	a	b
Tração	0,0350	478,7234	47

4.2.1. AVALIAÇÃO DO HISTÓRICO DE DEGRADAÇÃO DO MATERIAL.

De acordo com o exposto no capítulo anterior desta pesquisa, conhecida a função que representa o comportamento mecânico de qualquer material é possível também descrever uma função para o processo de degradação deste, a partir da mecânica do dano. Fazendo uma operação simples, substituindo na eq. 3.173 a eq. 4.2, tem-se:

$$D = 1 - \operatorname{sech}^2(b \cdot \epsilon) \quad (4.3)$$

ou ainda,

$$D = 1 - \operatorname{sech}^2\left(\frac{a \cdot b}{a} \cdot \epsilon\right) \quad (4.4)$$

Assim pode-se traçar gráficos que representam o processo de degradação, como a figura 4.29.

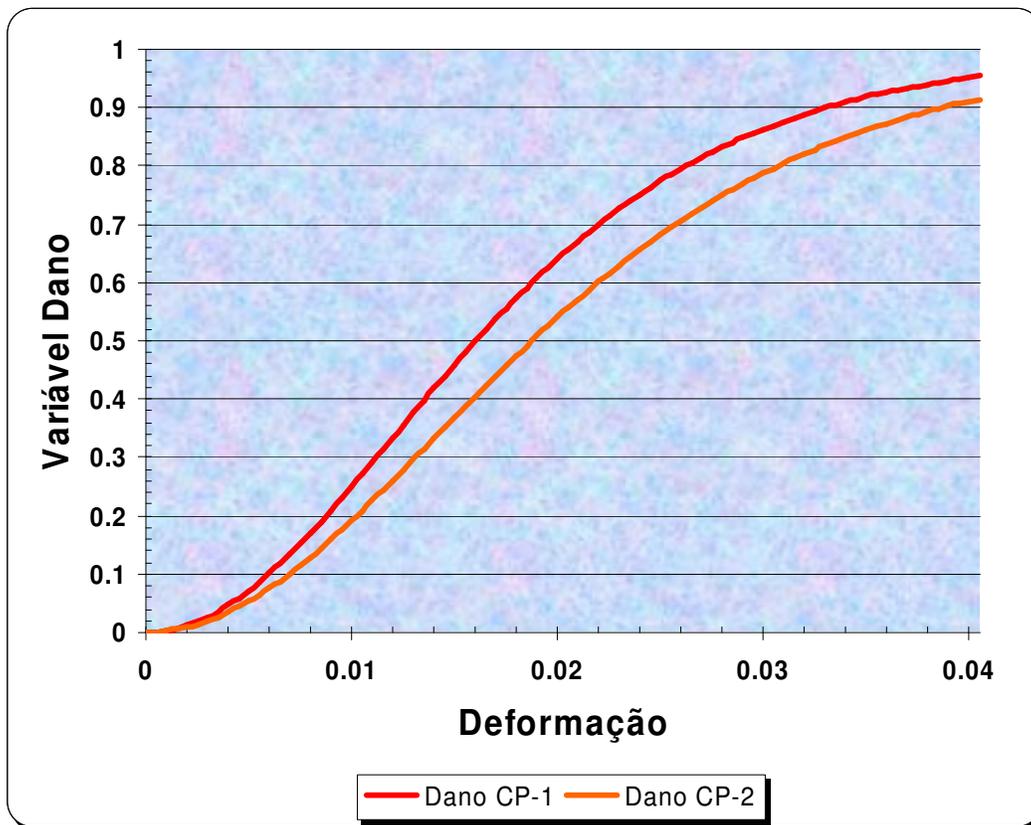


Figura 4.29. Gráfico Dano x Deformação.

Critério de Ruptura

A definição de ruptura em meso-escala, é dada como a iniciação de trincas as quais ocupam completamente a superfície do EVR; Portanto, por definição $D = 1$. Em muitos casos, isso é causado por um processo de instabilidade o qual induz à ruptura das ligações atômicas na área resistente restante.

Ela corresponde a um valor crítico de dano D_c , o qual depende do material e das condições de carregamento.

A desagregação final dos átomos é caracterizada por um valor crítico da tensão efetiva agindo em uma área resistente. Chamemos essa tensão de σ_∞ porque ela é a tensão máxima que poderia ser aplicada no material:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D_c} = \sigma_\infty \quad (4.5)$$

Na prática, σ_∞ deve ser aproximada por uma tensão última σ_u , assim tem-se:

$$D_c \approx 1 - \frac{\sigma}{\sigma_u} \quad (4.6)$$

Que nos dá o valor crítico do dano em uma iniciação de uma meso-trinca ocorrendo é um ensaio de tração uniaxial σ . A tensão última σ_u sendo identificada para cada material, D_c deve variar entre $D_c \approx 0$ (para uma fratura frágil pura) e $D_c \approx 1$ (para uma fratura dúctil pura), contudo usualmente D_c é da ordem de 0,2 a 0,5.

Essa relação, aplicada a um teste de tração monotônico puro, o qual é tido como uma referência, define o correspondente dano crítico D_{1c} , característica de cada material.

$$D_{1c} = 1 - \frac{\sigma_R}{\sigma_u} \quad (4.7)$$

onde σ_R é a tensão de ruptura.

Dano inicial

Antes que as micro-trincas se iniciem, criando o dano modelado por D , elas devem nuclear pela acumulação de micro-tensões acompanhando

incompatibilidades de micro-deformações ou pela acumulação de discordâncias nos metais. Isso corresponde ao caso de tração pura a um certo valor ε_{pD} da deformação plástica abaixo do qual nenhum dano por micro-trincas ocorre:

$$\varepsilon_p < \varepsilon_{pD} \Rightarrow D = 0 \quad (4.8)$$

Finalmente, as quatro principais relações que compreendem a base da mecânica do dano são:

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E(1-D)} \text{ para elasticidade;} \quad (4.9)$$

$$\left| \frac{\sigma}{1-D} - X \right| - R - \sigma_y = 0 \text{ como o critério plástico de escoamento;} \quad (4.10)$$

$$\varepsilon_p < \varepsilon_{pD} \Rightarrow D_0 = 0 \text{ como o dano inicial;} \quad (4.11)$$

$$D = D_c \text{ iniciação da trinca.} \quad (4.12)$$

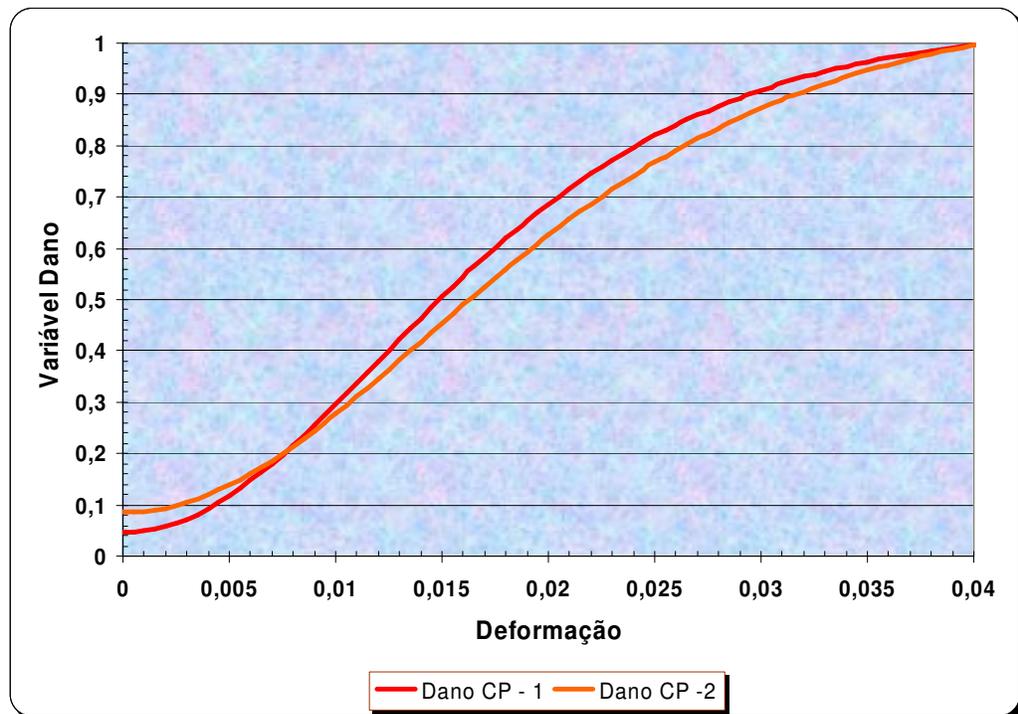


Figura 4.30. Gráfico Dano x Deformação com o Dano Inicial.

Verifica-se na figura 4.30 que para ambas as curvas, existe um ponto em que a taxa de degradação aumenta, sendo esta uma propriedade intrínseca do material, chamada de dano crítico, com valor de $D_c=0,3333$.

Verifica-se também que o dano inicial da série CP -1, teve como valor $D_{0,1}=0,04$, ao passo que para a série CP -02 teve-se um dano inicial de $D_{0,2}=0,08$.

O fato das séries apresentarem danos iniciais diferentes não alterou o valor do dano crítico, o que já era de se esperar pois o mesmo é uma característica intrínseca do material, assim verificou-se que os materiais apresentaram um mesmo valor, também para a deformação plástica crítica, que ficou na ordem de $\varepsilon_{pD} = 1,4\%$.

Vale salientar que o dano inicial está associado com processo de fabricação, transporte, montagem, etc.

Observando também as figuras 4.27 e 4.28, verifica-se que houve uma flutuação na pré-carga, contudo esta flutuação não apresentou influência observável no histórico da evolução do dano.

5 ANÁLISE COMPUTACIONAL

“Tu conservarás em paz aquele cuja mente está firme em ti; porque ele confia em ti. Confiai no SENHOR perpetuamente; porque o SENHOR DEUS é uma rocha eterna.”

(Is 26:3-4).

5.1 Aspectos Gerais

A falha por dano é resultante do desenvolvimento progressivo de, pelo menos, um campo de defeitos sob a influência de solicitações exteriores.

Quando um campo de defeitos nucleia uma fissura, tem-se um aspecto macroscópico da danificação do material, que originou-se por um acúmulo de defeitos em determinado local, devido a concentrações de

tensões, tais como: porosidade, variação brusca de geometria, acúmulo de discordância, precipitações, inclusões, dentre outros.

A Mecânica do Dano é importante para se estimar a que nível de solicitação se inicia o processo de degradação interna do material, segundo a sua utilização. Contudo, o conhecimento desta característica só é possível mediante a realização de ensaios laboratoriais, a fim de que se determine o D_{1c} e D_c .

Com o objetivo de complementar no estudo da Mecânica do Dano em meios contínuos, apresenta-se neste capítulo, uma simulação computacional em código de cálculo internacionalmente conhecido, de um ensaio de uma viga submetida à flexão. Os resultados foram verificados numericamente a partir do modelo apresentado no capítulo 4 desta pesquisa.

5.2 Descrição da Simulação Computacional.

A simulação computacional constituiu-se das seguintes etapas:

Pré-processamento:

- Definição da geometria;
- Definição do tipo de análise estrutural (linear elástica, plasticidade, viscoplasticidade, estática, dinâmica, etc.);
- Definição das propriedades do material;
- Definição das restrições e dos carregamentos;
- Escolha do tipo de elemento;
- Discretização do modelo.

Processamento:

- Montagem da matriz de rigidez;
- Solução das equações de equilíbrio;
- Cálculo das deformações nodais;
- Cálculo das tensões nos elementos;
- Geração de arquivos neutros.

Pós-processamento:

- Leitura de arquivos neutros;

- Visualização dos níveis de tensões;
- Visualização da deformada e demais resultados da análise.
- Elaboração de gráficos e relatórios dos resultados da análise.

Para a devida análise foram considerados as seguintes hipóteses:

- Material é isotrópico;
- Com módulo de elasticidade 52,80 GPa e coeficiente de Poisson 0,20;
- Modelo elástico com não linearidade geométrica;
- Temperatura constante;
- Gerou-se um modelo tri-dimensional de geometria simples;
- Trincas no centro da viga, de comprimentos: $a=0,00\text{mm}$, $a=1,00\text{mm}$, $a=2,00\text{mm}$, $a=3,00\text{mm}$, $a=4,00\text{mm}$ e $a=5,00\text{mm}$;

5.2.1 Definição da Geometria do Modelo.

Como pode ser visto na figura 5.1 a viga tem uma geometria simples, pois o objetivo desta análise é relacionar o resultado desta com o modelo de dano já apresentado.

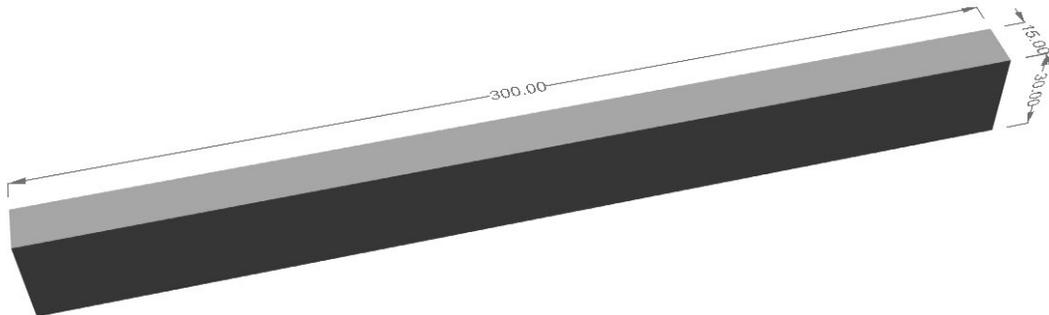


FIGURA 5.1. Viga modelada.

Temos ainda uma série de cinco vigas com um pequeno entalhe, a fim de simular uma trinca, conforme dito anteriormente.

5.2.2. Tipo do Elemento.

O elemento adotado foi o C3D8, que significa um elemento sólido de oito nós, também chamado de *brick 8*. Este possui uma geometria retangular e neste caso foi também usada a técnica estruturada, na geração da malha.

5.2.3. Restrições e Carregamentos.

Utiliza-se para cada modelo o seguinte histórico de carregamento:

- $F_1=1,0$ kN;
- $F_2=1,5$ kN;
- $F_3=2,0$ kN;
- $F_4=2,5$ kN.

Para cada carregamento foram levantadas as seguintes informações:

- U_{33} – Deslocamentos na direção z;
- VM – Distribuição de Tensões, critério Von Mises;
- CT – Tensões na ponta da trinca.

O modelo idealizado segue conforme as figuras 5.2 a 5.4.

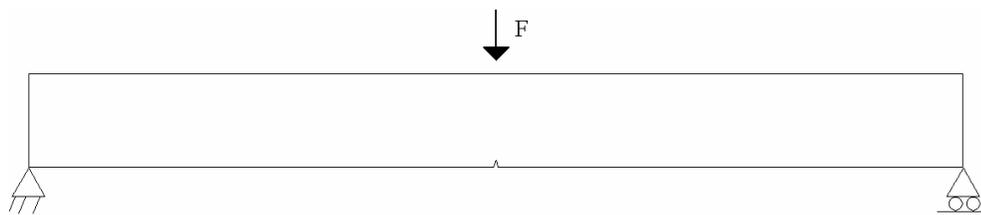


FIGURA 5.2. Detalhe do carregamento e suas restrições.

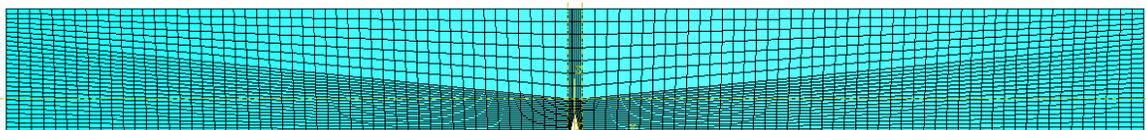


FIGURA 5.3. Malha Gerada para o modelo com a trinca de $a = 5,00$ mm.

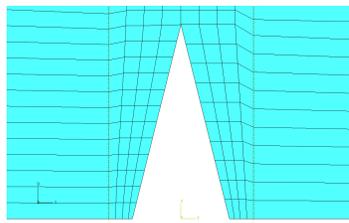


FIGURA 5.4. Detalhe da malha Gerada na trinca com $a = 5,00$ mm.

5.2.4. Resultados das Simulações.

A seguir têm-se os resultados da simulação computacional e suas respectivas análises.

Na análise dos campos de tensões da figura 5.5, observa-se o efeito de não linearidade geométrica, devido à deformação dos elementos. A consideração de não linearidade nos permite ter resultados mais precisos. Desta forma é possível visualizar o efeito do carregamento nas proximidades dos apoios, com a formação de verdadeiros “bulbos” de tensão, evidenciando assim uma ação devida as tensões de cisalhamento. Observa-se também o acúmulo de tensão devido a deformação provocada pela carga aplicada no centro da viga.

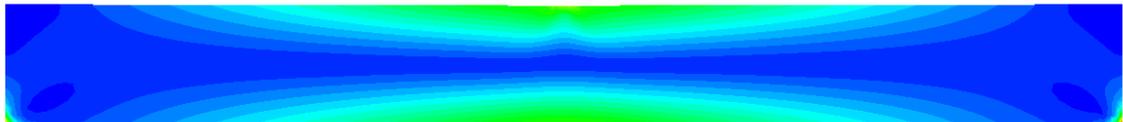
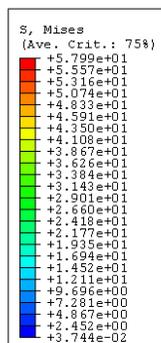


Figura 5.5. Tensões de Von Mises para o modelo sem trinca e carga de 1 kN.

As tensões máximas ocorreram nos apoios, como já era esperado, com 57,99 MPa. Contudo, no entorno do ponto de aplicação da carga obteve-se uma tensão de 29,01 MPa (aproximadamente 50% da tensão nos apoios).

O fato de a geometria ser simples facilita a análise destes resultados. Por exemplo, verifica-se a tendência de formação de uma rótula plástica na mesma seção de aplicação da carga.

A figura 5.6 mostra os campos de tensões no modelo idealizado com uma trinca de $a=5,00$ mm e uma carga de 2,5 kN. Mais uma vez, se observa a tendência de formação de uma rótula plástica, na seção danificada. Os níveis de tensão nos apoios passam a ser 70% da tensão encontrada na ponta da

trinca $\sigma=233,40$ MPa. Pode-se melhor analisar os efeitos deste carregamento nesta estrutura, visualizando a ponta da trinca, como na figura 5.7.

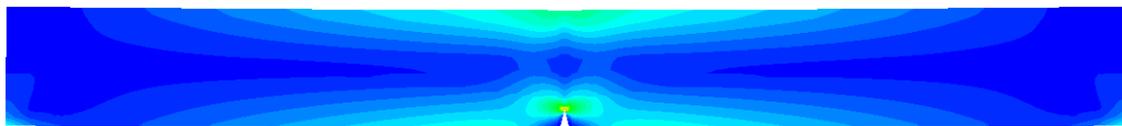
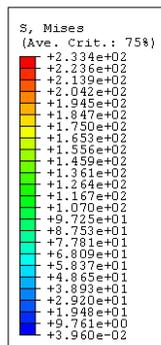


Figura 5.6. Tensões de Von Mises para o modelo com trinca de $a=5,00$ mm e carga de 2,5 kN.

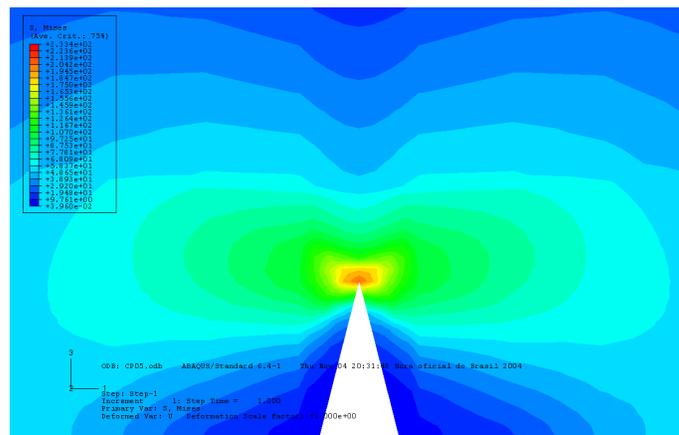


Figura 5.7. Tensões de Von Mises na ponta da trinca, para o modelo com trinca de $a=5,00$ mm e carga de 2,5 kN.

Analisando a figura 5.6, pode-se observar os campos de tensões na ponta da trinca, com maior detalhe. O fato de haver uma mudança brusca na geometria provoca níveis de tensões mais altas que podem provocar a ruptura das ligações atômicas caso sejam maiores que a capacidade resistiva do material.

A presença da trinca mudou completamente o comportamento estrutural, logo concluí-se que esta alteração também seja apreciada nas propriedades, ditas intrínsecas do material, tais como o módulo de elasticidade.

Para não tornar este capítulo muito extenso os resultados encontrados nesta análise são apresentados em forma tabelada, como se pode ver na tabela 5.1.

Tabela 5.1. Resultados obtidos nas Simulações Computacionais.

Força (kN)	Comprimento da trinca - a (mm)	Tensão (MPa)	Deslocamento Máximo (mm)	Observações
1,0	0,00	57,99	0,32673517	Nos apoios
1,5		87,02	0,49011809	
2,0		116,10	0,6578	
2,5		145,20	0,8223	
1,0	1,00	70,30	0,3268896	Na ponta da trinca
1,5		105,30	0,49035287	
2,0		140,30	0,65374941	
2,5		175,30	0,81720924	
1,0	2,00	103,30	0,32900447	Na ponta da trinca
1,5		154,80	0,49583253	
2,0		206,20	0,66111171	
2,5		257,50	0,82638794	
1,0	3,00	120,70	0,336036	Na ponta da trinca
1,5		180,90	0,50404716	
2,0		240,90	0,67205071	
2,5		300,80	0,84004438	
1,0	4,00	114,80	0,34288052	Na ponta da trinca
1,5		172,0	0,5143038	
2,0		229,10	0,68573266	
2,5		286,10	0,85715836	
1,0	5,00	93,64	0,348335	Na ponta da trinca
1,5		140,30	0,53079665	
2,0		186,90	0,7042796	
2,5		233,40	0,89716721	

Com estes resultados representou-se graficamente o comportamento $F \times \Delta$, como mostrada a figura 5.8.

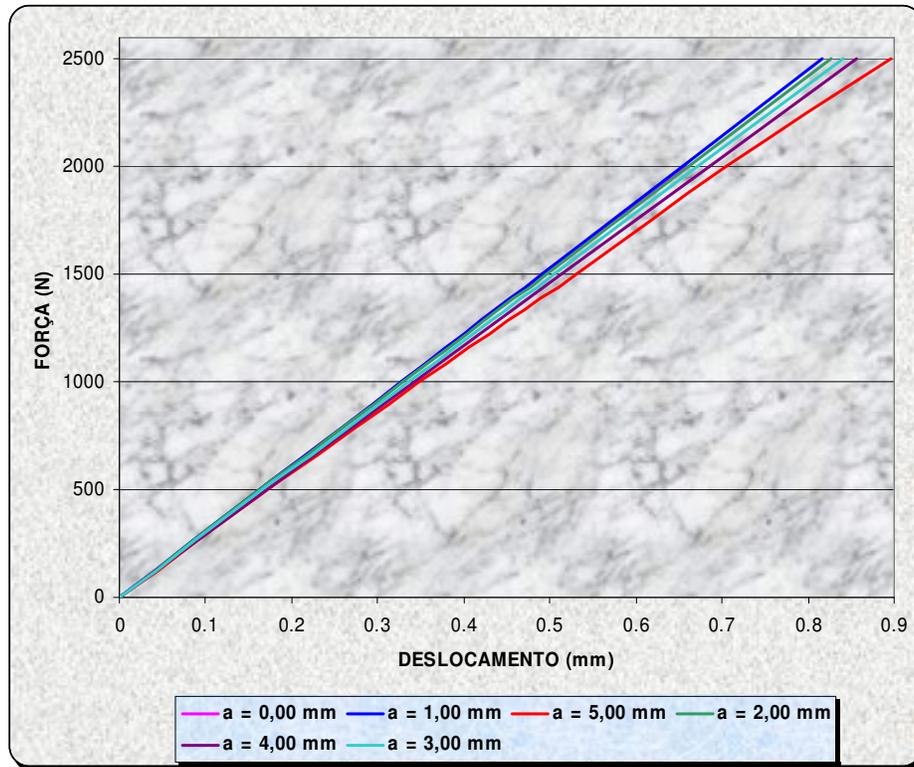


Figura 5.8. Diagrama $F \times \Delta \times a$.

Avaliando o gráfico acima tem-se que a rigidez da estrutura foi sensivelmente afetada pela inserção da trinca, que mostra a importância de compreender a evolução da danificação do material, que nesta pesquisa é associar à degradação da rigidez do material.

5.3. ANÁLISE NUMÉRICA

Com o objetivo de avaliar a evolução da danificação deste material, tem-se que identificar numericamente como se dá o comportamento mecânico do material. Desta forma utiliza-se a hipótese de danificação isotrópica, isto é, o processo de danificação não depende da direção. A hipótese de dano isotrópico não é a melhor representação deste fenômeno, contudo com o intuito de simplificar esta abordagem, assim será executado.

A partir do gráfico da figura 5.8, pode-se apresentar uma abordagem numérica a fim de se obter uma função que represente este comportamento mecânico. Assim tem-se:

$$F(\Delta) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{tanh}(\mathbf{b} \cdot \Delta) \quad (5.1)$$

que ao ser derivada resulta em,

$$\frac{\partial F}{\partial \Delta} = \frac{\mathbf{a.b}}{\cosh(b.\Delta)^2} \quad (5.2)$$

ao analisar-se a eq. (5.2), conclui-se que:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \Delta}\right)_{\Delta=0} = \mathbf{a.b} = K \text{ (Rigidez)} \quad (5.3)$$

combinado com a eq. (4.7), tem-se:

$$D(\Delta) = 1 - \operatorname{sech}\left(\frac{\mathbf{a.b}}{\mathbf{a}}.\Delta\right)^2 \quad (5.4)$$

Com o intuito de parametrizar as curvas provenientes da eq (5.1), traçaram-se diversos gráficos, como se pode ver abaixo.

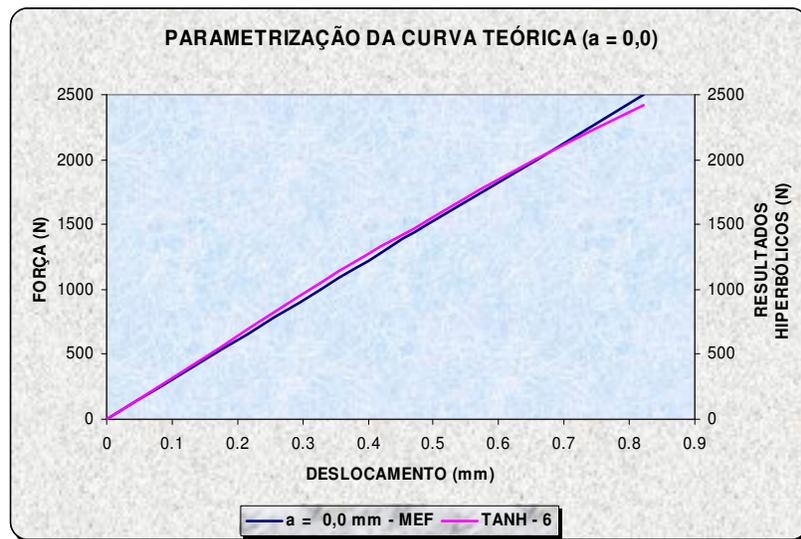


Figura 5.9. Confronto da curva teórica com a curva obtida via método dos elementos finitos (MEF) do modelo com $a = 0,0$ mm.

Tabela 5.2. Constantes de Parametrização – $a = 0,0$.

Descrição	a	b
Flexão 3 pontos – $a = 0,0$	4710	0,68

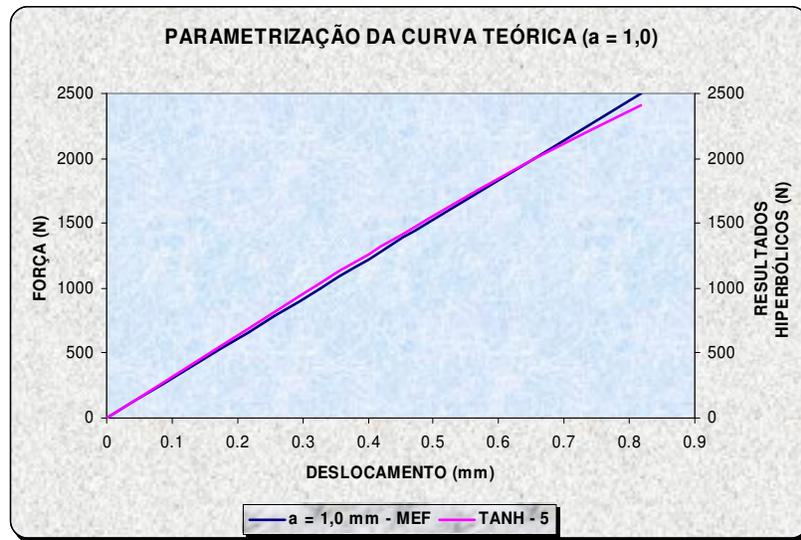


Figura 5.10. Confronto da curva teórica com a curva obtida via método dos elementos finitos (MEF) do modelo com $a = 1,0$ mm.

Tabela 5.3. Constantes de Parametrização – $a = 1,0$.

Descrição	a	b
Flexão 3 pontos – $a = 1,0$	4900	0,66

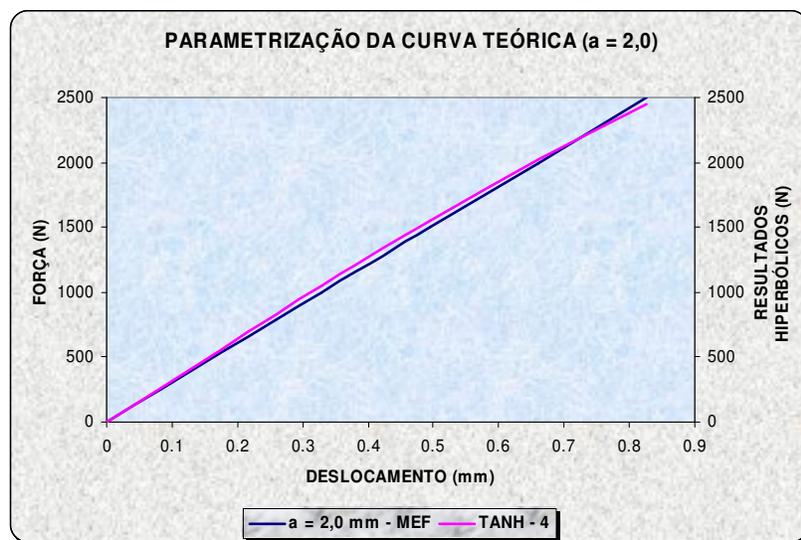


Figura 5.11 Confronto da curva teórica com a curva obtida via método dos elementos finitos (MEF) do modelo com $a = 2,0$ mm.

Tabela 5.4. Constantes de Parametrização – $a = 2,0$.

Descrição	a	b
Flexão 3 pontos – $a = 2,0$	4995	0,65

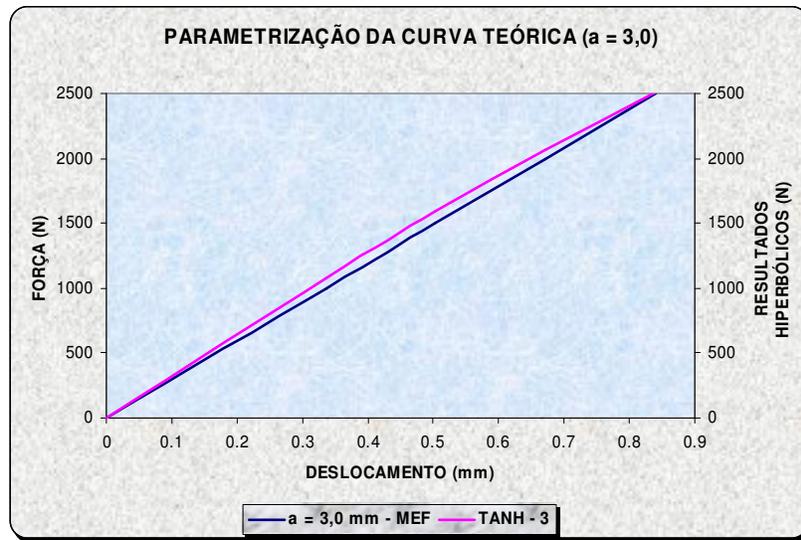


Figura 5.12. Confronto da curva teórica com a curva obtida via método dos elementos finitos (MEF) do modelo com $a = 3,0$ mm.

Tabela 5.5. Constantes de Parametrização – $a = 3,0$.

Descrição	a	b
Flexão 3 pontos – $a = 3,0$	5100	0.64

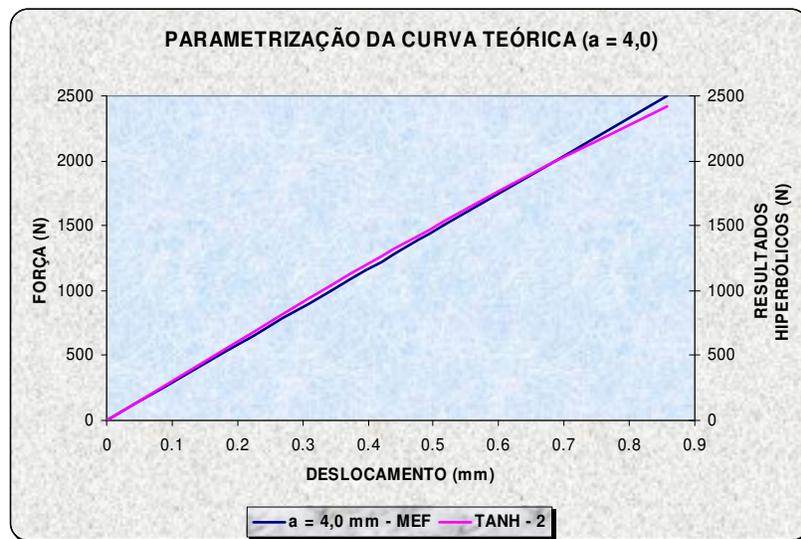


Figura 5.13. Confronto da curva teórica com a curva obtida via método dos elementos finitos (MEF) do modelo com $a = 4,0$ mm.

Tabela 5.6. Constantes de Parametrização – $a = 4,0$.

Descrição	a	b
Flexão 3 pontos – $a = 4,0$	4900	0.63

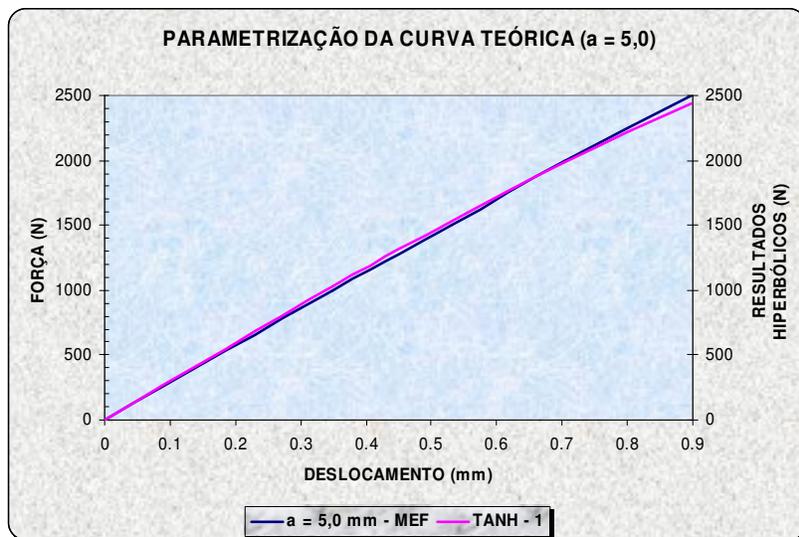


Figura 5.14. Confronto da curva teórica com a curva obtida via método dos elementos finitos (MEF) do modelo com $a = 5,0$ mm.

Tabela 5.7. Constantes de Parametrização – $a = 5,0$.

Descrição	a	b
Flexão 3 pontos – $a = 5,0$	4900	0.61

Considerando as constantes levantadas e aplicando-as na eq. 5.8 para cada caso, sobrepondo estas curvas teremos.

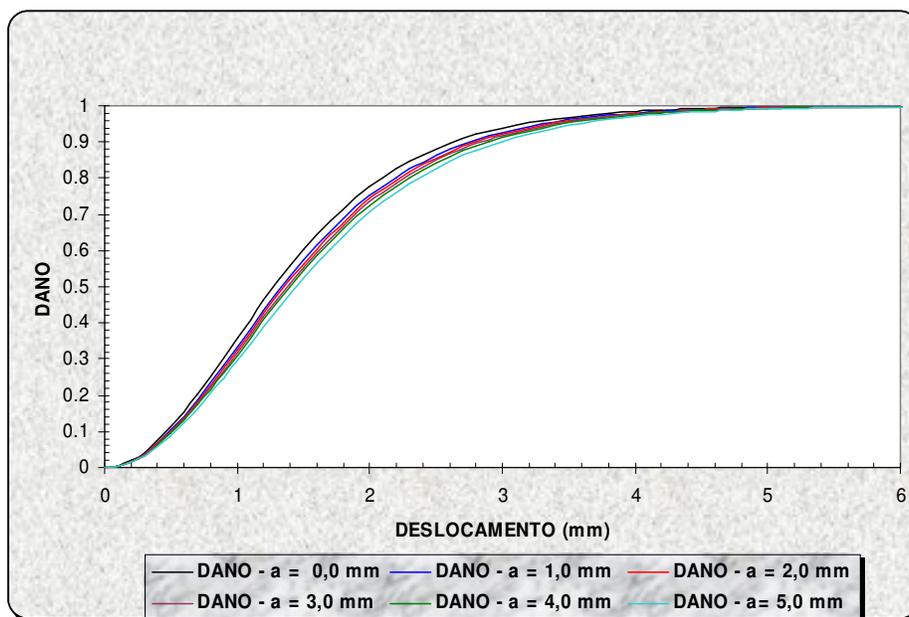


Figura 5.15. Diagrama $D \times \Delta \times a$.

5.4. ANÁLISE DOS RESULTADOS.

Ao analisar os resultados verifica-se que todas as curvas atenderam ao padrão já estabelecido no capítulo 4 desta pesquisa, ou seja, todas as curvas de dano apresentaram o mesmo $D_c=0,3333$, o que mostra que a variação de carregamento não interfere nesta característica. Contudo observa-se que para cada curva houve um patamar de deformação diferente, na obtenção deste valor característico, conforme a Tabela 5.8.

Tabela 5.8. Valores para Δ em função de $D_c = 0,3333$ e do comprimento da trinca (a).

a (mm)	Δ (mm)	Varição relativa a $\Delta_{a=0,00}$
0,00	0,9543173166	-
1,00	0,9976953764	05%
2,00	1,0130445360	06%
3,00	1,0288733560	08%
4,00	1,0452046800	10%
5,00	1,0794736860	13%

Avaliando a figura 5.15, verifica-se que o histórico de danificação do material apresentou-se similar e paralelo, como já era esperado, respeitando inclusive o aspecto relacionado com o comprimento da trinca, ou seja, quanto maior “a” menor o Δ_c , vinculado com o D_c .

Para um mesmo deslocamento foram verificados valores diferentes para o dano, no intervalo $0,2 \text{ mm} \leq \Delta \leq 5,6 \text{ mm}$.

As maiores diferenças foram encontradas para $\Delta \approx 2,00 \text{ mm}$.

Observou-se também que para $\Delta \leq 0,2 \text{ mm}$ as curva sobrepõem-se o que está totalmente dentro da expectativa, pois o modelo proposto só é capaz de detectar defeitos de média ordem, ou seja, nucleação de micro fissuras e acúmulo de discordâncias.

Verificou-se que para deslocamentos maiores que 5,6 mm as curvas tornam a sobrepor-se o que lembra o efeito de ruptura eminente, ou seja, para valores muito próximo de $D = 1$, o modelo apresentado também não é válido.

Para se determinar o dano inicial de cada modelo, ou seja, relacionar o dano com o comprimento da trinca, foi utilizado um método inverso cujos resultados apresentam-se na tabela 5.9.

Tabela 5.9. Valores de $D_{0,a}$, para $\Delta = 0,9543173166$ mm.

a (mm)	$D_{0,a} = D_c - D$
0,00	0,000
1,00	$D_c - 0,1701244423 = 0,1620889103$
2,00	$D_c - 0,1657201590 = 0,1676131743$
3,00	$D_c - 0,1613456640 = 0,1798766930$
4,00	$D_c - 0,1570022313 = 0,1763311017$
5,00	$D_c - 0,1484136897 = 0,1849196436$

Onde $D_{0,a}$ refere-se ao dano inicial associado ao comprimento de trinca

“a”.

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

“A saber: Se com a tua boca confessares ao Senhor Jesus, e em teu coração creres que Deus o ressuscitou dentre os mortos, serás salvo. Visto que com o coração se crê para a justiça, e com a boca se faz confissão para a salvação. Porque a Escritura diz: Todo aquele que nele crer não será confundido. Porquanto não há diferença entre judeu e grego; porque um mesmo é o Senhor de todos, rico para com todos os que o invocam. Porque todo aquele que invocar o nome do SENHOR será salvo.”

(Rm 10:9-13).

A simulação computacional realizada neste estudo foi baseada em um modelo tridimensional de uma viga com uma trinca central, o que possibilitou a determinação e a análise dos níveis de tensões, em particular

no entorno da trinca (simulada por entalhe). Esta simulação teve a função de relacionar o defeito inserido por meio de um entalhe (trinca) ao dano, previamente modelado no capítulo 4.

A parte experimental aqui desenvolvida permitiu observar o comportamento do compósito de polimetil metacrilato – PMMA reforçado por fibras de vidro, quanto ao processo de danificação em meio ao ensaio de tração uniaxial.

6.1. Conclusões

6.1.1. Simulação Computacional

O modelo tridimensional simulado permitiu analisar os resultados verificando que todas as curvas atenderam ao padrão já estabelecido no capítulo 4, desta pesquisa, ou seja, todas as curvas de dano apresentaram o mesmo $D_c=0,3333$, o que mostra que a variação de carregamento não interfere nesta característica. Contudo observa-se que para cada curva houve um patamar de deformação diferente, na obtenção deste valor característico, conforme mostrado na tabela 5.8.

Avaliando a figura 5.12, verifica-se que o histórico de danificação do material apresentou-se similar e paralelo, como já era esperado, respeitando inclusive o aspecto relacionado com o comprimento da trinca, ou seja, quanto maior “a” menor o Δ_c , vinculado com o D_c .

Para um mesmo deslocamento verificou-se a existência de valores diferentes para o dano, no intervalo $0,2 \text{ mm} \leq \Delta \leq 5,6 \text{ mm}$.

As maiores diferenças foram encontradas para $\Delta \approx 2,00 \text{ mm}$.

Observou-se também que para $\Delta \leq 0,2 \text{ mm}$ as curvas sobrepõem-se, o que está totalmente dentro da expectativa, pois o modelo proposto só é capaz de detectar no mínimo defeitos de média ordem, ou seja, nucleação de micro fissuras e acúmulo de discondâncias.

Verificou-se que, para deslocamentos maiores que 5,6 mm, as curvas tornam a sobrepor-se o que lembra o efeito de ruptura eminente, ou seja, para valores muito próximo de $D = 1$, o modelo apresentado também não é válido.

Para se determinar o dano inicial de cada modelo, ou seja, relacionar o dano com o comprimento da trinca, foi utilizado um método inverso cujos resultados apresentam-se na tabela 5.9.

O fato de se relacionar o dano como função do comprimento de trinca é uma das conclusões, de caráter inédito, dentro do acervo científico nacional.

6.1.2. Estudo Experimental

Ao observar as curvas obtidas a partir dos ensaios de tração detectou-se matematicamente a existência de um ponto em comum, em que a taxa de degradação aumenta, sendo esta uma propriedade intrínseca do material, chamada de dano crítico, com valor de $D_c=0,3333$.

Concluiu-se também que o dano inicial da série CP -1, teve como valor $D_{0,1}=0,04$, ao passo que para a série CP -02 teve-se um dano inicial de $D_{0,2}=0,08$.

O fato das séries apresentarem danos iniciais diferentes não alterou o valor do dano crítico, o que já era de se esperar pois o mesmo é uma característica do material. Assim, verificou-se que os materiais apresentaram um mesmo valor, também para a deformação plástica crítica, que ficou na ordem de $\varepsilon_{pD} = 1,4\%$.

Vale salientar que o dano inicial está associado com processo de fabricação, transporte, montagem, etc.

Observando também as figuras 4.31 e 4.32, conclui-se que houve uma flutuação na pré-carga, contudo esta flutuação não apresentou influência observável no histórico da evolução do dano.

Por fim, o modelo outrora proposto apresentou resultados satisfatórios, portanto conclui-se que este modelo é representativo e aceitável.

6.1.3. Institucional

O fato de a partir desta, haver uma canal de comunicação entre a UFC e o LMT/CACHAN/PARIS IV.

Apresenta-se o fato desta dissertação também funcionar como um aporte a novas pesquisas, no estado do Ceará.

6.1.4. Sugestões para Trabalhos Futuros

- Influência de considerações de fadiga na análise do processo de danificação;
- Aplicar o modelo outrora idealizado em outros materiais;
- Aplicar o modelo proposto na análise dos resultados de ensaios de torção, flexão 04 pontos, cisalhamento e compressão;
- Avaliar a influência do valor da pré-carga na análise inicial do dano;
- Considerar o efeito da variação de temperatura no modelo de danificação;
- Implementar uma ferramenta computacional para o cálculo das variáveis dano, por meio do método dos elementos finitos.;
- Aplicar este modelo na análise do processo de danificação por corrosão.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

“Agora, pois, permanecem a fé, a
esperança e o amor, estes três, mas o
maior destes é o amor. ”

(1Co 13:13).

AGARWAL, B. D; BROUTMAN, L. J. *Analisy and performance of the composites*. Second edition. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 1990.

ARRAMON, Y . P., MEHRABADI, M. M., MARTIN D. W., COWIN, S. C., *Multidimensiona Anistropic Strength Criterion Based on Kelvin Modes*. International Journal of Solids and Strutures, Editora Pergamon, N° 37, p.2915-2935, 2000.

BEAUMONT, P.W.R. The failure of fibre composites: an overview. *Jornal of Strain Analysis*, v. 24, n. 4, p. 189-205, 1989.

BEBER, A. J.; CAMPAGNOLO, J. L.; FILHO, A. C. Avaliação Do Desempenho De Vigas De Concreto Armado Reforçadas Com Mantas Flexíveis De Fibra De Carbono. *Teoria e Prática na Engenharia Civil*, N° 2, p.75-84, Maio, 2001

BIEGLER, M. W., MEHRABADI, M. M. *An energy-based constitutive model for anisotropic solids subject to damage*. Mechanics of Materials, Elsevier, 19, 151-164. 1995

BILLARDON, R. Etude de la rupture par la mécanique de l'endommagement. These de Doctorat – Université Pierre et Marie-Curie – Paris 6. 1989.

BLASS, A. *Processamento de Polímeros*.

CALLISTER JR, W. D. *Materials science and engineering: an introduction*. 4th. Ed. USA: John Wiley & Sons; 2001.

CHABOCHE, J. L.; FEYEL, F. *On the Multiscale Analysis of composite Structures by Using a FE² Technique and Fibre/Matrix Damage Mechanics*. [S.l.], 2000.

CHAWLA, K. K. *Composite Materials: Science and engineering*.

CHRYSOCHOOS, A.; MURACCIOLE, J. M.; WATTRISSE, B. *Experimental Analysis of Strain and Damage Localization*. [S.l.], 2000. Artigo apresentado no *Contínuos Damage and Congress*.

COFER, W. F., MCLEAN, D. I., PAYNTER, M. E., WANH, H., *The Development and Verification of Element Models to Optimize the design of Wale/Chock Structural Sections, Prepared for Office of Naval research under Contact N00014-97-C-0395*. 1998, Universidade Estadual de Washington, Pulman, WA.

COMPANY, V. N. R. *Handbook of composites*. London. 1982.

COQUILLET, B. et al. *Matériaux pour l'ingénieur: Les matériaux de structure*. 2003.

COSTA, M. R. P. F. N. da. *Elementos de física dos polímeros*. Notas de aula do programa de licenciatura em Engenharia Química da Universidade do Porto - Portugal. 2000.

DIETZ, A. G. H. *Composite Materials*.

EDWARDS, K. L. An overview of the fiber-reinforced plastic for design purpose. *Materials & Design*, v. 19, n. 1, p. 01-10, 1998.

FERREIRA, D. B. B. *Aplicação da técnica de emissão acústica na caracterização dos mecanismos de falha em plásticos reforçados por fibra*. Tese de doutorado – COPPE-UFRJ. 2000.

FILHO, N. M. *Placas laminadas em materiais compostos de longas fibras: Propriedades termoelásticas dos materiais constituintes; critério de ruptura e análise pelo método dos elementos finitos*. Dissertação de Mestrado (147 p.) – USP_EESC.1996.

GAY, DANIEL. *Matériaux Composites*, Hermès, Paris, 1991.

HANDBOOK of COMPOSITES (1982). London, Van Nostrand Reinhold Company.

HERRERA-FRANCO, P. J.; DZAL, L. T. Comparison of methods for the measurement of fiber/matrix adhesion in composites. *Composites*, v. 23, n.1, p. 02-27, 1992.

HOLLAWAY, L.C.; HEAD, P.R.; "Advanced Polymer Composites and Polymers in the Civil Infrastructure". 1 ed., Oxford, ELSEVIER, 2001.

HULL, D. *An introduction to Composite Materials*.

HYER, W. M. *Stress analysis of reinforced composite materials*.

JONES, R. M. *Mechanics of Composite Materials*. 2ª ed. Philadelphia – London, 1999.

KACHANOV, L. M.; AKAD, T. V. Z. *Time of rupture process under creep conditions*.

KAEFER, L. F. *A Evolução do Concreto Armado*. São Paulo - Brasil, 1998. Notas de Aula do Curso de Graduação em Engenharia Civil da Faculdade de Engenharia de São Carlos – USP.

LEMAITRE, J. *Some Open Problems in Damage Mechanics*. [S.L.], 2000. Artigo apresentado no Continuous Damage and Congress.

LEMAITRE, J.; KACHANOV, L. M. *Mechanics of solid materials*. 1985.

LUCATO, D. *Contribuição ao projeto e validação de trem de pouso, tipo wittman, em lâmina ortotrópica transversal de material compósito vidro e epóxi, para aeronaves enquadradas no F.A.R. part-23*. Tese de Doutorado – USP-EESC. 1991.

MAGAGNIN FILHO, N. (1996). Placas laminadas em materiais compostos de fibras longas: propriedades termoelásticas dos materiais constituintes; critérios de ruptura e análise pelo método dos elementos finitos. São Carlos, 147p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

MARTINS, D. S.; ZILBERKNOP, L. S. *Português Instrumental*. 22ª ed. Porto Alegre: Editora Sagra Luzzatto, 2001.

MATTHEWS, F. L.; RAWLINGS, R. D. *Composite Materials: Engineering and Science*. [S.L.]: Chapman & Hall.

MEHRABADI, M. M., COWIN S. C., (1990) Eigentensors of Linear Anisotropic elastic materials, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 43.1, 15-41

MOURA, M. e. *Materiais compósitos*. Notas de aula do Programa de Licenciatura em Engenharia Eletrotécnica e de Computadores da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto – Portugal. 2003.

NASA. *Orbiter Thermal Protection System*. USA, Mach 1997.

NOTON, B.R. (1987). Engineered materials handbook, v.1, Composites. p.35-37. Ohio, ASM International.

PINTADO, O. *et al.* Experimental Investigation of the dynamic response of graphite-epoxy composite laminates under compression. *Composite Structures*, v. 53, n. 1, p. 493-497, August 2001.

RABOTNOV, Y. N. Creep problems in structural members. 1969.

REINHART, T. J.; CLEMENTS, L. L. Engineered material handbook. *Jornal of strain analysis*, v. 1, n. composites, p. 27-34, 1987

REZENDE, M. C.; BOTELHO, E. C. O uso de compósitos estruturais na indústria aeroespacial. *Polímeros: Ciência e Tecnologia*. 2000.

SHELLEKENS, J. C. J.; BORTS, R. D. On the numerical modeling of the delamination in composites. *Key Engineering*, v. 1, n. 2, p. 75-85, 2001.

SCHREYER, H. L., ZUO, Q. H., *Anisotropic Yield Surfaces Based on Elastic Projection Operation*, *J appl. Mech.*, 62, 780-785. 1995

SHACKELFORD, J. F. *Introdution to Materials Science for Engineers*.

SILVA, A. R. C. da. Uma abordagem probabilística da ruptura de painéis tracionados de concreto de granulometria fina armados com telas soldadas. Tese de Doutorado – USP-EESC. 2001.

STORAKERS, B.; LARSSON, L. *On Buckling and Growth of Shallin Delaminations*. [S.1.], 2000. Artigo apresentado no Continuous Damage and Fracture Congress.

THIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. *Teoria da Elasticidade*. 3ª. Ed. [S.1.]:Guanabara Dois, 1980.

TITA, V. Análise dinâmica teórica e experimental de vigas fabricadas a partir de materiais compósitos poliméricos reforçados. Dissertação de Mestrado – USP-EESC-1999.

WISNOM, M. R.; CHANG, Fu-Kuo. Modelling of splitting and delamination in notched cross-ply laminates. *Composites Science and Technology*, v. 1, n. 60, p. 2849-2856, August 2000.

APÊNDICE A – NOTAÇÃO INDICIAL.

“por Milan. Jirásek – Fragments of Lecture by Milan Jirásek, Technical University of Catalonia (UPC) – Barcelona - November 2002.”

A.1. Notação Tensorial

Variáveis utilizadas em mecanismos de engenharia usualmente utilizam os caracteres dos tensores. No geral, denotamos os tensores de primeira ordem (vetores) por letras minúsculas latinas, os de segunda ordem por letras minúsculas Gregas ou latinas, e nos tensores de quarta ordem por letras maiúsculas no Latin. As letras principais representam os tensores inteiros (notação compacta). Quando é referência aos vetores do plano cartesiano (notação indicial) usamos letras minúsculas latinas subscrita i, j, k, l, \dots , que podem ter valores de 1, 2 e 3 correspondente aos eixos das coordenadas cartesianas x_1, x_2 e x_3 . Por exemplo, \mathbf{u} é um vetor deslocamento (vetor de primeira ordem) com componentes $u_i, i=1, 2, 3$; $\boldsymbol{\varepsilon}$ é um vetor tensão (segunda ordem) com componentes $\varepsilon_{ij}, i = 1, 2, 3, \text{ e } j = 1, 2, 3$; e \mathbf{D} é o vetor rigidez (quarta ordem) com componentes D_{ijkl} , todas as letras subscrita com valores de 1 a 3. Quando o tensor tem uma letra subscrita, levantamos ela ao sobrescrito na notação indicial para evitar confusão com o subscrito referidos nos componentes individuais. Por exemplo, os componentes do tensor de rigidez elástica \mathbf{D}_e são denotadas como D_{ijkl}^e .

A transposta $\boldsymbol{\varepsilon}^T$ do tensor de segunda ordem $\boldsymbol{\varepsilon}$ é obtida com a troca de ordem dos subscritos, por exemplo, $(\boldsymbol{\varepsilon}^T)_{ij} = \varepsilon_{ji}$. Se a transposta do tensor é igual ao original ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, para todo i e j) é dito como simétrico. Tensores de quarta ordem podem exibir simetria secundária ($D_{ijkl} = D_{jikl} = D_{ijlk} = D_{jilk}$ para qualquer i, j, k, l).

As operações básicas que necessitamos são:

- O produto pontual de dois tensores de primeira ordem, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_i$, que produz um escalar, e conseqüentemente é algumas vezes chamado de produto escalar,
- O produto duplo pontual de dois tensores de segunda ordem, $\sigma : \varepsilon = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$, que também produz um escalar, e conseqüentemente, também, pode ser chamado de produto escalar,
- O produto de ponto de dois tensores de segunda ordem, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, que produz um tensor de segunda ordem com componentes $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})_{ij} = a_{ik} b_{kj}$,
- O produto de ponto de um tensor de segunda ordem com um tensor de primeira ordem, $\sigma \cdot \eta$, ou $\eta \cdot \sigma$, que produz um tensor de primeira ordem com componentes $(\sigma \cdot \eta)_i = \sigma_{ij} \eta_j$, ou $(\sigma \cdot \eta)_i = \eta_j \sigma_{ji}$,
- O produto pontual duplo de um tensor de quarta ordem com um vetor de segunda ordem, $D : \varepsilon$, ou $\varepsilon : D$, o qual produz um vetor de segunda ordem com componentes $(D : \varepsilon)_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl}$, ou $(\varepsilon : D)_{ij} = \varepsilon_{kl} D_{kl ij}$,
- O produto direto de dois vetores de segunda ordem $f \otimes g$ que produz um vetor de quarta ordem com componentes $(f \otimes g)_{ijkl} = f_{ij} g_{kl}$.

Os produtos escalar são claramente comutativo ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ e $\sigma : \varepsilon = \varepsilon : \sigma$), a terceira operação é comutativa se o tensor de segunda ordem for simétrico ($\sigma \cdot \eta = \eta \cdot \sigma$ se $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ para qualquer i, j), a quarta operação é comutativa se o vetor de quarta ordem tiver simetria principal ($D : \varepsilon = \varepsilon : D$ se $D_{ijkl} = D_{klij}$ para qualquer i, j, k, l), e o produto direto é no geral não comutativo.

Um exemplo importante de um tensor de segunda ordem é o Kronecker delta, δ , com componentes $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Isso coloca o papel do elemento unidade com respeito ao produto pontual de dois tensores de segunda ordem, e conseqüentemente é também chamado a unidade do tensor de segunda ordem. Para a nossa proposição, a mais importante propriedade da Kronecker delta é que todos os valores principais são iguais a 1, e então o tensor tensão $S = \sigma \nu \delta$ representa o estado da unidade de tensão volumétrica, por exemplo um estado em que o corte em qualquer plano é zero.

Deixando-nos, também, introduzir a unidade do vetor de quarta ordem, \mathbf{I} , com componentes $I_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Esse tensor possui simetria principal, porém não possui simetria secundária, e a propriedade importante que $\mathbf{I} : \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{I} = \boldsymbol{\varepsilon}$ para qualquer vetor de segunda ordem $\boldsymbol{\varepsilon}$. Algumas vezes é útil trabalhar com unidades simétricas de vetores de quarta ordem, \mathbf{I}_s , o qual tem componentes $I_{ijkl}^s = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2$. Esse vetor possui simetria principal e secundária mas a identidade $\mathbf{I}_s : \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{I}_s = \boldsymbol{\varepsilon}$ ocupando somente se o tensor de segunda ordem $\boldsymbol{\varepsilon}$ for simétrico.

Finalmente, leva-nos a introduzir a notação $\partial u / \partial x$ para o tensor produzido pela diferencial da função do tensor \mathbf{u} com respectivo argumento tensorial \mathbf{x} . Por exemplo, se tanto \mathbf{u} e \mathbf{x} forem tensores de primeira ordem então é um tensor de segunda ordem com componentes

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (\text{A.1})$$

Similarmente, se σ é um tensor dependente de segunda ordem no outro tensor de segunda ordem $\boldsymbol{\varepsilon}$, a diferencial produz um tensor de quarta ordem com componentes

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}} \quad (\text{A.2})$$

Notando que, para o tensor de primeira ordem \mathbf{u} , temos

$$\left(\frac{\partial u}{\partial u} \right)_{ij} = \boldsymbol{\delta} \quad \therefore \quad \frac{\partial u_i}{\partial u_j} = \delta_{ij} \quad (\text{A.3})$$

E para o tensor de segunda ordem σ , temos

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \right)_{ijkl} = \mathbf{I} \quad \therefore \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} = \delta_{ik}\delta_{jl} = I_{ijkl} \quad (\text{A.4})$$

A regra da cadeia pode também ser gerada da função tensão-valor de um tensor argumento mas a atenção pode ser tida para o produto natural de operações entre termos individuais. A derivação pode ser mais segura fazendo em notação indicial. Por exemplo, se um tensor de segunda ordem \mathbf{f} depender de um tensor \mathbf{u} de segunda ordem e um escalar \mathbf{v} , cada qual depende de um tensor \mathbf{x} de segunda ordem, derivamos a regra da cadeia na notação indicial como:

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_{kl}} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial u_{mn}} \frac{\partial u_{mn}}{\partial x_{kl}} + \frac{\partial f_{ij}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x_{kl}} \quad (\text{A.5})$$

E então reescrevendo a fórmula na notação compacta como:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} : \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \otimes \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{A.5})$$

A primeira operação de produto é um produto de duplo ponto de dois tensores de segunda ordem enquanto o segundo é um produto direto de dois tensores de segunda ordem.

APÊNDICE B - ELEMENTOS DE FÍSICA DOS POLÍMEROS.

(por COSTA, M. R. F. N. – Elementos de Física dos Polímeros, FEUP/DEQ - Maio 2002.)

B.1. Tipos de propriedades moleculares

No seu clássico livro, Van Krevelen (1990) sugere a seguinte classificação das propriedades moleculares em três categorias:

- Propriedades *coligativas*, cujo valor é o mesmo para todas as moléculas, qualquer que seja a sua natureza química e estrutura;
- Propriedades *aditivas*, cujo valor é a soma das contribuições atômicas ou dos grupos constituintes da molécula;
- Propriedades *constitutivas*, influenciadas pela conectividade dos átomos constituintes da molécula.

Um exemplo do primeiro tipo de propriedades é o volume molar dos gases ideais:

$$\tilde{V} = \frac{RT}{P} \quad (\text{B.1})$$

Fora desse tipo de sistemas físicos, não se pode dizer, em rigor, que o conceito seja aplicável. No entanto, propriedades como a pressão osmótica Π (pressão que se estabelece entre as duas faces de uma membrana semi-permeável entre uma solução e o solvente) e o abaixamento do ponto de fusão DT_f , desde que se esteja a lidar com soluções muito diluídas de polímeros, são determinadas apenas pela soma das concentrações molares das várias espécies moleculares na solução (de concentrações mássicas c_i e massas moleculares M_i), independentemente da sua natureza química:

$$\Delta T_f = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} RT^2 c_i}{\Delta H_f M_i} = \frac{RT^2 c}{\Delta H_f M_n} \quad (\text{B.2})$$

$$\Pi = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} RTc_i}{M_i} = \frac{RTc}{\overline{M}_n} \quad (\text{B.3})$$

São usadas por isso como método de medida absoluto da massa molecular média em número das moléculas \overline{M}_n .

Há numerosos exemplos de propriedades físicas que são aproximadamente uma função aditiva de contribuições atômicas ou de grupo. Podem-se citar o calor específico, o volume específico no estado líquido e outras que serão mais adiante referidas. Note-se, no entanto, que só para a própria massa molecular se pode supor uma aditividade rigorosa.

No caso de um polímero, uma propriedade aditiva, numa base molar, terá uma variação linear com a massa molecular. Numa base mássica, terá uma variação linear com o inverso da massa molecular, e portanto atingirá um valor constante quando a massa molecular for suficientemente grande.

Por exemplo, se o volume molar do motivo repetitivo de um homopolímero linear for \tilde{V}_x e o volume molar dos seus grupos terminais for \tilde{V}_E , a aplicação da regra de aditividade leva a escrever que o volume molar de uma molécula de grau de polimerização x é dado por:

$$\tilde{V} = x\tilde{V}_x + \tilde{V}_E \quad (\text{B.4})$$

Como a massa molecular é dada (rigorosamente !) por

$$M = xM_x + M_E \quad (\text{B.5})$$

resulta uma relação linear entre o volume molar e a massa molecular:

$$\tilde{V} = \frac{V_x}{M_x} M + \tilde{V}_E - \frac{V_x}{M_x} M_E \quad (\text{B.6})$$

Existe também uma relação linear entre o volume específico e o inverso da massa molecular:

$$V_{sp} = V_{sp_x} + \frac{M_E(V_{spE} - V_{sp_x})}{M} \quad (\text{B.7})$$

Uma relação mais geral do que (7) pode escrever-se, no caso mais habitual de um polímero polidisperso (com espécies de várias massas moleculares), utilizando a massa molecular média em número \overline{M}_n , em vez da massa molecular M da espécie única do exemplo acima:

$$V_{sp} = V_{sp_x} + \frac{M_E (V_{sp_E} - V_{sp_x})}{\bar{M}_n} \quad (\text{B.8})$$

Relações análogas são válidas para as outras propriedades aditivas.

Mais frequentemente, as propriedades físicas dependem de interferências espaciais dos átomos na molécula, de uma forma tal que não obedecem a leis de aditividade simples como as que se aplicaram anteriormente.

Por exemplo:

- A viscosidade newtoniana (a baixa tensão de corte) de polímeros lineares fundidos monodispersos de massa molecular elevada é proporcional a $M^{3,4}$.
- O coeficiente de partição de um polímero entre solventes imiscíveis é aproximadamente uma função exponencial de M .

Qualquer tentativa para explicar os valores observados das propriedades físicas dos polímeros e das suas soluções passa inevitavelmente pela modelização das posições relativas dos seus átomos.

B.2. Elasticidade das redes macromoleculares

O seguinte esquema (fig. 1) ilustra os conceitos básicos sobre a constituição das redes macromoleculares.

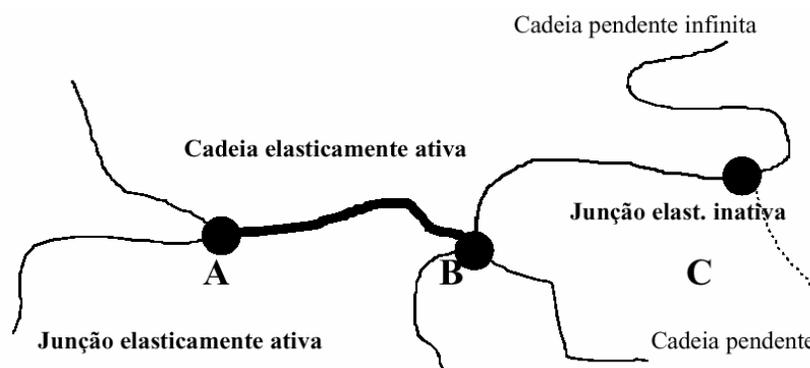


Figura 1: Junções elasticamente ativas e inativas, cadeias elasticamente ativas e pendentes, numa rede macromolecular. As cadeias infinitas são

representadas com uma seta na ponta. As cadeias pendentes partem das junções inativas, e tanto podem ser finitas como infinitas.

Para ser elasticamente ativa, uma junção deve estar ligada a pelo menos três cadeias infinitas, de modo a manter-se imóvel relativamente às outras junções do mesmo tipo, na ausência de forças externas.

Uma rede molecular como a borracha vulcanizada é um líquido atípico que opõe uma resistência à deformação, sob a forma de um módulo de elasticidade E e um módulo de rigidez G , sem paralelo nos líquidos usuais, de baixa massa molecular.

Essa elasticidade tem por origem a resistência ao afastamento entre as junções elasticamente ativas relativamente à sua distância de equilíbrio. Ao restringir o número de conformações acessíveis a essa cadeia, está-se a provocar uma diminuição de entropia (Meyer et al., 1932), e segundo a Termodinâmica clássica aparece uma força F que é função da variação da dimensão macroscópica L dada por (Guth, 1942; Treloar, 1942):

$$F = -T \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial L} \right)_{T,V} + \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial L} \right)_{T,P} \quad (\text{B.9})$$

O termo entálpico em (9) é quase sempre desprezível.

Para avaliar o termo entrópico, é preciso invocar a Termodinâmica Estatística e aplicar a lei de Boltzmann. Determinando o número de estados (conformações) antes e depois da deformação de uma cadeia gaussiana com distância ponta a ponta r , o resultado (Kuhn, 1936) é, para 1 mol de cadeias elasticamente ativas:

$$\Delta S = -\frac{3R\Delta \langle r^2 \rangle}{2 \langle r^2 \rangle_0} = -\frac{3R}{2} (\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 - 3) \quad (\text{B.10})$$

Kuhn (1936) e vários outros investigadores (James e Guth, 1943; Treloar, 1942) depois de ter deduzido estas expressões, consideraram que as deformações microscópicas de r , α_x , α_y e α_z , eram iguais às deformações macroscópicas de L (*modelo da deformação afim*). Esta hipótese permite então obter os módulos que exprimem as propriedades elásticas, combinando (10) com (9) e atendendo a que, para um elastómero incompressível, a condição de volume constante se escreve:

$$\alpha_x \alpha_y \alpha_z = 1 \quad (\text{B.11})$$

Numa alongação (tração) segundo o eixo dos x, $\alpha_y = \alpha_z$ e portanto

$$\alpha_y = \alpha_z = \frac{1}{\sqrt{\alpha_x}} \quad (\text{B.12})$$

$$\Delta S = -\frac{3R}{2} \left(\alpha_x^2 + \frac{2}{\alpha_x} - 3 \right) \quad (\text{B.13})$$

Introduzindo a concentração molar de cadeias elasticamente ativas antes da deformação v_e , obtém-se finalmente a relação entre a tensão nominal (força por unidade de área da secção inicial)

σ_{xx} e a razão de alongamento:

$$\sigma_{xx} = RTv_e \left(\alpha_x - \frac{1}{\alpha_x} \right) \quad (\text{B.14})$$

Note-se que não se verifica a lei de Hooke: não há proporcionalidade entre tensão e deformação.

Numa deformação por cisalhamento segundo o plano O_{xy} , $\alpha_z=1$ e $\alpha_y = 1 / \alpha_x$. A taxa de cisalhamento γ é dada por:

$$\gamma = \alpha_x - \frac{1}{\alpha_x} \quad (\text{B.15})$$

Desse modo:

$$\Delta S = -\frac{R}{2} \left(\alpha_x^2 - \frac{1}{\alpha_x} \right)^2 = -\frac{R}{2} \gamma^2 \quad (\text{B.16})$$

$$\sigma_{zx} = RTv_e \gamma \quad (\text{B.17})$$

Neste tipo de deformação, obtém-se uma lei de Hooke, sendo possível definir um módulo de rigidez dado por:

$$G = RTv_e \quad (\text{B.18})$$

Experimentalmente, verifica-se que os módulos previstos por este modelo são demasiado elevados. Um modelo mais próximo da realidade que foi estabelecido por James e Guth (1947), considera que as deformações macroscópicas são iguais às variações médias das razões das distâncias entre as junções, não sendo elas todas iguais nem sendo necessário considerar que junções inicialmente vizinhas se deveriam manter vizinhas depois da deformação, o que é fisicamente mais realista para deformações elevadas. A

dedução baseia-se no cálculo da variação de entropia da rede (conceito que aparece em Flory e Rehner, 1943 e Flory, 1944), e não das cadeias individuais supostas independentes. Contudo, não se consegue ter em conta a possibilidade de excluir as intersecções das cadeias, e daí que os detractores deste modelo o tenham apelidado de *modelo da rede fantasma*. As expressões a que se chega são semelhantes às do modelo da rede afim no que diz respeito às dependências das taxas de deformação, mas à contribuição da concentração de cadeias elasticamente ativas deve-se subtrair a das junções elasticamente ativas μ_e , o que tem por efeito melhorar o acordo com os dados experimentais:

!

$$\sigma_{xx} = RT(v_e - \mu_e) \left(\alpha_x - \frac{1}{\alpha_x^2} \right) \quad (\text{B.19})$$

$$\sigma_{zx} = RT(v_e - \mu_e)\gamma \quad (\text{B.20})$$

Se as junções na rede estiverem ligadas a φ cadeias, há uma relação simples entre μ_e e v_e :

$$v_e = \frac{\varphi}{2} \mu_e \quad (\text{B.21})$$

Muitas vezes, na literatura (em particular nos trabalhos do próprio P. J. Flory) estas relações aparecem não em termos de μ_e e v_e , mas introduzindo a massa molecular média em número das cadeias $\bar{M}_c = \frac{2}{\mu_e}$ e da funcionalidade média das junções $\bar{\varphi}$. Os conceitos de μ_e e v_e introduzidos por Scanlan (1960) e Case (1960) trazem, no entanto, enormes vantagens conceituais, uma vez que permitem considerar redes irregulares, em que as junções têm múltiplas funcionalidades. Mais tarde, Flory (1982) acabaria por subscrever o uso destes conceitos.

Para generalizar (21), considere-se uma rede de polímero que pode ser caracterizada com base na distribuição das concentrações molares de junções Tn segundo o número n de cadeias infinitas na qual estão ligadas. Assim, μ_e será a concentração molar dessas junções com $n > 2$ e o valor de v_e será a soma de nTn com $n > 2$, dividida por 2 para não contar a mesma cadeia 2 vezes:

$$\mu_e = \sum_{n=3}^{\infty} T_n \quad (\text{B.22})$$

$$\nu_e = \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} n T_n \quad (\text{B.23})$$

Deve notar-se que outras propriedades das redes macromoleculares têm relevância na determinação das propriedades elásticas. As cadeias pendentes dão uma importante contribuição para o amortecimento dinâmico das vibrações.

Para valores elevados da deformação (> 200 %), nenhuma destas teorias está de acordo com os resultados experimentais, mesmo excluindo o fenômeno da cristalização sob tensão que faz aumentar a rigidez de certos elastômeros (como, por exemplo, a borracha natural vulcanizada). Durante muito tempo, não havia alternativa para a correlação dos resultados experimentais para além da lei empírica de Mooney-Rivlin (Mooney, 1940 e Rivlin, 1948), sem que nenhuma explicação plausível surgisse:

$$\sigma_{xx} = \left(C_1 + \frac{C_2}{\alpha_x} \right) \left(\alpha_x - \frac{1}{\alpha_x^2} \right) = \left[C_1 + C_2 - \left(C_2 - \frac{C_2}{\alpha_x} \right) \right] \left(\alpha_x - \frac{1}{\alpha_x^2} \right) \quad (\text{B.24})$$

Note-se, no entanto, que (24) falha totalmente quanto a descrever a compressão, e nem sempre consegue representar os dados experimentais em elongação. No entanto, como tem mais um parâmetro, tem maiores possibilidades de ajuste.

Valores típicos para as constantes empíricas de Mooney-Rivlin para a borracha natural vulcanizada (dentro de um fator de variação de 2 para cima e para baixo, consoante ν_e) são $C_1 = 0,2$ e $C_2 = 0,15$ MPa. Este último parâmetro devia ser nulo para (24) conduzir à mesma relação tensão-deformação que a prevista por (14) ou (19).

Experimentalmente, verifica-se que a razão $C_2 / (C_1 + C_2)$ depende essencialmente do grau de diluição das cadeias, mas não da taxa de reticulação.

O comportamento das redes reais tende a ser intermediário entre o da rede afim (a baixas deformações) e o da rede fantasma (para deformações mais elevadas). Isto sugeriu a Flory que, enquanto as deformações forem pequenas,

se deve considerar que são particularmente importantes as restrições topológicas ao movimento das junções (o modelo da cadeia afim seria mais correto!), enquanto que as deformações elevadas acabam por desensarilhar as cadeias e o comportamento seria o da rede fantasma. A diluição por um solvente tem o mesmo efeito de aproximar o comportamento ao da rede fantasma.

O desenvolvimento desta ideia conduziu à *teoria da junção constrangida* (Erman e Flory, 1978; Flory, 1979; Erman e Flory, 1982), que introduz dois parâmetros suplementares para dar conta das restrições do movimento das junções, um dos quais interpola entre os modelos da rede afim e da cadeia fantasma e o outro exprime a possível não homogeneidade da rede. O seu domínio de aplicação é muito superior ao da equação empírica de Mooney-Rivlin (Mark e Erman, 1988).

Embora tenha havido um enorme progresso na descrição teórica dos vários aspectos do comportamento mecânico dos elastómeros, mesmo para grandes deformações, continua a falhar o ajuste das relações tensão-deformação quando se tenta fazer concordar os dados para o alongamento e para a compressão (Mott e Roland, 1996). Portanto, este problema continua por resolver.

Referências Bibliográficas

- L. C. Case, *J. Polym. Sci.*, **45** (1964) 501.
B. Erman; P. J. Flory, *J. Chem. Phys.*, **68** (1978) 1888.
B. Erman; P. J. Flory, *Macromolecules*, **15** (1982) 806.
P. J. Flory, *Polymer*, **20** (1979) 1317.
P. J. Flory, *Macromolecules*, **15** (1982) 99.
P. J. Flory; J. Rehner, Jr., *J. Chem. Phys.*, **11** (1943) 512.
P. J. Flory, *Chem. Revs.*, **35** (1944), 51.
E. Guth, *J. Phys. Chem.*, **46** (1942) 826.
W. Kuhn, *Kolloid Z.*, **76** (1936) 258.
H. M. James; E. Guth, *J. Chem. Phys.*, **11** (1943) 455.
H. M. James; E. Guth, *J. Chem. Phys.*, **15** (1947) 669.
J. E. Mark; B. Erman, "Rubberlike Elasticity", J. Wiley, N. York, 1988.

- K. H. Meyer; G. von Susich; E. Valkó, *Kolloid Z.*, (1932) 208.
 M. Mooney, *J. Appl. Phys.*, 11 (1940) 582.
 P. H. Mott; C. M. Roland, *Macromolecules*, **29** (1996) 6941.
 R. S. Rivlin, *Phil. Trans. Roy. Soc. (London)* **A240** (1948) 459, 491, 509 e **A241** (1948) 379.
 J. Scanlan, *J. Polym. Sci.*, **43** (1960) 397.
 L. R. G. Treloar, *Trans. Faraday Soc.*, **38** (1942) 293.
 D. W. Van Krevelen, "Properties of Polymers", 3ªEd., Elsevier, Amsterdam, 1990.

Nomenclatura

- C_1, C_2 - constantes de Mooney-Rivlin, Pa.
 c - concentração mássica de soluto por unidade de volume de solução, kg m^{-3} .
 c_i - concentração mássica da espécie i por unidade de volume de solução, kg m^{-3} .
 G - módulo de rigidez, Pa.
 L - dimensões macroscópicas do material, m.
 M - massa molecular, kg kmol^{-1} .
 M_i - massa molecular da espécie i , kg kmol^{-1} .
 M_X - massa molecular do motivo X, kg kmol^{-1} .
 M_{\square} - massa molecular dos grupos terminais, kg kmol^{-1} .
 M_n - massa molecular média em número, kg kmol^{-1} .
 P - pressão, Pa.
 R - constante dos gases ideais, $8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$.
 r^2 - valor instantâneo do quadrado da distância ponta a ponta para uma dada molécula, m^2 .
 T - temperatura absoluta, K.
 T_n - concentração molar das junções ligadas a n cadeias infinitas numa rede polimérica, kmol m^{-3} . \tilde{V} - volume molar, $\text{m}^3 \text{ kmol}^{-1}$.
 V_X - volume molar do motivo X, $\text{m}^3 \text{ kmol}^{-1}$.
 V_E - volume molar dos grupos terminais, $\text{m}^3 \text{ kmol}^{-1}$.
 V_{sp} - volume específico, $\text{m}^3 \text{ kg}^{-1}$.

V_{sp_x} - volume específico do motivo X, m³ kg⁻¹ .

V_{sp_E} - volume específico dos grupos terminais, m³ kg⁻¹ .

Letras gregas

α_x , α_y e α_z - fatores de alongamento da distância média quadrática entre junções, ou das dimensões macroscópicas, segundo os três eixos cartesianos.

\square - fator de deformação por corte.

ΔH_f - entalpia molar de fusão do solvente, J mol⁻¹ .

ΔH - variação de entalpia molar, J mol⁻¹ .

ΔS - variação de entropia molar, J mol⁻¹ K⁻¹ .

ΔT_f - abaixamento de ponto de fusão do solvente, K.

μ_e - concentração molar de junções elasticamente ativas, kmol m⁻³ .

v_e - concentração molar de cadeias elasticamente ativas, kmol m⁻³ .

Outros símbolos

$\langle \rangle$ - valor médio de uma variável que flutua no tempo.