



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

LUIZ FELIPE FERNANDES FREITAS

**MÉTODOS DE QUANTIZAÇÃO APLICADOS A PARTÍCULAS
SUPERSIMÉTRICAS**

FORTALEZA

2017

LUIZ FELIPE FERNANDES FREITAS

MÉTODOS DE QUANTIZAÇÃO APLICADOS A PARTÍCULAS SUPERSIMÉTRICAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

FORTALEZA
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F936m Freitas, Luiz Felipe Fernandes.

Métodos de quantização aplicados à partículas supersimétricas / Luiz Felipe Fernandes Freitas. – 2017.
50 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2017.

Orientação: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

1. Partícula supersimétrica. 2. Métodos de quantização. 3. Integrais de trajetória. 4. Quantização de Gupta-Bleuler. 5. Sistemas vinculados. I. Título.

CDD 530

LUIZ FELIPE FERNANDES FREITAS

MÉTODOS DE QUANTIZAÇÃO APLICADOS A PARTÍCULAS SUPERSIMÉTRICAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 03 de agosto de 2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcony Silva Cunha
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Prof. Dr. Célio Rodrigues Muniz
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

À Minha Filha Anna Liz M. Fernandes.

AGRADECIMENTOS

À minha esposa Jéssica M. Pontes pelo amor, apoio e compreensão.

À minha mãe Maria das D. Fernandes pelo grande apoio e carinho.

Ao professor Dr. Geová M. de A. Filho pela orientação e por permitir uma certa liberdade e autonomia no decorrer do curso.

Aos novos amigos do Grupo de Física Teórica da UFC que, a sua maneira, contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores do Departamento de Física que participaram diretamente da minha formação. Em especial, ao professor Dr. Carlos William de A. Paschoal.

Ao professor Dr. Marcony S. Cunha pelo auxílio na revisão textual desta dissertação.

À coordenação do Programa de Pós-graduação em Física pela logística no desenvolvimento desse trabalho.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

Nesta dissertação, estudaram-se alguns métodos de quantização aplicados ao modelo de partícula supersimétrica. Foi dada ênfase em dois métodos específicos, a quantização covariante de Gupta-Bleuler, que é um método aplicado a sistemas que possuem vínculos e a quantização por integrais de caminho de Feynman, um processo mais elegante e também mais poderoso de se fazer a transição do nível clássico para o nível quântico de uma teoria com ou sem vínculos. Foi feita uma breve discussão sobre a teoria de partículas supersimétricas, que usa variáveis comutantes para descrever seu movimento no espaço-tempo e variáveis anticomutantes da álgebra de Grassmann para descrever os graus de liberdade de spin. Entre os resultados mais interessantes obtidos da quantização do modelo pelo método de Gupta-Bleuler está a identificação da álgebra de Grassmann com a álgebra de Clifford no nível quântico e a obtenção da equação de Dirac não massiva. Já na abordagem de integrais de caminho, foram estudados dois sistemas: a partícula relativística de spin zero, a qual a quantização levou ao propagador de Klein-Gordon; e a partícula supersimétrica de spin meio, a qual a quantização levou ao propagador da equação de Dirac. Todos esses resultados, em ambos os esquemas de quantização, estando em total concordância com as teorias já bem estabelecidas na literatura sobre estes assuntos.

Palavras-chave: Partícula Supersimétrica. Métodos de Quantização. Integrais de Trajetória. Quantização de Gupta-Bleuler. Sistemas Vinculados.

ABSTRACT

In this Masters dissertation, some methods of quantization applied to the supersymmetric particle model were studied. Emphasis was given to two specific methods, the covariant quantization of Gupta-Bleuler, which is a method applied to systems that have constraints and the quantization by Feynman path integrals, a more elegant and also more powerful process of making the transition from classical to the quantum level of a theory with or without constraints. A brief discussion was made on supersymmetric particle theory, which uses commutative variables to describe its motion in space-time and anti-commutative variables of Grassmann's algebra to describe spin degrees of freedom. Among the most interesting results obtained from the quantization of the model by the Gupta-Bleuler method is the identification of Grassmann's algebra with the Clifford's one at the quantum level and the massless Dirac equation. In the path integral approach, two systems were studied, namely the relativistic spinless particle, which quantization led to the Klein-Gordon propagator, and the supersymmetric particle spinning, which quantization led to the propagator of the Dirac equation. All these results, in both quantization schemes, are in total agreement with the already well established theories in the literature on these subjects.

Keywords: Supersymmetric Particle. Quantization Methods. Path Integral. Gupta-Bleuler Quantization. Constraints Systems.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Particionamento do tempo.	33
--	----

LISTA DE SÍMBOLOS

x^μ	4-Vetor de posição $(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$
K_{ab}	Amplitude de transição
\hbar	Constante de Planck reduzida $(1,05457 \times 10^{-34} J \cdot s)$
∇^2	Laplaciano $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
\square	D'Alambertiano $\square \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$
δ_μ^ν	Delta de Kronecker, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$
Δ_{FP}	Determinante de Faddeev-Popov
γ^μ	Matrizes Gamma, $\mu = 0, 1, 2, 3$
σ^i	Matrizes de Pauli, $i = 1, 2, 3$
$\eta_{\mu\nu}$	Métrica do espaço de Minkowsky, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$
c	Velocidade da luz no vácuo $(2,99792 \times 10^8 m/s)$

CONTENTS

1	INTRODUÇÃO	11
2	SISTEMAS VINCULADOS E MÉTODOS DE QUANTIZAÇÃO	14
2.1	Mecânica Clássica e Sistemas Vinculados	14
2.2	Método de Dirac	17
2.3	Métodos de quantização	19
3	QUANTIZAÇÃO CANÔNICA/GUPTA-BLEULER	21
3.1	Vetor de Pauli-Ljubanski e Autovalores de Spin	25
3.2	Superpartícula e Interação Eletromagnética	27
4	INTEGRAIS DE CAMINHO	31
4.1	Partícula Relativística de Spin Zero	34
4.2	Partícula Relativística Supersimétrica de Spin $\frac{1}{2}$	38
5	CONCLUSÃO	42
	APÊNDICE A - VARIÁVEIS DE GRASSMANN	43
A.1	Definições e Propriedades Gerais	43
A.2	Pseudomecânica	45
	APÊNDICE B - INTEGRAÇÕES FUNCIONAIS	46
	REFERENCES	48

1 INTRODUÇÃO

No início do século XX, surgiram as primeiras ideias que levariam ao desenvolvimento da teoria quântica, considerada um dos pilares da física moderna junto à relatividade geral. Entre as propostas mais interessantes existentes nessa teoria está o conceito de dualidade, que estabelece uma estreita relação entre partícula e onda, até então distintos. Essa dualidade associa a cada partícula (atômica e subatômica) um comprimento de onda característico e serviu como base para a formulação da equação de Schrödinger, a qual tem como objeto principal uma função de onda $\psi(\vec{x}, t)$ associada às partículas. Apesar de ainda existir muita discussão filosófica a respeito da interpretação da mecânica quântica, esta teoria concorda muito bem com a experiência para baixas energias, quando comparadas às massas envolvidas. Isso porque, para energias da ordem do comprimento de onda das partículas, efeitos como criação e destruição começam a surgir, violando então a conservação da probabilidade existente nessa teoria, e requerendo assim sua reformulação. A Teoria Quântica de Campos (TQC) é hoje uma das mais bem conceituadas na descrição de fenômenos na escala da física de altas energias. O modelo padrão, corroborado de maneira fenomenal pela experiência, é completamente construído sobre as bases da TQC. Uma das grandes vantagens da construção de uma teoria por meio de campos é a possibilidade de iniciar a discussão ainda no nível clássico. Assim, pode-se formular uma teoria clássica para um sistema de spin inteiro ou semi-inteiro, por exemplo, e realizar a transição para o nível quântico por meio de algum *processo de quantização*.

Na mecânica quântica ordinária, descrita através da equação de Schrödinger, alguns sistemas quânticos podem ser associados a seus análogos clássicos. Nesses casos, diz-se que o sistema possui um limite clássico quando se faz $\hbar \rightarrow 0$. Um requisito essencial para que um sistema possua esse limite clássico é que seu espectro seja não limitado [1]. Assim, já surge um dos motivos pelo qual sistemas fermiônicos não permitem uma descrição clássica sem a utilização de campos, quer dizer, ainda a nível de partícula. Contudo, em 1975 surgiu um dos primeiros modelos que dava uma descrição de partículas fermiônicas a nível 'clássico' [2]. Nesse artigo, os autores propuseram um modelo 'clássico' não relativístico usando variáveis comutantes para localizar a partícula no espaço e variáveis anticomutantes da álgebra de Grassmann para descrever os graus de liberdade de spin. No ano seguinte, Casalbouni mostrou, de maneira sistemática, que o limite clássico de um sistema quântico fermiônico poderia, de fato, ser descrito utilizando-se variáveis anticomutantes, tal teoria foi chamada de *pseudomecânica* [3, 4]. Nesses dois artigos, entretanto, Casalbouni apresenta apenas os rudimentos desse modelo pseudoclássico, reformulando os formalismos lagrangiano, hamiltoniano e o conceito de parênteses de Poisson, que é de fundamental importância no procedimento de quantização canônica. No

mesmo ano, outros trabalhos foram desenvolvidos nesse contexto [5, 6], todos fazendo uso do ferramental desenvolvido por Casalbouni para descrever sistemas fermiônicos em uma teoria de partícula pseudoclássica não relativística e relativística. Um artigo em especial, submetido em 1976, antes dos dois artigos acima citados, mas publicado somente em 1977, descreveu de maneira bem detalhada a dinâmica de uma partícula, não relativística e relativística, com spin meio [7]. Nesse artigo, os autores estudaram a dinâmica pseudoclássica de tais partículas no formalismo lagrangiano e hamiltoniano, realizando a transição para o nível quântico por meio da quantização canônica. Dois resultados bastante interessantes surgem após a quantização do sistema relativístico; a álgebra de Grassmann pode ser identificada com a álgebra de Clifford no nível quântico e ainda, a obtenção da equação de Dirac, que descreve partículas relativísticas de spin $\frac{1}{2}$. É interessante destacar que entre 1970 e 1975, estava se 'redescobrimdo' a *Supersimetria* no contexto de teoria de campos, uma simetria que combina de modo não trivial duas outras simetrias: as do espaço-tempo, como Lorentz e Poincaré, que são guias para a construção de *qualquer* teoria relativística; e as chamadas simetrias internas, normalmente referida como $SU(N)$. E todos esses modelos de descrição de spin com variáveis anticomutantes foram construídas com base em argumentos de supersimetria, com alguns autores, inclusive, se propondo ao estudo somente dessa simetria nesses modelos supersimétricos[6].

Nos anos seguintes, muitos outros trabalhos foram desenvolvidos nessa área: teorias pseudoclássicas para spin arbitrário [8, 9, 10], teoria de cordas [11, 12], entre outros. Destaca-se o trabalho [13], na qual os autores também fazem uma descrição, no formalismo lagrangiano, da dinâmica de partículas pseudoclássicas com spin meio. Nesse artigo, mais uma vez, a transição para o nível quântico é realizada por meio da quantização canônica. Ainda nesse artigo, os autores descrevem a interação do sistema com um campo eletromagnético e fazem ainda uma breve análise do mesmo sistema no formalismo de *Superespaço*¹. Como foi dito, em todos esses artigos a transição para ao nível quântico é realizada por meio da quantização cônica. No entanto, essa não a única forma de se fazer essa transição. Por exemplo, outros autores exploraram a quantização desses sistemas pseudoclássicos, por meio das integrais de caminho de Feynman [15, 16], ou através da quantização BRST/BFV [17, 18, 19]. Esses métodos, para alguns autores, são mais elegantes, relativamente mais poderosos e possibilitam uma descrição de interações de uma forma mais direta.

Essa dissertação, tem como finalidade a descrição e o estudo de partículas com spin meio a nível 'clássico' sem a utilização de campos. Faz-se uma revisão de alguns dos principais resultados referentes à partículas supersimétricas. Contudo, o foco principal é a aplicação de diferentes métodos de quantização a esse sistema, com destaque para o método covari-

¹Superespaço é um espaço coordenado de uma teoria que exhibe supersimetria. Nessa formulação, além das dimensões do espaço-tempo que descrevem os graus de liberdade bosônicos, existem também dimensões formadas por variáveis anticomutantes, que descrevem os graus de liberdade fermiônicos [14].

ante de Gupta-Bleuler e para o formalismo de integrais de caminho de Feynman. No capítulo seguinte, apresenta-se uma revisão sobre sistemas vinculados em mecânica clássica, os quais devem ser muito bem compreendidos, visto que a quantização de sistemas com vínculos não é trivial. Apresentam-se também as principais características de alguns métodos de quantização mais utilizados na literatura. No capítulo 3, faz-se a aplicação da quantização canônica de Gupta-Bleuler para a partícula supersimétrica e ainda, uma discussão sobre o operador de spin para partículas não massivas. Por fim, estuda-se a interação do sistema com um campo eletromagnético externo. No capítulo 4, apresenta-se a abordagem de integrais de caminho e faz-se a aplicação a dois sistemas, a partícula relativística de spin zero e a partícula supersimétrica de spin meio. Em todo o desenvolvimento desta dissertação, usam-se as seguintes convenções: a métrica usada possui assinatura $(+, -, -, -)$, adota-se a convenção de soma de Einstein e usa-se o sistema de unidades naturais, onde $c = \hbar = 1$.

2 SISTEMAS VINCULADOS E MÉTODOS DE QUANTIZAÇÃO

Os sistemas que serão abordados nesta dissertação fazem parte de uma classe muito importante de sistemas físicos, que são os chamados *sistemas vinculados*. De uma maneira geral, essa é uma consequência de se tratar de um sistema relativístico com simetrias de gauge. Em vista disso, inicia-se a discussão fazendo-se uma breve revisão da mecânica clássica para sistemas com vínculos e apresenta-se o método de Dirac para tratar da quantização de tais sistemas. No final do capítulo, apresentam-se os principais métodos de quantização encontrados na literatura enfatizando-se suas vantagens e desvantagens. Grande parte do conteúdo desse capítulo pode ser visto em mais detalhes nas referências [20, 21, 22, 23].

2.1 Mecânica Clássica e Sistemas Vinculados

Sistemas mecânicos sujeitos a vínculos (restrições) ocorrem com frequência em física. Em tais casos, o formalismo desenvolvido por Lagrange se torna muito mais eficaz e poderoso que o tratamento newtoniano, onde seria necessário o conhecimento prévio de *todas* as forças que atuam no sistema. O formalismo lagrangiano descreve completamente o sistema por meio de uma integral funcional, a *ação*, na qual o integrando é chamado de *lagrangiana* e contém, a priori, toda a informação sobre o sistema.

Considere um sistema com n graus de liberdade caracterizado pelas coordenadas $\{q_n(t)\}$, onde t é um parâmetro de tempo. Defini-se a ação como,

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt L(q_n, \dot{q}_n; t), \quad (2.1)$$

onde considera-se que a lagrangiana depende apenas das coordenadas q_n 's, das velocidades \dot{q}_n 's e do tempo não explicitamente. As equações de movimento podem ser obtidas através do princípio de Hamilton, em que exige-se que a variação da ação seja nula em primeira aproximação,

$$\delta S = \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) \right] \delta q_n + \int_{t_a}^{t_b} dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \delta q_n \right) = 0, \quad (2.2)$$

onde usa-se a convenção de soma de Einstein. Tomando-se as variações δq_n 's como independentes e nulas nos extremos, $\delta q_n(t_a) = \delta q_n(t_b) = 0$, obtém-se as equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) = 0. \quad (2.3)$$

A expressão (2.3) pode ser escrita em uma forma bem mais conveniente,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_m \partial \dot{q}_n} \ddot{q}_m = \frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{\partial^2 L}{\partial q_m \partial \dot{q}_n} \dot{q}_m. \quad (2.4)$$

Definindo-se as quantidades $\mathbb{W}_{mn} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_m \partial \dot{q}_n}$ e $\mathbb{V}_n \equiv \frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{\partial^2 L}{\partial q_m \partial \dot{q}_n} \dot{q}_m$, que não dependem das acelerações, pode-se escrever a equação (2.4) da seguinte maneira,

$$\mathbb{W}_{nm} \ddot{q}_m = \mathbb{V}_n. \quad (2.5)$$

Nessa forma fica relativamente fácil resolver o sistema. Para isso é suficiente que a matriz \mathbb{W} , chamada matriz hessiana, tenha uma inversa, o que implica em $\det \mathbb{W} \neq 0$. Quando isso ocorre, pode-se resolver o sistema de equações para as acelerações,

$$\ddot{q}_m = \mathbb{W}_{mn}^{-1} \mathbb{V}_n, \quad (2.6)$$

e o problema é considerado resolvido. Quando não é possível inverter a matriz hessiana, diz-se que o sistema é vinculado, ou seja, nem todas as coordenadas são independentes umas das outras. Assim, em princípio não é possível usar as equações de Euler-Lagrange na forma (2.3), já que partiu-se do pressuposto de que as variações eram independentes entre si no processo de derivação dessas equações.

O estudo de sistemas vinculados tem se mostrado de grande importância na física, principalmente quando se pretende quantizar esses sistemas. No formalismo lagrangiano, pode-se introduzir os vínculos por meio dos multiplicadores de Lagrange. No entanto, existe a necessidade em descrever o sistema no formalismo hamiltoniano para que seja possível realizar a quantização¹. Isso leva a um tipo especial de vínculo que surge na transição entre os formalismos lagrangiano e hamiltoniano, aqueles que advêm da definição de momento canônico.

A descrição de um problema com n graus de liberdade $\{q_1, \dots, q_n\}$ no formalismo de Lagrange, necessita que se resolva um sistema com n equações diferenciais de segunda ordem, as equações de Euler-Lagrange. Entretanto, essa não é a única maneira de se tratar o problema. Pode-se estudá-lo no formalismo hamiltoniano, onde se lida com $2n$ graus de liberdade $\{q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n\}$ e precisa-se resolver $2n$ equações diferenciais de primeira ordem, as equações de Hamilton. A transição do formalismo lagrangiano para o hamiltoniano é feita por meio das transformações canônicas de Legendre,

$$H(q, p; t) = \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q, \dot{q}; t), \quad (2.7)$$

¹Essa questão foi discutida por Dirac, Feynman e outros, que buscaram desenvolver um esquema de quantização que pudesse ser aplicado diretamente a partir da lagrangiana do sistema, já que no método canônico isso não é permitido. O resultado dessa iniciativa é exatamente a abordagem de integrais de caminho que será discutido mais a frente.

em que, p_j é o momento canonicamente conjugado à q_j e é definido a partir da lagrangiana como,

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}. \quad (2.8)$$

Além disso, deve ser possível escrever as velocidades \dot{q}_j 's como função dos q_j 's e p_j 's. Esta última condição está diretamente relacionada a necessidade de a matriz hessiana poder ser invertida. Para mostrar isso, analisa-se a derivada dos momentos com relação as velocidades,

$$\frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_j} = \mathbb{W}_{jk}. \quad (2.9)$$

Note que, do ponto de vista puramente matemático, a matriz hessiana é a matriz de transformação de $\dot{q}_j \rightarrow p_j$, de modo que a transformação inversa requer que $\det \mathbb{W} \neq 0$ e como já foi mencionado, se $\det \mathbb{W} = 0$ o sistema possui vínculos. Do ponto de vista da equação (2.8), isso significa que não é possível escrever todos os \dot{q}_j 's como função de q_j 's e p_j 's, e para esses casos definem-se os *vínculos primários* como,

$$\phi_a \equiv p_a - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = 0, \quad (2.10)$$

onde, $a = 1, 2, \dots, M \leq n$. A presença desses vínculos na teoria faz com que a hamiltoniana do sistema não seja unicamente determinada, de modo que a definição das condições iniciais não determina de maneira única a evolução do sistema. Para uma melhor compreensão, considere a variação da equação (2.7),

$$\delta H(q, p; t) = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k \right) = \sum_k (\delta p_k \dot{q}_k + p_k \delta \dot{q}_k) - \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right). \quad (2.11)$$

Usando-se a definição de momento canônico (2.8) e organizando-se os termos chega-se a relação,

$$\sum_k \left[\left(\frac{\partial H}{\partial q_k} + \dot{p}_k \right) \delta q_k + \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} - \dot{q}_k \right) \delta p_k \right] = 0. \quad (2.12)$$

Se o sistema não possui vínculos, tratam-se as variações como independentes entre si e obtém-se as equações de movimento de Hamilton. Entretanto, essa identificação não é possível se o sistema é vinculado. Uma maneira de superar esse problema é adicionar à hamiltoniana canônica uma combinação linear dos vínculos por meio dos multiplicadores de Lagrange e então, tratar tanto as coordenadas canônicas como os multiplicadores de Lagrange como variáveis independentes. Seguindo-se os mesmos passos das equações (2.11) e (2.12) obtém-se,

$$\sum_k \left[\left(\frac{\partial H}{\partial q_k} + \sum_a u_a \frac{\partial \phi_a}{\partial q_k} + \dot{p}_k \right) \delta q_k + \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} + \sum_a u_a \frac{\partial \phi_a}{\partial p_k} - \dot{q}_k \right) \delta p_k \right] + \sum_a \phi_a \delta u_a = 0, \quad (2.13)$$

onde identificam-se as seguintes equações,

$$\begin{aligned}\dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} + \sum_a u_a \frac{\partial \phi_a}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k} - \sum_a u_a \frac{\partial \phi_a}{\partial q_k} \\ \phi_a &= 0\end{aligned}\tag{2.14}$$

Essas são as novas equações de movimento de Hamilton para sistemas com vínculos e a hamiltoniana passa a ser definida como,

$$H_T(q, p) = H(q, p) + \sum_a u_a \phi_a,\tag{2.15}$$

com os coeficiente u_a 's arbitrários. Essa arbitrariedade dos multiplicadores de Lagrange, u_a 's, é que torna a evolução do sistema não única. Fazendo-se uso das equações de movimento para \dot{q}_k e \dot{p}_k obtidas em (2.15), pode-se mostrar que a evolução temporal de uma variável dinâmica qualquer definida sobre o espaço de fase pode ser escrita na forma,

$$\dot{A}(q, p; t) = \frac{dA}{dt} = \{A, H\}_{pp} + \sum_a u_a \{A, \phi_a\}_{pp} + \frac{\partial A}{\partial t}.\tag{2.16}$$

Em que, $\{ , \}_{pp}$ são os parênteses de Poisson.

2.2 Método de Dirac

Um dos processos sistemáticos mais simples, e de certa forma mais prático, usado para quantizar um sistema físico é a chamada quantização canônica. Este método consiste basicamente em aplicar o princípio da correspondência, que promove os observáveis a operadores e estes devem obedecer a mesma álgebra que seus análogos clássicos. Em outras palavras, devem-se realizar as seguintes identificações,

$$A(q, p) \rightarrow \hat{A}(\hat{q}, \hat{p}) \quad \text{e} \quad \{ , \}_{pp} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [,].\tag{2.17}$$

Esta 'receita' funciona muito bem para sistemas não singulares (sem vínculos). Contudo, quando se está trabalhando com um sistema que possui vínculos, a implementação dessas restrições no nível quântico não é trivial. Classicamente, os vínculos definem sobre o espaço de fase uma hipersuperfície onde toda a dinâmica do sistema ocorre. No nível quântico, o que se tem é um espaço de estados gerado pela atuação dos operadores sobre um espaço vetorial complexo conhecido como espaço de Hilbert. Desse modo, a definição do espaço de estados 'restrito', que leve em conta os vínculos, requer um certo cuidado. Um estudo detalhado sobre a quantização de sistemas com vínculos foi apresentado por Dirac em seu livro "*Lectures on*

Quantum Mechanics” de 1964 [20]. Nessa seção, apresenta-se, de forma resumida, o formalismo de Dirac para tratar da quantização canônica de sistemas vinculados.

Na seção anterior, foi visto que a impossibilidade de se escrever as velocidades em função das posições e dos momentos canônicos dava origem à vínculos, chamados vínculos primários e definidos pelas relações (2.10). A presença dessas restrições tornava ambígua a definição da hamiltoniana, equação (2.15), de modo que um conjunto de condições iniciais não definia de maneira única a evolução temporal do sistema. Por fim, obteve-se uma expressão que rege a evolução dinâmica de um observável qualquer definido sobre o espaço de fase, relação (2.16). Um caso interessante é quando analisa-se a dinâmica dos vínculos fazendo-se $A(q, p) \rightarrow \phi_a(q, p)$ na equação (2.16),

$$\dot{\phi}_a(q, p) = \{\phi_a, H\}_{pp} + \sum_m u_m \{\phi_a, \phi_m\}_{pp}. \quad (2.18)$$

Nesse ponto é interessante introduzir a ideia de igualdade fraca, que será designada pelo símbolo \approx . Esse conceito foi usado por Dirac para enfatizar que os vínculos só devem ser tomados iguais a zero após o cálculo de todos os parênteses de Poisson. A relação (2.18) dita como os vínculos devem evoluir. Entretanto, a dinâmica do sistema deve permanecer restrita a superfície de vínculo em todo e qualquer tempo. De modo a assegurar isso, impõe-se que os vínculos não evoluam no tempo $\dot{\phi}_a(q, p) = 0$. Caso contrário, poderia ocorrer de um sistema, inicialmente sobre a hipersuperfície de vínculo, gerar componentes fora dela em decorrência simplesmente da evolução temporal dos vínculos. Com isso, a relação (2.18) se torna,

$$\dot{\phi}_a(q, p) = \{\phi_a, H\}_{pp} + \sum_m u_m \{\phi_a, \phi_m\}_{pp} \approx 0. \quad (2.19)$$

Essa relação (2.19) é chamada relação de consistência e pode levar as seguintes possibilidades: (a) ela é identicamente nula; (b) pode-se determinar os coeficientes u_m 's; (c) ou podem surgir novos vínculos, chamados *vínculos secundários*. Neste último caso, deve-se aplicar a relação de consistência novamente, isso levará a uma das três possibilidades acima e no caso de surgirem outros vínculos, retorna-se a relação de consistência, e isso deve ser feito até que não surjam mais vínculos na teoria.

De posse de todos os vínculos, Dirac os separa em dois conjuntos com características bem distintas, os de *primeira classe* $\{\phi_j\}$, que possuem parênteses de Poisson nulo com todos os vínculos, e os de *segunda classe* $\{\theta_j\}$, que não possuem essa propriedade. Em seu livro, Dirac mostra que os vínculos de primeira classe são intimamente relacionados à simetrias de gauge, eles são geradores dessas simetrias. A partir desses vínculos, as transformações dos campos da teoria são obtidas através da relação, $\delta_a A = \epsilon_a \{A, \phi_a\}$. Já os vínculos de segunda classe indicam a existência de graus de liberdade desnecessários para a descrição do sistema.

Com essas definições bem estabelecidas, Dirac defini um parênteses de Poisson generalizado,

$$\{F, G\}_D = \{F, G\}_{pp} - \sum_{n,m} \{F, \theta_n\}_{pp} (C^{-1})_{nm} \{\theta_m, G\}_{pp}, \quad (2.20)$$

onde, $C_{nm} = \{\theta_n, \theta_m\}_{pp}$ é a matriz formada pelo parênteses de Poisson dos vínculos de segunda classe. A relação (2.20) é conhecida na literatura como parênteses de Dirac e satisfaz as mesmas propriedades dos parênteses de Poisson. Com isso, o método de Dirac para quantizar um sistema com vínculos requer a fixação dos gauges, relacionados aos vínculos de primeira classe, e o princípio da correspondência passa a ser realizado identificando-se o parênteses de Dirac com o comutador. Em outras palavras, deve-se ter,

$$\{F, G\}_D \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{F}, \hat{G}] \quad \text{e} \quad A(q, p) \rightarrow \hat{A}(\hat{q}, \hat{p}). \quad (2.21)$$

Uma verificação rápida mostra que os vínculos de segunda classe são automaticamente eliminados pelo uso dos parênteses de Dirac.

2.3 Métodos de quantização

Essa discussão das duas secções anteriores pode parecer muito relacionada a um método de quantização específico, mas entender como lidar com esses vínculos é de fundamental importância para muitos outros esquemas de quantização, cada um deles com suas características, vantagens e desvantagens. Para concluir esse capítulo, faz-se uma descrição de alguns desses métodos.

- *Quantização Canônica*: Esse esquema de quantização foi um dos primeiros a ser desenvolvido, ele consiste basicamente na imposição da relação de comutação canônica, proveniente dos parênteses de Poisson entre as coordenadas e seus momentos conjugados,

$$[x_k, p_j] = i\hbar\delta_{kj}. \quad (2.22)$$

Além disso, promovem-se os observáveis físicos a operadores, que atuam em um espaço vetorial complexo, chamado espaço de Hilbert. No caso de sistemas com vínculos, a relação de comutação canônica é uma prescrição que é obtida a partir dos parênteses de Dirac, após todos os gauges fixados. A vantagem da quantização canônica é que ela quantiza somente os modos físicos, assim a unitariedade é manifesta. Já entre as desvantagens, está o fato de a 'coordenada' tempo ser tomada como um parâmetro, de tal modo que a invariância de Lorentz manifesta é sacrificada. Quando se trata de uma teoria de gauge, principalmente teorias de gauge não-abelianas, o método é muitas vezes bem complicado de se aplicar.

- *Quantização Covariante ou Gupta-Bleuler*: Esse método é bastante usado quando o sistema possui vínculos. Ele é muito semelhante ao método de Dirac, contudo não existe a necessidade de fixar todos os gauges. Uma das grandes vantagens desse método é que ele permite uma quantização covariante mantendo-se todas as simetrias de Lorentz manifestas. Por outro lado, dentre as desvantagens, está a possibilidade de propagação de estados de norma negativa na teoria (os 'ghosts')². Esses estados indesejados só são eliminados na construção do espaço de estados físicos, que é formado pelos estados que são aniquilados pelos operadores de vínculos no nível quântico,

$$\hat{\phi}|\psi_{fis}\rangle = 0, \quad (2.23)$$

onde ϕ são os vínculos de primeira classe da teoria.

- *Métodos de Integrais de Caminho*: Esse é talvez o mais elegante e poderoso método de quantização. Embora algumas convenções encontradas nos outros métodos possam parecer um pouco arbitrárias, o método de integrais de caminho é baseado em princípios simples e intuitivos que vão bem no cerne da teoria quântica. O postulado fundamental desse método é que todos os caminhos possíveis entre dois estados do sistema em tempos distintos contribui para a *amplitude de transição*, a qual o módulo quadrado dá a probabilidade de ocorrer tal transição. Existe ainda a possibilidade de transitar entre os demais métodos de quantização. Uma desvantagem desse método, é que o tratamento matemático do problema é delicado e muitas vezes não realizável.
- *Quantização BRST/BFV*: Essa é uma abordagem covariante, prática e muito conveniente de se aplicar a sistemas com simetrias de gauge (sistemas com vínculos). Esse método explora uma simetria existente entre os campos físicos e os 'ghosts' da teoria. A quantização é realizada por meio da aplicação da condição BRST, que diz que o espaço de estados físicos é formado pelos estados que são aniquilados pelo operador BRST Q , um operador fermiônico que contém toda informação sobre as simetrias do sistema. Aqui não é feita uma distinção entre os métodos BRST e BFV por serem muito semelhantes na sua construção, chegando inclusive a se confundir em muitos livros texto.

Existem ainda outros métodos de quantização, como por exemplo, o formalismo BV (Batalin e Vilkovisky) que está intimamente relacionado ao formalismo BRST, mas que possui algumas sutilezas como a introdução de 'anticampos' (*antifields*) que dá um aspecto mais geral para este formalismo. É um método muito conveniente para se quantizar teorias complexas, como teoria de cordas e teorias de branas.

²Para ser mais preciso, os 'ghosts' são objetos de norma positiva introduzidos na teoria para eliminar os estados de norma negativa. Contudo, é comum se referir a ambos como 'ghosts'.

3 QUANTIZAÇÃO CANÔNICA/GUPTA-BLEULER

A descrição da partícula livre relativística convencional, como a integral do elemento de linha mundo, não leva em conta qualquer informação sobre o spin, de modo que é comum dizer que o modelo descreve uma partícula escalar (spin zero). A partícula relativística supersimétrica, ou simplesmente *superpartícula*, é um modelo que descreve o movimento no espaço-tempo de uma partícula relativística com spin. Um dos primeiros modelos relativísticos desenvolvidos em meados da década de 70, que trazia em sua descrição essa informação sobre o spin na forma que será abordado nessa dissertação, foi proposto no artigo [6], onde os autores estudaram apenas as transformações de supersimetrias. No ano seguinte, no artigo [13], os mesmos autores estudaram a quantização do sistema e sua interação com um campo eletromagnético externo. Nessa formulação, além das coordenadas usuais do espaço-tempo $x^\mu(\tau)$, usam-se também variáveis anti-comutantes da chamada *álgebra de Grassmann*¹ para descrever os graus de liberdade de spin $\psi^\mu(\tau)$. A ação é construída de tal modo que possua duas simetrias essenciais, invariância por transformações gerais de $\tau \rightarrow f(\tau)$ e também invariância local por transformações de supersimetria (SUSY). Nesta dissertação, estuda-se apenas o modelo mais 'simples', que é o caso da partícula relativística não massiva.

A ação que descreve uma partícula supersimétrica não massiva, que é invariante por reparametrização de τ e por SUSY local pode ser escrita na forma,

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau \left(\dot{x}^2 e^{-1} - i\psi_\mu \dot{\psi}^\mu - ie^{-1} \chi \dot{x}_\mu \psi^\mu \right). \quad (3.1)$$

Esta ação necessita de alguns esclarecimentos. Por se tratar de uma partícula livre, em princípio poderia se propor um termo cinético do setor bosônico e um do setor fermiônico na forma, $2L = \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu - i\psi_\mu \dot{\psi}^\mu$. Porém, uma lagrangiana nessa forma não apresenta as simetrias mencionadas acima. De modo a torná-la invariante por reparametrização *geral* de τ , pode-se adicionar uma quantidade que é equivalente a um termo de métrica da linha mundo, e a lagrangiana fica $2L = e^{-1} \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu - i\psi_\mu \dot{\psi}^\mu$, onde o produto $ed\tau$ é um invariante por tais transformações (assim como $d^4x \sqrt{-g}$ é um invariante por transformações gerais de coordenada em relatividade geral). A justificativa para a presença do ultimo termo na expressão (3.1), vem da exigência da invariância da ação por SUSY. A natureza da quantidade χ é determinada pelo fato de que em toda e qualquer teoria física a ação deve ser real, escalar e bosônica, o que faz de χ uma variável de Grassmann real. Para uma melhor discussão sobre essa construção recomendam-se as referências [24, 25].

¹No apêndice A, é feito um resumo das principais propriedades dessa álgebra.

Pode-se mostrar a invariância da ação (3.1) por reparametrização geral de τ , propondo-se uma transformação infinitesimal na forma $\tau \rightarrow \tau + \epsilon(\tau)$, que leva as seguintes transformações dos 'campos'²,

$$\delta x_\mu = \epsilon \dot{x}_\mu; \quad \delta \psi_\mu = \epsilon \dot{\psi}_\mu; \quad \delta e = \frac{d(\epsilon e)}{d\tau}; \quad \delta \chi = \frac{d(\epsilon \chi)}{d\tau}. \quad (3.2)$$

Já a invariância por SUSY pode ser verificada tomando-se as seguintes transformações,

$$\begin{aligned} \delta x &= i\alpha\psi; & \delta \psi &= \alpha \left(\dot{x}e^{-1} - \frac{i}{2}e^{-1}\chi\psi \right); \\ \delta e &= i\alpha\chi; & \delta \chi &= 2\dot{\alpha}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Note que essas transformações (3.3) relacionam os dois setores da teoria, o bosônico e o fermiônico. Por essa razão, é muito comum encontrar na literatura que a supersimetria é uma simetria que 'transforma' férmions em bósons e vice-versa, ou que, para cada bóson (férmion) existe uma outra partícula referida como o superparceiro, que é um férmion (bóson).

Aplicando-se o princípio de Hamilton à ação (3.1), pode-se obter as quatro relações abaixo,

$$\begin{aligned} (a) \quad \delta x_\mu &\Rightarrow \frac{d}{d\tau} (e^{-1}\dot{x}^\mu - \frac{i}{2}\chi e^{-1}\psi^\mu) = 0; \\ (b) \quad \delta \psi_\mu &\Rightarrow \dot{\psi}^\mu - \frac{1}{2}\chi e^{-1}\dot{x}^\mu = 0; \\ (c) \quad \delta \chi &\Rightarrow \dot{x}^\mu \psi_\mu = 0; \\ (d) \quad \delta e &\Rightarrow \dot{x}^2 - i\chi \dot{x}^\mu \psi_\mu = 0. \end{aligned}$$

Das quais, obtém-se duas equações de movimento, (a) e (b), para x_μ e ψ_μ , respectivamente. E duas relações algébricas, (c) e (d), para as variáveis χ e e . Essas duas últimas mostram que e e χ não possuem dinâmica, gerando então dois vínculos: (d), que é a expressão para energia relativística e (c), que estabelece a relação de ortogonalidade entre o spin e a velocidade para partículas não massivas.

Como foi discutido nas secções anteriores, o método de quantização canônica requer que a descrição do sistema seja feita no formalismo hamiltoniano, para isso, faz-se o cálculo dos momentos canônicos,

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = e^{-1} \left(\dot{x}^\mu - \frac{i}{2}\chi \psi^\mu \right); \quad \pi_\mu = -\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^\mu} = -\frac{i}{2}\psi_\mu; \quad \pi_e = \frac{\partial L}{\partial \dot{e}} = 0; \quad \pi_\chi = -\frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}} = 0. \quad (3.4)$$

Nessas expressões dos momentos, pode-se ver que as três últimas relações constituem vínculos,

²Essa é uma terminologia genérica para designar as quantidades presentes na ação, tal que não deve ser entendida como um campo no contexto da teoria de campos.

já que não é possível resolvê-las para as suas respectivas velocidades. Usando-se a relação (2.7), a hamiltoniana canônica fica,

$$H = p_\mu \dot{x}^\mu + \pi_\mu \dot{\psi}^\mu - L = \frac{e}{2} p^\mu p_\mu + \frac{i}{2} \chi p^\mu \psi_\mu. \quad (3.5)$$

A partir dessa hamiltoniana, pode-se verificar a consistência dos vínculos. Aplicando-se a relação de consistência (2.19), obtém-se mais dois vínculos,

$$\phi_1 \equiv p^\mu p_\mu \approx 0, \quad \text{e} \quad \phi_2 \equiv p^\mu \psi_\mu \approx 0. \quad (3.6)$$

Retornando-se esses novos vínculos na relação de consistência, não surge nenhum outro vínculo. De modo a realizar a classificação dos vínculos, $\phi_1 \equiv p^\mu p_\mu \approx 0$, $\phi_2 \equiv p^\mu \psi_\mu \approx 0$, $\phi_e \equiv \pi_e \approx 0$, $\phi_\chi \equiv \pi_\chi \approx 0$ e $\phi_\mu \equiv \pi_\mu + \frac{i}{2} \psi_\mu \approx 0$, calculam-se os parênteses de Poisson entre eles, obtendo-se que os únicos de segunda classe são,

$$\{\phi_\mu, \phi^\nu\}_{pp+} = i\delta_\mu^\nu \quad \text{e} \quad \{\phi_2, \phi^\mu\}_{pp+} = p^\mu. \quad (3.7)$$

onde os parênteses de Poisson devem ser calculados com o sinal de mais, pelo fato desses vínculos serem anticomutantes [3]. Para que a quantização seja realizada de maneira consistente e por outras razões que ficarão claras mais a frente, é conveniente transformar o vínculo ϕ_2 em um de primeira classe. Isso pode ser feito, tomando-se uma combinação linear dos próprios vínculos na forma, $\tilde{\phi}_2 = \phi_2 + ip_\mu \phi^\mu$. É simples mostrar que esse 'novo' vínculo $\tilde{\phi}_2$ é de primeira classe. Com isso, obtém-se todos os vínculos da teoria: ϕ_1 , $\tilde{\phi}_2$, π_e e π_χ , vínculos de primeira classe e ϕ^μ , um vínculo de segunda classe.

Como foi visto na secção (2.3), a presença de vínculos de segunda classe requer a definição dos parêntese de Dirac. Usando-se a relação (2.20) obtém-se,

$$\{F, G\}_D = \{F, G\}_{pp} + i \{F, \phi^\mu\}_{pp} \{\phi_\mu, G\}_{pp}. \quad (3.8)$$

Com essa definição pode-se calcular os seguintes parênteses de Dirac,

$$\{x_\mu, p^\nu\}_D = \{x_\mu, p^\nu\}_{pp} + i \{x_\mu, \phi^\rho\}_{pp} \{\phi_\rho, p^\nu\}_{pp} = \delta_\mu^\nu, \quad (3.9)$$

e

$$\{\psi_\mu, \pi^\nu\}_{D+} = \{\psi_\mu, \pi^\nu\}_{pp+} + i \{\psi_\mu, \phi^\rho\}_{pp+} \{\phi_\rho, \pi^\nu\}_{pp+} = \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu. \quad (3.10)$$

Os demais parênteses de Dirac são todos nulos, $\{x_\mu, x^\nu\}_D = \{p_\mu, p^\nu\}_D = \{x_\mu, \psi^\nu\}_D = \{p_\mu, \psi^\nu\}_D = 0$. Note que se fossem mantidos os dois vínculos de segunda classe obtidos inicialmente, a relação (3.8) ganharia mais um termo e as relações de comutação entre as variáveis do sistema seriam modificadas, gerando uma álgebra semelhante aquela de teorias não-comutativas. Esse

não é o caminho que se deseja seguir nessa dissertação.

A ação (3.1) possui uma invariância de gauge gerada pelos vínculos de primeira classe ϕ_1 , $\tilde{\phi}_2$, π_e e π_χ , e como estabelece qualquer teoria de gauge, estes devem ser fixados para que a quantização seja feita de forma consistente. Então, isso permite as seguintes escolhas de gauges: $e = 1$ e $\chi = 0$, que possibilita a eliminação dos vínculos π_e e π_χ . Os vínculos de segunda classe pode ser resolvido notando-se que $\{A, \phi^\nu\}_{D^+} = \{\phi_\mu, \phi^\nu\}_{D^+} = 0$, ou seja, esse vínculo pode ser tomado fortemente igual a zero, já que ele não contribui para a dinâmica de qualquer observável da teoria. Restaram então somente os dois vínculos, ϕ_1 e $\tilde{\phi}_2 = \phi_2$.

A discussão até esse ponto se restringiu a um estudo clássico da partícula supersimétrica. Contudo, todos os ingredientes para realizar a chamada quantização canônica estão estabelecidos. Aqui cabe um comentário com relação ao método de quantização. A aplicação do método de Dirac exigiria que se eliminassem (resolvessem) *todos* os vínculos da teoria, seja pela fixação de gauge para os vínculos de primeira classe, seja pela realização do parenteses de Dirac para os vínculos de segunda classe. Entretanto, isso não foi feito, visto que ainda restaram dois vínculos ϕ_1 e $\tilde{\phi}_2 = \phi_2$. É exatamente nesse ponto que ocorre a distinção entre o método canônico de Dirac e o método de Gupta-Bleuler. Uma fixação do gauge para esses dois vínculos levaria a uma quantização não covariante, ou seja, sem as simetrias de Lorentz manifestas. Assim, de modo a manter a covariância do sistema, procede-se como se segue: não serão fixados esses gauges; identificam-se os parenteses de Dirac com os comutadores (anticomutadores) para as variáveis bosônicas (fermiônicas) e por fim, constrói-se o espaço de estados físicos por aqueles que são aniquilados pelos operadores de vínculo. Este tipo de abordagem é que caracteriza o esquema de *quantização covariante de Gupta-Bleuler*. Assim obtém-se,

$$[x_\mu, p_\nu] = i\eta_{\mu\nu}; \quad [\psi_\mu, \psi_\nu]_+ = -\eta_{\mu\nu} \quad \text{e} \quad \hat{\phi}_1|\psi_{fis}\rangle = \hat{\phi}_2|\psi_{fis}\rangle = 0. \quad (3.11)$$

em que, $|\psi_{fis}\rangle$ são os estados físicos aceitáveis desse sistema quantizado. Uma solução para a relação de anticomutação é dada por $\psi_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_5\gamma_\mu$, que leva a álgebra de Grassmann para a álgebra de Dirac-Clifford no regime quântico. A matriz γ_5 é produto das quatro matrizes γ_μ , de tal modo que $(\gamma_5)^2 = 1$. Com essa identificação, as relações para os operadores de vínculo assumem a forma,

$$\hat{p}^2|\psi_{fis}\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \gamma^\mu\hat{p}_\mu|\psi_{fis}\rangle = 0. \quad (3.12)$$

A segunda equação em (3.12) tem um significado muito interessante, ela é a equação de Weyl (Dirac não massiva) para uma partícula de spin $\frac{1}{2}$. Esse resultado indica que a utilização de variáveis anticomutantes para descrever os graus de liberdade de spin a nível clássico é de fato consistente, fornecendo resultados compatíveis com a descrição do spin em teorias quânticas já bem estabelecidas por Dirac, Weyl, Pauli e outros.

3.1 Vetor de Pauli-Ljubanski e Autovalores de Spin

Esse modelo de partícula supersimétrica foi construído de modo a descrever uma partícula de spin $\frac{1}{2}$. Isso é confirmado quando se identifica a segunda equação em (3.12) como a equação de Dirac não massiva, que descreve exatamente partículas de tal spin. Contudo, seria interessante verificar essa afirmação explicitamente. Isso pode ser feito analisando-se a quantidade conservada em uma transformação de Lorentz na ação (3.1). Propondo-se uma transformação infinitesimal na forma $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$, e realizando-se a variação da lagrangiana, obtém-se,

$$\begin{aligned}
\delta L &= \dot{x}^\mu \delta \dot{x}_\mu e^{-1} - \frac{i}{2} \delta \psi_\mu \dot{\psi}^\mu - \frac{i}{2} \psi_\mu \delta \dot{\psi}^\mu - \frac{i}{2} e^{-1} \chi \delta \dot{x}_\mu \psi^\mu - \frac{i}{2} e^{-1} \chi \dot{x}_\mu \delta \psi^\mu \\
&= e^{-1} \dot{x}^\mu \frac{d}{d\tau} (\omega_{\mu\nu} x^\nu) - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \psi^\nu \dot{\psi}^\mu - \frac{i}{2} \psi^\mu \frac{d}{d\tau} (\omega_{\mu\nu} \psi^\nu) - \frac{i}{2} e^{-1} \chi \left[\frac{d}{d\tau} (\omega_{\mu\nu} x^\nu) \psi^\mu + \dot{x}^\mu \omega_{\mu\nu} \psi^\nu \right] \\
&= \frac{d}{d\tau} \left[\omega_{\mu\nu} \left(e^{-1} \dot{x}^\mu x^\nu + \frac{i}{2} e^{-1} \chi x^\mu \psi^\nu - \frac{i}{2} \psi^\mu \psi^\nu \right) \right] + i \omega_{\mu\nu} \left(\dot{\psi}^\mu - \frac{1}{2} e^{-1} \chi \dot{x}^\mu \right) \psi^\nu \\
&\quad - \omega_{\mu\nu} x^\nu \frac{d}{d\tau} \left(e^{-1} \dot{x}^\nu - \frac{i}{2} e^{-1} \chi \psi^\nu \right), \tag{3.13}
\end{aligned}$$

usando-se as equações de movimento (a)-(d) e a primeira das relações para os momentos canônicos em (3.4), pode-se escrever,

$$\delta L = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} [\omega_{\mu\nu} (p^{[\mu} x^{\nu]} - i \psi^\mu \psi^\nu)] = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} [\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu}], \tag{3.14}$$

onde defini-se a corrente conservada como,

$$J^{\mu\nu} = p^{[\mu} x^{\nu]} - i \psi^\mu \psi^\nu. \tag{3.15}$$

Se a partícula fosse massiva, seria possível ir para o referencial de repouso dela, onde o primeiro termo da relação (3.15) iria a zero, restando então apenas um momento angular intrínseco que corresponderia ao spin da partícula. No entanto, como o sistema descrito aqui é não massivo, essa passagem para o referencial de repouso não é permitida pela relatividade, de modo que a definição do operador de spin não é obtida de forma tão trivial. Na realidade, não é possível definir um operador de spin propriamente dito para uma partícula sem massa, mas sim sua projeção na direção de movimento, que corresponde a helicidade da partícula. Nesse caso, é comum chamar o módulo da helicidade de spin da partícula.

Sabe-se do estudo do grupo de Poincaré que é possível definir dois operadores de Casimir³ para esse grupo, são eles os operadores $P^2 = m^2$ e $W^2 = m^2 s(s-1)$, onde pode-se

³Um operador de Casimir de um grupo é um operador que comuta com todos os geradores do grupo. Por exemplo, para o grupo das rotações $SO(3)$, que possui como geradores as três componentes do momento angular J_x, J_y e J_z , o operador $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ é um operador de Casimir.

caracterizar uma dada representação por meio da 'massa' m e do 'spin' s . Aqui, W é o vetor de Pauli-Ljubanski, definido como,

$$W^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} J_{\nu\rho} P_\sigma, \quad (3.16)$$

onde P^μ e $J^{\mu\nu}$ são os geradores das translações e das rotações do grupo de Poincaré, respectivamente. Para o caso especial de $m = 0$, o que implica em $P^2 = W^2 = 0$, é possível inferir a seguinte relação $W^\mu = \lambda P^\mu$, onde a constante de proporcionalidade λ é a helicidade da partícula. Como esta relação é válida para cada componente vetorial, pode-se tomar somente a componente zero desse vetor para definir a helicidade,

$$\lambda = \frac{1}{2P^0} \epsilon^{0\nu\rho\sigma} J_{\nu\rho} P_\sigma = \frac{1}{2P^0} \epsilon^{0\nu\rho\sigma} J_{\nu\rho} P_\sigma = \frac{1}{2P^0} \epsilon^{ijk} J_{ij} P_k, \quad (3.17)$$

usando a relação (3.15) tem-se,

$$\lambda = \frac{1}{2P^0} \epsilon^{ijk} J_{ij} p_k = \frac{1}{2P^0} \epsilon^{ijk} p_k p_{[i} x_{j]} - \frac{i}{2P^0} \epsilon^{ijk} p_k \psi_i \psi_j = -\frac{i}{2P^0} \epsilon^{ijk} p_k \psi_i \psi_j, \quad (3.18)$$

em que a primeira parcela se anula por conta da contração de um objeto simétrico com um antissimétrico. Com isso, o operador de helicidade pode ser escrito na forma,

$$\lambda = -\frac{i}{2|E_{\vec{p}}|} \epsilon^{ijk} p_k \psi_i \psi_j = \frac{i}{4|E_{\vec{p}}|} \epsilon^{ijk} p_k \gamma_i \gamma_j. \quad (3.19)$$

Onde usou-se que $p^0 = |E_{\vec{p}}|$ e foi feita a identificação $\psi_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_5 \gamma_\mu$ encontrada na secção anterior. Pode-se realizar um cálculo explícito definindo-se, ou escolhendo-se, uma representação para as matrizes gamma. Na representação de Weyl, essas matrizes são definidas como,

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1_{2 \times 2} \\ 1_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Essa representação é interessante pois, para o caso não massivo, ela separa o espinor de 4-componentes em dois espinores de 2-componente, um com helicidade positiva, *left-handed* e outro com helicidade negativa, *right-handed*. Portanto, essa representação se torna muito conveniente para o estudo da partícula supersimétrica sem massa dessa dissertação. O comutador do setor 'espacial' dessas matrizes dá,

$$[\gamma_i, \gamma_j] = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} = -2i \epsilon_{ijk} \sigma^k \otimes \mathbb{I}_{2 \times 2} \quad (3.21)$$

Com isso o operador de helicidade assume a forma,

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|E_{\vec{p}}|} \otimes \mathbb{I}_{2 \times 2}. \quad (3.22)$$

Escrevendo-se a segunda equação em (3.12) nessa representação de Weyl obtém-se,

$$\gamma_i p_i |\psi_{fis}\rangle = \gamma_0 p_0 |\psi_{fis}\rangle \rightarrow \frac{\gamma_i p_i}{|E_{\vec{p}}|} |\psi_{fis}\rangle = \gamma_0 |\psi_{fis}\rangle. \quad (3.23)$$

O que fornece duas equações para as partes *right-handed* e *left-handed*, respectivamente,

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|E_{\vec{p}}|} |\psi_{fis}\rangle_R = -1 |\psi_{fis}\rangle_R, \quad \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|E_{\vec{p}}|} |\psi_{fis}\rangle_L = +1 |\psi_{fis}\rangle_L. \quad (3.24)$$

Nessa forma, é fácil ver qual o resultado da atuação do operador de helicidade sobre os estados físicos,

$$\hat{\lambda} |\psi_{fis}\rangle_L = \frac{1}{2} \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|E_{\vec{p}}|} |\psi_{fis}\rangle_L = +\frac{1}{2} |\psi_{fis}\rangle_L, \quad (3.25)$$

e

$$\hat{\lambda} |\psi_{fis}\rangle_R = \frac{1}{2} \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|E_{\vec{p}}|} |\psi_{fis}\rangle_R = -\frac{1}{2} |\psi_{fis}\rangle_R, \quad (3.26)$$

confirmando que a teoria descreve partículas de spin meio.

3.2 Superpartícula e Interação Eletromagnética

Como ultima aplicação da quantização canônica, estuda-se a interação de uma partícula supersimétrica com um campo eletromagnético externo. Quando se está estudando a partícula relativística sem spin, adiciona-se a interação eletromagnética à lagrangiana por meio do termo $L_{int}^{(1)} = q \dot{x}_\mu A^\mu$, onde q é a constante de acoplamento e A^μ são as componentes do quadripotencial eletromagnético. Fazendo-se o mesmo para a partícula supersimétrica (3.1) obtém-se,

$$L = \frac{1}{2} \left(\dot{x}^2 e^{-1} - i \psi_\mu \dot{\psi}^\mu - i e^{-1} \chi \dot{x}_\mu \psi^\mu \right) + q \dot{x}_\mu A^\mu. \quad (3.27)$$

Novamente, deve-se exigir as simetrias presentes antes o acoplamento, por reparametrização e transformações de SUSY. Na forma que a lagrangiana (3.27) está escrita, ela já é invariante por reparametrização geral de τ , contudo, não é invariante por transformação local de supersimetria. Para que se obtenha tal invariância sem perder a que já existe, deve-se adicionar um termo na forma⁴ $L_{int}^{(2)} = \frac{i}{2} q e F^{\mu\nu} \psi_\mu \psi_\nu$, assim a lagrangiana fica,

$$L = \frac{1}{2} \left(\dot{x}^2 e^{-1} - i \psi_\mu \dot{\psi}^\mu - i e^{-1} \chi \dot{x}_\mu \psi^\mu \right) + q \dot{x}_\mu A^\mu + \frac{i}{2} q e F^{\mu\nu} \psi_\mu \psi_\nu. \quad (3.28)$$

O estudo das simetrias e das equações de movimento pode ser realizado da mesma

⁴COMENTÁRIO: "Essa construção por argumentos de simetria parece de certa forma arbitrária, principalmente para quem ainda está em um processo de formação e acumulo de conhecimento. Entretanto, as simetrias são de fundamental importância para a construção de qualquer teoria física, sendo, muitas vezes, os únicos guias que se têm para essa construção. No entanto, olhando-se mais atentamente para esses termos, nota-se que eles representam exatamente as interações do campo com o movimento orbital e com o momento magnético intrínseco da partícula."

forma que foi feito para o sistema sem interação. Fazendo-se a variação da lagrangiana (3.28) e usando-se o princípio da mínima ação, obtém-se,

$$\begin{aligned}
\delta L &= \dot{x}^\mu \delta \dot{x}_\mu e^{-1} - \frac{1}{2} \dot{x}^2 e^{-2} \delta e - \frac{i}{2} \delta \psi_\mu \dot{\psi}^\mu - \frac{i}{2} \psi_\mu \delta \dot{\psi}^\mu + \frac{i}{2} e^{-2} \delta e \chi \dot{x}_\mu \psi^\mu - \frac{i}{2} e^{-1} \delta \chi \dot{x}_\mu \psi^\mu \\
&- \frac{i}{2} e^{-1} \chi \delta \dot{x}_\mu \psi^\mu - \frac{i}{2} e^{-1} \chi \dot{x}_\mu \delta \psi^\mu + q \delta \dot{x}_\mu A^\mu + q \dot{x}_\mu \partial^\rho A^\mu \delta x_\rho + \frac{i}{2} q \delta e F^{\mu\nu} \psi_\mu \psi_\nu \\
&+ \frac{i}{2} q e \partial^\rho F^{\mu\nu} \delta x_\rho \psi_\mu \psi_\nu + i q e F^{\mu\nu} \psi_\mu \delta \psi_\nu \\
&= \left[\frac{d}{d\tau} \left(\dot{x}^\mu e^{-1} - \frac{i}{2} e^{-1} \chi \psi^\mu \right) + q \dot{x}_\nu F^{\mu\nu} + \frac{i q}{2} e \partial^\mu F^{\nu\rho} \psi_\nu \psi_\rho \right] \delta x_\mu - \left(\frac{i}{2} e^{-1} \dot{x}_\mu \psi^\mu \right) \delta \chi \\
&+ i \left(\dot{\psi}^\mu - \frac{e^{-1}}{2} \chi \dot{x}^\mu + q e F^{\nu\mu} \psi_\nu \right) \delta \psi_\mu - \frac{1}{2} \left(\dot{x}^2 e^{-2} - i e^{-2} \chi \dot{x}_\mu \psi^\mu - i q F^{\mu\nu} \psi_\mu \psi_\nu \right) \delta e. \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Exigindo-se que a variação da lagrangiana seja zero, chega-se as equações de movimento,

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{d\tau} \left(\dot{x}^\mu e^{-1} - \frac{i}{2} e^{-1} \chi \psi^\mu \right) + q \dot{x}_\nu F^{\mu\nu} + \frac{i q}{2} e \partial^\mu F^{\nu\rho} \psi_\nu \psi_\rho &= 0 \\
\dot{\psi}^\mu - \frac{1}{2} e^{-1} \chi \dot{x}^\mu + q e F^{\nu\mu} \psi_\nu &= 0 \\
\dot{x}^2 e^{-2} - i q F^{\mu\nu} \psi_\mu \psi_\nu &= 0 \\
\dot{x}_\mu \psi^\mu &= 0. \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Assim como no caso sem interação, as duas últimas equações são os vínculos relacionados as simetrias de gauge da teoria. É interessante notar que a equação para a energia relativística (a terceira relação em (3.30)) agora possui um termo de interação do spin com o campo eletromagnético.

Os próximos passos, que levarão a quantização da teoria com interação, são muito semelhantes aos que foram desenvolvidos na primeira parte do capítulo 3. Por uma questão de brevidade, muitas das etapas serão discutidas em menos detalhes e algumas até omitidas, assim considera-se como ponto de partida o cálculo dos momentos canônicos,

$$\begin{aligned}
p_\mu &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = e^{-1} \dot{x}_\mu - \frac{i}{2} e^{-1} \chi \psi_\mu + q A_\mu; \\
\pi_\mu &= -\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^\mu} = -\frac{i}{2} \psi_\mu; \\
\pi_e &= \frac{\partial L}{\partial \dot{e}} = 0; \\
\pi_\chi &= -\frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}} = 0. \quad (3.31)
\end{aligned}$$

Pode-se agora construir a hamiltoniana canônica,

$$H = \frac{e}{2} (p - qA)^2 - \frac{i}{2} q e F^{\mu\nu} \psi_\mu \psi_\nu + \frac{i}{2} \chi (p_\mu - qA_\mu) \psi^\mu. \quad (3.32)$$

Serão omitidos os detalhes desses cálculos, mas é possível mostrar, por meio das relações de consistência (2.19), que surgem mais dois vínculos $\phi_1 = (p_\mu - qA_\mu) \psi^\mu \approx 0$ e também $\phi_2 = (p - qA)^2 - iqF^{\mu\nu} \psi_\mu \psi_\nu \approx 0$. Pode-se mostrar ainda, que esses vínculos são classificados da seguinte forma: π_e e π_χ de primeira classe e ϕ_1, ϕ_2 e $\phi_\mu \equiv \pi_\mu + \frac{i}{2} \psi_\mu$ de segunda classe. Como antes, pode-se transformar ϕ_1 e ϕ_2 em vínculos de primeira classe tomando-se uma combinação linear dos vínculos. Isso feito, obtém-se então apenas ϕ_μ como vínculo de segunda classe e o parênteses de Dirac assume a mesma forma da equação (3.8) levando-se então as mesmas relações de comutação (3.9) e (3.10). Após a fixação dos gauges $e = 1$ e $\chi = 0$, e também pelo fato de $\{A, \phi^\nu\}_{D+} = \{\phi_\mu, \phi^\nu\}_{D+} = 0$, a quantização leva as seguintes relações,

$$[x_\mu, p_\nu] = i\eta_{\mu\nu} \quad \text{e} \quad [\psi_\mu, \psi_\nu]_+ = -\eta_{\mu\nu}. \quad (3.33)$$

e devem-se impor os vínculos aos estados físicos na forma,

$$(p_\mu - qA_\mu) \psi^\mu |\psi_{fis}\rangle = 0; \quad [(p - qA)^2 - iqF^{\mu\nu} \psi_\mu \psi_\nu] |\psi_{fis}\rangle = 0. \quad (3.34)$$

Além disso, as equações de movimento reduzem-se as expressões,

$$\begin{aligned} \ddot{x}^\mu &= q\dot{x}_\nu F^{\mu\nu} + \frac{iq}{2} \partial^\mu F^{\nu\rho} \psi_\nu \psi_\rho \\ \dot{\psi}^\mu &= -qF^{\nu\mu} \psi_\nu. \end{aligned} \quad (3.35)$$

A primeira das relações (3.34) poderia ser identificada como a equação de Weyl na presença de um campo eletromagnético externo, contudo, isso requerer que a álgebra (3.33) - para os ψ_μ - possa ser identificada como a álgebra de Clifford, mas também que ψ^μ seja uma constante, o que não ocorre devido a segunda equação de movimento em (3.35). Portanto, como isso deve ser interpretado?

Do estudo da mecânica quântica não relativística sabe-se que quando se lida com a evolução temporal de um sistema pode-se tratá-lo sob duas perspectivas: os estados evoluem no tempo e os operadores permanecem fixos, *picture de Schrödinger*; ou os operadores evoluem no tempo e os estados permanecem fixos, *picture de Heisenberg*. Em ambos os casos, as quantidades de interesse físico, que são os valores esperados desses observáveis, permanecem inalterados. Na representação de Heisenberg pode-se escrever as equações de movimento para os operadores na seguinte forma,

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = [\hat{A}, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}, \quad (3.36)$$

onde \hat{A} é função de \hat{q} e \hat{p} , e representa algum observável físico. Tomando-se o valor esperado de (3.36), obtém-se uma forma generalizada do **teorema de Ehrenfest**. Levando-se essa ideia para o caso relativístico, é possível fazer a interpretação da segunda das equações (3.35) como

uma aplicação do teorema de Ehrenfest para os 'operadores' ψ^μ . Desta forma, como é preciso tomar os valores esperados, pode-se escrever,

$$\frac{d}{d\tau} \langle \psi_{fis} | \psi^\mu | \psi_{fis} \rangle = -q \langle \psi_{fis} | F^{\nu\mu} \psi_\nu | \psi_{fis} \rangle. \quad (3.37)$$

O que permite 'transferir' a dependência temporal para os estados físicos e reinterpretar ψ^μ como fixo no tempo, assim não há mais problema na identificação de $(p_\mu - qA_\mu) \psi^\mu | \psi_{fis} \rangle = 0$ como a equação de Weyl na presença do campo eletromagnético, fazendo-se $\psi_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_5 \gamma_\mu$, obtém-se,

$$(p_\mu - qA_\mu) \gamma^\mu | \psi_{fis} \rangle = 0, \quad (3.38)$$

e toda a dependência temporal está contida nos estados físicos.

4 INTEGRAIS DE CAMINHO

A mecânica quântica obtida pelo processo de quantização canônica tem como elemento principal uma função onda, a qual possui, pelo menos em princípio, toda a informação sobre o sistema. Neste capítulo apresenta-se outro método de quantização, a abordagem das *Integrais de Caminho* de Feynman. Nesse método, a amplitude de transição, designada aqui por K_{ab} , é o objeto de maior importância e seu módulo quadrado fornece a probabilidade de uma partícula em um estado localizado na posição $x(t_a) = x_a$ num tempo t_a fazer a transição para um estado localizado em $x(t_b) = x_b$ num tempo t_b posterior. Nesta secção, faz-se uma breve discussão das ideias de Feynman apresentadas em seu artigo [26] e desenvolvidas no livro "*Quantum Mechanics and Path Integrals*" [27].

A teoria de Feynman é uma maneira alternativa de quantização que leva aos mesmos resultados da mecânica quântica ondulatória de Schrödinger e a matricial de Heisenberg. Uma das principais ideias que está na base do formalismo de Feynman é que todos os caminhos possíveis, e não somente o caminho clássico, que conectam os pontos $x(t_a)$ e $x(t_b)$ contribuem para a probabilidade de transição e isso constitui a essência de um processo quântico. De forma esquemática, pode-se representar isso da seguinte maneira,

$$K_{ab} = \sum_{\text{All Paths } x(t)} \Phi[x(t)], \quad (4.1)$$

em que $\Phi[x(t)]$ representa a contribuição de cada um dos caminho entre x_a e x_b , e é função da ação que descreve o sistema clássico,

$$\Phi[x(t)] = e^{iS[x(t)]}. \quad (4.2)$$

Como mencionado, o método de Feynman não leva a resultados novos. De modo que se poderia questionar a necessidade de se usar um método, muitas vezes bem mais complicado de implementar, que não fornece informação nova sobre o sistema. Entretanto, esse método fornece uma visão diferente do sistema quântico, possibilitando, por exemplo, uma descrição gráfica de alguns eventos por meio dos gráficos de Feynman (isso é bastante utilizado em teoria quântica de campos - TQC). Além da possibilidade de aplicação do método a sistemas os quais a quantização canônica se torna bastante inconveniente, como no estudo das interações entre campos, ou na quantização de teorias de gauge não abelianas. Em seu livro com Hibbs, Feynman postula uma expressão prática para (4.1) como uma integral de caminho, e a partir dela, obtém todos os resultados da mecânica quântica não relativística, inclusive a equação de Schrödinger. Outros livros texto preferem fazer o processo contrário, a partir da equação de

Schrödinger desenvolve-se uma expressão para a integral de caminho de Feynman, como apresentado em [28] por exemplo. Por questões de organização, nesta dissertação será tomado este último caminho para a construção da integral de Feynman.

Sabe-se da descrição de Schrödinger que a quantidade $\langle \alpha, t_b | \beta, t_a \rangle$ dá a amplitude de probabilidade de transição entre os dois estados. Como realizado em [28], defini-se os autoestados "instantâneos" $|q, t\rangle = \exp(iHt)|q\rangle$ e $|p, t\rangle = \exp(iHt)|p\rangle$ dos operadores de Heisenberg $Q(t)$ e $P(t)$, respectivamente. Este estados são completos, isto é,

$$\int dq |q, t\rangle \langle q, t| = \int dp |p, t\rangle \langle p, t| = 1, \quad (4.3)$$

e a seguinte propriedade é válida quando tem-se um estado $|\beta, t\rangle$ na representação de Schrödinger,

$$\langle q, -t | \beta, t \rangle = \langle q | \beta \rangle = \psi_\beta(q). \quad (4.4)$$

Com isso pode-se escrever,

$$\begin{aligned} \langle \alpha, -t_b | \beta, -t_a \rangle &= \int dq_b dq_a \langle \alpha, -t_b | q_b, t_b \rangle \langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle \langle q_a, t_a | \beta, -t_a \rangle \\ &= \int dq_b dq_a \psi_\alpha(q_b) \langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle \psi_\beta(q_b) \\ &= \int dq_b dq_a \psi_\alpha(q_b) Z(q_b, t_b; q_a, t_a) \psi_\beta(q_b), \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde toda a informação sobre o tempo está contida em $Z_{ab} = Z(q_b, t_b; q_a, t_a)$. Isso leva, muitas vezes, a denominação de Z_{ab} como o propagador do sistema. Fazendo-se um particionamento do intervalo de tempo em $N+1$ pedaços de mesmo comprimento ϵ pequeno (Figura 1), $t_a - t_b = \epsilon(N+1)$, e usando-se a relação de completeza, chega-se a seguinte expressão,

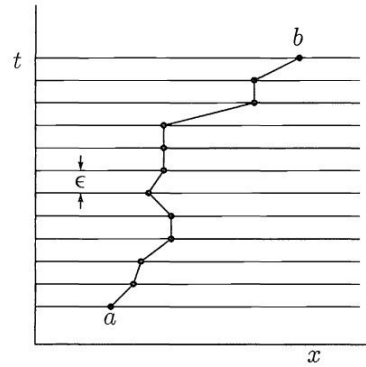
$$Z_{ab} = \langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle = \int dq_1 \dots dq_N \langle q_b, t_b | q_N, t_N \rangle \dots \langle q_1, t_1 | q_a, t_a \rangle, \quad (4.6)$$

onde identificam-se $q_0 = q_a$ e $q_{N+1} = q_b$. Examinando-se o j -ésimo elemento na expressão (4.6) tem-se¹,

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle &= \langle q_{j+1} | \exp(-iH(Q, P)\epsilon) | q_j \rangle \\ &= \int dp_j \langle q_{j+1} | p_j \rangle \langle p_j | \exp(-iH(Q, P)\epsilon) | q_j \rangle \\ &= \int dp_j \exp(-iH(q_j, p_j)\epsilon) \langle q_{j+1} | p_j \rangle \langle p_j | q_j \rangle \\ &= \int \frac{dp_j}{2\pi} \exp \left\{ i\epsilon \left[p_j \frac{(q_{j+1} - q_j)}{\epsilon} - H(q_j, p_j) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

¹Deveria ser discutido melhor sobre a questão do ordenamento dos operadores \hat{Q} e \hat{P} , que não comutam. Entretanto, como as hamiltonianas que serão tratadas nesta dissertação não envolvem produtos desses operadores essa discussão será omitida.

Figure 1 – Particionamento do tempo.



Fonte: Referência [27].

No limite em que $\epsilon \rightarrow 0$ obtém-se²,

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle = \int \frac{dp_j}{2\pi} \exp \{ i\epsilon [p_j \dot{q}_j - H(q_j, p_j)] \}. \quad (4.8)$$

Colocando-se o resultado (4.8) em (4.6) chega-se a expressão,

$$\begin{aligned} Z_{ab} &= \langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int dq_1 \dots dq_N \frac{dp_0}{2\pi} \dots \frac{dp_N}{2\pi} \exp \left\{ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{j=0}^N i\epsilon [p_j \dot{q}_j - H(q_j, p_j)] \right\} \\ &= \int Dq Dp \exp \left\{ i \int dt [p\dot{q} - H(q, p)] \right\} = \int Dq Dp \exp \left\{ i \int dt \tilde{L}(q, \dot{q}, p) \right\}, \quad (4.9) \end{aligned}$$

onde defini-se $Dq Dp = dq_1 \dots dq_N \frac{dp_0}{2\pi} \dots \frac{dp_N}{2\pi}$, que é o elemento de medida do espaço de fase. A quantidade $\int dt \tilde{L}(q, \dot{q}, p)$ se torna a ação clássica após a integração funcional sobre os momentos. Com isso, chega-se a expressão para a integral de caminho no espaço de fase,

$$Z_{ab} = \int Dq Dp \exp \left\{ i \int dt [p\dot{q} - H(q, p)] \right\}. \quad (4.10)$$

A generalização dessa expressão para o caso de mais graus de liberdade e para o caso relativístico é direta,

$$Z_{ab} = \int \overline{D}x_\mu \overline{D}p_\mu \exp \left\{ i \int d\tau [p_\mu \dot{x}^\mu - H(x, p)] \right\}, \quad (4.11)$$

onde nessa ultima expressão usa-se uma forma compacta para o elemento de medida $\overline{D}x_\mu \overline{D}p_\mu \equiv \prod_{\mu=0}^3 Dx_\mu Dp_\mu$. Nessa forma, a representação (4.11) para a integral de caminho é dita está na forma hamiltoniana, por conta da *integração funcional* nos momentos não ter sido realizada.

²É importante deixar claro que j vai de 0 a N .

4.1 Partícula Relativística de Spin Zero

Como primeira aplicação do método de Feynman de quantização, estuda-se uma partícula livre relativística de spin zero. Vale advertir que esse exemplo não é assim tão trivial, visto que se trata de um sistema que apresenta vínculos e deve-se implementá-los à integral de caminho de modo consistente. Assim, esse sistema será usado para descrever como se introduz os vínculos na formulação de integrais de caminho e também para dar uma ideia de como realizar as integrações funcionais.

A ação que descreve uma partícula livre relativística sem spin é a seguinte,

$$S = -m \int ds = -m \int \sqrt{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu} d\tau. \quad (4.12)$$

Calculando-se o momento canônico conjugado à x_μ , obtém-se $p_\mu = -m \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}}$ e a hamiltoniana canônica fica, $H = p^\mu \dot{x}_\mu - L = 0$. Como pode ser verificado facilmente, a expressão para o momento leva ao vínculo de primeira classe $\phi = p^\mu p_\mu - m^2 = 0$, que evidencia a simetria de gauge relacionada a invariância da ação (4.12) por reparametrização geral de τ . A construção da integral de caminho para esse sistema, como a hamiltoniana é nula, leva a seguinte expressão,

$$Z_{ab} = \int \bar{D}x_\mu \bar{D}p_\mu \exp \left\{ i \int d\tau (p_\mu \dot{x}^\mu) \right\}. \quad (4.13)$$

Como foi bastante discutido no capítulo 3, os vínculos geram uma hipersuperfície no espaço de fase onde a dinâmica do sistema deve ocorrer. Contudo, na forma que está a expressão (4.13) essa restrição não é obedecida. Assim, de modo a restringir o espaço de fase à superfície de vínculo deve-se introduzir uma 'delta' no elemento de medida³. Com isso, obtém-se,

$$Z_{ab} = \int \bar{D}x_\mu \bar{D}p_\mu \delta(\phi) \exp \left\{ i \int d\tau (p_\mu \dot{x}^\mu) \right\} = \int \bar{D}x_\mu \bar{D}p_\mu DN \exp \left\{ i \int d\tau [p_\mu \dot{x}^\mu - N\phi] \right\}, \quad (4.14)$$

em que N funciona como um multiplicador de Lagrange.

Na secção 2.2, foi dito que os vínculos de primeira classe estão relacionados a simetrias de gauges. Tais simetrias geram um problema quando se tenta calcular as integrais funcionais, pois como a ação é invariante e o elemento de medida não se altera por tais transformações, 'conta-se' infinitas vezes o mesmo caminho e isso leva à um resultado divergente para a relação (4.14). Assim, é necessário fixar tais gauges, par que cada caminho seja contado apenas uma única vez. Até meados da década de 60, havia muita discussão sobre como deveria ser tratada a quantização de sistemas com simetrias de gauge. Na época, objetivando a construção de uma teoria quântica de campos para as forças forte, fraca e a eletromagnética (que

³Essa é uma forma de se introduzir os vínculos de *primeira classe* na integral de caminho escrita na forma (4.11).

possuem uma simetria de gauge tipo Yang-Mills). No início da década de 70, Faddeev propôs um dos primeiros métodos⁴ apresentado em um trabalho intitulado "*The Feynman integral for singular lagrangians*" de 1970 [29]. De maneira simplificada, o procedimento de Faddeev consiste em eliminar a liberdade de gauge por impor uma condição auxiliar (outro vínculo) sobre o espaço de fase. Na construção de Faddeev, a expressão (4.11) assume a forma,

$$Z_{ab}^{\text{Fad}} = \int \overline{D}x_\mu \overline{D}p_\mu \prod_a \delta(\phi_a) \delta(\chi_a) \det \left| \{\phi_a, \chi_a\}_{pp} \right| \exp \left\{ i \int d\tau [p_\mu \dot{x}^\mu - H(x, p)] \right\}, \quad (4.15)$$

onde ϕ_a são os vínculos de primeira classe e χ_a são condições de gauge (condições auxiliares). A condição de gauge tem como objetivo exatamente eliminar as múltiplas 'contagens' do mesmo caminho. O determinante do parenteses de Poisson de ϕ_a e χ_a é necessário para que o elemento de medida fique independente da escolha da função de fixação de gauge.

Aplicando-se à expressão (4.14) obtém-se,

$$Z_{ab}^{\text{Fad}} = \int \overline{D}x_\mu \overline{D}p_\mu \delta(p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2) \delta(\chi) \det \left| \{p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2, \chi\}_{pp} \right| \exp \left\{ i \int d\tau [p_\mu \dot{x}^\mu] \right\}. \quad (4.16)$$

Escolhendo-se uma condição de gauge na forma⁵ $\chi = x^0 - \tau = 0$, pode-se escrever a equação (4.16) como,

$$\begin{aligned} Z_{ab}^{\text{Fad}} &= \int \overline{D}x_\mu \overline{D}p_\mu \delta(p_0^2 - E_{\vec{p}}^2) \delta(x^0 - \tau) \{p_0^2 - E_{\vec{p}}^2, x^0 - \tau\}_{pp} \exp \left\{ i \int d\tau [p_\mu \dot{x}^\mu] \right\} \\ &= \int \overline{D}x_\mu \overline{D}p_\mu \delta(p_0^2 - E_{\vec{p}}^2) \delta(x^0 - \tau) 2p_0 \exp \left\{ i \int d\tau [p_\mu \dot{x}^\mu] \right\} \\ &= \int \overline{D}\vec{x} \overline{D}\vec{p} \exp \left\{ i \int d\tau [E_{\vec{p}} - \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}}] \right\}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde $E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ e na última expressão realizou-se a integração em x^0 e p^0 . Vale aqui fazer uma observação, a 'função' delta de p_0^2 leva a duas soluções, mas por questão físicas* (uma partícula livre não pode ter energia negativa) essa outra solução foi descartada. Outro ponto importante é que a covariância de Lorentz manifesta foi sacrificada quando o gauge foi fixado da maneira apresentada, esse é um 'problema' desse método de Faddeev.

Uma outra maneira de se abordar o problema, mas desta vez mantendo a covariância de Lorentz manifesta, pode ser realizada aplicando-se outro método desenvolvido pelo próprio Faddeev e por Popov para teorias com simetrias de gauge do tipo Yang-Mills [30, 31]. O método

⁴Nesse contexto de integrais de caminho, existe outro método conhecido na literatura como método de Faddeev-Popov, que é usado na quantização de teorias de gauge para fixar esses gauges de maneira covariante. O método de Faddeev que nos referimos nesse primeiro momento é usado para implementar os vínculos de primeira classe da teoria e para realizar a fixação de gauge, visando a unitariedade da matriz S. Entretanto, esse é um processo não covariante e as diferenças ficaram claras no decorrer do capítulo.

⁵Será que essa condição de gauge é adequada para o caso de partículas não massivas?

de Faddeev-Popov consiste em fixar o gauge inserindo-se a 'unidade' na forma,

$$1 = \Delta_{FP}^{-1} \int D\Omega \delta(G_\Omega), \quad (4.18)$$

no elemento de medida. Na expressão (4.18), $G_\Omega = 0$ é uma função de fixação de gauge, Ω é um elemento do grupo de gauge da teoria e a quantidade Δ_{FP} é o determinante de Faddeev-Popov [22, 23]. Pode-se mostrar que o determinante de Faddeev-Popov é independente do gauge, de modo que é possível escrever,

$$\Delta_{FP} = \int D\Omega \det \left| \frac{\delta G}{\delta \Omega} \right|^{-1} \delta(\Omega - \Omega_0) = \det \left| \frac{\delta G}{\delta \Omega_0} \right|^{-1}. \quad (4.19)$$

Para o caso da partícula relativística, que possui o vínculo de primeira classe $\phi = p^2 - m^2 = 0$, tem-se as seguintes transformações de gauge geradas por esse vínculo,

$$\delta x_\mu = \epsilon(\tau) \{x_\mu, \phi\}_{PP} = 2\epsilon(\tau) p_\mu; \quad \delta p_\mu = \epsilon(\tau) \{p_\mu, \phi\}_{PP} = 0; \quad \delta N = \dot{\epsilon}(\tau), \quad (4.20)$$

a transformação de N é obtida por requerer a invariância da ação,

$$S = \int d\tau [p_\mu \dot{x}^\mu - N(p^2 - m^2)]. \quad (4.21)$$

A partir das transformações (4.20), pode-se identificar $\epsilon(\tau)$ como o elemento do grupo de gauge para esse sistema. A simetria de gauge presente na ação (4.21) é o que se chama na literatura de *simetria de gauge tipo relatividade geral (RG)*, ela possui algumas diferenças em relação às do tipo Yang-Mills (YM). A mais acentuada, é que as funções de fixação de gauge para simetrias tipo RG devem obedecer as certas condições e contorno, enquanto que as do tipo YM não necessitam dessa restrição. Essa limitação impede uma fixação de gauge covariante de Lorentz com uma função exclusivamente das variáveis canônicas. E a condição de gauge covariante mais geral possível permitida para sistemas como esse é na forma, $\chi = \dot{N} - f(x_\mu, p_\mu, N) = 0$, onde f é uma função arbitrária da coordenadas canônicas [32, 15, 33]⁶. Escolhendo-se a condição mais simples $\chi = \dot{N} = 0$ e aplicando-se o método de Faddeev-Popov chega-se a seguinte expressão para a integral de caminho (4.14),

$$\begin{aligned} Z_{ab}^{\mathbf{F-P}} &= \int \overline{D}x_\mu \overline{D}p_\mu DND\epsilon \det \left(\frac{\delta \chi}{\delta \epsilon} \right) \delta(\dot{N}) \exp \left\{ i \int d\tau [p_\mu \dot{x}^\mu - N(p^2 - m^2)] \right\} \\ &= \int D\epsilon \int \overline{D}x_\mu \overline{D}p_\mu DND \det(\partial_\tau^2) \delta(\dot{N}) \exp \left\{ i \int d\tau [p_\mu \dot{x}^\mu - N(p^2 - m^2)] \right\}, \quad (4.22) \end{aligned}$$

⁶Aqui é interessante ressaltar esta ultima referência, onde é feita uma discussão muito interessante sobre essas diferenças entre uma teoria de gauge tipo Yang-Mills e uma teoria de gauge tipo relatividade geral, que é o nosso caso. O autor argumenta que não é possível termos uma condição de gauge arbitrária nesse caso, visto que ela deve obedecer a certas condições de contorno, caso contrário perde-se informação fisicamente relevante quando a teoria é quantizada.

como nada na ultima integral depende de ϵ , pode-se então fatorar o volume do grupo de gauge, que é o setor que causa a divergência da teoria. Assim, obtém-se a seguinte expressão,

$$Z_{ab}^{\text{F-P}} = \int \bar{D}x_\mu \bar{D}p_\mu DN \det(\partial_\tau^2) \delta(\dot{N}) \exp \left\{ i \int d\tau [p_\mu \dot{x}^\mu - N(p^2 - m^2)] \right\}. \quad (4.23)$$

O determinante que surge na expressão (4.23) pode ser calculado pelo método de regularização da função- ζ [34]. Para isso, considera-se a seguinte situação: sabe-se que o determinante de uma matriz \mathbf{M} pode ser calculado sabendo-se os autovalores da matriz, $\det(\mathbf{M}) = \prod_n a_n$. Estendendo-se essa ideia para o caso de operadores contínuos, com $\mathbf{M} = \partial_\tau^2$, deve-se então calcular os autovalores desse operador. Assim, considerando-se a seguinte equação de autovalores,

$$\partial_\tau^2 \varphi_n(\tau) = -\lambda_n \varphi_n(\tau), \quad (4.24)$$

e assumindo-se condições de contorno de Dirichlet, $\varphi_n(\tau_1) = \varphi_n(\tau_2)$, pode-se mostrar que,

$$\lambda_n = \left(\frac{2n\pi}{\Delta\tau} \right)^2. \quad (4.25)$$

Assim, calcula-se o determinante pela relação (4.24). Agora, de modo a obter um resultado finito desse determinante, seguem-se os seguintes passos,

$$\begin{aligned} \det(\partial_\tau^2) &= \prod_n \left(\frac{2n\pi}{\Delta\tau} \right)^2 = \prod_n \exp \left[\ln \left(\frac{2n\pi}{\Delta\tau} \right)^2 \right] = \exp \left[\sum_n \ln \left(\frac{2n\pi}{\Delta\tau} \right)^2 \right] \\ &= \exp \left[\ln \left(\frac{2\pi}{\Delta\tau} \right)^2 \sum_n 1 + 2 \sum_n \ln(n) \right], \end{aligned} \quad (4.26)$$

escrevendo-se as somas de uma maneira bem sugestiva,

$$\begin{aligned} \det(\partial_\tau^2) &= \exp \left[\ln \left(\frac{2\pi}{\Delta\tau} \right)^2 \lim_{s \rightarrow 0} \sum_n n^{-s} - 2 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \sum_n n^{-s} \right] \\ &= \exp \left[\ln \left(\frac{2\pi}{\Delta\tau} \right)^2 \lim_{s \rightarrow 0} \zeta(s) - 2 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d\zeta(s)}{ds} \right], \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde, por extensão analítica para plano complexo, obtém-se,

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta'(0) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi). \quad (4.28)$$

Desse modo o determinante fica,

$$\det(\partial_\tau^2) = \exp \left[-\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2\pi}{\Delta\tau} \right)^2 + \ln(2\pi) \right] = \exp[\ln(\Delta\tau)] = \Delta\tau. \quad (4.29)$$

Retomando-se o cálculo das integrais de trajetórias. A delta no elemento de medida implica em

N constante, de modo que a integral funcional correspondente se torna uma integral convencional em N . Para resolver a integral funcional em x_μ pode-se fazer a integração por partes, $p_\mu \dot{x}^\mu = \frac{d}{d\tau}(p_\mu x^\mu) - \dot{p}^\mu x_\mu$ ⁷, que fornece,

$$\begin{aligned} Z_{ab}^{\text{F-P}} &= \int \overline{D}x_\mu \overline{D}p_\mu dN \Delta\tau \exp \left\{ i(p^\mu x_\mu)|_{\tau_2}^{\tau_1} - i \int d\tau \dot{p}^\mu x_\mu - i \frac{N_0}{2} \int d\tau (p^2 - m^2) \right\} \\ &= \int \overline{D}p_\mu dN \Delta\tau \delta(\dot{p}^\mu) \exp \left\{ i(p^\mu x_\mu)|_{\tau_2}^{\tau_1} - i \frac{N_0}{2} \int d\tau (p^2 - m^2) \right\} \\ &= (\text{const.}) \int d^4p \int_0^\infty dT \exp \left\{ ip \cdot \Delta x - i \frac{T}{2} (p^2 - m^2) \right\}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Na última equação fez-se $T = N_0 \Delta\tau$. A integração⁸ em T é exatamente a representação do tempo próprio de Schwinger [35],

$$Z_{ab}^{\text{F-P}} = (\text{const.}) \int d^4p \frac{e^{ip \cdot \Delta x / \hbar}}{p^2 - m^2 + i\eta}. \quad (4.31)$$

Esse resultado é simplesmente o propagador da equação de Klein-Gordon, que descreve uma partícula livre relativística sem spin. O fator $i\eta$ é para tornar a integração em p bem definida, uma quantidade infinitesimal que é tomada igual a zero após a integração. Será usado o mesmo método para estudar a partícula supersimétrica na próxima seção.

4.2 Partícula Relativística Supersimétrica de Spin $\frac{1}{2}$

Estudou-se no capítulo 3 a quantização da ação de uma partícula supersimétrica, onde iniciou-se a discussão pela ação (3.1). Foi visto que pode se fazer a transição para o formalismo hamiltoniano fazendo-se as transformações de Legendre (3.4) e (3.5). Nessa transição surgiam alguns vínculos, as três últimas relações em (3.4), e quando aplicava-se a relação de consistência (2.19), surgiam outros dois vínculos dados pelas relações (3.6), de modo que a hamiltoniana se tornava identicamente 'nula'. Esse fato (hamiltoniana nula) é uma característica de sistemas que possuem invariância por transformação de reparametrização. Para dar início ao processo de quantização por integrais de caminho da partícula supersimétrica, pode-se considerar a ação na seguinte forma,

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{i}{2} \psi_\mu \dot{\psi}^\mu - N p^2 - iM p^\mu \psi_\mu \right) - \frac{i}{2} \psi_\mu(\tau_2) \psi^\mu(\tau_1). \quad (4.32)$$

onde, como já foi visto, as relações p^2 e $p^\mu \psi_\mu$ constituem os vínculos de primeira classe, eles são os geradores das simetrias de gauge relacionadas à reparametrização de τ e às transformações

⁷Ver o apêndice A para um cálculo explícito.

⁸Na referencia [33] é discutido os limites de integração sobre T .

de SUSY local, respectivamente⁹. A partir dessa ação pode-se definir a integral de caminho na forma,

$$Z_{ab} = \int D\tilde{\mu} \exp \left\{ i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{i}{2} \psi_\mu \dot{\psi}^\mu - N p^2 - i M p^\mu \psi_\mu \right) - \frac{i}{2} \psi_\mu(\tau_2) \psi^\mu(\tau_1) \right\}. \quad (4.34)$$

onde, deve-se integrar funcionalmente sobre todos os campos presentes na ação, tal que, $D\tilde{\mu} = \overline{D}x_\mu \overline{D}p_\mu \overline{D}\psi_\mu DNDM$, N é um parâmetro comutante e M é anticomutante da álgebra de Grassmann. A quantização por integrais de caminho, diferente da quantização canônica, requer que se defina muito bem as condições de contorno do problema. Para nosso caso, essas condições de contorno são as seguintes, $x^\mu(\tau_1) = x_1^\mu$ e $x^\mu(\tau_2) = x_2^\mu$ para as coordenadas bosônicas e $\psi_\mu(\tau_1) + \psi_\mu(\tau_2) = 2\xi_\mu$ para as variáveis fermiônicas, com ξ_μ uma constante anticomutante.

Para proceder as integrações funcionais é preciso fixar os gauges da teoria. Assim como foi feito para a partícula relativística sem spin, as funções de fixação dos gauges, mantendo a covariância manifesta de Lorentz, podem ser escolhidas na forma $\chi_1 = \dot{N} = 0$ e $\chi_2 = \dot{M} = 0$. Usando-se o procedimento de Faddeev-Popov já mencionado na secção anterior, pode-se escrever,

$$Z_{ab}^{\text{F-P}} = \int D\tilde{\mu} \delta(\dot{N}) \delta(\dot{M}) \Delta_{FP}^{-1}(N) \Delta_{FP}^{-1}(M) \exp \{iS\}. \quad (4.35)$$

onde, $S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{i}{2} \psi_\mu \dot{\psi}^\mu - N p^2 - i M p^\mu \psi_\mu \right] - \frac{i}{2} \psi_\mu(\tau_2) \psi^\mu(\tau_1)$ e já fatorou-se os volumes dos grupos de gauges. Foi visto na secção (4.1), na equação (4.18), uma maneira de se calcular os determinantes de Faddeev-Popov (F-P). Contudo, deve-se tomar cuidado no cálculo desse determinante para funções fermiônicas. Sabe-se que uma função grassmanniana qualquer pode ser expandida em potências da variável independente na forma, $f(\theta) = 1 + f'[\theta - \theta_0] + \dots$. Além disso, a 'função' delta dessas variáveis pode ser escrita como, $\delta(\theta - \theta') = \theta - \theta'$. Com isso, a seguinte integral nos diz que,

$$\int d\alpha \delta(f(\alpha)) = \int d\alpha (1 + f'[\alpha - \alpha_0]) = \left[\frac{df}{d\alpha} \right]_{\alpha=\alpha_0}. \quad (4.36)$$

Fazendo-se uma generalização desse resultado para varias variáveis, como é feito no caso de variáveis comutantes, e aplicando-se ao calculo do determinante de F-P $\Delta_{FP}(M)$, obtém-se a

⁹Quando considera-se a ação do setor fermiônico definida como, $S_{fer} = -\frac{i}{2} \int d\tau \psi_\mu \dot{\psi}^\mu$, e aplica-se o princípio variacional a essa lagrangiana obtém-se a expressão,

$$\delta S_{fer} = -i \int d\tau \dot{\psi}^\mu \delta \psi_\mu - \frac{i}{2} (\psi_\mu(\tau_2) \delta \psi^\mu(\tau_2) - \psi_\mu(\tau_1) \delta \psi^\mu(\tau_1)). \quad (4.33)$$

que não é bem definida pois, $\dot{\psi}^\mu$ é de primeira ordem na derivada e não permite fixar duas condição de contorno. Por esse motivo deve-se adicionar o termo $\frac{i}{2} \psi_\mu(\tau_2) \psi^\mu(\tau_1)$, para tornar a variação da ação bem definida e para que se possa determinar de maneira unívoca as condições de contorno do setor fermiônico.

seguinte expressão,

$$\Delta_{FP}(M) = \det \left(\frac{\delta \chi}{\delta \alpha} \right). \quad (4.37)$$

Desta forma, diferente do que ocorre com variáveis comutantes (bosônicas), equação (4.19), o determinante de F-P para variáveis anticomutantes (fermiônicas) é proporcional ao determinante da variação da função de fixação de gauge. Então a integral de caminho assume a forma,

$$Z_{ab}^{\text{F-P}} = \int D\tilde{\mu} \delta(\dot{N}) \delta(\dot{M}) \det(\partial_\tau^2) \det(\partial_\tau^2)^{-1} \exp\{iS\}, \quad (4.38)$$

que se reduz a,

$$Z_{ab}^{\text{F-P}} = \int D\tilde{\mu} \delta(\dot{N}) \delta(\dot{M}) \exp\{iS\}. \quad (4.39)$$

Para começar o cálculo das integrais funcionais, pode-se fazer uma integração por partes $p_\mu \dot{x}^\mu = \frac{d}{d\tau} [p_\mu x^\mu] - \dot{p}_\mu x^\mu$ e realizar-se a integração em x_μ . Além disso, as deltas em N e M tornam as integrais funcionais dessas variáveis integrações ordinárias. Isso leva a relação,

$$Z_{ab}^{\text{F-P}} = \int \overline{D}p_\mu \overline{D}\psi_\mu dN dM \delta(\dot{p}_\mu) \exp\left\{i[p_\mu x^\mu]_{\tau_1}^{\tau_2} + i\tilde{S}\right\}. \quad (4.40)$$

Em que, $\tilde{S} = \int d\tau \left[-\frac{i}{2} \psi_\mu \dot{\psi}^\mu - N p^2 - iM p^\mu \psi_\mu \right] - \frac{i}{2} \psi_\mu(\tau_2) \psi^\mu(\tau_1)$. Continuando-se o cálculo funcional, a delta em p_μ torna a respectiva integração, uma integração convencional. Como ultimo passo, a realização da integração funcional em ψ_μ , faz-se a seguinte mudança de variáveis $\psi_\mu(\tau) = \theta_\mu(\tau) + \xi_\mu$, com ξ_μ anticomutante e constante. Com isso obtém-se,

$$\tilde{S} = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\frac{i}{2} \theta_\mu \dot{\theta}^\mu + N p^2 + iM p^\mu \theta_\mu + \frac{i}{2} \xi_\mu \dot{\theta}^\mu + iM p^\mu \xi_\mu \right] - i\xi_\mu \theta^\mu(1). \quad (4.41)$$

Fazendo-se algumas das integrações em τ , pode-se escrever a ação (4.41) como,

$$\tilde{S} = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\frac{i}{2} \theta_\mu \dot{\theta}^\mu + iM p^\mu \theta_\mu \right] + N p^2 \Delta\tau - iM p^\mu \xi_\mu \Delta\tau. \quad (4.42)$$

Assim a integral de caminho (4.40) fica,

$$Z_{ab}^{\text{F-P}} = \int d^4 p dN dM \overline{D}\theta_\mu \exp\left\{ip \cdot \Delta x + i\tilde{S}\right\}. \quad (4.43)$$

Os detalhes do cálculo da integração funcional nas variáveis de Grassmann θ_μ podem ser visto no apêndice B. Após essa integração, obtém-se,

$$Z_{ab}^{\text{F-P}} = (\text{const.}) \int d^4 p dN dM \exp\left[ip \cdot \Delta x + iN p^2 \Delta\tau + M p^\mu \xi_\mu \Delta\tau\right]. \quad (4.44)$$

Fazendo-se as as integrações em N e M chega-se ao resultado,

$$Z_{ab}^{\text{F-P}} = (\text{const.}) \int d^4 p \frac{i p^\mu \xi_\mu}{p^2 + i\eta} \exp[ip \cdot \Delta x], \quad (4.45)$$

onde, novamente η é um parâmetro que deve ser adicionado para tornar a integração em p bem definida. A expressão (4.45) é muito similar ao propagador da equação de Dirac na representação dos momentos, entretanto essa identificação não pode ser realizada ainda. Isso por que, a quantidade ξ_μ é um parâmetro grassmanniano, e até onde se sabe ele não obedece a relação de anticomutação da álgebra de Clifford $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{I}_{4\times 4}$.

Quando Feynman apresentou o método de integrais de caminho em 1948 [26], ele mostrou que *todos* os resultados da mecânica quântica ondulatória de Schrödinger poderiam ser derivados da amplitude de transição, inclusive a relação de comutação entre a posição e o momento linear. Aplicando-se o mesmo algoritmo apresentado por ele (equação (45) do artigo de 1948), pode-se mostrar que ψ_μ , e conseqüentemente ξ_μ , obedecem a relação de anticomutação da álgebra de Clifford no nível quântico. A relação apresentada por Feynman é a seguinte,

$$\left\langle \psi_{fis} \left| \frac{\partial F}{\partial q_k} \right| \psi'_{fis} \right\rangle = -\frac{i}{\hbar} \left\langle \psi_{fis} \left| F \frac{\partial S}{\partial q_k} \right| \psi'_{fis} \right\rangle, \quad (4.46)$$

onde F é uma função qualquer, S a ação (4.32) e $q_k = q(t_k)$ é uma componente qualquer¹⁰ das variáveis bosônicas ou fermiônicas em um tempo fixo t_k . Particionando-se o intervalo de tempo e concentrando-se somente no setor fermiônico, a ação pode ser escrita na forma,

$$S_{Fer} \rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_j \epsilon \left[-\frac{i}{2\epsilon} \psi_{\mu j} (\psi_{j+1}^\mu - \psi_{\mu j}) - iM p_j^\mu \psi_{\mu j} \right]. \quad (4.47)$$

Agora considerando-se $F \rightarrow \psi_{\nu j}$ e $q_k \rightarrow \psi_{\rho j}$, pode-se mostrar a relação,

$$\left\langle \psi_{fis} \left| \delta_\nu^\rho \right| \psi'_{fis} \right\rangle = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{\hbar} \left\langle \psi_{fis} \left| \frac{i}{2} \psi_{j+1}^\rho \psi_{\nu j} + \psi_{\nu j} \frac{i}{2} \psi_{j-1}^\rho + i\epsilon M \psi_{\nu j} p_j^\rho \right| \psi'_{fis} \right\rangle, \quad (4.48)$$

no limite que $\epsilon \rightarrow 0$ chega-se a relação de anticomutação desejada,

$$\psi_\rho \psi_\nu + \psi_\nu \psi_\rho = \{\psi_\rho, \psi_\nu\} = 2\hbar \eta_{\rho\nu}. \quad (4.49)$$

Desta forma, fazendo-se a identificação $\xi_\mu = \gamma_\mu$, pode-se então identificar a equação (4.45) como o propagador de Dirac para uma partícula não massiva,

$$Z_{ab}^{\text{F-P}} = (\text{const.}) \int d^4p \frac{i p^\mu \gamma_\mu}{p^2 + i\eta} \exp[ip \cdot \Delta x], \quad (4.50)$$

o que conclui esse estudo.

¹⁰Essa é uma generalização que estou assumindo. Em seu artigo, Feynman considera somente as variáveis de posição $q_k = x_k$.

5 CONCLUSÃO

Nessa dissertação, estudou-se dois métodos de quantização aplicados à partículas relativísticas supersimétricas de spin meio. Apresentou-se uma revisão sobre sistemas lagrangianos e hamiltonianos vinculados. Descreveu-se, de maneira bem sucinta, alguns métodos de quantização muito utilizados na literatura atualmente e aplicou-se dois desses métodos, quantização de Gupta-Bleuler e o método de integrais de caminho, ao problema da partícula supersimétrica. No método de quantização canônica (Gupta-Bleuler), foi visto que a álgebra de Grassmann poderia ser identificada com a álgebra de Clifford no nível quântico, o que permitiu fazer a identificação da relação (3.12) como sendo a equação de Weyl. Construiu-se, a partir do vetor de Pauli-Ljubanski, o operador de spin e verificou-se que os estados físicos aceitáveis representavam partículas de spin meio como proposto inicialmente. Realizou-se ainda um estudo desse sistema na presença de um campo eletromagnético externo. A quantização da teoria com interação não permitiu, pelo menos de imediato, a identificação da equação quântica resultante com a equação de Weyl sob interação eletromagnética. Isso por que, a dinâmica das variáveis de Grassmann, usadas na descrição dos graus de liberdade de spin, impossibilitou a identificação das mesmas como as matrizes gamma de Dirac. Contudo, este problema foi contornado quando tratou-se as equações de movimento como um resultado do teorema de Ehrenfest, onde foi possível transferir a dependência temporal para os estados físicos permitindo assim, a identificação da equação de Weyl na presença de um campo eletromagnético externo.

Estudou-se ainda a quantização da partícula supersimétrica na abordagem de integrais de caminho de Feynman. Como exemplo instrutivo, aplicou-se o método à partícula sem spin. Como principal resultado, obtive-se o propagador da equação de Klein-Gordon, que descreve exatamente partículas de tal spin. Aproveitou-se esse modelo também para apresentar como são tratados sistemas com vínculos no método de integrais de caminho. Na aplicação do método à partícula com spin meio obtive-se uma expressão muito parecida com o propagador da equação de Dirac. Entretanto, essa identificação, novamente, não pode ser realizada de imediato, visto que não surgiu nenhuma indicação de que poderíamos levar a álgebra de Grassmann para a álgebra de Clifford. Entretanto no formalismo desenvolvido por Feynman, a relação de comutação entre posição e momento conjugado poderia ser obtida a partir da amplitude de transição. Por meio do uso do algoritmo de Feynman, aplicado ao setor fermiônico, mostrou-se que no nível quântico a álgebra de Grassmann poderia ser identificada como a álgebra de Clifford também no formalismo de Feynman, permitindo identificar a relação (4.50) como o propagador de Dirac não massivo.

APÊNDICE A - VARIÁVEIS DE GRASSMANN

Esse apêndice é voltado a apresentação de algumas das propriedades da chamada álgebra de Grassmann.

A.1 Definições e Propriedades Gerais

Se $\{\eta_a\}$ constitui um conjunto de variáveis pertencentes a álgebra de Grassmann, então elas satisfazem a seguinte regra de multiplicação,

$$\eta_a \eta_b + \eta_b \eta_a \equiv \{\eta_a, \eta_b\} = 0, \quad \forall a \text{ e } b. \quad (\text{A.1})$$

Essa relação leva ao resultado imediato $\eta_a^2 = 0$. Nessa álgebra, pode-se definir funções dessas variáveis. Se $f(\eta)$ é função de uma variável de Grassmann, ela pode ser expandida em série de Taylor $f(\eta) = f_0 + f_1 \eta$, onde os coeficiente não dependem de η . Para funções de duas variáveis $f(\eta_1, \eta_2) = f_0 + f_1 \eta_1 + f_2 \eta_2 + f_{12} \eta_1 \eta_2$, e assim por diante, para funções de mais variáveis. A expansão em série de Taylor de qualquer função de um número finito de variáveis de Grassmann é sempre finita.

Outra definição importante é a de conjugação complexa. Ela é definida como,

$$(\xi_1 \xi_2)^* = \xi_2^* \xi_1^*. \quad (\text{A.2})$$

A conjugação complexa para variáveis de Grassmann funciona como a operação adjunto Hermitiano (transposto conjugado) para as matrizes. Para variáveis reais, $\eta^* = \eta$, tem-se $(\eta_1 \eta_2)^* = \eta_2^* \eta_1^* = \eta_2 \eta_1 = -\eta_1 \eta_2$. Essa é uma característica importante quando se pretende construir uma ação, ela justifica o por que dos produtos de variáveis grassmannianas reais aparecerem sempre acompanhadas pela unidade imaginária i , isso torna o produto real.

A derivação com respeito a variáveis de Grassmann pode ser realizada de duas maneiras, à direita e à esquerda, nessa dissertação ela é realizada sempre à esquerda,

$$\frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \eta_a}{\partial \eta_b} = \delta_{ab}. \quad (\text{A.3})$$

Para realizar a derivada de um produto de variáveis grassmannianas é prudente fazer uso da relação (A.1) para evitar confusão de sinais.

$$\frac{\partial (\eta_a \eta_c)}{\partial \eta_b} = \frac{\partial \eta_a}{\partial \eta_b} \eta_c - \frac{\partial \eta_c}{\partial \eta_b} \eta_a = \delta_{ab} \eta_c - \delta_{cb} \eta_a. \quad (\text{A.4})$$

As únicas integrais que se precisam conhecer para as variáveis de Grassmann são as seguintes:

$$\int d\eta = 0 \quad \text{e} \quad \int d\eta\eta = 1. \quad (\text{A.5})$$

Como qualquer função poder expandida em serie de Taylor, a integração de tais funções requer somente o conhecimento das definições acima. Uma mudança da variável de integração na forma $\eta_a = M_{ab}\theta_b$, pode ser feita como se segue,

$$\int d\eta_1\dots d\eta_N f(\eta_1\dots\eta_N) = \int d\theta_1\dots d\theta_N J_G \tilde{f}(\theta_1\dots\theta_N), \quad (\text{A.6})$$

em que o jacobiano J_G , é definido como,

$$J_G = \left[\det \left(\frac{\partial\eta}{\partial\theta} \right) \right]^{-1} = (\det M)^{-1}. \quad (\text{A.7})$$

Entre as funções que podem ser definidas nessa álgebra, a 'função' delta de Dirac merece um certo destaque. Ela possui a mesma propriedade básica já conhecida,

$$\int \eta \delta(\eta - \eta') f(\eta) = f(\eta'). \quad (\text{A.8})$$

Uma verificação direta, mostra que $\delta(\eta - \eta') = \eta - \eta'$. Algumas propriedades da 'função' delta são as seguintes:

- 1 - $\delta(0) = 0$;
- 2 - $\delta(\alpha\eta) = \alpha\delta(\eta)$;
- 3 - $\delta(\eta - \eta') = -\delta(\eta' - \eta)$;
- 4 - $\frac{\partial}{\partial\eta}(\delta(\eta - \eta')) = 1$;
- 5 - $\delta(\eta - \eta') = \int d\xi \exp(\xi(\eta - \eta'))$, com ξ grassmanniano.

Uma outra definição importante nesse contexto é a integral gaussiana, definida na forma,

$$\int d\eta^* d\eta \exp(-\eta^*\eta) = 1. \quad (\text{A.9})$$

Uma propriedade interessante derivada dessa definição é a seguinte¹,

$$\int d\eta_1^* d\eta_1 \dots d\eta_N^* d\eta_N \exp(-\eta_j^* M_{jk} \eta_k + K_j^* \eta_j + \eta_j^* K_j) = \det M \exp(K_j^* M_{jk}^{-1} K_k). \quad (\text{A.10})$$

Pode-se mostrar que para variáveis de Grassmann reais a expressão acima fica na forma,

$$\int d\theta_1 \dots d\theta_N \exp(-\theta^t M \theta + K^t \theta) = \sqrt{\det M} \exp\left(-\frac{1}{4} K^t M^{-1} K\right). \quad (\text{A.11})$$

¹Está sendo feito uso da convenção de soma de Einstein!

Nessas duas expressões, K também é um número grassmanniano e M é uma matriz antissimétrica com entradas comutantes.

A.2 Pseudomecânica

Nesse contexto de variáveis anticomutantes, pode-se formular uma mecânica pseudoclássica e devido a natureza dessas variáveis, existem algumas convenções adotadas na construção de tal teoria. A primeira delas é o ordenamento das variáveis. Qualquer derivada dessas variáveis aparece mais a direita nos produto. Se \mathfrak{F} é um funcional de funções grassmannianas $\eta(t)$ (t é um parâmetro real comutante), então uma variação desse funcional é definida na forma,

$$\delta\mathfrak{F} = \int dt \delta\eta \frac{\delta\mathfrak{F}}{\delta\eta}. \quad (\text{A.12})$$

Defini-se uma lagrangiana como,

$$\mathcal{L}(\eta, \dot{\eta}) = \rho\dot{\eta} - \mathcal{H}(\rho, \eta), \quad (\text{A.13})$$

onde ρ é o momento canonicamente conjugado à η e pode-se construir uma ação $S = \int dt \mathcal{L}$. Variando-se essa ação obtém-se,

$$\delta S = \int dt [\delta\rho(\dot{\eta} - \mathcal{H}) + \delta\eta(\dot{\rho} - \mathcal{H})]. \quad (\text{A.14})$$

Como \mathcal{H} não depende de $\dot{\eta}$, é imediato que,

$$\rho \equiv -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\eta}}. \quad (\text{A.15})$$

Por fim, pode-se definir o parênteses de Poisson como se segue,

$$\{A, B\}_{\rho, \eta} \equiv \frac{\partial A}{\partial\eta_j} \frac{\partial B}{\partial\rho_j} + \frac{\partial A}{\partial\rho_j} \frac{\partial B}{\partial\eta_j}. \quad (\text{A.16})$$

Se A e B são comutantes, então os parênteses de Poisson (A.16) são antissimétricos, para os demais casos, os parênteses são simétricos. Aplicando-se para ρ e η obtém-se,

$$\{\eta_j, \rho_k\}_{\rho, \eta} = \delta_{jk}. \quad (\text{A.17})$$

Outros detalhes sobre a álgebra de Grassmann podem ser vistos em [28, 36].

APÊNDICE B - INTEGRAÇÕES FUNCIONAIS

O cálculo de integrais funcionais é uma questão delicada, chegando inclusive a nem existir em alguns casos. Entretanto, as integrais de caminho encontradas nessa dissertação são todas realizáveis, necessitando-se apenas de alguns cuidados.

Na secção 4.1, foi vista uma integral funcional do tipo,

$$\int \overline{D}x_\mu \exp \left\{ i \int_{\tau_a}^{\tau_b} d\tau p^\mu \dot{x}_\mu \right\}. \quad (\text{B.1})$$

Existem alguns métodos usados para se calcular integrais funcionais. O mais 'simples' é o método de particionamento do intervalo de tempo em pequenos 'pedaço' de tamanho ϵ e então realizam-se integrações convencionais para cada tempo específico. A integral acima fica,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N dx_\mu(\tau_j) \exp \left\{ i \sum_{j=0}^N \epsilon p^\mu(\tau_j) \frac{[x_\mu(\tau_{j+1}) - x_\mu(\tau_j)]}{\epsilon} \right\}, \quad (\text{B.2})$$

onde será usada a notação $dx_\mu(\tau_j) = dx_{\mu j}$. Expandindo-se a soma tem-se,

$$\int dx_{\mu 1} dx_{\mu 2} \dots dx_{\mu N} \exp \{ i p_0^\mu (x_{\mu 1} - x_{\mu 0}) + i p_1^\mu (x_{\mu 2} - x_{\mu 1}) + \dots + i p_N^\mu (x_{\mu N+1} - x_{\mu N}) \} \quad (\text{B.3})$$

Organizando-se os termos, chega-se a seguinte expressão,

$$\int dx_{\mu 1} \dots dx_{\mu N} \exp \{ -i p_0^\mu x_{\mu 0} + i (p_0^\mu - p_1^\mu) x_{\mu 1} + \dots + i (p_{N-1}^\mu - p_N^\mu) x_{\mu N} + i p_N^\mu x_{\mu N+1} \} \quad (\text{B.4})$$

Realizando-se as integrações em cada tempo obtém-se,

$$\delta(p_0^\mu - p_1^\mu) \delta(p_1^\mu - p_2^\mu) \dots \delta(p_{N-1}^\mu - p_N^\mu) \exp \{ -i p_0^\mu x_{\mu 0} + i p_N^\mu x_{\mu N+1} \}. \quad (\text{B.5})$$

O produto de 'delta-deltas' pode ser entendido como uma única 'delta' na forma,

$$\delta(\dot{p}_\mu) \exp \{ i p^\mu (x_{\mu N+1} - x_{\mu 0}) \}. \quad (\text{B.6})$$

Como foi estabelecido na secção 4.1, as condições de contorno são tais que, $x_{\mu 0} = x_\mu(\tau_0) = x_\mu(\tau_a)$ e $x_{\mu N+1} = x_\mu(\tau_{N+1}) = x_\mu(\tau_b)$, são fixos e assim chega-se a expressão,

$$\delta(\dot{p}_\mu) \exp \{ i p^\mu (x_{\mu b} - x_{\mu a}) \} = \delta(\dot{p}_\mu) \exp \{ i p^\mu \Delta x_\mu \}. \quad (\text{B.7})$$

Este é o resultado usado no capítulo 4.

O cálculo das integrais funcionais nas variáveis grassmannianas pode ser feito de maneira semelhante a realizada acima. Fazendo-se o particionamento do intervalo de tempo obtém-se a expressão,

$$\int \prod_{j=0}^N d\theta_{\mu j} \exp \left\{ \sum_{j=0}^N \left[\frac{1}{2} \theta_{\mu j} (\theta_{j+1}^{\mu} - \theta_j^{\mu}) + i\epsilon M p_j^{\mu} \theta_{\mu j} \right] \right\}. \quad (\text{B.8})$$

Como o quadrado de qualquer variável de Grassmann é nula, a expressão acima se reduz a,

$$\int \prod_{j=0}^N d\theta_{\mu j} \exp \left\{ \sum_{j=0}^N \left[\frac{1}{2} \theta_{\mu j} \theta_{j+1}^{\mu} + i\epsilon M p_j^{\mu} \theta_{\mu j} \right] \right\}. \quad (\text{B.9})$$

O termo quadrático em θ_{μ} pode ser escrito na forma, $\theta_{\mu j} \theta_{j+1}^{\mu} = \sum_{k=0}^N \theta_{\mu j} \omega_{jk} \theta_k^{\mu}$, em que ω_{jk} pode ser visto como uma matriz na forma,

$$(\omega_{jk}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \dots & \ddots & & \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Como somente a parte antissimétrica de ω contribui para o produto matricial, pode-se escrever a equação (B.9) na forma de um produto de matrizes como se segue,

$$\int \prod_{j=0}^N d\theta_{\mu j} \exp \left\{ \frac{1}{4} \sum_{k,j=0}^N \theta_{\mu j} \omega_{jk} \theta_k^{\mu} + \sum_{j=0}^N \epsilon M p_j^{\mu} \theta_{\mu j} \right\}. \quad (\text{B.11})$$

Nessa forma, é possível fazer uso da seguinte identidade [28],

$$\int 2^{-\frac{k}{2}} d\eta_1 d\eta_2 \dots d\eta_k \exp [-\eta^t \mathbb{A} \eta + \mathbb{B}^t \eta] = \sqrt{\det \mathbb{A}} \exp \left[-\frac{1}{4} \mathbb{B}^t \mathbb{A}^{-1} \mathbb{B} \right], \quad (\text{B.12})$$

em que η é grassmanniana e real. Assim, a equação (B.11) tem como resultado,

$$\propto \sqrt{\det \omega} \exp \left[-\frac{1}{4} \mathbb{P}_{\mu}^t \omega^{-1} \mathbb{P}^{\mu} \right], \quad (\text{B.13})$$

em que $\mathbb{P}^{\mu} = \epsilon M p^{\mu}$. A equação (B.13), possui um termo grassmanniano quadrático em M no exponencial, o que reduz a exponencial à unidade e o $\det \omega$ é apenas um fator numérico. Em Resumo, a integral funcional em θ^{μ} se reduz a um fator constante.

REFERENCES

- 1 SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. **Modern Quantum Mechanics**. Second edition. [S.l.]: Pearson Education Inc., 2011.
- 2 BEREZIN, F. A.; MARINOV, M. S. Classical spin and grassmann algebra. **ZhETF Pis. Red.**, v. 21, n. 11, p. 320, 1975.
- 3 CASALBOUNI, R. On the quantization of systems with anticommuting variables. **II Nuovo Cimento**, v. 33, n. 1, p. 115, 1976a.
- 4 CASALBOUNI, R. The classical mechanics for bose-fermi systems. **II Nuovo Cimento**, v. 33, n. 3, p. 389, 1976b.
- 5 BARDUCCI, A.; CASALBOUNI, R.; LUSANNA, L. Supersymmetries and the pseudo-classical relativistic electron. **II Nuovo Cimento**, v. 35, n. 3, p. 377, 1976.
- 6 BRINK, L.; DESER, S.; ZUMINO, B.; VECCHIA, P. D.; HOWE, P. Local supersymmetry for spinning particles. **Physics Letters B**, v. 64, n. 4, p. 435, 1976.
- 7 BEREZIN, F. A.; MARINOV, M. S. Particle spin dynamics as the grassmann variant of classical mechanics. **Annals of Physics**, v. 104, p. 336, 1977.
- 8 RAVNDAL, F. Supersymmetric dirac particles in external fields. **Physical Review D**, v. 21, n. 10, p. 2823, 1980.
- 9 GITMAN, D. M.; GONÇALVES, A. E.; TYUTIN, I. V. Quantization of pseudoclassical model of spin one relativistic particle. **Int. J. Mod. Phys. A**, v. 10, n. 5, p. 701, 1995.
- 10 GRIGORYAN, G. V.; GRIGORYAN, R. P.; TYUTIN, I. V. Pseudoclassical theories of majorana, weyl, and majorana-weyl particles. **Theor. Math. Phys.**, v. 111, n. 3, p. 703, 1997.
- 11 BRINK, L.; VECCHIA, P. D.; HOWE, P. A locally supersymmetric and reparametrization invariant action for the spinning string. **Physics Letters B**, v. 65, n. 5, p. 471, 1976.
- 12 DESER, S.; ZUMINO, B. A complete action for the spinning string. **Physics Letters B**, v. 65, n. 4, p. 1976, 1976.
- 13 BRINK, L.; VECCHIA, P. D.; HOWE, P. A lagrangian formulation of the classical and quantum dynamics of spinning particles. **Nuclear Physics B**, v. 118, p. 76, 1977.
- 14 MÜLLER-KIRSTEN, H. J. W.; WIEDEMANN, A. **Introduction to Supersymmetry**. Second. [S.l.]: World Scientific, 2010. v. 80.
- 15 HENNEAUX, M.; TEITELBOIM, C. Relativistic quantum mechanics of supersymmetric particles. **Annals of Physics**, v. 143, p. 127, 1982.
- 16 MANNHEIM, P. D. Quantization of classical grassmann spin. **Physics Letters B**, v. 137, n. 5 - 6, p. 385, 1984.

- 17 BATLLE, C.; GOMIS, J.; ROCA, J. Brst-invariant path integral for a spinning relativistic particle. **Physical Review D**, v. 40, n. 6, p. 1950, 1989.
- 18 GAMBOA, J.; RIVELLES, V. O. Spinning self-dual particles. **Physics Letters B**, v. 241, n. 1, p. 45, 1990.
- 19 FRADKIN, E. S.; GITMAN, D. M. Path integral representation for the relativistic particle propagators and bfv quantization. **Physical Review D**, v. 44, n. 10, p. 3230, 1991.
- 20 DIRAC, P. A. M. **Lectures on Quantum Mechanics**. [S.l.]: Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, 1964.
- 21 NETO, J. B. **Matemática para Físicos com Aplicações: Tratamento Clássico e Quântico**. Primeira. [S.l.]: Livraria da Física, 2011.
- 22 SUNDERMEYER, K. **Constrained Dynamics: with applications to Yang-Mills, General Relativity, Classical Spin, Dual String Model**. First. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1982.
- 23 KAKU, M. **Quantum Field Theory: A modern Introduction**. First. [S.l.]: Oxford University Press, 1993.
- 24 SOUZA, F. E. A. de. **Superpartícula de Brink-Schwarz**. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, Departamento de Física, 2015.
- 25 TILLES, P. F. C. **Quantização de Partículas com Spin**. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, 2007.
- 26 FEYNMAN, R. P. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. **Reviews of Modern Physics**, v. 20, n. 2, p. 367, 1948.
- 27 FEYNMAN, R. P.; HIBBS, A. R. **Quantum Mechanics and Path Integral**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1965.
- 28 SWANSON, M. S. **Path Integral and Quantum Processes**. [S.l.]: Academic Press, 1992.
- 29 FADDEEV, L. D. The Feynman integral for singular lagrangians (título traduzido). **Academy of Sciences of the USSR**, 1970. (Translated from Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika, vol. 1, n. 1, pp.3-18, 1969).
- 30 FADDEEV, L. D.; POPOV, V. N. Feynman diagrams for the yang-mills field. **Physics Letters B**, v. 25, n. 1, p. 29, 1967.
- 31 POPOV, V. N.; FADDEEV, L. D. Perturbation theory for the gauge-invariant fields. **National Accelerator Laboratory**, 1972. Artigo não publicado.
- 32 FRADKIN, E. S.; VILKOVISKY, G. A. Quantization of relativistic systems with constraints. **Physics Letters B**, v. 55, n. 2, p. 224, 1975.
- 33 TEITELBOIM, C. Quantum mechanics of the gravitational field. **Physical Review D**, v. 25, n. 12, p. 3159, 1982.

- 34 HAWKING, S. W. Zeta function regularization of path integrals in curved spacetime. **Commun. Math. Phys.**, v. 55, p. 133, 1977.
- 35 SCHWINGER, J. On gauge invariance and vacuum polarization. **Physical Review**, v. 82, n. 5, p. 664, 1951.
- 36 BEREZIN, F. A. **The Method of Second Quantization**. [S.l.]: Academic Press, 1966.