



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E MATEMÁTICA APLICADA**  
**CURSO DE ESTATÍSTICA**

**CLEITON RICARDO MONTE RIBEIRO**

**DISTRIBUIÇÃO DE KUMARASWAMY**

**FORTALEZA**

**2014**

**CLEITON RICARDO MONTE RIBEIRO**

**DISTRIBUIÇÃO DE KUMARASWAMY**

Monografia apresentada ao Departamento de Estatística e Matemática Aplicada da Universidade Federal do Ceará, como requisito para obtenção do grau de Bacharel em Estatística. Área de concentração: Probabilidade e Estatística.

**Orientador:** Prof. Dr. João Maurício Araújo Mota

**FORTALEZA**

**2014**

**CLEITON RICARDO MONTE RIBEIRO**

**DISTRIBUIÇÃO DE KUMARASWAMY**

Monografia apresentada ao Curso de Bacharelado em Estatística do Departamento de Estatística e Matemática Aplicada da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Estatística. Área de concentração: Probabilidade e Estatística.

Aprovada em \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_\_.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Profº Drº João Maurício Araújo Mota (Orientador)

Universidade Federal do Ceará - UFC

---

Profº Drº Juvêncio Santos Nobre

Universidade Federal do Ceará - UFC

---

Profº Drº Rafael Bráz Azevedo Farias

Universidade Federal do Ceará - UFC

A Deus, quando algumas vezes, sentindo-me desacreditado e perdido nos meus objetivos, ideais ou minha pessoa, me fez vivenciar a delícia de me formar. Ao Prof. Maurício, por me acompanhar, pelos seus ensinamentos, amizade, paciência e por me aturar durante todo esse tempo de faculdade. A minha mãe, por sempre apoiar meus estudos.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus e a Virgem Maria, por todas as oportunidades, saúde e força que tem me dado para continuar minha caminhada, e concluir uma parte dela.

À minha mãe, Maria Lindarmy Monte Ribeiro, pelo o incentivo, apoio, confiança e por sempre acreditar nas minhas decisões pessoais e profissionais.

À minha esposa, Aline da Silva Alves, pela ajuda e companheirismo, nesta minha jornada.

Ao Professor Dr. João Maurício Araújo Mota, pela orientação e ajuda profissional no desenvolvimento deste trabalho. Pelos ensinamentos e valiosas sugestões. pelo apoio, carinho, respeito e amizade, e principalmente pela paciência que teve comigo durante o curso.

Ao Professor Dr. Juvêncio Santos Nobre, pelo apoio e por acreditar nas minhas capacidades, quando eu mesmo não acreditava. E mostrar o quão longe os estudos podem me levar.

Ao Professor Dr. Rafael Bráz Azevedo Farias, pelo apoio, por estar sempre pronto ajudar e orientar.

Ao PET-Estatística da UFC e ao professor Dr. Júlio Francisco Barros Neto, pelos ensinamentos de extrema importância, pessoal e profissional.

Aos meus amigos Sidarta, Eriton , Eduardo, Bruno, Marcos, pela grata convivência, alegrias, ajudas, respeito e amizade.

Ao Departamento de Estatística e Matemática Aplicada da UFC, por proporcionar formação de qualidade, com excelente estrutura física e corpo docente.

A todos que de uma maneira ou outra me ajudaram a concluir mais uma etapa em minha vida. Muito Obrigado!

“Acredite em si próprio e chegará um dia em que os outros não terão outra escolha senão acreditar em você”.

**Cynthia Kersey**

## RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo estudar uma família de distribuições de probabilidade contínua definida no intervalo  $[0,1]$ , que tem muitas semelhanças com a distribuição Beta, bem mais simples de usar, especialmente em estudos de simulação devido à forma fechada de ambas as suas funções, a de densidade de probabilidade e a distribuição acumulada. Esta distribuição foi originalmente proposta por Ponnambalam Kumaraswamy em 1980, que foi um dos principais hidrólogos da Índia, e desenvolveu a função de probabilidade duplamente limitada de uma variável aleatória mista, adequada para variáveis físicas que são geralmente limitadas nos extremos inferiores e superiores. Em 2009 Jones publicou um dos artigos fundamentais sobre a distribuição de Kumaraswamy onde utilizou apenas parte contínua da distribuição original. Kumaraswamy mostrou um número de propriedades básicas da distribuição, mas não fez menção alguma de sua comparação com a distribuição Beta, diferente de Jones (2009) que em seu artigo fez bastante comparações entre as duas distribuições, principalmente mostrando os pontos fortes da distribuição de Kumaraswamy. Com isto este trabalho consiste em desenvolver detalhadamente o artigo de Jones, demonstrando com detalhes suas funções matemáticas, bem como uma aplicação em Hidrologia. Além disso fazer a divulgação desta distribuição que é pouco conhecida entre os estudantes de graduação do curso de Estatística. Foi utilizado o Software R para obter os principais resultados computacionais dessa monografia.

**Palavras-Chaves:** função de probabilidade duplamente limitada. Kumaraswamy. Software R.

## ABSTRACT

The present work aims to study a family of continuous probability distributions defined on the interval  $[0,1]$ , which has many similarities with, simpler to use especially in simulation studies due to the closed form Beta distribution of both its functions, the probability density and cumulative distribution. This distribution was originally proposed by Kumaraswamy Ponnambalam in 1980, which was a major Hydrologists of India, and developed the function of a doubly likely limited, suitable for physical variables that are generally limited in the lower and upper ends mixed random variable. In 2009 Jones published a major article on the distribution of Kumaraswamy utilisou where only part of the original continuous distribution. Ponnambalam showed a number of basic properties of the distribution, but made no mention of its comparison with the beta distribution, unlike Jones (2009) in his article that made enough comparisons between the two distributions, mostly showing the strengths of the distribution of Kumaraswamy . With that this work is to develop in detail the article Jones, showing in detail its mathematical functions as well as its application in hydrology. In addition to the disclosure of this distribution, which is little known among undergraduate students of the Statistics course. R software was used for the main computational results of this monograph.

**KeyWords:** probability function doubly limited. distribution Kumaraswamy. R Software.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 - Gráficos da função densidade da Distribuição Beta, para alguns valores de $(a, b)$ .	13
Figura 1.2 - Gráfico da Função Acumulada da Beta, para alguns valores de $(a, b)$ .	14
Figura 2.1 - Gráfico da função densidade da distribuição de Kumaraswamy.	18
Figura 2.2 - Gráficos de algumas formas da Kumaraswamy.	19
Figura 2.3 - Gráficos da função acumulada da Kumaraswamy.	20
Figura 3.1 - Gráfico das densidades da Kumaraswamy e Beta.	52
Figura 3.2 - Gráfico da relação Kumaraswamy e Beta.	53

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valores das estatísticas de ordem de uma amostra de tamanho 30 de uma $Kw(0,4;0,7)$ .	24
Tabela 2 - Valores das estatísticas de ordem de uma amostra de tamanho 30 de uma $Kw(3;5)$ .	25
Tabela 3 - Valores das estatísticas de ordem de uma amostra de tamanho 30 de uma $Kw(2;2)$ .	25
Tabela 4 - Estatísticas da distribuição de Kumaraswamy. . . . .	28
Tabela 5 - Médias das estimativas dos parâmetros $(a,b)$ . . . . .	50
Tabela 6 - Médias dos AIC, AICc, BIC para 1000 amostras de tamanho 5. . . . .	57
Tabela 7 - Médias dos AIC, AICc, BIC para 1000 amostras de tamanho 20. . . . .	58
Tabela 8 - Médias dos AIC, AICc, BIC para 1000 amostras de tamanho 40. . . . .	59
Tabela 9 - Médias dos AIC, AICc, BIC para 1000 amostras de tamanho 1000. . . . .	61
Tabela 10 - Estatística das chuvas totais anuais do município de Itaitinga. . . . .	73
Tabela 11 - Estatística das chuvas totais anuais do município de Itaitinga. . . . .	74

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	12
<b>2</b>	<b>DISTRIBUIÇÃO DE KUMARASWAMY</b>	16
2.1	Função Densidade de Probabilidade	17
2.2	Função de Distribuição	20
2.3	Inversão da Função de Distribuição	20
2.4	Quantil de Ordem $p$ da Distribuição de Kumaraswamy	21
2.5	Moda da Kumaraswamy	22
2.6	$r$ -ésimo Momento da Kumaraswamy	22
2.7	Assimetria e Curtose	22
2.8	$r$ -ésimo Momento da $i$ -ésima Estatísticas de Ordem	23
2.9	L-Momentos	25
2.10	L-Assimetria e L-Curtose	27
2.11	Distribuições Limite	28
2.12	Família de distribuições $K_w$ generalizadas	36
2.13	Estimação pelo método de Máxima verossimilhança	37
2.14	Matriz de informação observada e esperada	43
<b>3</b>	<b>COMPARAÇÃO COM A DISTRIBUIÇÃO BETA</b>	50
3.1	Relações com a Distribuição Beta	50
3.2	Relação Gráfica Entre as Distribuições Kumaraswamy e Beta	51
3.3	Utilizando os Critérios de Informação Para comparação	54
<b>4</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO DA KUMARASWAMY</b>	61
4.1	Principais Funções	62
4.2	Gráficos	63
4.3	Moda	64
4.4	Função do $r$ -ésimo Momento	64

<b>4.5</b>	<b><i>r</i>-ésimo Momento da <i>i</i>-ésima Estatística de Ordem</b>	65
<b>4.6</b>	<b>Função dos L-Momentos</b>	65
<b>4.7</b>	<b>Assimetria e Curtose</b>	65
<b>4.8</b>	<b>Função de Newton-Raphson</b>	66
<b>4.9</b>	<b>Função para calcular a Média dos parâmetros</b>	66
<b>4.10</b>	<b>Função para calcular as Médias dos AICs e BICs</b>	68
<b>5</b>	<b>APLICAÇÃO DA KUMARASWAMY</b>	71
<b>5.1</b>	<b>Material e Métodos</b>	72
<b>5.2</b>	<b>Resultados</b>	73
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	75
	<b>REFERÊNCIAS</b>	76
	<b>APÊNDICE A - DEMONSTRAÇÕES</b>	79

## 1 INTRODUÇÃO

Segundo Balakrishnan (2003), a distribuição Beta é uma das mais usadas para modelar experimentos aleatórios que produzem resultados no intervalo  $(0, 1)$ , desta maneira, uma de suas principais aplicações está na modelagem das proporções. Dada a grande flexibilidade de ajuste devido aos seus dois parâmetros de forma  $(a, b)$ , esse fato a torna uma das mais flexíveis famílias de distribuições de probabilidade. Diz-se que uma variável aleatória  $Y$  tem distribuição Beta se sua função densidade de probabilidade (*fdp*) é definida como

$$f(y) = \frac{1}{\beta(a, b)} y^{a-1} (1-y)^{b-1} I(y)_{(0,1)}. \quad (1)$$

Em que  $\beta(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$  é função beta completa, sendo  $\Gamma(\cdot)$  a função gama, isto é

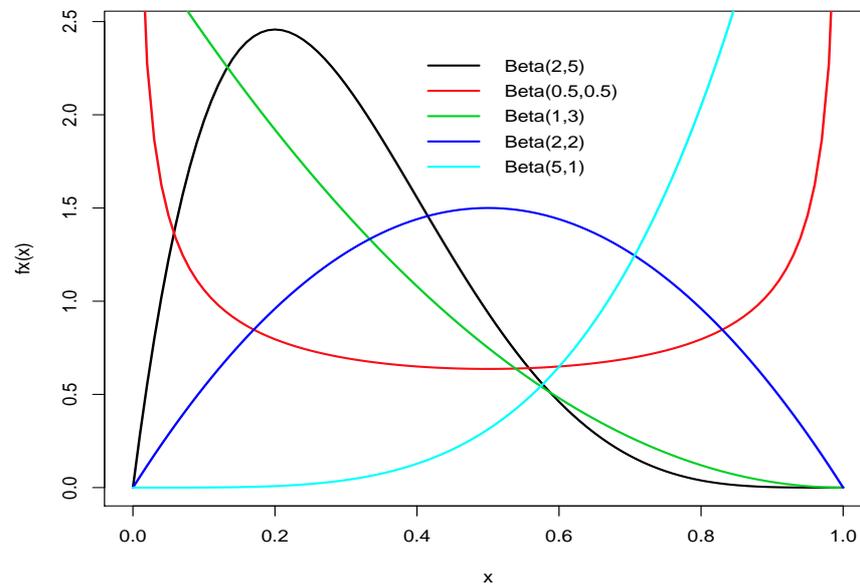
$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} y^{a-1} e^{-y} dy.$$

Além disso a distribuição Beta representada aqui por  $Beta(a, b)$ , que segundo Balakrishnan (2003), é unimodal quando  $a > 0$  e  $b > 1$  e não é unimodal quando  $a < 1$  e  $b < 1$  ou  $(a-1)(b-1) \leq 0$ , e possui propriedade de quase-simetria, isto é,  $Y \sim Beta(a, b)$  então  $1-Y \sim Beta(b, a)$ . Ela tem relação com várias das mais conhecidas distribuições. Balakrishnan afirma que muitas das distribuições finitas encontradas na prática podem ser facilmente transformadas na distribuição Beta. Dentre as diversas formas assumidas por essa função densidade de probabilidade, encontram-se a Uniforme quando seus parâmetros forem,  $(a = b = 1)$  e um caso especial ocorre quando  $a = b = \frac{1}{2}$ , obtendo-se a distribuição arcosseno, e quando  $b = 1 - a, 0 < a < 1$ , tem-se a distribuição arcosseno generalizada. Outras transformações ocorre quando tem-se

- $Y \sim Beta(a, b)$  então  $-\ln(Y) \sim Exponencial(a)$
- $Y \sim Beta(a, b)$  então  $\frac{bY}{a(1-Y)} \sim F(2a, 2b)$

Na Figura 1.1 encontra-se os gráficos da função densidade de probabilidade da distribuição Beta, para alguns valores dos parâmetros  $(a, b)$ .

Figura 1.1 - Gráficos da função densidade da Distribuição Beta, para alguns valores de  $(a, b)$ .



Fonte: produção do próprio autor.

Segundo Balakrishnan (2003), a função distribuição acumulada, da distribuição Beta é definida como:

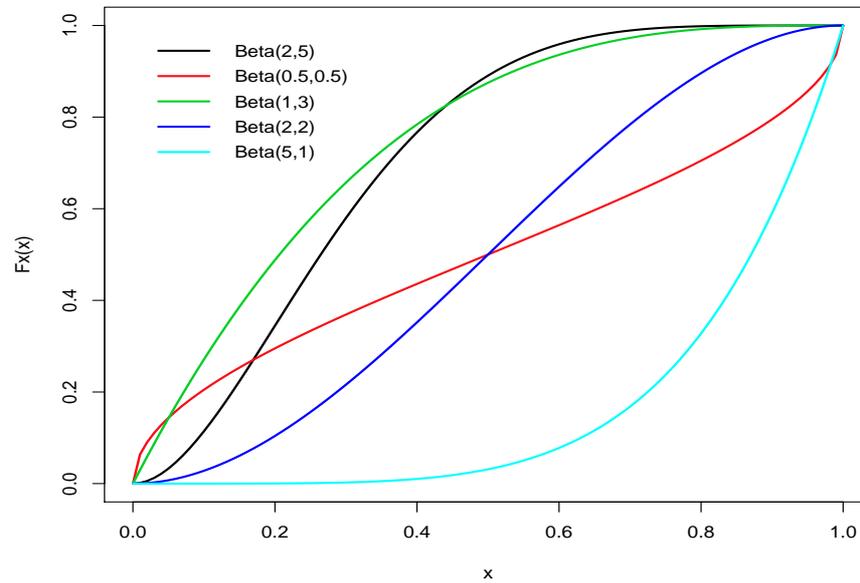
$$F_Y(y) = \frac{\beta_y(a,b)}{\beta(a,b)} I(y) + I(y),$$

$\beta_y(a,b)$       $\beta(a,b)$       $I(y)$       $I(y)$   
(a,b)     (a,b)     (b,\infty)

em que  $\beta_y(a,b) = \int_0^y z^{a-1}(1-z)^{b-1} dz$ , é a função Beta incompleta.

Na Figura 1.2 encontra-se os gráficos da função de distribuição da Beta( $a, b$ ), para alguns valores dos parâmetros  $(a, b)$ .

Figura 1.2 - Gráfico da Função Acumulada da Beta, para alguns valores de  $(a, b)$ .



Fonte: produção do próprio autor.

O  $r$ -ésimo momento da distribuição  $Beta(a, b)$  pode ser obtido através da expressão

$$E(Y^r) = \frac{\beta(r+a, b)}{\beta(a, b)}, \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

Dessa forma têm-se que a esperança e variância da distribuição  $Beta(a, b)$  são dados por

$$E(Y) = \frac{a}{a+b}$$

$$E(Y^2) = \frac{a(a+1)}{[(a+b)(a+b+1)]}$$

Pela definição tem-se que  $Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$ , logo obtém-se

$$Var(Y) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

Os coeficientes de assimetria e curtose são dados respectivamente por

$$\gamma_3 = \frac{2(b-a)}{a+b+2} \sqrt{\frac{a+b+1}{ab}},$$

e

$$K = 3 + \frac{6(a-b)^2(a+b+1)}{ab(a+b+2)(a+b+3)} - \frac{6}{a+b+3}.$$

Em 1980, Ponnambalam Kumaraswamy que foi um dos principais hidrólogos da Índia propôs uma família de distribuições com dois parâmetros  $(a, b)$ , que tem muitas semelhanças com a distribuição Beta, sendo essa função de densidade de probabilidade mista. Segundo Kumaraswamy (1980), ela é fielmente aplicável a variáveis aleatórias hidrológicas, mas esta distribuição não foi criada somente para variáveis aleatórias hidrológicas, mas também para outros processos aleatórios, cujos valores assumidos por estes processos são delimitados tanto nas extremidades superiores e inferiores. Esta distribuição recebeu o nome de função densidade de probabilidade duplamente limitada.

Jones (2009), publicou um dos principais trabalhos sobre a função densidade de probabilidade duplamente limitada, onde ele usou a terminologia distribuição de Kumaraswamy para se referir apenas a parte contínua desta distribuição, ou seja, ele desconsiderou a parte discreta. Ponnambalam mostrou um número de propriedades básicas da distribuição, mas não fez menção alguma de sua comparação com a distribuição Beta, diferente de Jones (2009) que em seu artigo fez bastante comparações entre as duas distribuições, principalmente mostrando os pontos fortes da distribuição de Kumaraswamy.

Com isso um dos objetivos do presente trabalho é apresentar as principais características da Distribuição de Kumaraswamy, e um exemplo de aplicação em Hidrologia. A pesquisa também consiste na divulgação desta distribuição que é pouca conhecida entre os estudantes de graduação do curso de Estatística. Como fundamentação teórica foi utilizado como base para a monografia, o artigo de Jones (2009). A aplicação da distribuição de Kumaraswamy na hidrologia foi feita com base no artigo do próprio Ponnambalam Kumaraswamy de 1980. O objetivo foi estimar a precipitação máxima total anual para o município de Itaitinga, onde se localiza o açude Gavião, um dos principais reservatórios que complementa a rede de abastecimento de água potável para a cidade de Fortaleza-Ceará. Utilizou-se uma série de dados entre os anos de 1990 e 2012 disponibilizados pela Fundação Cearense de Meteorologia e Recursos Hídricos (FUNCEME). Utilizando-se séries anuais dos volumes totais das chuvas precipitadas durante os respectivos anos de estudo, desta forma pôde-se inferir a magnitude da precipitação anual para o município de Itaitinga, assim como as probabilidades de excedência das chuvas.

## 2 DISTRIBUIÇÃO DE KUMARASWAMY

Segundo Kumaraswamy (1980), as distribuições de probabilidade clássicas, como a Normal, Log-Normal, Beta, entre outras, não se ajustam bem em variáveis aleatórias hidrológicas, tais como precipitação diária, o fluxo de corrente diária de um rio, capacidade de um reservatório. Em 1980, o autor afirmava que as quatro estatísticas importantes: média, desvio padrão, coeficiente de assimetria, e coeficiente de curtose, não eram obtidas de maneira precisa quando estas variáveis eram obtidas através de simulações computacionais quando utilizava-se as distribuições citadas anteriormente. Com isso, em 1980 Kumaraswamy desenvolveu uma nova distribuição de probabilidade conhecida como função de densidade de probabilidade duplamente limitada, onde afirma, que esta distribuição não é apenas utilizada para variáveis aleatórias hidrológicas, mas também para outros processos aleatórios  $Z$ , cujo valores dos elementos são limitados tanto nas extremidades inferior e superior. Tem-se que sua função de distribuição acumulada é dada por:

$$F(x) = F_0 I(x)_{\{0\}} + (1 - F_0) [1 - (1 - x^a)^b] I(x)_{(0,1)} + I(x)_{[0,\infty)}$$

em que

$$x = \frac{(z - z_{min})}{(z_{max} - z_{min})}$$

Tem-se que

$z$ : variável aleatória do processo;

$z_{min}$ : menor valor do processo;

$z_{max}$ : maior valor do processo;

$x$ : variável aleatória transformada;

$F_0$ : probabilidade de assumir o valor zero;

$a, b$ : parâmetros;

$F(x)$ : probabilidade acumulada de  $x$ .

Diferenciando  $F(x)$  com relação a  $x$  tem-se

$$f(x) = (1 - F_0)abx^{a-1}(1 - x^a)^{b-1} I(x) + F_0 I(x).$$

(0,1)                      {0}

que é chamada de função de densidade de probabilidade duplamente limitada.

Segundo Jones (2009), a distribuição de Kumaraswamy tem a sua origem em termos de estatísticas de ordem uniforme e tem distribuição particularmente simples e funções que não dependem de cálculos especiais. Esta distribuição pode ter uma grande variedade de formas e pode substituir com sucesso a distribuição Beta, principalmente na parte de simulações devido a forma fechada da função densidade cumulativa e de fácil inversão, e tem sido cada vez mais empregada como uma alternativa à distribuição Beta, por exemplo, Andrade e Gosling (2011) a utilizaram para representar o conhecimento a priori dos profetas da chuva na região Nordeste do Brasil. Além disso, Fletcher (1996) a utilizou para modelar o volume de armazenamento de reservatório hídrico.

## 2.1 Função Densidade de Probabilidade

Uma variável aleatória  $X$  possui distribuição de Kumaraswamy se sua *fdp* é dada por

$$f(x) = abx^{a-1}(1 - x^a)^{b-1} I(x). \quad (2)$$

(0,1)

onde  $a > 0$  e  $b > 0$

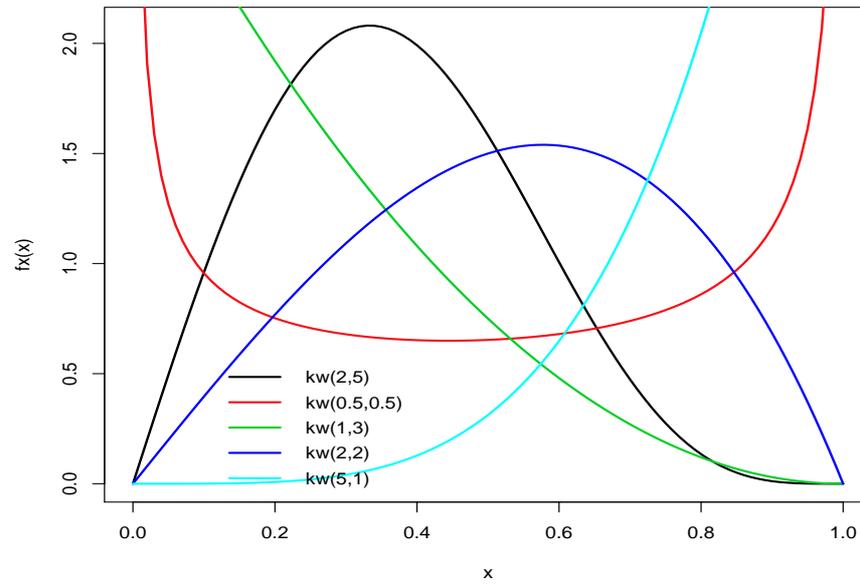
Notação:  $X \sim Kw(a, b)$

No Apêndice A encontra-se a demonstração da prova da legitimidade desta função de probabilidade, onde pode-se verificar facilmente que a equação (2) é uma legítima densidade de probabilidade.

Segundo Jones (2009), pode-se observar na Figura 2.1 que os parâmetros da distribuição de Kumaraswamy  $(a, b)$  tem as mesmas características de forma, iguais aos parâmetros da distribuição Beta  $(a, b)$ , portanto tem-se que, quando  $a > 1$  e  $b > 1$  a função densidade será unimodal, e quando  $a < 1$  e  $b < 1$  não será unimodal, quando  $a > 1$  e  $b \leq 1$  a função densidade será crescente, e quando  $a \leq 1$  e  $b > 1$  será decrescente. Na Figura 2.2 encontra-se os gráficos

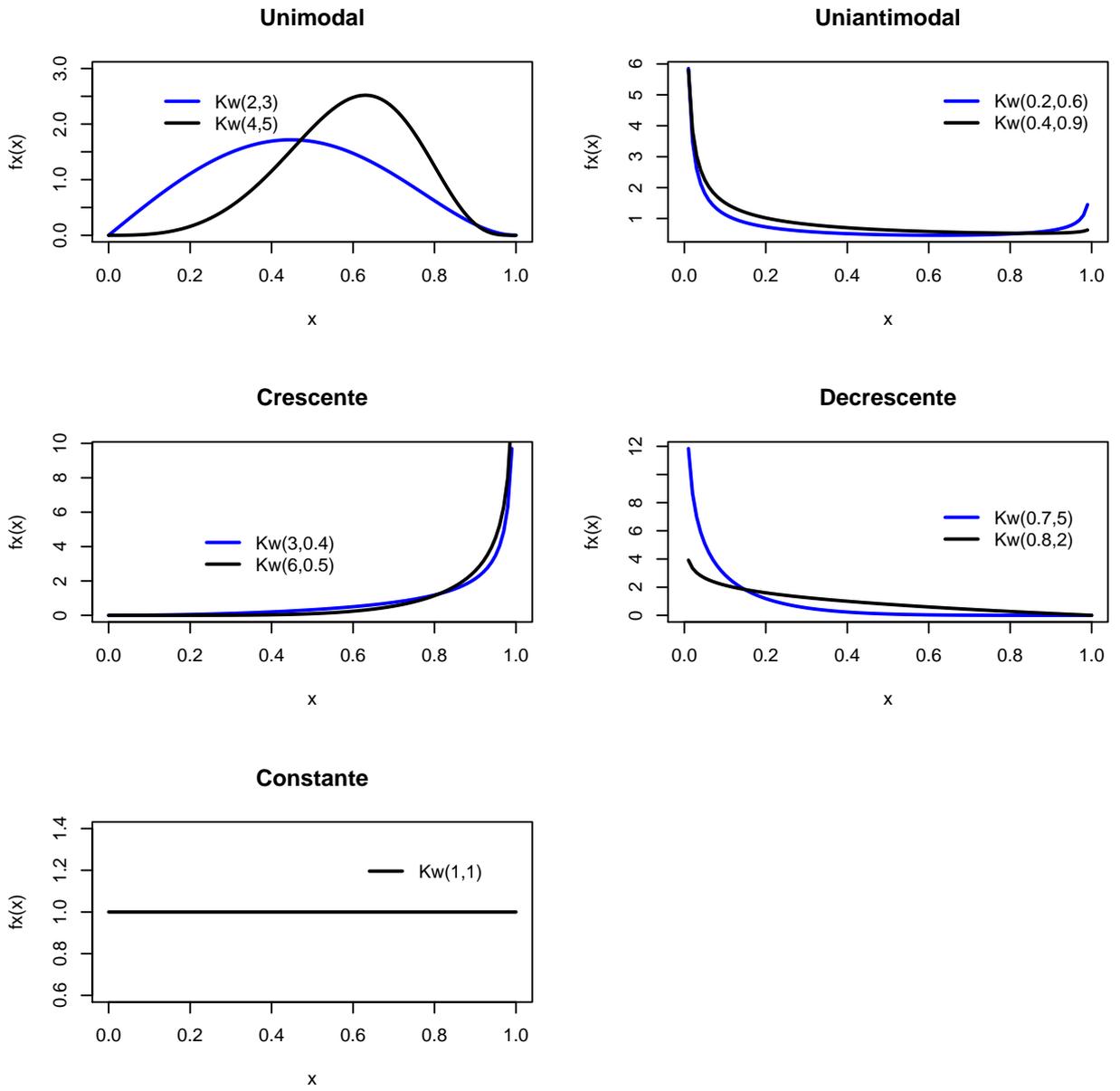
da densidades para alguns valores de  $(a, b)$ . Onde pode-se observar o grande número de formas que ela pode assumir, dependendo dos valores de seus dois parâmetros  $(a, b)$ .

Figura 2.1 - Gráficos da função densidade da distribuição de Kumaraswamy.



Fonte: produção do próprio autor.

Figura 2.2 - Gráficos de algumas formas da densidade da distribuição de Kumaraswamy para diferentes valores dos parâmetros.



Fonte: produção do próprio autor.

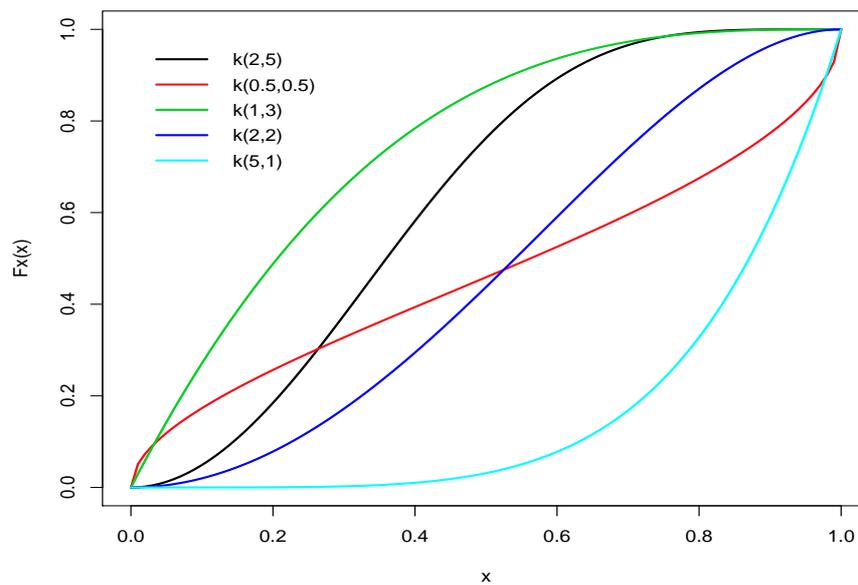
## 2.2 Função de Distribuição

A função de distribuição acumulada é um dos pontos fortes desta distribuição, pois, possui forma simples, fechada e de fácil inversão, isso é muito favorável em termos de simplicidade com relação à  $Beta(a, b)$  que possui uma função distribuição que não assume uma forma fechada, somente em alguns casos, facilitando assim os estudos de variáveis aleatórias contínuas definidas no intervalo  $(0,1)$  em que se utilizaria a função de distribuição.

$$F(x) = \begin{cases} 1 - (1 - x^a)^b & I(x) \\ 0 & [0,1) \\ 1 & [1, \infty) \end{cases} \quad (3)$$

No Apêndice A encontra-se a demonstração da equação (3). Na Figura 2.3 encontra-se os gráficos da função de distribuição, para alguns valores de  $(a, b)$ .

Figura 2.3 - Gráficos da função acumulada da Kumaraswamy.



Fonte: produção do próprio autor.

### 2.3 Inversão da Função de Distribuição

Como já foi mencionado anteriormente, uma das suas principais características da distribuição de Kumaraswamy é ter uma função acumulada de probabilidade de fácil inversão, permitindo que esta distribuição tenha uma vantagem se vista da perspectiva de modelagem. Segundo Jain (1991), dada uma variável aleatória  $X$ , com uma função acumulada igual  $F(x)$ , a variável  $U = F(X)$  é uniformemente distribuída entre 0 e 1. Assim, os valores de  $X$  podem ser obtidos gerando-se números aleatórios uniformemente distribuídos e computando-se  $x = F^{-1}(u)$ .

$$X = \left[1 - (1 - U^{\frac{1}{b}})\right]^{\frac{1}{a}}. \quad (4)$$

Onde  $U \sim U(0, 1)$ .

Segundo Jones (2009), não há nenhuma outra família de distribuição com dois parâmetros definida no intervalo  $(0, 1)$  que possua uma forma tão simples como esta, e com um bom comportamento desse tipo, isto facilita a geração de números aleatórios para essa distribuição, que é muito favorável comparado com os principais algoritmos sofisticados para gerar amostras aleatórias da distribuição Beta. No Apêndice A encontra-se a demonstração da equação (4).

### 2.4 Quantil de Ordem $p$ da Distribuição de Kumaraswamy

Devido a forma fechada da função distribuição de Kumaraswamy, pode-se determinar com facilidade a função geral do quantil de ordem  $p$ , que é dada por

$$x_p = \left[1 - (1 - p)^{\frac{1}{b}}\right]^{\frac{1}{a}}, \quad \forall \quad 0 < p < 1 \quad (5)$$

No Apêndice A encontra-se a demonstração da equação (5). Assim o primeiro quartil, mediana e terceiro quartil, são dados respectivamente por:

$$x_{0,25} = \left[1 - (1 - 0,25)^{\frac{1}{b}}\right]^{\frac{1}{a}} = \left[1 - (0,75)^{\frac{1}{b}}\right]^{\frac{1}{a}}.$$

$$x_{0,5} = \left[1 - (0,5)^{\frac{1}{b}}\right]^{\frac{1}{a}}.$$

$$x_{0,75} = \left[ 1 - (0,25)^{\frac{1}{b}} \right]^{\frac{1}{a}}.$$

## 2.5 Moda da Kumaraswamy

A moda da distribuição de Kumaraswamy é dada por

$$M_o = \left( \frac{a-1}{ab-1} \right)^{\frac{1}{a}}. \quad (6)$$

em que  $a > 1$ ,  $b > 1$  e  $ab > 1$ . No Apêndice A encontra-se a demonstração da equação (6).

## 2.6 $r$ -ésimo Momento da Kumaraswamy

Se  $X \sim Kw(a, b)$ , o  $r$ -ésimo momento em relação à origem de  $X$  é dado por:

$$E(X^r) = b\beta\left(\frac{r}{a} + 1, b\right). \quad (7)$$

Para todos o  $r > -a$ .

No Apêndice A encontra-se a demonstração da equação (7). A esperança é dada quando  $r = 1$  substituindo na equação (7), portanto

$$E(X) = b\beta\left(\frac{1}{a} + 1, b\right).$$

A variância é dada por  $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ , logo

$$E(X^2) = b\beta\left(\frac{2}{a} + 1, b\right)$$

Portanto à variância da distribuição de Kumaraswamy é dada por

$$Var(X) = b\beta\left(\frac{2}{a} + 1, b\right) - \left[ b\beta\left(\frac{1}{a} + 1, b\right) \right]^2.$$

## 2.7 Assimetria e Curtose

Outras caracterizações importantes da forma da curva da função de densidade de probabilidade são dadas pelas medidas de assimetria e curtose, ambas baseadas em valores acumulados de potências superiores a 2. A principal medida de assimetria é denominada coeficiente de assimetria, enquanto a de curtose é dada pelo coeficiente de curtose. A assimetria é dada por:

$$\gamma_3 = E \left[ \left( \frac{X - \mu}{\sigma} \right)^3 \right] = \frac{E(X - \mu)^3}{[E(X - \mu)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{E(X^3) - 3E(X^2)\mu + 2\mu^3}{[E(X - \mu)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Logo a assimetria é dada por:

$$\gamma_3 = \frac{[b\beta(\frac{3}{a} + 1, b)] - 3 [b\beta(\frac{2}{a} + 1, b)] [b\beta(\frac{1}{a} + 1, b)] + 2 [b\beta(\frac{1}{a} + 1, b)]^3}{\left\{ b\beta(\frac{2}{a} + 1, b) - [b\beta(\frac{1}{a} + 1, b)]^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}$$

Uma medida de quão pontiaguda ou achatada é a curva da função de distribuição de probabilidade em torno da média, pode ser calculada pelo coeficiente de curtose. Esse número adimensional é formalmente definido por:

$$K = \frac{E(X - \mu)^4}{[E(X - \mu)^2]^2} = \frac{E(X^4) - 4\mu E(X^3) + 6\mu^2 E(X^2) - 3\mu^4}{[E(X - \mu)^2]^2}$$

Portanto a curtose é expressa

$$K = \frac{[b\beta(\frac{4}{a} + 1, b)] - 4 [b\beta(\frac{3}{a} + 1, b)] [b\beta(\frac{1}{a} + 1, b)]}{\left\{ b\beta(\frac{2}{a} + 1, b) - [b\beta(\frac{1}{a} + 1, b)]^2 \right\}^2} + \frac{6 [b\beta(\frac{2}{a} + 1, b)] [b\beta(\frac{1}{a} + 1, b)]^2 - 3 [b\beta(\frac{1}{a} + 1, b)]^4}{\left\{ b\beta(\frac{2}{a} + 1, b) - [b\beta(\frac{1}{a} + 1, b)]^2 \right\}^2}$$

## 2.8 $r$ -ésimo Momento da $i$ -ésima Estatísticas de Ordem

Segundo Ross (2010), seja  $Y_{i:n}$  a  $i$ -ésima estatística de ordem retirada de uma amostra aleatória de uma determinada distribuição contínua, pode-se mostrar que a função densidade de

$Y_{i:n}$  é dada por:

$$g_{Y_i}(y) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} [F(y)]^{i-1} [1-F(y)]^{n-i} f(y). \quad (8)$$

Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de tamanho  $n$  de uma distribuição  $Kw(a, b)$ , pela equação (8) tem-se que a  $i$ -ésima estatística de ordem  $X_{i:n}$  é dada por:

$$g_{X_{i:n}}(x) = \frac{ab}{\beta(i, n+1-i)} x^{a-1} (1-x^a)^{b(n+1-i)-1} \left[1 - (1-x^a)^b\right]^{i-1} I_{(0,1)}(x)$$

Portanto o  $r$ -ésimo momento da  $i$ -ésima estatística de ordem da distribuição de Kumaraswamy  $(a, b)$  é dado por:

$$E(X_{i:n}^r) = \frac{ab}{\beta(i, n+1-i)} \sum_{l=n+1-i}^n \binom{i-1}{n-l} (-1)^{l-(n+1-i)} \beta\left(bl, 1 + \frac{r}{a}\right) \quad (9)$$

No Apêndice A encontra-se a demonstração da equação (9). No software Estatístico R foi implementado a função do  $r$ -ésimo momento da  $i$ -ésima estatística de ordem da distribuição de Kumaraswamy, para estudar seu comportamento e ter uma melhor ideia de suas propriedades. Nas tabela 1, 2, e 3, encontra-se os valores gerados pela implementação, para amostras de tamanho 30 das  $Kw(0, 4; 0, 7)$ ,  $Kw(3; 5)$  e  $Kw(2; 2)$  respectivamente.

Tabela 1 - Valores dos 4 primeiros momentos das 4 primeiras estatísticas de ordem de uma amostra de tamanho 30 de uma  $Kw(0, 4; 0, 7)$ .

$r \backslash i$	1	2	3	4
1	0,00135	0,00464	0,01025	0,01846
2	0,00002	0,00009	0,00030	0,00077
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0

Fonte: produção do próprio autor.

Tabela 2 - Valores dos 4 primeiros momentos das 4 primeiras estatísticas de ordem de uma amostra de tamanho 30 de uma  $Kw(3;5)$ .

$r \backslash i$	1	2	3	4
1	0,16782	0,22477	0,26346	0,29414
2	0,03186	0,05358	0,07211	0,08899
3	0,00662	0,01343	0,02042	0,02763
4	0,00148	0,00351	0,00597	0,00878

Fonte: produção do próprio autor.

Tabela 3 - Valores dos 4 primeiros momentos das 4 primeiras estatísticas de ordem de uma amostra de tamanho 30 de uma  $Kw(2;2)$ .

$r \backslash i$	1	2	3	4
1	0,11370	0,17128	0,21503	0,25199
2	0,01639	0,03307	0,05003	0,06730
3	0,00277	0,00702	0,01245	0,01892
4	0,00059	0,00161	0,00328	0,00557

Fonte: produção do próprio autor.

## 2.9 L-Momentos

Seja  $X$  uma variável aleatória real com função de distribuição acumulada  $F(x)$  e função quantil  $x(F)$ , e sejam  $X_1; \dots; X_n$  as estatísticas de ordem da amostra aleatória de tamanho  $n$

obtidas a partir da distribuição de  $X$ . Segundo Viola (2004), os L-momentos de ordem  $r$  de  $X$  é definido por:

$$\lambda_r = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k C_{r-1,k} E(X_{r-k:r})$$

Greenwood et al. (1979), introduziram os momentos ponderados por probabilidades (MPP), os quais são definidos pela seguinte expressão geral:

$$M_{p,r,s} = E \{X^p [F_X(x)]^r [1 - F_X(x)]^s\} = \int_0^1 [x(F)]^p F^r (1 - F)^s dF$$

Viola afirma que os MPP,  $M_{1,0,s}$  e  $M_{1,r,0}$  podem ser expressos como combinação linear de L-momentos e, assim, os procedimentos baseados em L-momentos e MPP são equivalentes.

Segundo Viola (2004), os L-momentos possuem a vantagem sobre os momentos convencionais de serem capazes de caracterizar distribuições com caudas longas e, quando estimados por uma amostra, de serem menos influenciados na presença de outliers nos dados. Além disso, simulações mostram que os L-momentos comparados aos momentos convencionais, são menos sujeitos aos vícios na estimação. Viola (2004), afirma também que os parâmetros estimados utilizando-se os L-momentos são algumas vezes, mais precisos em amostras pequenas, do que as estimativas obtidas utilizando-se o Método de Máxima Verossimilhança. Segundo Jones(2009), a forma geral do L-momento para  $r \geq 2$  de uma variável aleatória  $X$  com função de distribuição  $F(x)$  é definido por:

$$\lambda_r = \frac{1}{r} \sum_{j=0}^{r-2} (-1)^j \binom{r-2}{j} \binom{r}{j+1} J(r-1-j, j+1).$$

Onde,

$$J(i_1, i_2) = \int_0^1 [F(x)]^{i_1} [1 - F(x)]^{i_2} dx. \quad (10)$$

Se  $X \sim kw(a, b)$  então a equação (10) fica:

$$\begin{aligned} J(i_1, i_2) &= \sum_{k=0}^{i_1} \binom{i_1}{k} (-1)^k b(k+i_2) \beta \left( b(k+i_2), \frac{1}{a} + 1 \right) \\ &= b \sum_{k=0}^{i_1} \binom{i_1}{k} (-1)^k (k+i_2) \beta \left( b(k+i_2), \frac{1}{a} + 1 \right) \end{aligned}$$

e o L-momento de ordem  $r$  da distribuição de Kumaraswamy  $(a,b)$ , que é apresentado à seguir

$$\lambda_r = \frac{b}{r} \sum_{l=1}^r (-1)^{l-1} l \binom{l+r-2}{r-1} \beta \left( bl, \frac{1}{a} + 1 \right) \quad (11)$$

No Apêndice A encontra-se a demonstração da equação (11). No software Estatístico R foi implementada a função dos L-momentos, para que pudesse fazer diversos testes desta função.

## 2.10 L-Assimetria e L-Curtose

Segundo Naghettini (2007), o L-momento  $\lambda_1$  é equivalente a média e, portanto uma medida populacional de posição, para ordens superiores a 1, os quocientes de L-momentos são particularmente úteis na descrição da escala e forma das distribuições de probabilidades, Como medida equivalente ao coeficiente de variação convencional, define-se o coeficiente  $\tau$ , dado por:

$$\tau = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\beta \left( \frac{1}{a} + 1, b \right) - 2\beta \left( \frac{1}{a} + 1, 2b \right)}{b\beta \left( \frac{1}{a} + 1, b \right)}$$

O qual pode ser interpretado como uma medida populacional de dispersão ou de escala. Analogamente aos coeficientes de assimetria e curtose, que são conhecidos na literatura estatística como L-assimetria e L-curtose, e que podem ser definidos, segundo Naghettini (2007) como,  $\tau_3$  e  $\tau_4$  respectivamente, portanto tem-se que L-assimetria é dada por

$$\begin{aligned} \tau_3 &= \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \\ &= \frac{\beta \left( 1 + \frac{1}{a}, b \right) - 6\beta \left( 1 + \frac{1}{a}, 2b \right) + 6\beta \left( 1 + \frac{1}{a}, 3b \right)}{\beta \left( \frac{1}{a} + 1, b \right) - 2\beta \left( \frac{1}{a} + 1, 2b \right)} \end{aligned}$$

E a L-curtose é dada por

$$\begin{aligned} \tau_4 &= \frac{\lambda_4}{\lambda_2} \\ &= \frac{\beta \left( 1 + \frac{1}{a}, b \right) - 12\beta \left( 1 + \frac{1}{a}, 2b \right) + 30\beta \left( 1 + \frac{1}{a}, 3b \right) - 20\beta \left( \frac{1}{a} + 1, 4b \right)}{\beta \left( \frac{1}{a} + 1, b \right) - 2\beta \left( \frac{1}{a} + 1, 2b \right)} \end{aligned}$$

Segundo Naghettini (2007), em relação aos momentos convencionais, os L-momentos apresentam diversas vantagens, entre as quais destacam-se os limites de variação de  $\tau$ ,  $\tau_3$  e  $\tau_4$ . E afirma que se  $X$  é uma variável aleatória não negativa, demonstra-se que  $0 < \tau < 1$ . Quanto a  $\tau_3$  e  $\tau_4$ , é um fato matemático que esses coeficientes estão compreendidos no intervalo  $[-1, +1]$ , em oposição aos seus correspondentes convencionais que podem assumir valores arbitrariamente mais elevados.

Dado a complexidade das equações da L-assimetria, L-curtose, assimetria, e curtose. Desenvolveu-se a implementação destas funções no software Estatístico R, para que assim seja possível fazer estudos dos seus comportamentos, e compará-las entre si. Na Tabela 4 encontra-se as principais estatísticas descritivas da distribuição de Kumaraswamy, que pode-se observar que realmente as medidas de L-Assimetria e L-Curtose são menores que as medidas de assimetria e curtose convencionais.

Tabela 4 -Estatísticas da distribuição de Kumaraswamy.

Amostras	Média	Variância	moda	Assimetria	Curtose	L-Assimetria	L-Curtose
Kw(0,4;0,7)	0,38931	0,11219	0,63394	0,41543	1,74068	0,14444	-0,04823
Kw(0,3;0,8)	0,29342	0,09837	0,76024	0,83993	2,34059	0,28489	0,00289
Kw(0,7;0,4)	0,65391	0,10590	0,28631	-0,60963	1,97478	-0,20732	-0,02568
Kw(0,8;0,3)	0,73804	0,09068	0,18848	-1,01464	2,72088	-0,33472	0,03485
Kw(0,5;0,5)	0,53333	0,12190	0,44444	-0,13531	1,53860	-0,04762	-0,07143
Kw(1;0,6)	0,62500	0,09014	0,00001	-0,46259	1,94686	-0,14286	-0,00840
Kw(1;3)	0,25000	0,03750	0,00001	0,86066	3,09524	0,20000	0,07692
Kw(1;14)	0,06667	0,00389	0,00001	1,63501	6,45378	0,30233	0,14321
Kw(1;70)	0,01408	0,00019	0,00001	1,91723	8,35805	0,32701	0,16176
Kw(0,4;1)	0,28571	0,08503	0,9999	0,86453	2,50267	0,27273	0,02098
Kw(3;1)	0,75000	0,03750	0,9999	-0,86066	3,09524	-0,20000	0,07692
Kw(14;1)	0,93333	0,00389	0,9999	-1,63501	6,45378	-0,30233	0,14321
Kw(70;1)	0,98592	0,00019	0,9999	-1,91723	8,35805	-0,32701	0,16176
Kw(3;7)	0,45277	0,02381	0,46416	-0,04582	2,52084	-0,01107	0,09390
Kw(7;3)	0,77955	0,01369	0,84198	-0,82256	3,60662	-0,15223	0,11458
Kw(60;5)	0,96285	0,00037	0,97331	-1,24489	5,52114	-0,19602	0,14545
Kw(5;60)	0,40404	0,00845	0,42197	-0,27598	2,87932	-0,05160	0,11370
Kw(2;2)	0,53333	0,04889	0,57735	-0,12530	2,18005	-0,02937	0,05882
Kw(5;5)	0,65039	0,01909	0,69883	-0,49564	2,96239	-0,09391	0,10664
Kw(50;50)	0,91424	0,00053	0,92438	-1,04588	4,92900	-0,16087	0,14530

Fonte: produção do próprio autor.

## 2.11 Distribuições Limite

Jones (2009) em seu artigo mostra que a distribuição de Kumaraswamy possui relações com outras distribuição quando realiza algumas transformações e quando um dos seus parâmetros tendem ao infinito, portando nesta seção será demonstrada detalhadamente tais características desta distribuição.

### Distribuição de Weibull

Segundo Jones (2009), a distribuição limite da transformação  $ZY = b^{\frac{1}{a}}X$ , onde  $X \sim Kw(a, b)$ , obtendo-se a função densidade 12, e quando o parâmetro  $b \rightarrow \infty$ , esta densidade tende para uma Weibull (b,1).

$$g(y) = ay^{a-1} \left[ 1 - \left( \frac{y^a}{b} \right) \right]^{b-1} I(y)_{(0, b^{\frac{1}{a}})} . \quad (12)$$

Demonstração. Pela equações (2) e (3) tem-se:

$$\begin{aligned} G(y) = P(Y \leq y) &= P(b^{\frac{1}{a}}X \leq y) \\ &= P\left(X \leq \frac{y}{b^{\frac{1}{a}}}\right) = F_X\left(\frac{y}{b^{\frac{1}{a}}}\right) \\ &= 1 - \left[ 1 - \left( \frac{y}{b^{\frac{1}{a}}} \right)^a \right]^b \end{aligned}$$

Derivando-se a equação  $G(y)$ , obtém-se

$$g(y) = ay^{a-1} \left[ 1 - \left( \frac{y^a}{b} \right) \right]^{b-1} I(y)_{(0, b^{\frac{1}{a}})}$$

Portanto quando  $b \rightarrow \infty$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
\lim_{b \rightarrow \infty} g(y) &= \lim_{b \rightarrow \infty} ay^{a-1} \left[ 1 - \left( \frac{y^a}{b} \right) \right]^{b-1} I(y)_{(0, b\frac{1}{a})} \\
&= ay^{a-1} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 - \frac{y^a}{b} \right)^{b-1} \right] \lim_{b \rightarrow \infty} I(y)_{(0, b\frac{1}{a})} \\
\lim_{b \rightarrow \infty} g(y) &= ay^{a-1} I(y)_{(0, \infty)} \lim_{b \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{y^a}{b} \right)^b \underbrace{\lim_{b \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{y^a}{b} \right)}_1 \\
&= ay^{a-1} I(y)_{(0, \infty)} \underbrace{\lim_{b \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{y^a}{b} \right)^b}_{e^{-y^a}} \\
&= ay^{a-1} e^{-y^a} I(y)_{(0, \infty)}.
\end{aligned}$$

que é uma distribuição de Weibull (b,1).

### Distribuição Exponencial Generalizada

Segundo Jones (2009), a distribuição limite da transformação  $Z = a(1 - X)$ , onde  $X \sim Kw(a, b)$ , quando  $a \rightarrow \infty$  obtem-se uma exponencial generalizada, com função densidade dada por

$$g(z) = be^{-z} (1 - e^{-z})^{b-1} I(z)_{(0, \infty)}.$$

Demonstração. Para  $0 < z < a$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
G(z) = P(Z \leq z) &= P(a(1-X) \leq z) = P\left(X \geq 1 - \frac{z}{a}\right) \\
&= 1 - P\left(X \leq 1 - \frac{z}{a}\right) = 1 - F_X\left(1 - \frac{z}{a}\right) \\
&= 1 - \left\{1 - \left[1 - \left(1 - \frac{z}{a}\right)^a\right]^b\right\} = \left[1 - \left(1 - \frac{z}{a}\right)^a\right]^b
\end{aligned}$$

Derivando  $G(z)$ , encontra-se

$$\begin{aligned}
g(z) &= b \left[1 - \left(1 - \frac{z}{a}\right)^a\right]^{b-1} \left[-a \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{a-1}\right] \left(-\frac{1}{a}\right) \\
&= b \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{a-1} \left[1 - \left(1 - \frac{z}{a}\right)^a\right]^{b-1} I(z)_{(0,a)}
\end{aligned}$$

Quando  $a \rightarrow \infty$  tem-se

$$\begin{aligned}
\lim_{a \rightarrow \infty} g(z) &= \lim_{a \rightarrow \infty} b \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{a-1} \left[1 - \left(1 - \frac{z}{a}\right)^a\right]^{b-1} I(z)_{(0,a)} \\
&= b \lim_{a \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{z}{a}\right)^a \underbrace{\lim_{a \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{z}{a}\right)}_1 \lim_{a \rightarrow \infty} \left[1 - \left(1 - \frac{z}{a}\right)^a\right]^{b-1} I(z)_{(0,a)} \\
&= b I(z)_{(0,\infty)} \underbrace{\lim_{a \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{z}{a}\right)^a}_{e^{-z}} \left\{1 - \left[\lim_{a \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{z}{a}\right)^a\right]\right\}^{b-1} \\
&= b I(z)_{(0,\infty)} e^{-z} I(z)_{(0,\infty)} \left[1 - \underbrace{\lim_{a \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{z}{a}\right)^a}_{e^{-z}}\right]^{b-1} \\
&= b e^{-z} (1 - e^{-z})^{b-1} I(z)_{(0,\infty)}.
\end{aligned}$$

Esta distribuição segundo Jones (2009), também pode ser encontrada utilizando a trans-

formação  $Y = -\ln(X)$ , onde  $X \sim \text{beta}(1, b)$ , sabe-se que sua densidade é dada por

$$f(x) = b(1-x)^{b-1} I(x)_{(0,1)}.$$

Pode-se demonstrar que a transformação  $Y = -\ln(X)$ , onde  $X \sim \text{Beta}(1, b)$ , é uma exponencial generalizada, primeiramente deve-se encontrar  $x$  expresso em termos de  $y$ ,

$$\begin{aligned} y = -\ln(x) &\implies x = e^{-y} \\ -x &= \ln(y) \implies e^{-x} = y \\ x &= e^{-y} \implies h(y) = e^{-y}. \end{aligned}$$

Em seguida encontra-se a derivada de  $h(y)$  e aplica-se o modulo

$$\begin{aligned} h'(y) &= -e^{-y} \\ |h'(y)| &= e^{-y} \end{aligned}$$

Portando tem-se que

$$\begin{aligned} g(y) &= f_X[h(y)] |h'(y)| I(y)_{(0,\infty)} \\ &= f_X(e^{-y}) I(y)_{(0,\infty)} \\ &= be^{-y}(1-e^{-y})^{b-1} I(y)_{(0,\infty)} \end{aligned}$$

### Distribuição Kappa

Segundo Jones (2009), a distribuição limite da transformação  $Z = a(1 - b^{\frac{1}{a}}X)$ , onde  $X \sim Kw(a, b)$  quando  $a \rightarrow \infty$  e  $b \rightarrow \infty$  é uma distribuição Kappa, com densidade dada por:

$$g(z) = e^{-z} e^{-e^{-z}} I(y)_{(\mathbb{R})}$$

Demonstração

$$\begin{aligned}
 G(z) &= P(Z \leq z) = P\left(a(1 - b^{\frac{1}{a}}X) \leq z\right) \\
 &= P\left(b^{\frac{1}{a}}X \geq 1 - \frac{z}{a}\right) \\
 &= P\left(X \geq \frac{1 - \frac{z}{a}}{b^{\frac{1}{a}}}\right) \\
 &= 1 - F_X\left(\frac{1 - \frac{z}{a}}{b^{\frac{1}{a}}}\right)
 \end{aligned}$$

Deriva-se  $G(z)$

$$\begin{aligned}
 G'(z) = g(z) &= -f_x\left(\frac{1 - \frac{z}{a}}{b^{\frac{1}{a}}}\right) \left(-\frac{1}{ab^{\frac{1}{a}}}\right) \\
 &= ab \left(\frac{1 - \frac{z}{a}}{b^{\frac{1}{a}}}\right)^{a-1} \left[1 - \left(\frac{1 - \frac{z}{a}}{b^{\frac{1}{a}}}\right)^a\right]^{b-1} \frac{1}{ab^{\frac{1}{a}}} I(z)_{(a(1-b^{\frac{1}{a}}), a)} \\
 &= b \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{a-1} \frac{1}{\left(b^{\frac{1}{a}}\right)^{a-1}} \left[1 - \frac{\left(1 - \frac{z}{a}\right)^a}{b}\right]^{b-1} \frac{1}{b^{\frac{1}{a}}} I(z)_{(a(1-b^{\frac{1}{a}}), a)} \\
 &= \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{a-1} \left[1 - \frac{\left(1 - \frac{z}{a}\right)^a}{b}\right]^{b-1} I(z)_{(a(1-b^{\frac{1}{a}}), a)}
 \end{aligned}$$

Primeiramente desenvolve-se o limite do indicador, para encontrar o novo intervalo para variável  $z$ , portanto quando  $b \rightarrow \infty$  tem-se:

$$\begin{aligned}
 \lim_{b \rightarrow \infty} I(z) &= I(z) \\
 &\quad \left(\lim_{b \rightarrow \infty} a(1 - b^{\frac{1}{a}}), \lim_{b \rightarrow \infty} a\right) \\
 &= I(z)_{(-\infty, a)}
 \end{aligned}$$

Pela continuidade da função, aplica-se o outro limite quando  $a \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} I(z)_{(-\infty, a)} &= I(z)_{\left(-\infty, \lim_{a \rightarrow \infty} a\right)} \\ &= I(z)_{(-\infty, \infty)} \end{aligned}$$

Apos calcular o novo intervalo para  $z$ , pode-se continuar a demonstração, com isso tem-se que quando  $a \rightarrow \infty$  obtém-se

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} g(z) &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{a-1} \left[1 - \frac{\left(1 - \frac{z}{a}\right)^a}{b}\right]^{b-1} I(z)_{(-\infty, \infty)} \\ &= \underbrace{\lim_{a \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{z}{a}\right)^a}_{e^{-z}} \underbrace{\lim_{a \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{z}{a}\right)}_1 \left[1 - \frac{\overbrace{\lim_{a \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{z}{a}\right)^a}^{e^{-z}}}{b}\right]^{b-1} I(z)_{(-\infty, \infty)} \\ &= e^{-z} \left(1 - \frac{e^{-z}}{b}\right)^{b-1} I(z)_{(-\infty, \infty)} \end{aligned}$$

Pela continuidade, aplica-se o outro limite quando  $b \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} g(z) &= \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-z} \left(1 - \frac{e^{-z}}{b}\right)^{b-1} I(z)_{(-\infty, \infty)} \\ &= e^{-z} I(z)_{(-\infty, \infty)} \underbrace{\lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{e^{-z}}{b}\right)^b}_{e^{-e^{-z}}} \overbrace{\lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{e^{-z}}{b}\right)}^1 \\ &= e^{-z} e^{-e^{-z}} I(z)_{(-\infty, \infty)} \end{aligned}$$

Segundo Jones (2009), uma das mais obvias transformação com relação a distribuição de Kumaraswamy é dada quando tem-se  $Y = \frac{X}{1-X}$ , que é uma extensão natural de  $Z = \frac{Y - (\frac{1}{Y})}{2}$

estas transformações mantêm à potência das caudas da distribuição de Kumaraswamy. Também como alternativa pode-se utilizar as transformações ( $Y = -\ln(1 - X)$ ,  $Z = \ln Y$ ), cada transformação diminui os pesos das caudas. em particular, esta distribuição é uma alternativa interessante para as distribuições F, e Pareto generalizadas que possuem caudas pesadas. Portanto a densidade da transformação é dada por

$$g(y) = ab \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{ab+1}} [(1+y)^a - y^a]^{b-1} I(y)_{(0,\infty)} \quad (13)$$

Demonstração. Primeiramente encontra-se  $x$  expresso em termos de  $y$

$$\begin{aligned} Y = \frac{X}{1-X} &\implies x = \frac{y}{1-y} \\ (1-y)x &= y \implies x - xy = y \\ x &= y + xy \implies x = y(1+x) \\ y &= \frac{x}{1+x} \implies h(y) = \frac{y}{1+y} \end{aligned}$$

Encontra-se o modulo da derivada de  $h(y)$

$$\begin{aligned} h'(y) &= \frac{1}{(1+y)^2} \\ |h'(y)| &= \frac{1}{(1+y)^2} \end{aligned}$$

portando tem-se que

$$\begin{aligned}
g(y) &= f_x(h(y)) |h'(y)| \\
&= ab \left(\frac{y}{1+y}\right)^{a-1} \left[1 - \left(\frac{y}{1+y}\right)^a\right]^{b-1} \frac{1}{(1+y)^2} I(y)_{(0,\infty)} \\
&= aby^{a-1} \frac{1}{(1+y)^{a+1}} \left[1 - \frac{y^a}{(1+y)^a}\right]^{b-1} I(y)_{(0,\infty)} \\
&= aby^{a-1} \frac{1}{(1+y)^{a+1}} \left[\frac{(1+y)^a - y^a}{(1+y)^a}\right]^{b-1} I(y)_{(0,\infty)} \\
&= aby^{a-1} \frac{1}{(1+y)^{a+1}} \frac{[(1+y)^a - y^a]^{b-1}}{(1+y)^{ab-a}} I(y)_{(0,\infty)} \\
&= ab \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{ab+1}} [(1+y)^a - y^a]^{b-1} I(y)_{(0,\infty)}
\end{aligned}$$

## 2.12 Família de distribuições $Kw$ generalizadas

A partir das obras de Eugene et al. (2002) e Jones (2009), Cordeiro e Castro (2010) construíram uma nova classe de distribuições  $Kw$  generalizadas ( $Kw - G$ ). Considere a função de distribuição  $G(x)$  arbitrária, então a função acumulada  $F(x)$  da distribuição  $Kw - G$ , que segundo Cordeiro e Castro (2010) é definida por:

$$F(x) = 1 - [1 - G(x)^a]^b, \quad (14)$$

em que segundo os autores,  $a > 0$  e  $b > 0$  são dois parâmetros adicionais, cujo papel é o de introduzir a assimetria e variar os pesos da cauda. Devido à função de distribuição tratada em (14), a distribuição  $Kw - G$  pode ser utilizada de forma bastante eficaz, mesmo que os dados sejam censurados, correspondentemente, a função de densidade desta família de distribuições

será dada por

$$f(x) = abg(x)[G(x)]^{a-1} \{1 - [G(x)]^a\}^{b-1}, \quad (15)$$

Enquanto que, a densidade da distribuição Beta generalizada é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\beta(a,b)} g(x) [G(x)]^{a-1} \{1 - [G(x)]^a\}^{b-1},$$

Segundo Cordeiro e Castro (2010), a nova densidade em (15) tem uma vantagem sobre a classe de distribuição Beta generalizada (Eugene et al. (2002)), uma vez que não envolve qualquer função especial. Com isso, Cordeiro e Castro desenvolveram novas generalizações especiais a partir da  $Kw - G$  tomando  $G(x)$  na expressão (15) como sendo a função acumulada de uma distribuição qualquer. Por exemplo, no artigo eles geraram as distribuições  $Kw - normal(KwN)$ ,  $Kw - Weibull(KwW)$ ,  $Kw - gama(KwGa)$ ,  $Kw - Gumbel(KwGu)$  e  $Kw - Frchet(KwF)$ , onde todas são obtidas tomando  $G(x)$  como sendo a função acumulada da Normal, da Weibull, da Gamma, da Gumbel e da Fréchet, respectivamente. Segundo Cordeiro e Castro (2010), um dos principais benefícios da família  $Kw$  de distribuições generalizadas é a sua capacidade para ajustar dados assimétricos que não podem ser adequadamente ajustados por distribuições usuais, permitindo uma maior flexibilidade das suas caudas e pode ser aplicada em muitas áreas da engenharia e biologia. Lembrando que sua densidade será mais tratável quando a *fd*  $G(x)$  e a *fdp*  $g(x)$  tiverem expressões analíticas simples.

## 2.13 Estimação pelo método de Máxima verossimilhança

Uma amostra aleatória  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , retirada de uma população com uma função de densidade de probabilidade  $f(x, \theta)$ , a qual depende do vetor de parâmetros  $\underline{\theta}$ , tem uma função de densidade de probabilidade conjunta dada por

$$\prod_{i=1}^n f(x_i, \theta).$$

Isto é, a função de densidade de probabilidade conjunta é simplesmente o produto das

densidades avaliadas em cada uma das observações,

$$f(x_1, \theta)f(x_2, \theta)f(x_3, \theta) \dots f(x_n, \theta).$$

Antes da retirada da amostra, cada observação é uma variável aleatória cuja função de densidade de probabilidade é igual a função de densidade de probabilidade da população, é neste sentido que diz-se que na função de densidade conjunta, antes de retirada a amostra, que  $\theta$  é fixo e  $x_i$  é variável. Uma vez que tenha sido obtida uma amostra específica,  $x_i$ 's tornam-se fixos e a função de densidade de probabilidade conjunta, pode-se então ser reinterpretada como sendo uma função do vetor de parâmetros  $\theta$ , que se torna variáveis. Para uma dada amostra  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  a função de densidade de probabilidade conjunta vista como função do vetor de parâmetros desconhecidos  $\theta$ , é denominada de função de verossimilhança, representada por  $L(\theta) = L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n)$ , cujo o objetivo consiste em obter-se o vetor  $\hat{\theta}$  que maximiza esta função. O estimador de máxima verossimilhança  $\hat{\theta}$  é o vetor que faz;

$$L(\hat{\theta}, x) > L(\hat{\theta}, x).$$

onde  $\hat{\theta}$  é qualquer outro estimador de  $\theta$ .

Matematicamente a implementação deste procedimento é simples, pois tudo que tem-se a fazer é maximizar a função de verossimilhança com respeito a  $\hat{\theta}$ . Para tanto, basta igualar a zero as derivadas parciais da função de verossimilhança e achar o vetor  $\hat{\theta}$  que resolve este conjunto de equações. Na maioria dos casos trabalha-se com o logaritmo natural da função de verossimilhança ( $\ln L$ ), pois maximizar o logaritmo natural de uma função é em geral mais simples e produz os mesmos resultados da maximização da função original. Portanto tem-se que derivando o logaritmo natural da função de verossimilhança em relação aos seus parâmetros obtêm-se à função escore que é definida segundo Kalbfleisch (1985), para o caso de dois parâmetros como

$$U(\theta) = \begin{bmatrix} U_1(\theta) \\ U_2(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_2} \end{bmatrix}$$

Para encontrar  $(\hat{a}, \hat{b})$ , deve-se resolver o par de equações simultaneamente.

$$U_1(a, b) = 0; \quad U_2(a, b) = 0$$

Segundo Kalbfleisch (1985), no caso de um parâmetro a condição de máximo relativo é que  $U'(\hat{\theta}) < 0$ . Agora a função de informação é uma matriz simétrica dois por dois, também chamada de matriz de informação observada é dada por:

$$j(a, b) = \begin{bmatrix} j_{11}(a, b) & j_{12}(a, b) \\ j_{21}(a, b) & j_{22}(a, b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 l(a, b)}{\partial a^2} & -\frac{\partial^2 l(a, b)}{\partial a \partial b} \\ -\frac{\partial^2 l(a, b)}{\partial a \partial b} & -\frac{\partial^2 l(a, b)}{\partial b^2} \end{bmatrix}$$

onde  $\underline{\theta} = (a, b)$ . Para ter um máximo relativo, a matriz  $j(\hat{a}, \hat{b})$  deve ser positiva definida, isto é

$$\hat{j}_{11} > 0; \quad \hat{j}_{22} > 0; \quad \hat{j}_{11}\hat{j}_{22} - \hat{j}_{12}^2 > 0.$$

Com isso seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma amostra aleatória da variável  $X \sim Kw(a, b)$ , onde  $a$  e  $b$  são parâmetros desconhecidos. Logo a função de verossimilhança da distribuição de Kumaraswamy é dada por

$$L(a, b; \underline{x}) = \prod_{i=1}^n abx_i^{a-1}(1-x_i^a)^{b-1}I(x_i)_{(0,1)} = a^n b^n \prod_{i=1}^n x_i^{a-1} \prod_{i=1}^n (1-x_i^a)^{b-1} \prod_{i=1}^n I(x_i)_{(0,1)},$$

Logo o logaritmo natural da função de verossimilhança de  $\underline{\theta} = (a, b)$  é dado por

$$l(\underline{\theta}; \underline{x}) = \ln L(\underline{\theta}; \underline{x}).$$

Tem-se que

$$l(a, b) = n \ln a + n \ln b + (a-1) \sum_{i=1}^n \ln x_i + (b-1) \sum_{i=1}^n \ln(1-x_i^a).$$

Deriva-se o logaritmo da função de verossimilhança em relação aos seus parâmetros obtêm-se à função score, que agora é um vetor com dois componentes. Para encontrar  $(\hat{a}, \hat{b})$ , deve-se resolver o par de equações simultaneamente.

Em muitas situações, deseja-se realizar inferências em um determinado modelo envol-

vendo alguns, mas não todos os parâmetros. Nesse caso, diz-se que os parâmetros sobre os quais a inferência seria feita, são os parâmetros de interesse e os demais parâmetros são de perturbação. Quando o número de parâmetros de perturbação é grande, pode ser mais adequado basear as inferências sobre o parâmetro de interesse em uma função de verossimilhança marginal ou condicional, que são verossimilhanças genuínas.

Uma outra solução é utilizar uma pseudo-verossimilhança, que é uma função dos dados que depende apenas do parâmetro de interesse, como se fosse uma verossimilhança genuína. A ideia comumente utilizada é substituir o vetor de parâmetros de perturbação por uma estimativa consistente deste na verossimilhança original. A função resultante é conhecida como função de verossimilhança perfilada. Esta função não é deduzida de uma função densidade e, portanto, não é uma verossimilhança genuína. Entretanto, possui propriedades interessantes que a fazem parecer com uma verossimilhança verdadeira. De fato, a função de verossimilhança perfilada pode ser tratada como uma função de verossimilhança genuína. Porém, tal procedimento pode conduzir a alguns problemas, como, por exemplo, inconsistência e ineficiência dos estimadores.

Usar a função de verossimilhança perfilada assemelha-se a tratar o parâmetro de perturbação como se fosse conhecido. É claro que isto não é razoável quando os dados não fornecem muita informação sobre o parâmetro de perturbação, o que usualmente ocorre quando a dimensão do vetor de parâmetros de perturbação é grande. Isto pode prejudicar a qualidade das aproximações envolvidas nas inferências que se baseiam em resultados assintóticos. Portanto, ajustes para a função de verossimilhança perfilada são necessários para reduzir os problemas provenientes do fato desta função não ser uma função de verossimilhança genuína.

Para a distribuição de Kumaraswamy, por se tratar de uma distribuição biparamétrica, pode-se considerar dois casos. O primeiro caso ocorre quando o parâmetro  $b$  é o parâmetro de interesse e o parâmetro  $a$  é o parâmetro de perturbação. No segundo caso, a situação é inversa, ou seja, os parâmetros  $a$  e  $b$  da distribuição são considerados como parâmetros de interesse e de perturbação, respectivamente. Tem-se portanto que a função escore para o parâmetro  $b$  é dada por

$$U(b) = \frac{\partial l(a, b; x)}{\partial b} = \frac{n}{b} + \sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i^a)$$

Portanto pode-se derivar a função escore em relação ao parâmetro  $b$ , obtendo:

$$U'(b) = -\frac{n}{b^2}$$

Observa-se que  $U'(b) < 0$ , logo possui um máximo relativo. Para encontrar o possível ponto de máximo, deve-se igualar à derivada do logaritmo da função de verossimilhança a zero, quando tem-se o parâmetro  $a$  conhecido, assim:

$$\begin{aligned} U(\hat{b}) &= \frac{\partial l(a, b; \underline{x})}{\partial b} = 0 \\ \Rightarrow \frac{n}{\hat{b}} + \sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i^{\hat{a}}) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{n}{\hat{b}} &= - \sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i^{\hat{a}}) \end{aligned}$$

Finalmente

$$\hat{b} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i^{\hat{a}})}. \quad (16)$$

A função escore para o parâmetro  $a$  é dado por

$$\begin{aligned} U(a) &= \frac{\partial l(a, b; \underline{x})}{\partial a} = \frac{n}{a} + \sum_{i=1}^n \ln x_i - (b-1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^a \ln x_i}{1 - x_i^a} \\ &= \frac{n}{a} + \sum_{i=1}^n \ln x_i - b \sum_{i=1}^n \frac{x_i^a \ln x_i}{1 - x_i^a} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i^a \ln x_i}{1 - x_i^a} \\ &= \frac{n}{a} + \sum_{i=1}^n \ln x_i \left( 1 + \frac{x_i^a}{1 - x_i^a} \right) - b \sum_{i=1}^n \frac{x_i^a \ln x_i}{1 - x_i^a} \\ &= \frac{n}{a} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\ln x_i}{1 - x_i^a} \right) - b \sum_{i=1}^n \frac{x_i^a \ln x_i}{1 - x_i^a}. \end{aligned}$$

Derivando à função escore em relação ao parâmetro  $a$ , e assumindo que o parâmetro  $b$  conhecido, encontra-se:

$$\begin{aligned}
U'(a) &= -\frac{n}{a^2} - (b-1) \sum_{i=1}^n \left[ \frac{x_i^a (\ln x_i)^2 (1 - x_i^a) + (x_i^a \ln x_i)^2}{(1 - x_i^a)^2} \right] \\
&= -\frac{n}{a^2} - (b-1) \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{x_i^a (\ln x_i)^2 [1 - x_i^a + x_i^a]}{(1 - x_i^a)^2} \right\} \\
&= -\frac{n}{a^2} - (b-1) \sum_{i=1}^n \left[ \frac{x_i^a (\ln x_i)^2}{(1 - x_i^a)^2} \right]
\end{aligned}$$

Logo para encontrar um possível  $\hat{a}$ , deve-se igualar à função escore a zero, dado que o parâmetro  $b$  é conhecido, com isso tem-se que:

$$U(\hat{a}) = \frac{n}{\hat{a}} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\ln x_i}{1 - x_i^{\hat{a}}} \right) - \hat{b} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{\hat{a}} \ln x_i}{1 - x_i^{\hat{a}}} = 0$$

Sabe-se que  $\hat{b} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i^{\hat{a}})}$  e substituindo na equação (17), tem-se que

$$S(a) = \frac{n}{\hat{a}} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\ln x_i}{1 - x_i^{\hat{a}}} \right) + \frac{n \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{\hat{a}} \ln x_i}{1 - x_i^{\hat{a}}}}{\sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i^{\hat{a}})} = 0. \quad (17)$$

Segundo Jones (2009), têm-se que  $\lim_{a \rightarrow 0} S(a) > 0$  e  $\lim_{a \rightarrow \infty} S(a) < 0$ , e assim, devido à continuidade de  $S(a)$ , existe pelo menos um zero na equação (17) no intervalo  $(0, \infty)$ .

A solução da equação (17) não pode ser obtida algebricamente, neste tipo de caso usam-se procedimentos numéricos, como o método de Newton-Raphson. Que segundo Bolfarine (2001), o método de Newton-Raphson tem como objetivo estimar as raízes de uma função, para isso, toma-se um ponto qualquer da função, calcula-se a equação da tangente (derivada) da função nesse ponto, calcula-se o intercepto da tangente ao eixo das abcissas, calcula-se o valor da função nesse ponto, e repete-se o processo, que deve tender a uma das raízes da função rapidamente, ou não tender a nada, deixando isso logo claro. Em notação matemática representa-se desta forma, lembrando-se que a função escore utilizada, é a função escore perfilada:

$$\hat{\theta} = \theta_0 - \frac{U(\theta_0)}{U'(\theta_0)}.$$

Com isso obtém-se o procedimento iterativo de Newton-Raphson

$$\theta_{j+1} = \theta_j - \frac{U(\theta_j)}{U'(\theta_j)}.$$

Que é iniciado como o valor  $\theta_0$  e então um novo valor  $\theta_1$  é obtido, e assim por diante até que o processo se estabilize, ou seja, para um dado  $\varepsilon$  pequeno,  $|\theta_{j+1} - \theta_j| < \varepsilon$ . Nesse caso, o ponto  $\hat{\theta}$  em que o processo se estabiliza é tomado como o estimador de máxima verossimilhança de  $\theta$ .

No nosso caso  $U(\theta) = U(a)$ . Assim tem-se que

$$g(a) = \frac{n}{a} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\ln x_i}{1 - x_i^a} \right) + \frac{n \sum_{i=1}^n \frac{x_i^a \ln x_i}{1 - x_i^a}}{\sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i^a)}$$

$$g'(a) = -\frac{n}{a^2} + n \left\{ \frac{\left[ \sum_{i=1}^n \frac{x_i^a \ln x_i}{1 - x_i^a} \right] \left[ \sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i^a) \right] + \left[ \sum_{i=1}^n \frac{x_i^a \ln x_i}{(1 - x_i^a)} \right]^2}{\left[ \sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i^a) \right]^2} \right\} - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^a (\ln x_i)^2}{(1 - x_i^a)^2}$$

Com isso, foi desenvolvido o algoritmo de Newton-Raphson para distribuição de Kumaraswamy. Este algoritmo foi implementado no software Estatístico R, onde foram feitas simulações pela semente 609, de 1000 amostras de tamanho 10, 20, 30, 60, 100, 1000, da própria distribuição, o valor inicial atribuído ao foi à média da amostra estudada, e o critério de parada fosse quando  $\varepsilon$  for menor ou igual a  $10^{-10}$ .

## 2.14 Matriz de informação observada e esperada

O termo  $j_{12} = j_{21}$  da matriz de informação observada é dado por:

$$\frac{\partial^2 l(a, b)}{\partial a \partial b} = - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^a \ln x_i}{1 - x_i^a}$$

Mas tem-se que  $j_{12} = -\frac{\partial^2 l(a, b)}{\partial a \partial b}$ , logo obtém-se:

$$j_{12} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^a \ln x_i}{1 - x_i^a}$$

Derivando-se a função escore em relação ao parâmetro  $b$ , pode-se obter o termo  $j_{22}$  da

matriz de informação observada.

$$U'(b) = -\frac{n}{b^2}$$

Portanto

$$j_{22} = \frac{n}{b^2}$$

Derivando à função escore em relação ao parâmetro  $a$ , encontra-se o termo  $j_{11}$  da matriz de informação observada.

$$\begin{aligned} U'(a) &= -\frac{n}{a^2} - (b-1) \sum_{i=1}^n \left[ \frac{x_i^a (\ln x_i)^2 (1-x_i^a) + (x_i^a \ln x_i)^2}{(1-x_i^a)^2} \right] \\ &= -\frac{n}{a^2} - (b-1) \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{x_i^a (\ln x_i)^2 [1-x_i^a + x_i^a]}{(1-x_i^a)^2} \right\} \\ &= -\frac{n}{a^2} - (b-1) \sum_{i=1}^n \left[ \frac{x_i^a (\ln x_i)^2}{(1-x_i^a)^2} \right] \end{aligned}$$

Portanto

$$j_{11} = \frac{n}{a^2} + (b-1) \sum_{i=1}^n \left[ \frac{x_i^a (\ln x_i)^2}{(1-x_i^a)^2} \right]$$

Em resumo têm-se que os elementos da matriz de informação observada, são dados por

$$j_{22} = \frac{n}{b^2}; \quad j_{12} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^a \ln x_i}{1-x_i^a}; \quad j_{11} = \frac{n}{a^2} + (b-1) \sum_{i=1}^n \left[ \frac{x_i^a (\ln x_i)^2}{(1-x_i^a)^2} \right].$$

Para simplificar as equações, tem-se que  $X \sim Kw(a, b)$  e  $Y = X^a$ , portanto  $Y \sim \beta(1, b)$ , com isso obtém-se

$$j_{22} = \frac{n}{b^2}; \quad j_{12} = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \frac{y_i \ln y_i}{1-y_i}; \quad j_{11} = \frac{n}{a^2} + \frac{(b-1)}{a^2} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{y_i (\ln y_i)^2}{(1-y_i)^2} \right].$$

Para obter os elementos da matriz de informação esperada basta aplicar a esperança nos elementos da matriz de informação observada, portanto tem-se que

$$E(j_{22}) = E\left(\frac{n}{b^2}\right) = \frac{n}{b^2}$$

$$\begin{aligned}
E(j_{21}) &= E\left(\frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i \ln Y_i}{1 - Y_i}\right) \\
&= \frac{1}{a} E\left(\sum_{i=1}^n \frac{Y_i \ln Y_i}{1 - Y_i}\right) \\
&= \frac{n}{a} E\left(\frac{Y \ln Y}{1 - Y}\right)
\end{aligned}$$

Sabe-se que  $Y \sim \text{beta}(1, b)$ , portanto tem-se que

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{Y \ln(Y)}{1 - Y}\right) &= \int_0^1 \frac{\Gamma(1+b)}{\Gamma(1)\Gamma(b)} \frac{y \ln(y)}{1-y} (1-y)^{b-1} dx \\
&= \int_0^1 \frac{b\Gamma(b)}{\Gamma(b)} y \ln(y) (1-y)^{b-2} dx \\
&= b \int_0^1 y \ln(y) (1-y)^{b-2} dx
\end{aligned}$$

Segundo Medina (2009), derivando a função Beta em relação ao parâmetro  $a$  obtém-se

$$\begin{aligned}
\beta'(a, b) &= \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} \ln(x) dx \\
&= \frac{\Gamma'(a)\Gamma(b)\Gamma(a+b) - \Gamma'(a+b)\Gamma(a)\Gamma(b)}{[\Gamma(a+b)]^2}
\end{aligned}$$

Mas  $\Gamma'(a) = \psi(a)\Gamma(a)$  portanto

$$\begin{aligned}
\beta'(a, b) &= \Gamma(b) \left\{ \frac{\psi(a)\Gamma(a)\Gamma(a+b) - \psi(a+b)\Gamma(a)\Gamma(a+b)}{[\Gamma(a+b)]^2} \right\} \\
&= \Gamma(b) \left[ \frac{\psi(a)\Gamma(a) - \psi(a+b)\Gamma(a)}{\Gamma(a+b)} \right]
\end{aligned}$$

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} \ln(x) dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} [\psi(a) - \psi(a+b)] \quad (18)$$

portando obtém-se

$$\begin{aligned}
 E\left(\frac{Y \ln(Y)}{1-Y}\right) &= \frac{b\Gamma(2)\Gamma(b-1)}{\Gamma(2+b-1)} [\psi(2) - \psi(2+b-1)] \\
 &= \frac{b\Gamma(b-1)}{\Gamma(b+1)} [\psi(2) - \psi(b+1)] \\
 &= \frac{b\Gamma(b-1)}{b\Gamma(b)} [\psi(2) - \psi(b+1)] \\
 &= \frac{1}{b-1} [\psi(2) - \psi(b+1)]
 \end{aligned}$$

Logo tem-se

$$\begin{aligned}
 E(j_{12}) &= \frac{n}{a} E\left(\frac{Y \ln Y}{1-Y}\right) \\
 &= \frac{n}{a(b-1)} [\psi(2) - \psi(b+1)] \\
 \\
 E(j_{11}) &= E\left\{ \frac{n}{a^2} + \frac{(b-1)}{a^2} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{Y_i (\ln Y_i)^2}{(1-Y_i)^2} \right] \right\} \\
 &= E\left(\frac{n}{a^2}\right) + E\left\{ \frac{(b-1)}{a^2} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{Y_i (\ln Y_i)^2}{(1-Y_i)^2} \right] \right\} \\
 &= \frac{n}{a^2} + \frac{n(b-1)}{a^2} E\left[ \frac{Y (\ln Y)^2}{(1-Y)^2} \right] \\
 &= \frac{n}{a^2} \left\{ 1 + (b-1) E\left[ \frac{Y (\ln Y)^2}{(1-Y)^2} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

mas,

$$\begin{aligned} (b-1)E \left[ \frac{Y(\ln Y)^2}{(1-Y)^2} \right] &= b(b-1) \int_0^1 \frac{y(\ln y)^2}{(1-y)^2} (1-y)^{b-1} dy \\ &= b(b-1) \int_0^1 y(\ln y)^2 (1-y)^{b-3} dy \end{aligned}$$

derivando a equação (18) em relação ao parâmetro  $a$  obtém-se,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} (\ln x)^2 dx &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} [\psi(a) - \psi(a+b)]^2 + [\psi'(a) - \psi'(a+b)] \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \\ &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \left\{ [\psi(a) - \psi(a+b)]^2 + [\psi'(a) - \psi'(a+b)] \right\} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} b(b-1) \int_0^1 y(\ln y)^2 (1-y)^{b-3} dy &= b(b-1) \frac{\Gamma(2)\Gamma(b-2)}{\Gamma(b)} \left\{ [\psi(2) - \psi(b)]^2 - [\psi'(b) - \psi'(2)] \right\} \\ &= \frac{b}{b-2} \left\{ [\psi(2) - \psi(b)]^2 - [\psi'(b) - \psi'(2)] \right\} \end{aligned}$$

Com isto conclui-se que,

$$E(j_{11}) = \frac{n}{a^2} \left\{ 1 + \frac{b}{b-2} \left\{ [\psi(2) - \psi(b)]^2 - [\psi'(b) - \psi'(2)] \right\} \right\}$$

Em resumo têm-se que os elementos da matriz de informação esperada são dados por:

$$E(j_{22}) = \frac{n}{b^2}.$$

$$E(j_{21}) = \frac{n}{a} E \left( \frac{Y \ln Y}{1-Y} \right).$$

$$E(j_{12}) = \frac{n}{a(b-1)} [\psi(2) - \psi(b+1)].$$

$$E(j_{11}) = \frac{n}{a^2} \left\{ 1 + \frac{b}{b-2} \left\{ [\Psi(2) - \Psi(b)]^2 - [\Psi'(b) - \Psi'(2)] \right\} \right\}$$

Utilizando o software Estatístico R, foi possível demonstrar que essa matriz de informação observada é positiva definida, ou seja, ela possui máximos relativos. Na Tabela 5 encontra-se as médias das estimativas dos parâmetros  $(a, b)$ . Pôde-se observar que o algoritmo foi capaz de fazer estimações razoáveis, principalmente para amostra de tamanho maior ou igual a 30.

Tabela 5 - Médias das estimativas dos parâmetros  $(a, b)$  obtidos pelo método de Newton-Raphson para 1000 amostras de tamanhos 10, 20, 30, 60, 100, 1000.

Amostras	Parâmetros estimados para amostras de tamanhos					
	n=10	n=20	n=30	n=60	n=100	n=1000
Kw(0,4;0,7)	(0,57868;0,93371)	(0,46169;0,78259)	(0,43477;0,73567)	(0,41012;0,6933)	(0,40952;0,70757)	(0,40197;0,70188)
Kw(0,3;0,8)	(0,46811;0,99094)	(0,35793;0,80994)	(0,30134;0,6633)	(0,31343;0,83089)	(0,30917;0,81918)	(0,3014;0,80228)
Kw(0,7;0,4)	(1,08581;0,51899)	(0,85339;0,4435)	(0,78988;0,42352)	(0,72413;0,41154)	(0,72941;0,40726)	(0,70365;0,39915)
Kw(0,8;0,3)	(1,36477;0,43444)	(1,03531;0,38631)	(0,95518;0,35822)	(0,86272;0,30847)	(0,85968;0,34536)	(0,8052;0,29898)
Kw(0,5;0,5)	(0,73895;0,66168)	(0,59762;0,55852)	(0,55725;0,53314)	(0,52829;0,51636)	(0,51871;0,50988)	(0,50284;0,50116)
Kw(1;0,6)	(1,42073;0,81045)	(1,17368;0,67473)	(1,10288;0,64232)	(1,05129;0,62088)	(1,03438;0,61275)	(1,00524;0,6015)
Kw(1;3)	(1,21386;5,32545)	(1,09456;3,74529)	(1,05919;3,41359)	(1,03048;3,19897)	(1,02189;3,12856)	(1,00321;3,01505)
Kw(1;14)	(1,10472;22,14157)	(1,06563;19,00485)	(1,04691;17,42408)	(1,02573;15,74644)	(1,01905;15,11773)	(1,00263;14,12613)
Kw(1;70)	(0,85867;37,9292)	(1,07514;159,2080)	(1,0483;108,7546)	(1,0240;86,1786)	(1,0182;80,1708)	(1,0025;71,0633)
Kw(0,4;1)	(0,57732;1,39445)	(0,44974;1,1202)	(0,42493;1,03106)	(0,41636;1,04208)	(0,41132;1,02641)	(0,40172;1,00314)
Kw(3;1)	(3,93934;1,44936)	(3,39914;1,15155)	(3,24194;1,0857)	(3,12272;1,04208)	(3,08488;1,02641)	(3,01291;1,00314)
Kw(14;1)	(18,38361;1,44936)	(15,86266;1,15155)	(15,12903;1,0857)	(14,57271;1,04208)	(14,39607;1,02641)	(14,06022;1,00314)
Kw(70;1)	(91,91804;1,44936)	(79,31328;1,15155)	(75,64529;1,0857)	(72,86355;1,04208)	(71,98037;1,02641)	(70,3011;1,00314)
Kw(3;7)	(3,57156;19,37784)	(3,24955;9,63806)	(3,15832;8,41305)	(3,0818;7,66269)	(3,05939;7,42958)	(3,00844;7,04894)
Kw(7;3)	(8,51976;5,61023)	(7,66193;3,74529)	(7,41431;3,4136)	(7,21339;3,19897)	(7,15325;3,12856)	(7,02246;3,01504)
Kw(60;5)	(65,12611;6,89636)	(63,52785;6,03408)	(62,65982;5,70989)	(61,63558;5,39915)	(61,21449;5,2639)	(60,17653;5,03074)
Kw(5;60)	(4,96203;63,40353)	(4,97186;62,71154)	(4,88979;60,73749)	(5,00774;62,75838)	(4,67226;59,45057)	(5,01232;60,87016)
Kw(2;2)	(2,48171;3,35059)	(2,20836;2,4107)	(2,12917;2,23024)	(2,0663;2,11178)	(2,04715;2,07174)	(2,00702;2,00848)
Kw(5;5)	(5,99368;11,60435)	(5,43335;6,59289)	(5,2737;5,86739)	(5,1413;5,41136)	(5,10228;5,26671)	(5,0147;5,03073)

Fonte: produção do próprio autor.

### 3 COMPARAÇÃO COM A DISTRIBUIÇÃO BETA

#### 3.1 Relações com a Distribuição Beta

Segundo Emiliano et al. (2010), um modelo é a representação simplificada de algum problema ou situação da vida real destinado a ilustrar certos aspectos do problema sem se ater a todos os detalhes. Não raro, mais de um modelo pode descrever um mesmo fenômeno, haja vista que cada pesquisador tem a liberdade de modelar o fenômeno seguindo a metodologia que julgar mais adequada. Com isso, falar da distribuição de Kumaraswamy, ou estudar dados que estão definidos no intervalo  $(0,1)$ , lembra-se sempre da distribuição Beta, já que as duas distribuições possuem funções de densidades de probabilidade semelhantes e são definidas no mesmo intervalo. Mas o quanto as duas diferem uma da outra em relação a adequação com os dados? Será que uma é melhor que a outra? Este capítulo tem por intuito tentar responder estas perguntas, e principalmente, fazer comparações entre estas duas distribuições de probabilidade. As primeiras relações que pode-se observar é que:

- $beta(1, b) = Kw(1, b)$ ;
- $X \sim beta(1, b)$  e  $Y = X^{\frac{1}{a}}$  então  $Y \sim Kw(a, b)$

O primeiro item não precisa ser demonstrado já que é intuitivo, portanto só será demonstrado o segundo item, com isso tem-se que a função densidade de uma distribuição  $beta(1, b)$  é dada por:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\beta(1, b)} (1-x)^{b-1} I(x)_{(0,1)} \\ &= \frac{\Gamma(1+b)}{\Gamma(1)\Gamma(b)} (1-x)^{b-1} I(x)_{(0,1)} \\ &= \frac{b\Gamma(b)}{\Gamma(b)} (1-x)^{b-1} I(x)_{(0,1)} = b(1-x)^{b-1} I(x)_{(0,1)} \end{aligned}$$

Portanto tem-se

$$\begin{aligned} G_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X^{\frac{1}{a}} \leq y) \\ &= P(X \leq y^a) = F_X(y^a) \end{aligned}$$

Derivando  $G_Y(y)$  obtém-se

$$\begin{aligned}
 g_Y(y) &= ay^{a-1}F'_X(y^a) \\
 &= a \frac{\Gamma(1)\Gamma(b)}{\Gamma(b+1)} y^{a-1}(1-y^a)^{b-1} \\
 &= aby^{a-1}(1-y^a)^{b-1}I(y)_{(0,1)}
 \end{aligned}$$

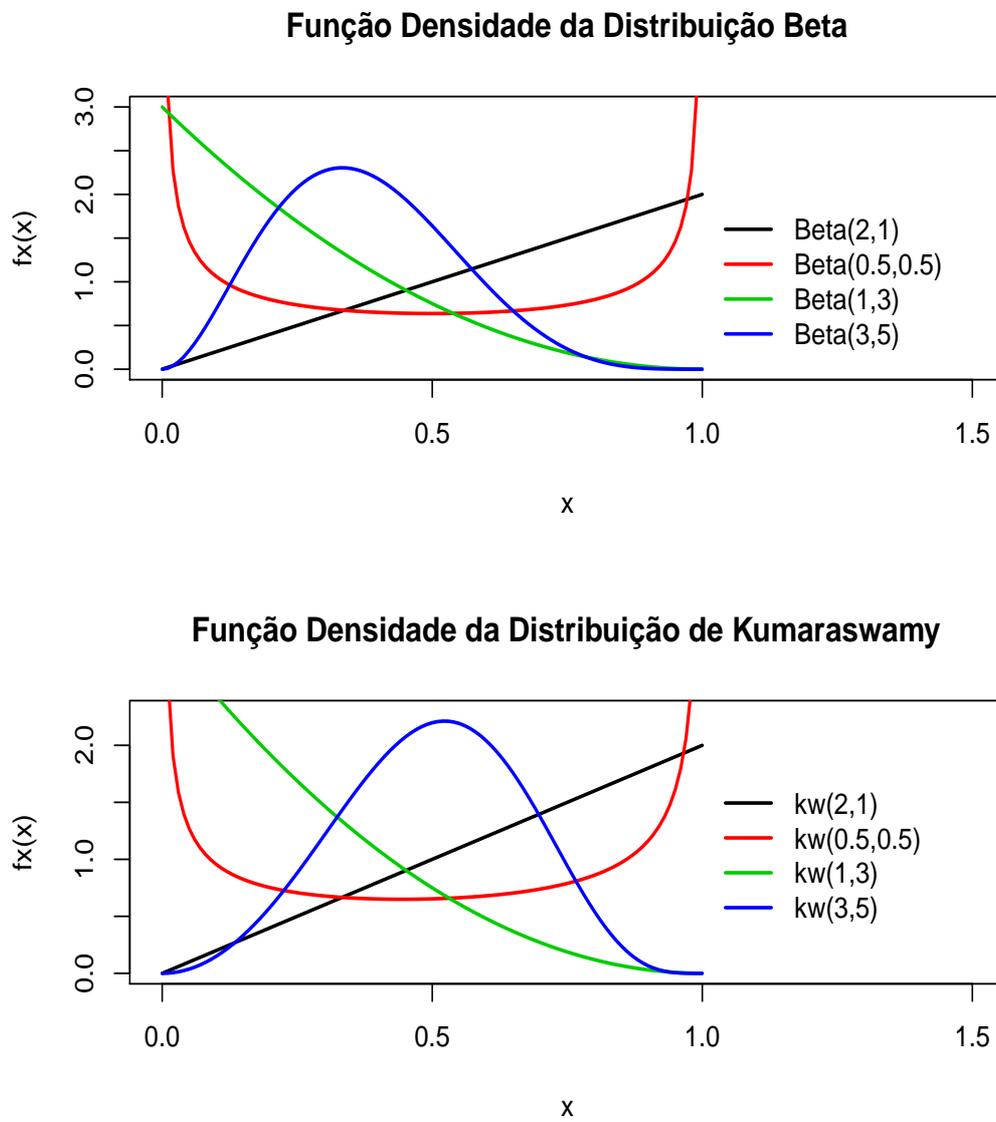
Logo  $Y \sim Kw(a,b)$

### 3.2 Relação Gráfica Entre as Distribuições Kumaraswamy e Beta

Pode-se observar na Figura 3.1 os gráficos das densidades das distribuições Beta e Kumaraswamy, onde observa-se que existe semelhança nas formas que as densidades das duas distribuições assumem para os diferentes tipos de parâmetros.

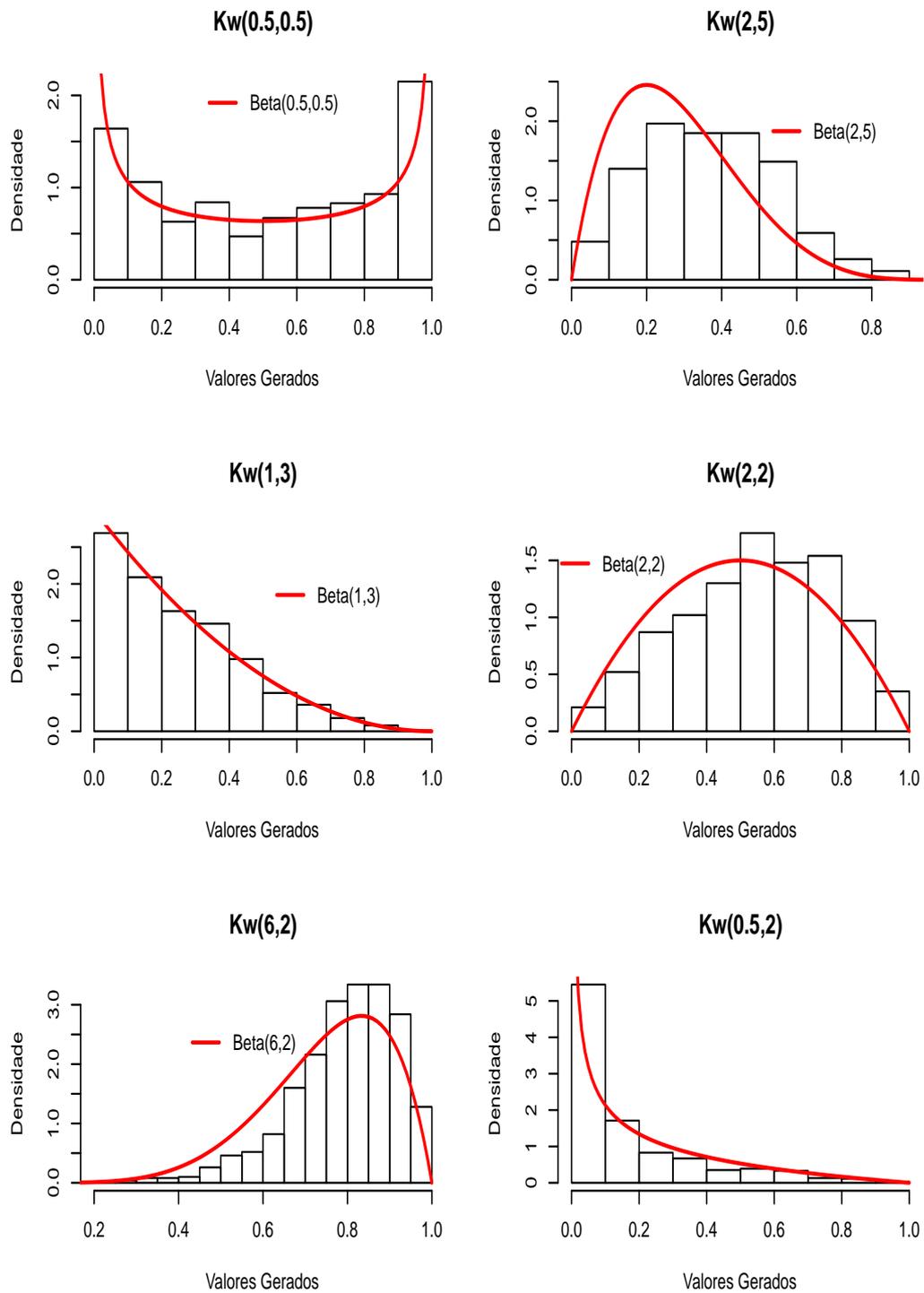
Na Figura 3.2 pode-se observar graficamente a adequabilidade das duas distribuições quando as duas assumem os mesmos parâmetros. Para isso utilizou-se o software R, onde foram simuladas amostras aleatórias de uma  $Kw(0.5,0.5)$ ,  $Kw(2,5)$ ,  $Kw(1,3)$ ,  $Kw(2,2)$ ,  $Kw(6,2)$  e  $Kw(0.5,2)$ , cada uma de tamanho 1000, e plotado os seus respectivos histogramas, e em cima dos histogramas foram plotados em forma de linha as densidades da distribuição Beta para os respectivos parâmetros da distribuição de Kumaraswamy. Observa-se que quando os dados são gerados de uma  $Kw(1,3)$  a Beta se ajusta quase que perfeitamente, já que são iguais como mencionado anteriormente.

Figura 3.1 - Gráfico das densidades da Kumaraswamy e Beta.



Fonte: produção do próprio autor.

Figura 3.2 - Gráfico da relação Kumaraswamy e Beta.



Fonte: produção do próprio autor.

### 3.3 Utilizando os Critérios de Informação Para comparação

Um problema encontrado na prática é, qual modelo se ajusta melhor para os dados estudados, ou seja, quais das distribuições melhor representa os dados definidos entre o intervalo (0,1)? Segundo Emiliano et al. (2010), é importante selecionar modelos baseando-se em princípios científicos. Dentre as diversas metodologias utilizadas para este fim, utilizou-se neste trabalho uma análise comparativa dos critérios de informação de Akaike (AIC), Akaike Corrigido (AICc) e Bayesiano (BIC), quanto a sua performance na seleção de modelos. Tais critérios são comparados via simulação de dados oriundos das distribuições Beta.

#### Critérios de Informação

Segundo Emiliano et al. (2010), se uma boa estimativa para a log verossimilhança esperada puder ser obtida através dos dados observados, esta estimativa poderá ser utilizada como um critério para comparar modelos. Assim um modo de comparar  $n$  modelos,  $g_1(x|\theta_1), \dots, g_n(x|\theta_n)$ , é simplesmente comparar as magnitudes da função suporte maximizada  $L(\hat{\theta}_i)$ . Mas tal método não fornece uma verdadeira comparação, haja vista que, não se conhece o verdadeiro modelo  $g(x)$ , primeiramente o método da máxima verossimilhança estima os parâmetros  $\theta_i$  de cada modelo  $g_i(x)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , e posteriormente são utilizados os mesmos dados para estimar  $E_G[\log f(x|\hat{\theta})]$ , isto introduz um viés em  $L(\hat{\theta}_i)$ , sendo que, a magnitude deste viés varia de acordo com a dimensão do vetor de parâmetros. Deste modo, Emiliano et al. (2010) afirma que os critérios de informação são construídos para avaliar e corrigir o viés ( $b(G)$ ) da função suporte.

#### Critério de informação de Akaike - AIC

Akaike (1974), mostrou que o viés é dado assintoticamente por  $p$ , em que  $p$  é o número de parâmetros a serem estimados no modelo, e definiu seu critério de informação como

$$AIC = -2\log L(\hat{\theta}) + 2(p)$$

### **Critério de informação de Akaike corrigido - $AICc$**

Bozdogan (1987), propôs a seguinte correção para o AIC

$$AICc = -2\log L(\hat{\theta}) + 2(p) + \frac{2p(p+1)}{n-p-1}$$

### **Critério de informação bayesiano - $BIC$**

o Critério de Informação Bayesiano(BIC) , proposto por Schwarz em 1978 é dado por

$$BIC = -2\log L(\hat{\theta}) + (p)\log(n),$$

onde  $p$  corresponde ao número de parâmetro do modelo, e  $n$  o tamanho da amostra em questão.

Os dois critérios apresentados, AIC e BIC, têm como objetivo segundo BOZDOGAN (1987), medir a complexidade do modelo no critério de seleção, pois são critérios que penalizam a função de verossimilhança, portanto o melhor modelo corresponde aos menores AIC e BIC. Para testar a adequabilidade dos dados, utilizou-se o teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov, a um nível de significância de 0,05. A estimação dos parâmetros para as duas distribuições, é dada segundo o algoritmo iterativo de Newton-Raphson definido no Capítulo 2.

Para ilustrar a comparação das distribuições Beta e Kumaraswamy, gerou-se 1000 amostras de tamanho 5, 20, 40, e 1000 no software R, de uma distribuição Beta com diferentes parâmetros, a partir da semente 609. O objetivo é saber qual o modelo paramétrico que se apresenta mais apropriado para descrever os dados provenientes de amostras pequenas, e amostras grandes. Dando prosseguimento, foram aplicados os critérios de seleção de modelo AIC, AIC corrigido ( $AICc$ ) e BIC. As tabelas 3.1, 3.2, 3.3, e 3.4 apresentam as médias dos resultados referentes a estes métodos, e a médias dos valores  $p$  do teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov, obtidos a partir de 1000 amostras de tamanho 5, 20, 40, e 1000. Foi-se utilizado o testes de Wicoxon-Mann-Whitney para comparar as médias provenientes das amostras geradas, já que estas não apresentaram normalidades a um nível de significância de 5%.

De acordo com o teste de Wicoxon-Mann-Whitney a um nível de significância de 5%, Pôde-se observar, para as 1000 amostras de tamanho 5 e 20 , Tabela 6 e 7, que das 20 distribuições geradas 15 não apresentam diferenças significativas entres as médias dos AIC, e somente 5 amostras apresentaram diferença significativa, que foram  $beta(1, 70)$ ,  $beta(5, 60)$ ,  $beta(60, 5)$ ,

$beta(60,5)$  e  $beta(10,10)$ . Destas 5, a distribuição de Kumaraswamy obteve duas com menores AIC,  $beta(1,70)$  e  $beta(60,5)$ .

De acordo com o teste de Wicoxon-Mann-Whitney a um nível de significância de 5%, Pôde-se observar, para as 1000 amostras de tamanho 40, Tabela 8, que das 20 distribuições geradas 10 não apresentam diferenças significantes entres as médias dos AIC, principalmente nos caso em que  $a = 1$  e  $0,5 < b < 50$ . 10 amostras apresentaram diferenças significativas entres as médias dos AIC. Destas 10 amostras, 6 obtiveram AIC menores quando ajustado a distribuição Beta, onde esta seria melhor ajustada, ou teria um menor AIC quanto,  $a < 1$  e  $a < b < 1$ . Quando  $a = 1$  e  $9 < b < 14$ , outro caso é quando  $b = 1$  e  $0,1 < a < 0,7$ , também tem-se quando  $a > 5$  e  $b > 9$ .

Na Tabela 9 encontra-se as médias dos AIC, AICc, BIC e dos valores p do teste e Kolmogorov-Smirnov, obtidos a partir de 1000 amostras de tamanho 1000. Pode-se observar que das 20 distribuições geradas a partir das 1000 amostra de tamanho 1000, obteve-se quase os mesmos resultados a partir das 1000 amostra de tamanho 40, em que 10 não apresentam diferenças significantes entres as médias dos AIC, e 10 se ajustam melhor a distribuição Beta.

Vale lembrar que as distribuições geradas foram Betas, já que na pratica muitos pesquisadores a utiliza, com isso, espera-se mesmo que a Beta tenha resultados melhores. Portanto a pesquisa mostrou que pode-se utilizar a distribuição de Kumaraswamy, em muitos caso que seria utilizada a distribuição Beta, sem muita perda de informação. Que segundo Jones (2009), distribuição de Kumaraswamy possui as seguintes vantagens sobre a distribuição Beta:

- Uma formula simples para sua função de distribuição que não envolve funções especiais;
- Função quantil simples;
- Como consequência da simplicidade da função quantil, uma fórmula simples para geração de variáveis aleatórias;
- Formula explicita para L-momentos;
- Formula simples para os momentos da estatística de ordem.

Tabela 6 - Médias dos AIC, AICc, BIC e dos valores p do teste de Kolmogorov-Smirnov, das distribuições Kumaraswamy e Beta das 1000 amostras de tamanho 5.

Amostras	kumaraswamy				Beta			
	Valor p do KS.test	AIC	AICc	BIC	Valor p do KS.test	AIC	AICc	BIC
beta(0,4;0,7)	0,77942	-2,52344	3,47656	-3,30457	0,77359	-2,70760	3,29240	-3,48872
beta(0,3;0,8)	0,77483	-7,35199	-1,35199	-8,13312	0,76226	-7,79653	-1,79653	-8,57766
beta(0,7;0,4)	0,76738	-2,71712	3,28288	-3,49824	0,77359	-2,70760	3,29240	-3,48872
beta(0,8;0,3)	0,76022	-8,18056	-2,18056	-8,96169	0,76226	-7,79653	-1,79653	-8,57766
beta(0,5;0,5)	0,77826	-0,65437	5,34563	-1,43549	0,78102	-0,74736	5,25264	-1,52848
beta(1;0,6)	0,77904	0,06564	6,06564	-0,71548	0,78122	0,06149	6,06149	-0,71964
beta(1;3)	0,79853	-2,78680	3,21320	-3,56792	0,7859	-2,83975	3,16025	-3,62088
beta(1;14)	0,80235	-14,89775	-8,89775	-15,67887	0,79261	-15,17358	-9,17358	-15,95471
beta(1;70)	0,75484	-29,14732	-23,14732	-29,92845	0,66779	-28,58832	-22,58832	-29,36944
beta(0,4;1)	0,78785	-4,19059	1,80941	-4,97171	0,77302	-4,18089	1,81911	-4,96202
beta(3;1)	0,78598	-2,84124	3,15876	-3,62236	0,78598	-2,83975	3,16025	-3,62088
beta(14;1)	0,78746	-15,30159	-9,30159	-16,08271	0,79261	-15,17358	-9,17358	-15,95471
beta(70;1)	0,59287	-28,41720	-22,41720	-29,19832	0,66779	-28,58832	-22,58832	-29,36944
beta(3;7)	0,79801	-4,05020	1,94980	-4,83132	0,79107	-4,38779	1,61221	-5,16892
beta(5;60)	0,63377	-15,05992	-9,05992	-15,84105	0,72680	-16,95421	-10,95421	-17,73534
beta(7;3)	0,79683	-4,33195	1,66805	-5,11308	0,79107	-4,38779	1,61221	-5,16892
beta(60;5)	0,75169	-18,39297	-12,39297	-19,17410	0,72680	-16,95421	-10,95421	-17,73534
beta(2;2)	0,79385	0,33379	6,33379	-0,44733	0,78788	0,29952	6,29952	-0,48161
beta(5;5)	0,80216	-3,05648	2,94352	-3,83761	0,79749	-3,26472	2,73528	-4,04584
beta(10;10)	0,78705	-5,64282	0,35718	-6,42395	0,79606	-6,33136	-0,33136	-7,11249

Fonte: produção do próprio autor.

Tabela 7 - Médias dos AIC, AICc, BIC e dos valores p do teste de Kolmogorov-Smirnov, das distribuições Kumaraswamy e Beta das 1000 amostras de tamanho 20.

Amostras	kumaraswamy				Beta			
	Valor p do KS.test	AIC	AICc	BIC	Valor p do KS.test	AIC	AICc	BIC
beta(0,4;0,7)	0,73413	-7,93261	-7,22673	-5,94115	0,74493	-3,90230	-3,19642	-1,91083
beta(0,3;0,8)	0,65670	-2,65833	-1,95244	-0,66686	0,62779	-0,58760	0,11829	1,40387
beta(0,7;0,4)	0,73015	-13,43403	-12,72814	-11,44256	0,74493	-3,90230	-3,19642	-1,91083
beta(0,85;0,36)	0,70649	-22,30180	-21,59592	-20,31034	0,68983	-10,65779	-9,95191	-8,66633
beta(0,5;0,5)	0,75271	-7,59747	-6,89159	-5,60601	0,75728	-7,64689	-6,94101	-5,65543
beta(1;0,6)	0,76478	-4,14363	-3,43775	-2,15217	0,76960	-4,14881	-3,44293	-2,15735
beta(1;3)	0,78287	-15,28491	-14,57902	-13,29344	0,77050	-15,29105	-14,58517	-13,29958
beta(1;14)	0,79579	-66,51635	-65,81047	-64,52489	0,77543	-66,57039	-65,86451	-64,57892
beta(1;70)	0,71388	-126,54248	-125,83660	-124,55102	0,55123	-124,97341	-124,26753	-122,98195
beta(0,4;1)	0,73477	-14,47185	-13,76596	-12,48038	0,72330	-16,05394	-15,34805	-14,06247
beta(3;1)	0,76758	-15,29529	-14,58941	-13,30382	0,77050	-15,29105	-14,58517	-13,29958
beta(14;1)	0,77077	-66,57087	-65,86499	-64,57941	0,77543	-66,57039	-65,86451	-64,57892
beta(70;1)	0,42838	-124,24838	-123,54249	-122,25691	0,55123	-124,97341	-124,26753	-122,98195
beta(3;7)	0,78036	-21,71362	-21,00774	-19,72216	0,77596	-21,87110	-21,16522	-19,87964
beta(5;60)	0,35147	-71,08027	-70,37439	-69,08881	0,64656	-77,52168	-76,81580	-75,53022
beta(7;3)	0,77582	-21,80136	-21,09548	-19,80990	0,77596	-21,87110	-21,16522	-19,87964
beta(60;5)	0,76596	-79,97143	-79,26555	-77,97996	0,64656	-77,52168	-76,81580	-75,53022
beta(2;2)	0,77570	-2,99210	-2,28622	-1,00064	0,77334	-3,00598	-2,30010	-1,01452
beta(5;5)	0,78768	-17,29716	-16,59128	-15,30570	0,78463	-17,44920	-16,74332	-15,45774
beta(10;10)	0,77027	-29,53046	-28,82458	-27,53899	0,78540	-30,08267	-29,37679	-28,09121

Fonte: produção do próprio autor.

Tabela 8 - Médias dos AIC, AICc, BIC e dos valores p do teste de Kolmogorov-Smirnov, das distribuições Kumaraswamy e Beta das 1000 amostras de tamanho 40.

Amostras	kumaraswamy				Beta			
	Valor p do KS.test	AIC	AICc	BIC	Valor p do KS.test	AIC	AICc	BIC
beta(0,4;0,7)	0,73060	-12,85172	-12,52739	-9,47396	0,74398	-21,38422	-21,05989	-18,00646
beta(0,3;0,8)	0,46483	91,71474	92,03906	95,09250	0,47837	68,95700	69,28132	72,33476
beta(0,7;0,4)	0,74358	-29,08723	-28,76291	-25,70947	0,74398	-21,38422	-21,05989	-18,00646
beta(0,8;0,3)	0,71452	-42,37825	-42,05393	-39,00049	0,65032	1,77528	2,09960	5,15303
beta(0,5;0,5)	0,75679	-16,88428	-16,55996	-13,50652	0,76497	-16,96821	-16,64388	-13,59045
beta(1;0,6)	0,76345	-10,01979	-9,69547	-6,64203	0,76899	-10,02371	-9,69939	-6,64596
beta(1;3)	0,78509	-32,29186	-31,96753	-28,91410	0,77264	-32,29520	-31,97088	-28,9174
beta(1;14)	0,79523	-133,29973	-132,97541	-129,92197	0,77482	-134,4761	-134,15173	-131,09829
beta(1;70)	0,66881	-256,21007	-255,88574	-252,83231	0,43131	-253,24747	-252,92314	-249,86971
beta(0,8;1)	0,76585	-0,06876	0,25557	3,30900	0,76361	-0,06930	0,25503	3,30846
beta(3;1)	0,76883	-32,29528	-31,97095	-28,91752	0,77264	-32,29520	-31,97088	-28,9174
beta(14;1)	0,77050	-134,47412	-134,14979	-131,09636	0,77482	-134,4760	-134,15172	-131,09829
beta(70;1)	0,27637	-251,7909	-251,46662	-248,41319	0,43131	-253,24746	-252,92314	-249,86970
beta(3;7)	0,77254	-45,8431	-45,51876	-42,46533	0,78093	-46,17989	-45,85557	-42,80213
beta(5;60)	0,1635	-145,90477	-145,58045	-142,5270	0,56989	-158,49674	-158,17242	-155,1189
beta(7;3)	0,7753	-46,02631	-45,70198	-42,64855	0,78093	-46,17989	-45,85557	-42,80213
beta(60;5)	0,7657	-162,21553	-161,89121	-158,83777	0,56989	-158,49674	-158,17242	-155,1189
beta(2;2)	0,78240	-8,06925	-7,74493	-4,69149	0,77880	-8,10397	-7,77965	-4,72621
beta(5;5)	0,76875	-35,71347	-35,38914	-32,33571	0,77870	-33,76067	-33,43635	-30,38292
beta(10;10)	0,74612	-61,15694	-60,83262	-57,77918	0,78397	-62,07496	-61,75064	-58,69721

Fonte: produção do próprio autor.

Tabela 9 - Médias dos AIC, AICc, BIC e dos valores p do teste de Kolmogorov-Smirnov, das distribuições Kumaraswamy e Beta das 1000 amostras de tamanho 1000.

Amostras	kumaraswamy				Beta			
	Valor p do KS.test	AIC	AICc	BIC	Valor p do KS.test	AIC	AICc	BIC
beta(0,4;0,7)	0,69003	-821,86253	-821,85049	-812,04702	0,75097	-822,64895	-822,63692	-812,83344
beta(0,3;0,8)	0,69149	-973,58618	-973,57414	-963,77067	0,74370	-1924,31271	-1924,30067	-1914,49720
beta(0,7;0,4)	0,72682	-739,57291	-739,55954	-729,96812	0,76070	-739,92701	-739,91363	-730,32222
beta(0,6;0,6)	0,72180	-212,70615	-212,69278	-203,10136	0,75308	-213,02080	-213,00742	-203,41601
beta(1;0,6)	0,75454	-307,82261	-307,81057	-298,00710	0,76073	-307,82388	-307,81184	-298,00837
beta(1;3)	0,77793	-862,12096	-862,10893	-852,30545	0,76555	-862,11751	-862,10547	-852,30200
beta(1;14)	0,78896	-3076,55481	-3076,54143	-3066,95002	0,76930	-3076,57905	-3076,56568	-3066,97426
beta(1;70)	0,08622	-5843,35864	-5843,34526	-5833,75385	0,00004	-5779,31763	-5779,30425	-5769,71284
beta(0,8;1)	0,75821	-51,05751	-51,04547	-41,24199	0,75567	-51,05799	-51,04595	-41,24247
beta(3;1)	0,76121	-862,11395	-862,10192	-852,29844	0,76555	-862,11751	-862,10547	-852,30200
beta(14;1)	0,76716	-3418,55671	-3418,54467	-3408,74120	0,77266	-3418,55191	-3418,53988	-3408,73640
beta(50;1)	0,01917	-5835,31750	-5835,30546	-5825,50199	0,10220	-5843,05599	-5843,04396	-5833,24048
beta(3;7)	0,44262	-1184,79135	-1184,77931	-1174,97584	0,78193	-1193,62225	-1193,61021	-1183,80674
beta(4;40)	0,00000	-3409,38439	-3409,37236	-3399,56888	0,75294	-3593,84373	-3593,83169	-3584,02822
beta(10;2)	0,69034	-1921,91572	-1921,90368	-1912,10021	0,77516	-1923,39731	-1923,38528	-1913,58180
beta(60;5)	0,35511	-4093,58849	-4093,57645	-4083,77298	0,00179	-4034,50554	-4034,49350	-4024,69003
beta(2;2)	0,73663	-247,39227	-247,38023	-237,57676	0,76958	-247,94568	-247,93365	-238,13017
beta(5;5)	0,43259	-949,67341	-949,66138	-939,85790	0,73413	-94,36244	-94,35041	-84,54693
beta(10;10)	0,19732	-1569,66507	-1569,65303	-1559,84956	0,78885	-1593,82006	-1593,80802	-1584,00455

Fonte: produção do próprio autor.

## 4 IMPLEMENTAÇÃO DA KUMARASWAMY

Neste capítulo será mostrado todos os comandos utilizados na criação e desenvolvimentos das funções matemáticas da distribuição de Kumaraswamy no software Estatístico R, cujo o objetivo é ensinar e mostrar aos alunos do curso de Estatística como desenvolver suas próprias implementações, mas vale lembrar que não será ensinado como se utiliza o programa, ou seja, o aluno terá que ter um conhecimento básico sobre o mesmo, e de programação. Toda a parte computacional utilizada nesta monografia sobre a distribuição de probabilidade em estudo, foi desenvolvida pelo autor, mas já existe pacote computacional desenvolvido no R, o pacote VGAM, neste encontra-se as principais funções matemática da distribuição de Kumaraswamy como:

```
dkumar(x, parâmetro 1, parâmetro 2, log = FALSE)
pkumar(q, parâmetro 1, parâmetro 2)
qkumar(p, parâmetro 1, parâmetro 2)
rkumar(n, parâmetro 1, parâmetro 2)
```

Onde

$x, q$  : vetor de quantis;

Se  $\log = \text{TRUE}$ , a função retorna o logaritmo da densidade de probabilidade.

$p$  : vetor de probabilidades;

$n$  : número de observações.

Com isso em resumo têm-se que, `dkumar` dá a densidade, `pkumar` dá a função de distribuição, `qkumar` dá a função quantil e `rkumar` gera valores aleatórios. Também neste pacote o autor T. W. Yee, desenvolveu uma função para estimar os parâmetros pelo método de máxima verossimilhança, a função para isso é dada por:

```
kumar(lshape1 = "loge", lshape2 = "loge",
ishape1 = NULL, ishape2 = NULL, grid.shape1 = c(0.4, 6.0),
tol12 = 1.0e-4, zero = NULL)
```

Onde

`lshape1`, `lshape2` : Função de ligação para os dois parâmetros de forma e positivos;  
`ishape1`, `ishape2` : Valores iniciais opcionais para os dois parâmetros de forma positiva;  
`tol12`: Numérico e positivo. Tolerância para testar se o segundo parâmetro é 1 ou 2;  
`grid.shape1` : Limites inferior e superior para encontrar o primeiro parâmetro;  
`zero` : Argumento comum da família VGAMff.

Esta função é um objeto da classe `vglmff`, que é usado por funções de modelagem, tais como `vglm` e `VGAM`. Para um melhor entendimento veja o exemplo disponibilizado pelo o autor:

```

shape1 <- exp(1); shape2 <- exp(2);
kdata <- data.frame(y = rkumar(n = 1000, shape1, shape2))
fit <- vglm(y ~ 1, kumar, kdata, trace = TRUE)
c(with(kdata, mean(y)), head(fitted(fit), 1))
coef(fit, matrix = TRUE)
Coef(fit)
summary(fit)
  
```

Depois de visto o que o pacote `VGAM` têm sobre a distribuição de Kumaraswamy, pode-se agora mostrar a objetividade deste capítulo, que é mostrar cada implementação utilizada na monografia.

## 4.1 Principais Funções

```
dkuma = function(x,a,b){a*b*x^{a-1}*{1-x^a}^{b-1}}
```

```
dkuma(x,a,b)
```

```
pkuma = function(q,a,b){1-(1-q^a)^b}
```

```
pkuma(q,a,b)
```

```
qkuma = function(p,a,b){(1-(1-p)^{1/b})^{1/a}}
```

```
qkuma(p,a,b)
```

```
rkuma=function(n,a,b){(1-(1-runif(n,0,1))^(1/b))^(1/a)}
rkuma(n,a,b)
```

Onde

$x$ ,  $q$  : vetor de quantis;

$p$  : vetor de probabilidades;

$n$  : número de observações. Onde é necessário um  $n \geq 1$ .

## 4.2 Gráficos

Nesta seção mostra como foi criado os gráficos gerados nesta monografia, vale lembrar que não será explicado cada comando existente no software R, como por exemplo o `plot` ou `lines`, isso fica a cargo do leitor. Portanto tem-se os comandos dos gráficos:

### Gráfico Função densidade

```
plot(x,dkuma(2,1),type='l', lwd=2, main="dkumaunção Densidade da
Distribuição de Kumaraswamy", ylab="dkumax(x)",
xlab="x",xlim=c(0,1.5),ylim=c(0,2.3)) lines(x,dkuma(0.5,0.5), type='l',
lwd=2, col=2) lines(x,dkuma(1,3), type='l', lwd=2, col=3)
lines(x,dkuma(3,5), type='l', lwd=2, col=4)
legend(1,1.8,c("kw(2,1)","kw(0.5,0.5)","kw(1,3)","kw(3,5)"),lwd=2,lty=1,
col=1:4, bty="n")
```

### Gráfico da Função de Distribuição

```
plot(x,pkuma(2,5),type='l', lwd=2, main="pkumaunção Distribuição",
ylab="pkumax(x)", xlab="x")
lines(x,pkuma(0.5,0.5), type='l', lwd=2, col=2)
lines(x,pkuma(1,3), type='l', lwd=2, col=3)
lines(x,pkuma(2,2), type='l', lwd=2, col=4)
lines(x,pkuma(5,1), type='l', lwd=2, col=5)
legend(1.1,2,c("k(2,5)","k(0.5,0.5)","k(1,3)","k(2,2)","k(5,1)"))
```

```
,lwd=2,lty=1, col=1:5, bty="n")
```

### Gráfico das Diferentes Formas da $Kw(a,b)$

```
par(mfrow=c(3,2)) plot(x,f(2,3),type='l', lwd=2, main="Unimodal",
ylab="fx(x)", ylim=c(0,3),xlab="x",col=4)
lines(x,f(4,5), type='l', lwd=2, col=9)
legend(0.1,2.8,c("Kw(2,3)", "Kw(4,5)"),lwd=2,lty=1, col=c(4,9), bty="n")
plot(x,f(0.2,0.6),type='l', lwd=2, main="Uniantimodal",
ylab="fx(x)",xlab="x",col=4)
lines(x,f(0.4,0.9), type='l', lwd=2, col=9)
legend(0.6,5.5,c("Kw(0.2,0.6)", "Kw(0.4,0.9)"),lwd=2,lty=1, col=c(4,9),
bty="n")
plot(x,f(3,0.4),type='l', lwd=2, main="Crescente",
ylab="fx(x)",xlab="x",col=4)
lines(x,f(6,0.5), type='l', lwd=2, col=9)
legend(0.2,5.5,c("Kw(3,0.4)", "Kw(6,0.5)"),lwd=2,lty=1, col=c(4,9),
bty="n")
plot(x,f(0.7,5),type='l', lwd=2, main="Decrescente",
ylab="fx(x)",xlab="x",col=4)
lines(x,f(0.8,2), type='l', lwd=2, col=9)
legend(0.6,8.5,c("Kw(0.7,5)", "Kw(0.8,2)"),lwd=2,lty=1, col=c(4,9),
bty="n")
plot(x,f(1,1),type='l', lwd=2, main="Constante", ylab="fx(x)", xlab="x")
legend(0.6,1.3,"Kw(1,1)",lwd=2,lty=1, col=1, bty="n")
```

## 4.3 Moda

```
modk=function(a,b){((a-1)/(a*b-1))^{1/a}}
```

```
modk(a,b)
```

#### 4.4 Função do $r$ -ésimo Momento

```
mkw=function(r,a,b){b*beta((r/a)+1,b)}
mkw(r,a,b)
```

#### 4.5 $r$ -ésimo Momento da $i$ -ésima Estatística de Ordem

```
imeo = function(a,b,r,i,n){d=0
m= function(a,b,r,i,n){((b)/(beta(i,n+1-i)))*choose(i-1,n-e)
*((-1)^(e-n-1+i))*beta(b*e,1+(r/a))}
for(e in (n+1-i):n){d = m(a,b,r,i,n)+d};d}
imeo(a,b,r,i,n)
```

#### 4.6 Função dos L-Momentos

```
LMkw = function(L,a,b){d=0
v = function(a,b,L){((b)/(L))*((-1)^(e-1))
*e*choose(L,e)*choose(L+e-2,L-1)*beta(b*e,1+(1/a))}
for(e in 1:L){d=v(a,b,L)+d};d}
LMkw(L,a,b)
```

#### 4.7 Assimetria e Curtose

```
Asskw=function(a,b){(mkw(3,a,b)-3*mkw(2,a,b)*mkw(1,a,b)+2*(mkw(1,a,b))
^3)/(sqrt((mkw(2,a,b)-(mkw(1,a,b))^2))^3)}
Asskw(a,b)
```

```
Ckw=function(a,b){(mkw(4,a,b)-4*mkw(3,a,b)*mkw(1,a,b)+6*mkw(2,a,b)*((mkw
(1,a,b))^2)-3*mkw(1,a,b)^4)/(sqrt((mkw(2,a,b)-(mkw(1,a,b))^2))^4)}
Ckw(a,b)
```

Onde

a e b : os parâmetros da Distribuição;

r : r-ésimo momento;

i : i-ésima estatística de ordem;

L : L-ésimo momento;

n : tamanho da amostra.

## 4.8 Função de Newton-Raphson

```
estK = function(x,a0,parada){d=0;s=0
g=function(a){(length(x)/a) + (sum(log(x)/(1 - (x^a)))) + (length(x)*
((sum(((x^a)*log(x))/(1 - (x^a))))/(sum(log(1 - (x^a)))))) }

glinha = function(a){(-(length(x)/a^2)) + length(x)*
((sum(((x^a)*(log(x))^2)/((1 - (x^a))^2)))*(sum(log(1 - (x^a))))
- ((sum(((x^a)*log(x)/(1 - (x^a))))^2)/((sum(log(1 - (x^a))))^2)
+ (sum(((x^a)*((log(x))^2)/((1 - (x^a))^2))))}

while(d == 0){a1 = a0 - (g(a0)/glinha(a0))
if(abs(a1 - a0) <= parada){d = d + 1}else{a0 = a1
s = s + 1}}
b=-length(x)/sum(log(1-x^(a1)))
tab = rbind(c("a","b","Número de iterações"),c(a1,b,s))
return(tab)}

estK(x,a0,parada)
```

Onde

x = amostra; a0 = chute inicial; parada = critério de parada.

## 4.9 Função para calcular a Média dos parâmetros

```

MestK = function(v,q,n,a,b){
  set.seed(v)
  x= matrix(rkuma(q*n,a,b),nrow=n)
  estK = function(x){
    d=0;s=0;a0= mean(x); parada = 10^{-10}
    g=function(a){(length(x)/a) + (sum(log(x)/(1 - (x^a)))) + (length(x)*
    ((sum(((x^a)*log(x))/(1 - (x^a))))/(sum(log(1 - (x^a)))))) }

    glinha = function(a){(-(length(x)/a^2)) + length(x)*
    ((sum(((x^a)*(log(x))^2)/((1 - (x^a))^2)))*(sum(log(1 - (x^a))))
    - ((sum(((x^a)*log(x)/(1 - (x^a))))^2)/((sum(log(1 - (x^a))))^2)
    + (sum(((x^a)*((log(x))^2)/((1 - (x^a))^2))))}
    while(d == 0){
      a1 = a0 - (g(a0)/glinha(a0))
      if(abs(a1 - a0) <= parada){
        d = d + 1
      }else{
        a0 = a1
        s = s + 1}}
    b=-length(x)/sum(log(1-x^(a1)))z=c(a1,b)
    return(z)}
  ak=0;bk=0
  for(i in 1:length(x[1,])){
    ak[i]=estK(x[,i])[1]
    bk[i]=estK(x[,i])[2]}
  tab = rbind(c("Média do 1 Par kuma","Média 2 par kuma"),round(c(mean
  (ak),mean(bk)),5));return(tab)}

MestK(v,q,n,a,b)

```

onde:  $v$  = semente;  
 $q$  = quantidade de amostras;  
 $n$  = tamanho das amostras;  
 $a$  e  $b$  = parâmetros da distribuição.

#### 4.10 Função para calcular as Médias dos AICs e BICs

```

cskb = function(v,q,n,a,b){
set.seed(v)
x= matrix(rbeta(q*n,a,b),nrow=n)
asb=apply(x,2,function(x0){
log.verossimilhanca <- function(teta,y){
  p = teta[1]; q = teta[2]
  logl <-sum((p-1)*log(y)+(q-1)*log(1-y)+log(gamma(p+q))-log(gamma(q))
  -log(gamma(p)));return(-logl)}
optim(theta <- c(1,1),fn =log.verossimilhanca,y=x0,method="L-BFGS-B",lower=
c(0.001,0.001),upper = c(40,40))})
AICb = function(x,a,b){-2*(length(x)*log(1/beta(a,b))+(a-1)*sum(log(x))+
(b-1)*sum(log(1- x)))+ 4}
AICcb = function(x,a,b){-2*(length(x)*log(1/beta(a,b))+(a-1)*sum(log(x))+
(b-1)*sum(log(1 -x)))+ 4+ (12/(length(x)-2-1))}
BICb = function(x,a,b){-2*(length(x)*log(1/beta(a,b))+(a-1)*sum(log(x))+
(b-1)*sum(log(1- x)))+ 2*log(length(x))}

saicb=0;ksb=0;saiccb=0;sbicb=0
for(i in 1:length(x[1,])){
saicb = AICb(x[,i],asb[[i]]$par[1],asb[[i]]$par[2])+saicb
saiccb = AICcb(x[,i],asb[[i]]$par[1],asb[[i]]$par[2])+saiccb
ksb=ks.test(x[,i],pbeta,asb[[i]]$par[1],asb[[i]]$par[2])$p.value + ksb
sbicb = BICb(x[,i],asb[[i]]$par[1],asb[[i]]$par[2])+sbicb}

```

```

maicb = saicb/length(x[1,])
maiccb = saiccb/length(x[1,])
mbicb = sbicb/length(x[1,])
mksb=kseb/length(x[1,])

as=apply(x,2,function(x1){
log.verossimilhanca <- function(teta,y){
  p = teta[1];q = teta[2]
  logl <-length(y)*log(p)+length(y)*log(q)+(p-1)*sum(log(y))+(q-1)*
  sum(log(1-y^(p)))
  return(-logl)}
optim(theta <- c(1,1),fn = log.verossimilhanca,y=x1,method="L-BFGS-B",
lower = c(0.001,0.001),upper = c(40,40))})

saic = 0;saicck =0;sbicck=0;ksk=0
pkuma = function(x,a,b){1-(1-x^{a})^{b}}
AICk = function(x,a,b){-2*(length(x)*log(a)+length(x)*log(b)+(a-1)*
sum(log(x))+(b-1)*sum(log(1-x^{a}))) + 4}
AICck = function(x,a,b){-2*(length(x)*log(a)+length(x)*log(b)+(a-1)*
sum(log(x))+(b-1) *sum(log(1-x^{a}))) + 4 + (12/(length(x)-2-1))}
BICk = function(x,a,b){-2*(length(x)*log(a)+length(x)*log(b)+(a-1)*
sum(log(x))+(b-1)*sum (log(1-x^{a}))) + 2*log(length(x))}
for(i in 1:length(x[1,])){
saic = AICk(x[,i],as[[i]]$par[1],as[[i]]$par[2])+saic
saicck = AICck(x[,i],as[[i]]$par[1],as[[i]]$par[2])+saicck
sbicck = BICk(x[,i],as[[i]]$par[1],as[[i]]$par[2])+sbicck
ksk=ks.test(x[,i],pkuma,as[[i]]$par[1],as[[i]]$par[2])$p.value + ksk}
mksk=kksk/length(x[1,])
maicck = saicck/length(x[1,])
maic = saic/length(x[1,])
mbicck = sbicck/length(x[1,])

```

```
tab = rbind(c("valor p ks.test kuma ", "Média AIC Kuma",  
"Média AICc Kuma", "Média BIC Kuma", "valor p ks.test Beta ",  
"Média AIC Beta", "Média AICc Beta", "Média BIC Beta"), c(mksk, maic,  
maicck, mbick, mksb, maicb, maiccb, mbicb)); return(tab)}
```

```
cskb(v, q, n, a, b)
```

onde: v = semente

q = quantidade de amostras

n = tamanho das amostras

a e b = parâmetros da distribuição Beta

Todas as funções foram testadas e comparadas com as encontradas no pacote VGAM, e mostrou-se que não existe diferença significativas entre elas, mesmo na parte de estimação. Testes e exemplos foram feitos no decorrer da monografia, em seus respectivos assuntos. Portanto espera-se que os estudantes e pesquisadores interessados possa replicar e melhorar as funções implementadas, e como o objetivo principal criar novos pacotes para as novas distribuições.

## 5 APLICAÇÃO DA KUMARASWAMY

Segundo Barbosa Jr. (2010), regime hidrológico ou a produção de água de uma região (bacia hidrográfica) é determinado por fatores de natureza climática ou hidrometeorológica (precipitação, evaporação, temperatura, umidade do ar, vento, etc.) e por suas características físicas, geológicas e topográficas. Temperatura, umidade e vento são importantes pela influência que exercem na precipitação e evaporação. A topografia é importante pela sua influência na precipitação, além de determinar a ocorrência de lagos e pântanos e influir (juntamente com o solo e a vegetação) na definição da velocidade do escoamento superficial. As características geológicas, além de influenciarem a topografia, definem o local do armazenamento (superficial ou subterrâneo) da água proveniente da precipitação.

Para o hidrólogo, a precipitação corresponde à água proveniente do vapor d'água da atmosfera que se deposita na superfície da terra sob diferentes formas, como chuva, granizo, neve, neblina, orvalho ou geada. Neste capítulo trata-se da precipitação sob a forma de chuva, por ser incomum a ocorrência de neve no Brasil e pelo fato de que as demais formas pouco contribuem para o regime hidrológico de uma região. Segundo Barbosa Jr. (2010), a precipitação é um processo aleatório, e a sua previsão, na maioria dos problemas, é realizada com base na estatística de eventos passados, os estudos estatísticos permitem verificar com que frequência as precipitações ocorreram com uma dada magnitude, estimando as probabilidades teóricas de ocorrência das mesmas. Ele afirma que, o conhecimento estatístico das características das precipitações apresenta grande interesse de ordem técnica na engenharia, por sua frequente aplicação nos projetos associados ao aproveitamento de recursos hídricos. Por exemplo, o conhecimento da magnitude das enchentes que poderiam ocorrer com uma determinada frequência é importantes para: a) projetos de vertedores de barragens; b) dimensionamento de canais; c) definição das obras de desvio de cursos d'água; d) determinação das dimensões de galerias de águas pluviais; e) cálculo de bueiros, etc. Por outro lado, nos projetos de irrigação e de abastecimento de água, é necessário conhecer também a grandeza das estiagens que adviriam e com que frequência ocorreriam.

Com isso o presente capítulo tem por objetivo estimar as precipitações totais máxima e mínima anual, assim como as suas probabilidades de excedência para o município de Itaitinga, onde se localiza o açude Gavião, um dos principais reservatórios que complementa a rede de

abastecimento de água potável para a cidade de Fortaleza-Ceará.

## 5.1 Material e Métodos

Os dados de chuvas totais anuais foram obtidos da Fundação Cearense de Meteorologia e Recursos Hídricos (FUNCEME), pelo o link <<http://www.funceme.br/index.php/areas/tempo/download-de-series-historicas>>, a estação pluviométrica, da qual obteve-se os dados para a realização deste estudo, está localizada na latitude 357 e longitude 3831 sendo a mesma situada na zona urbana do município de Itaitinga. Utilizou-se para análise, séries históricas das precipitações totais anuais das chuvas, ocorridas entre os anos de 1990 e 2012, constituindo uma amostra de 23 anos de observações consecutivas.

Para a análise estatística utilizou-se a distribuição de Kumaraswamy, já que a proporção de zeros contidas nos dados é nula. Os parâmetros foram estimados pelo método de máxima verossimilhança. Para testar à aderência, foi utilizado o teste de Kolmogorov-Smirnov a um nível de significância de 5%. Segundo Kumaraswamy (1980), pode-se estimar o máximo e mínimo de precipitação para uma determinada região, a partir das formulas:

$$Z_{min} = \bar{z} - R\bar{x} \quad (19)$$

e

$$Z_{max} = Z_{min} + R \quad (20)$$

onde

$$R = \frac{s(z)}{s(x)}$$

$z$ : variáveis aleatórias do processo;

$x$ : variáveis transformada para o intervalo (0,1);

$s(z)$ : desvio padrão das variáveis aleatórias do processo;

$s(x)$ : desvio padrão da distribuição de Kumaraswamy ;

$\bar{z}$ : média das variáveis aleatórias do processo;

$\bar{x}$ : média da distribuição de Kumaraswamy.

## 5.2 Resultados

Na Tabela 10 encontraram-se as seguintes estatísticas resultantes das chuvas totais anuais do município de Itaitinga

Tabela 10 - Estatística das chuvas totais anuais do município de Itaitinga.

Valor mínimo observado = 407,6 mm	$s(z) = 428,51$ mm
Valor máximo observado = 2216 mm	$\bar{z} = 1104$ mm

Fonte: produção do próprio autor.

Usando o algoritmo de Newton-Raphson, pôde-se estimar os valores dos dois parâmetros, onde os valores encontrados para estes foram  $a = 1.851$  e  $b = 4.318$ . Pelo teste de Kolmogorov-Smirnov a distribuição de Kumaraswamy mostrou-se adequada para representar os dados coletados ao nível de significância 5%, em que o valor p obtido foi de 0,378, ou seja, não rejeita-se a hipótese que esses dados seguem essa distribuição. Utilizando-se as equações (19) e (20) têm-se portanto que  $Z_{min} = 238,052$  e  $Z_{max} = 2588,728$ . Logo testa forma pode-se inferir que o município de Itaitinga não terá uma quantidade total de chuva anual menor que 238,052 mm, e maior que 2588,728 mm.

Pode-se observar na Tabela 11, que segundo Kumaraswamy (1980), o município de Itaitinga tem uma chance de 70% de que a chuva total anual exceda ou iguale a 836 mm, e somente 0,5% que ela iguale ou exceda 2187 mm.

Tabela 11 - Probabilidade de excedência das chuvas anuais totais.

Probabilidade de excedência (%)	Total de chuvas anual(mm)
0,5	2187
1	2110
2	2015
5	1855
10	1696
20	1489
30	1333
50	1076
70	836

Fonte: produção do próprio autor.

## 6 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi demonstrado detalhadamente todas as funções matemáticas mencionadas por Jones em seu artigo "Kumaraswamy's distribution: A beta-type distribution with some tractability advantages", onde este foi um dos principais artigos sobre a distribuição de Kumaraswamy. Também foram feitas implementações computacionais destas funções para que assim fosse possível replicar todos os cálculos feitos, como também criar novas implementações. Observa-se que esta distribuição de probabilidade apresenta como um bom atrativo para os alunos iniciantes na parte de probabilidade contínua, pois como visto no Capítulo 2, ela possui muitas funções simples de demonstrar, como também possui funções difíceis, ou seja, é uma distribuição que vai do fácil ou difícil se estudada por completo. Espera-se com isso, que os alunos possam obter um material capaz de guia-los e auxilia-los em seus estudos sobre distribuições de probabilidade.

Na parte de aplicação no Capítulo 5, foi possível estimar a quantidade total anual de precipitação para o município de Itaitinga-Ceará, e a probabilidade de excedência das chuvas anuais, para isso utilizou-se o método proposto pelo próprio criador da distribuição, Ponnambalam Kumaraswamy. O método é pouco utilizado nos dias atuais, ou pelo menos não foram encontradas referências que o utilize, fazendo com que tal pesquisa fosse de suma importância para o meio acadêmico, pois estaria o divulgando. Mas esse não foi o principal objetivo alcançado, e sim ter concluído com êxito as estimações das precipitações, e as probabilidades de excedência para o município, pois são de suma importância para agricultura e construção, e melhoramento das barragens.

Mesmo que tenha sido feito neste trabalho um estudo sobre boa parte da distribuição de Kumaraswamy, se faz necessário um estudo detalhado dela na parte Bayesiana, assim como o estudo sobre suas generalizações. Um estudo mais minucioso deve ser feito no método de estimação da precipitação máxima e mínima de um determinado lugar, pois este não foi feito no trabalho.

## REFERÊNCIAS

- ANDRADE, J.A.A.; GOSLING, J.P. Predicting rainy seasons: quantifying the beliefs of prophets, **Journal of Applied Statistics**. vol. 38, n.º1, p. 183-193, January, 2011.
- AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**. Boston, v.19, n.6, p.716-723, Dec. 1974.
- BALAKRISHNAN, N.;NEVZOROV. V. B. **A primer on Statistical Distributions**. New Jersey: John Wiley & Sons, INC. 2003.
- BARBOSA Jr, Antenor Rodrigues. **Elementos de Hidrologia Aplicada a Estudos de Graduação**. Disponível em:  
<<http://www.em.ufop.br/deciv/departamento/antenorrodriques/3precipitacao.pdf>>, acessado em 12 de Agosto de 2013.
- BOLFARINE, Heleno.; SANDOVAL, Mônica Carneiro. **Introdução à Inferência Estatística**. Rio de Janeiro: SBM. 2001.
- BOZDOGAN, H. **Model selection and Akaike's information criterion (AIC): The general theory and its analytical extensions**. Psychometrica. n.52, p.345-370, 1987.
- CORDEIRO, Gauss M.; CASTRO, Mário. A new family of generalized distributions. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, p.1-16, Aug. 2010.
- Eugene, N.; Lee, C.; Famoye, F. Beta-normal distribution and its applications. **Communications in Statistics. Theory and Methods**, v.31, p.497-512, 2002.
- EMILIANO, Paulo César.; VEIGA, Elayne Penha.; VIVANCO, Mário Javier Ferrua. **Críterios de informação de akaike versus bayesiano: análise comparativa**. Disponível em <<http://www.ime.unicamp.br/sinape/sites/default/files/Paulo%20C%C3%A9sar%20Emiliano.pdf>>, acessado em 10 de Março de 2013.

FELLER, William. **An introduction to probability theory and its applications**. 2 ed. New York: John Wiley & Sons, INC. 1970.

FLETCHER, S.G.; PONNAMBALAM, k. Estimation of reservoir yield and storage distribution using moments analysis, **Journal of Hydrology**. vol. 182, p. 259-275, July. 1996.

GREENWOOD, J.A.; LANDWEHR, J. M.; MATALAS, N. C. e WALLIS, J.R. Probability weighted moments: definition and relation to parameters expressible in inverse form. **Water Resources Research**. vol. 15, p.1049-1054, 1979.

JAIN, Raj. **The art of computer systems performance analysis**. New York: John Wiley & Sons, INC. 1991.

JONES, M.C. Kumaraswamy's distribution: A beta-type distribution with some tractability advantages, **Statistical Methodology**. vol. 6, p.70-81, April, 2009.

KALBFLEISCH, J.G. **Probability and statistical inference**. 2 ed. New York: Springer-Verlag, 1985.

KUMARASWAMY, P. A generalized probability density function for double-bounded random processes, **Journal of Hydrology**. vol. 46, p. 79-88, 1980.

MEDINA, Luis A. The integrals in Gradshteyn and Ryzhik. Part 10: The digamma function, **Mathematical Sciences**. Valparaíso: vol. 17, p. 45-66, 2009.

MEYER, Paul L. **Probabilidade aplicações à estatística**. 2 ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 1983.

MELLO, C.R.; FERREIRA, D. F.; SILVA, A. M. J. M. LIMA. **Análise de modelos matemáticos aplicados ao estudo de chuvas intensas**. Disponível em:   
< <http://sbc.solos.ufv.br/solos/revistas/v25n3a18.pdf> >, acessado em 15 de Agosto de 2013.

MOOD, Alexander McFarlane, **Introduction to the Theory of Statistics**. 3 ed. EUA: McGraw-Hill, 1974.

NADARAJAH, Saralees. On the distribution of Kumaraswamy, **Journal of Hydrology**. vol. 348, p. 568-569, April, 2007.

NAGHETTINI, Mauro.;PINTO, Éber José de Andrade. **Hidrologia Estatística**. Belo Horizonte: CPRM, 2007.

NTRAND. **Kumaraswamy Distribution**. Disponível em:

< <http://www.ntrand.com/kumaraswamy-distribution> >, acesso em 10 de Outubro de 2011.

REGAZZI, Adair José. **Crítérios para seleção de modelos baseados na razão de verossimilhança**. Disponível em:

< <http://www.ntrand.com/kumaraswamy-distribution> >, Acesso em 19 de Novembro de 2012.

ROSS, Sheldon. **First Course In Probability**. 8 ed. New Jersey:Pearson Prentice Hall, 2010.

VIOLA, Márcio Luis Lanfredi. **Estimação por L-Momentos**. Disponível em: < <http://www.ime.unicamp.br/veronica/MI402/marcio.pdf> >, Acesso em 18 de Setembro de 2013.

## APÊNDICE A - DEMONSTRAÇÕES

### Legitimidade da Função Densidade da Kumaraswamy

$$I = \int_0^1 abx^{a-1}(1-x^a)^{b-1}dx,$$

Para simplificar os cálculos considere a mudança  $u = x^a$ , o que implica  $du = ax^{a-1}dx$ , agora tem-se um novo intervalo de integração, ou seja, quando  $x = 0 \Rightarrow u = 0$  e quando  $x = 1 \Rightarrow u = 1$ .

Portanto fica:

$$\int_0^1 b(1-u)^{b-1}du,$$

Fazendo-se outra mudança de variável  $z = 1 - u \Rightarrow dz = -du$ , encontra-se um novo intervalo de integração, ou seja, Quando  $u = 0 \Rightarrow z = 1$ , quando  $u = 1 \Rightarrow z = 0$ . Logo obtém-se:

$$\int_1^0 -bz^{b-1}du = \left[ \frac{-bz^b}{b} \right]_1^0 = 1.$$

Verifica-se portanto que é uma legitima densidade de probabilidade, ou seja,  $X \sim Kw(a, b)$ .

### Função de Distribuição da Kumaraswamy

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 - (1 - x^a)^b & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Será demonstrado somente a função no intervalo  $0 < x < 1$ , pois os demais são consequência das propriedades da função de distribuição. Portanto tem-se:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(0 < X \leq x) = \int_0^x abt^{a-1}(1-t^a)^{b-1} dt,$$

faz-se a mudança  $u = t^a \Rightarrow du = at^{a-1} dt$ .

Mudando os limites de integração tem-se que quando  $t = 0 \Rightarrow u = 0$  e  $t = x \Rightarrow u = x^a$ , obtém-se

$$\int_0^{x^a} b(1-u)^{b-1} du,$$

Seja  $z = 1 - u \Rightarrow dz = -du$ .

Mudando os limites de integração tem-se que quando  $u = 0 \Rightarrow z = 1$  e  $u = x^a \Rightarrow z = 1 - x^a$

Com isso obtém-se

$$\int_1^{1-x^a} -bz^{b-1} dz = \left[ -\frac{bz^b}{b} \right]_1^{1-x^a} = 1 - (1-x^a)^b,$$

Portanto

$$F(x) = \left[ 1 - (1-x^a)^b \right] I(x) + I(x).$$

(0,1)      [1,∞)

### Inversão da Função de Distribuição

$$u = 1 - (1-x^a)^b \Rightarrow 1-u = (1-x^a)^b$$

$$(1-u)^{\frac{1}{b}} = 1-x^a \Rightarrow x^a = 1 - (1-u)^{\frac{1}{b}}$$

$$x = \left[ 1 - (1-u)^{\frac{1}{b}} \right]^{\frac{1}{a}}.$$

Portanto tem-se que

$$Q(x) = F^{-1}(x) = \left[ 1 - (1-x)^{\frac{1}{b}} \right]^{\frac{1}{a}}, \quad 0 < x < 1.$$

logo

$$X = \left[ 1 - (1 - U^{\frac{1}{b}}) \right]^{\frac{1}{a}}.$$

Onde  $U \sim \cup(0, 1)$ .

### Quantil de Ordem $p$ da Distribuição de Kumaraswamy

Se  $F(x) \geq p$ , onde  $x \in \mathbb{R}$ , para  $0 < p < 1$ , diz-se o quantil de ordem  $p$   $x_p$  para o caso contínuo é calculado por:

$$X = F(x_p) = \int_{-\infty}^{x_p} f(x) dx = p.$$

Para o nosso caso utiliza-se a função de distribuição estudada, portanto:

$$\begin{aligned} F(x_p) &= 1 - (1 - x_p^a)^b = p \\ (1 - x_p^a)^b &= 1 - p \\ 1 - x_p^a &= (1 - p)^{\frac{1}{b}} \\ x_p^a &= 1 - (1 - p)^{\frac{1}{b}} \\ x_p &= \left[ 1 - (1 - p)^{\frac{1}{b}} \right]^{\frac{1}{a}} \end{aligned}$$

### Moda da Kumaraswamy

Lembrando que:

$$f(x) = abx^{a-1}(1 - x^a)^{b-1}I(x),$$

(0,1)

fazendo-se  $g(x) = \ln f(x)$ , pois maximizar  $f(x)$  é o mesmo que maximizar  $g(x) = \ln[f(x)]$  portanto:

$$g(x) = \ln ab + \ln x^{a-1} + \ln(1 - x^a)^{b-1}$$

Deriva-se  $g(x)$

$$g'(x) = \frac{a-1}{x} - \frac{a(b-1)x^{a-1}}{1-x^a}$$

Derivando a segunda vez para determinar se é ponto de máximo

$$g''(x) = -\frac{(a-1)}{x^2} - \frac{a(b-1)(a-1)x^{a-2}(1-x^a) - a^2x^{2a-2}(b-1)}{(1-x^2)^2},$$

$$g''(x) = -\left[ \frac{(a-1)}{x^2} + \frac{a(b-1)(a-1)x^{a-2}(1-x^a) + a^2x^{2a-2}(b-1)}{(1-x^2)^2} \right]$$

Nota-se que,  $g''(x) < 0 \quad \forall x \in (0, 1)$ , logo a derivada  $g'(x) = 0$  é ponto de máximo.

$$g'(x) = \frac{a-1}{x} - \frac{a(b-1)x^{a-1}}{1-x^a} = 0$$

$$\frac{(1-M_o^a)(a-1) - aM_o(b-1)M_o^{a-1}}{M_o(1-M_o^a)} = 0$$

$$(1-M_o^a)(a-1) = aM_o(b-1)M_o^{a-1}$$

$$(1-M_o^a)(a-1) = \frac{aM_o(b-1)M_o^a}{M_o}$$

$$a-1 - aM_o^a + M_o^a = abM_o^a - aM_o^a$$

$$abM_o^a = a-1 + M_o^a$$

$$M_o^a(ab-1) = a-1$$

$$M_o^a = \frac{a-1}{ab-1} \Rightarrow M_o = \left( \frac{a-1}{ab-1} \right)^{\frac{1}{a}}.$$

em que  $a > 1$ ,  $b > 1$  e  $ab > 1$ .

### r-ésimo Momento da Kumaraswamy

$$E(X^r) = \int_0^1 x^r abx^{a-1}(1-x^a)^{b-1} dx$$

Faz-se a mudança  $u = x^a \Rightarrow du = ax^{a-1} dx$ , onde  $x = u^{\frac{1}{a}}$ .

Mudando os limites de integração tem-se que Quando  $x = 0 \Rightarrow u = 0$  e  $x = 1 \Rightarrow u = 1$ .,Portanto:

$$\begin{aligned}
E(X^r) &= \int_0^1 bu^{\frac{r}{a}}(1-u)^{b-1} du \\
&= b\beta\left(\frac{r}{a} + 1, b\right).
\end{aligned}$$

para todos os  $r > -a$ .

### r-ésimo Momento da i-ésima estatística de ordem

Lembrando que  $F(x) = 1 - (1 - x^a)^b$  e  $f(x) = abx^{a-1}(1 - x^a)^{b-1}I(x)$ , Substituindo na equação (8), encontra-se a função densidade em relação a i-ésima estatística de ordem

$$g_{X_{i:n}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \left[1 - (1 - x^a)^b\right]^{i-1} \left\{1 - \left[1 - (1 - x^a)^b\right]\right\}^{n-i} abx^{a-1}(1 - x^a)^{b-1}I(x)$$

Colocando os termos comum em evidência, encontra-se:

$$g_{X_{i:n}}(x) = \frac{abn!}{(i-1)!(n-i)!} x^{a-1}(1 - x^a)^{b(n+1-i)-1} \left[1 - (1 - x^a)^b\right]^{i-1} I(x)$$

Tal que

$$\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(i)\Gamma(n+1-i)} = \frac{1}{\beta(i, n+1-i)}$$

Logo tem-se que a função densidade da i-ésima estatística de ordem da distribuição de Kumaraswamy é dada por

$$g_{X_{i:n}}(x) = \frac{ab}{\beta(i, n+1-i)} x^{a-1}(1 - x^a)^{b(n+1-i)-1} \left[1 - (1 - x^a)^b\right]^{i-1} I(x)$$

A demonstração do r-ésimo momento da i-ésima estatística de ordem é dada a seguir:

$$E(X_{i:n}^r) = \frac{ab}{\beta(i, n+1-i)} \int_0^1 x^{a-1}(1 - x^a)^{b(n+1-i)-1} \left[1 - (1 - x^a)^b\right]^{i-1} dx$$

para facilitar os cálculos deve-se fazer uma transformação de variável. Seja,

$$w = 1 - x^a \implies x = (1 - w)^{\frac{1}{a}}$$

$$dw = -ax^{a-1}dx \implies dx = -\frac{dw}{ax^{a-1}}$$

os limites de integração ficam invertidos, com isso temos

$$E(X_{i:n}^r) = \frac{b}{\beta(i, n+1-i)} \int_0^1 (1-w^b)^{i-1} w^{b(n+1-i)-1} (1-w)^{\frac{r}{a}} dw$$

para simplificar mais os cálculos, precisa lembrar do binômio de Newton, que é dado pela formula

$$(1-a)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j a^j$$

com isso temos que  $(1-w^b)^{i-1} = \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} (-1)^k w^{bk}$

Portanto obtém-se

$$E(X_{i:n}^r) = \frac{b}{\beta(i, n+1-i)} \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} (-1)^k \underbrace{\int_0^1 w^{b(k+n+1-i)-1} (1-w)^{\frac{r}{a}} dw}_{\beta(b(k+n+1-i), 1+\frac{r}{a})}$$

$$E(X_{i:n}^r) = \frac{b}{\beta(i, n+1-i)} \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} (-1)^k \beta\left(b(k+n+1-i), 1+\frac{r}{a}\right)$$

fazendo outra mudança de variável

$$l = k+n+1-i \implies k = l - (n+1-i)$$

mudando os limites do somatório

$$k=0 \implies l = n+1-i \quad \text{e} \quad k=i-1 \implies l = n$$

logo

$$E(X_{i:n}^r) = \frac{b}{\beta(i, n+1-i)} \sum_{l=n+1-i}^n \binom{i-1}{n-l} (-1)^{l-(n+1-i)} \beta\left(bl, 1+\frac{r}{a}\right)$$

### L-Momentos de ordem $r$

Segundo Jones(2009), a forma geral do L-momento para  $r \geq 2$  de uma variável aleatória  $X$  com função de distribuição  $F(x)$  é definido por:

$$\lambda_r = \frac{1}{r} \sum_{j=0}^{r-2} (-1)^j \binom{r-2}{j} \binom{r}{j+1} J(r-1-j, j+1).$$

Onde,

$$J(i_1, i_2) = \int_0^1 [F(x)]^{i_1} [1 - F(x)]^{i_2} dx.$$

Se  $X \sim kw(a, b)$  então a equação (21) fica:

$$J(i_1, i_2) = \int_0^1 [1 - (1 - x^a)^b]^{i_1} (1 - x^a)^{bi_2} dx$$

Faz-se a mudança  $w = 1 - x^a \Rightarrow x = (1 - w)^{\frac{1}{a}}$ , sendo que  $x^{a-1} = (1 - w)^{\frac{a-1}{a}} = (1 - w)^{1 - \frac{1}{a}}$  e  $dw = -ax^{a-1} \Rightarrow dx = -\frac{dw}{ax^{a-1}}$  Com isso tem-se que

$$dx = -\frac{(1 - w)^{\frac{1-a}{a}} dw}{a} \Rightarrow dx = -\frac{(1 - w)^{\frac{1}{a}-1} dw}{a}$$

Assim, obtém-se

$$\begin{aligned} J(i_1, i_2) &= \int_1^0 (1 - w^b)^{i_1} w^{bi_2} \left(-\frac{1}{a}\right) (1 - w)^{\frac{1}{a}-1} dw \\ &= \frac{1}{a} \int_0^1 (1 - w^b)^{i_1} w^{bi_2} (1 - w)^{\frac{1}{a}-1} dw \end{aligned}$$

Mas,

$$(1 - w^b)^{i_1} = \sum_{k=0}^{i_1} \binom{i_1}{k} (-1)^k w^{bk}$$

Portanto,

$$J(i_1, i_2) = \frac{1}{a} \int_0^1 \left[ \sum_{k=0}^{i_1} \binom{i_1}{k} (-1)^k w^{bk} \right] w^{bi_2} (1 - w)^{\frac{1}{a}-1} dw$$

Invertendo a ordem do somatório pela integral obtém-se

$$\begin{aligned} J(i_1, i_2) &= \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{i_1} \binom{i_1}{k} (-1)^k \underbrace{\int_0^1 w^{b(k+i_2)} (1-w)^{\frac{1}{a}-1} dw}_{\beta(b(k+i_2)+1, \frac{1}{a})} \\ &= \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{i_1} \binom{i_1}{k} (-1)^k \beta(b(k+i_2)+1, \frac{1}{a}) \end{aligned}$$

Mas sabe-se que,

$$\frac{1}{a} \beta(b(k+i_2)+1, \frac{1}{a}) = \frac{\frac{1}{a} \Gamma(b(k+i_2)+1) \Gamma(\frac{1}{a})}{\Gamma(b(k+i_2)+1+\frac{1}{a})}$$

Em que,

$$\Gamma(1+\frac{1}{a}) = \frac{1}{a} \Gamma(\frac{1}{a})$$

Logo,

$$\Gamma(b(k+i_2)+1) = b(k+i_2) \Gamma(b(k+i_2))$$

Com isso, tem-se

$$\frac{1}{a} \beta(b(k+i_2)+1, \frac{1}{a}) = \frac{b(k+i_2) \Gamma(b(k+i_2)) \Gamma(\frac{1}{a}+1)}{\Gamma(b(k+i_2)+1+\frac{1}{a})}$$

$$\frac{1}{a} \beta(b(k+i_2)+1, \frac{1}{a}) = b(k+i_2) \beta(b(k+i_2), \frac{1}{a}+1)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} J(i_1, i_2) &= \sum_{k=0}^{i_1} \binom{i_1}{k} (-1)^k b(k+i_2) \beta(b(k+i_2), \frac{1}{a}+1) \\ &= b \sum_{k=0}^{i_1} \binom{i_1}{k} (-1)^k (k+i_2) \beta(b(k+i_2), \frac{1}{a}+1) \end{aligned}$$

Finalmente pode-se demonstrar o L-momento de ordem  $r$  da distribuição de Kumaraswamy(a,b), que é apresentado à seguir

$$\begin{aligned}
\lambda_r &= \frac{1}{r} \sum_{j=0}^{r-2} (-1)^j \binom{r-2}{j} \binom{r}{j+1} J(r-1-j, j+1) \\
&= \frac{1}{r} \sum_{j=0}^{r-2} (-1)^j \binom{r-2}{j} \binom{r}{j+1} b \sum_{k=0}^{r-1-j} \binom{r-1-j}{k} (-1)^k (k+j+1) \beta(b(k+j+1), \frac{1}{a} + 1) \\
&= \frac{b}{r} \sum_{j=0}^{r-2} \sum_{k=0}^{r-1-j} (-1)^{j+k} \binom{r-2}{j} \binom{r}{j+1} \binom{r-1-j}{k} (k+j+1) \beta(b(k+j+1), \frac{1}{a} + 1)
\end{aligned}$$

Faz-se a mudança,  $l = k + j + 1 \Rightarrow k + j = l - 1$

Realizando-se o estudo da variação do somatório que está em função  $k$  em relação a  $l$ . Quando  $j$  e  $k$  forem mínimos, sabe-se pela transformação que  $l \geq 1$ , ou seja, quando  $k = 0$  e  $j = 0 \Rightarrow l \geq 1$ . Quando  $j$  e  $k$  forem máximos, tem-se  $l \leq r$ . Para simplificar, deixa-se um somatório em função de  $j$ , assim  $k + j = l - 1 \Rightarrow j = l - 1 - k \leq l - 1$ , mas,  $j \leq r - 2$ , portanto tem-se que,  $j \leq \min(l - 1, r - 2)$ . Assim  $\lambda_r$  fica:

$$\lambda_r = \frac{b}{r} \sum_{l=1}^r (-1)^{l-1} l \left[ \sum_{j=0}^{\min(l-1, r-2)} \binom{r-2}{j} \binom{r}{j+1} \binom{r-1-j}{l-j-1} \right] \beta(bl, \frac{1}{a} + 1)$$

Sabe-se que

$$\binom{r-1-j}{l-j-1} = \binom{r-1-j}{l-j-1 - (l-j-1)} = \binom{r-1-j}{r-l}$$

Assim

$$\lambda_r = \frac{b}{r} \sum_{l=1}^r (-1)^{l-1} l \left[ \sum_{j=0}^{\min(l-1, r-2)} \binom{r-2}{j} \binom{r}{j+1} \binom{r-1-j}{r-l} \right] \beta(bl, \frac{1}{a} + 1)$$

Lembrando que

$$\binom{r}{j+1} \binom{r-1-j}{r-l} = \frac{r!}{(j+1)!(r-j-1)!(r-l)!(l-1-j)!}$$

Multiplicando e dividindo por  $l!$

$$\frac{r!}{l!(j+1)!} \frac{l!}{(l-1-j)!(r-l)!} = \binom{r}{l} \binom{l}{j+1}$$

Com isso  $\lambda_r$  fica

$$\lambda_r = \frac{b}{r} \sum_{l=1}^r (-1)^{l-1} l \binom{r}{l} \left[ \sum_{j=0}^{\min(l-1, r-2)} \binom{r-2}{j} \binom{l}{j+1} \right] \beta\left(bl, \frac{1}{a} + 1\right)$$

Segundo Feller (1970), tem-se que

$$\sum_{j=0}^{\min(l-1, r-2)} \binom{r-2}{j} \binom{l}{j+1} = \sum_{j=0}^{\min(l-1, r-2)} \binom{r-2}{r-2-j} \binom{r}{l} \binom{l}{j+1} = \binom{l+r-2}{r-1}$$

Portanto,

$$\lambda_r = \frac{b}{r} \sum_{l=1}^r (-1)^{l-1} l \binom{l+r-2}{r-1} \beta\left(bl, \frac{1}{a} + 1\right)$$