UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MARCOS CÉSAR DE VASCONCELOS LIMA

VARIEDADES COMPLETAS COM ESPECTRO POSITIVO

FORTALEZA

2011

MARCOS CÉSAR DE VASCONCELOS LIMA

VARIEDADES COMPLETAS COM ESPECTRO POSITIVO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

FORTALEZA

2011

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L699v Lima, Marcos César de Vasconcelos.
Variedades completas com espectro positivo / Marcos César de Vasconcelos Lima. – 2011.
53 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2011.
Orientação: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

1. Variedade completa. 2. Curvatura de Ricci. 3. Espectro positivo. I. Título.
CDD 510

MARCOS CÉSAR DE VASCONCELOS LIMA

VARIEDADES COMPLETAS COM ESPECTRO POSITIVO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovoda em: __/__/____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Profª. Dra. Fernanda Ester Camillo Camargo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Francesco Mercuri
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, meus pais, Marcos Aurélio Martins Lima e Maria Neuvaniza de Vasconcelos Lima, por todo carinho e incentivo nesse jornada. Devo tudo a vocês.

À meu orientador, professor Abdênago Alves de Barros, por todo apoio dedicado desde minha graduação.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de mestrado.

RESUMO

Nessa dissertação apresentaremos um teorema sobre os fins de um variedade completa devido a Peter Li e Jiaping Wang. Esse resultado pode ser interpretado como uma generalização do teorema splitting de Cheeger-Gromoll, que afirma que se uma variedade Riemanniana M completa tem curvatura de Ricci não-negativa então M tem somente um fim ou M é isomémetrica a um produto da forma $\mathbb{R} \times L$, onde L é uma variedade Riemanniana compacta com curvatura de Ricci não-negativa. O que Li-Wang fizeram foi ampliar tal resultado para variedades de curvatura de Ricci limitada inferiormente por uma constante negativa.

Palavras-chave: Variedade completa. Curvatura de Ricci. Espectro positivo.

ABSTRACT

In this dissertation we will present a theorem about the ends of complete manifold due to Peter Li and Jiaping Wang. This result can be interpreted as a generalization of Cheeger-Gromoll splitting theorem, which states that a complete Riemannian manifold M with nonnegative Ricci curvature then M has only one end or M is isometric to a product space $\mathbb{R} \times L$, where L is a compact Riemannian manifold with nonnegative Ricci curvature. What Li-Wang did was expand this result for manifolds with Ricci curvature bounded from below by a nonnegative constant.

Keywords: Complete Manifold. Ricci curvature. Positive spectrum.

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	9
2	**PRELIMINARES**	12
2.1	**Referencial móvel**	12
2.2	**Variedades complexas**	15
2.3	**O teorema de Li-Tam**	18
3	**ALGUMAS ESTIMATIVAS**	21
4	**TEOREMA PRINCIPAL**	32
5	**APLICAÇÕES**	43
5.1	**Limitação no número de fins com volume infinito**	43
5.2	**Estimando a dimensão de** $H^1(L^2(M))$	46
5.3	**Variedades Kähler**	49
6	**CONCLUSÃO**	52
	REFERÊNCIAS	53

1 INTRODUÇÃO

Em todo esse texto M^n, $n \geq 3$, representará uma variedade Riemanniana n-dimensional, conexa e completa. Nosso objetivo com esse trabalho é demonstrar um resultado devido a Peter Li e Jiaping Wang (LI & WANG 2001), que sob as hipóteses

$$Ric_M \geq -\frac{(n-1)\lambda_1(M)}{n-2}$$

e

$$\lambda_1(M) > 0,$$

afirma que M tem somente um fim com volume infinito ou que $M = \mathbb{R} \times N$ com a métrica

$$ds_M^2 = dt^2 + (\cosh^2 t)\, ds_N^2,$$

onde N é uma variedade compacta com curvatura de Ricci limitada inferiormente por

$$Ric_N \geq -(n-2).$$

Lembramos que um fim e de uma variedade M é uma aplicação que a cada conjunto compacto $K \subset M$ associa uma componente conexa ilimitada $e(K)$ (não-vazia) de $M \setminus K$ de tal maneira que se $K_1 \subset K_2$ são compactos então

$$e(K_2) \subset e(K_1).$$

Intuitivamente, os fins de uma variedade são as formas de chegarmos ao infinito. É natural identificarmos cada fim com sua respectiva imagem em $M \setminus K$.

Observamos que o conceito de fim de uma variedade só tem valor se a variedade for não compacta. Um outro fato que destacamos é que $M \setminus K$ tem somente um número finito de componentes ilimitadas, assim, o número de fins $E(M)$ de M é o maior valor do limite $\lim\limits_{n\to\infty} N(K_n)$, onde $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de compactos com $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n \subset \ldots$, $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ e $N(K_n)$ é o número de componentes conexas ilimitadas de $M \setminus K_n$.

O teorema de Li-Wang é uma generalização do resultado de X. Wang, que tem a hipótese adicional da variedade ser conformemente compacta. Lembramos que uma variedade completa (M, ds_M^2) é conformemente compacta se sua métrica é da forma

$$ds_M^2 = \rho^{-2} ds_0^2,$$

onde ds_0^2 é uma métrica definida na variedade compacta com fronteira $\bar{M} = M \cup \partial M$ e ρ é uma função diferenciável satisfazendo

$$\rho = 0, \text{ em } \partial M$$

e

$$d\rho \neq 0, \text{ em } \partial M.$$

Em 1999, E. Witten e S. T. Yau (ver WITTEN & YAU, 1999) provaram que, se M^n é uma variedade Einstein conformemente compacta, de dimensão $n \geq 3$ e com o bordo tendo constante de Yamabe positiva, então o grupo de homologia $H_{n-1}(M, Z) = 0$. Como consequência, temos que M possui somente um fim. No mesmo ano, M. Cai e G. J. Gallow (ver CAI & GALLOW, 1999) generalizaram o resultado acima para variedades com bordo tendo constante de Yamabe não negativa. Na sua tese de doutorado, X. Wang (ver WANG, 2001) obteve a seguinte generalização:

Teorema 1.1 (X. Wang) *Seja M^n uma variedade conformemente compacta cuja curvatura de Ricci é limitada inferiormente por*

$$Ric_M \geq -(n-1).$$

Denotando por $\lambda_1(M)$ o menor autovalor do Laplaciano de M, se

$$\lambda_1(M) \geq n-2$$

então

1. *$H^1(L^2(M)) = 0$ ou*
2. *$M = \mathbb{R} \times N$ com a métrica $ds^2 = dt^2 + (\cosh^2 t)\, ds_N^2$, onde N é uma variedade compacta cuja curvatura de Ricci é limitada inferiormente por*

$$Ric_N \geq -(n-2).$$

A conclusão que M tem um único fim segue do teorema de Mazzeo (MAZZEO, 1988) que identifica o grupo de cohomologia $H^1(L^2(M))$ com o grupo de cohomologia relativa $H^1(M, \partial M)$ para variedades conformemente compactas.

Definição 1.1 *Um fim E de uma variedade completa M é não-parabólico se existe uma função de Green positiva em E que satisfaz a condição de Neumann para a fronteira ∂E.*

No trabalho de Cao-Shen-Zhu (ver CAO, SHUN & ZHU, 1997) foi provado que se um fim de uma variedade tem primeiro autovalor do Laplaciano positivo, então o fim tem que ser não-parabólico ou tem volume finito. Juntamente com o resultado de Li-Tam (ver LI & TAM, 1992), que afirma que o número de fins não-parabólicos de uma variedade completa é limitado superiormente pela dimensão de um subespaço do espaço das funções harmônicas com integral de Dirichlet finita, ou seja, pela dimensão do espaço

$$\mathbb{H}_D(M) = \left\{ f \mid \Delta f = 0,\ ||f||_\infty < \infty,\ \int_M |\nabla f|^2 < \infty \right\},$$

podemos estimar o número de fins com volume infinito em uma variedade com $\lambda_1(M) > 0$.

Na próxima seção, apresentaremos alguns fatos da demonstração do teorema de Li-Tam.

2 PRELIMINARES

2.1 Referencial móvel

Seja M^n uma variedade Riemanniana. Dada uma vizinhança coordenada U, podemos considerar um referencial móvel $\{e_i\}$ e suas formas duais ω_j dadas por

$$\omega_j(e_i) = \delta_{ji},$$

onde

$$e_i : U \to TM$$

e

$$\omega_j : U \to T^*M.$$

As 1-formas de conexão ω_{ij} de M no referencial $\{e_i\}$ satisfazem

$$d\omega_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j,$$

e

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}.$$

Observamos que tais 1-formas satisfazendo a anti-simetria e a equação diferencial acima são únicas. Uma forma de obtermos as formas de conexão é a seguinte: temos que

$$0 = d(\delta_{ij})_p = d(\langle e_i, e_j \rangle)_p(X) = X(\langle e_i, e_j \rangle),$$

portanto

$$0 = \langle \nabla_X e_i, e_j \rangle + \langle e_i, \nabla_X e_j \rangle,$$

assim, definimos $\omega_{ij}(X) = \langle \nabla_X e_i, e_j \rangle$. A anti-simetria é óbvia. Resta verificarmos a relação com a derivada exterior de ω_i, para isso, escrevendo $[e_m, e_n] = \sum_i c^i_{mn} e_i$ temos $d\omega_i = -\frac{1}{2} \sum_{jk} c^i_{jk} \omega_j \wedge \omega_k$. Daí

$$\begin{aligned}\left(\sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j \right)(e_m, e_n) &= \omega_{in}(e_m) - \omega_{im}(e_n) = \langle \nabla_{e_m} e_i, e_n \rangle - \langle \nabla_{e_n} e_i, e_m \rangle \\ &= -\langle \nabla_{e_m} e_n, e_i \rangle + \langle \nabla_{e_n} e_m, e_i \rangle = \langle e_i, [e_n, e_m] \rangle = c^i_{nm},\end{aligned}$$

enquanto que

$$\begin{aligned} d\omega_i(e_m, e_n) &= e_m(\omega_i(e_n)) - e_n(\omega_i(e_m)) - \omega_i([e_m, e_n]) = -\omega_i([e_m, e_n]) \\ &= -\omega_i \left(\textstyle\sum_j c^j_{mn} e_j \right) = -c^i_{mn} = c^i_{nm},\end{aligned}$$

mostrando que

$$d\omega_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j.$$

Diferenciando a expressão acima, encontramos

$$0 = d(d\omega_i) = d\left(\sum_l \omega_{il} \wedge \omega_l\right) = \sum_l \left(d\omega_{il} - \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_{jl}\right) \wedge \omega_l$$

Definição 2.1 *Definimos a forma de curvatura Ω_{ij} como*

$$\Omega_{ij} = d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}, \qquad \textit{onde } i, j = 1, \ldots, n.$$

Segue da definição que cada Ω_{ij} é uma 2-forma e $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$. Definimos os termos R_{ijkl} ao escrever Ω_{ij} em termos das 2-formas $\omega_k \wedge \omega_l$,

$$\Omega_{ij} = -\sum_{k<l} R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l.$$

A expressão acima estabelece R_{ijkl} somente quando $k < l$. Para que tenhamos todas as variações definimos $R_{ijlk} = -R_{ijkl}$ e $R_{ijll} = 0$. Assim

$$\Omega_{ij} = -\frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl}\, \omega_k \wedge \omega_l.$$

Uma interpretação das formas de curvatura é que, dados $X, Y \in T_pM$, a matriz $\{(\Omega_{ij})_p(X, Y)\}$ é a matriz da aplicação

$$R(X, Y)_p : T_pM \to T_pM,$$

onde $R : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$ tem como coordenadas os valores R_{ijkl}.

Valem as seguintes simetrias:

1. De $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$, segue que $R_{ijkl} = -R_{jikl}$;
2. Por definição, $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$;
3. $R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{ilkj} = 0$;
4. $R_{ijkl} = R_{klij}$.

Seja $f \in C^\infty(M)$ uma função diferenciável em M. A diferencial de f é uma transformação $df : TM \to \mathbb{R}$. Assim

$$df = \sum_i f_i \omega_i.$$

Diferenciando a equação acima, temos

$$\begin{aligned} 0 = d(df) &= \sum_i (df_i \wedge \omega_i + f_i d\omega_i) \\ &= \sum_i df_i \wedge \omega_i + \sum_i f_i \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j \\ &= \sum_i \left(df_i + \sum_j f_j \omega_{ji} \right) \wedge \omega_i. \end{aligned}$$

Com isso, definimos a segunda derivada covariante de f como

$$\sum_j f_{ij}\omega_j = df_i + \sum_j f_j \omega_{ji}.$$

O Hessiano de f é o 2-tensor simétrico

$$\nabla^2 f = \sum_{i,j} f_{ij} \omega_i \otimes \omega_j.$$

É fato que $f_{ij} = f_{ji}$. Finalmente, temos que o Laplaciano de f é dado por

$$\Delta f = \sum_i f_{ii}.$$

Seja $f : M^n \to \bar{M}^{n+k}$ uma imersão. Tome $e_1, \ldots, e_{n+k}$ um referencial adaptado a f, isto é, tal que $e_1, \ldots, e_k$ são normais a M e $e_{k+1}, \ldots, e_{n+k}$ são tangentes a M. Usaremos as seguintes notações para os índices

$$\begin{cases} 1 \leq A,\ B,\ C, \ldots \leq n+k \\ k+1 \leq i,\ j,\ k, \ldots \leq n+k \\ 1 \leq \alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots \leq k. \end{cases}$$

Definimos a segunda forma fundamental de M por

$$\omega_{\alpha i} = h^{\alpha}_{ij} \omega_j.$$

Segue que

$$h^{\alpha}_{ij} = \langle II(e_i, e_j), e_\alpha \rangle,$$

onde

$$II(e_i, e_j) = \left(\overline{\nabla}_{e_i} e_j\right)^{\perp}$$

é a componente normal da conexão $\overline{\nabla}_{e_i} e_j$, onde $\overline{\nabla}$ denota a coneão de Leci-Civita de $\overline{M}$.

Quando $k = 1$, denotaremos h^1_{ij} simplesmente por h_{ij}. Neste caso, a segunda forma fundamental é determinada pelas n equações

$$\omega_{1i} = \sum_j h_{ij}\omega_j,$$

com $i = 1, \ldots, n$.

2.2 Variedades complexas

Denotaremos por i a unidade imaginária de $\mathbb{C}$ e por $\mathbb{C}^n$ o espaço das n-uplas $(z_1, \ldots, z_n)$ onde $z_i \in \mathbb{C}$ para $i = 1, \ldots, n$. Dado um espaço vetorial real V, podemos construir um novo espaço vetorial $V^{\mathbb{C}}$ sobre $\mathbb{C}$ pondo

$$V^{\mathbb{C}} = \{u + iv \ ; \ u, v \in V\},$$

onde definimos as operações de soma e produto por um complexo $z = \alpha + i\beta$ por

$$(u + iv) + (u' + iv') = (u + u') + i(v + v'), \ u, u', v, v' \in V$$

e

$$(\alpha + i\beta)(u + iv) = (\alpha u - \beta v) + i(\beta u + \alpha v), \ u, v \in V \text{ e } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Com isto, é fácil verificarmos que $V^{\mathbb{C}}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Com a identificação $u = u + i0$, onde 0 é o elemento neutro de V, podemos escrever $V \subset V^{\mathbb{C}}$. O espaço $V^{\mathbb{C}}$ é chamado de complexificação do espaço real V.

Temos uma aplicação natural $J : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ que associa cada $u+iv$ ao elemento $-v + iu$, ou seja, ao produto $i(u + iv)$. A transformação J satisfaz $J^2 = -1$. Se V tem dimensão n sobre $\mathbb{R}$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base de V, podemos verificar que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base de $V^{\mathbb{C}}$ sobre $\mathbb{C}$ (quando interpretamos $e_i \in V^{\mathbb{C}}$) e $\{e_1, \ldots, e_n, Je_1, \ldots, Je_n\}$ é uma base de $V^{\mathbb{C}}$ sobre $\mathbb{R}$. Deste modo, temos que

$$\dim_{\mathbb{R}} V^{\mathbb{C}} = 2 \dim_{\mathbb{R}} V$$

e

$$\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V.$$

Chamamos uma transformação $J : V \to V$, em um espaço vetorial real, de estrutura complexa se J satisfaz a condição $J^2 = -1$.

Dada uma transformação $f : V \to \mathbb{R}$, definimos $\tilde{f} : V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ por

$$\tilde{f}(u + iv) = f(u) + if(v),$$

gerando assim um funcional em $V^{\mathbb{C}}$. A relação $f + ig \mapsto \tilde{f} + i\tilde{g}$ gera um $\mathbb{C}$-isomorfismo $(V^{\mathbb{C}})^* \simeq (V^*)^{\mathbb{C}}$.

Seja D um aberto de $\mathbb{C}^n = \{(z_1, \ldots, z_n)\ ;\ z_i \in \mathbb{C},\ i = 1, \ldots, n\}$ e $f : D \to \mathbb{C}$. Dizemos que f é holomorfa se, para cada $k = 1, \ldots, n$, f é uma função homolorfa quando consideramos somente a variável z_k. De forma análoga, uma transformação $f : D \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ é holoforma se, quando escrevemos $f = (f_1, \ldots, f_m)$ temos cada f_i holomorfa, para $i = 1, \ldots, m$.

Definição 2.2 *Uma variedade complexa M de dimensão complexa n é uma variedade diferenciável $2n$-dimensional, munida de um atlas formado por cartas $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ com a condição que*

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

seja um transformação holomorfa de n variáveis complexas.

Nesse caso, cada ϕ_α é uma carta coordenada holomorfa e o conjunto das ϕ_α's é um atlas complexo para M.

Seja M uma variedade complexa de dimensão n e $\phi = (z_1, \ldots, z_n)$ um sistema de coordenadas complexas de $U \subset M$, com $z_k = x_k + iy_k$. Então $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ é um sistema de coordenadas reais para M em U, de maneira que

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_p\right\}$$

é uma base para T_pM, para cada $p \in U$.

Definindo

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right)_p = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p - i\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)_p\right\} \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right)_p = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p + i\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)_p\right\},$$

temos

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}\right)_p\right\}$$

uma base de $(T_pM)^{\mathbb{C}}$ sobre $\mathbb{R}$.

Na mesma notação acima, considerando $dx_k, dy_k \in T_pM^*$, definimos

$$(dz_k)_p = (dx_k)_p + i(dy_k)_p \;\text{ e }\; (d\bar{z}_k)_p = (dx_k)_p - i(dy_k)_p.$$

Segue que

$$\{(dz_1)_p, (d\bar{z}_1)_p, \ldots, (dz_n)_p, (d\bar{z}_n)_p\}$$

é uma base de $(T_pM^*)^{\mathbb{C}}$ sobre $\mathbb{R}$, dual da base

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}\right)_p\right\}$$

de $(T_pM^{\mathbb{C}})^*$.

Proposição 2.1 *Seja M é uma variedade complexa de dimensão complexa n. Se $(z_1, \ldots, z_n)$ é um sistema de coordenadas complexas para M definido em uma aberto U de M, então, para cada $p \in U$, o operador linear $J_p : T_pM \to T_pM$ dado por*

$$J_p\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)_p \quad e \quad J_p\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)_p = -\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p,$$

independe das coordenadas $z_k = x_k + iy_k$ escolhidas e define uma estrutura complexa em T_pM.

Chamamos o operador J de uma estrutura quasi-complexa canônica de M.

Variedades Kähler

Consideraremos agora M uma variedade complexa e g uma métrica Riemanniana em M. O valor g_p de g em um ponto $p \in M$ é uma forma bilinear simétrica em T_pM que pode ser estendida a uma forma bilinear simétrica em $T_pM^{\mathbb{C}}$, definindo para $u+iv, u'+iv' \in T_pM^{\mathbb{C}}$,

$$g_p(u + iv, u' + iv') = (g_p(u, u') - g_p(v, v')) + i(g_p(u, v') + g_p(u', v)).$$

Se uma métrica Riemanniana satisfaz

$$g_p(J_pu, J_pv) = g_p(u, v)$$

para cada $p \in M$ e $u, v \in T_pM$, então g é chamada de métrica Hermitiana da variedade complexa M.

Agora, considerando g uma métrica Hermitiana em M, para um ponto arbitrário $p \in M$ e para vetores $u, v \in T_pM$, definimos

$$\omega_p(u, v) = g_p(J_pu, v).$$

Sendo g Hermitiana, segue que

$$g_p(J_pu, v) = g_p(J_p(J_pu), J_pv).$$

Usando que $J_p^2 = -1$, concluímos que

$$g_p(J_p u, v) = g_p(-u, J_p v) = -g_p(J_p v, u),$$

ou seja,

$$\omega_p(u, v) = -\omega_p(v, u).$$

Com isso, temos que ω_p é uma forma diferenciável de grau 2. Se $d\omega = 0$, dizemos que g é uma métrica Kähleriana e que M é uma variedade Kähler.

Exemplo 2.1 (Toro complexo) *Considere $\mathbb{C}^n$ como um espaço vetorial de dimensão $2n$ sobre $\mathbb{R}$. Escolhendo $2n$ elementos linearmente independentes $a_1, \ldots, a_{2n}$ definimos*

$$\Gamma = \left\{ \sum_{i=1}^{2n} m_i a_i \ ; \ m_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Então $\mathbb{C}^n$ é um grupo abeliano com respeito a adição que tem Γ como um subgrupo. Seja $T = \mathbb{C}^n/\Gamma$ o grupo quociente de $\mathbb{C}^n$ por Γ. Para cada elemento $a \in \mathbb{C}^n$, seja $\pi(a)$ a classe com respeito a Γ contendo a. π é uma aplicação de $\mathbb{C}^n$ em T. Dizemos que um subconjunto $U \subset T$ é um aberto se $\pi^{-1}(U)$ é um aberto em $\mathbb{C}^n$. Então cada ponto a de T possui uma vizinhança homeomorfa a uma vizinhança de $a \in \mathbb{C}^n$. Desse fato, podemos provar que T é uma variedade complexa de dimensão complexa n. T é chamado de toro complexo.

2.3 O teorema de Li-Tam

Foi provado por Li-Tam (ver LI & TAM, 1992) que o número de fins não-parabólicos de uma variedade completa é limitado superiormente pela dimensão do espaço $\mathbb{H}_D(M)$, formado pelas funções harmônicas limitadas com integral de Dirichlet finita, ou seja, da dimensão de

$$\mathbb{H}_D(M) = \left\{ f \mid \Delta f = 0, \ ||f||_\infty < \infty, \ \int_M |\nabla f|^2 < \infty \right\}.$$

No trabalho de Cao-Shen-Zhu (ver CAO, SHEN & ZHU, 1997), foi provado que se um fim de uma variedade tem primeiro autovalor do Laplaciano positivo, então o fim tem que ser não-parabólico ou tem volume finito. Com isso, estimamos o número de fins com volume infinito de uma variedade com $\lambda_1(M) > 0$ estimando a dimensão do espaço $\mathbb{H}_D(M)$. O teorema de Li-Tam afirma que:

Teorema 2.1 (Li-Tam) *Seja M uma variedade completa. Se $\dim \mathbb{H}^0(M) < \infty$, então M tem finitos fins. Em particular, se s e l denotam o número de fins parabólicos e o* *número de fins não-parabólicos, respectivamente, então*

$$s + l \leq \dim \mathbb{H}^0(M).$$

Além disso, se $l \geq 1$, então

$$s + l \leq \dim \mathbb{H}^+(M)$$

e

$$l \leq \dim \mathbb{H}_D(M).$$

Observamos que os espaços mencionados acima são $\mathbb{H}^0(M)$, que é o espaço gerado pelo conjunto das funções harmônicas em M que são limitadas inferiormente ou superiormente em cada fim, e $\mathbb{H}^+(M)$, que é o espaço gerado pelo conjunto das funções harmônicas positivas. Segue que

$$\mathbb{H}_D(M) \subset \mathbb{H}^+(M) \subset \mathbb{H}^0(M).$$

Discutiremos alguns fatos da demonstração desse resultado. Inicialmente, enunciaremos alguns resultados utilizados na demonstração:

Proposição 2.2 *Um fim E de M é não-parabólico se, e somente se, existe uma função harmônica não-constante f definida sobre E com a propriedade que $-\infty < \inf_E f < \min_{\partial E} f$.*

Proposição 2.3 *Se E é um fim não-parabólico de M, existe uma função harmônica ϕ definida em E com as seguintes propriedades:*

1. $0 \leq \phi \leq 1$ *em* E;
2. $\phi = 1$ *na fronteira* ∂E *de* E;
3. $\phi(p_i) \to 0$ *para alguma sequência de pontos em* E *tal que* $p_i \to \infty$;
4. ϕ *tem integral de Dirichlet finita em* E.

Dessa forma, como $H_D(M)$ contém as funções harmônicas constantes, temos que $\dim H_D(M) \geq 1$. Assumiremos, portanto, que M tem pelo menos 2 fins não-parabólicos. Seja $R_0 > 0$ suficientemente grande tal que $M \setminus B(p, R_0)$ tem no mínimo 2 fins não-parabólicos disjuntos E_1 e E_2, para $p \in M$. Construiremos uma função harmônica não-constante e limitada com integral de Dirichlet finita para o fim E_1. Para $R \geq R_0$, consideramos f_R a solução da seguinte equação

$$\Delta f_R = 0, \text{ em } B(p, R),$$

$$f_R = 1, \text{ em } E_1 \cap \partial B(p, R)$$

e

$$f_R = 0, \text{em } \partial B(p, R) \setminus E_1.$$

Como $R \geq R_0$, temos $E_2 \cap B(p, R) \subset \partial B(p, R) \setminus E_1$. Sendo E_1 e E_2 fins não-parabólicos, a sequência de funções $\{f_R\}$ admite uma subsequência convergindo para uma função harmônica f definida em M tendo a propriedade que

$$\sup_M f = \sup_{E_1} f = 1$$

e

$$\inf_M f = \inf_{E_i} f = 0,$$

para qualquer fim não-parabólico E_i com $i \neq 1$.

Em particular, f é limitada e tem integral de Dirichlet finita. Repetindo essa argumento para cada fim não-parabólico obteremos um conjunto de funções harmônicas linearmente independentes, incluindo as funções constantes, como o número de fins não-parabólicos. Denotaremos o espaço gerado por tais funções harmônicas por K. Estimando a dimensão de K teremos como estimar o número de fins não-parabólicos. Se M tem primeiro autovalor do Laplaciano λ_1 positivo, então

$$\dim K \geq \text{ número de fins com volume infinito.}$$

Na próxima seção, obteremos algumas estimativas de decaimento para as funções em K.

Por simplicidade, assumiremos as seguintes notações

$$E(R) = E \cap B(p, R), \ V_E(R) = \text{ volume}(E(R))$$

e

$$\partial E(R) = E \cap \partial B(p, R), \ A_E(R) = \text{área}(\partial E(R)).$$

Lembramos também que $\lambda_1(M)$ pode ser caracterizado como

$$\lambda_1(M) \int_E \phi^2 \leq \int_E |\nabla \phi|^2$$

para todas as funções diferenciáveis com suporte compacto ϕ em E.

3 ALGUMAS ESTIMATIVAS

Lema 3.1 *Seja M uma variedade Riemanniana completa. Suponha que E é um fim de M com $\lambda_1(E) > 0$. Então, para qualquer função harmônica f em K, existe uma constante a tal que $f - a$ está em $L^2(E)$. Além disso, a função $f - a$ satisfaz a estimativa de decaimento*

$$\int_{E(R+1)\setminus E(R)} (f-a)^2 \leq C \exp\left(-2\sqrt{\lambda_1(E)}R\right)$$

para alguma constante $C > 0$ dependendo de f, $\lambda_1(E)$ e n.

Demonstração: Sejam f como na construção do teorema de Li-Tam e $\{f_R\}$ a sequência de funções convergindo para f. Assumiremos $\lambda_1(M) = 1$. Para um fim fixo E (que não é necessariamente o fim que origina a sequência f_R), temos que f_R tem autovalores 0 e 1 na fronteira $\partial E(R)$, assim consideraremos as funções f_R ou $1 - f_R$. Logo, podemos assumir que f_R é nula em $\partial E(R)$. Mostraremos que o lema vale com $a = 0$ e

$$\int_{E(R+1)\setminus E(R)} f^2 \leq C \exp(-2R).$$

Seja ϕ definida por

$$\phi(x) = \frac{r(x) - R_0}{R_0}, \text{ em } E(2R_0) \setminus E(R_0)$$

e

$$\phi = 1, \text{ em } E \setminus E(2R_0),$$

onde $r(x)$ é a distância geodésica para um ponto fixo p.

Tomando $\delta \in (0, 1)$, mostraremos que

$$\int_E \exp(2\delta r) f^2 \leq \frac{C}{(1-\delta)^2}.$$

Para isso, integrando $|\nabla(\phi \exp(\delta r) f_R)|^2$ em $E(R)$, encontramos

$$\begin{aligned}
\int_{E(R)} &|\nabla(\phi \exp(\delta r) f_R)|^2 \\
&= \int_{E(R)} |\nabla(\phi \exp(\delta r))|^2 f_R^2 + 2\int_{E(R)} \phi \exp(\delta r) f_R \langle \nabla(\phi \exp(\delta r)), \nabla f_R\rangle \\
&\quad + \int_{E(R)} (\phi \exp(\delta r))^2 |\nabla f_R|^2 \\
&= \int_{E(R)} |\nabla(\phi \exp(\delta r))|^2 f_R^2 + \frac{1}{2}\int_{E(R)} \langle \nabla(\phi^2 \exp(2\delta r)), \nabla(f_R^2)\rangle \\
&\quad + \int_{E(R)} \phi^2 \exp(2\delta r) |\nabla f_R|^2.
\end{aligned}$$

Usando que $f_R = 0$ no bordo $\partial E(R)$, obtemos que

$$\int_{E(R)} \langle \nabla(\phi^2 \exp(2\delta r)), \nabla(f_R^2)\rangle = -\int_{E(R)} \phi^2 \exp(2\delta r)\Delta(f_R^2).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}&\int_{E(R)} |\nabla\left(\phi \exp(\delta r) f_R\right)|^2 \\ &\qquad = \int_{E(R)} |\nabla(\phi \exp(\delta r))^2 f_R^2 - \frac{1}{2}\int_{E(R)} \phi^2 \exp(2\delta r)\Delta(f_R^2) + \int_{E(R)} \phi^2 \exp(2\delta r)|\nabla f_R|^2.\end{aligned}$$

Desenvolvendo a expressão do Laplaciano de f_R e utilizando novamente que f_R é nula no bordo, encontramos que

$$\int_{E(R)} |\nabla\left(\phi \exp(\delta r) f_R\right)|^2 = \int_{E(R)} |\nabla(\phi \exp(\delta r))|^2 f_R^2. \tag{1}$$

O integrando do lado direito da expressão acima pode ser escrito como

$$|\nabla(\phi \exp(\delta r))|^2 = \phi^2|\nabla \exp(\delta r)|^2 + \exp(2\delta r)|\nabla\phi|^2 + 2\phi\exp(\delta r)\langle\nabla\phi, \nabla\exp(\delta r)\rangle$$

onde podemos estimar o último termo usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade entre as médias

$$\begin{aligned}2\phi\exp(\delta r)\langle\nabla\phi, \nabla\exp(\delta r)\rangle &= 2\langle\exp(\delta r)\nabla\phi, \phi\nabla\exp(\delta r)\rangle \\ &\leq 2(\epsilon^{-1/2}|\exp(\delta r)\nabla\phi|)(\epsilon^{1/2}|\phi\nabla\exp(\delta r)|) \\ &\leq \epsilon^{-1}\exp(2\delta r)|\nabla\phi|^2 + \epsilon\phi^2|\nabla\exp(\delta r)|^2.\end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos a estimativa

$$\begin{aligned}&\int_{E(R)} |\nabla\left((\phi \exp(\delta r) f_R\right)|^2 \\ &\qquad \leq (1+\epsilon)\int_{E(R)} \phi^2|\nabla\exp(\delta r)|^2 f_R^2 + \left(1+\frac{1}{\epsilon}\right)\int_{E(R)} \exp(2\delta r)|\nabla\phi|^2 f_R^2 \\ &\qquad \leq (1+\epsilon)\delta^2\int_{E(R)} \phi^2\exp(2\delta r) f_R^2 + \left(1+\frac{1}{\epsilon}\right)\frac{1}{R_0^2}\int_{E(2R_0)\setminus E(R_0)} \exp(2\delta r) f_R^2\end{aligned}$$

onde trabalhamos com $R > 2R_0$.

Sendo

$$\lambda_1(E) = 1 = \inf \left\{ \frac{\displaystyle\int |\nabla g|^2}{\displaystyle\int |g|^2} \ ; \ g \text{ tem suporte compacto em } E \right\}$$

temos que

$$\int_{E(R)} \phi^2 \exp(2\delta r) f_R^2 \leq \int_{E(R)} |\nabla(\phi \exp(\delta r) f_R|^2,$$

daí

$$(1-(1+\epsilon)\delta^2) \int_{E(R)} \phi^2 \exp(2\delta r) f_R^2 \leq \left(1+\frac{1}{\epsilon}\right) \frac{1}{R_0^2} \int_{E(2R_0)\setminus E(R_0)} \exp(2\delta r) f_R^2.$$

Da escolha de $\delta \in (0,1)$, podemos fazer $\epsilon = (1-\delta)/\delta$, assim

$$1-(1+\epsilon)\delta^2 = 1-\delta \quad \text{e} \quad 1+\frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{1-\delta}.$$

Multiplicando a última desigualdade por $(1-\delta)$ teremos

$$(1-\delta)^2 \int_{E(R)} \phi^2 \exp(2\delta r) f_R^2 \leq \frac{1}{R_0^2} \int_{E(2R_0)\setminus E(R_0)} \exp(2\delta r) f_R^2$$

e usando que $\phi = 1$ em $E \setminus E(2R_0)$ obtemos a estimativa

$$(1-\delta)^2 \int_{E(R)\setminus E(2R_0)} \exp(2\delta r) f_R^2 \leq \frac{1}{R_0^2} \int_{E(2R_0)\setminus E(R_0)} \exp(2\delta r) f_R^2.$$

Fazendo $R \to \infty$

$$(1-\delta)^2 \int_{E\setminus E(2R_0)} \exp(2\delta r) f^2 \leq \frac{1}{R_0^2} \int_{E(2R_0)\setminus E(R_0)} \exp(2\delta r) f^2,$$

assim

$$\int_E \exp(2\delta r) f^2 \leq \frac{C}{(1-\delta)^2}. \tag{2}$$

Nosso objetivo agora é estender essa estimativa para $\delta = 1$. Se ψ é uma função com suporte compacto em E, como $\lambda_1(E) = 1$ e $f \in K$ temos

$$\begin{aligned} \int_E \psi^2 \exp(2r) f^2 &\leq \int_E |\nabla(\psi \exp(r) f)|^2 \\ &= \int_E |\nabla\psi|^2 \exp(2r) f^2 + 2\int_E \psi f \exp(r) \langle \nabla\psi, \nabla(\exp(r) f)\rangle + \int_E \psi^2 |\nabla(\exp(r) f)|^2, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\int_E \psi f \exp(r)\langle\nabla\psi, \nabla(\exp(r)f)\rangle &= \int_E \exp(r) f\psi\langle\nabla\psi, f\nabla(\exp(r)) + \exp(r)\nabla f\rangle\\ &= \int_E \exp(r) f^2\psi\langle\nabla\psi, \nabla(\exp(r))\rangle + \int_E \exp(2r) f\psi\langle\nabla\psi, \nabla f\rangle\\ &= \int_E \exp(2r) f^2\psi\langle\nabla\psi, \nabla r\rangle\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_E \psi^2|\nabla(\exp(r)f)|^2 &= \int_E \psi^2 f^2|\nabla(\exp(r))|^2 + \int_E \psi^2 f\exp(r)\langle\nabla(\exp(r)), \nabla f\rangle\\ &\quad + \int_E \psi^2\exp(2r)\langle\nabla f, \nabla f\rangle\\ &= \int_E \psi^2 f^2|\nabla(\exp(r))|^2\\ &= \int_E \psi^2 f^2|\exp(r)\nabla r|^2\\ &= \int_E \psi^2 f^2\exp(2r).\end{aligned}$$

Unindo essas duas expressões na desigualdade acima obtemos que

$$-2\int_E \exp(2r) f^2\psi\langle\nabla\psi, \nabla r\rangle \leq \int_E |\nabla\psi|^2\exp(2r) f^2.$$

Escolhendo $R_0 < R_1 < R$, definimos

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{r(x) - R_0}{R_1 - R_0}, & \text{em } E(R_1)\setminus E(R_0)\\ \dfrac{R - r(x)}{R - R_1}, & \text{em } E(R)\setminus E(R_1).\end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\int_E \exp(2r) f^2\psi\langle\nabla\psi, \nabla r\rangle &= \int_{E(R)\setminus E(R_1)} \exp(2r) f^2\frac{R - r(x)}{R - R_1}\left(\frac{-1}{R - R_1}\right)\\ &\quad + \int_{E(R_1)\setminus E(R_0)} \exp(2r) f^2\frac{r(x) - R_0}{R_1 - R_0}\left(\frac{1}{R_1 - R_0}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_E |\nabla\psi|^2\exp(2r) f^2 &= \int_{E(R)\setminus E(R_1)} \frac{1}{(R - R_1)^2}\exp(2r) f^2\\ &\quad + \int_{E(R_1)\setminus E(R_0)} \frac{1}{(R_1 - R_0)^2}\exp(2r) f^2.\end{aligned}$$

Substituindo esses valores da desigualdade obtida anteriormente, temos

$$\begin{aligned}
\frac{2}{R-R_1}\int_{E(R)\setminus E(R_1)} \exp(2r) f^2 \frac{R-r(x)}{R-R_1}
&\leq \frac{2}{(R_1-R_0)^2}\int_{E(R_1)\setminus E(R_0)} \exp(2r) f^2 (r(x)-R_0)\\
&+\frac{1}{(R-R_1)^2}\int_{E(R)\setminus E(R_1)} \exp(2r) f^2\\
&+\frac{1}{(R_1-R_0)^2}\int_{E(R_1)\setminus E(R_0)} \exp(2r) f^2.
\end{aligned}$$

Escolhendo $t \in (0, R-R_1)$ temos $R_1 < R-t$. Para $x \in E(R-t) \setminus E(R_1)$, temos $r(x) < R-t$, assim $R-r(x) > t$, portanto

$$\begin{aligned}
\frac{2t}{(R-R_1)^2}\int_{E(R-t)\setminus E(R_1)} \exp(2r) f^2 &\leq \frac{2}{(R-R_1)^2}\int_{E(R-t)\setminus E(R_1)} (R-r(x)) \exp(2r) f^2\\
&\leq \frac{2}{(R-R_1)^2}\int_{E(R)\setminus E(R_1)} (R-r(x)) \exp(2r) f^2
\end{aligned}$$

implicando

$$\begin{aligned}
\frac{2t}{(R-R_1)^2}\int_{E(R-t)\setminus E(R_1)} \exp(2r) f^2 &\leq \frac{1}{(R-R_1)^2}\int_{E(R)\setminus E(R_1)} \exp(2r) f^2\\
&+\left(\frac{2}{R_1-R_0}+\frac{1}{(R_1-R_0)^2}\right)\int_{E(R_1)\setminus E(R_0)} \exp(2r) f^2,
\end{aligned}$$

onde usamos que $r(x) - R_0 < R_1 - R_0$ em $E(R_1) \setminus E(R_0)$.

Substituindo $R_1 = R_0 + 1$, $t = 1$ e definindo

$$g(R) = \int_{E(R)\setminus E(R_0+1)} \exp(2r) f^2,$$

obtemos

$$g(R-1) \leq CR^2 + \frac{1}{2} g(R),$$

onde

$$C = 3\int_{E(R_0+1)\setminus E(R_0)} \exp(2r) f^2$$

é independente de R.

Iterando essa equação k vezes, encontramos

$$\begin{aligned}
g(R) &\leq C\sum_{i=1}^{k} \frac{(R+i)^2}{2^{i-1}} + \frac{1}{2^k} g(R+k)\\
&\leq CR^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1+i)^2}{2^{i-1}} + \frac{1}{2^k} g(R+k)\\
&\leq CR^2 + 2^{-k} g(R+k),
\end{aligned}$$

onde escolhemos $R \geq 1$ e adaptamos a constante C.

Pela estimativa (2) temos que (para uma outra constante C)

$$\int_E \exp(2\delta r) f^2 \leq \frac{C}{(1-\delta)^2},$$

para qualquer $\delta \in (0,1)$. Assim

$$\begin{aligned} g(R+k) &= \int_{E(R+k)\setminus E(R_0+1)} \exp(2r) f^2 \\ &\leq \exp(2(R+k)(1-\delta)) \int_{E(R+k)\setminus E(R_0+1)} \exp(2\delta r) f^2, \end{aligned}$$

pois $r \leq R+k$. Então $(1-\delta)r \leq (1-\delta)(R+k)$, o que resulta em

$$r \leq (1-\delta)(R+k) + \delta r.$$

Portanto

$$g(R+k) \leq C(1-\delta)^{-2} \exp(2(R+k)(1-\delta))$$

e, dessa última expressão, concluímos que

$$2^{-k} g(R+k) \to 0$$

quando $k \to \infty$ e escolhendo $2(1-\delta) < \log 2$. Daí

$$g(R) \leq CR^2.$$

Ajustando a constante, temos

$$\int_{E(R)} \exp(2r) f^2 \leq CR^2, \tag{3}$$

para todo $R \geq R_0$.

Agora, na expressão

$$\begin{aligned} \frac{2t}{(R-R_1)^2} \int_{E(R-t)\setminus E(R_1)} \exp(2r) f^2 \leq{}& \frac{1}{(R-R_1)^2} \int_{E(R)\setminus E(R_1)} \exp(2r) f^2 \\ &+ \left(\frac{2}{R_1 - R_0} + \frac{1}{(R_1-R_0)^2} \right) \int_{E(R_1)\setminus E(R_0)} \exp(2r) f^2, \end{aligned}$$

se escolhermos $R_1 = R_0 + 1$ e $t = R/2$ concluímos que

$$R \int_{E(R/2)\setminus E(R_0+1)} \exp(2r) f^2 \leq CR^2 + \int_{E(R)\setminus E(R_0+1)} \exp(2r) f^2$$

e, da estimativa (3), temos

$$\int_{E(R/2)\setminus E(R_0+1)} \exp(2r)f^2 \leq CR.$$

Assim, para $R \geq R_0$,

$$\int_{E(R)} \exp(2r)f^2 \leq CR. \tag{4}$$

Escolhendo agora $R_1 = R - 4$ e $t = 2$, obtemos

$$\int_{E(R-2)\setminus E(R-4)} \exp(2r)f^2 \leq \frac{1}{4}\int_{E(R)\setminus E(R-4)} \exp(2r)f^2 + \left(\frac{8}{R-R_0-4} + \frac{4}{(R-R_0-4)^2}\right)\int_{E(R-4)\setminus E(R_0)} \exp(2r)f^2.$$

Usando (4), podemos limitar o segundo termo do lado direito da equação acima. Para o primeiro termo, escrevendo $E(R) \setminus E(R-4) = E(R) \setminus E(R-2) \cup E(R-2) \setminus E(R-4)$, encontramos

$$\int_{E(R-2)\setminus E(R-4)} \exp(2r)f^2 \leq C + \frac{1}{3}\int_{E(R)\setminus E(R-2)} \exp(2r)f^2.$$

Iterando a expressão acima k vezes temos

$$\int_{E(R+2)\setminus E(R)} \exp(2r)f^2 \leq C\sum_{i=0}^{k-1} 3^{-i} + 3^{-k}\int_{E(R+2(k+1))\setminus E(R+2k)} \exp(2r)f^2.$$

Usando novamente (4), podemos limitar a última integral acima por

$$3^{-k}\int_{E(R+2(k+1))\setminus E(R+2k)} \exp(2r)f^2 \leq C3^{-k}(R+2(k+1))$$

que tende a 0 quando $k \to \infty$. Assim

$$\int_{E(R+2)\setminus E(R)} \exp(2r)f^2 \leq C \tag{5}$$

para alguma constante $C > 0$ independente de R.

Para concluirmos o lema,

$$\int_{E(R+1)\setminus E(R)} \exp(2R)f^2 \leq \int_{E(R+1)\setminus E(R)} f^2\exp(2r) \leq C$$

pois $r > R$ em $E(R+1) \setminus E(R)$. $\square$

Lema 3.2 *Nas mesmas condições do lema anterior, a integral de Dirichlet da função f satisfaz a estimativa de decaimento*

$$\int_{E(R+1)\setminus E(R)} |\nabla f|^2 \leq C \exp\left(-2\sqrt{\lambda_1(E)}R\right)$$

e

$$\int_{E(R)} \exp\left(2\sqrt{\lambda_1(E)}R\right) |\nabla f|^2 \leq CR,$$

para R suficientemente grande.

Demonstração: Para $R > 1$, escolhemos ϕ dada por

$$\phi(x) = \begin{cases} r(x) - R + 1 & \text{em } E(R) \setminus E(R-1) \\ 1 & \text{em } E(R+1) \setminus E(R) \\ R + 2 - r(x) & \text{em } E(R+2) \setminus E(R+1). \end{cases}$$

Daí

$$\begin{aligned} 0 &= \int_E \phi^2(f-a)\Delta(f-a) \\ &= -\int_E \langle \nabla(\phi^2(f-a)), \nabla(f-a)\rangle \\ &= -\int_E \langle (f-a)(2\phi\nabla\phi) + \phi^2\nabla(f-a), \nabla(f-a)\rangle \\ &= -2\int_E \phi(f-a)\langle\nabla\phi, \nabla f\rangle - \int_E \phi^2|\nabla f|^2 \end{aligned}$$

e, pela desigualdade de Schwarz

$$\begin{aligned} \int_E \phi^2|\nabla f|^2 &= -2\int_E \phi(f-a)\langle\nabla\phi, \nabla f\rangle \\ &= \int_E -\langle 2(f-a)\nabla\phi, \phi\nabla f\rangle \\ &\leq \int_E |2(f-a)\nabla\phi||\phi\nabla f| \\ &\leq \frac{1}{2}\int_E \left(4(f-a)^2|\nabla\phi|^2 + \phi^2|\nabla f|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\int_E \phi^2|\nabla f|^2 + 2\int_E (f-a)^2|\nabla\phi|^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$\int_E \phi^2|\nabla f|^2 \leq 4\int_E |\nabla\phi|^2(f-a)^2.$$

Utilizando a definição da função ϕ, temos

$$\int_E |\nabla\phi|^2(f-a)^2 = \int_{E(R+2)\setminus E(R-1)} (f-a)^2,$$

logo

$$\int_{E(R+1)\setminus E(R)} |\nabla f|^2 \leq 4\int_{E(R+2)\setminus E(R-1)} (f-a)^2.$$

Pelo lema anterior

$$\int_{E(R+1)\setminus E(R)} |\nabla f|^2 \leq C\exp\left(-2\sqrt{\lambda_1(E)}R\right),$$

o que conclui a primeira parte do lema.

A desigualdade mostrada implica que

$$\int_{E(R+1)\setminus E(R)} \exp\left(2\sqrt{\lambda_1(R)}r\right)|\nabla f|^2 \leq C.$$

Tomando sucessivamente $R = R_0 + i$, para $i = 1, \ldots, k$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{E(R_0+2)\setminus E(R_0+1)} \exp\left(2\sqrt{\lambda_1}r\right)|\nabla f|^2 \leq C,\\
+&\int_{E(R_0+3)\setminus E(R_0+2)} \exp\left(2\sqrt{\lambda_1}r\right)|\nabla f|^2 \leq C,\\
&\vdots\\
+&\int_{E(R_0+k+1)\setminus E(R_0+k)} \exp\left(2\sqrt{\lambda_1}r\right)|\nabla f|^2 \leq C,\\
\Rightarrow &\int_{E(R_0+k+1)\setminus E(R_0+1)} \exp\left(2\sqrt{\lambda_1}r\right)|\nabla f|^2 \leq kC
\end{aligned}$$

o que prova a desigualdade desejada. □

Denotaremos por $V_E(\infty)$ o volume do fim E.

Teorema 3.1 *Seja E um fim de uma variedade completa M com $\lambda_1(E) > 0$.*

1. *Se E é um fim parabólico, então E tem volume com decaimento exponencial dado por*

$$V_E(\infty) - V_E(R) \leq C\exp(-2\sqrt{\lambda_1(E)}R,$$

para alguma constante $C > 0$ dependendo somente do fim E.

2. *Se E é um fim não-parabólico, então E tem volume com crescimento exponencial dado por*

$$V_E(R) \geq C\exp(2\sqrt{\lambda_1(E)}R),$$

para todo $R \geq R_0 + 1$ e alguma constante C dependendo somente do fim E.

Demonstração: Consideraremos novamente o caso $\lambda_1(E) = 1$. Seja f_R a função harmônica em $E(R)$ com $f_R = 1$ em ∂E e $f_R = 0$ em $\partial E(R)$. Sendo E um fim parabólico, então f_R converge para $f = 1$ quando $R \to \infty$. Da equação (5), sabemos que

$$\int_{E(R+2)\setminus E(R)} \exp(2r) f^2 \leq C.$$

Como $r \geq R$, temos que $\exp(2R) \leq \exp(2r)$ e a função limite agora é $f = 1$. Assim,

$$\int_{E(R+2)\setminus E(R)} \leq C \exp(-2R)$$
$$\Rightarrow V_E(R+2) - V_E(R) \leq C \exp(-2R).$$

Tomando $R = R + 2i$ com $i = 0, 1, \ldots$ e somando sobre i, temos

$$V_E(\infty) - V_E(R) \leq C \sum_{i=0}^{\infty} \exp(-2(R + 2i)).$$

Como para i grande $\exp(-4i) \leq i^{-2}$ temos que, adaptando nossa constante,

$$V_E(\infty) - V_E(R) \leq C \exp(-2R),$$

o que mostra nossa estimativa para o decaimento do volume de um fim parabólico.

Consideraremos agora o caso em que E é um fim não-parabólico. Nessa situação temos que a sequência f_R converge para uma função harmônica não-constante em E. Portanto, existe uma constante C positiva tal que para $r \geq R_0$

$$C = \int_{\partial E} \frac{\partial f}{\partial \nu} = \int_{\partial E(r)} \frac{\partial f}{\partial \nu} \leq \int_{\partial E(r)} |\nabla f| \leq \left(\int_{\partial E(r)} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\partial E(r)} |\nabla f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

logo

$$C \leq A_R^{\frac{1}{2}}(r) \left(\int_{\partial E(r)} |\nabla f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

e portanto

$$\frac{C}{A_E(r)} \leq \int_{\partial E(r)} |\nabla f|^2.$$

Integrando a expressão acima de R a $R+1$, utilizando o lema 3.2 e adaptando as constantes quando necessário, temos

$$\begin{aligned}\int_R^{R+1} \frac{1}{A_E(r)} dr &\leq \frac{1}{C} \int_R^{R+1} \int_{\partial E(r)} \\ &= \frac{1}{C} \int_{E(R+1)\setminus E(R)} |\nabla f|^2 \\ &\leq C \exp(-2R).\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}1 &= \int_R^{R+1} A_R(r). \frac{1}{A_R(r)} dr \\ &\leq \int_R^{R+1} A_E(r) dr \int_R^{R+1} \frac{1}{A_E(r)} dr \\ &\leq (V_E(R+1) - V_E(R)).(C \exp(-2R)) \\ &\leq C V_E(R+1) \exp(-2R)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C} \exp(2R) \leq V_E(R+1).$$

Agora, dado $R \geq R_0 + 1$, chamamos $R' = R - 1$. Aplicando a desigualdade acima para R', temos

$$\begin{aligned}V_E(R) &= V_E(R'+1) \\ &\geq \frac{1}{C} \exp(2R') \\ &= \frac{1}{C} \exp(2(R-1)) \\ &= \left(\frac{1}{C} \exp(-2)\right) \exp(2R),\end{aligned}$$

que é o resultado desejado. $\square$

4 TEOREMA PRINCIPAL

Faremos agora duas proposições que utilizaremos na demonstração do teorema de Li-Wang.

Proposição 4.1 (Yau) *Seja f uma função harmônica. Em todo ponto p tal que $\nabla f(p) \neq 0$ vale que*

$$|\nabla^2 f|^2 \geq \frac{n|\nabla|\nabla f||^2}{(n-1)}.$$

Demonstração: Escolhendo um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ tal que $|\nabla f|e_1 = \nabla f$ e $e_\alpha f = 0$ para todo $\alpha \neq 1$, temos

$$\begin{aligned}
|\nabla^2 f|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^2 \\
&\geq \sum_{j=1}^{n} f_{1j}^2 + \sum_{\alpha=2}^{n} f_{\alpha 1}^2 + \sum_{\alpha=2}^{n} f_{\alpha\alpha}^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n} f_{1j}^2 + \sum_{\alpha=2}^{n} f_{\alpha 1}^2 + \frac{1}{n-1}\sum_{\alpha=2}^{n} f_{\alpha\alpha}^2 + \frac{1}{n-1}\sum_{2\leq\alpha<\beta\leq n}(f_{\alpha\alpha}^2 + f_{\beta\beta}^2) \\
&\geq \sum_{j=1}^{n} f_{1j}^2 + \sum_{\alpha=2}^{n} f_{\alpha 1}^2 + \frac{1}{n-1}\sum_{\alpha=2}^{n} f_{\alpha\alpha}^2 + \frac{1}{n-1}\sum_{2\leq\alpha<\beta\leq n}(2f_{\alpha\alpha}f_{\beta\beta}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} f_{1j}^2 + \sum_{\alpha=2}^{n} f_{\alpha 1}^2 + \frac{1}{n-1}\left(\sum_{\alpha=2}^{n} f_{\alpha\alpha}\right)^2.
\end{aligned}$$

Usando que f é harmônica, temos

$$\sum_{\alpha=2}^{n} f_{\alpha\alpha} = -f_{11},$$

assim

$$\begin{aligned}
|\nabla^2 f|^2 &= \sum_{j=1}^{n} f_{1j}^2 + \sum_{\alpha=2}^{n} f_{\alpha 1}^2 + \frac{1}{n-1}f_{11}^2 \\
&= 2\sum_{j=2}^{n} f_{1j}^2 + \frac{n}{n-1}f_{11}^2 \\
&\geq \frac{n}{n-1}\sum_{j=1}^{n} f_{1j}^2.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se denotarmos $h = |\nabla f|$, então

$$\begin{aligned}4|\nabla f|^2|\nabla|\nabla f||^2 &= 4h^2\langle\nabla h,\nabla h\rangle\\ &= \langle 2h\nabla h, 2h\nabla h\rangle\\ &= \langle\nabla h^2,\nabla h^2\rangle\\ &= |\nabla(|\nabla f|^2)|^2.\end{aligned}$$

Chamando $g = |\nabla f|^2$, temos que $g = f_1^2$ assim $dg = 2f_1 df_1$, ou seja

$$dg = 2f_1\left(\sum_j f_{1j}\omega_j - \sum_j f_j\omega_{j1}\right) = 2f_1\sum_j f_{ij}\omega_j$$

pois $f_j = 0$, para $j > 1$ e $\omega_{11} = 0$. Assim, escrevendo $dg = \sum_i g_i\omega_i$, temos

$$g_i = 2f_1 f_{1i}$$

e

$$|\nabla(|\nabla f|^2)|^2 = |\nabla g|^2 = \sum_{i=1}^n g_i^2 = 4f_1^2\sum_{i=1}^n f_{1i}^2 = 4|\nabla f|^2\sum_{i=1}^n f_{1i}^2.$$

Unindo os resultados acima, temos

$$|\nabla^2 f|^2 \geq \frac{n}{n-1}\sum_{j=1}^n f_{1j}^2 = \frac{n|\nabla(|\nabla f|^2)|^2}{(n-1)4|\nabla f|^2} = \frac{n4|\nabla f|^2|\nabla|\nabla f||^2}{(n-1)4|\nabla f|^2} = \frac{n}{n-1}|\nabla|\nabla f||^2$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Proposição 4.2 *Nas condições da proposição 4.1, se*

$$|\nabla^2 f|^2 = \frac{n|\nabla|\nabla f||^2}{n-1}$$

então

$$(f_{ij}) = \begin{pmatrix} -(n-1)\mu & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \mu & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \mu & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu \end{pmatrix}$$

onde $\mu = f_{22} = \ldots = f_{nn}$.

Demonstração: Da prova da proposição 4.1, temos

$$|\nabla^2 f|^2 = \sum_{i,j}^n f_{ij}^2 = \sum_{j=1}^n f_{ij}^2 + \sum_{\alpha=2}^n f_{\alpha i}^2 + \sum_{\alpha=2}^n f_{\alpha\alpha}^2,$$

então
$$\sum_{i,j} f_{ij}^2 = 0$$
onde a soma acima é considerada com $i = 2, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$ e $i \neq j$. Assim, como $f_{ij} = f_{ji}$, temos
$$f_{ij} = 0, \text{ se } i \neq j.$$

Temos também que

$$\sum_{j=1}^{n} f_{1j}^2 + \sum_{\alpha=2}^{n} f_{\alpha 1}^2 + \frac{1}{n-1}\sum_{\alpha=2}^{n} f_{\alpha\alpha}^2 + \frac{1}{n-1}\sum_{2\leq\alpha<\beta\leq n}(f_{\alpha\alpha}^2 + f_{\beta\beta}^2)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} f_{1j}^2 + \sum_{\alpha=2}^{n} f_{\alpha 1}^2 + \frac{1}{n-1}\sum_{\alpha=2}^{n} f_{\alpha\alpha}^2 + \frac{1}{n-1}\sum_{2\leq\alpha<\beta\leq n}(2f_{\alpha\alpha}f_{\beta\beta})$$

ou seja,

$$\sum_{2\leq\alpha<\beta\leq n}(f_{\alpha\alpha}^2 + f_{\beta\beta}^2) = \sum_{2\leq\alpha<\beta\leq n}(2f_{\alpha\alpha}f_{\beta\beta})$$

assim, para $\alpha > 3$
$$(f_{22} - f_{\alpha\alpha})^2 = 0 \Rightarrow f_{22} = f_{\alpha\alpha}.$$

Finalmente, como $\Delta f = 0$, temos

$$\sum_{i=1}^{n} f_{ii} = 0 \Rightarrow f_{11} = -(n-1)f_{22},$$

mostrando que o Hessiano tem a forma desejada. $\square$

Teorema 4.1 *Seja M uma variedade Riemanniana completa de dimensão $n \geq 3$. Suponha que $\lambda_1(M) > 0$ e*
$$Ric_M \geq -\frac{(n-1)\lambda_1(M)}{n-2}.$$

Então

1. *M tem só um fim com volume infinito, ou*
2. *$M = \mathbb{R} \times N$ com a métrica*

$$ds^2 = dt^2 + \cosh\left(\sqrt{\frac{\lambda_1(M)}{n-2}}t\right) ds_N^2,$$

onde N é uma variedade compacta com curvatura de Ricci limitada inferiormente *por*

$$Ric_N \geq -\lambda_1(M).$$

Demonstração: Seja $f \in K$ uma função harmônica construída na seção 1. Denotamos por

$$h = |\nabla f|$$

a norma do gradiente de f. A fórmula de Bochner (ver YAU, 1976) mostra que

$$\Delta h^2 = 2Ric_M\left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|}, \frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right)|\nabla f|^2 + 2|\nabla^2 f|^2,$$

onde Ric_M denota a curvatura de Ricci de M e $\nabla^2 f$ é o Hessiano de f.

Pela proposição 4.1, temos

$$|\nabla^2 f|^2 \geq \frac{n|\nabla|\nabla f||^2}{(n-1)}.$$

Combinando a fórmula acima com a fórmula de Bochner e a condição na curvatura de Ricci, temos

$$\Delta h^2 \geq -2\frac{(n-1)\lambda_1(M)}{n-2}h^2 + 2\frac{n}{n-1}|\nabla|\nabla f||^2.$$

Agora, usando que $h = |\nabla f|$,

$$2h\Delta h + 2|\nabla h|^2 \geq -2\frac{(n-1)\lambda_1(M)}{n-2}h^2 + 2\frac{n}{n-1}|\nabla h|^2$$

$$\Rightarrow \Delta h \geq -\frac{(n-1)\lambda_1(M)}{n-2}h + \frac{|\nabla h|^2}{(n-1)h}. \tag{6}$$

Denotando por $g = h^{\frac{n-2}{n-1}} = |\nabla f|^{\frac{n-2}{n-1}}$ e usando que

$$\Delta(f_1 \dots f_n) = \sum_{i=1}^{n} f_1 \dots f_{i-1}f_{i+1} \dots f_n \Delta f_i + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} F_{i,j}\langle \nabla f_i, \nabla f_j\rangle,$$

onde $F_{i,j}$ é o produto das funções f_n com $n \notin \{i,j\}$, temos que a equação acima pode ser escrita como

$$\Delta g \geq -\lambda_1(M)g. \tag{7}$$

De fato,

$$\Delta g^{n-1} = \Delta h^{n-2},$$

enquanto que

$$\Delta g^{n-1} = (n-1)g^{n-2}\Delta g + 2\binom{n-1}{2} g^{n-3}|\nabla g|^2$$

e

$$\begin{aligned}
\Delta h^{n-2} &= (n-2)h^{n-3}\Delta h + 2\binom{n-2}{2} h^{n-4}|\nabla h|^2 \\
&\geq (n-2)h^{n-3}\left(-\frac{(n-1)\lambda_1(M)h}{n-2} + \frac{|\nabla h|^2}{(n-1)h}\right) + (n-2)(n-3)h^{n-4}|\nabla h|^2 \\
&= -(n-1)\lambda_1(M)h^{n-2} + \frac{(n-2)^3}{n-1}|\nabla h|^2 h^{n-4}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$(n-1)g^{n-2}\Delta g \geq -(n-1)\lambda_1(M)g^{n-1} + \frac{n-2}{n-1}g^{n-1}\left((n-2)^2\frac{|\nabla h|^2}{h^2} - (n-1)^2\frac{|\nabla g|^2}{g^2}\right).$$

Assim, resta verificarmos que o último termo da desigualdade acima é nulo. Para isso, usando novamente que $g^{n-1} = h^{n-2}$, temos

$$(n-1)g^{n-2}\nabla g = \nabla g^{n-1} = \nabla h^{n-2} = (n-2)h^{n-3}\nabla h,$$

ou seja

$$(n-1)^2\frac{|\nabla g|^2}{g^2}(g^{n-1})^2 = (n-2)^2\frac{|\nabla h|^2}{h^2}(h^{n-2})^2 = (n-2)^2\frac{|\nabla h|^2}{h^2}(g^{n-1})^2.$$

Logo

$$(n-1)^2\frac{|\nabla g|^2}{g^2} = (n-2)^2\frac{|\nabla h|^2}{h^2}$$

como queríamos.

Mostraremos agora que a função g escolhida satisfaz a equação

$$\int_{B_p(2R)\setminus B_p(R)} g^2 \leq CR.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{B}} g^2 &= \int_{\tilde{B}} g^2 \exp\left(\frac{2(n-2)\sqrt{\lambda_1(M)}r}{n-1}\right)\exp\left(-\frac{2(n-2)\sqrt{\lambda_1(M)}r}{n-1}\right) \\
&\leq \left(\int_{\tilde{B}} (g^2)^{\frac{n-1}{n-2}}\exp\left(2\sqrt{\lambda_1(M)}r\right)\right)^{\frac{n-2}{n-1}}\left(\int_{\tilde{B}}\exp\left(-2(n-2)\sqrt{\lambda_1(M)}r\right)\right)^{\frac{1}{n-1}},
\end{aligned}$$

onde $\tilde{B} = B_p(2R) \setminus B_p(R)$.

Pelo teorema de comparação do volume de Bishop, como

$$Ric_M \geq -\frac{(n-1)\lambda_1(M)}{n-2},$$

temos que

$$A_p(r) \leq A_\kappa(r),$$

onde $A_\kappa(r)$ é a área da esfera geodésica de raio r em um espaço com curvatura constante dada por

$$k = -\frac{\lambda_1(M)}{n-2}.$$

Daí

$$\begin{aligned}
&\int_{B_p(2R)\setminus B_p(R)} \exp\left(-2(n-2)\sqrt{\lambda_1(M)}r\right) \\
&\quad \leq C\int_R^{2R} \exp\left(-2(n-2)\sqrt{\lambda_1(M)}\right)\exp\left(\frac{(n-1)\sqrt{\lambda_1(M)}}{\sqrt{n-2}}r\right)dr \\
&\quad = C\int_R^{2R} \exp\left(\left(\frac{n-1}{\sqrt{n-2}} - 2(n-2)\right)\sqrt{\lambda_1(M)}r\right)dr.
\end{aligned}$$

A expressão acima é quase linear em R se $n = 3$ e decai exponencialmente para zero quando $n \geq 4$. Combinando com a estimativa do lema 3.2, obtemos que

$$\int_{B(p,2R)\setminus B(p,R)} g^2 \leq CR$$

para $n = 3$, e

$$\int_{B(p,2R)\setminus B(p,R)} g^2 \to 0$$

quando $n \geq 4$.

Para completarmos a demonstração, consideraremos ϕ uma função não-negativa com suporte compacto em M. Então

$$\int_M |\nabla(\phi g)|^2 = \int_M g^2|\nabla\phi|^2 + 2\int_M \phi g\langle\nabla\phi, \nabla g\rangle + \int_M \phi^2|\nabla g|^2. \tag{8}$$

O segundo termo do lado direito da equação acima pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
2\int_M \phi g\langle\nabla\phi,\nabla g\rangle &= \frac{1}{2}\int_M \langle\nabla(\phi^2),\nabla(g^2)\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\int_M \phi^2\Delta g^2 \qquad\qquad \text{(pois } \phi \text{ tem suporte compacto)} \\
&= -\int_M \phi^2 g\Delta g - \int_M \phi^2|\nabla g|^2 \\
&= \lambda_1(M)\int_M \phi^2 g^2 - \int_M \phi^2|\nabla g|^2 - \int_M \phi^2 g(\Delta g + \lambda_1(M)g).
\end{aligned}$$

Assim, substituindo o resultado acima na equação 8 e utilizando que

$$\lambda_1(M) \leq \frac{\displaystyle\int_M |\nabla(\phi g)|^2}{\displaystyle\int_M \phi^2 g^2}$$

temos

$$\begin{aligned}
\lambda_1(M)\int_M \phi^2 g^2 &\leq \int_M |\nabla(\phi g)|^2 \\
&= \lambda_1(M)\int_M \phi^2 g^2 + \int_M |\nabla\phi|^2 - \int_M \phi^2 g(\Delta g + \lambda_1(M)g).
\end{aligned}$$

Daí

$$\int_M \phi^2 g(\Delta g + \lambda_1(M)g) \leq \int_M |\nabla\phi|^2 g^2. \tag{9}$$

Para $R > 0$, escolhemos ϕ satisfazendo

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{em } B_p(R) \\ 0 & \text{em } M \setminus B_p(2R) \end{cases}$$

e

$$|\nabla\phi| \leq CR^{-1}, \text{ em } B_p(2R) \setminus B_p(R)$$

para alguma constante $C > 0$.

Com isso, o lado direito da equação 9 pode ser estimado por

$$\int_M |\nabla\phi|^2 g^2 \leq C^2 R^{-2}\int_{B_p(2R)\setminus B_p(R)} g^2.$$

Pelo que já foi feito anteriormente, a expressão acima tende a 0 quando $R \to \infty$. Assim, como

$$\Delta g \geq -\lambda_1(M)$$

então

$$0 \leq \int_M g(\Delta g + \lambda_1(M)),$$

mostrando que ou g é identicamente nula ou satisfaz

$$\Delta g = -\lambda_1(M)g.$$

Se M tem mais de um fim com volume infinito, pelo que foi feito na seção 1, existe uma função harmônica não-constante f, daí $g \neq 0$. Da proposição 4.2, temos que o Hessiano de f tem a forma

$$(f_{ij}) = \begin{pmatrix} -(n-1)\mu & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mu \end{pmatrix}$$

onde $\mu = f_{22} = \ldots = f_{nn}$.

O fato de $f_{1\alpha} = 0$ para $\alpha \neq 1$ implica que $|\nabla f|$ é constante nas curvas de nível de f. Ou seja, as curvas de nível de $|\nabla f|$ e f coincidem. Além disso,

$$\mu\delta_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta}$$

e

$$f_{\alpha\beta} = df_\alpha(e_\beta) + \sum_{j=1}^{n} f_j\omega_{j\alpha}(e_\beta) = f_1\omega_{1\alpha}(e_\beta) = h_{\alpha\beta}f_1$$

com $\alpha, \beta \in \{2, \ldots, n\}$ e $(h_{\alpha\beta})$ sendo a segunda forma fundamental da curva de nível de f. Somando a expressão acima de 2 a n com $\alpha = \beta$, encontramos

$$f_{11} = -Hf_1 \tag{10}$$

onde H é a curvatura média da curva de nível de f.

Como $g = |\nabla f|^{\frac{n-2}{n-1}}$, usando que

$$df_1 = \sum_j f_{1j}\omega_j + \sum_j f_j\omega_{j1} = f_{11}\omega_1,$$

temos

$$dg = \frac{n-2}{n-1}|\nabla f|^{-\frac{1}{n-1}}df_1 = \frac{n-2}{n-1}|\nabla f|^{-\frac{1}{n-1}}f_{11}\omega_1.$$

Daí

$$g_i = \begin{cases} \dfrac{n-2}{n-1}|\nabla f|^{-\frac{1}{n-1}}f_{11}, & i = 1 \\ 0, & i > 1, \end{cases}$$

e, para $i > 1$

$$g_{ii} = dg_i(e_i) + \sum_j g_j\omega_{ji}(e_i) = g_1\omega_{1i}(e_i) = g_1 h_{ii}.$$

Usando que $\Delta g = -\lambda_1(M)$, obtemos

$$-\lambda_1(M)g = g_{11} + Hg_1. \tag{11}$$

Substituindo o valor de g_1 na equação 10 temos

$$H = -f_1^{-1}f_{11} = -f_1^{-1}g_1\frac{n-1}{n-2}|\nabla f|^{\frac{1}{n-1}} = -\frac{n-1}{n-2}g_1g^{-1}. \tag{12}$$

Agora, substituindo o valor de H acima obtido na equção 11, temos

$$g_{11} - \frac{n-1}{n-2}(g_1)^2g^{-1} + \lambda_1(M)g = 0.$$

Chamando $u = g^{-\frac{1}{n-2}}$ temos os seguintes fatos:

$$du = -\frac{1}{n-2}g^{\frac{n-1}{n-2}}g_1\omega_1 = u_1\omega_1$$

e

$$du_1 = \frac{n-1}{(n-2)^2}g^{-\frac{2n-3}{n-2}}g_1^2\omega_1 - \frac{1}{n-2}g^{-\frac{n-1}{n-2}}dg_1.$$

Usando que $u_{11} = du_1(e_1)$ e $g_{11} = dg_1(e_1)$ a equação diferencial acima torna-se

$$u_{11} - \frac{\lambda_1(M)}{n-2}u = 0.$$

Considerando $\gamma(t)$ uma curva integral do campo e_1 e analisando $u \circ \gamma$ encontramos a EDO

$$\frac{d^2}{dt^2}(u\circ\gamma)(t) - \frac{\lambda_1(M)}{n-2}(u\circ\gamma)(t) = 0,$$

pois

$$\frac{d}{dt}(u\circ\gamma)(t) = du_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = (u_1\omega_1)_{\gamma(t)}(e_1(\gamma(t))) = u_1(\gamma(t))$$

e

$$\frac{d^2}{dt^2}(u\circ\gamma)(t) = (du_1)_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = u_{11}(\gamma(t)).$$

Uma solução para a EDO acima é

$$u(\gamma(t)) = A\exp\left(\sqrt{\frac{\lambda_1(M)}{n-2}}t\right) + B\exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda_1(M)}{n-2}}t\right),$$

onde A e B são constantes não-negativas, pois $u \geq 0$.

Agora, seja N uma curva de nível de h. Mostraremos que N deve ser compacta. De fato, como f não tem pontos críticos e as curvas de nível de f coincidem com as curvas de nível de h, M tem que ser topologicamente o produto $\mathbb{R} \times N$. Se N fosse não compacta, então M teria somente um fim, o que contradiz nossa hipótese de M ter pelo menos dois fins com volumes infinitos, daí N é compacta. Desde que $h = |\nabla f|$ está em L^2, concluímos que h admite máximo. Podemos, então, supor sem perda de generalidade que $N = \{h = 1\}$. Assim, u tem que assumir um mínimo em N, daí, reparametrizando, se necessário, podemos assumir que o mínimo ocorre em $t = 0$. Assim

$$0 = u'(\gamma(0)) = A - B$$

e

$$1 = u(\gamma(0)) = A + B,$$

o que implica que

$$u(\gamma(t)) = \cosh\left(\sqrt{\lambda_1(M)}n - 2t\right)$$

e

$$g(\gamma(t)) = \cosh^{-(n-2)}\left(\sqrt{\lambda_1(M)}n - 2t\right).$$

Com isto

$$\begin{aligned} g_1(\gamma(t)) &= \frac{d}{dt}\left(\cosh^{-(n-2)}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1(M)}{n-2}}t\right)\right) \\ &= -(n-2)\sqrt{\frac{\lambda_1(M)}{n-2}}\cosh^{-n+1}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1(M)}{n-2}}t\right)\sinh\left(\sqrt{\frac{\lambda_1(M)}{n-2}}t\right). \end{aligned}$$

Usando a equação 12, encontramos

$$H(\gamma(t)) = -\frac{n-1}{n-2}g_1g^{-1} = (n-1)\tanh\left(\sqrt{\frac{\lambda_1(M)}{n-2}}t\right)$$

e

$$(h_{\alpha\beta}(t)) = \tanh\left(\sqrt{\frac{\lambda_1(M)}{n-2}}t\right).$$

O que foi feito acima implica que a métrica em $M = \mathbb{R} \times N$ tem que ter a forma

$$ds_M = dt^2 + \cosh^2\left(\sqrt{\frac{\lambda_1(M)}{n-2}}\right) ds_N^2,$$

como desejado. $\square$

5 APLICAÇÕES

5.1 Limitação no número de fins com volume infinito

Teorema 5.1 *Seja M uma variedade Riemanniana completa de dimensão $n \geq 3$. Suponha que existe uma bola geodésica $B_p(R_0) \subset M$ centrada em $p \in M$ de raio R_0 tal que*

$$\lambda_1(M \setminus B_p(R_0)) > 0.$$

Se a curvatura de Ricci é limitada inferiormente por

$$Ric_M \geq -\frac{(n-1)\lambda_1(M \setminus B_p(R_0))}{n-2} + \epsilon$$

para algum $\epsilon > 0$ em $B_p(R_0)$, então M deve ter finitos fins com volume infinito. Em particular, existe uma constante $C = C(n, R_0, \alpha, \nu, \epsilon) > 0$ dependendo de $n, R_0, \epsilon, \alpha = \inf_{B_p(3R_0)} Ric_M$ e $\nu = \inf_{x \in B_p(2R_0)} V_x(R_0)$, tal que o número de fins com volume infinito de M é no máximo C.

Demonstração: É suficiente estimarmos a dimensão do espaço K. Como

$$\lambda_1(M \setminus B_p(R_0)) > 0,$$

os lemas 3.1 e 3.2 mostram que para cada $f \in K$, a função

$$g = |\nabla f|^{\frac{n-2}{n-1}}$$

satisfaz a estimativa

$$\int_{B_p(2R) \setminus B_p(R)} g^2 \leq CR.$$

Seguindo a demonstração do teorema 4.1, chamando $h = |\nabla f|$, temos que, em $M \setminus B_p(R_0)$,

$$\Delta h^2 \geq 2\left(-\frac{(n-1)\lambda_1(M \setminus B_p(R_0))}{n-2} + \epsilon\right) h^2 + 2\frac{n}{n-1}|\nabla h|^2,$$

o que mostra que

$$\Delta h = \left(-\frac{n-1}{n-2}\lambda_1(M \setminus B_p(R_0)) + \epsilon\right) h + \frac{1}{n-1}\frac{|\nabla h|^2}{h}.$$

Da relação $\Delta g^{n-1} = \Delta h^{n-2}$, encontramos que

$$(n-1)g^{n-2}\Delta g+(n-1)(n-2)g^{n-3}|\nabla g|^2\geq(n-2)(n-3)h^{n-4}|\nabla h|^2$$

$$+(n-2)h^{n-3}\left(\left(-\frac{n-1}{n-2}\lambda_1(M\setminus B_p(R_0))+\epsilon\right)h+\frac{1}{n-1}\frac{|\nabla h|^2}{h}\right).$$

Como

$$(n-1)^2\frac{|\nabla g|^2}{g^2}=(n-2)^2\frac{|\nabla h|^2}{h^2},$$

temos

$$\Delta g\geq(\epsilon-\lambda_1(M\setminus B_(R_0)))g \tag{13}$$

em $M\setminus B_p(R_0)$.

Similarmente a equação 9, encontramos que

$$\epsilon\int_M\phi^2g^2\leq\int_M|\nabla\phi|^2g^2 \tag{14}$$

é válida para qualquer função *cut-off* não-negativa com suporte em $M\setminus B_p(R_0)$.

Escolhemos ϕ satisfazendo

$$\phi=\begin{cases}0 & \text{em } B_p(R_0)\\ 1 & \text{em } B_p(R_0)\setminus B_p(2R_0)\\ 0 & \text{em } M\setminus B_p(2R),\end{cases}$$

$$|\nabla\phi|\leq CR_0^{-1}\text{ em } B_p(2R_0)\setminus B_p(R_0)$$

e

$$|\nabla\phi|\leq CR^{-1}\text{ em } B_p(2R)\setminus B_p(R)$$

para alguma constante $C>0$.

Usando que

$$\int_{B_p(2R)\setminus B_p(R)}g^2\leq CR,$$

e fazendo $R\to\infty$, concluímos de (14), que

$$\epsilon\int_{M\setminus B_p(2R_0)}g^2\leq CR_0^{-2}\int_{B_p(2R_0)\setminus B_p(R_0)}g^2.$$

Em particular,

$$\int_{B_p(3R_0)} g^2 \leq \left(1 + \frac{C}{\epsilon R_0^2}\right) \int_{B_p(2R_0)} g^2. \qquad (15)$$

Como g satisfaz a equação

$$\Delta g \geq -\alpha g$$

em $B_p(3R_0)$, a desigualdade do valor médio de Li-Tam (ver LI & TAM, 1991) assegura que

$$g^2(x) \leq C \int_{B_x(R_0)} g^2 \leq C \int_{B_p(3R_0)} g^2$$

para qualquer $x \in B_p(2R_0)$, onde $C > 0$ é uma constante dependendo apenas de n, α e ν. Combinando com (15)

$$\sup_{B_p(2R_0)} g^2 \leq C \int_{B_p(2R_0)} g^2.$$

Por outro lado, a desigualdade de Schwarz implica que

$$\int_{B_p(2R_0)} g^2 \leq \left(\int_{B_p(2R_0)} |\nabla f|^2 \right)^{\frac{n-2}{n-1}} V_p(2R_0)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Daí

$$\sup_{B_p(2R_0)} |\nabla f|^2 \leq C \int_{B_p(2R_0)} |\nabla f|^2. \qquad (16)$$

Se f não é identicamente constante, então

$$\int_{B_p(2R_0)} |\nabla f|^2 \neq 0.$$

Portanto, a forma bilinear

$$\int_{B_p(2R_0)} \langle \nabla f_1, \nabla f_2 \rangle$$

é não degenerada no espaço das 1-formas

$$\bar{K} = \{df \ ; \ f \in K\}.$$

Aplicando o lema 11 de (LI, 1980), existe $df_0 \in \bar{K} \setminus \{0\}$ tal que

$$\dim \bar{K} \int_{B_p(2R_0)} |df_0|^2 \leq V_p(2R_0)(\min\{n, \dim \bar{K}\}) \sup_{B_p(2R_0)} |df_0|^2.$$

Combinando com (16), concluímos que

$$\dim K = \dim \bar{K} + 1 \leq C,$$

como queríamos. $\square$

5.2 Estimando a dimensão de $H^1(L^2(M))$

Como descrito em (LI & WANG, 2002), desde que a derivada exterior de uma função harmônica com integral de Dirichlet finita é uma L^2 1-forma harmônica, temos

$$\dim H^1(L^2(M)) + 1 \geq \text{ número de fins não-parabólicos.}$$

Adicionando a hipótese de $\lambda_1(M) > 0$, temos

$$\dim H^1(L^2(M)) + 1 \geq \text{ número de fins com volume infinito.}$$

Com isso, se conseguirmos estimar a dimensão do espaço $H^1(L^2(M))$ teremos uma estimativa para o número de fins com volume infinito da variedade. Verificaremos um caso particular, onde impondo uma restrição sobre a curvatura de Ricci teremos $H^1(L^2(M)) = 0$.

Lema 5.1 *Seja M uma variedade Riemanniana. Suponha que h é uma função não-negativa satisfazendo a desigualdade*

$$\Delta h \geq -ah + b\frac{|\nabla h|^2}{h}$$

onde a e b são constantes com $b \geq 0$. Então, para qualquer $\delta > 0$ e qualquer função cut-off com suporte compacto ϕ, temos

$$\int_M |\nabla(\phi h)|^2 \leq \frac{a(1+\delta)}{a+\delta(1+b)} \int_M \phi^2 h^2 + \left(1 + \frac{\delta^2 b}{1+\delta(1+b)}\right) \int_M |\nabla \phi|^2 h^2.$$

Demonstração: Um cálculo simples mostra que

$$\int_M |\nabla(\phi h)|^2 = \int_M |\nabla \phi|^2 h^2 + 2\int_M \phi h \langle \phi, \nabla h\rangle + \int_M \phi^2 |\nabla h|^2. \tag{17}$$

O segundo termo do lado direito da equação acima pode ser estimado como

$$
\begin{aligned}
2\int_M \phi h\langle\nabla\phi,\nabla h\rangle &= \int_M \langle\nabla\phi^2, h\nabla h\rangle \\
&= -\int_M \phi^2 h\Delta h - \int_M \phi^2|\nabla h|^2 \\
&\leq \int_M \phi^2 h\left(ah - b\frac{|\nabla h|^2}{h}\right) - \int_M \phi^2|\nabla h|^2 \\
&= a\int_M \phi^2h^2 - (1+b)\int_M \phi^2|\nabla h|^2.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, temos a estimativa

$$
\begin{aligned}
2\int_M \phi h\langle\nabla\phi,\nabla h\rangle &\leq 2\int_M \phi h|\nabla\phi||\nabla h| \\
&= \int_M 2\left(\sqrt{\delta}h|\nabla\phi|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\phi|\nabla h|\right) \\
&\leq \delta\int_M |\nabla\phi|^2h^2 + \frac{1}{\delta}\int_M \phi^2|\nabla h|^2.
\end{aligned}
$$

Com essas duas estimativas, temos

$$
\begin{aligned}
2\int_M \phi h\langle\nabla\phi,\nabla h\rangle &= 2\left(\frac{1+\delta}{1+\delta(1+b)} + \frac{\delta b}{1+\delta(1+b)}\right)\int_M \phi h\langle\nabla\phi,\nabla h\rangle \\
&\leq \frac{1+\delta}{1+\delta(1+b)}\left(a\int_M \phi^2h^2 - (1+b)\int_M \phi^2|\nabla h|^2\right) \\
&\quad + \frac{\delta b}{1+\delta(1+b)}\left(\delta\int_M |\nabla\phi|^2h^2 + \frac{1}{\delta}\int_M \phi^2|\nabla h|^2\right) \\
&= \frac{a(1+\delta)}{1+\delta(1+b)}\int_M \phi^2h^2 - \int_M \phi^2|\nabla h|^2 \\
&\quad + \frac{\delta^2 b}{1+\delta(1+b)}\int_M |\nabla\phi|^2h^2
\end{aligned}
$$

Substituindo a expressão acima em (17),obtemos o resultado desejado. □

Teorema 5.2 *Seja M uma variedade Riemanniana completa. Suponha que $\lambda_1(M) > 0$ e*

$$
Ric_M \geq -\frac{n\lambda_1(M)}{n-1} + \epsilon
$$

para algum $\epsilon > 0$. Então $H^1(L^2(M)) = 0$.

Demonstração: Seja $\omega \in H^1(L^2(M))$ uma L^2 1-forma harmônica. Sabemos que ω tem que ser fechada e co-fechada. Chamando $h = |\omega|$, pela fórmula de Bochner, temos

$$
\Delta h \geq \frac{Ric_M(\omega,\omega)}{h} + \frac{|\nabla h|^2}{(n-1)h}.
$$

A limitação da curvatura de Ricci implica que

$$\Delta h \geq \left(\epsilon - \frac{n\lambda_1(M)}{n-1}\right) h + \frac{|\nabla h|^2}{(n-1)h}.$$

Considerando ϕ uma função *cut-off* não-negativa com suporte compacto em M e chamando $a = \frac{n\lambda_1(M)}{n-1} - \epsilon$ e $b = \frac{1}{n-1}$, o lema anterior mostra que

$$\int_M |\nabla(\phi h)|^2 \leq \left(\frac{n\lambda_1(M)(1+\delta)}{n-1+n\delta} - \frac{\epsilon(n-1)(1+\delta)}{n-1+n\delta}\right) \int_M \phi^2 h^2$$
$$+ \left(\frac{n-1+\delta(\delta+n)}{n-1+\delta n}\right) \int_M |\nabla\phi|^2 h^2.$$

Como

$$\lambda_1(M) \int_M \phi^2 h^2 \leq \int_M |\nabla(\phi h)|^2,$$

concluímos que

$$(\epsilon(n-1)(1+\delta) - \lambda_1(M)) \int_M \phi^2 h^2 \leq (n-1+\delta(\delta+n)) \int_M |\nabla\phi|^2 h^2. \tag{18}$$

Para $R > 0$, escolhemos ϕ satisfazendo

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{em } B_p(R) \\ 0 & \text{em } M \setminus B_p(2R) \end{cases}$$

e

$$|\nabla\phi| \leq CR^{-1} \text{ em } B_p(2R) \setminus B_p(R)$$

para alguma constante $C > 0$.

Substituindo essa escolha da função ϕ na equação (18) e usando que

$$\int_{B_p(R)} h^2 \leq \int_{B_p(2R)} h^2 = \int_M \phi^2 h^2,$$

temos

$$(\epsilon(n-1)(1+\delta) - \lambda_1(M)) \int_{B_p(R)} \phi^2 h^2 \leq (n-1+\delta(\delta+n)) \int_{B_p(2R)\setminus B_p(R)} |\nabla\phi|^2 h^2.$$

Usando que $h \in L^2$ e fazendo $R \to \infty$, temos que o lado direito da equação acima tende para zero. Escolhendo δ suficientemente grande de forma que

$$\epsilon(n-1)(1+\delta) > \lambda_1(M),$$

obtemos

$$(\epsilon(n-1)(1+\delta) - \lambda_1(M)) \int_{B_p(R)} \phi^2 h^2 = 0,$$

mostrando que $h = 0$. Isso mostra que $H^1(L^2(M)) = 0$. □

5.3 Variedades Kähler

Teorema 5.3 *Seja M uma variedade Kähler completa de dimensão complexa m. Seja x_0 a única solução positiva da equação*

$$4x^3 + 2(2m-1)x^2 - (2m-1)^2 = 0.$$

Suponha que $\lambda_1(M) > 0$ e

$$Ric_M \geq -(2m-1)x_0^{-2}\lambda_1(M) + \epsilon$$

para algum $\epsilon > 0$. Então M tem somente um fim com volume infinito.

Demonstração: Normalizaremos a métrica de tal forma que

$$\inf_M Ric_M = -(n-1),$$

onde $n = 2m$ é a dimensão real de M. Seguindo a demonstração do teorema 4.1, consideraremos uma função harmônica $f \in K$ e seu gradiente $h = |\nabla f|$. Desde que f tem integral de Dirichlet finita, foi provado no lema 3.1 de (LI, 1990), que f tem quer ser pluriharmônica. Por outro lado, a fórmula de Bochner para funções pluriharmônicas é

$$\Delta h \geq -(n-1)h + \frac{|\nabla h|^2}{h}.$$

Definindo $g = h^p$, $0 < p < 1$, então um argumento análogo ao usado no teorema principal e o teorema de comparação de volume, implica que

$$\int_{B_p(2R)\backslash B_p(R)} g^2 \leq CR^p \left(\int_R^{2R} \exp\left(-\frac{p}{1-p} 2\sqrt{\lambda_1(M)} r\right) \exp((n-1)r) dr \right)^{1-p}.$$

Escolhendo p satisfazendo

$$p = \frac{n-1}{2\sqrt{\lambda_1(M)} + n - 1},$$

temos

$$2p\sqrt{\lambda_1(M)} = (1-p)(n-1). \tag{19}$$

Então

$$CR^p\left(\int_R^{2R}\exp\left(-\frac{p}{1-p}2\sqrt{\lambda_1(M)}r\right)\exp((n-1)r)dr\right)^{1-p} = CR^p\left(\int_R^{2R}dr\right)^{1-p}$$
$$= CR$$

e, assim,

$$\int_{B_p(R)} g^2 = O(R).$$

Da fórmula de Bochner e da relação $g = h^p$, temos

$$\Delta(\sqrt[p]{g}) \geq -(n-1)\sqrt[p]{g} + \frac{|\nabla(\sqrt[p]{g})|^2}{\sqrt[p]{g}},$$

onde

$$\Delta(\sqrt[p]{g}) = \frac{1-p}{p^2}g^{\frac{1-2p}{p}}|\nabla g|^2 + \frac{1}{p}g^{\frac{1-p}{p}}\Delta g$$

e

$$|\nabla(\sqrt[p]{g})|^2 = \frac{1}{p^2}g^{\frac{2-2p}{p}}|\nabla g|^2.$$

Logo

$$\Delta g \geq -p(n-1)g + \frac{|\nabla g|^2}{g},$$

e, pelo lema 5.1, obtemos para qualquer $\delta > 0$ que

$$\int_M |\nabla(\phi g)|^2 \leq \frac{p(n-1)(1+\delta)}{1+2\delta}\int_M \phi^2 g^2 + \frac{(1+\delta)^2}{1+2\delta}\int_M |\nabla\phi|^2 g^2.$$

Daí, como ϕ tem suporte compacto,

$$\left(\lambda_1(M) - \frac{p(n-1)(1+\delta)}{1+2\delta}\right)\int_M \phi^2 g^2 \leq \frac{(1+\delta)^2}{1+2\delta}\int_M |\nabla\phi|^2 g^2.$$

Agora, se

$$\lambda_1(M) > \frac{p(n-1)}{2},$$

então existe um δ suficientemente grande tal que

$$\lambda_1(M) - \frac{p(n-1)(1+\delta)}{1+2\delta} > 0.$$

Assim como foi feito no teorema 5.2, concluímos que $g = 0$ e M tem somente um fim com volume infinito.

Verificaremos agora que vale a relação

$$\lambda_1(M) > \frac{p(n-1)}{2}$$

ou, equivalentemente,

$$2\lambda_1(M)(n-1) - (n-1)^2 > 0.$$

Para isso, usando que

$$p = \frac{n-1}{2\sqrt{\lambda_1(M)} + n - 1}$$

temos que mostrar que

$$2\lambda_1(M)\left(n - 1 + 2\sqrt{\lambda_1(M)}\right) - (n-1)^2 > 0,$$

ou

$$4\left(\sqrt{\lambda_1(M)}\right)^3 + 2(n-1)\left(\sqrt{\lambda_1(M)}\right)^2 - (n-1)^2 > 0. \tag{20}$$

Por outro lado, como a função

$$q(x) = 4x^3 + 2(n-1)x^2 - (n-1)^2$$

é estritamente crescente quando $x > 0$ com $q(0) < 0$, (20) será satisfeita se $\lambda_1(M) > x_0^2$, onde x_0 é a solução positiva da cúbica

$$4x^3 + 2(n-1)x^2 - (n-1)^2 = 0.$$

O que conclui o teorema. $\square$

6 CONCLUSÃO

Os resultados obtidos por Li-Tam, que conclui que a dimensão do espaço formado pelas funções harmônicas limitadas com integral de Dirichlet finita é um limitante superior para a quantidade de fins não-parabólicos de uma variedade completa, e de Cao-Shen-Zhu, que mostra que se um fim de uma variedade tem primeiro autovalor do Laplaciano positivo então o fim tem que ser não-parabólico ou tem volume infinito, formam a base para o resultado de Li-Wang, objeto de estudo desta dissertação. Embora muito técnica, a construção de estimativas de decaimento para funções harmônicas em fins com primeiro autovalor do Laplaciano positivo é crucial para a conclusão desse resultado. A importância do teorema de Li-Wang reside no fato que o mesmo pode ser visto como uma generalização do teorema *splitting* de Cheeger-Gromoll. Três conclusões são estudas. Primeiro é estabelecido um limitande para o número de fins de uma variedade Riemmaniana completa, de dimensão $n \geq 3$ e com curvatura de Ricci limitada inferiormente. A segunda consequência é uma estimativa para a dimensão do espaço $H^1(L^2(M))$. E a última é a que uma variedade Kähler completa, em certas circunstâncias, tem somente um fim com volume infinito.

REFERÊNCIAS

CAI, Mingliang; GALLOW, Gregory J. Advances in Theoretical and Mathematical Physics, v. 3, n. 6, p. 1769-1783, 1999.

CAO, Huai-Dong; SHEN, Ying; ZHU, Shunhui. The structure of stable minimal hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}$. Mathematical Research Letters, v. 4, n. 5, p. 637-644, 1997.

LI, Peter. On the Sobolev constant and the p-spectrum of a compact riemannian manifold. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, v. 13, n. 4, p. 451-468, 1980.

LI, Peter. On the structure of complete Kähler manifolds with nonnegative curvature near infinity. Inventiones mathematicae, v. 99, n. 3, p. 579-600, 1990.

LI, Peter; WANG, Jiaping. Complete Manifolds with Positive Spectrum. Journal of Differential Geometry, v. 58, n. 3, p. 501-534, 2001.

LI, Peter; WANG, Jiaping. Minimal Hypersurfaces with Finite Index. Mathematical Research Letters, v. 9, n. 1, p. 95-103, 2002.

LI, Peter; TAM, Luen-Fai. Harmonic functions and the structure of complete manifolds. Journal of Differential Geometry, v. 35, n. 2, p. 359-383, 1992.

LI, Peter; TAM, Luen-Fai. The heat equation and harmonic maps of complete manifolds. Inventiones mathematicae, v. 105, n. 1, p. 1-46, 1991.

MAZZEO, Rafe. The Hodge cohomology of a conformally compact metric. Journal of Differential Geometry, v. 28, n. 2, p. 309-339, 1988.

WANG, Xiaodong. On conformally compact Einstein manifolds. Mathematical Research Letters, v. 8, n. 5, p. 671-688, 2001.

WITTEN, Edward; YAU, S.-T. Connectedness of the boundary in the AdS/CFT correspondence. Advances in Theoretical and Mathematical Physics, v. 3, n. 6, p. 1635-1655, 1999.

YAU, Shing-Tung. Some Function-Theoretic Properties of Complete Riemannian Manifold and Their Applications to Geometry. Indiana University Mathematics Journal, v. 25, n. 7, p. 659-670, 1976.