

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE
TELEINFORMÁTICA

CÁLCULO DO ENTRELAÇAMENTO DE ESTADOS
PUROS COM QUATRO A SEIS QUBITS.

DAVID SENA OLIVEIRA

FORTALEZA - CE
Fevereiro de 2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE
TELEINFORMÁTICA

CÁLCULO DO ENTRELAÇAMENTO DE ESTADOS
PUROS COM QUATRO A SEIS QUBITS.

Autor

DAVID SENA OLIVEIRA

Orientador

RUBENS VIANA RAMOS

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-graduação em Engenharia de Teleinformática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do Título de Doutor.

FORTALEZA - CE

Fevereiro de 2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca de Ciências e Tecnologia

-
- O45c Oliveira, David Sena.
Cálculo do entrelaçamento de estados quânticos puros de 4 a 6 qubits / David Sena Oliveira. –
2012.
86 f. : il., enc. ; 30 cm.
- Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-
Graduação em Engenharia de Teleinformática, Fortaleza, 2012.
Área de Concentração: Eletromagnetismo Aplicado.
Orientação: Prof. Dr. Rubens Viana Ramos.
1. Algoritmos quânticos. 2. Qubits - medidas de entrelaçamento. 3. Estados grafos. I. Título.

DAVID SENA OLIVEIRA

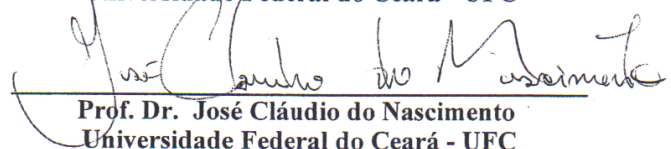
Cálculo do Entrelaçamento de Estados Puros com Quatro a Seis Qubits.

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Teleinformática. Área de concentração: Eletromagnetismo Aplicado

Aprovada em 02/03/2012.

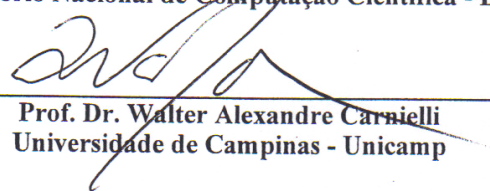
BANCA EXAMINADORA


Prof. Dr. Rubens Viana Ramos (Orientador)
Universidade Federal do Ceará - UFC


Prof. Dr. José Cláudio do Nascimento
Universidade Federal do Ceará - UFC


Prof. Dr. João Batista Rosa Silva
Universidade Federal do Ceará - UFC


Prof. Dr. Renato Portugal
Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC


Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli
Universidade de Campinas - Unicamp

Agradecimentos

A Deus pela profecia belíssima que ele faz ser a minha vida a cada dia, por ter me feito Shalom e por todos os milagres que continuamente opera diante dos meus olhos para que eu nunca esqueça da primazia da sua graça.

Aos meus pais e à Luci, incomparáveis educadores na arte do amar, que de maneira encantadora formaram os alicerces dos valores e virtudes que hoje possuo.

Ao professor Dr. Rubens Viana Ramos por ser realmente um orientador excepcional.

Ao amigo e parceiro de doutorado Luzeilton Oliveira que contribuiu grandemente nestes anos de doutorado, em especial no capítulo 6 no qual compartilhamos e construímos juntos o conhecimento.

Aos colegas do GIQ, João, Hilma, Fábio, Daniel, Cláudio, Vinícius, Fernando, Emanoela, Keuliane, Fátima, Socorro, Daniela e Paulo Benício que de uma forma ou de outra contribuíram para criar um ambiente de estudo mais motivado e enriquecedor.

À minha esposa Ticiany e minha filha Sara, que foram motivação e suporte em todos os momentos.

À FUNCAP/CAPES pelo apoio financeiro na forma de bolsa de doutorado.

“Sim, Pai, não é fácil, mas eu desejo, eu quero, eu vou. Amém”.

Moysés Azevedo

Sumário

Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	viii
Resumo	9
Abstract	10
Introdução	11
Capítulo 1 Entrelaçamento	13
1.1 Objetivo	13
1.2 Definições	13
1.3 Entrelaçamento entre dois qubits	13
1.4 Entrelaçamento entre múltiplos qubits	15
1.5 Avaliando uma medida de entrelaçamento	18
1.5.1 Monótonos de entrelaçamento	18
1.5.2 Medidas para estados de dois qubits	20
1.6 Conclusão	21
Capítulo 2 Entrelaçamento Groveriano	22
2.1 Entropia relativa de entrelaçamento	22
2.2 A medida de entrelaçamento baseada no algoritmo de Grover	23
2.3 Demonstração do entrelaçamento Groveriano	25
2.4 Encontrando o valor da medida	28
2.5 Método numérico	29
2.5.1 Algoritmo genético básico	29
2.6 Casos de análise com o entrelaçamento Groveriano	30
2.6.1 Estados W	30
2.6.2 Estados GHZ	31
2.7 Conclusão	32
Capítulo 3 Entrelaçamento Residual com Negatividade	33
3.1 Entrelaçamento residual para estados de três qubits com tangles	33
3.2 Entrelaçamento residual com negatividade	34
3.3 Extensão da medida entrelaçamento residual para estados de 4 qubits	35
3.4 Uma nova medida de entrelaçamento genuíno entre 4 qubits puros	37
3.5 Entrelaçamento de estados grafos de quatro qubits	42
3.6 Identificando estados maximamente entrelaçados	43
3.7 Conclusão	44
Capítulo 4 Aplicações para 4 qubits	45
4.1 Teleportação de circuito quântico de dois qubits	45
4.2 Envio de informação por canal ruidoso	46
4.3 Teleportação de estados da forma $\alpha 00\rangle + \beta 11\rangle$	48
4.4 Criação e destruição do entrelaçamento	49
4.4.1 Caso 1	49
4.4.2 Caso 2	51
4.5 Conclusão	53
Capítulo 5 Extensibilidade da medida π_4	54
5.1 Introdução	54
5.2 A medida π_3 e o entrelaçamento triparte	54
5.3 A medida π_4 e o entrelaçamento em quatro vias	58
5.4 Medida π_5 , uma extensão de π_4 para cinco qubits	59

5.5 Medida π_6 , uma extensão de π_4 para seis qubits	61
5.6 Conclusão	62
Capítulo 6 Em busca de uma medida de entrelaçamento genuíno para 6 qubits	63
6.1 Uma medida apenas para estados genuinamente entrelaçados	63
6.2 Análise da variação do entrelaçamento	70
6.2.1 Estado de Smolin	70
6.2.2 Vários tipos de entrelaçamento em um estado grafo	72
6.3 Variação do entrelaçamento durante a formação de estados grafos de quatro e seis qubits	74
6.4 Conclusão	77
Capítulo 7 Conclusões e Perspectivas	78
7.1 Conclusões	78
7.2 Perspectivas	78
Bibliografia	80

Lista de Figuras

Figura 2.1 – EG do estado W versus o número de qubits sendo ‘o’ a fórmula analítica e ‘*’ o método numérico.	31
Figura 2.2 – EG do estado $ \psi\rangle_4$ equação versus o valor de a^2	32
Figura 3.1 – Medidas G e π_4 do estado $ \chi\rangle$	36
Figura 3.2 – Medidas G (linha com asterisco) e π_4 (linha pontilhada).	37
Figura 3.3 – Entrelaçamento de $ \chi\rangle$, versus θ e ϕ medido por π_{4G}	40
Figura 3.4 – Estados grafos maximamente entrelaçados e desentrelaçados.	43
Figura 4.1 – Circuito quântico a ser teleportado. Sw corresponde a porta Swap.	45
Figura 4.2 – Circuito quântico para teleportação de circuito de dois qubits.	46
Figura 4.3 – Dois qubits entrelaçados enviados por um canal ruidoso.	47
Figura 4.4 – π_{4G} e N_{AB} versus θ e ϕ	48
Figura 4.5 – Circuito quântico para teleportação do estado $\alpha 00\rangle+\beta 11\rangle$	49
Figura 4.6 – Circuito Quântico para observação do aumento e da diminuição do entrelaçamento.	50
Figura 4.7 – Entrelaçamento em quatro vias e biparte apresentados em (4.10) e (4.11).	51
Figura 4.8 – Circuito para observação da variação do entrelaçamento.	51
Figura 4.9 – Entrelaçamento em quatro vias de $ \psi\rangle$ e entrelaçamentos biparte ($N(\rho_{AC})=N(\rho_{BD})$) versus θ	52
Figura 6.1 – Entrelaçamento do estado (6.13) versus p : I) γ_6 ; II) E_{ms} ; III) $NAB2 = NCD2$	72
Figura 6.2 – Entrelaçamento de $ G_1\rangle$ versus θ : I) $\gamma_6/4$; II) $NA_{BC2} = NC_{AB2} = ND_{EF2} = NF_{DE2}$; III) $NAB2 = NAF2 = NBC2 = NCD2 = NDE2 = NEF2$; IV) $NB_{AC2} = NE_{DF2}$	73
Figura 6.3 – Entrelaçamento de $ G_2\rangle$ versus θ : I) $\gamma_6/10$; II) $NA_{BC2} = NB_{AC2} = NC_{AB2} = ND_{EF2} = NE_{DF2} = NF_{DE2}$; III) $NAB2 = NAC2 = NBC2 = NDE2 = NDF2 = NEF2$; IV) $NAF2 = NBE2 = NCD2$	73
Figura 6.4 – Variação do entrelaçamento $\lambda_6(\psi_6\rangle)$ versus t . I - f_1 , II - f_2 , III - f_3	76
Figura 6.5 – Variação do entrelaçamento de $\lambda_6(\psi_6\rangle)$ (I) e $\lambda_6(\psi_{3_3}\rangle)$ (II) versus t	77

Lista de Tabelas

Tabela 1.1 - Nomenclatura para níveis de entrelaçamento em estado com várias partes	15
Tabela 3.1 – Comparativo entre as medidas residuais com média aritmética π_4 e média geométrica π_{4G}	39
Tabela 3.2 – Entrelaçamento de estados de quatro qubits medidos com G e com π_{4G} ...	41
Tabela 4.1 – Tabela de correção de Charlie.	46
Tabela 5.1 – Negatividades do estado $\rho=a\otimes bc$	57

Resumo

Esta tese é dividida em três partes. A primeira parte apresenta uma revisão dos conceitos básicos de entrelaçamento de estados quânticos com dois e múltiplos qubits, incluindo os monótonos de entrelaçamento e a medida do entrelaçamento Groveriano, que é calculada através de um algoritmo genético. A segunda parte foca na proposta de uma medida de entrelaçamento para estados de quatro qubits que mensura apenas estados com entrelaçamento genuíno. Exemplos do cálculo do entrelaçamento de estados de quatro qubits, usando a medida proposta, quando estes são processados por circuitos quânticos, são apresentados. Na terceira parte, a medida proposta é estendida, para calcular o entrelaçamento genuíno de estados quânticos de seis qubits. Simulações numéricas foram realizadas para mostrar a variação, criação e destruição do entrelaçamento de estados puros de seis qubits.

Abstract

This thesis is divided in three parts. The first one brings a brief review of the basic concepts about entanglement of quantum states with two and multiple qubits, including the entanglement monotones and the Groverian entanglement measure, which is calculated by a genetic algorithm. The second part is focused on the generation of a entanglement measures that identify only four qubit states with genuine entanglement. Some examples of the calculus of the entanglement of four qubit states, using the proposed measure, when these states are processed by quantum circuits, are presented. In the third part, the proposed measure is extended, to calculate the genuine entanglement of pure six qubits quantum states. Numerical simulations were realized aiming to show the variation, creation and annihilation of the entanglement of pure six qubits states.

Introdução

Um dos diferenciais dos algoritmos quânticos é o entrelaçamento. Mais do que um conceito, ele é um recurso poderoso, uma característica intrinsecamente quântica que identifica relações entre qubits de um sistema composto. Utilizando-se de suas propriedades peculiares foram desenvolvidas idéias como protocolos de criptografia quântica e teleportação de estados quânticos.

Devido à importância do entrelaçamento, fazem-se necessárias medidas adequadas para mensurá-lo qualitativa e quantitativamente. É crucial ser capaz de detectar quais tipos de entrelaçamento existem em determinado estado. Para o caso biparte e triparte puro, um amplo estudo já foi desenvolvido. O presente trabalho busca lançar uma luz no entrelaçamento de estados puros com quatro e seis qubits.

Neste trabalho busca-se medidas capazes de separar estados com entrelaçamento genuíno de estado que não o possuem. Unida a essa idéia surge a busca do entendimento de como o entrelaçamento de subsistemas de um sistema maior variam conforme o entrelaçamento global do estado é alterado. Diferentes aplicações e simulações buscam apresentar o entrelaçamento sob diferentes ângulos avaliando a relações existentes entre eles. Alguns dos frutos dessa tese são os artigos [OR10] e [OOR11].

Esta tese está dividida em sete capítulos. No Capítulo 1 são apresentados alguns conceitos introdutórios sobre estados quânticos e o conceito de entrelaçamento. No Capítulo 2, é apresentado o entrelaçamento Groveriano e como contribuição um algoritmo genético desenvolvido para cálculo do valor dessa medida para qualquer número de qubits. No Capítulo 3, são apresentadas as medidas tangle-3 e π_3 , entrelaçamento residual das negatividades, com as devidas comparações entre ambas quanto às suas capacidades de detectar certos tipos de entrelaçamento. Como contribuição do trabalho é proposta nesse capítulo uma mudança no entrelaçamento residual de forma a detectar somente estados puros genuinamente entrelaçados em 4 vias e, como exemplo, é feita uma análise de estados grafos. No Capítulo 4, são apresentadas quatro aplicações utilizando estados quânticos de quatro qubits

entrelaçados em 4 vias. O Capítulo 5 estende a medida de quatro qubits para cinco e seis qubits. O Capítulo 6 apresenta a busca por uma medida de entrelaçamento genuíno para seis qubits puros e simulações de estados de seis qubits. Por fim, o Capítulo 7 apresenta as conclusões e perspectivas.

Capítulo 1 Entrelaçamento

1.1 Objetivo

O principal alvo, assunto do trabalho, é o entrelaçamento de estados quânticos. Após uma definição matemática do que é um estado quântico e do conceito de entrelaçamento, são apresentadas revisões sobre algumas medidas de entrelaçamento para estados quânticos de dois qubits.

1.2 Definições

O entrelaçamento quântico é uma propriedade da mecânica quântica que permite a dois ou mais objetos estarem de tal forma relacionados que não é possível descrever completamente um deles sem relacioná-lo aos demais. Estas correlações não podem ser descritas apenas com probabilidades ou quaisquer outros recursos clássicos.

Dado um sistema de duas partes entrelaçadas, o entrelaçamento faz com que medições realizadas em uma parte pareçam estar influenciando a outra parte e sugere que alguma influência se propaga instantaneamente entre os objetos no momento da medição, independente da distância que os separe.

Hoje se sabe que a mecânica quântica possui propriedades que podem ser utilizadas como recursos computacionais no processamento da informação. Surge daí a informação quântica a aplicar os recursos da mecânica quântica e expandir a teoria da informação e da computação clássica a novos horizontes. Nessa direção, o entrelaçamento é recurso chave para o entendimento e o uso da mecânica quântica em suas plenas potencialidades.

1.3 Entrelaçamento entre dois qubits

Sendo o entrelaçamento um recurso que pode ser utilizado de forma útil em computação e comunicação quânticas, faz-se necessário detectá-lo e mensurá-lo. Neste

tópico é apresentado o conceito de separabilidade, isto é, quando um estado quântico possui ou não entrelaçamento.

Considere dois sistemas A e B com respectivos espaços de Hilbert \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B . Um estado de duas partes é definido no espaço de Hilbert do sistema composto dado por $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. No caso de estados puros tem-se que para ser separável ou desentrelaçado ele deve poder ser escrito como [NC00]:

$$|e_{AB}\rangle = |e_A\rangle |e_B\rangle. \quad (1.1)$$

Se ele não pode ser escrito nesta forma então ele é dito ser entrelaçado. Ampliando para estados mistos, um estado quântico de duas partes é separável se e somente se o mesmo pode ser escrito como uma combinação convexa de produtos de estados puros [NC00]:

$$\rho^{AB} = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B, \quad (1.2)$$

sendo $\sum_i p_i = 1$.

Para estados puros de dois qubits ρ_{AB} , o uso da entropia de Von Neumann [NC00] nas matrizes densidades reduzidas ρ_A e ρ_B é suficiente para identificar o entrelaçamento e quantificá-lo. Ou seja, se a entropia do estado reduzido é maior que 0, então o estado composto é entrelaçado e este resultado fornece uma medida do entrelaçamento.

Dado um estado puro ρ_{AB} com dois subsistemas A e B , os estados reduzidos são definidos por $\rho_A = \text{tr}_B(\rho_{AB})$ e $\rho_B = \text{tr}_A(\rho_{AB})$, sendo o traço parcial tomado sobre um dos subsistemas A ou B . Assim, a entropia de Von Neumann dos operadores densidades reduzidos é dada por [NC00]:

$$S(\rho_A) = S(\rho_B) = -\text{tr}(\rho_A \log \rho_A) = -\text{tr}(\rho_B \log \rho_B). \quad (1.3)$$

Para o caso de um estado ρ_{AB} desentrelaçado tem-se que $S(\rho_A)$ é zero. Para o caso de ρ_{AB} maximamente entrelaçado tem-se que $S(\rho_A)$ é 1. Entretanto, para estados ρ_{AB} mistos, a medida falha em distinguir correlações clássicas e quânticas.

Um outro critério de separabilidade foi proposto por Peres-Horodecki [Per96] para estados puros ou mistos no sistema composto S^{AB} . Esse critério afirma que se a transposta parcial do estado não for positiva semi definida, então o estado é entrelaçado. Em [HHH96] é demonstrado que esse critério é necessário e suficiente apenas para

estados puros no espaço $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$, ou seja, para os sistemas de dois qubits ou de um qubit e um qutrit.

1.4 Entrelaçamento entre múltiplos qubits

Sistemas com mais de duas partes possuem, em relação aos tipos de entrelaçamento, diversas nomenclaturas, pelo ponto de vista do nível de separabilidade ou do nível de entrelaçamento. A

Tabela 1.1 apresenta algumas dessas nomenclaturas.

Tabela 1.1 - Nomenclatura para níveis de entrelaçamento em estado com várias partes

Nível de entrelaçamento	Nível de Separabilidade	Descrição
Desentrelaçado	Completamente separável	Não há qualquer tipo de entrelaçamento no estado quântico
Parcialmente entrelaçado ou apenas entrelaçado	Parcialmente separável ou apenas separável	Possui algum tipo de entrelaçamento, porém não é completamente entrelaçado
Completamente entrelaçado	Inseparável	Todos as partes estão entrelaçadas entre si. Também é equivalente a afirmar que o estado possui entrelaçamento genuíno

Quando existem múltiplas partes, existem muitas possibilidades de formação de entrelaçamento neste estado. A primeira pergunta seria: com que outras partes a parte A está entrelaçada? Se a resposta for “com todas as outras partes” então tem-se um estado completamente entrelaçado, que é sinônimo de inseparável ou ainda pode-se dizer que este possui entrelaçamento genuíno. Se não existem partes entrelaçadas então não existe entrelaçamento o que caracteriza um estado desentrelaçado ou completamente separável. Se existem partes que compartilham entrelaçamento entre si, mas não compartilham com outras partes tem-se um estado parcialmente entrelaçado ou parcialmente separável, que pode ser classificado de acordo com o tipo do entrelaçamento ou as configurações de entrelaçamento que este possui.

Um estado puro $|\Psi_{A_1 A_2 \dots A_m}\rangle$ com m subsistemas A_1, A_2, \dots, A_m é completamente separável em m partes se e apenas se ele puder ser escrito como:

$$|\Psi_{A_1 A_2 \dots A_m}\rangle = |\psi_{A_1}\rangle |\psi_{A_2}\rangle \dots |\psi_{A_m}\rangle. \quad (1.4)$$

Para compreender a estrutura dos estados completamente entrelaçados pensemos no seguinte exemplo: a medida de entrelaçamento livre para estados de múltiplas partes [YS04] define que um estado puro é completamente entrelaçado se nenhum subsistema puro pode ser dele extraído.

Para exemplificar: seja o estado ρ_{ABCD} puro de quatro qubits. De acordo com [YS04], ele é completamente entrelaçado se nenhum de seus possíveis subsistemas for puro. A seguir todos os possíveis subsistemas:

- Com um qubit: $\rho_A, \rho_B, \rho_C, \rho_D$.
- Com dois qubits: $\rho_{AB}, \rho_{AC}, \rho_{AD}, \rho_{BC}, \rho_{BD}$ e ρ_{CD} .
- Com três qubits: $\rho_{ABC}, \rho_{ABD}, \rho_{ACD}, \rho_{BCD}$.

Um estado de quatro qubits pode ser biparticionado de duas formas: duas partições com dois qubits ou uma partição com um qubit e uma partição com três qubits. Sejam as bipartições P_1 e P_2 que compõe o estado denominadas complementares. Se $\rho_{ABCD} = P_1 \otimes P_2$, então P_1 e P_2 são obrigatoriamente puros, do contrário, P_1 e P_2 serão ambos mistos. Desta forma, analisar apenas um dos complementares é suficiente para descobrir se ambos são puros ou mistos. Para cada um dos subparticionamentos de um qubit existe um complementar com três qubits. Para $P_1 = \rho_A$, tem-se $P_2 = \rho_{BCD}$, e assim por diante. Assim, para o caso de quatro qubits, analisar todas as bipartições pode se resumir a analisar apenas as partições com um e com dois qubits. Se todos estes subparticionamentos de um e de dois qubits forem mistos então ρ_{ABCD} é completamente entrelaçado.

Um estado puro η que possua algum tipo de entrelaçamento, mas que não seja completamente entrelaçado é denominado parcialmente entrelaçado. Isso implica em duas coisas: a primeira é que ele é particionável em relação a um certo número n de partições. Cada uma dessas partições possui uma quantidade de entrelaçamento. Sendo parcialmente entrelaçado, em η existem subpartições puras completamente entrelaçadas e η pode ser escrito como um produto tensorial dessas subpartições. Dois conceitos importantes surgem então: os conceitos de k -separabilidade e de entrelaçamento em m vias [GHH10]. Tais conceitos se relacionam respectivamente com o número máximo de partições puras em que ele pode ser particionado o estado e o número de qubits em cada uma dessas partições. Seja o estado puro η , se η pode ser escrito como um produto de k

partições, então ele é dito k -separável. Se uma partição de m qubits é completamente entrelaçada, então ela possui entrelaçamento em m vias. Como exemplo, seja o seguinte estado puro de seis partes:

$$|e\rangle_{ABCDEF} = |0\rangle_A \left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \right)_{BC} \left(\frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}} \right)_{CDE} \quad (1.5)$$

O estado $|e\rangle_{ABCDEF}$ pode ser decomposto em 3 partições, $P_1=|e\rangle_A$, $P_2=|e\rangle_{BC}$, $P_3=|e\rangle_{DEF}$ e pode ser escrito como $|e\rangle_{ABCDEF}=|e\rangle_A|e\rangle_{BC}|e\rangle_{DEF}$. Nesta formação, P_1 é desentrelaçado, P_2 e P_3 são completamente entrelaçados. P_2 possui entrelaçamento em duas vias ou biparte e P_3 possui entrelaçamento em três vias ou triparte. Assim o estado $|e\rangle_{ABCDEF}$ é 3-separável e possui entrelaçamento em no máximo três vias. Trivialmente, todo estado de p qubits que seja no máximo 1-separável é completamente entrelaçado, e se for p -separável é completamente desentrelaçado. E, também trivialmente, todo estado de p qubits que possuir entrelaçamento em p vias é completamente entrelaçado.

Em alguns momentos desse trabalho é utilizado o conceito de permutação entre qubits. A permutação faz com que a ordem dos qubits seja alterada, e essa alteração muda completamente o estado do ponto de vista computacional ou operacional, no qual a posição em que o estado se encontra define sua função dentro da operação a ser realizada, tal qual um função, circuito ou protocolo. Mas quando este estado é analisado fora de um contexto operacional pode-se dizer que a permutação não altera nenhuma das propriedades do entrelaçamento do estado e que o entrelaçamento de um estado de múltiplas partes é uma propriedade global do sistema.

Assim, a permutação de qubits não altera as características ou a interpretação do tipo e da quantidade de entrelaçamento contida no estado. Como exemplo seja um estado $|\rho\rangle$ de quatro qubits composto por dois pares de Bell

$$\begin{aligned} |ab\rangle = |cd\rangle &= (|00\rangle + |11\rangle) / \sqrt{2}, \\ |\rho\rangle &= |ab\rangle |cd\rangle. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Após uma permutação das partes b e c , o estado passa a ser visto computacionalmente por $|\rho\rangle=|acbd\rangle$, mas ainda assim faz sentido poder escrever $|\rho\rangle=|ab\rangle|cd\rangle$ como uma simplificação de $|\rho\rangle_{1234}=|a_1b_3c_2d_4\rangle=|ab\rangle_{13}|cd\rangle_{24}$, no qual os números indicam a ordem dos qubits na visão computacional do estado.

1.5 Avaliando uma medida de entrelaçamento

Diversos autores apresentaram trabalhos especificando quais requerimentos naturais um bom quantificador de entrelaçamento deveria satisfazer [Vid00, VPRK97, VP98]. Em [Vid00], são propostos apenas 3 requerimentos, e satisfazendo-os, a função quantificadora pode ser chamada de um monótono de entrelaçamento. As condições propostas foram:

1. O valor da medida deve ser zero para estados desentrelaçados.
2. O valor da medida deve ser invariante sob operações locais unitárias (LU).
3. O valor da medida não pode crescer, em média, através de operações locais e comunicação clássica (LOCC).

A origem da condição primeira [Vid00] é de que estados separáveis não possuem entrelaçamento e por isso não podem ser purificados. Entenda-se aqui uma purificação P como um protocolo que transforma m estados ρ em n estados maximamente entrelaçados, com $m \geq n$. Assim, como estados separáveis não podem ser purificados para gerar estados maximamente entrelaçados, o valor da medida de entrelaçamento para eles deve ser igual a zero ou ínfima. Qualquer estado que contenha algum tipo de entrelaçamento pode ser purificado gerando estados maximamente entrelaçados, e o valor dessa quantidade de entrelaçamento deve ser positiva dado o tipo de entrelaçamento que se deseja mensurar.

1.5.1 Monótonos de entrelaçamento

Vidal no trabalho [Vid00] esclarece alguns conceitos sobre os monótonos de entrelaçamento. É chamado um *monótono de entrelaçamento* ME todo quantificador $\mu(p)$ que não cresça em média sobre transformações locais. Para compreender melhor, a seguir é apresentada uma série de considerações sobre o que é uma transformação local retirada de [Vid00].

Em primeiro lugar, as transformações locais TL de Vidal englobam tanto operações quânticas locais QL como comunicação clássica CC . Na ausência de CC , as

TL podem ser decompostas em 4 passos básicos, cada uma correspondendo a uma manipulação física. Dessa forma, qualquer TL pode ser alcançada por uma composição das seguintes operações físicas realizadas localmente por cada uma das partes: transformações unitárias locais, medições de Von Neumann locais, adição de qubit auxiliar, remoção de qubit auxiliar previamente adicionado. O termo qubit auxiliar refere-se a um qubit que é adicionado ao sistema atual para obter de um espaço de armazenamento adicional e realizar alguma operação computacional, tal qubit auxiliar é normalmente retirado do sistema tão logo finde sua necessidade. Cada uma das quatro operações física apresentadas é descrita a seguir.

1. Transformações unitárias locais: Uma transformação unitária local é descrita como:

$$\rho \rightarrow \rho' = U\rho U^\dagger, \quad (1.7)$$

sendo U um operador unitário formado pelo operador identidade em todas as partes exceto em uma, na qual é aplicada uma transformação unitária. Por exemplo, para dois qubits, as transformações unitárias locais são implementadas por $U = U_A \otimes I_B$ ou por $U = I_A \otimes U_B$, sendo U_i unitária no subsistema da parte i .

2. Medições de von Neumann locais:

Uma medição de von Neumann é descrita como

$$\rho \rightarrow \{\rho_k, p_k\}, \quad (1.8)$$

no qual apenas uma das partes realiza uma medição de von Neumann, não necessariamente completa, em seu subsistema local, fazendo com que ρ se torne ρ_k com probabilidade p_k . A medição transforma o estado ρ , por meio do uso de projetores formados pelo operador identidade em todas as partes exceto em uma, na qual é aplicado um projetor.

3. Adição de qubit auxiliar

A adição de uma parte auxiliar, ou qubit auxiliar δ é apresentada na sentença

$$\rho \rightarrow \rho' = \rho \otimes \rho_\delta, \quad (1.9)$$

sendo ρ_δ o estado do qubit auxiliar, resultando na adição de mais uma parte ao sistema.

4. Remoção de qubit auxiliar

$$\rho \rightarrow \rho' = Tr_{\delta}[\rho], \quad (1.10)$$

sendo $Tr_{\delta}[\cdot]$ indicativo do traço parcial sobre o sistema δ .

As operações 1 e 2 referem-se a operações quânticas locais que as partes realizam no sistema, enquanto as operações 3 e 4 consistem na mudança no número de componentes do sistema composto em consideração. Em especial 1 e 3 são normalmente reversíveis enquanto 2 e 4 são tipicamente irreversíveis.

1.5.2 Medidas para estados de dois qubits

Sendo possível descobrir se um estado é ou não entrelaçado, faz-se necessário quantificar o entrelaçamento nele contido. A seguir, são apresentadas algumas medidas de entrelaçamento para estados biparte que serão utilizadas no decorrer do trabalho.

A primeira medida de entrelaçamento é a *concorrência* de Wootters [Woo98] $C(\rho)$. Ela está relacionada com a operação de *spin-flip* de ρ dada por:

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y), \quad (1.11)$$

sendo o $*$ a operação de complexo conjugado. Define-se, então, a concorrência de ρ como:

$$C(\rho) = \max \{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (1.12)$$

sendo λ_i as raízes quadradas dos autovalores de $\rho \tilde{\rho}$ em ordem decrescente. A concorrência por si já é um quantificador de entrelaçamento sendo 0 para estados separáveis e 1 para estados maximamente entrelaçados.

A segunda medida é a *negatividade*. Ela está profundamente relacionada ao critério de Peres-Horodecki para determinar se um estado bipartite de qubits possui entrelaçamento. O critério de Peres [Per96] afirma que caso a transposta parcial de um estado bipartite puro não seja positiva definida, então o estado é entrelaçado. Em [HHH96] é demonstrado que para dimensões $\mathbb{C}_2 \otimes \mathbb{C}_2$ e $\mathbb{C}_2 \otimes \mathbb{C}_3$, ou seja, bipartite de qubits e um qubit e um qutrit, o critério de Peres suficiente para determinar

entrelaçamento. A medida de entrelaçamento negatividade é definida como a soma dos autovalores negativos da transposta parcial, ou seja:

$$N(\sigma) = 2 \sum_j \max(0, -\mu_j), \quad (1.13)$$

sendo μ_j os autovalores da transposta parcial de σ . Ou de forma equivalente:

$$N(\rho_{AB}) = \text{Tr} \sqrt{\rho_{AB}^{T_A} (\rho_{AB}^{T_A})^\dagger} - 1. \quad (1.14)$$

1.6 Conclusão

Esse capítulo apresentou uma breve revisão sobre a descrição de estados quânticos e o conceito de entrelaçamento. Os capítulos seguintes apresentam mais algumas medidas de entrelaçamento e as contribuições desta tese.

Capítulo 2 Entrelaçamento Groveriano

Este capítulo aborda os seguintes assuntos: uma introdução ao Entrelaçamento Groveriano (EG) [BNO02], um método numérico para calculá-lo e a análise do entrelaçamento de alguns estados quânticos através dos resultados obtidos. Para melhor compreender o EG, que é baseado numa busca dentro do conjunto de todos os estados separáveis, é apresentada a medida entropia relativa de entrelaçamento [VPRK97, VP98].

2.1 Entropia relativa de entrelaçamento

Uma das primeiras medidas de entrelaçamento multiparte a surgir foi a entropia relativa de entrelaçamento [NC00]. Ela é definida como o mínimo da entropia quântica relativa $S(\sigma \parallel \rho) = \text{Tr}(\sigma \log \sigma - \sigma \log \rho)$ tomada sobre o conjunto D de todos os estados separáveis ρ :

$$E_E(\sigma) = \min_{\rho \in D} S(\sigma \parallel \rho). \quad (2.1)$$

Calcular a entropia relativa de entrelaçamento de σ implica em encontrar o estado separável mais próximo ao estado σ , sendo essa proximidade mensurada pela entropia relativa. Por causa da minimização é difícil calcular analiticamente essa medida, a não ser para classes de estados que possuam alta simetria. Entretanto essa medida fornece um bom entendimento conceitual do que se espera de uma medida multiparte.

2.2 A medida de entrelaçamento baseada no algoritmo de Grover

O EG é uma medida de entrelaçamento operacional, ou seja, não está baseada apenas em proposições matemáticas abstratas. Ela tem origem na medida do entrelaçamento da entrada do algoritmo quântico de Grover[Gro97] e relaciona a probabilidade máxima de se encontrar o elemento procurado à quantidade de entrelaçamento na entrada. Medidas de entrelaçamento operacionais são desejáveis, pois permitem uma compreensão mais intuitiva das propriedades dos sistemas quânticos. Para estados puros o EG é equivalente a entropia relativa de entrelaçamento, o que significa que eles ordenam os estados quânticos de forma equivalente em relação à quantidade de entrelaçamento.

A generalização do EG para o caso de estados misto tanto bipartite quanto multiparte não é adequada e não possui um sentido operacional, dessa forma optou-se neste trabalho apenas por medidas de estados puros.

Diferente do caso de estados puros de dois qubits para os quais a entropia de Von Neuman realiza uma descrição completa do entrelaçamento, nos estados multipartes a quantificação do entrelaçamento de estados mistos depende do contexto físico ou operacional específico, ou seja, depende do uso que se pretende fazer do estado.

A aplicação do EG para a análise do entrelaçamento de alguns estados foi realizada em [CB05]. Nesses trabalho são apresentadas fórmulas analíticas para o cálculo do EG de estados quânticos que possuem certos tipo de simetria como, por exemplo, os estados GHZ e W , e o cálculo numérico de estados gerados aleatoriamente e estados intermediários das etapas de iteração do algoritmo de Grover [SSB04].

Uma contribuição do trabalho aqui realizado é um método numérico baseado em algoritmos genéticos pra calcular o EG. Outro foco do presente trabalho é comparar tipos distintos de medidas de entrelaçamento multiparte. Ainda não se sabe se existe uma medida geral que ao mesmo tempo envolva e simplifique as diversas medidas atualmente consideradas boas (os atuais monótonos de entrelaçamento). Analisá-los a partir de uma visão comparativa deve contribuir na atual busca da universalidade.

Sendo o EG baseado no funcionamento do algoritmo quântico de busca de Grover, começamos com algumas considerações sobre o algoritmo de Grover. Seja n o

número de qubits da base de dados, $N=2^n$ a quantidade de elementos no espaço de busca e r o conjunto dos estados que são soluções do problema de busca. Tradicionalmente, a entrada do algoritmo de Grover é o estado superposto uniformemente distribuído e separável dado por:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} |i\rangle. \quad (2.2)$$

A aplicação do algoritmo sobre esse estado encontra o resultado procurado com probabilidade de aproximadamente 1. É possível ter uma probabilidade de sucesso próximo a 1 sempre que a base de busca é um estado completamente separável [SSB04] e quanto maior é o entrelaçamento da base, menor é a probabilidade máxima de sucesso do algoritmo. Esta relação entre o desempenho do algoritmo de Grover dado o entrelaçamento do estado inicial é um dos pontos chave do EG.

Numericamente, o cálculo do entrelaçamento Groveriano está relacionado a um problema de maximização: dado um estado $|\psi\rangle$, o qual deseja-se medir o entrelaçamento, deve-se descobrir qual é o estado separável $|\varphi\rangle$, dentre todos os possíveis estados separáveis de n qubits, que é o mais próximo a $|\psi\rangle$. Proximidade essa é que é descrita pela equação de fidelidade:

$$F(\psi, \varphi) = |\langle \psi | \varphi \rangle|. \quad (2.3)$$

Descoberto o estado $|\varphi\rangle$ que maximiza o valor de F , o cálculo do EG é feito através da equação:

$$G(\psi) = \sqrt{1 - F^2(\psi, \varphi)}. \quad (2.4)$$

Pode-se perceber a estreita relação entre o EG e a entropia relativa de entrelaçamento. A contribuição do EG é utilizar esta fórmula de fidelidade não como fim nela mesma, mas como um meio de se obter uma medida de entrelaçamento operacional [BDSW96], com sentido e contexto no desempenho do algoritmo quântico de Grover.

2.3 Demonstração do entrelaçamento Groveriano

Estes são alguns passos apresentados em [CB05] que mostram a equivalência entre o EG e a entropia relativa de entrelaçamento.

1. Considere um estado puro separável $|\psi\rangle$ com n qubits dado por

$$|\psi\rangle = |u_1\rangle \otimes |u_2\rangle \otimes \cdots \otimes |u_n\rangle \quad (2.5)$$

2. Os n qubits de $|\psi\rangle$ são enviados para n pessoas distintas separadas umas das outras.
3. Cada pessoa efetua uma operação local U_i à sua escolha.
4. Os n qubits são enviados de volta para a fonte. Nesse momento a fonte geradora possui o seguinte estado quântico:

$$|\bar{\psi}\rangle = U|\psi\rangle = (U_1 \otimes U_2 \otimes \cdots \otimes U_n)(|u_1\rangle \otimes |u_2\rangle \otimes \cdots \otimes |u_n\rangle) \quad (2.6)$$

5. O estado $|\bar{\psi}\rangle$ é usado como a base de dados a ser processada pelo algoritmo de Grover.
6. Sendo P a probabilidade máxima de sucesso do algoritmo de Grover para uma determinada entrada realizando-se o número adequado de iterações, a variável P_{max} é dada pelo máximo P em relação a todas as possíveis variações das portas U_1, \dots, U_n . P_{max} é descrito pela maximização expressa a seguir:

$$P_{max}(\psi) = \max_{U_1, \dots, U_n} P(U_1 \otimes \cdots \otimes U_n |\psi\rangle_n) \quad (2.7)$$

7. Assumindo a existência de um único estado marcado, solução sem perda de generalidade, faça $|m\rangle$ ser o estado marcado e $|\eta\rangle$ o estado inicial com superposição uniforme que é a entrada padrão do algoritmo original de Grover. Após um número adequado τ de interações do algoritmo de Grover, o estado $|\eta\rangle$ é convertido no estado $|m\rangle$ com probabilidade próximo a 1, conforme expresso em:

$$U_G^\tau |m\rangle = |\eta\rangle + \text{termos de correção} . \quad (2.8)$$

Que pode ser reescrita como:

$$\langle m|(U_G^\tau)^\dagger = \langle \eta| + \text{correção} \quad (2.9)$$

8. Calcular a probabilidade do resultado do algoritmo de Grover para uma determinada entrada ser um determinado estado $|m\rangle$ corresponde ao cálculo da fidelidade entre o resultado do processamento do algoritmo de Grover e o estado $|m\rangle$. Não sabendo qual é o estado marcado, pode-se calcular o P_{max} em relação a todos os estados e fazer a média. Assim, é possível encontrar o valor de P_{max} na equação (2.7) maximizando-se a média das fidelidades referente a todos os $N=2^n$ valores possíveis de $|m\rangle$.

$$P_{max}(\Psi) = \max_{U_1, \dots, U_n} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |\langle m|(U_G^\tau)(U_1 \otimes \dots \otimes U_n)|\Psi\rangle|^2 \quad (2.10)$$

9. Substituindo a equação (2.9) na (2.10) tem-se:

$$P_{max}(\Psi) \approx \max_{U_1, \dots, U_n} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |\langle \eta|(U_1 \otimes \dots \otimes U_n)|\Psi\rangle|^2 \quad (2.11)$$

10. A aplicação do conjunto de portas de 1 qubits sobre o estado separável η no termo $\langle \eta|(U_1 \otimes \dots \otimes U_n)$ é também um estado separável. Dessa forma pode-se transformar a maximização da média em relação a todas as possíveis portas de um qubit para uma maximização em relação a todos os possíveis estados separáveis. Sendo $|e_i\rangle$ um estado de 1 qubit tem-se:

$$P_{max}(\psi) \approx \max_{|e_1, \dots, e_n\rangle} |\langle e_1, \dots, e_n|\psi\rangle|^2. \quad (2.12)$$

11. Tendo sido calculado o P_{max} , o EG é definido por:

$$G(\psi) = \sqrt{1 - P_{max}(\psi)}. \quad (2.13)$$

Assim, quando P_{max} tender a 1, o valor do entrelaçamento tende à zero. Note que a equação (2.13) apresentada é equivalente à equação (2.4). Dessa forma demonstra-se a afirmação de que medir o Entrelaçamento Groveriano está relacionado a encontrar o estado completamente separável mais próximo ao estado analisado. Sendo S o conjunto de todos os estados completamente separáveis de n qubits, o EG dado por

$$G(\psi) = \min_{\sigma \in S} \sqrt{1 - F^2(\sigma, \psi)} \quad (2.14)$$

e a medida entropia relativa de entrelaçamento dada por

$$E(\psi) \equiv 2 - 2 \max_{\sigma \in S} F(\sigma, \psi) \quad (2.15)$$

são ditas compatíveis quando são aplicadas a estados puros.

O EG é um monótono de entrelaçamento pois satisfaz os requisitos necessários apresentados na seção 1.5.1 . Com relação ao primeiro requisito o EG o satisfaz, pois o valor da medida de um estado separável é aproximadamente 0 [SSB04]. Sendo um dos passos do algoritmo analisar o estado em relação a todas as possíveis combinações de portas de 1 qubit, tem-se que ele é invariante sobre operações locais satisfazendo o segundo requisito. Para satisfazer o terceiro requisito faz-se necessário a demonstração do seguinte teorema [BNO02].

Teorema: Sejam $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ estados puros de n qubits de tal forma que é possível transformar $|\psi\rangle$ em $|\phi\rangle$ por LOCC. Então $G(|\psi\rangle) \geq G(|\phi\rangle)$.

Seja a métrica de distancia [Uhl76]

$$B(\rho, \sigma) \equiv \sqrt{1 - F^2(\rho, \sigma)} \quad (2.16)$$

e a minimização que calcula o EG dada por

$$G(\rho) = \min_{\sigma \in S} B(\rho, \sigma). \quad (2.17)$$

A transformação de $|\psi\rangle$ em $|\phi\rangle$ pode ser representada por uma operação quântica E , descrita como $|\sigma\rangle\langle\sigma| = E(|\psi\rangle\langle\psi|)$. Sejam σ_1 e σ_2 os estados que minimizam a equação (2.17) para os estados $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ respectivamente. É mostrado em [BCFJ96] que a distancia $B(\rho, \sigma)$ entre dois estado nunca é aumentada por uma operação quântica, então:

$$G(\psi) = B(\sigma_1, \psi) \quad (2.18)$$

$$\geq B(E(\sigma_1), E(|\psi\rangle\langle\psi|)) \quad (2.19)$$

$$= B(E(\sigma_1), \phi) \quad (2.20)$$

Tem-se também que $B(E(\sigma_1), \phi) \geq G(\phi)$ alcançando a igualdade quando $E(\sigma_1) = \sigma_2$. Assim,

$$G(\psi) \geq B(E(\sigma_1), \phi) \geq G(\phi). \quad (2.21)$$

Dessa forma fica provado o terceiro requisito que atesta que o EG é um monótono de entrelaçamento, e assim é uma maneira adequada segundo os padrões atuais para se medir entrelaçamento.

2.4 Encontrando o valor da medida

Uma contribuição deste trabalho é o uso de algoritmos genéticos para calcular o EG. A maximização do valor de P pode ser efetuada usando os seguintes métodos.

Sendo $P(\psi) = |\langle e | \psi \rangle|^2$, n o número de qubits e $N=2^n$, temos:

- Sendo $|e\rangle$ um estado separável, então ele pode ser escrito como:

$$|e\rangle = |e_1\rangle_1 \otimes |e_2\rangle_1 \otimes \dots \otimes |e_N\rangle_1. \quad (2.22)$$

Cada estado de um qubit pode ser representado por:

$$|e_k\rangle = \cos \theta_k |0\rangle_k + e^{i\phi_k} \sin \theta_k |1\rangle_k \quad (2.23)$$

- O estado $|\psi\rangle$ pode ser escrito por:

$$|\psi\rangle = a_1 |00..0\rangle + a_2 |00..1\rangle + a_N |11..1\rangle \quad (2.24)$$

A maximização sobre e_k pode ser substituída pela maximização sobre os ângulos θ e ϕ .

$$P(\psi) = |\langle e | \psi \rangle|^2$$

$$P_{\max}(\psi) = \max_{|e_1, \dots, e_n\rangle} |\langle e_1, \dots, e_n | \psi \rangle|^2 = \max_{\theta_1, \dots, \theta_n, \phi_1, \dots, \phi_n} P(\theta_1, \dots, \theta_n, \phi_1, \dots, \phi_n, \psi) \quad (2.25)$$

Existem fórmulas analíticas para o cálculo de P_{\max} para estados com 4 e 5 qubits. Nelas a maximização é resolvida fazendo-se:

$$\frac{\partial P}{\partial \theta_k} = \frac{\partial P}{\partial \phi_k} = 0 \text{ para } k=1, \dots, n \quad (2.26)$$

Devido à dificuldade operacional de se encontrar fórmulas analíticas para um número maior que 5 qubits, foi desenvolvido um algoritmo clássico baseado em *algoritmos genéticos* para o cálculo do EG. Em [SSB04] é desenvolvido também um método numérico baseado no método de descida passo a passo ou aproximação do

ponto de sela, que para um dado ponto inicial faz a função convergir para um mínimo local. Então o algoritmo é rodado diversas vezes para tentar encontrar um mínimo global.

O interesse inicial no uso de um método baseado em algoritmo genético foi criar um método simples e funcional para o cálculo do EG com qualquer número de qubits.

2.5 Método numérico

2.5.1 Algoritmo genético básico

Os algoritmos genéticos são baseados na forma como a natureza evolui. Em síntese, o algoritmo funciona gerenciando a evolução de uma população que é composta por um conjunto de indivíduos, sendo que cada indivíduo é uma possível resposta para o problema em questão. A população evolui em gerações e cada geração é composta pelos seguintes passos:

1. Seleção dos indivíduos que irão se reproduzir.
2. Reprodução dos indivíduos selecionados gerando novos indivíduos.
3. Mutação da população.
4. Escolha da nova população.

O objetivo do algoritmo é encontrar o estado separável que mais se aproxime do estado do qual se está tentando calcular o entrelaçamento.

A função de avaliação

A função de avaliação, que determina o quão boa é a solução que o indivíduo representa, é dada pela função fidelidade $|\langle \rho | \psi \rangle|$ apresentada na equação (2.3). Maximizando essa função tem-se o resultado do algoritmo.

A modelagem do indivíduo

A função (2.25) apresenta a maximização modelada em termo dos ângulos ϕ e σ dos qubits do estado separável. Uma primeira abordagem para o indivíduo é a representação na forma canônica na qual o indivíduo é um vetor de qubits contendo apenas 0 ou 1. Um parâmetro denominado precisão determina a quantidade de bits que são utilizados para definir um ângulo. Por exemplo, para um estado com n qubits, e uma precisão de 4 bits para cada ângulo poderíamos ter o seguinte exemplo de cromossomo:

$$\underbrace{[01010000]}_{\phi_1} \underbrace{11}_{\sigma_1} \underbrace{01010010}_{\phi_2} \underbrace{10}_{\sigma_2} \dots \underbrace{1111}_{\phi_n} \underbrace{0010}_{\sigma_n}$$

Inicialização: A inicialização do algoritmo consiste na criação aleatória de um conjunto de indivíduos que hão de constituir a população inicial.

Crossover: Optou-se por realizar o crossover em dois pontos por mostrar-se mais eficiente que em um único ponto.

Mutação: Cada bit do cromossomo possui uma probabilidade de ser invertido.

Elitismo: O melhor indivíduo de cada população é mantido na população seguinte.

2.6 Casos de análise com o entrelaçamento Groveriano

2.6.1 Estados W

Para estados quânticos com 3 qubits foi demonstrado em [DVC00] existirem apenas duas classes de entrelaçamento genuíno, sendo que, mesmo estatisticamente, estados de uma classe não podem ser convertidos em estados de outra classe através de LOCC. Os principais representantes dessas duas classes são o GHZ [GHZ93] e o W [CKW00]. O estado W de n qubits tem a seguinte forma:

$$|W\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{2^n}} (|00\dots 01\rangle + |00\dots 10\rangle + \dots + |01\dots 00\rangle + |10\dots 00\rangle) \quad (2.27)$$

Pela simetria apresentada no estado W , seu EG pode ser calculado pela seguinte fórmula analítica [SSB04]:

$$G(W_n) = \sqrt{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}}. \quad (2.28)$$

Utilizando o método numérico proposto para o cálculo do EG de (2.27) e comparando-o com (2.28) resultado da Figura 2.1 foi encontrado. Como pode ser observado, o resultado numérico coincide com o resultado analítico até o estado com 9 qubits, após isso, pequenos desvios são encontrados. Quanto maior o número de qubits, mais interações são necessárias para que o algoritmo encontre uma solução adequada a margem de erro mínima imposta pelo algoritmo, pois maior é o tamanho do espaço de busca.

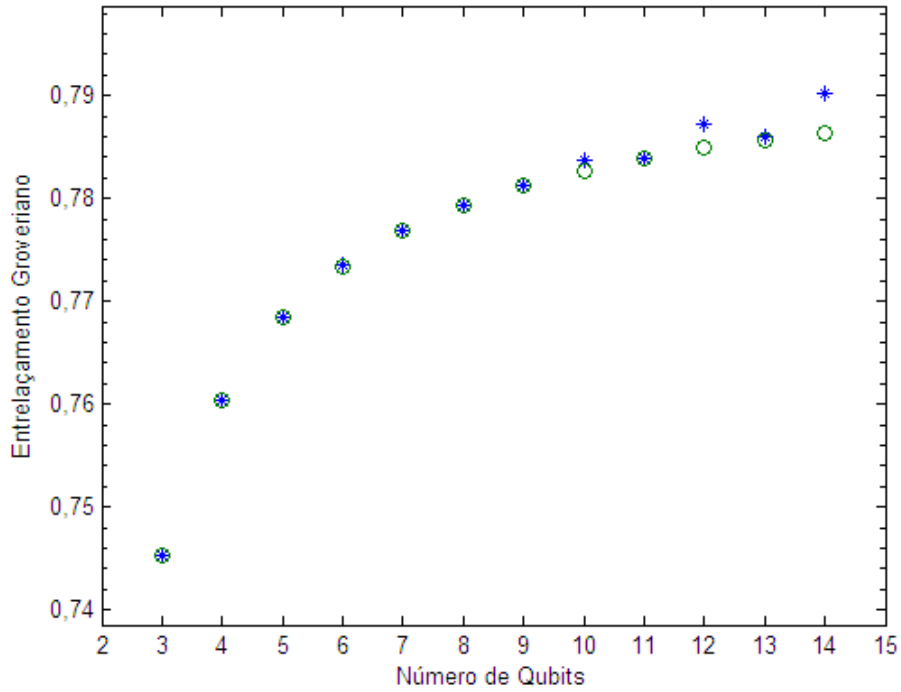


Figura 2.1 – EG do estado W versus o número de qubits sendo ‘o’ a fórmula analítica e ‘*’ o método numérico.

2.6.2 Estados GHZ

Outra simulação interessante é a análise da quantidade de entrelaçamento do estado GHZ variando-se a amplitude dos dois termos nele contidos. O estado GHZ de n qubits possui a seguinte forma:

$$|\psi_{GHZ}\rangle_n = \frac{|0\rangle^{\otimes n} + |1\rangle^{\otimes n}}{\sqrt{2}}. \quad (2.29)$$

Dada a característica própria da simetria dos estados GHZ. O valor do EG é aproximadamente 0,7071 para qualquer número de qubits. Analisando-se um estado mais genérico que o GHZ_4 expresso por:

$$|\psi\rangle_4 = a^2 |0000\rangle + b^2 |1111\rangle, \quad (2.30)$$

é possível traçar o gráfico de EG variando o coeficiente a^2 de 0 até 1. A Figura 2.2 apresenta o resultado obtido com a simulação com algoritmo genético. O gráfico

começa e termina em 0 que é o valor do entrelaçamento dos estados puros $|0000\rangle$ e $|1111\rangle$ e alcança o valor máximo de 0,7071 para amplitudes igual, $a=b=(0,5)^{1/2}$.

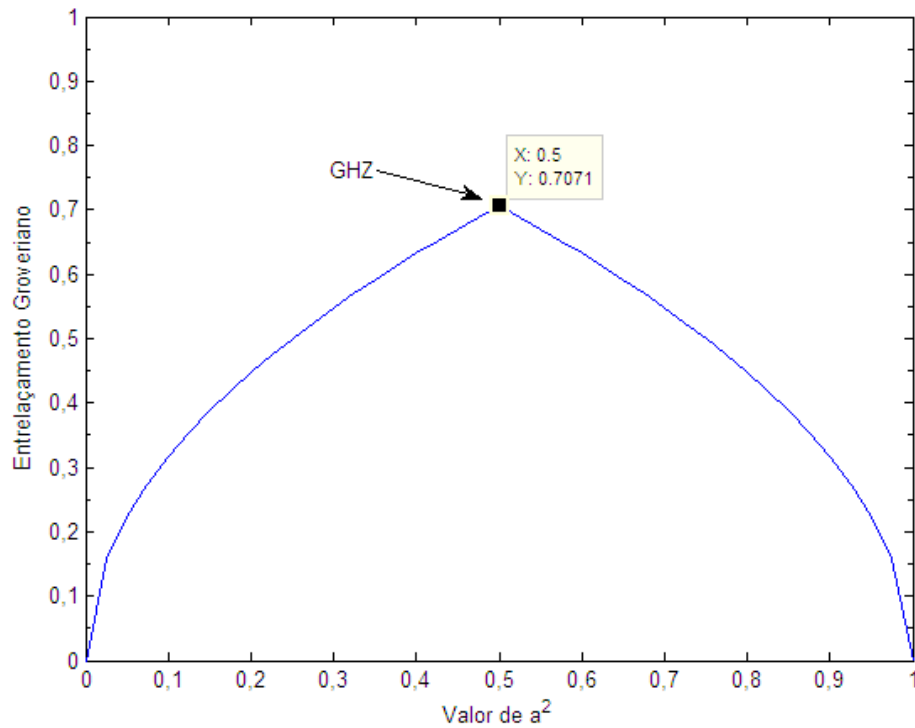


Figura 2.2 – EG do estado $|\psi\rangle_4$ equação versus o valor de a^2 .

2.7 Conclusão

Este capítulo apresentou o entrelaçamento Groveriano, que é utilizado como medida comparativa no capítulo seguinte. Apresentou também alguns parâmetros do algoritmo genético desenvolvido para calcular o EG para qualquer número de qubits. Em seguida alguns gráficos de simulações do entrelaçamento de estados conhecidos foram desenvolvidos no intuito de demonstrar o funcionamento do algoritmo.

Capítulo 3 Entrelaçamento Residual com Negatividade

Este capítulo está relacionado à medida de entrelaçamento residual com negatividade [OF07]. Após apresentá-la é feita uma extensão para o caso de 4 qubits como contribuição do trabalho. Essa extensão permite detectar estados genuinamente entrelaçados em quatro vias. A medida proposta é comparada com o EG.

3.1 Entrelaçamento residual para estados de três qubits com tangles

Para o caso de 3 qubits tem-se uma medida amplamente utilizada e conhecida por *tangle-3* [CKW00], ou τ_3 . Para o estado puro de três qubits ρ_{ABC} , a desigualdade CKW requer que uma boa medida de entrelaçamento respeite a seguinte desigualdade:

$$E_{AB}^2 + E_{AC}^2 \leq E_{A(BC)}^2. \quad (3.1)$$

É demonstrado em [CKW00] que a concorrência respeita essa propriedade de forma que tem-se:

$$C_{AB}^2 + C_{AC}^2 \leq C_{A(BC)}^2 \quad (3.2)$$

sendo C_{AB} e C_{AC} a concorrência dos estados reduzidos $\rho_{AB} = \text{Tr}_C(|\sigma\rangle_{ABC}\langle\sigma|)$, $\rho_{AC} = \text{Tr}_B(|\sigma\rangle_{ABC}\langle\sigma|)$ e $C_{A(BC)} = 2(\det(\rho_A))^{1/2}$, com $\rho_A = \text{Tr}_{BC}(|\sigma\rangle_{ABC}\langle\sigma|)$. A medida *tangle-3* mede a diferença dessa desigualdade:

$$\tau_3 = C_{A(BC)}^2 - C_{AB}^2 - C_{AC}^2. \quad (3.3)$$

Tem-se ainda que permutando os qubits o valor de τ_3 continua o mesmo, ou seja:

$$\tau_3 = C_{B(AC)}^2 - C_{BA}^2 - C_{BC}^2, \quad (3.4)$$

$$\tau_3 = C_{C(AB)}^2 - C_{CA}^2 - C_{CB}^2. \quad (3.5)$$

Quando utilizado para quantificar o estado $|GHZ\rangle_3$ a medida retorna valor igual a 1 indicando entrelaçamento máximo em 3 vias. Aplicada ao estado $|W\rangle_3$, tem-se $\tau_3(|W\rangle_3)=0$. Já que o $|W\rangle_3$ não pode ser decomposto como um produto tensorial de estados puros de um qubit, ele deve possuir algum tipo de entrelaçamento não detectado por τ_3 .

3.2 Entrelaçamento residual com negatividade

A medida de entrelaçamento residual com negatividade, ou π_3 , utiliza o mesmo modelo da medida τ_3 , porém utilizando a negatividade ao invés da concorrência. É demonstrado [OF07] que a negatividade também respeita a desigualdade CKW da forma:

$$N_{AB}^2 + N_{AC}^2 \leq N_{A(BC)}^2, \quad (3.6)$$

sendo N_{AB} e N_{AC} a negatividade dos estados reduzidos ρ_{AB} e ρ_{AC} e $N_{A(BC)} = C_{A(BC)}$. Utilizando a concorrência, o resultado da diferença na desigualdade é invariante sob a permutação do qubit em foco, entretanto utilizando a negatividade os resultados podem ser diferentes:

$$\begin{aligned} \pi_A &= N_{A(BC)}^2 - N_{AB}^2 - N_{AC}^2 \\ \pi_B &= N_{B(AC)}^2 - N_{BA}^2 - N_{BC}^2. \\ \pi_C &= N_{C(AB)}^2 - N_{CA}^2 - N_{CB}^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Desta forma, a medida π_3 é tomada como a média aritmética dos 3 resultados:

$$\pi_3 = \frac{1}{3}(\pi_A + \pi_B + \pi_C). \quad (3.8)$$

Assim, a medida se torna invariante sob a permutação de qubits.

Uma implicação dessa medida é encontrar para todos os estados da classe W entrelaçamento superior a zero. Caracterizando o estado W como entrelaçamento em três vias.

3.3 Extensão da medida entrelaçamento residual para estados de 4 qubits

A extensão natural apresentada em [OF07] para o entrelaçamento residual entre 4 qubits é dada por:

$$\begin{aligned}
\pi_4 &= \frac{1}{4}(\pi_A + \pi_B + \pi_C + \pi_D) \\
\pi_A &= N_{A_BCD}^2 - N_{AB}^2 - N_{AC}^2 - N_{AD}^2 \\
\pi_B &= N_{B_ACD}^2 - N_{AB}^2 - N_{BC}^2 - N_{BD}^2 . \\
\pi_C &= N_{C_ABD}^2 - N_{AC}^2 - N_{BC}^2 - N_{CD}^2 \\
\pi_D &= N_{D_ABC}^2 - N_{AD}^2 - N_{BD}^2 - N_{CD}^2
\end{aligned} \tag{3.9}$$

No intuito de compreender a maneira como as medidas G e π diferem quanto à mensuração do entrelaçamento, uma série de simulações foram desenvolvidas das quais algumas encontram-se a seguir. Um estado puro bastante interessante de 4 qubits, o qual acredita-se ser de uma classe de entrelaçamento diferente da GHZ e W é o estado $|\chi_{00}\rangle$ [YC06, YL08]. Esse estado foi utilizado na teleportação de pares de estados quânticos e outros protocolos. Ele é da forma

$$|\chi_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varepsilon_0\rangle + |\varepsilon_1\rangle)_{ABCD}, \tag{3.10}$$

$$|\varepsilon_0\rangle = \frac{1}{2}(|0000\rangle - |0011\rangle - |0101\rangle + |0110\rangle), \tag{3.11}$$

$$|\varepsilon_1\rangle = \frac{1}{2}(|1001\rangle + |1010\rangle + |1100\rangle + |1111\rangle). \tag{3.12}$$

Como características importantes, o estado $|\chi_{00}\rangle$ possui entrelaçamento máximo entre as partições AB e CD e entre AC e BD . A entropia de Von Neumann também é máxima para os estados reduzidos AD e BC .

A medida de entrelaçamento Groveriano propõe detectar qualquer entrelaçamento que exista no estado. Seja completamente entrelaçado ou parcialmente

entrelaçado o valor do entrelaçamento deve ser maior que 0. A medida de entrelaçamento residual com negatividade propõe detectar qualquer estado que possua entrelaçamento genuíno em 3 vias.

O gráfico da Figura 3.1 apresenta a variação do entrelaçamento da generalização do estado $|\chi_{00}\rangle$, variando-se o valor de p em

$$|\chi\rangle = \sqrt{p}|\varepsilon_0\rangle + \sqrt{1-p}|\varepsilon_1\rangle. \quad (3.13)$$

Encontramos uma ordenação de estados equivalentes para ambas as medidas, com diferença apenas na forma de crescimento do entrelaçamento, como apresentado na Figura 3.1.

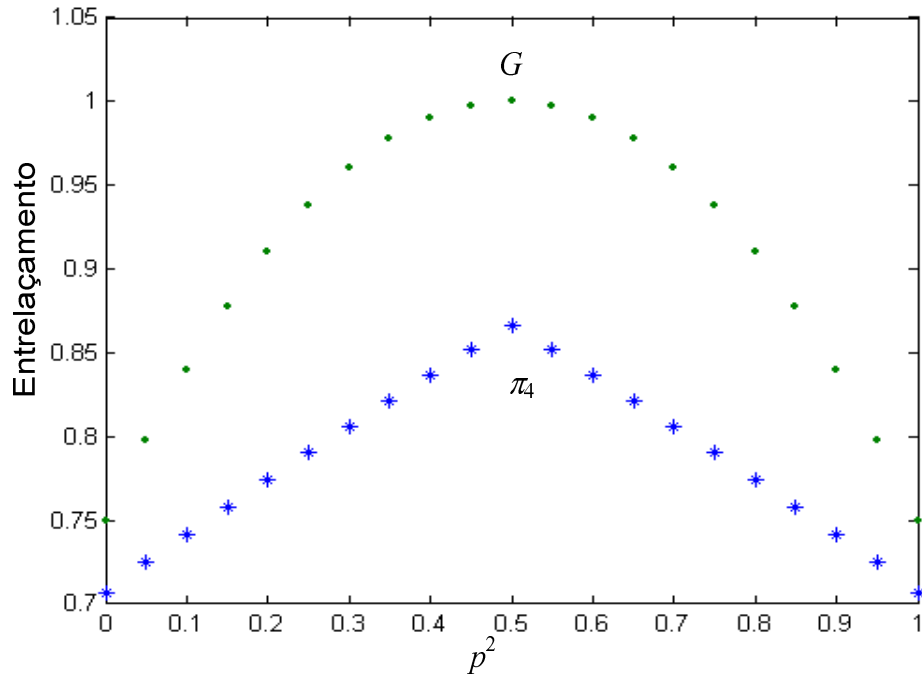


Figura 3.1 – Medidas G e π_4 do estado $|\chi\rangle$.

É interessante perceber que ambas as medidas eram maiores do que 0 para $p^2=0$ e $p^2=1$. Se as medidas detectassem apenas entrelaçamento genuíno em 4 partes o resultado deveria ter sido igual a 0 já que os estados $|\varepsilon_0\rangle$ e $|\varepsilon_1\rangle$ são parcialmente separáveis em relação ao primeiro qubit. Esse fato será abordado na seção seguinte.

Quando analisada a superposição dos estados GHZ_4 e W_4 segundo a fórmula (3.14) não é encontrada equivalência das duas medidas em relação à ordenação de estados quanto ao valor do entrelaçamento:

$$|\psi\rangle_{ABCD} = \sqrt{p}|GHZ\rangle + \sqrt{1-p}|W\rangle. \quad (3.14)$$

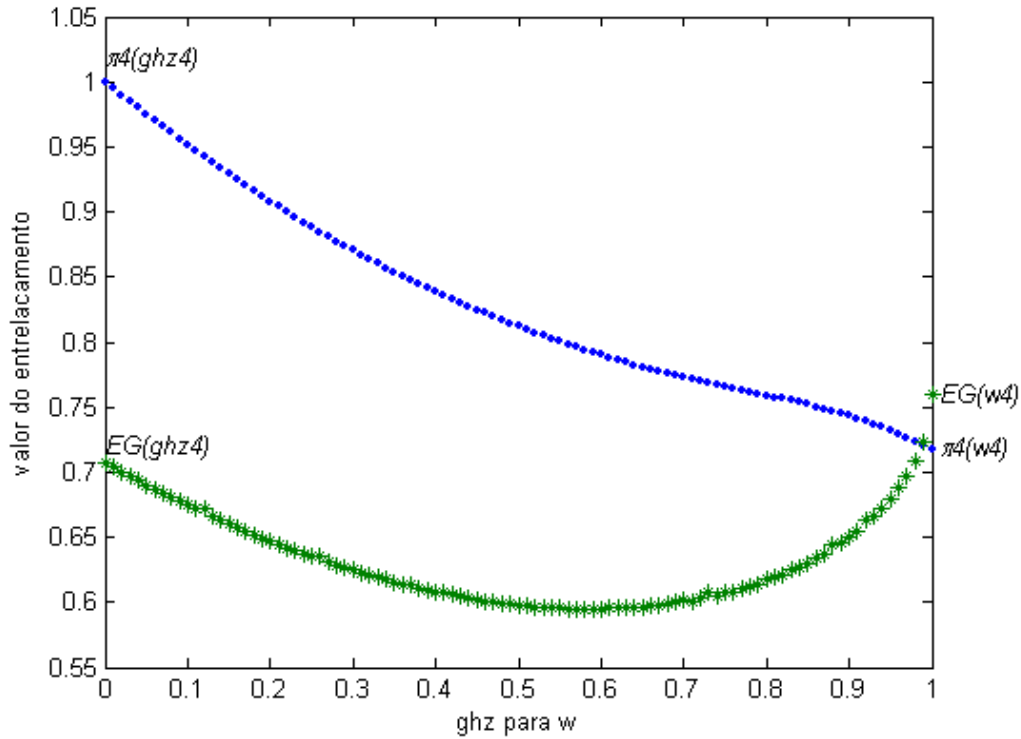


Figura 3.2 – Medidas G (linha com asterisco) e π_4 (linha pontilhada).

Enquanto o π_4 é sempre decrescente, o EG possui um ponto de inflexão que separa 2 conjuntos de ordenação diferentes.

3.4 Uma nova medida de entrelaçamento genuíno entre 4 qubits puros

A proposta dessa seção é uma contribuição desse trabalho e está publicada em [OR10]. Um dos problemas encontrados na extensão do entrelaçamento residual para múltiplos qubits como proposto em [OF07] é o fato de que ele retorna entrelaçamento maior que 0 para estados que não eram completamente entrelaçados. Foi observado que a medida detectava qualquer entrelaçamento maior que 3 vias. Ou seja, se $\pi_3(|\Psi\rangle_{ABC}) > 0$, então $\pi_4(|\Psi\rangle_{ABC} \otimes |\psi\rangle_D) > 0$. No intuito de detectar apenas estados completamente entrelaçados é feita a seguinte mudança no cálculo do entrelaçamento: ao invés de usar a média aritmética, é utilizada a média geométrica no cálculo do entrelaçamento residual:

$$\pi_{4G} = \sqrt[4]{\pi_A \cdot \pi_B \cdot \pi_C \cdot \pi_D}. \quad (3.15)$$

Assim, quando for analisado um estado da forma $|\psi\rangle_{ijk} \otimes |\phi\rangle_w$, ter-se-á $\pi_X=0$ com $X=\{A, B, C, D\}$ e conseqüentemente $\pi_{4G}=0$. A explicação desse fato encontra-se na seção 5.3 em detalhes.

Para mostrar que o π_4 é um monótono de entrelaçamento para estados de quatro qubits é necessário comprovar algumas propriedades. Primeiramente, ele precisa ser invariante sob operações locais unitárias (LU). Seja o estado de quatro qubits $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle=U_A \otimes U_B \otimes U_C \otimes U_D |\psi\rangle$, então:

$$\begin{aligned} N_{A_BCD}^2(|\phi\rangle) &= 2\left(1 - \text{Tr}\left[\rho_A^2(|\phi\rangle)\right]\right) = 2\left(1 - \text{Tr}\left\{\left[U_A \rho_A(|\psi\rangle) U_A^\dagger\right]^2\right\}\right) \\ &= 2\left(1 - \text{Tr}\left[U_A \rho_A(|\psi\rangle) U_A^\dagger U_A \rho_A(|\psi\rangle) U_A^\dagger\right]\right) = 2\left(1 - \text{Tr}\left[U_A \rho_A^2(|\psi\rangle) U_A^\dagger\right]\right) \\ &= 2\left(1 - \text{Tr}\left[\rho_A^2(|\psi\rangle)\right]\right) = N_{A_BCD}^2(|\psi\rangle). \end{aligned} \quad (3.16)$$

O resultado (3.16) deriva do fato de que a operação do traço é a soma dos autovalores e que eles são invariantes sob operações unitárias. A mesma prova se estende para N_{B_ACD} , N_{C_ABD} , N_{D_ABC} que são todos invariantes sob operações unitárias. A negatividade biparte proposta por Vidal e Werner é invariante, ou seja, $N_{AB}(\rho_{AB})=N_{AB}[(U_A \otimes U_B) \rho_{AB} (U_A \otimes U_B)^\dagger]$, ou seja, a ação dos operadores unitários U_A e U_B não altera o valor da negatividade da parte ρ_{AB} . Dessa forma, N_{AB} , N_{AC} , N_{AD} , N_{BC} , N_{BD} e N_{CD} são invariantes sob operações locais. Sendo todas as negatividades utilizadas na definição de π_4 invariantes, o próprio π_4 é também invariante.

A prova de que o entrelaçamento é nulo para estados desentrelaçados e que $\pi_4(|\psi\rangle) \geq 0$ deriva diretamente de

$$N_{A_1 A_2}^2 + N_{A_1 A_3}^2 + \dots + N_{A_1 A_k}^2 \leq N_{A_1 \dots A_k}^2 \quad (3.17)$$

provado em [OF07].

Por último, para mostrar que a medida não cresce sob LOCC, é aqui apresentado sem perda de generalidade que π_{4A} não cresce sob LOCC. De acordo com [Hor05, DBKM06] π_{4A} não cresce sob LOCC se ela for invariante a operações locais unitárias e as condições FLAGS são satisfeitas

$$\pi_A \left(\sum_i p_i \rho^{(i)} \otimes |\eta_i\rangle\langle\eta_i| \right) = \sum_i p_i \pi_A \left(\rho^{(i)} \right). \quad (3.18)$$

O termo da esquerda da equação (3.18) implica em

$$\begin{aligned} \pi_A \left(\sum_i p_i \rho^{(i)} \otimes |\eta_i\rangle\langle\eta_i| \right) &= N_{A_BCD}^2 \left(\sum_i p_i \rho^{(i)} \otimes |\eta_i\rangle\langle\eta_i| \right) \\ &\quad - N_{AB}^2 \left(\sum_i p_i \rho^{(i)} \otimes |\eta_i\rangle\langle\eta_i| \right) \\ &\quad - N_{AC}^2 \left(\sum_i p_i \rho^{(i)} \otimes |\eta_i\rangle\langle\eta_i| \right) \\ &\quad - N_{AD}^2 \left(\sum_i p_i \rho^{(i)} \otimes |\eta_i\rangle\langle\eta_i| \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Como a negatividade obedece as condições FLAGS individualmente [Hor05], tem-se

$$\begin{aligned} \pi_A \left(\sum_i p_i \rho^{(i)} \otimes |\eta_i\rangle\langle\eta_i| \right) &= \sum_i p_i N_{A_BCD}^2 \left(\rho^{(i)} \right) - \sum_i p_i N_{AB}^2 \left(\rho^{(i)} \right) \\ &\quad - \sum_i p_i N_{AC}^2 \left(\rho^{(i)} \right) - \sum_i p_i N_{AD}^2 \left(\rho^{(i)} \right). \\ &= \sum_i p_i \left[N_{A_BCD}^2 \left(\rho^{(i)} \right) - N_{AB}^2 \left(\rho^{(i)} \right) - N_{AC}^2 \left(\rho^{(i)} \right) - N_{AD}^2 \left(\rho^{(i)} \right) \right] \\ &= \sum_i p_i \pi_A \left(\rho^{(i)} \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Com todas essas condições satisfeitas, a medida π_4 se enquadra como um monótono de entrelaçamento.

Enfim, a Tabela 3.1 mostra alguns resultado significativos da análise da quantidade de entrelaçamento presente em alguns estados já apresentados no trabalho utilizando a medidas π_4 e π_{4G} .

Tabela 3.1 – Comparativo entre as medidas residuais com média aritmética π_4 e média geométrica π_{4G} .

Estado	π_4	π_{4G}
$ W\rangle_4$	0,6213	0,621
$ GHZ\rangle_4$	1	1
$ \chi\rangle$	1	1
$ \varepsilon_1\rangle$	0,75	0
$ \varepsilon_2\rangle$	0,75	0
$ W\rangle_3 \otimes 0\rangle$	0,412	0
$ GHZ\rangle_3 \otimes 0\rangle$	0,75	0
$ GHZ\rangle_2 \otimes GHZ\rangle_2$	0	0
$ GHZ\rangle_2 \otimes 0\rangle \otimes 0\rangle$	0	0

Como pode ser observado, todos os estados não genuinamente entrelaçados em 4 vias têm entrelaçamento igual a zero com a medida π_{4G} . Os estados que possuem entrelaçamento no mínimo em três vias obtiveram resultado maior que zero com a medida π_4 .

Agora, o estado com entrelaçamento genuíno em 4 vias $|\chi\rangle$ [YC06] é analisado utilizando-se apenas a medida residual geométrica. Seja uma generalização do estado $|\chi\rangle$:

$$|\chi\rangle = \frac{|\xi_0\rangle + |\xi_1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (3.21)$$

$$|\xi_0\rangle = \cos(\theta)|0000\rangle - \sin(\theta)|0011\rangle - \sin(\phi)|0101\rangle + \cos(\phi)|0110\rangle \quad (3.22)$$

$$|\xi_1\rangle = \cos(\phi)|1001\rangle + \sin(\phi)|1010\rangle + \sin(\theta)|1100\rangle + \cos(\theta)|1111\rangle \quad (3.23)$$

O entrelaçamento em 4 vias medido por π_{4G} versus os ângulos θ e ϕ é mostrado na Figura 3.3. Os ângulos variam entre 0 e $\pi/2$. Pode-se perceber que o valor do entrelaçamento tende a zero quando o estado $|\chi\rangle$ tende aos componentes $|\xi_0\rangle$ e $|\xi_1\rangle$.

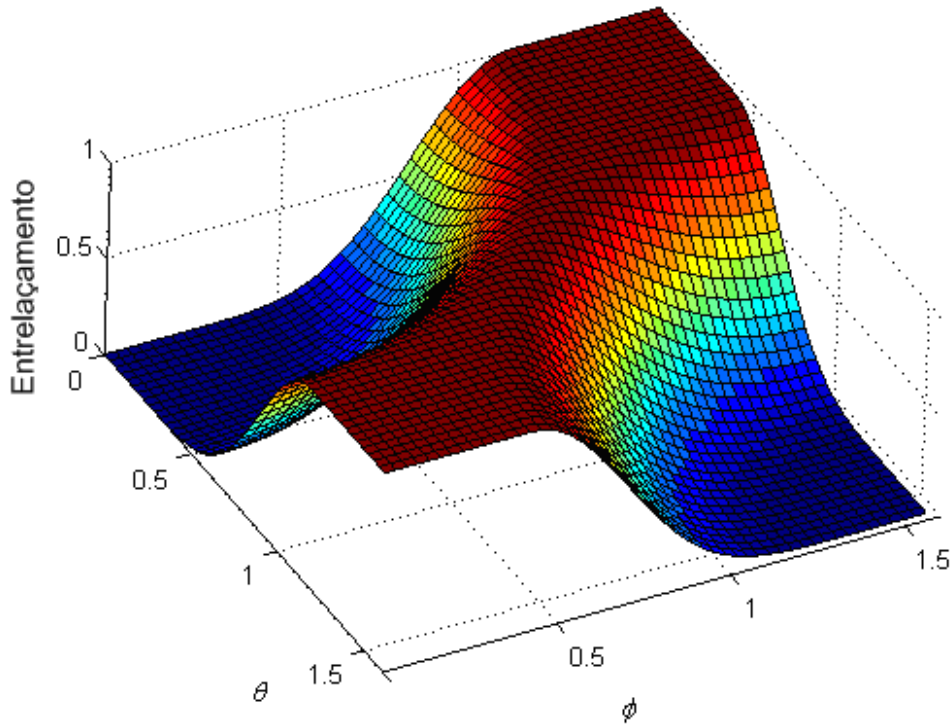


Figura 3.3 – Entrelaçamento de $|\chi\rangle$, versus θ e ϕ medido por π_{4G} .

É apresentado na Tabela 3.2 uma comparação entre o π_{4G} e o EG. Da mesma forma que para o π_4 , existem estados formados por produtos tensoriais para os quais o EG é maior do que zero. Como foi dito, isso acontece porque o EG detecta a presença de qualquer tipo de entrelaçamento. É interessante notar que os estados $|\psi_6\rangle$, $|\psi_7\rangle$, $|\psi_8\rangle$, $|\psi_9\rangle$, $|\psi_{10}\rangle$ correspondem à classes distintas de entrelaçamento [VDMV02]. Todos eles podem ser detectados utilizando π_{4G} , porém passam despercebidos utilizando-se o EG.

Tabela 3.2 – Entrelaçamento de estados de quatro qubits medidos com G e com π_{4G} .

Estado Quântico	E_G	π_{4G}
$ \psi_1\rangle=(01\rangle+ 10\rangle)/2^{1/2}\otimes(0\rangle+ 1\rangle)/2^{1/2}\otimes(0\rangle+ 1\rangle)/2^{1/2}$	0.707	0
$ \psi_2\rangle=(00\rangle+ 11\rangle)/2^{1/2}\otimes(00\rangle+ 11\rangle)/2^{1/2}$	0.866	0
$ \psi_3\rangle=(000\rangle+ 111\rangle)/2^{1/2}\otimes(0\rangle+ 1\rangle)/2^{1/2}$	0.707	0
$ \psi_4\rangle=(001\rangle+ 010\rangle+ 100\rangle)/3^{1/2}\otimes(0\rangle+ 1\rangle)/2^{1/2}$	0.745	0
$ \xi_0\rangle=(0000\rangle- 0011\rangle- 0101\rangle+ 0110\rangle)/2$	0.707	0
$ \xi_1\rangle=(1001\rangle+ 1010\rangle+ 1100\rangle+ 1111\rangle)/2$	0.707	0
$ \psi_5\rangle\equiv \chi^{00}\rangle=(\xi_0\rangle+ \xi_1\rangle)/2^{1/2}$	0.866	1
$ \psi_6\rangle=(0000\rangle+ 1111\rangle)/2^{1/2}$	0.707	1
$ \psi_7\rangle=(0001\rangle+ 0010\rangle+ 0100\rangle+ 1000\rangle)/2$	0.76	0.6213
$ \psi_8\rangle=(0000\rangle+ 0101\rangle+ 1000\rangle+ 1110\rangle)/2$	0.707	0.7140
$ \psi_9\rangle=(0000\rangle+ 1011\rangle+ 1101\rangle+ 1110\rangle)/2$	0.81	0.9306
$ \psi_{10}\rangle=(0001\rangle+ 0110\rangle+ 1000\rangle)/3^{1/2}$	0.81	0.7995
$ \psi_{11}\rangle=(0000\rangle+ 0111\rangle+ 1011\rangle+ 1100\rangle)/2$	0.866	1
$ \psi_{12}\rangle=(0000\rangle- 0101\rangle+ 1010\rangle+ 1111\rangle)/2$	0.866	1

Como pode ser visto na Tabela 3.2, existem estados de quatro qubits que não são completamente entrelaçados ($|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_4\rangle, |\xi_0\rangle, |\xi_1\rangle$), para os quais, suas medidas de entrelaçamento para EG são maiores que 0. Por exemplo, o estado $|\psi_1\rangle$ possui apenas entrelaçamento biparte, já que o primeiro e o segundo qubit não podem ser escritos na forma de produto tensorial. Assim P_{max} será menor do que 1, fazendo o EG maior do que 0. Para estes mesmos estados o resultado do entrelaçamento segundo a medida π_G é igual a 0.

3.5 Entrelaçamento de estados grafos de quatro qubits

Estados grafo são estados quânticos representados na forma de um grafo. Uma forma interessante de ver o entrelaçamento em 4 vias é utilizando estados grafos [YL08]. Seja o estado grafo de quatro qubits dado por

$$|G\rangle = U_{12}^{b_0} U_{13}^{b_1} U_{14}^{b_2} U_{23}^{b_3} U_{24}^{b_4} U_{34}^{b_5} \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)^{\otimes 4}, \quad (3.24)$$

$$U_{ij} = |0\rangle\langle 0|_i \otimes I_j + |1\rangle\langle 1|_i \otimes Z_j. \quad (3.25)$$

A porta U_{ij} é a operação de inversão de fase controlada aplicada nos qubits i e j , e $b_k \in \{0,1\}$ ($k=1,\dots,5$). Se a porta U_{ij} é aplicada, significa que existe uma aresta ligando os dois pontos representados pelos qubits i e j no grafo. Dadas as 64 possíveis combinações para k , se o grafo formado pelo estado for conectado, o estado em questão possui entrelaçamento residual geométrico igual a 1. Se ele não for conectado, então o valor da medida é igual a 0. A relação entre conectividade e entrelaçamento já tinha sido apontada em [CZG07]. Alguns exemplos de estados grafos são apresentados na Figura 3.4.

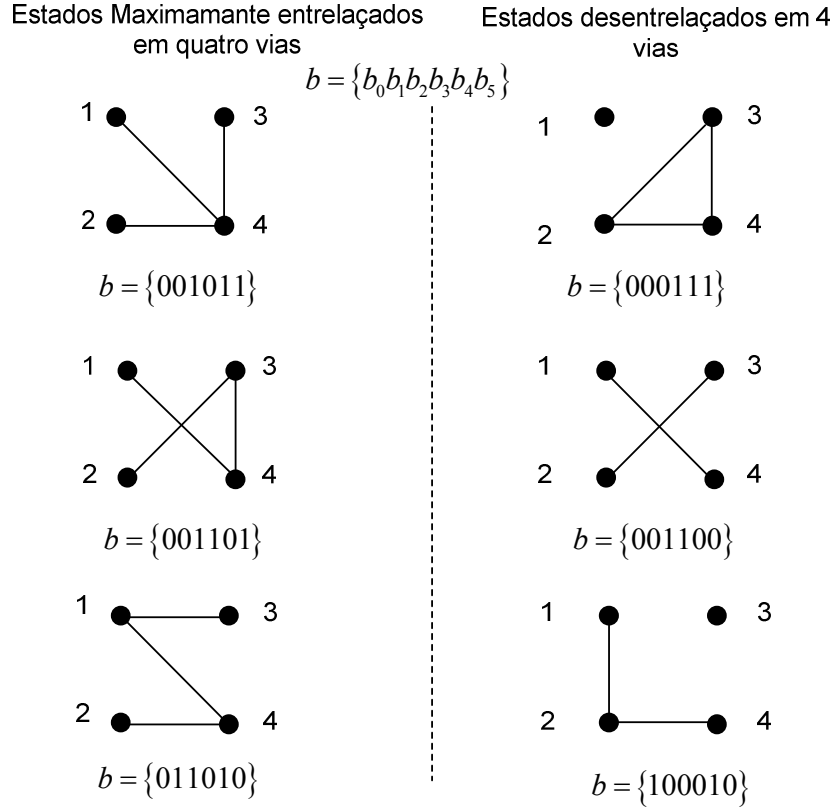


Figura 3.4 – Estados grafos maximamente entrelaçados e desentrelaçados.

3.6 Identificando estados maximamente entrelaçados

Pesquisas sobre estados de quatro qubits altamente entrelaçados foram realizados analiticamente em [HS00] e numericamente em [BSSB05]. Os estados obtidos em [HS00] e [BSSB05] são, respectivamente,

$$|\psi_{HS}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[|1100\rangle + |0011\rangle + \alpha(|1010\rangle + |0101\rangle) + \alpha^2(|1001\rangle + |0110\rangle) \right], \quad (3.26)$$

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{2} \left[|0000\rangle + \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) |011\rangle + |1101\rangle + \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) |110\rangle \right]. \quad (3.27)$$

Na sentença (3.26), $\alpha = (-1 + \sqrt{3}i)/2$ utilizado para simplificar a equação. Para ambos os estados, o entrelaçamento residual geométrico é $\pi_{4G}(|\psi_{HS}\rangle) = \pi_{4G}(|\psi_4\rangle) = 1$. O resultado conseguido com a medida π_{4G} difere da conclusão expressa em [BSSB05], no qual é utilizada uma medida de entrelaçamento baseada numa otimização numérica

utilizando o algoritmo *hill climbing*, ou algoritmo de melhorias iterativas. Em [BSSB05] o autor encontra $E_{NPT}(|\psi_{HS}\rangle) \approx 6.0981$ e $E_{NPT}(|\psi_4\rangle) \approx 5.9142$, sendo E_{NPT} também uma medida baseada no critério da transposição parcial. A conclusão em [BSSB05] é que $|\psi_4\rangle$ é um estado altamente entrelaçado, porém não maximamente entrelaçado tal qual $|\psi_{HS}\rangle$. A conclusão alcançada nos testes com π_{4G} é que o resultado que diferencia $E_{NPT}(|\psi_{HS}\rangle)$ and $E_{NPT}(|\psi_4\rangle)$ deve-se a um erro numérico comum em algoritmos de otimização e que os autores em [BSSB05] tiveram sucesso em encontrar um novo estados maximamente entrelaçado de quatro qubits.

Por fim, o estado quântico

$$|\psi_m\rangle = \frac{|0000\rangle}{\sqrt{3}} + \frac{|0111\rangle + |1011\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle}{\sqrt{6}} \quad (3.28)$$

proposto em [LBSA07] é também um estado de 4 qubits maximamente entrelaçado com $\pi_4(|\psi_m\rangle) = 1$.

3.7 Conclusão

Neste capítulo, foi inicialmente feita uma revisão das medidas de entrelaçamento residual com concorrência τ_3 e com negatividade π_3 . O entrelaçamento residual com negatividade mostra-se melhor por ser capaz de detectar entrelaçamento em 3 vias nos estados da classe \mathcal{W} . Entretanto a extensão do entrelaçamento residual para múltiplos qubits não é adequada para detectar estados completamente entrelaçados. A adaptação do uso da média geométrica mostrou-se mais adequada detectando apenas os entrelaçamentos genuínos. Ainda na mesma idéia foram comparados o residual geométrico e o EG. O EG mostrou-se incapaz de separar classes distintas de entrelaçamento. Por fim, grafos facilmente identificáveis foram utilizados para formar estados completamente entrelaçados e completamente desentrelaçados no intuito de validar a medida proposta π_{4G} .

Capítulo 4 Aplicações para 4 qubits

Este capítulo estuda a variação do entrelaçamento de 4 vias quando o estado de 4 qubits é processado por um circuito ou canal quântico.

4.1 Teleportação de circuito quântico de dois qubits

Estados de quatro partículas contendo entrelaçamento em quatro vias são particularmente úteis para teleportação de portas de dois qubits. Por exemplo, o estado $(|0000\rangle+|0111\rangle+|1011\rangle+|1100\rangle)/2$ foi utilizado na teleportação de Portas CNOT [GC99]. O estado $|\Psi\rangle_{ABCD}=(|0000\rangle-|0101\rangle+|1010\rangle+|1111\rangle)/2$, que tem $\pi_{4G}=1$ e por sua vez, pode ser utilizado na teleportação do circuito de dois qubits $C=C_Z(Z\otimes I)Sw$, sendo C_Z a porta de fase controlada e Sw a porta Swap, como mostrado na Figura 4.1.

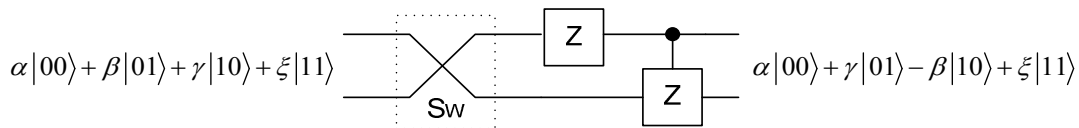


Figura 4.1 – Circuito quântico a ser teleportado. Sw corresponde a porta Swap.

A idéia da teleportação é a seguinte. Alice possui o qubit ρ_E , Bob possui o qubit ρ_F , ambos desejam enviar o resultado de $C(\rho_E \otimes \rho_F)$ para Charlie através de teleportação. Para isso, basta que Alice, Bob e Charlie, compartilhem o estado quântico $|\Psi\rangle_{ABCD}$ e utilizem o esquema da Figura 4.2. Alice tem posse dos qubits E e D, Bob possui os qubits F e A e Charlie possui os qubits B e C. Alice e Bob realizam as medições e enviam o resultado para Charlie que estará apto a, apenas realizando operações locais obter o resultado do circuito C aplicado aos qubits ρ_E e ρ_F .

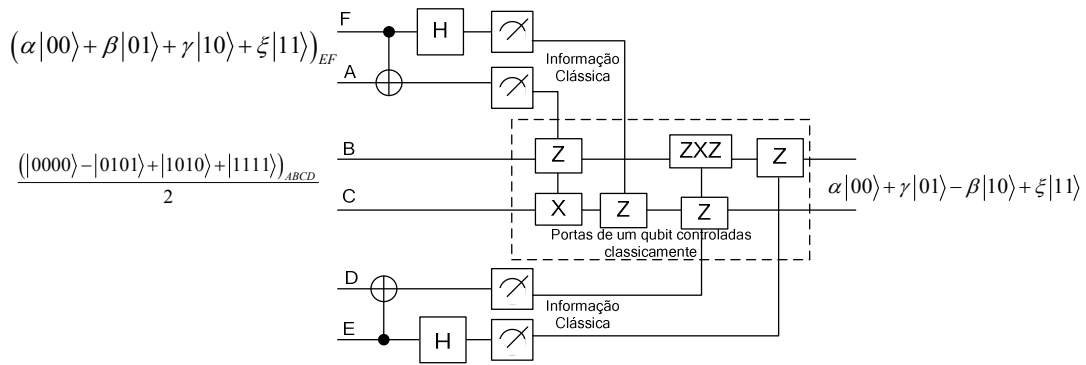


Figura 4.2 – Circuito quântico para teleportação de circuito de dois qubits.

Para o sucesso da teleportação Charlie deve efetuar as correções nos qubits B e C baseado nas informações enviadas por Alice e Bob, de acordo com a Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Tabela de correção de Charlie.

Resultado da medição (AFDE)	Operação quântica	Resultado da medição (AFDE)	Operação quântica
0000	$I \otimes I$	1000	$Z \otimes X$
0001	$Z \otimes I$	1001	$I \otimes X$
0100	$I \otimes Z$	1100	$Z \otimes ZX$
0101	$Z \otimes Z$	1101	$I \otimes ZX$
0010	$ZXZ \otimes Z$	1010	$ZX \otimes ZX$
0011	$XZ \otimes Z$	1011	$X \otimes ZX$
0110	$ZXZ \otimes I$	1110	$ZX \otimes X$
0111	$XZ \otimes I$	1111	$X \otimes X$

4.2 Envio de informação por canal ruidoso

Como segunda aplicação, assumo que cada qubit do estado quântico:

$$|\Psi\rangle_{AB} = \frac{|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB}}{\sqrt{2}} \quad (4.1)$$

é enviado por um canal ruidoso modelado pela interação com o meio através de operações unitárias U_A para o qubit A e U_B para o qubit B . Esse esquema é mostrado na Figura 4.3.

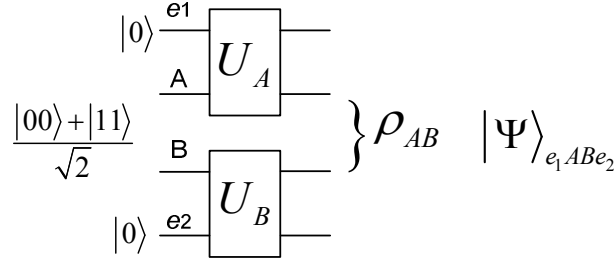


Figura 4.3 – Dois qubits entrelaçados enviados por um canal ruidoso.

Considerando $U_A = \exp(i\theta X \otimes X)$ e $U_B = \exp(i\phi X \otimes X)$, e o estado inicial do ambiente igual a $|0\rangle$ para ambos os canais, o estado total dado por $|\Psi\rangle_{e_1 A B e_2}$ e o estado bipartite ρ_{AB} podem ser calculados por:

$$|\Psi\rangle_{e_1 A B e_2} = (U_A \otimes U_B) |0\rangle_{e_1} \left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \right)_{AB} |0\rangle_{e_2}, \quad (4.2)$$

$$\rho_{AB} = \text{Tr}_{e_1 e_2} \left(|\Psi\rangle_{e_1 A B e_2} \right). \quad (4.3)$$

Na Figura 4.4 são sobrepostos os gráficos resultantes das medidas $\pi_{4G} \left(|\Psi\rangle_{e_1 A B e_2} \right)$ e da negatividade de ρ_{AB} , $N(\rho_{AB})$ versus os ângulos θ e ϕ que modelam os canais. O resultado da análise do gráfico implica que quanto maior o entrelaçamento compartilhado entre o par ρ_{AB} , menor o entrelaçamento em 4 vias do estado de quatro parte e vice-versa.

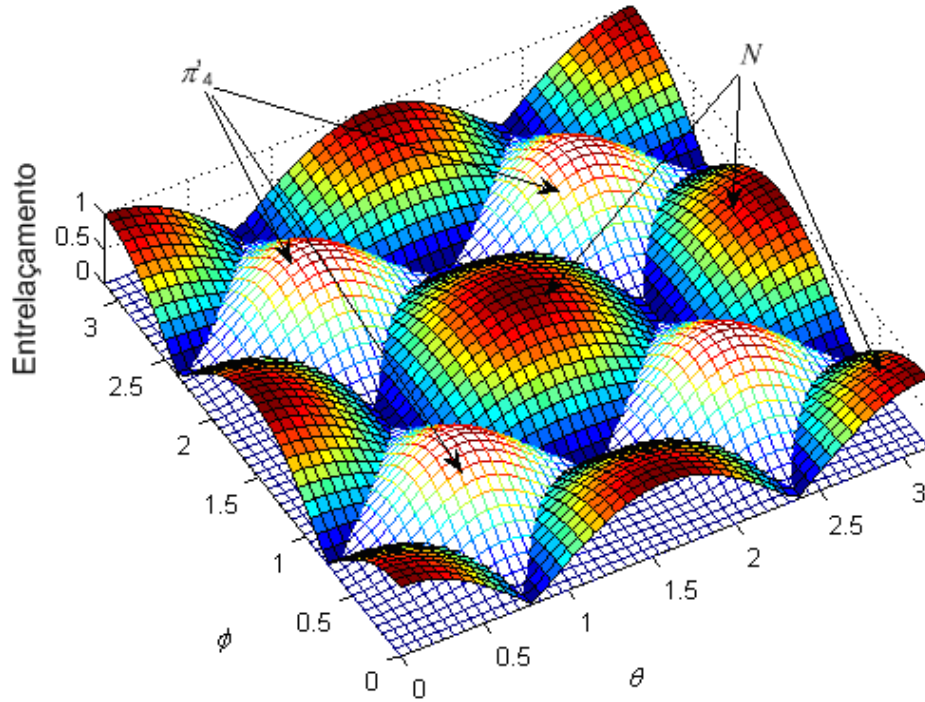


Figura 4.4 – π_{4G} e N_{AB} versus θ e ϕ .

4.3 Teleportação de estados da forma $\alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$

Considere agora o seguinte estado quântico maximamente entrelaçado ($\pi_{4G}=1$):

$$|\xi_0\rangle = \frac{1}{2} [|0001\rangle + |0010\rangle + |0100\rangle + |0111\rangle] \quad (4.4)$$

$$|\xi_1\rangle = \frac{1}{2} [|1000\rangle + |1011\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle] \quad (4.5)$$

$$|\chi^{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\xi_0\rangle + |\xi_1\rangle) \quad (4.6)$$

Esse estado é localmente equivalente a um grafo maximamente entrelaçado. Essa equivalência é dada por:

$$|\chi_{11}\rangle = (H_1 \otimes I_2 \otimes I_3 \otimes HZH_4) U_{12} U_{13} U_{14} \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)^{\otimes 4}. \quad (4.7)$$

Quando dizemos que o operador S estabiliza um estado $|\psi\rangle$, significa que $|\psi\rangle=S|\psi\rangle$. O estado $|\chi_{11}\rangle$ é estabilizado por:

$$S = X^a \otimes X^b \otimes X^c \otimes X^d. \quad (4.8)$$

Na equação (4.8) a, b, c e d formam uma string binária que deve possuir número par de 1's. Assim, $|\chi_{11}\rangle$ é robusto contra a inversão de quaisquer dois qubit ou a inversão de todos os qubits. O estado $|\chi_{11}\rangle$ também é localmente equivalente ao estado quântico $(|0000\rangle-|0111\rangle+|1000\rangle+|1111\rangle)/2$,

$$|\chi_{11}\rangle = (I_1 \otimes H_2 \otimes H_3 \otimes H_4) \frac{[|0000\rangle - |0111\rangle + |1000\rangle + |1111\rangle]}{2}. \quad (4.9)$$

Utilizando o circuito quântico da Figura 4.5, o estado $(|0000\rangle-|0111\rangle+|1000\rangle+|1111\rangle)/2$ pode ser empregado para teleportação quântica de estados de dois qubits na forma $\alpha|00\rangle+\beta|11\rangle$. Se o resultado da medição clássica for igual a 1, então a porta correspondente deve ser aplicada para correção dos qubits B e C .

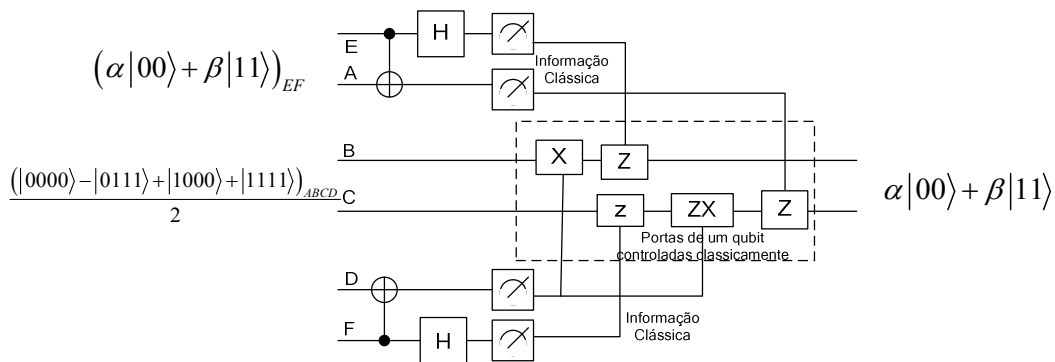


Figura 4.5 – Circuito quântico para teleportação do estado $\alpha|00\rangle+\beta|11\rangle$.

4.4 Criação e destruição do entrelaçamento

4.4.1 Caso 1

Seja o seguinte esquema apresentado na Figura 4.6, sendo I a porta identidade

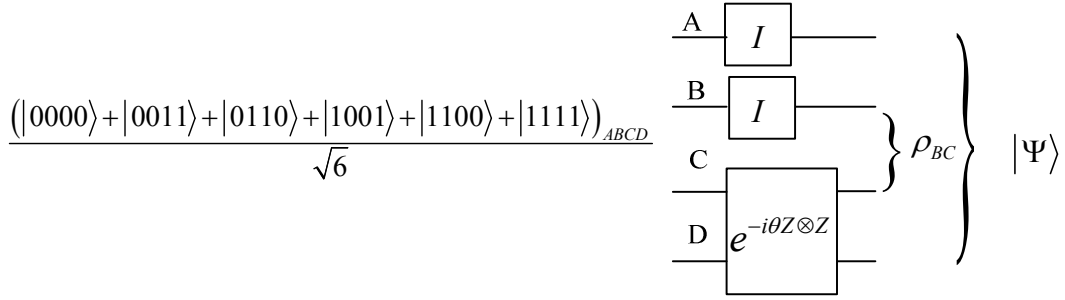


Figura 4.6 – Circuito Quântico para observação do aumento e da diminuição do entrelaçamento.

O estado de saída é

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= \left(I^{(2)} \otimes e^{-i\theta Z \otimes Z} \right) \frac{(|0000\rangle + |0011\rangle + |0110\rangle + |1001\rangle + |1100\rangle + |1111\rangle)_{ABCD}}{\sqrt{6}} \\
 &= \frac{(e^{-i\theta} |0000\rangle + e^{-i\theta} |0011\rangle + e^{i\theta} |0110\rangle + e^{i\theta} |1001\rangle + e^{-i\theta} |1100\rangle + e^{-i\theta} |1111\rangle)_{ABCD}}{\sqrt{6}}.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Tome em seguida o traço parcial sobre as partes AD

$$\rho_{BC} = Tr_{AD}(|\psi\rangle) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \cos(2\theta) \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 1/3 \cos(2\theta) & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

cuja concorrência é dada por

$$C(\rho_{BC}) = 2 \max \left\{ 0, \frac{1}{9} \cos^2(2\theta) - \frac{1}{36} \right\}. \tag{4.12}$$

Assim, ρ_{BC} é desentrelaçado para θ pertencente aos intervalos $[\pi/6, \pi/3]$ e $[2\pi/3, 5\pi/6]$. A Figura 4.7 mostra que quanto maior o entrelaçamento versus θ em quatro vias $\pi_4(|\psi\rangle)$ menor o entrelaçamento em duas vias dado por $N(\rho_{BC})$ e vice versa.

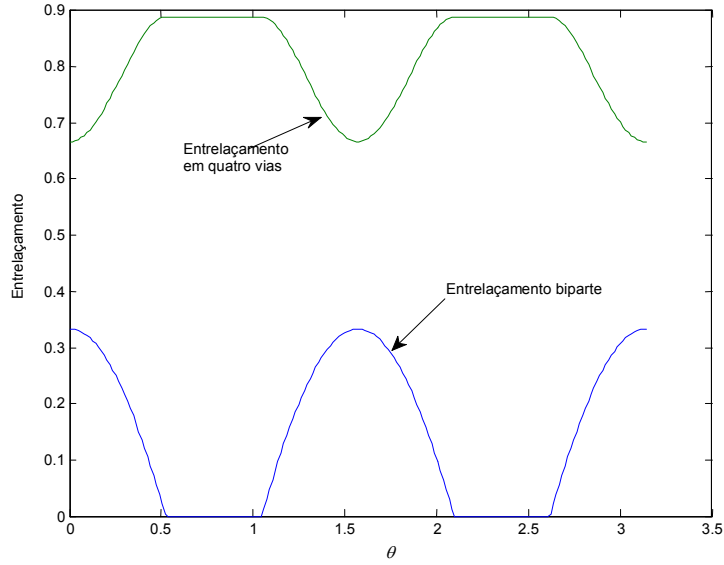


Figura 4.7 – Entrelaçamento em quatro vias e biparte apresentados em (4.10) e (4.11).

4.4.2 Caso 2

Seja o estado de quatro qubits

$$|\psi\rangle = \left(I^{(2)} \otimes e^{i\theta X \otimes X} \otimes I^{(2)} \right) \left[\frac{(|\Phi^+\rangle|\Phi^+\rangle + |\Phi^-\rangle|\Phi^-\rangle + |\Psi^+\rangle|\Psi^+\rangle + |\Psi^-\rangle|\Psi^-\rangle)_{ABCD}}{2} \right]. \quad (4.13)$$

Nele, tem-se $|\Phi^\pm\rangle = (|00\rangle \pm |11\rangle)/2^{1/2}$ e $|\Psi^\pm\rangle = (|01\rangle \pm |10\rangle)/2^{1/2}$. O estado $|\psi\rangle$ é gerado pelo seguinte circuito quântico:

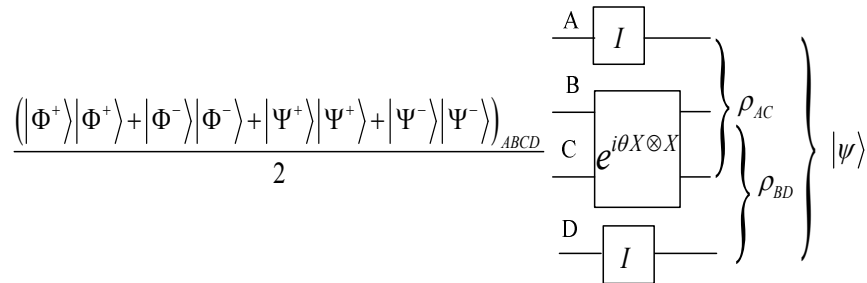


Figura 4.8 – Circuito para observação da variação do entrelaçamento

A saída final e os estados biparte individuais de $|\psi\rangle$ são

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos(\theta)|0000\rangle + i \sin(\theta)|0011\rangle + \cos(\theta)|0101\rangle + \\ i \sin(\theta)|0110\rangle + i \sin(\theta)|1001\rangle + \cos(\theta)|1010\rangle + \\ i \sin(\theta)|1100\rangle + \cos(\theta)|1111\rangle \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

$$\rho_{AB} = \rho_{AD} = \rho_{BC} = \rho_{CD} = I^{(4)}/4, \quad (4.15)$$

$$\rho_{AC} = \rho_{BD} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & 0 & 0 & \cos^2(\theta) \\ 0 & \sin^2(\theta) & \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) & \sin^2(\theta) & 0 \\ \cos^2(\theta) & 0 & 0 & \cos^2(\theta) \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Os autovalores de $\rho_{AC}^{T_A} (= \rho_{BD}^{T_B})$ são $[1/2 - \cos^2(\theta), -1/2 + \cos^2(\theta), 1/2, 1/2]$, dessa forma, ρ_{AC} e ρ_{BD} são desentrelaçados apenas quando $\theta = \pi/4$ ou $\theta = 3\pi/4$. A Figura 4.9 mostra $\pi_4(|\psi\rangle)$ e $N(\rho_{AC}) (= N(\rho_{BD}))$, versus θ .

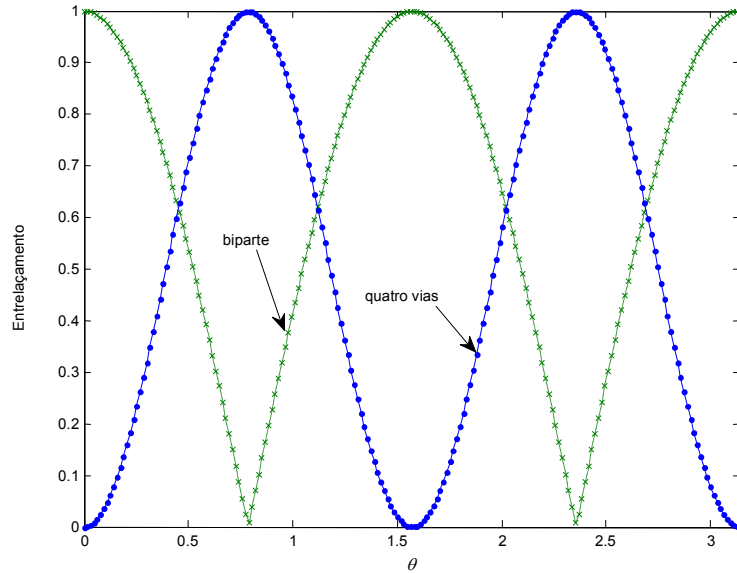


Figura 4.9 – Entrelaçamento em quatro vias de $|\psi\rangle$ e entrelaçamentos biparte ($N(\rho_{AC})=N(\rho_{BD})$) versus θ .

Embora uma porta de dois qubits seja aplicada aos qubits B e C , estes não compartilham entrelaçamento e ρ_{AC} é sempre separável. Dessa forma, o entrelaçamento em quatro vias varia de forma suave, enquanto o entrelaçamento biparte possui um ponto de descontinuidade na derivada quando o valor do entrelaçamento chega a zero.

Assim, pela Figura 4.9 é possível ver que o estado

$$\left| \psi \left(\frac{\pi}{4} \right) \right\rangle = \frac{1}{2} \left[e^{-i\frac{\pi}{4}} |0000\rangle + e^{i\frac{\pi}{4}} |0101\rangle + e^{i\frac{\pi}{4}} |1010\rangle + e^{-i\frac{\pi}{4}} |1111\rangle \right] \quad (4.17)$$

obtido de (4.14) com $\theta=\pi/4$, é também um estado maximamente entrelaçado de quatro qubits, tendo entrelaçamento biparte igual a zero.

4.5 Conclusão

Primeiramente foi apresentada a teleportação de um circuito quântico dois qubits composto por uma swap, uma porta Z e uma porta Z controlada utilizando um estado com entrelaçamento em quatro vias máximo.

Em seguida, foi mostrada a variação no entrelaçamento de um estado biparte maximamente entrelaçado que interage com o meio após enviados por canais modelados pelas operações unitárias $U_A=\exp(i\theta X\otimes X)$ e $U_B=\exp(i\phi X\otimes X)$. Como esperado, quando o entrelaçamento total (π_{4G}) é máximo, o entrelaçamento bipartite é mínimo.

Foi mostrado ainda que o estado $|\chi_{11}\rangle$ da equação (4.7) é localmente equivalente ao estado grafo dado por $U_{12}U_{13}U_{14}[(|0\rangle+|1\rangle)/2^{1/2}]^{\otimes 4}$ e ao estado $(|0000\rangle+|0111\rangle+|1000\rangle+|1111\rangle)/2$, que é utilizado na teleportação do estado bipartite $\alpha|00\rangle+\beta|11\rangle$, utilizando o esquema da Figura 4.5.

Finalmente foram apresentados dois casos nos quais o entrelaçamento em quatro vias decresce a medida que o entrelaçamento biparte aumenta.

Capítulo 5 Extensibilidade da medida π_4

5.1 Introdução

Todo o material desenvolvido neste capítulo é uma contribuição original deste trabalho. Os exemplos e explicações desenvolvidos aqui tentam esclarecer sobre as diversas características existentes no entrelaçamento de estados com 3 a 6 qubits.

5.2 A medida π_3 e o entrelaçamento triparte

Seja aqui introduzida uma nova notação para representar particionamentos e partições completamente entrelaçadas. Seja o estado puro ρ com 4 qubits no qual o primeiro qubit não está entrelaçado com nenhum outro e os qubits dois, três e quatro estão completamente entrelaçados, tal estado pode ser representado como $\rho = \rho_A \otimes \rho_{BCD}$ desde que se defina que ρ_{BCD} está completamente entrelaçado, ou apenas $\rho = a \otimes \underline{bcd}$. O uso dessa notação diminui a quantidade de símbolos utilizados melhorando a visibilidade e principalmente indica se as partições tomadas estão ou não completamente entrelaçadas. Sublinhar as partições será um recurso utilizado então todas as vezes que deseja-se expressar que tal partição é obrigatoriamente inseparável, não sublinhar implica que os qubits em questão podem estar ou não entrelaçados. Como exemplo, sejam os seguintes estados $\rho_1 = abc$, $\rho_2 = \underline{abc}$, $\rho_3 = \underline{abc}$, $\rho_4 = a \otimes bc$. Em ρ_1 não se pode aferir qualquer propriedade sobre os qubits a , b e c . Em ρ_2 tem-se um estado com entrelaçamento em 3 vias. Em ρ_3 tem-se que b e c estão entrelaçados, porém não é definido se a também está entrelaçado com eles. Em ρ_4 tem-se que a é separável, mas não se sabe sobre a relação entre b e c .

Dado um estado puro $\rho = abc$, é importante interpretar corretamente o que significam termos como $N_{a_{bc}}$ ou N_{ab} .

Sendo $\rho = abc$, o valor de $N_{a_{bc}}$ mensura se o qubit a está entrelaçado com qualquer outro qubit ou partição. Se $N_{a_{bc}} = 0$, então a não está entrelaçado com nenhum outro qubit, ou seja, $\rho = a \otimes bc$. Se $N_{a_{bc}} > 0$, então a faz parte de uma partição que contém

entrelaçamento, como, por exemplo, nos casos $\rho = \underline{ab} \otimes c$, $\rho = \underline{ac} \otimes b$ ou $\rho = \underline{abc}$. Seja um estado GHZ genérico dado por $|\psi\rangle_n^{GHZ} = (1/\sqrt{2})(|0\rangle^{\otimes n} + |1\rangle^{\otimes n})$. Um exemplo para o qual encontra-se $N_{a_{bc}}=1$ é quando o qubit a faz parte de uma partição GHZ, para qualquer número de qubits nessa partição. Alguns exemplo são $\rho^1 = \rho_{ab}^{GHZ} \otimes \rho_c$, sendo que ρ_{ab}^{GHZ} representa o estado GHZ de dois qubits, ou ainda $\rho^2 = \rho_{abc}^{GHZ}$. Em ambos os casos o qubit a faz parte de uma partição com entrelaçamento máximo, o que torna $N_{a_{bc}}=1$. No caso de ρ^1 , tem-se também que $N_{a_{bc}}=N_{a_b}$, já que a e c não compartilham entrelaçamento. De forma geral, dado um estado puro de k qubits, $\rho = \underline{ab\dots k}$, $N_{x\dots k} = 2(\det(\rho_x))^{1/2}$. Tal resultado determina se x é ou não parte de uma partição entrelaçada, e o quão dependente, ou seja entrelaçado, ele está a ela.

Já a análise de N_{ab} avalia o entrelaçamento biparte compartilhado entre os qubits a e b . Se a e b formam uma partição pura de apenas duas partes, ou seja, se o estado puro é $\rho = \underline{ab}$, N_{ab} também mensura se existe ou não entrelaçamento entre a e b , ou seja, se $N_{ab}=0$, então não existe entrelaçamento entre eles. Entretanto, se $N_{ab}>0$, então existe entrelaçamento entre a e b . Em outros casos, entretanto, a e b podem estar entrelaçados mesmo quando o resultado $N_{ab}=0$ é obtido. Basta que eles compartilhem um entrelaçamento de um grau mais alto que biparte. Por exemplo, seja o estado $\rho = \rho_{abc}^{GHZ}$, neste caso a , b e c possuem alto entrelaçamento em três vias com $\pi_3(\rho)=1$, porém todos os entrelaçamentos bipartes são iguais a zero, $N_{ab}=N_{bc}=N_{ac}=0$. Foi encontrado em todas as simulações desse trabalho uma relação que indica que quanto maior é o entrelaçamento em um grau superior, menor ele o é nos graus inferiores. Quanto maior o entrelaçamento em três vias, menor o entrelaçamento em duas vias. As mesmas suposições são válidas para graus de entrelaçamento de quatro, cinco e seis qubits.

Quando é tomada a negatividade de dois qubits na forma N_{xy} , a ordem dos qubits não altera o valor da negatividade de forma que $N_{xy}=N_{yx}$ mede o entrelaçamento em duas vias entre os qubits x e y . Quando é tomada a Negatividade de um qubit em relação a uma partição da forma $N_{x_{yz}}$ ou $N_{x(yz)}$, a ordem com que são escritos os qubits y e z não altera o valor da medida de forma que $N_{x_{yz}}=N_{x_{zy}}$.

Para compreender o funcionamento das medidas desenvolvidas baseadas na desigualdade CKW seja, novamente, a medida π_3 :

$$\begin{aligned}
\pi_3 &= \frac{1}{3}(\pi_A + \pi_B + \pi_C), \\
\pi_A &= N_{A(BC)}^2 - N_{AB}^2 - N_{AC}^2, \\
\pi_B &= N_{B(AC)}^2 - N_{BA}^2 - N_{BC}^2, \\
\pi_C &= N_{C(AB)}^2 - N_{CA}^2 - N_{CB}^2.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

O objetivo desta parte é mostrar a relação direta entre o resultado da medida π_3 e o entrelaçamento em 3 vias. Ou seja, todas as vezes que o resultado da medida for positiva, o estado possui entrelaçamento em três vias e vice versa. Para esclarecer melhor, seja o exemplo da medida tangle-3[CKW00] utilizada largamente na literatura. Tangle-3 mensura positivamente apenas estados com entrelaçamento em 3 vias, ou seja, não é possível que um estado apenas com entrelaçamento em 2 vias seja mensurado positivamente. Porém não mensura positivamente todos os estados com entrelaçamento em 3 vias. Existem estados, como por exemplo o estado W e outros da classe do estado W , que mesmo sendo inseparáveis são mensurados como contendo entrelaçamento tangle-3 igual a zero. Este fato leva a uma falsa interpretação de que W não possua entrelaçamento genuíno quando ele o possui. Isso leva a conclusão de que tangle-3 mensura positivamente apenas estados com entrelaçamento em 3 vias, mas não todos eles. Por outro lado, π_3 mensura positivamente, ou seja, detecta, todos os estados com entrelaçamento em 3 vias e apenas estes.

Inicialmente é necessário mostrar que se o estado não possui entrelaçamento em três vias, o resultado da medida π_3 é zero. Se $\rho = \underline{abc}$, então $\pi_3(\rho) > 0$. Outras possibilidades de configuração para ρ são: $\rho^1 = a \otimes b \otimes c$, $\rho^2 = a \otimes \underline{bc}$, $\rho^3 = b \otimes \underline{ac}$ e $\rho^4 = c \otimes \underline{ab}$. Em todos estes casos tem-se $\pi_3(\rho) = 0$. Os casos ρ^2 , ρ^3 e ρ^4 são equivalentes pois representam o produto tensorial de um qubit com uma partição de dois qubits entrelaçada. Dessa forma então será avaliado apenas uma dessas configurações já que a medida π_3 é invariante sob permutação de qubits. Para ρ^1 tem-se que todas as negatividades bipartes N_{xy} e as todas negatividades individuais $N_{x,yz}$ são zero, logo o valor de $\pi_3(\rho^1) = 0$. Para ρ^2 , a seguinte tabela tem por objetivo mostrar todas as negatividades na mesma ordem em que estas aparecem na equação (5.1) independente dos possíveis valores numéricos que o estado poderia possuir:

Tabela 5.1 – Negatividades do estado $\rho=a\otimes bc$.

$\pi_a=0$	$N_{a(bc)}=0$	$N_{ab}=0$	$N_{ac}=0$
$\pi_b=0$	$N_{b(ac)}=N_{bc}$	$N_{ba}=0$	$N_{bc}=N_{b(ac)}$
$\pi_c=0$	$N_{c(ab)}=N_{ca}$	$N_{ca}=0$	$N_{cb}=N_{c(ab)}$

Assim, fica claro que $\pi_3(\rho^2)=0$, o que também é válido para ρ^3 e ρ^4 .

É necessário também mostrar que todo estado entrelaçado em 3 vias é mensurado positivamente. Essa afirmação é análoga a mostrar que todo estado cujo entrelaçamento dá zero é separável. Se toda medição nula implica em um estado separável e vice versa, então toda medição positiva implica em um estado completamente entrelaçado. Para ter $\pi_3=0$, π_A , π_B e π_C precisam ser também zero, já que $\pi_3=(\pi_A+\pi_B+\pi_C)/3$, e que todos os π são maiores ou iguais a zero. Se todos os π são zero, dá-se então que a desigualdade CKW para todos os qubits se torna igualdade. Para o qubit A tem-se a seguinte sentença:

$$N_{A(BC)}^2 = N_{AB}^2 + N_{AC}^2. \quad (5.2)$$

Sendo a negatividade sempre é um valor positivo entre 0 e 1, sejam avaliados dois casos: o primeiro com $N_{A(BC)}^2=0$ e o segundo com $N_{A(BC)}^2>0$.

- No caso em que $N_{A(BC)}^2=0$, também tem-se $N_{AB}^2 = N_{AC}^2=0$, o que leva a $\pi_A=0$. Já que A não compartilha entrelaçamento com B e C , então independente de haver ou não entrelaçamento entre B e C , ter-se-á também π_B e π_C iguais a zero já que $N_{B(AC)}=N_{C(AB)}=N_{BC}=N_{CB}$, tal como no exemplo da Tabela 5.1.
- No caso em que $N_{A(BC)}^2>0$, acontece com a negatividade algo que não ocorre com a concorrência de Wootters. Na concorrência poder-se-ia ter em alguns casos $C_{A(BC)}$, C_{AB} e C_{AC} positivos e mesmo assim uma sentença de igualdade da forma $C_{A(BC)}^2=C_{AB}^2+C_{AC}^2$. Isso faz com que o estado W possua entrelaçamento τ_3 igual a 0. Com a Negatividade isso não acontece. Para que haja igualdade na sentença $N_{A(BC)}^2=N_{AB}^2+N_{AC}^2$ é necessário ter N_{AB} ou N_{AC} iguais a zero, ou ambos. Se pelo menos um deles é zero, então tem-se $\pi_A=0$, e consequentemente $\pi_3=0$.

A mesma análise realizada para o qubit A pode ser utilizada para os qubits B e C .

Outra forma de mostrar a abrangência do π_3 é a seguinte: Existem apenas duas classes distintas de entrelaçamento genuíno para 3 qubits, o que significa que, mesmo estatisticamente, constituintes de uma classe não podem ser convertidos em

constituintes da outra por LOCC [DVC00]. Qualquer estado entrelaçado em três vias precisa conter pelo menos um dos dois tipos de entrelaçamento. Se π_3 é capaz de detectar estados de ambas as classes, também será capaz de detectar estados que são uma composição de ambas.

5.3 A medida π_4 e o entrelaçamento em quatro vias

Seja novamente a medida π_4 dada por

$$\begin{aligned}\pi_4 &= (\pi_A \cdot \pi_B \cdot \pi_C \cdot \pi_D)^{1/4}, \\ \pi_A &= N_{A_BCD}^2 - N_{AB}^2 - N_{AC}^2 - N_{AD}^2, \\ \pi_B &= N_{B_ACD}^2 - N_{AB}^2 - N_{BC}^2 - N_{BD}^2, \\ \pi_C &= N_{C_ABD}^2 - N_{AC}^2 - N_{BC}^2 - N_{CD}^2, \\ \pi_D &= N_{D_ABC}^2 - N_{AD}^2 - N_{BD}^2 - N_{CD}^2.\end{aligned}\tag{5.3}$$

O objetivo dessa seção é explicar como a medida π_4 mensura positivamente apenas estados com entrelaçamento em 4 vias.

A análise do estado ρ puro de quatro qubits a seguir está baseada no primeiro qubit do estado, entretanto, sendo a medida π_4 invariante sob permutação de qubits, essa análise é extensível para todos os qubits do estado. Seja $\rho=abcd$ um estado puro de quatro qubits escrito segundo a notação apresentada no começo deste capítulo. Se ρ é de alguma forma separável, se enquadra em algum dos três seguintes casos:

- I) $\rho=a \otimes b \otimes c \otimes d$ para estados sem nenhum tipo de entrelaçamento.
- II) $\rho=\underline{ab} \otimes cd$ para estados entrelaçados, mas com entrelaçamento no máximo biparte.
- III) $\rho=\underline{abc} \otimes d$ para estados com entrelaçamento triparte.

No caso I tem-se que $\pi_4(a \otimes b \otimes c \otimes d)$ é equivalente ao caso $\pi_3(a \otimes b \otimes c)$, com todas as negatividades em questão nulas. No caso II, a medida $\pi_4(\underline{ab} \otimes cd)$ possui a mesma análise do que foi apresentado para $\pi_3(\underline{ab} \otimes c)$, com $N_{A_BCD} = N_{AB}$ e $N_{AC}=N_{AD} = 0$, gerando o termo $\pi_{4A}=0$ e conseqüentemente $\pi_{4B} = \pi_{4C} = \pi_{4D} = 0$. O caso III, $\pi_4(\underline{abc} \otimes d)$ é abordado a seguir com mais detalhes.

O cálculo de π_{3A} é dado pela sentença $\pi_{3A} = N_{A_BC}^2 - N_{AB}^2 - N_{AC}^2$, enquanto que $\pi_{4A} = N_{A_BCD}^2 - N_{AB}^2 - N_{AC}^2 - N_{AD}^2$. A diferença do π_{4A} para o π_{3A} se dá no uso termo $N_{A_BCD}^2$ no lugar de $N_{A_BC}^2$ e no acréscimo do termo referente ao entrelaçamento biparte N_{AD}^2 . Acontece que no caso $\rho = \underline{abc} \otimes d$, como a não compartilha nenhum tipo de entrelaçamento com d , $N_{A_BCD}^2 = N_{A_BC}^2$ e $N_{AD}^2 = 0$, tornando $\pi_{3A} = \pi_{4A}$. Tal resultado é claramente válido para os qubits b e c , sendo $\pi_{3B} = \pi_{4B}$ e $\pi_{3C} = \pi_{4C}$. Entretanto, tem-se $\pi_{4D} = 0$, já que para d todas as negatividades envolvidas são nulas. Seja estabelecida então a seguinte relação: sempre que um qubit x possui entrelaçamento em pelo menos 3 vias, tem-se $\pi_{4x} > 0$. E sempre que um qubit qualquer x possuir entrelaçamento no máximo duas vias ter-se-á $\pi_{4x} = 0$. Sendo π_4 a média geométrica dos π 's individuais, sempre que existir um qubit x com $\pi_{4x} = 0$, o resultado do entrelaçamento será $\pi_4 = 0$, garantindo que sejam mensurados positivamente apenas estados de quatro qubits genuinamente entrelaçados.

Sendo esse resultado extensível para qualquer combinação entre os qubits, é demonstrado assim que a medida apenas mensura positivamente estados completamente entrelaçados para quatro qubits.

5.4 Medida π_5 , uma extensão de π_4 para cinco qubits

O método para o cálculo de entrelaçamento apresentado em π_4 é extensível trivialmente para calcular o entrelaçamento de estados puros com cinco qubits. Todas as demonstrações e provas realizados para π_4 são inteiramente válidos em π_5 . Seja então a medida de entrelaçamento para cinco qubits π_5 dada por:

$$\pi_5 = (\pi_A \cdot \pi_B \cdot \pi_C \cdot \pi_D \cdot \pi_E)^{1/5}, \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \pi_A &= N_{A_BCDE}^2 - N_{AB}^2 - N_{AC}^2 - N_{AD}^2 - N_{AE}^2, \\ \pi_B &= N_{B_ACDE}^2 - N_{AB}^2 - N_{BC}^2 - N_{BD}^2 - N_{BE}^2, \\ \pi_C &= N_{C_ABDE}^2 - N_{AC}^2 - N_{BC}^2 - N_{CD}^2 - N_{CE}^2, \\ \pi_D &= N_{D_ABCE}^2 - N_{AD}^2 - N_{BD}^2 - N_{CD}^2 - N_{DE}^2, \\ \pi_E &= N_{E_ABCE}^2 - N_{AE}^2 - N_{BE}^2 - N_{CE}^2 - N_{DE}^2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Como a medida π_5 mantém as mesmas estruturas utilizadas em π_4 , ela acaba por também ter as mesmas características que fazem dela um monótono de entrelaçamento que mensura positivamente apenas estados com entrelaçamento genuíno.

$N_{A_{BCDE}}$ é invariante sob operações unitárias da mesma forma que $N_{A_{BCD}}$, como foi demonstrado em (3.16). Todas as negatividades biparte também são invariante sob operações unitárias. Como todos os termos utilizados em π_5 são invariantes, π_5 é invariante sob operações unitárias.

Para ser um monótono, é necessário mostrar que π_5 mensura entrelaçamento nulo sempre que o estado for completamente separável. Nessa seção é demonstrado que π_5 mensura entrelaçamento zero sempre que o estado não for completamente entrelaçado. É possível classificar todos os estados quânticos separáveis nas seguintes categorias genéricas: $\rho_1=a\otimes b\otimes c\otimes d\otimes e$, $\rho_2=\underline{ab}\otimes cd\otimes e$, $\rho_3=\underline{abc}\otimes de$ e $\rho_4=\underline{abcd}\otimes e$. Cada um dos casos é analisado a seguir.

- I) $\rho_1=a\otimes b\otimes c\otimes d\otimes e$. Em I estão todos os estados totalmente separáveis, que possuem claramente $\pi_5(\rho_1)=0$, pois todos os termos das negatividades são nulos.
- II) $\rho_2=\underline{ab}\otimes cd\otimes e$. No caso II estão todos os estados que possuem entrelaçamento, porém com no máximo entrelaçamento biparte. Para ρ conter algum tipo de entrelaçamento é necessário no mínimo uma partição entrelaçada representado em II pelo par ab . Como só pode existir entrelaçamento biparte, o máximo de partições entrelaçadas é duas, uma representada por ab e outra por cd . Como a medida é invariante sob permutação, os pares ab e cd representam quaisquer dois pares de qubits possíveis. Para os qubits a e b acontece como no caso $\pi_3(ab\otimes c)$, ou seja, ter-se-á π_{5A} e π_{5B} iguais a zero. O mesmo é válido para c e d . Tem-se então $\pi_5(\rho_2)=0$.
- III) $\rho_3=\underline{abc}\otimes de$. O caso III representa todos os estados que possuem entrelaçamento triparte, porém no máximo triparte, ou seja, ele pode conter entrelaçamento biparte, mas não pode conter entrelaçamento com quatro e cinco vias. Em III, os qubits a , b e c por possuírem entrelaçamento triparte possuem respectivamente π_{5A} , π_{5B} e π_{5C} maiores que zero. Os qubits d e e entretanto geram π_{5D} e π_{5E} iguais a zero. Ter-se-á então $\pi_5(\rho_3)=0$

- IV) $\rho_4 = \underline{abcd} \otimes e$. O caso IV representa todos os estados com entrelaçamento em quatro vias, mas no máximo em quatro vias. Acontece que entre os qubits a, b, c e d também pode existir entrelaçamento biparte e triparte. Porém quanto maior o entrelaçamento em 4 vias, menor o entrelaçamento biparte e triparte. Calculando $\pi_4(abcd)$, chega-se a conclusão que $\pi_{4A} = \pi_{5A}$, $\pi_{4B} = \pi_{5B}$, $\pi_{4C} = \pi_{5C}$ e $\pi_{4D} = \pi_{5D}$. Como o qubit e está isolado, o valor de π_{5E} é zero, o que torna $\pi_5(\rho_4) = 0$.

Como colocado, todos os casos que não são completamente entrelaçados geram um resultado de entrelaçamento nulo. Assim, todos os valores positivos implicam em estados completamente entrelaçados. Por último, mostrar que não cresce sob LOCC é uma extensão trivial da prova apresentada nas equações (3.18) à (3.20).

5.5 Medida π_6 , uma extensão de π_4 para seis qubits

Enquanto a extensão da medida entrelaçamento geométrico para 5 qubits foi bem sucedida, ou seja, também é um monótono de entrelaçamento com a característica de mensurar apenas estados completamente entrelaçados. A extensão da medida para 6 qubits da forma usual contém uma falha, desde que existe um caso especial no qual estados separáveis são mensurados positivamente. Seja a medida π_6 para estados puros definida como:

$$\begin{aligned} \pi_6 &= \sqrt[6]{\pi_A \pi_B \pi_C \pi_D \pi_E \pi_F}, \\ \pi_A &= N_{A_{BCDEF}}^2 - N_{AB}^2 - N_{AC}^2 - N_{AD}^2 - N_{AE}^2 - N_{AF}^2, \\ &\vdots \\ \pi_F &= N_{F_{ABCDE}}^2 - N_{AF}^2 - N_{BF}^2 - N_{CF}^2 - N_{DF}^2 - N_{EF}^2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Faça-se o mesmo raciocínio utilizado para 4 e 5 qubits: Seja o estado puro $\rho = abcdef$, se ρ é de alguma forma separável, ele se enquadra em um dos seguintes casos:

- I) $\rho_1 = a \otimes b \otimes c \otimes d \otimes e \otimes f$ para casos em que não há entrelaçamento, assim $\pi_6(\rho_1) = 0$.
- II) $\rho_2 = \underline{ab} \otimes cd \otimes ef$ para casos em que há entrelaçamento, porém no máximo biparte. Note que pode-se ter no mínimo uma e no máximo três partições de

dois qubits. Como não há nenhum qubit numa partição com entrelaçamento triparte, então todos os π_{5X} correspondentes são zero gerando $\pi_6(\rho_2)=0$

- III) $\rho_3=\underline{abc}\otimes def$ para os casos em que há entrelaçamento triparte, porém não superior a este. Como a , b e c fazem parte de uma partição com entrelaçamento triparte então seus respectivos π_6 s são positivos. Se a partição def também for completamente entrelaçada, então todos os π_6 s do estado serão positivos gerando $\pi_6(\rho_3)>0$.
- IV) $\rho_4=\underline{abcd}\otimes ef$ para os caso em que há entrelaçamento em quatro vias, porém não maior do que esta. Como os qubits e e f possuem $\pi_{6E}=\pi_{6F}=0$, então $\pi_6(\rho_4)=0$.
- V) $\rho_4=\underline{abcde}\otimes f$ para casos em que existe entrelaçamento em 5 vias, porém não maior do que esta. Como $\pi_{6F}=0$, então $\pi_6(\rho_5)=0$.

Dessa forma, nos casos em que o estado ρ for composto pelo produto tensorial de dois estados de três qubits completamente entrelaçados abc e def , $\pi_6(\rho)$ será mensurado positivamente, falhando na proposta de detectar apenas estados completamente entrelaçados.

5.6 Conclusão

Como conclusão, foi desenvolvida uma medida de entrelaçamento quântica para 4 e para 5 qubits que mensura apenas estados completamente entrelaçados e a demonstração de que essa medida não pode ser extensível trivialmente para mais de 5 qubits. Entretanto π_6 também é um monótono de entrelaçamento, mesmo que não mensure apenas estados com entrelaçamento genuíno.

Capítulo 6 Em busca de uma medida de entrelaçamento genuíno para 6 qubits

Com objetivo de resolver as limitações da medida π_6 em detectar apenas estados de 6 qubits genuinamente entrelaçados, foi proposto em [OOR11] a seguinte medida, denominada λ_6 , que é um ajuste da medida π_6 para tratar os casos de duas partições com entrelaçamento triparte.

6.1 Uma medida apenas para estados genuinamente entrelaçados

A idéia inicial é que nos casos de duas partições com entrelaçamento triparte da forma $\rho=abc\otimes def$, como apresentado na seção 5.5 , ter-se-á as seguintes relações entre a medida π_{6X} do estado e a medida π_{3X} da partição entrelaçada:

$$\begin{aligned}\pi_{6A}(abcdef) &= \pi_{3A}(abc), \\ \pi_{6B}(abcdef) &= \pi_{3B}(abc), \\ \pi_{6C}(abcdef) &= \pi_{3C}(abc), \\ \pi_{6D}(abcdef) &= \pi_{3D}(def), \\ \pi_{6E}(abcdef) &= \pi_{3E}(def), \\ \pi_{6F}(abcdef) &= \pi_{3F}(def).\end{aligned}\tag{6.1}$$

Sendo π_6 e π_3 comprovadamente monótonos de entrelaçamento, é esperável que uma medida que calcula a diferença entre π_6 e π_3 também o seja. Como é comprovado em [OOR11]. Considerando as igualdades apresentadas, todas as vezes que o entrelaçamento triparte do qubit X relacionado à sua partição for igual ao entrelaçamento π_6 do qubit X então não haverá entrelaçamento genuíno em 6 vias, mas apenas o entrelaçamento triparte que também é detectado pelo cálculo de π_{6X} . Uma

forma de reescrever a medida com o objetivo de que a partir de então, não mensure mais os casos $\rho=abc\otimes def$ positivamente é:

$$\begin{aligned}
\lambda_6 &= \sqrt[6]{\lambda_A \lambda_B \lambda_C \lambda_D \lambda_E \lambda_F}, \\
\lambda_A &= \pi_{6A} - \pi_{3A}(abc), \\
\lambda_B &= \pi_{6B} - \pi_{3B}(abc), \\
\lambda_C &= \pi_{6C} - \pi_{3C}(abc), \\
\lambda_D &= \pi_{6D} - \pi_{3D}(def), \\
\lambda_E &= \pi_{6E} - \pi_{3E}(def), \\
\lambda_F &= \pi_{6F} - \pi_{3F}(abc).
\end{aligned} \tag{6.2}$$

A introdução da letra λ para uma nova medida tem por objetivo associar a letra π apenas às medidas que são extensão direta do π_3 , utilizando a expansão trivial dos termos segundo a desigualdade CKW, realizando a média geométrica entre os respectivos π 's.

Desenvolvendo os termos da equação (6.2) tem-se:

$$\begin{aligned}
\lambda_A &= N_{A_BCDEF}^2 - N_{AB}^2 - N_{AC}^2 - N_{AD}^2 - N_{AE}^2 - N_{AF}^2 - (N_{A_BC}^2 - N_{AB}^2 - N_{AC}^2), \\
\lambda_B &= N_{B_ACDEF}^2 - N_{BA}^2 - N_{BC}^2 - N_{BD}^2 - N_{BE}^2 - N_{BF}^2 - (N_{B_AC}^2 - N_{BA}^2 - N_{BC}^2), \\
\lambda_C &= N_{C_ABDEF}^2 - N_{CA}^2 - N_{CB}^2 - N_{CD}^2 - N_{CE}^2 - N_{CF}^2 - (N_{C_AB}^2 - N_{CA}^2 - N_{CB}^2), \\
\lambda_D &= N_{D_ABCEF}^2 - N_{DA}^2 - N_{DB}^2 - N_{DC}^2 - N_{DE}^2 - N_{DF}^2 - (N_{D_EF}^2 - N_{DE}^2 - N_{DF}^2), \\
\lambda_E &= N_{E_ABCDF}^2 - N_{EA}^2 - N_{EB}^2 - N_{EC}^2 - N_{ED}^2 - N_{EF}^2 - (N_{E_DF}^2 - N_{ED}^2 - N_{EF}^2), \\
\lambda_F &= N_{F_ABCDE}^2 - N_{FA}^2 - N_{FB}^2 - N_{FC}^2 - N_{FD}^2 - N_{FE}^2 - (N_{F_DE}^2 - N_{FD}^2 - N_{FE}^2).
\end{aligned} \tag{6.3}$$

E em sua forma final:

$$\begin{aligned}
\gamma_A &= N_{A_BCDEF}^2 - N_{A_BC}^2 - N_{AD}^2 - N_{AE}^2 - N_{AF}^2, \\
\gamma_B &= N_{B_ACDEF}^2 - N_{B_AC}^2 - N_{BD}^2 - N_{BE}^2 - N_{BF}^2, \\
\gamma_C &= N_{C_ABDEF}^2 - N_{C_AB}^2 - N_{CD}^2 - N_{CE}^2 - N_{CF}^2, \\
\gamma_D &= N_{D_ABCEF}^2 - N_{D_EF}^2 - N_{AD}^2 - N_{BD}^2 - N_{CD}^2, \\
\gamma_E &= N_{E_ABCDF}^2 - N_{E_DF}^2 - N_{AE}^2 - N_{BE}^2 - N_{CE}^2, \\
\gamma_F &= N_{F_ABCDE}^2 - N_{F_DE}^2 - N_{AF}^2 - N_{BF}^2 - N_{CF}^2.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

A equação (6.4) e a prova de que λ_6 é um monótono de entrelaçamento estão em [OOR11]. Toda a interpretação da medida tal qual é realizada nessa seção e as

adaptações para fazê-la mensurar apenas estados com entrelaçamento genuíno são uma contribuição deste trabalho.

A medida λ_6 se mostrou em um primeiro momento aparentemente bem sucedida no intento de detectar apenas estados genuinamente entrelaçados de 6 qubits. Ao fazer a análise das diversas configurações de entrelaçamento variando-se o número máximo de vias de entrelaçamento tem-se:

- I) $\rho_1 = a \otimes b \otimes c \otimes d \otimes e \otimes f$. Todas as negatividades são nulas gerando $\lambda_6(\rho_1) = 0$.
- II) $\rho_2 = \underline{ab} \otimes cd \otimes ef$. Para o qubit a tem-se $N_{A_{BCDEF}} = N_{A_{BC}}$ e todas as outras negatividades biparte iguais a zero gerando $\pi_{6A} = 0$, o mesmo é válido para os outros qubits gerando $\lambda_6(\rho_2) = 0$.
- III) $\rho_3 = \underline{abc} \otimes def$. Tem-se $\pi_{6A} = 0$ pelo mesmo motivo de II e conseqüentemente $\lambda_6(\rho_3) = 0$.
- IV) $\rho_4 = \underline{abcd} \otimes ef$. O resultado de λ_{6E} e λ_{6F} é zero pelo motivo apresentado em II gerando $\lambda_6(\rho_4) = 0$.
- V) $\rho_5 = \underline{abcde} \otimes f$. O resultado de λ_{6F} é zero pelo motivo apresentado em I gerando $\lambda_6(\rho_5) = 0$.

A análise acima falha porque esta só pode ser utilizada quando a medida é invariante sob permutação de qubit, tal qual o são π_4 , π_5 e π_6 . A medida λ_6 mensura o entrelaçamento dos 3 primeiros qubits em relação aos 3 últimos e por isso só é invariante quando os qubits são permutados nos seus respectivos grupos, a , b e c entre si e d , e e f entre si. Assim $\lambda_6(abc \otimes def) = \lambda_6(bca \otimes edf) = \lambda_6(cba \otimes fed)$, entre outros. Entretanto, ao permutar qubits de um grupo para o outro tem-se resultados completamente diferentes como por exemplo $\lambda_6(abc \otimes def) \neq \lambda_6(abd \otimes cef) \neq \lambda_6(acd \otimes bef)$.

Esse comportamento não é errado do ponto de vista teórico, pois na verdade leva a um questionamento do qual ainda não se tem uma definição na literatura: se o entrelaçamento em estados de múltiplas partes é ou não uma propriedade global do estado. Sejam colocados então dois cenários fictícios para ajudar a diferenciar ambos os casos. No primeiro cenário tem-se seis qubits em um circuito quântico que podem ser permutados livremente através do uso de portas SWAP. Neste caso não faz sentido afirmar que o entrelaçamento do estado depende da ordem dos qubits. Em um segundo cenário tem-se que um estado quântico de seis qubits é compartilhado entre Alice e Bob que desejam realizar uma operação de teleportação. Sendo o entrelaçamento um recurso

quântico, dependendo de quais qubits ficam com Alice e quais ficam com Bob, ter-se-á obviamente mais ou menos entrelaçamento disponível para operação. De forma geral, sempre que o entrelaçamento é avaliado de forma operacional, ou seja, como recurso computacional para efetuar uma determinada operação, a ordem dos qubits afeta a quantidade de entrelaçamento. Assim, mesmo estados com entrelaçamento genuíno podem não ter utilidade para executar tarefas específicas, justificando em parte os resultados obtidos por λ_6 , sendo ela um monótono de entrelaçamento que mesmo não mensurando apenas entrelaçamento genuíno possui forte sentido operacional.

Seguindo a linha do que foi desenvolvido em π_4 e π_5 , optou-se por buscar uma solução para λ_6 que o fizesse mensurar o entrelaçamento como uma propriedade global do estado, ou seja, independente da ordem dos qubits no estado. Para isso ele precisa ser modificado de forma que se torne invariante sob permutação de qubits.

Como medida para detectar apenas entrelaçamento genuíno λ_6 é ineficiente já que permite que estados separáveis sejam quantificados positivamente. Um exemplo de falha na medida é o estado $\rho=abd\otimes cef$. Neste caso, tem-se que os termos $N_{A_{BCDEF}}$, $N_{A_{BC}}$ e N_{AD} são positivos, o que implica que λ_{6A} pode ser positivo ou nulo. A mesma colocação é válida para os outros qubits de ρ , gerando $\lambda_6(\rho)\geq 0$.

Uma forma de fazer λ_6 invariante sob permutação de qubits e assim mensurar o entrelaçamento como propriedade global do estado é calcular λ_6 para todas as permutações de qubits e calcular um único valor a partir dos valores de entrelaçamento dos respectivos estados permutados. Como λ_6 possui um forte sentido operacional para avaliar o nível de entrelaçamento, procurar a permutação que gera o maior valor de λ_6 foi considerada uma boa forma de medir o entrelaçamento global do estado.

Como colocado anteriormente, apenas permutações dentro dos grupos $\{A, B, C\}$ e $\{D, E, F\}$ não mudam o valor do entrelaçamento medido por λ_6 . Dessa forma, existem dez diferentes permutações que podem gerar diferentes valores de λ_6 , que correspondem a dez formas de dividir seis elementos em dois conjuntos. Existem inúmeras formas de gerar estas dez duplas de conjuntos, uma forma possível é através dos seguintes estados:

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= a_1 b_2 c_3 d_4 e_5 f_6, \\
\rho_2 &= U_{SW}^{34} \cdot \rho_1 \cdot U_{SW}^{34 \dagger} = a_1 b_2 c_4 d_3 e_5 f_6, \\
\rho_3 &= U_{SW}^{35} \cdot \rho_1 \cdot U_{SW}^{35 \dagger} = a_1 b_2 c_5 d_4 e_3 f_6, \\
\rho_4 &= U_{SW}^{36} \cdot \rho_1 \cdot U_{SW}^{36 \dagger} = a_1 b_2 c_6 d_4 e_5 f_3, \\
\rho_5 &= U_{SW}^{24} \cdot \rho_1 \cdot U_{SW}^{24 \dagger} = a_1 b_4 c_3 d_2 e_5 f_6, \\
\rho_6 &= U_{SW}^{25} \cdot \rho_1 \cdot U_{SW}^{25 \dagger} = a_1 b_5 c_3 d_4 e_2 f_6, \\
\rho_7 &= U_{SW}^{26} \cdot \rho_1 \cdot U_{SW}^{26 \dagger} = a_1 b_6 c_3 d_4 e_5 f_2, \\
\rho_8 &= U_{SW}^{14} \cdot \rho_1 \cdot U_{SW}^{14 \dagger} = a_4 b_2 c_3 d_1 e_5 f_6, \\
\rho_9 &= U_{SW}^{15} \cdot \rho_1 \cdot U_{SW}^{15 \dagger} = a_5 b_2 c_3 d_4 e_1 f_6, \\
\rho_{10} &= U_{SW}^{16} \cdot \rho_1 \cdot U_{SW}^{16 \dagger} = a_6 b_2 c_3 d_4 e_5 f_1.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

A porta U_{SW}^{XY} corresponde a porta quântica SWAP que troca os qubits X e Y de posição. A porta é então aplicada para gerar novas permutações de qubits de diferentes grupos. Na equação (6.5) foi utilizada a notação da multiplicação da porta SWAP por um estado quântico na forma de vetor da forma $\rho_2 = U_{SW} \cdot \rho_1$. Em ρ_2 , os qubits 3 e 4 são trocados de posição, e assim sucessivamente até obter estados que representem as dez possibilidades de agrupamento. Calcular $\lambda_6(\rho_2)$ implica em calcular o entrelaçamento operacional entre as partições $\{ABD\}$ e $\{CEF\}$. Os índices abaixo das letras que representam os qubits informam a nova posição destes no estado.

Como λ_6 é já em si um monótono de entrelaçamento, seja definida a partir de agora pela sigla γ_6 , a medida que mensura o entrelaçamento global e genuíno de um estado puro ρ de seis qubits através do cálculo do máximo do entrelaçamento operacional λ_6 para as diversas permutações possíveis entre os qubits:

$$\gamma_6(\rho) = \left\{ \max_i [\lambda_6(\rho_i)] \right\} \cdot C, \tag{6.6}$$

sendo C um critério de separabilidade dado por $C=0$, se a matriz M da equação (6.7) possui pelo menos uma coluna igual a zero. A matriz M é formada por

$$M = \begin{bmatrix} \lambda_A^{(1)} & \lambda_A^{(2)} & \lambda_A^{(3)} & \lambda_A^{(4)} & \lambda_A^{(5)} & \lambda_A^{(6)} & \lambda_A^{(7)} & \lambda_A^{(8)} & \lambda_A^{(9)} & \lambda_A^{(10)} \\ \lambda_B^{(1)} & \lambda_B^{(2)} & \lambda_B^{(3)} & \lambda_B^{(4)} & \lambda_B^{(5)} & \lambda_B^{(6)} & \lambda_B^{(7)} & \lambda_B^{(8)} & \lambda_B^{(9)} & \lambda_B^{(10)} \\ \lambda_C^{(1)} & \lambda_C^{(2)} & \lambda_C^{(3)} & \lambda_C^{(4)} & \lambda_C^{(5)} & \lambda_C^{(6)} & \lambda_C^{(7)} & \lambda_C^{(8)} & \lambda_C^{(9)} & \lambda_C^{(10)} \\ \lambda_D^{(1)} & \lambda_D^{(2)} & \lambda_D^{(3)} & \lambda_D^{(4)} & \lambda_D^{(5)} & \lambda_D^{(6)} & \lambda_D^{(7)} & \lambda_D^{(8)} & \lambda_D^{(9)} & \lambda_D^{(10)} \\ \lambda_E^{(1)} & \lambda_E^{(2)} & \lambda_E^{(3)} & \lambda_E^{(4)} & \lambda_E^{(5)} & \lambda_E^{(6)} & \lambda_E^{(7)} & \lambda_E^{(8)} & \lambda_E^{(9)} & \lambda_E^{(10)} \\ \lambda_F^{(1)} & \lambda_F^{(2)} & \lambda_F^{(3)} & \lambda_F^{(4)} & \lambda_F^{(5)} & \lambda_F^{(6)} & \lambda_F^{(7)} & \lambda_F^{(8)} & \lambda_F^{(9)} & \lambda_F^{(10)} \end{bmatrix}, \quad (6.7)$$

e pode ser compreendida da seguinte forma: a primeira coluna apresenta os termos $\lambda_{\chi S}$ do estado ρ_1 da equação (6.5), a segunda coluna apresenta o resultado dos termos de ρ_2 e assim por diante.

Sejam alguns exemplos para ajudar a compreensão do funcionamento da medida:

I) Seja o estado $\sigma = \underline{ab} \otimes \underline{cdef}$. Os termos para a e b são $\lambda_{6A} = \lambda_{6B} = 0$, já que a e b possuem entrelaçamento apenas biparte. Todos os demais termos são positivos, já que C, D, E e F possuem entrelaçamento maior que triparte. Em qualquer permutação de σ , os qubits a e b continuam com entrelaçamento apenas biparte garantindo que toda **linha** referente a estes qubits seja 0. Ainda tem-se que todos os $\lambda_6(\sigma_X)$, sendo X referente à permutação em questão, são zero já que um único termo zero é suficiente para zerar o resultado da medida. O mesmo acontece a todos os estados que possuem qubits que não possuem no mínimo entrelaçamento triparte.

II) Seja o estado $\sigma = \underline{abc} \otimes \underline{def}$. Neste caso todos os qubits possuem entrelaçamento no mínimo triparte. A **coluna** da matriz referente a este estado terá todos os termos iguais a zero gerando $\lambda_6(\sigma) = 0$. Este é um resultado coerente, já que se Alice ficar com os qubits a, b e c e enviar os qubits d, e e f para Bob, não haverá entrelaçamento a ser compartilhado entre Alice e Bob. Porém, se eles partilharem qubits de uma mesma partição entrelaçada, ou seja, se Alice fica com a, b e d , enquanto Bob fica com c, e e f , então haverá entre Alice e Bob compartilhamento de entrelaçamento. Isso explica porque todas as outras colunas da matriz referentes às permutações deste estado possuem valores positivos indicando que existe entrelaçamento compartilhados entre estes grupos de qubits e que estes estados podem ser úteis operacionalmente.

Dado um estado qualquer, a análise da matriz M fornece características importantes do estado. Linhas contendo apenas zeros denunciam qubits que não possuem entrelaçamento no mínimo triparte. Um coluna igual a zero e outras com teor positivo indicam estados formados por duas partições com entrelaçamento triparte. Colunas que possuem pelo menos um elemento zero, quando este mesmo elemento é positivo em outra coluna implica em estados com entrelaçamento mas que dependendo da permutação possui baixo entrelaçamento operacional e tem pouca ou nenhuma utilidade para efetuar por exemplo uma teleportação.

Como exemplo, seja o estado quântico[CZG06]:

$$|\psi\rangle = \frac{|000000\rangle + |011100\rangle + |111000\rangle + |100100\rangle + |001111\rangle + |010011\rangle + |110111\rangle + |101011\rangle}{\sqrt{8}} \quad (6.8)$$

portador de entrelaçamento genuíno, desde que não é possível extrair dele nenhuma subpartição pura. O entrelaçamento $\lambda_6(|\psi\rangle)=1$. Também todas as permutações dele possuem entrelaçamento igual a um, exceto uma. O estado $|\psi_2\rangle = U_{SW}^{24} |\psi\rangle$ possui entrelaçamento $\lambda_6(|\psi_2\rangle)=0$. Resultado coerente com o trabalho que foi desenvolvido em [YMQW09]. Neste artigo é apresenta uma matriz que determina se um estado de seis qubits pode ou não ser utilizado em um protocolo de teleportação. Todas as permutações de $|\psi\rangle$ com exceção de $|\psi_2\rangle$ podem ser utilizadas com sucesso para realizar o protocolo de teleportação confirmando o uso da medida operacional λ_6 .

O entrelaçamento em seis vias de alguns estados conhecidos são:

$$|GHZ_6\rangle = (|000000\rangle + |111111\rangle)/\sqrt{2}, \quad (6.9)$$

$$|W_6\rangle = (|100000\rangle + |010000\rangle + |001000\rangle + |000100\rangle + |000010\rangle + |000001\rangle)/\sqrt{6}. \quad (6.10)$$

Os entrelaçamentos são $\gamma_6(|GHZ_6\rangle)=1$, $\gamma_6(|W_6\rangle)\approx 0.5019$. Outros estados também úteis no processamento quântico são

$$\begin{aligned}
|C_6\rangle &= \frac{1}{2}(|000000\rangle + |000111\rangle + |111000\rangle - |111111\rangle) \\
|\psi_6\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{|000111\rangle + |111000\rangle}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2}(|\bar{w}_3\rangle|w_3\rangle + |w_3\rangle|\bar{w}_3\rangle) \\
|w_3\rangle &= (|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle)/\sqrt{3}; \quad |\bar{w}_3\rangle = (|110\rangle + |101\rangle + |011\rangle)/\sqrt{3} \\
|\xi_6\rangle &= \frac{1}{4} \left[\begin{aligned} &|000\rangle(|0\rangle|\phi^+\rangle + |1\rangle|\psi^+\rangle) + |001\rangle(|0\rangle|\psi^-\rangle - |1\rangle|\phi^-\rangle) + \\ &|010\rangle(|0\rangle|\psi^+\rangle - |1\rangle|\phi^+\rangle) + |011\rangle(|0\rangle|\phi^-\rangle + |1\rangle|\psi^-\rangle) + \\ &|100\rangle(-|0\rangle|\psi^-\rangle - |1\rangle|\phi^-\rangle) + |101\rangle(-|0\rangle|\phi^+\rangle + |1\rangle|\psi^+\rangle) + \\ &|110\rangle(|0\rangle|\phi^-\rangle - |1\rangle|\psi^-\rangle) + |111\rangle(|0\rangle|\psi^+\rangle + |1\rangle|\phi^+\rangle) \end{aligned} \right] \\
|\phi^\pm\rangle &= (|00\rangle \pm |11\rangle)/\sqrt{2}; \quad |\psi^\pm\rangle = (|01\rangle \pm |10\rangle)/\sqrt{2}.
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Foi encontrado $\gamma_6(|C_6\rangle)=1$, $\gamma_6(|\psi_6\rangle)\approx 0.666$ and $\gamma_6(|\xi_6\rangle)\approx 0.994$. Outro estado não reportado na literatura, encontrado durante o desenvolvimento desta tese, maximamente entrelaçado é o

$$\begin{aligned}
|\Omega_6\rangle &= \frac{1}{2}(|\xi_0\rangle|\phi^+\rangle + |\xi_1\rangle|\phi^-\rangle + |\bar{\xi}_0\rangle|\psi^+\rangle + |\bar{\xi}_1\rangle|\psi^-\rangle), \\
|\xi_0\rangle &= [|0000\rangle - |0011\rangle - |0101\rangle + |0110\rangle]/2, \\
|\xi_1\rangle &= [|1001\rangle + |1010\rangle + |1100\rangle + |1111\rangle]/2, \\
X^{\otimes 4}|\xi_0\rangle &= |\bar{\xi}_0\rangle, \quad X^{\otimes 4}|\xi_1\rangle = |\bar{\xi}_1\rangle,
\end{aligned} \tag{6.12}$$

com $\gamma_6(|\Omega_6\rangle)=1$, sendo X a porta de inversão de bit e $|\psi^\pm\rangle$ e $|\phi^\pm\rangle$ os estados de Bell.

6.2 Análise da variação do entrelaçamento

As simulações de entrelaçamento a seguir e que estão em [OOR11] são uma contribuição desse trabalho. Elas têm por objetivo mostrar como o entrelaçamento é criado e destruído em estados quânticos já conhecidos na literatura.

6.2.1 Estado de Smolin

Seja

$$|\varepsilon_6(p)\rangle = \left(\begin{array}{l} \sqrt{\frac{p}{4}} |\Phi^+\rangle_{AB} |\Phi^+\rangle_{CD} |00\rangle_{EF} + \sqrt{\frac{p}{4}} |\Phi^-\rangle_{AB} |\Phi^-\rangle_{CD} |01\rangle_{EF} + \\ \sqrt{\frac{p}{4}} |\Psi^+\rangle_{AB} |\Psi^+\rangle_{CD} |10\rangle_{EF} + \sqrt{1-\frac{3p}{4}} |\Psi^-\rangle_{AB} |\Psi^-\rangle_{CD} |11\rangle_{EF} \end{array} \right). \quad (6.13)$$

Onde $|\Phi^\pm\rangle$ e $|\Psi^\pm\rangle$ são os estados de Bell. O estado reduzido obtido pelo traço parcial sobre os qubits EF dado por $Tr_{EF}(|\varepsilon_6(p)\rangle\langle\varepsilon_6(p)|)$ é um dos parâmetros de Smolin [Smo01]”. Em [BYW08] o entrelaçamento de $|\varepsilon_6(p)\rangle$ é medido utilizando a medida multipartite QCR proposta em [BYW07]

$$E_{ms}(\rho_N) = \left(\sum_k \tau_k - 2 \sum_{i < j} C_{ij}^2 \right) / N. \quad (6.14)$$

Em (6.14), τ_k é o entrelaçamento biparte entre o qubit k e os qubits restantes, C_{ij} é a concorrência entre os qubits i e j e N é número de qubits. Para o caso de seis qubits usando a negatividade, a sentença (6.14) fica da forma

$$E_{ms}(|\varepsilon_6(p)\rangle) = \frac{1}{6} \left[\begin{array}{l} N_{A_BCDEF}^2 + N_{B_ACDEF}^2 + N_{C_ABDEF}^2 + \\ N_{D_ABCEF}^2 + N_{E_ABCDF}^2 + N_{F_ABCDE}^2 - \\ 2 \left(N_{AB}^2 + N_{AC}^2 + N_{AD}^2 + N_{AE}^2 + N_{AF}^2 + N_{BC}^2 + N_{BD}^2 + \right. \\ \left. N_{BE}^2 + N_{BF}^2 + N_{CD}^2 + N_{CE}^2 + N_{CF}^2 + N_{DE}^2 + N_{DF}^2 + N_{EF}^2 \right) \end{array} \right]. \quad (6.15)$$

A variação de $\gamma_6(|\varepsilon_6\rangle)$, $E_{ms}(|\varepsilon_6\rangle)$ e $N_{AB}^2 = N_{CD}^2$ versus p pode ser visto na Figura 6.1. Como pode ser notado, para o estado (6.13), γ_6 e E_{ms} são equivalentes. No geral este comportamento não acontece.

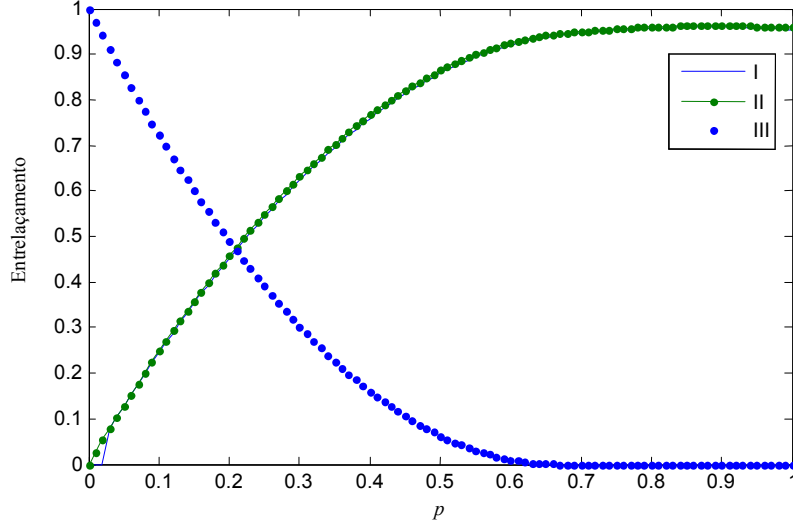


Figura 6.1 – Entrelaçamento do estado (6.13) versus p : I) γ_6 ; II) E_{ms} ; III) $N_{AB}^2 = N_{CD}^2$.

6.2.2 Vários tipos de entrelaçamento em um estado grafo

Seja o seguinte estado quântico

$$|G_1\rangle = U_{12}U_{16}U_{23}U_{34}U_{45}U_{56}(\cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle)^{\otimes 6}, \quad (6.16)$$

$$|G_2\rangle = U_{12}U_{13}U_{16}U_{23}U_{25}U_{34}U_{45}U_{46}U_{56}(\cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle)^{\otimes 6}, \quad (6.17)$$

$$U_{ij} = |0\rangle\langle 0|_i \otimes I_j + |1\rangle\langle 1|_i \otimes Z_j. \quad (6.18)$$

Em (6.16)-(6.18) U_{ij} é uma porta de mudança de fase controlada aplicada nos qubits i e j . O entrelaçamento do estado $|G_1\rangle$ versus θ pode ser visto na Figura 6.2 enquanto o entrelaçamento do estado $|G_2\rangle$ é mostrado na Figura 6.3.

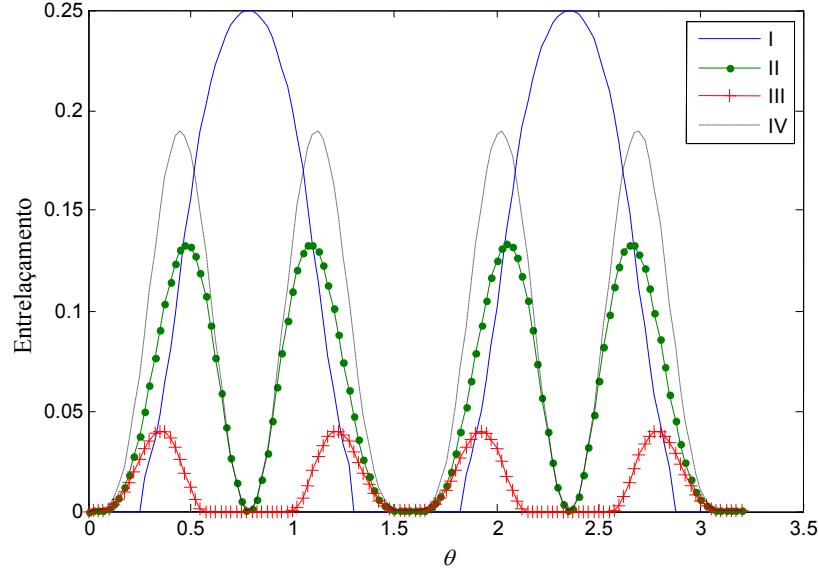


Figura 6.2 – Entrelaçamento de $|G_1\rangle$ versus θ : I) $\gamma_6/4$; II) $N_{A_{BC}}^2 = N_{C_{AB}}^2 = N_{D_{EF}}^2 = N_{F_{DE}}^2$; III) $N_{AB}^2 = N_{AF}^2 = N_{BC}^2 = N_{CD}^2 = N_{DE}^2 = N_{EF}^2$; IV) $N_{B_{AC}}^2 = N_{E_{DF}}^2$.

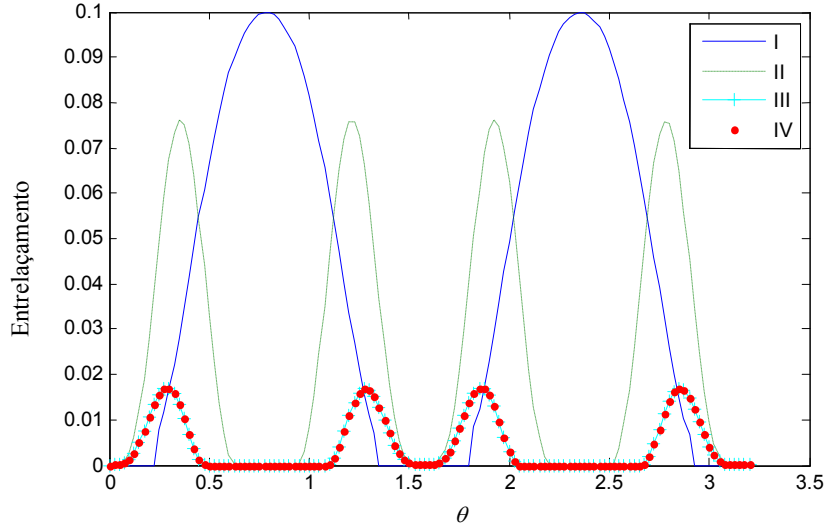


Figura 6.3 – Entrelaçamento de $|G_2\rangle$ versus θ : I) $\gamma_6/10$; II) $N_{A_{BC}}^2 = N_{B_{AC}}^2 = N_{C_{AB}}^2 = N_{D_{EF}}^2 = N_{E_{DF}}^2 = N_{F_{DE}}^2$; III) $N_{AB}^2 = N_{AC}^2 = N_{BC}^2 = N_{DE}^2 = N_{DF}^2 = N_{EF}^2$; IV) $N_{AF}^2 = N_{BE}^2 = N_{CD}^2$.

Como esperado, para ambos os estados o entrelaçamento em 6 vias é máximo ($\gamma_6=1$) para $\theta=\pi/4$ e $\theta=3\pi/4$ quando, nestes casos, os estados $|G_1\rangle$ e $|G_2\rangle$ são estados grafos completamente conectados. A diferença clara entre $|G_1\rangle$ and $|G_2\rangle$ aparece nos entrelaçamentos bipartes. Para $|G_1\rangle$ o entrelaçamento biparte (1-2) pode ser dividido em

dois conjuntos, curvas II e IV na Figura 6.2, enquanto o entrelaçamento biparte (1-1) pertence a um único conjunto, a curva III na Figura 6.2. O oposto acontece para $|G_2\rangle$, o entrelaçamento biparte (1-1) pode ser dividido em dois conjuntos, as curvas III e IV na Figura 6.3, enquanto o entrelaçamento biparte (1-2) pertence a um único conjunto, a curva II na Figura 6.3. As diferenças no entrelaçamento biparte de $|G_1\rangle$ e $|G_2\rangle$ é esperado uma vez que $|G_1\rangle$ e $|G_2\rangle$ não são equivalentes sob transformações LU e seus grafos correspondentes não são isomorfos.

6.3 Variação do entrelaçamento durante a formação de estados grafos de quatro e seis qubits

Estados grafos são estados quânticos relacionados a grafos da seguinte forma: seja o grafo $G = (V,E)$, sendo V o conjunto de vértices com $|V|=n$, e E o conjunto de arestas. Seja o produto tensorial de n qubits no estado $(|0\rangle+|1\rangle)/2^{1/2}$. Então o estado grafo $|G\rangle$ é um estado de n qubits (a cada vértice é associado um qubit) obtido pela aplicação de portas CZ (sinal-controlada ou Z controlada) entre aqueles pares de qubits do produto tensorial que possuem uma aresta entre os vértices associados. Por exemplo, para grafos de quatro vértices, tem-se os possíveis estados grafos

$$|G\rangle = U_{12}^{b_0} U_{13}^{b_1} U_{14}^{b_2} U_{23}^{b_3} U_{24}^{b_4} U_{34}^{b_5} \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)^{\otimes 4}, \quad (6.19)$$

$$U_{ij} = |0\rangle\langle 0|_i \otimes I_j + |1\rangle\langle 1|_i \otimes Z_j. \quad (6.20)$$

As variáveis b_0, \dots, b_5 , assumem apenas os valores '0' e '1'. De forma geral, pode-se notar que um estado grafo de n qubits é uma superposição de todos os 2^n estados, todos com a mesma amplitude em módulo. O diferencial é a posição dos sinais negativos na superposição. Desta forma, um estado grafo pode ser obtido pela aplicação no estado $[(|0\rangle+|1\rangle)/2^{1/2}]^{\otimes n}$ de um porta quântica representada por uma matriz diagonal cujos elementos são iguais a 1 ou -1. Seja, agora, a generalização desta matriz diagonal cujos elementos são 1 e -1, por uma matriz diagonal cujos elementos são exponenciais complexas cujos ângulos variam com o tempo, como mostra a equação (6.21).

$$U_G = \begin{bmatrix} e^{i\theta_1(t)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2(t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_3(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\theta_n(t)} \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

Essa matriz U_G foi escolhida porque no tempo inicial $t = 0$, $\theta_i(0) = 0$ para todo i gerando a matriz identidade e em um tempo final $t = t_f$ tem-se $\theta_i(t_f) = 2k\pi$ ou $\theta_i(t_f) = (2k+1)\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$, portanto, uma matriz diagonal com elementos 1 e -1 e que pode gerar um estado grafo. Desta forma, o estado $|\psi(t)\rangle = U_G(t)[(|0\rangle+|1\rangle)/2^{1/2}]^{\otimes n}$ varia de um estado completamente desentrelaçado em $t=0$ a um estado maximamente entrelaçado (se o grafo correspondente a este estado for totalmente conectado) em $t = t_f$. O interesse aqui é utilizar as medidas de entrelaçamento propostas para analisar a variação do entrelaçamento de $|\psi(t)\rangle$.

Inicialmente, assumi-se que a variação dos ângulos θ_i , $i=1, \dots, n-1$, em (6.21) segue as funções

$$f_1 \equiv \theta_i(t) = \left(\frac{t}{t_f}\right)^i \alpha_i \pi, \quad (6.22)$$

$$f_2 \equiv \theta_i(t) = \left(\frac{t}{t_f}\right)^{n-i-1} \alpha_i \pi, \quad (6.23)$$

$$f_3 \equiv \theta_i(t) = \log_2 \left(1 + \frac{t}{t_f}\right)^i \alpha_i \pi. \quad (6.24)$$

Nos três casos tem-se que $\theta_n(t) = -[\theta_1(t) + \theta_2(t) + \dots + \theta_{n-1}(t)]$ e $\theta_i(t) \in [0, 2\pi]$. A variável α_i assume apenas os valores 1, se $\theta_i(t_f) = \pi$, e 2, se $\theta_i(t_f) = 2\pi$.

Seja primeiramente o estado grafo completamente conectado

$$|\psi_6\rangle = U_{12}U_{16}U_{23}U_{34}U_{45}U_{56} \left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)^{\otimes 6}. \quad (6.25)$$

A variação do entrelaçamento deste estado de acordo com (6.22) à (6.24) é como mostrado na Figura 6.4

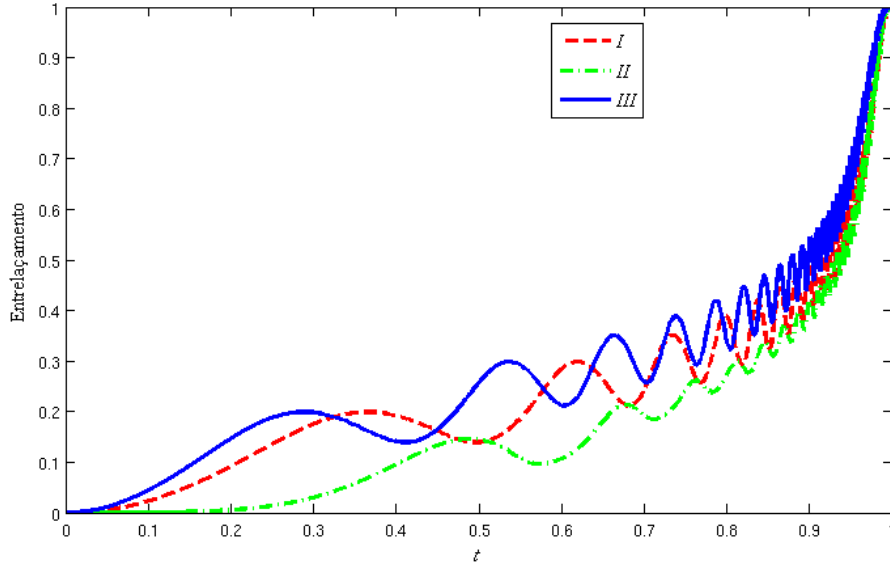


Figura 6.4 – Variação do entrelaçamento $\lambda_6(|\psi_6\rangle)$ versus t . I - f_1 , II - f_2 , III - f_3 .

A Figura 6.4 mostra o crescimento do entrelaçamento de ‘0’, para o estado desentrelaçado composto pelo produto tensorial de 6 qubits, ao valor máximo ‘1’, para o estado grafo final da equação (6.7). Além disso, o crescimento é oscilatório.

Como segundo exemplo é considerado o estado de seis qubits, sem entrelaçamento genuíno de seis vias, com duas partições com entrelaçamento triparte

$$|\psi_{3_3}\rangle = U_{12}U_{23}U_{34}U_{45}U_{56} \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)^{\otimes 6}. \quad (6.26)$$

A Figura 6.5 mostra novamente a variação de $\lambda_6(|\psi_6(t)\rangle)$ e a variação de $\lambda_6(|\psi_{3_3}(t)\rangle)$, ambas para o uso de f_1 .

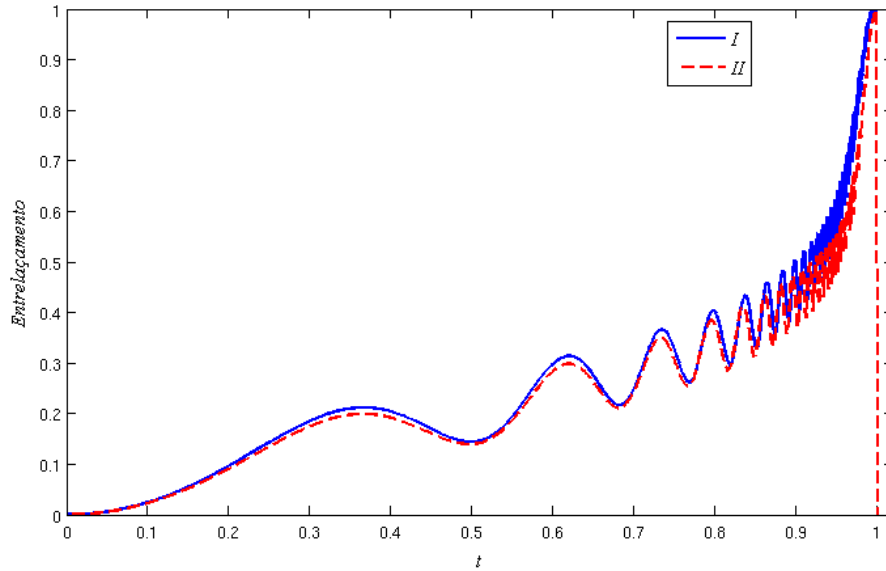


Figura 6.5 – Variação do entrelaçamento de $\lambda_6(|\psi_6\rangle)$ (I) e $\lambda_6(|\psi_{3_3}\rangle)$ (II) versus t .

Como pode ser observado na Figura 6.5, o crescimento do entrelaçamento é semelhante para ambos os estados até um valor de t próximo a $t_f (=1)$. Entretanto, o entrelaçamento do estado $|\psi_{3_3}\rangle$ cai abruptamente a zero em t_f por causa do critério de separabilidade dado na equação (6.6).

6.4 Conclusão

Neste capítulo foi proposta uma medida de entrelaçamento para mensurar o entrelaçamento genuíno de seis qubits. A seguir, um conjunto de análises com objetivo de mostrar o comportamento da medida é apresentada. Gráficos com crescimento e decréscimo do entrelaçamento para alguns estados quânticos incluindo o parâmetro de Smolin e dois estados grafos são apresentados. A matriz M_T capaz de gerar entrelaçamento de forma gradativa em qualquer estado grafo é utilizada para mostrar como o entrelaçamento varia durante a criação de um estado altamente entrelaçado e também como funciona o critério de separabilidade da medida λ_6 .

Capítulo 7 Conclusões e Perspectivas

7.1 Conclusões

Como conclusões desse trabalho podem ser citadas

1. O cálculo do Entrelaçamento Groveriano através de um algoritmo genético para demonstrar que esta medida não é capaz de avaliar diferentes tipos de entrelaçamento multiparte.
2. A proposta de uma medida de entrelaçamento para estados puros de 4 qubits, computacionalmente viável, capaz de mensurar positivamente apenas estados com entrelaçamento genuíno.
3. Aplicações envolvendo estados puros maximamente entrelaçados de 4 qubits que indicam uma relação inversa entre o entrelaçamento em 4 vias e o entrelaçamento em duas vias.
4. Estados quânticos conhecidos na literatura foram avaliados em relação à quantidade de entrelaçamento neles contidos e pelo menos um novo estado quântico maximamente entrelaçado foi apresentado.
5. A medida proposta π_{4G} foi avaliada em relação a sua extensibilidade para um número maior de qubits demonstrando ser π_5 também uma medida para medição de entrelaçamento genuíno.
6. Sendo π_6 incapaz de medir apenas entrelaçamento genuíno, foi desenvolvida a medida λ_6 que mostrou-se eficaz na detecção e medição de estados genuinamente entrelaçados.
7. Estados grafos foram com sucesso utilizados para demonstrar a criação, destruição e variação do entrelaçamento em estados puros.

7.2 Perspectivas

Como perspectivas de trabalhos futuros podem ser citados:

1. A classificação de estados quânticos multipartes quanto às suas classes SLOCC.
2. A busca da possibilidade de adaptação das medidas desenvolvidas para medição de estados mistos.
3. A pesquisa da extensibilidade de π_6 para estados com mais de seis qubits e qudits.

Bibliografia

- [BDSW96] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin and W. K. Wootters, "Mixed State Entanglement and Quantum Error Correction", *Physical Review A*, vol. 54, p. 3824, 1996.
- [BNO02] O. Biham, M. A. Nielsen e T. J. Osborne, "Entanglement monotone derived from Grover's algorithm", *Physical Review A*, American Physical Society, vol. 65, p. 062312, 2002.
- [BSSB05] I. D. K Brown, S. Stepney, A. Sudbery e S.L. Braunstein, "Searching for highly entangled multi-qubit states", *J. Physical A: Math. Gen*, vol 38, p. 1119–1131, 2005.
- [BYW07] Y.-K Bai, D. Yang e Z. D. Wang, "Multipartite quantum correlation and entanglement in four-qubit pure states", *Physical Review A* vol 76, 022336, 2007.
- [BYW08] Y.-K Bai, D. Yang e Z. D. Wang, "Entanglement in a class of multiqubit mixed states without multipartite tangles", *Physical. Review A*, vol 78, 062325, 2008.
- [CB05] A. Chamoli and C. M. Bhandari, "Success rate and entanglement measure in Grover's search algorithm for certain kinds of four qubit sates", *Physical Review A*, vol. 346, p. 17-26, 2005.
- [CKW00] V. Coffman, J. Kundu e W.K. Wootters, "Distributed Entanglement", *Physical Review A*, vol 61, 052306, 2000.
- [CZG06] P.-X. Chen, S.-Y Zhu e G.-C Guo, "General form of genuine multipartite entanglement quantum channels for teleportation", *Physical Review A* vol 74, 032324, 2006.
- [CZG07] J.-M. Cai, Z.-W. Zhou, G.-C. Guo, "Fully multi-qubit entangled states", disponível em xxx.lanl.gov quant-ph 0609186, 2007.
- [DBKM] Dobrzanski, R.D., Buchleitner, A., Kus, M., Mintert, F., Evaluable multipartite entanglement measures: Multipartite concurrences as entanglement monotones. *Physical Review A*, vol. 74, p. 052303, 2006.
- [DVC00] W. Dur, G. Vidal e J.I. Cirac, "Three qubits can be entangled in two inequivalent ways", *Physical Review A*, vol. 62, p. 062314, 2000.

- [EP99] J. Eisert and M. B. Plenio, "A comparison of entanglement measures", *Journal of Modern Optics*, vol. 46, p. 145, 1999.
- [GC99] D. Gottesman e I. L. Chuang, "Demonstrating the viability of universal quantum computation using teleportation and single-qubit operations", *Nature*, vol. 402, p. 390-392, 1999.
- [GHH10] A. Gabriel, B. C. Hiesmayr, M. Huber, "Criterion for k-separability in mixed multipartite systems", *Quantum Information and Computation* 10, No. 9 & 10, p. 829-836, 2010.
- [GHZ93] D. M. Greenberger, M. A. Horne e A. Zeilinger, "Multiparticle interferometry and the superposition principle", *Physical Today*, vol. 22, 1993.
- [Gro97] L. K. Grover, "A fast quantum mechanical algorithm for database search", *Proc. 28th annual ACM Symposium on the Theory of Computing (STOC)*, p. 212-219, 1996. *Phys. Rev. Lett.* 79, p. 325, 1997.
- [Hor06] Horodecki, M., "Simplifying monotonicity condition for entanglement measures", *Open Systems and Information Dynamics*, vol 12(3), p. 231–237, 2005.
- [HS00] A. Higuchi, A. Sudbery, "How entangled can two couples get?", *Physical Letters A*, vol 273, p. 213–217, 2000.
- [HHH96] R. Horodecki, M. Horodecki and P. Horodecki, "Teleportation, Bell's Inequalities and Inseparability", *Physics Letters A*, vol. 222, p. 21-25, 1996.
- [LBSA07] P. J. Love, A. M. van den Brink, A. Y. Smirnov, M. H. S. Amin, M. Grajcat, E. Il'ichev, A. Izmailkov e A. M. and Zagoskin, "A Characterization of Global Entanglement", *Quantum Information Process*, vol 6, p. 187-195, 2007.
- [MG04] A. Miranowicz and A. Grudka, "A comparative study of relative entropy of entanglement, concurrence and negativity", *Quantum Semiclass Optics*, vol. 6, p. 542-548, 2004.
- [NC00] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, "Quantum Computation and Quantum Information", Cambridge University Press, 2000.
- [OF07] Y.-C. Ou and H. Fan, "Monogamy Inequality in terms of Negativity for Three-Qubit States", *Physical Review A*, vol. 75, p. 062308 , 2007.

- [OR10] D. S. Oliveira e R. V. Ramos, “Residual Entanglement with Negativity for pure four-qubit quantum states”, *Quantum Information Processing*, vol 9, p. 497-508, 2010.
- [OOR11] L. Oliveira, D. S. Oliveira, R. V. Ramos, “Entanglement measure for pure six-qubit quantum states”, *Quantum Information Processing*, vol 11, p. 1-13, 2011.
- [Per96] A. Peres, "Separability Criterion for Density Matrices", *Physical Review Letters*, vol. 77, p. 1413 , 1996.
- [VPRK97] V. Vedral, M. B. Plenio, M. A. Rippin and P. L. Knight, "Quantifying Entanglement", *Physical Review Lett.*, American Physical Society, vol. 78, p. 2275-2279, 1997.
- [VDMV02] F. Verstraete, J. Dehaene, B. De Moor e H. Verschelde, H, "Four qubits can be entangled in nine different ways", [xxx.lanl.gov quant-ph 0109033](http://xxx.lanl.gov/quant-ph/0109033), 2002.
- [VP00] S. Virmani and M. B. Plenio, "Ordering States with Entanglement Measures", *Physics Letters A*, vol. 268, p. 31 , 2000.
- [VP98] V. Vedral and M. B. Plenio, "Entanglement measures and purification procedures", *Physical Review A*, American Physical Society, vol. 57, p. 1619-1633, 1998.
- [San06] D. C. Santos, Tese de mestrado, "Em busca de um entendimento completo acerca do emaranhamento", Universidade Federal de Minas Gerais, 2006.
- [Smo01] Smolin, J. A.: Four-party unlockable bound entangled state, *Physical Review A* 63, 032306 (2001).
- [SSB04] Y. Shimoni, D. Shapira e O. Biham, “Characterization of pure quantum states of multiple qubits using the Groverian entanglement measure”, *Physical Review A*, vol 69, 062303, 2004.
- [YC06] Y. Yeo and W. K. Chua, "Teleportation and Dense Coding with Genuine Multipartite Entanglement", *Physical Review A*, vol. 96, p. 060502 , 2006.
- [YS04] C. S. Yue H. Song, “Free entanglement measure of multiparticle quantum states”, *Physical Letters A* 330, p. 377, 2004.
- [YL08] M.-Y. Ye and X.-M. Lin, "A genuine four-partite entangled state", *Physics Letters A*, vol. 372, p. 4157 , 2008.
- [Woo98] W. K. Wootters, "Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits", *Physical Review Letters*, vol. 80, p. 2245, 1998.

[YMQW09] Z. Zi-Yun, L. Yi-Min, Z., Xue-Qin, Z. Wen, Z. Zhan-Jun, “Transformation Operator and Criterion for Perfectly Teleporting Arbitrary Three-Qubit State with Six-Qubit Channel and Bell-State Measurement”, Chin. Physical Letters, vol. 26, n. 12, p. 120303, 2009