



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FRANCISCO DIEGO FEITOSA DE SOUZA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA EUCLIDIANA UTILIZANDO
TÉCNICAS DE GEOMETRIA PROJETIVA

FORTALEZA

2017

FRANCISCO DIEGO FEITOSA DE SOUZA

**RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA EUCLIDIANA UTILIZANDO
TÉCNICAS DE GEOMETRIA PROJETIVA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Frederico Vale Girão.

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S238r Souza, Francisco Diego Feitosa de.
Resolução de Problemas de Geometria Euclidiana utilizando técnicas de Geometria Projetiva / Francisco Diego Feitosa de Souza. – 2017.
65 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2017.
Orientação: Prof. Dr. Frederico Vale Girão.

1. Geometria Projetiva. 2. Geometria Euclidiana. 3. Resolução de Problemas. I. Título.

CDD 510

FRANCISCO DIEGO FEITOSA DE SOUZA

**RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA EUCLIDIANA UTILIZANDO
TÉCNICAS DE GEOMETRIA PROJETIVA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 14 / 06 / 2017

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Frederico Vale Girão (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto.
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Ms. Márcio Nascimento da Silva
Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA)

A Deus.

Aos meus pais, Antonio Ribeiro de Souza e
Maria Iramy Feitosa de Souza.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter alcançado esse objetivo.

À minha família, em especial aos meus pais Antonio Ribeiro de Souza e Maria Iramy Feitosa de Souza, que sempre me incentivaram e apoiaram durante esses anos.

Ao professor Francisco Danilo Roseno Pereira, pois foi a partir de suas excelentes aulas de Matemática que decidi ser professor de Matemática.

Aos professores das escolas Governador Adauto Bezerra e Vicente Ribeiro do Amaral, em especial ao professor Alan de Souza Sampaio, pela ajuda nas disciplinas do PROFMAT e à professora Camila de Sousa Franco pela colaboração nesse trabalho.

Ao Prof. Dr. Frederico Vale Girão, pela excelente orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora, Prof. Ms. Márcio Nascimento da Silva e Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto.

“A Geometria existe, como já disse o filósofo, por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la.”

Malba Tahan (Júlio César de Mello e Souza)

RESUMO

A presente dissertação visa mostrar a aplicabilidade das técnicas de Geometria Projetiva na resolução de problemas de Geometria Euclidiana. Inicialmente, traça-se um paralelo entre as duas geometrias e faz-se uma contextualização histórica da Geometria Projetiva. Em seguida são apresentadas versões euclidianas de definições, proposições e teoremas oriundos da Geometria Projetiva. Finalmente, são resolvidos problemas de Geometria Euclidiana usando-se técnicas de Geometria Projetiva. Tal enfoque possibilita aos discentes uma alternativa para a resolução de problemas geométricos, principalmente em olimpíadas matemáticas.

Palavras-chave: Geometria Projetiva. Geometria Euclidiana. Resolução de Problemas.

ABSTRACT

The present dissertation aims to show the applicability of techniques from Projective Geometry in solving Euclidean Geometry problems. Initially, a parallel is drawn between the two geometries and a historical contextualization of Projective Geometry is made. Next, Euclidean versions of definitions, propositions and theorems from Projective Geometry are presented. Finally, problems of Euclidean Geometry are solved using techniques of Projective Geometry. This approach gives the students an alternative way to solve geometric problems, especially in mathematical Olympiads.

Keywords: Projective Geometry. Euclidean Geometry. Problem solving.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Proposição 1	14
Figura 2 – Proposição 2	16
Figura 3 – Proposição 3 – A, B, C e D são colineares	17
Figura 4 – Proposição 3 – A, B, C, D e O são colineares	18
Figura 5 – Proposição 3 – A, B, C e D são concíclicos.....	19
Figura 6 – Proposição 3 – A, B, C, D e O são concíclicos.....	20
Figura 7 – Perspectividade entre pontos, quando l_1 e l_2 são retas	22
Figura 8 – Perspectividade entre pontos, quando l_1 e l_2 são circunferências	22
Figura 9 – Perspectividade entre pontos, quando l_1 é uma circunferência l_2 é uma reta.....	23
Figura 10 – Proposição 5	24
Figura 11 – Proposição 6	26
Figura 12 – Demonstração do Teorema de Desargues	27
Figura 13 – Demonstração do Teorema de Desargues	28
Figura 14 – Demonstração do Teorema de Monge	29
Figura 15 – Demonstração do Teorema de Monge e D’Alembert	30
Figura 16 – Demonstração do Teorema de Pappus	31
Figura 17 – Demonstração do Teorema de Pascal	32
Figura 18 – Demonstração do Teorema 4	34
Figura 19 – Teorema de Brianchon	35
Figura 20 – Demonstração do Teorema de Brocard.....	36
Figura 21 – Problema 1	37
Figura 22 – Problema 2	39
Figura 23 – Problema 3	40
Figura 24 – Problema 4	41
Figura 25 – Problema 5	43
Figura 26 – Problema 6	44
Figura 27 – Problema 7	46
Figura 28 – Problema 8	47
Figura 29 – Problema 9	48
Figura 30 – Problema 10	49

Figura 31 – Problema 11	51
Figura 32 – Problema 12	52
Figura 33 – Problema 13	53
Figura 34 – Problema 14	54
Figura 35 – Problema 15	55
Figura 36 – Problema 16	57
Figura 37 – Problema 17	58
Figura 38 – Problema 18	59
Figura 39 – Problema 19	60
Figura 40 – Problema 20	61

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	11
2 TÉCNICAS DE GEOMETRIA PROJETIVA.....	12
3 SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS.....	37
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	62
REFERÊNCIAS.....	63

1 INTRODUÇÃO

A presente dissertação se propõe a resolver problemas de Geometria Euclidiana utilizando técnicas de Geometria Projetiva.

A Geometria é parte integrante de currículos escolares e importante em aplicações práticas do cotidiano. Sendo assim, o saber geométrico se faz de forma gradativa, buscando estimular a noção de espaço e os problemas colocados pelo conhecimento deste. Historicamente, a Geometria Projetiva surge junto ao Movimento Renascentista, justamente pelo fato dos artistas buscarem mais realismo em suas obras, introduzindo conceitos de ponto de fuga e perspectiva. Esta é uma alternativa à Geometria Euclidiana.

Fazendo uma analogia entre as duas, a Euclidiana se preocupa com o mundo em que vivemos e a Projetiva com o mundo que vemos, sendo denominada, por vezes, como a geometria visual. Outro aspecto de diferenciação entre as duas é que, contrariamente à primeira, o desenvolvimento da Geometria Projetiva pode ser feito utilizando-se apenas uma régua. Esta tem como característica marcante a seguinte: duas retas quaisquer no plano sempre se intersectam.

É importante traçar esse paralelo, pois este trabalho consiste na resolução de problemas da Geometria Euclidiana através da Geometria Projetiva. Esse processo se dá, inicialmente, com as definições de alguns conceitos de Geometria Projetiva e, a partir destes, obtendo proposições e teoremas. Na primeira seção definimos razão cruzada, conjuntos harmônicos, perspectiva, projetividade, pólo e polar. Enunciamos e demonstramos algumas proposições e teoremas. Destacamos os Teoremas de Desargues, Monge, Monge e D'Alembert, Pappus, Pascal, Brianchon e Brocard. Na segunda seção resolvemos vários problemas de Geometria Euclidiana, entre estes alguns de Olimpíadas de Matemática, utilizando as técnicas de Geometria Projetiva desenvolvida na primeira seção.

A Geometria Projetiva é uma teoria geométrica independente, com seu próprio conjunto de axiomas. Enfatizamos que o trabalho apresentado não se propõe a provar os teoremas e resolver problemas da Geometria Projetiva, mas sim, aplicar suas técnicas na resolução de problemas da Geometria Euclidiana.

A relevância do estudo realizado se dá na aplicabilidade didática para discentes de Olimpíadas de Matemática, visando uma ferramenta alternativa para a resolução de problemas de Geometria Euclidiana.

Esperamos que o texto construído no trabalho sirva como base preparatória para competições matemáticas, visto a recorrência de problemas envolvendo Geometria.

2 TÉCNICAS DE GEOMETRIA PROJETIVA

A Matemática é uma ciência que surgiu essencialmente da necessidade de resolução de problemas. A Geometria é uma palavra de origem grega. *Geo* significa terra, e *metria*, que vem da palavra *métron*, significa medir. Sendo assim, é um campo que se dedica a estudar as medidas das formas de figuras planas ou espaciais, bem como sobre a posição relativa das figuras no espaço e suas propriedades. O seu surgimento vem associado à resolução de problemas práticos, como a medição de terrenos. Passando especificamente para a Geometria Projetiva, esta surge na Itália, no século XV, aliada ao Movimento Renascentista, no qual os artistas buscavam mais realismo para suas obras, introduzindo conceitos de perspectiva. Porém, somente dois séculos mais tarde se formulam as ideias matematicamente.

A figura pioneira e precursora da Geometria Projetiva é Girard Desargues, matemático e arquiteto francês. Em 1639, apresenta trabalho sobre a teoria de Geometria das Cônicas, *Broullion Projet*, formalizando esses conceitos. Porém, suas ideias não são bem aceitas, principalmente porque o mesmo se utiliza de uma linguagem peculiar. Entretanto, elas são resgatadas dois séculos mais tarde por Jean Victor Poncelet.

Nesta seção será descrita uma série de definições, proposições e teoremas que servirão de base para a resolução de problemas da próxima seção. Destacamos os teoremas de Desargues, Monge, Monge e D'Alembert, Pappus, Pascal, Brianchon e Brocard, os quais são ferramentas importantes para o estudo proposto nessa dissertação.

Definição 1. Sejam A, B, C e D quatro pontos distintos incidentes numa reta orientada r . Nesta ordem, a razão cruzada de A, B em relação a C, D , representada por $R(A, B; C, D)$, é definida por

$$R(A, B; C, D) = \frac{\overline{AC} \overline{DB}}{\overline{CB} \overline{AD}},$$

onde os comprimentos são direcionados.

Proposição 1. Sejam a, b, c e d quatro retas concorrentes no ponto O . Para as retas p_1 e p_2 que não contêm O , denotamos $A_i = a \cap p_i$, $B_i = b \cap p_i$, $C_i = c \cap p_i$ e $D_i = d \cap p_i$, para $i = 1, 2$. Então

$$R(A_1, B_1; C_1, D_1) = R(A_2, B_2; C_2, D_2).$$

Demonstração.

Sem perda de generalidade, suponha que os pontos A_1, C_1, B_1 e D_1 são colineares nessa ordem. Aplicando a lei dos senos aos triângulos $C_1OA_1, C_1OB_1, D_1OB_1$ e D_1OA_1 , obtemos respectivamente

$$\overline{A_1C_1} = \frac{\overline{OC_1} \cdot \text{sen}(\angle A_1OC_1)}{\text{sen}(\angle C_1A_1O)}, \quad \overline{C_1B_1} = \frac{\overline{OC_1} \cdot \text{sen}(\angle C_1OB_1)}{\text{sen}(\angle OB_1C_1)},$$

$$\overline{D_1B_1} = \frac{\overline{D_1O} \cdot \text{sen}(\angle D_1OB_1)}{\text{sen}(\angle D_1B_1O)} \quad \text{e} \quad \overline{A_1D_1} = \frac{\overline{D_1O} \cdot \text{sen}(\angle A_1OD_1)}{\text{sen}(\angle D_1A_1O)},$$

onde os comprimentos e os ângulos são direcionados.

Pela Definição 1, temos

$$\begin{aligned} R(A_1, B_1; C_1, D_1) &= \frac{\overline{A_1C_1} \overline{D_1B_1}}{\overline{C_1B_1} \overline{A_1D_1}} \\ &= \frac{\frac{\overline{OC_1} \cdot \text{sen}(\angle A_1OC_1)}{\text{sen}(\angle C_1A_1O)} \cdot \frac{\overline{D_1O} \cdot \text{sen}(\angle D_1OB_1)}{\text{sen}(\angle D_1B_1O)}}{\frac{\overline{OC_1} \cdot \text{sen}(\angle C_1OB_1)}{\text{sen}(\angle OB_1C_1)} \cdot \frac{\overline{D_1O} \cdot \text{sen}(\angle A_1OD_1)}{\text{sen}(\angle D_1A_1O)}} \\ &= \frac{\text{sen}(\angle A_1OC_1) \text{sen}(\angle D_1OB_1) \text{sen}(\angle OB_1C_1) \text{sen}(\angle D_1A_1O)}{\text{sen}(\angle C_1OB_1) \text{sen}(\angle A_1OD_1) \text{sen}(\angle D_1B_1O) \text{sen}(\angle C_1A_1O)} \\ &= \frac{\text{sen}(\angle A_1OC_1) \text{sen}(\angle D_1OB_1) \text{sen}(\pi - \angle D_1B_1O) \text{sen}(\angle C_1A_1O)}{\text{sen}(\angle C_1OB_1) \text{sen}(\angle A_1OD_1) \text{sen}(\angle D_1B_1O) \text{sen}(\angle C_1A_1O)} \\ &= \frac{\text{sen}(\angle A_1OC_1) \text{sen}(\angle D_1OB_1)}{\text{sen}(\angle C_1OB_1) \text{sen}(\angle A_1OD_1)}. \end{aligned}$$

Analogamente, aplicando a lei dos senos aos triângulos $C_2OA_2, C_2OB_2, D_2OA_2$ e D_2OB_2 , obtemos

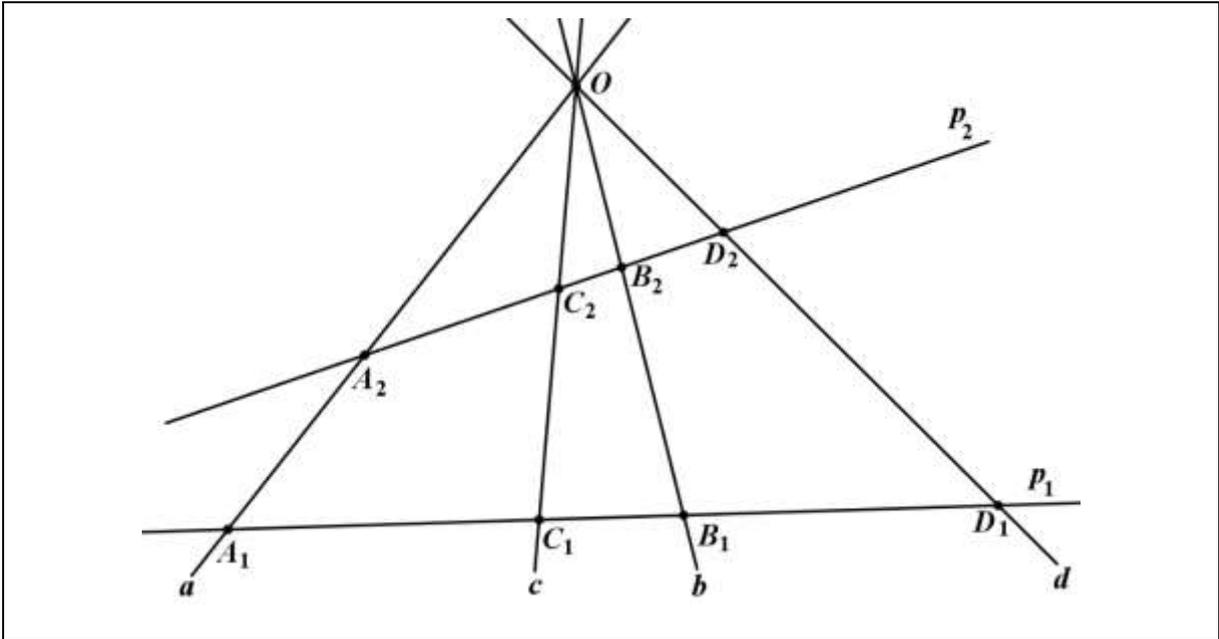
$$\begin{aligned} R(A_2, B_2; C_2, D_2) &= \frac{\text{sen}(\angle A_2OC_2) \text{sen}(\angle D_2OB_2)}{\text{sen}(\angle C_2OB_2) \text{sen}(\angle A_2OD_2)} \\ &= \frac{\text{sen}(\angle A_1OC_1) \text{sen}(\angle D_1OB_1)}{\text{sen}(\angle C_1OB_1) \text{sen}(\angle A_1OD_1)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$R(A_1, B_1; C_1, D_1) = R(A_2, B_2; C_2, D_2).$$

□

Figura 1 – Proposição 1



Fonte: Elaboração própria.

A proposição acima mostra que a razão cruzada dos pontos A_1, B_1, C_1 e D_1 é invariante em relação ao feixe de retas a, b, c e d . Com isso, vamos definir a razão cruzada de um feixe de quatro retas da seguinte forma:

Definição 2. Sejam a, b, c e d quatro retas concorrente no ponto O . Seja p uma reta que não contém O e intersecta as retas a, b, c e d nos pontos A, B, C e D , respectivamente. A razão cruzada de a, b em relação a c, d , representada por $R(a, b; c, d)$, é definida por

$$R(a, b; c, d) = R(A, B; C, D).$$

Proposição 2. Sejam O_1, O_2, A, B, C e D pontos pertencentes a uma circunferência. Então

$$R(\overrightarrow{O_1A}, \overrightarrow{O_1B}; \overrightarrow{O_1C}, \overrightarrow{O_1D}) = R(\overrightarrow{O_2A}, \overrightarrow{O_2B}; \overrightarrow{O_2C}, \overrightarrow{O_2D}).$$

Demonstração.

Sejam $C_1 = AD \cap O_1C$, $B_1 = AD \cap O_1B$, $C_2 = AD \cap O_2C$ e $B_2 = AD \cap O_2B$. Primeiramente vamos demonstrar que $R(A, B_1; C_1, D) = R(A, B_2; C_2, D)$. Para tanto, aplicando a lei dos senos nos triângulos AC_1O_1 , $C_1B_1O_1$, B_1O_1D e AO_1D , obtemos respectivamente

$$\overline{AC_1} = \frac{\overline{O_1C_1} \cdot \text{sen}(\angle AO_1C_1)}{\text{sen}(\angle C_1AO_1)}, \quad \overline{C_1B_1} = \frac{\overline{O_1C_1} \cdot \text{sen}(\angle C_1O_1B_1)}{\text{sen}(\angle O_1B_1C_1)},$$

$$\overline{DB_1} = \frac{\overline{DO_1} \cdot \text{sen}(\angle B_1O_1D)}{\text{sen}(\angle DB_1O_1)} \quad \text{e} \quad \overline{AD} = \frac{\overline{DO_1} \cdot \text{sen}(\angle AO_1D)}{\text{sen}(\angle DAO_1)},$$

onde os comprimentos e os ângulos são direcionados.

Pela Definição 1, temos

$$\begin{aligned}
 R(A, B_1; C_1, D) &= \frac{\overline{AC_1} \overline{DB_1}}{\overline{C_1B_1} \overline{AD}} \\
 &= \frac{\frac{\overline{O_1C_1} \cdot \text{sen}(\angle AO_1C_1)}{\text{sen}(\angle C_1AO_1)} \frac{\overline{DO_1} \cdot \text{sen}(\angle B_1O_1D)}{\text{sen}(\angle DB_1O_1)}}{\frac{\overline{O_1C_1} \cdot \text{sen}(\angle C_1O_1B_1)}{\text{sen}(\angle O_1B_1C_1)} \frac{\overline{DO_1} \cdot \text{sen}(\angle AO_1D)}{\text{sen}(\angle DAO_1)}} \\
 &= \frac{\text{sen}(\angle AO_1C_1) \text{sen}(\angle B_1O_1D) \text{sen}(\angle O_1B_1C_1) \text{sen}(\angle DAO_1)}{\text{sen}(\angle C_1O_1B_1) \text{sen}(\angle AO_1D) \text{sen}(\angle DB_1O_1) \text{sen}(\angle C_1AO_1)} \\
 &= \frac{\text{sen}(\angle AO_1C_1) \text{sen}(\angle B_1O_1D) \text{sen}(\pi - \angle DB_1O_1) \text{sen}(\angle C_1AO_1)}{\text{sen}(\angle C_1O_1B_1) \text{sen}(\angle AO_1D) \text{sen}(\angle DB_1O_1) \text{sen}(\angle C_1AO_1)} \\
 &= \frac{\text{sen}(\angle AO_1C_1) \text{sen}(\angle B_1O_1D)}{\text{sen}(\angle C_1O_1B_1) \text{sen}(\angle AO_1D)}.
 \end{aligned}$$

Analogamente, aplicando a lei dos senos nos triângulos AC_2O_2 , $C_2B_2O_2$, AO_2D e B_2O_2D , obtemos

$$\begin{aligned}
 R(A, B_2; C_2, D) &= \frac{\text{sen}(\angle AO_2C_2) \text{sen}(\angle B_2O_2D)}{\text{sen}(\angle C_2O_2B_2) \text{sen}(\angle AO_2D)} \\
 &= \frac{\text{sen}(\angle AO_1C_1) \text{sen}(\angle B_1O_1D)}{\text{sen}(\angle C_1O_1B_1) \text{sen}(\angle AO_1D)}.
 \end{aligned}$$

Com isso,

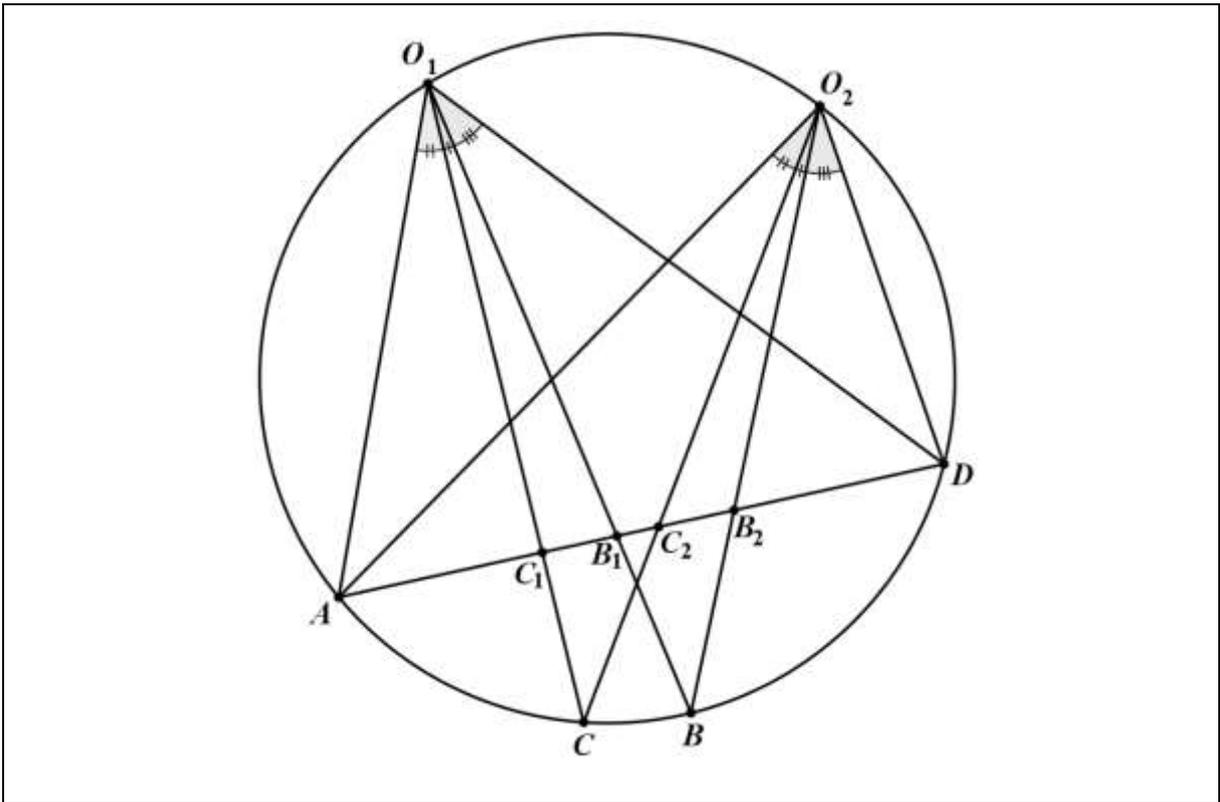
$$R(A, B_1; C_1, D) = R(A, B_2; C_2, D).$$

Portanto, pela Definição 2,

$$R(\overrightarrow{O_1A}, \overrightarrow{O_1B}; \overrightarrow{O_1C}, \overrightarrow{O_1D}) = R(\overrightarrow{O_2A}, \overrightarrow{O_2B}; \overrightarrow{O_2C}, \overrightarrow{O_2D}).$$

□

Figura 2 – Proposição 2



Fonte: Elaboração própria.

A proposição acima afirma que a razão cruzada das retas $\overrightarrow{O_1A}$, $\overrightarrow{O_1B}$, $\overrightarrow{O_1C}$ e $\overrightarrow{O_1D}$ é invariante em relação aos pontos A , B , C e D . Com isso, vamos definir a razão cruzada dos quatro pontos concíclicos da seguinte forma:

Definição 3. Sejam O , A , B , C e D pontos pertencentes a uma circunferência. Então

$$R(A, B; C, D) = R(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}).$$

Propriedades da razão cruzada. Sejam A , B , C e D pontos colineares ou concíclicos.

Propriedade 1. Se os pontos A , B , C e D são dois a dois distintos, então $R(A, B; C, D) \neq 0$.

Propriedade 2. Tem-se $R(A, B; C, D) < 0$ se, e somente se, os pontos A , B , C e D são dois a dois distintos e um dos pontos C , D pertence a AB (\widehat{AB}), onde A , B , C e D são pontos colineares (concíclicos).

Propriedade 3. $R(A, B; C, D) = R(B, A; D, C) = R(C, D; A, B) = R(D, C; B, A)$.

Propriedade 4. $R(A, B; C, D) = 1 - R(A, C; B, D)$.

Propriedade 5. $R(A, B; C, D) = \frac{1}{R(A, B; D, C)}$.

Proposição 3. Sejam A, B, C e D pontos concíclicos ou colineares. Considere uma inversão em relação a uma circunferência de centro O , que mapeia os pontos A, B, C e D em A^*, B^*, C^* e D^* , respectivamente. Então

$$R(A, B; C, D) = R(A^*, B^*; C^*, D^*).$$

Demonstração.

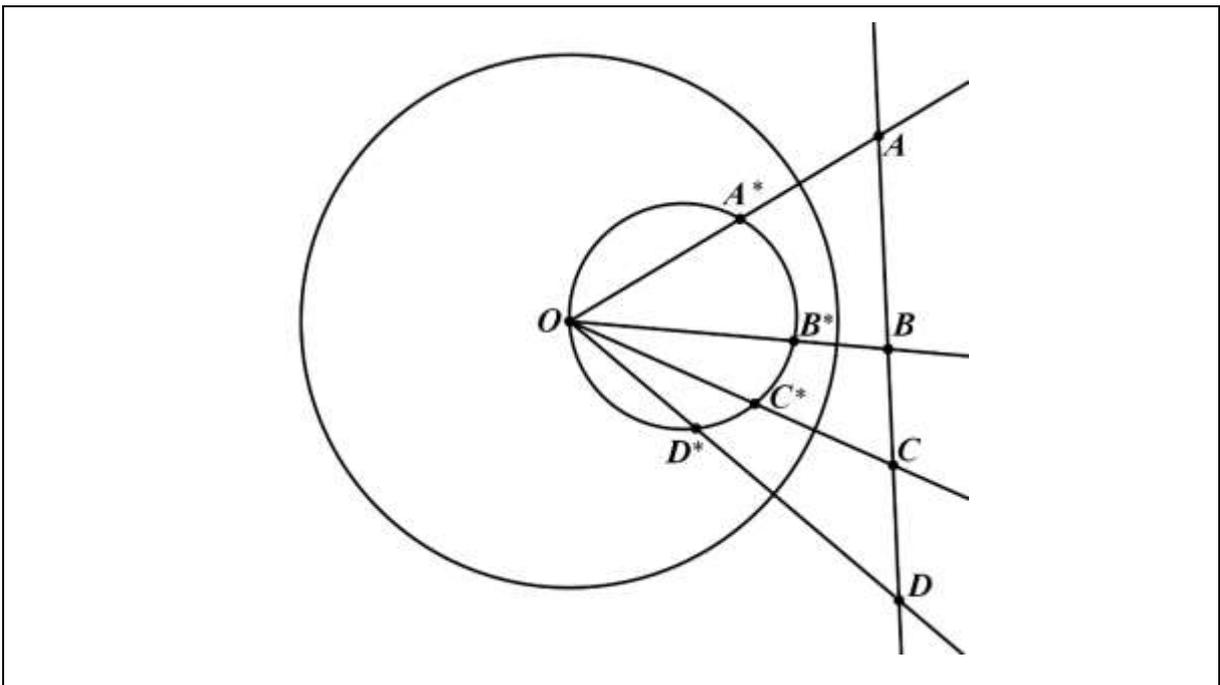
Vamos primeiramente considerar o caso em que os pontos A, B, C e D são colineares.

Há dois subcasos:

Primeiro subcaso: O ponto O não pertence à reta \overleftrightarrow{AB} .

Com isso, a inversão da reta \overleftrightarrow{AB} em relação a uma circunferência de centro O é uma circunferência que contém o ponto O . Então, os pontos A^*, B^*, C^*, D^* e O pertencem a esta circunferência, como mostra a figura abaixo.

Figura 3 – Proposição 3 – A, B, C e D são colineares



Fonte: Elaboração própria.

De acordo com a Definição 2, temos

$$R(\overrightarrow{OA^*}, \overrightarrow{OB^*}; \overrightarrow{OC^*}, \overrightarrow{OD^*}) = R(A, B; C, D).$$

Pela Definição 3, temos

$$R(\overrightarrow{OA^*}, \overrightarrow{OB^*}; \overrightarrow{OC^*}, \overrightarrow{OD^*}) = R(A^*, B^*; C^*, D^*).$$

Portanto,

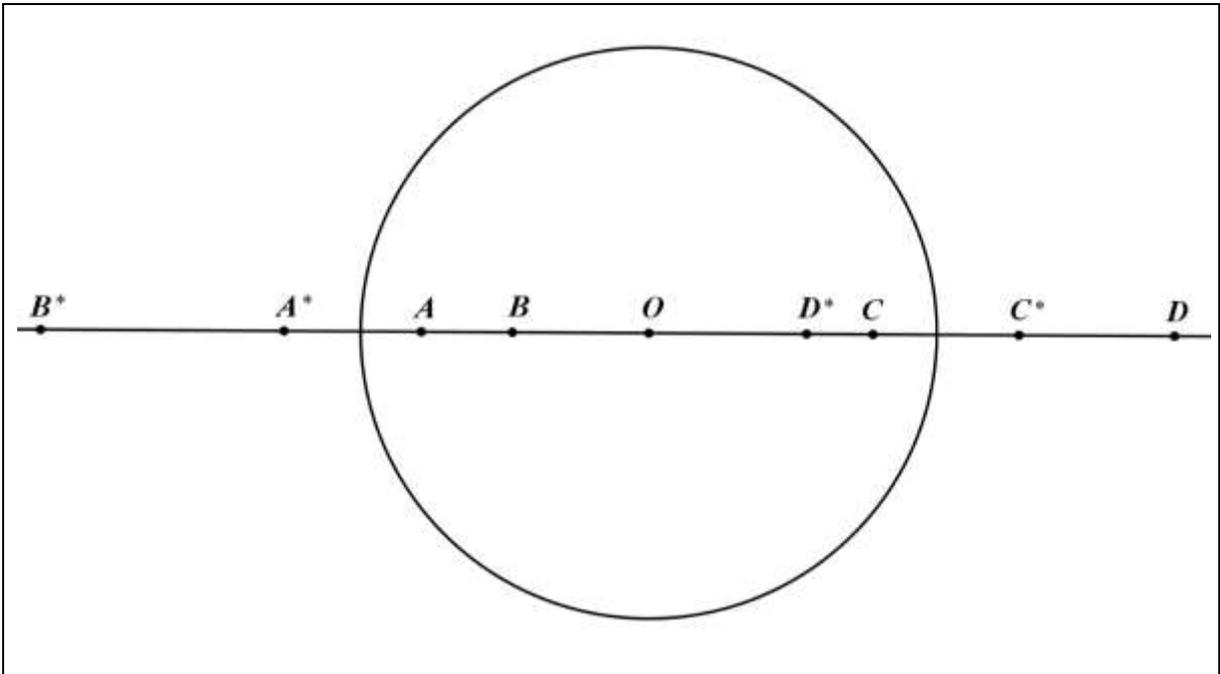
$$R(A, B; C, D) = R(A^*, B^*; C^*, D^*).$$

Segundo subcaso: O ponto O pertence à reta \overleftrightarrow{AB} .

Com isso, a inversão da reta \overleftrightarrow{AB} em relação a uma circunferência de centro O é a reta $\overleftrightarrow{A^*B^*}$.

Então, os pontos $A, B, C, D, A^*, B^*, C^*, D^*$ e O são colineares, como ilustra a figura abaixo.

Figura 4 – Proposição 3 – A, B, C, D e O são colineares



Fonte: Elaboração própria.

Sendo os pontos A^* e C^* as imagens dos pontos A e C , respectivamente, em relação à inversão de centro O e considerando os comprimentos direcionados, obtemos

$$\overline{AC} = \overline{AO} + \overline{OC} = \frac{R^2}{\overline{A^*O}} + \frac{R^2}{\overline{OC^*}} = \frac{R^2(\overline{OC^*} - \overline{OA^*})}{\overline{A^*O} \cdot \overline{OC^*}} = \frac{R^2 \cdot \overline{A^*C^*}}{\overline{A^*O} \cdot \overline{OC^*}},$$

onde R é o raio da circunferência de inversão.

Analogamente, obtemos

$$\overline{CB} = \frac{R^2 \cdot \overline{C^*B^*}}{\overline{C^*O} \cdot \overline{OB^*}}, \quad \overline{DB} = \frac{R^2 \cdot \overline{D^*B^*}}{\overline{D^*O} \cdot \overline{OB^*}} \quad \text{e} \quad \overline{AD} = \frac{R^2 \cdot \overline{A^*D^*}}{\overline{A^*O} \cdot \overline{OD^*}}.$$

Pela Definição 1, obtemos

$$R(A, B; C, D) = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{DB}}{\overline{CB} \cdot \overline{AD}}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{R^2 \cdot \overline{A^*C^*}}{\overline{A^*O} \cdot \overline{OC^*}} \cdot \frac{R^2 \cdot \overline{D^*B^*}}{\overline{D^*O} \cdot \overline{OB^*}} \\
&= \frac{\overline{A^*O} \cdot \overline{OC^*}}{R^2 \cdot \overline{C^*B^*}} \cdot \frac{\overline{D^*O} \cdot \overline{OB^*}}{R^2 \cdot \overline{A^*D^*}} \\
& \quad \frac{\overline{C^*O} \cdot \overline{OB^*}}{\overline{A^*O} \cdot \overline{OD^*}} \\
&= \frac{\overline{A^*C^*} \cdot \overline{D^*B^*} \cdot \overline{C^*O} \cdot \overline{A^*O} \cdot \overline{OD^*} \cdot \overline{OB^*}}{\overline{C^*B^*} \cdot \overline{A^*D^*} \cdot \overline{OC^*} \cdot \overline{A^*O} \cdot \overline{D^*O} \cdot \overline{OB^*}} \\
&= \frac{\overline{A^*C^*} \cdot \overline{D^*B^*}}{\overline{C^*B^*} \cdot \overline{A^*D^*}} \\
&= R(A^*, B^*; C^*, D^*).
\end{aligned}$$

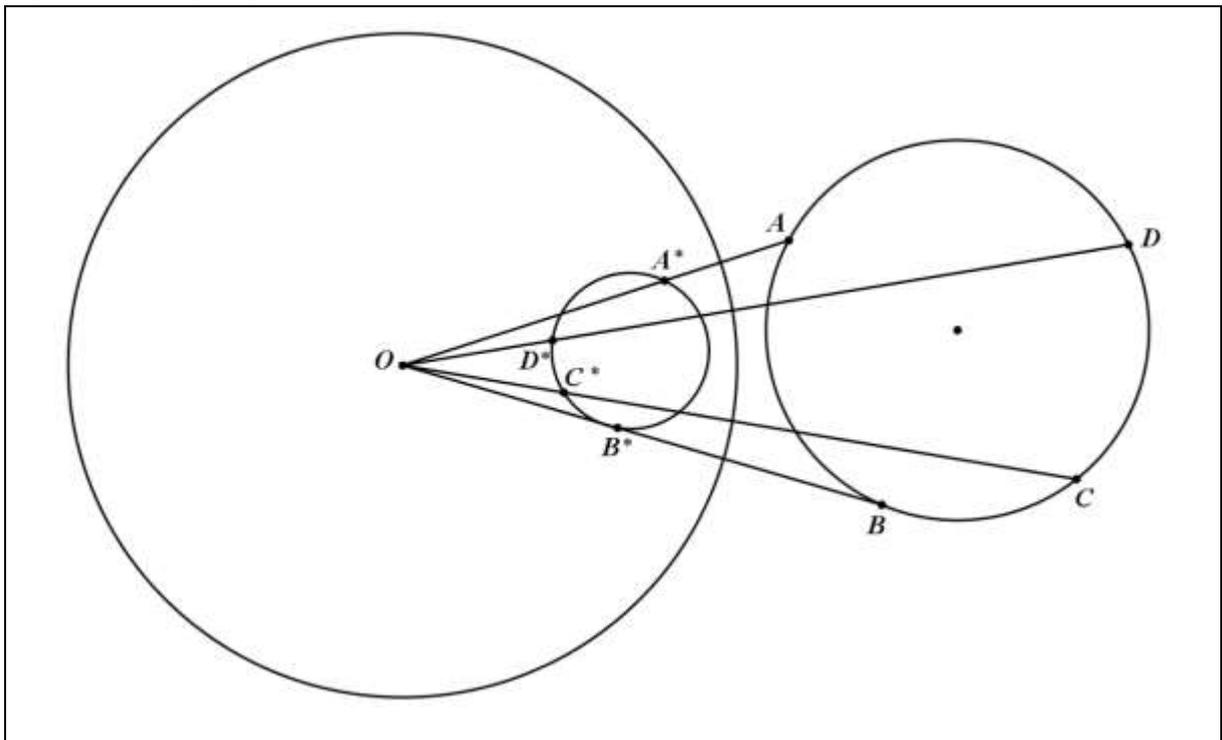
Agora, vamos mostrar o caso em que os pontos A, B, C e D são concíclicos C_1 .

Temos dois subcasos a analisar.

Primeiro subcaso: O ponto O não pertence à circunferência C_1 .

Com isso, a inversão da circunferência C_1 em relação à circunferência de centro O é uma circunferência que não contém o ponto O , como ilustra a figura abaixo.

Figura 5 – Proposição 3 – A, B, C e D são concíclicos



Fonte: Elaboração própria.

De acordo com a Definição 3, temos

$$R(A, B; C, D) = R(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) \quad \text{e} \quad R(A^*, B^*; C^*, D^*) = R(\overrightarrow{OA^*}, \overrightarrow{OB^*}; \overrightarrow{OC^*}, \overrightarrow{OD^*}).$$

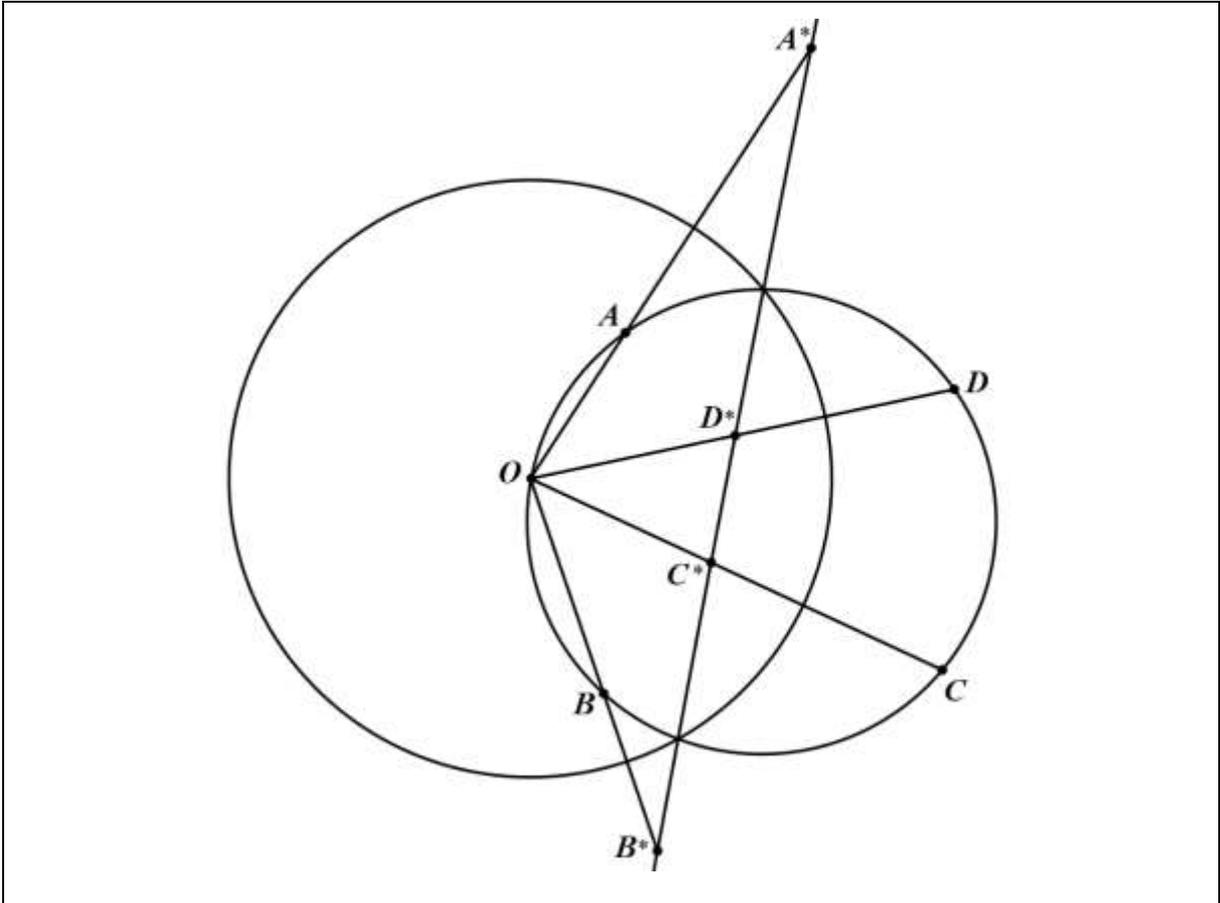
Portanto,

$$R(A, B; C, D) = R(A^*, B^*; C^*, D^*).$$

Segundo subcaso: O ponto O pertence à circunferência C_1 .

Com isso, a inversão da circunferência C_1 em relação a uma circunferência de centro O é um reta que não contém O , como ilustra a figura abaixo.

Figura 6 – Proposição 3 – A, B, C, D e O são concíclicos



Fonte: Elaboração própria.

De acordo com a Definição 2, temos

$$R(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = R(A^*, B^*; C^*, D^*).$$

Pela Definição 3, temos

$$R(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = R(A, B; C, D).$$

Portanto,

$$R(A, B; C, D) = R(A^*, B^*; C^*, D^*).$$

□

Definição 4. Sejam A, B, C e D pontos concíclicos ou colineares. Dizemos que os pares de pontos (A, B) e (C, D) são conjugados harmônicos se $R(A, B; C, D) = -1$. Usamos a notação $H(A, B; C, D)$ para indicar que os pares de pontos (A, B) e (C, D) são conjugados harmônicos.

Definição 5. Sejam a, b, c e d retas concorrentes. Dizemos que os pares de retas (a, b) e (c, d) são conjugados harmônicos se $R(a, b; c, d) = -1$. Usamos a notação $H(a, b; c, d)$ para indicar que os pares de retas (a, b) e (c, d) são conjugados harmônicos.

Proposição 4. Sejam A, B, C e D pontos colineares (pertencentes a uma circunferência Γ) e seja o ponto $O \notin \overline{AB}$ ($O \in \Gamma$). Tem-se $H(A, B; C, D)$ se, e somente se, $H(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$.

Demonstração. Se os pontos A, B, C e D são colineares e o ponto $O \notin \overline{AB}$, então, pela Definição 2,

$$R(A, B; C, D) = R(\overrightarrow{O_1A}, \overrightarrow{O_1B}; \overrightarrow{O_1C}, \overrightarrow{O_1D}).$$

Se os pontos A, B, C, D e O são concíclicos, então, pela Definição 3,

$$R(A, B; C, D) = R(\overrightarrow{O_1A}, \overrightarrow{O_1B}; \overrightarrow{O_1C}, \overrightarrow{O_1D}).$$

Portanto, $H(A, B; C, D)$ se, e somente se, $H(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$.

□

Definição 6. Suponha que l_1 e l_2 são tais que cada uma delas é uma reta ou uma circunferência.

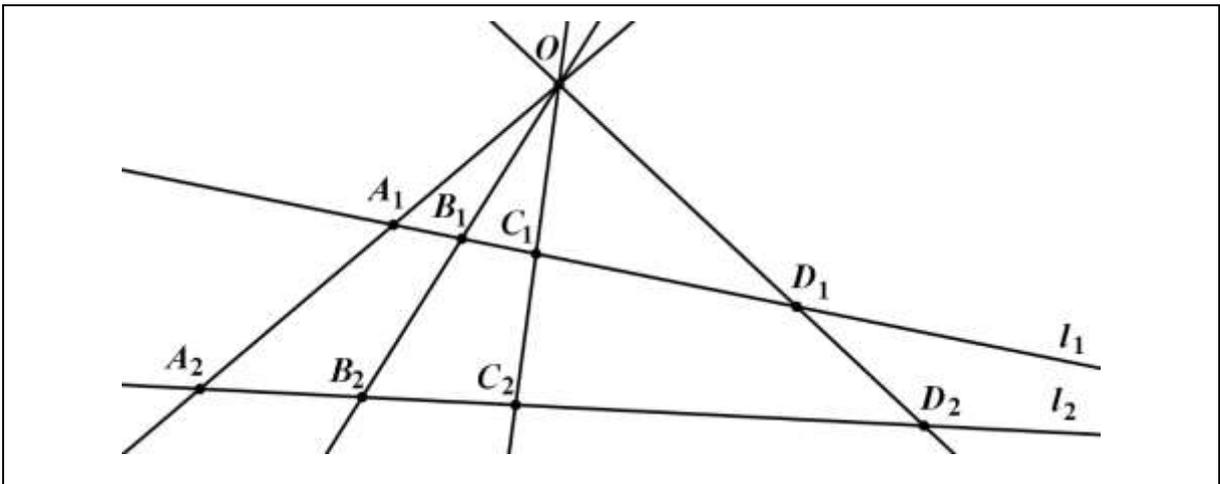
A perspectividade com relação ao ponto O (denotada por $\overset{O}{\wedge}$), é o mapeamento de $l_1 \rightarrow l_2$, tal que

i) Se l_1 e l_2 são circunferências, então estas contêm o ponto O . Se apenas uma de l_1, l_2 é uma circunferência, então esta contém o ponto O .

ii) Cada ponto $A_1 \in l_1$ é mapeado no ponto $A_2 = \overrightarrow{OA_1} \cap l_2$.

A figura abaixo ilustra a perspectividade $A_1B_1C_1D_1 \overset{O}{\wedge} A_2B_2C_2D_2$, quando l_1 e l_2 são retas.

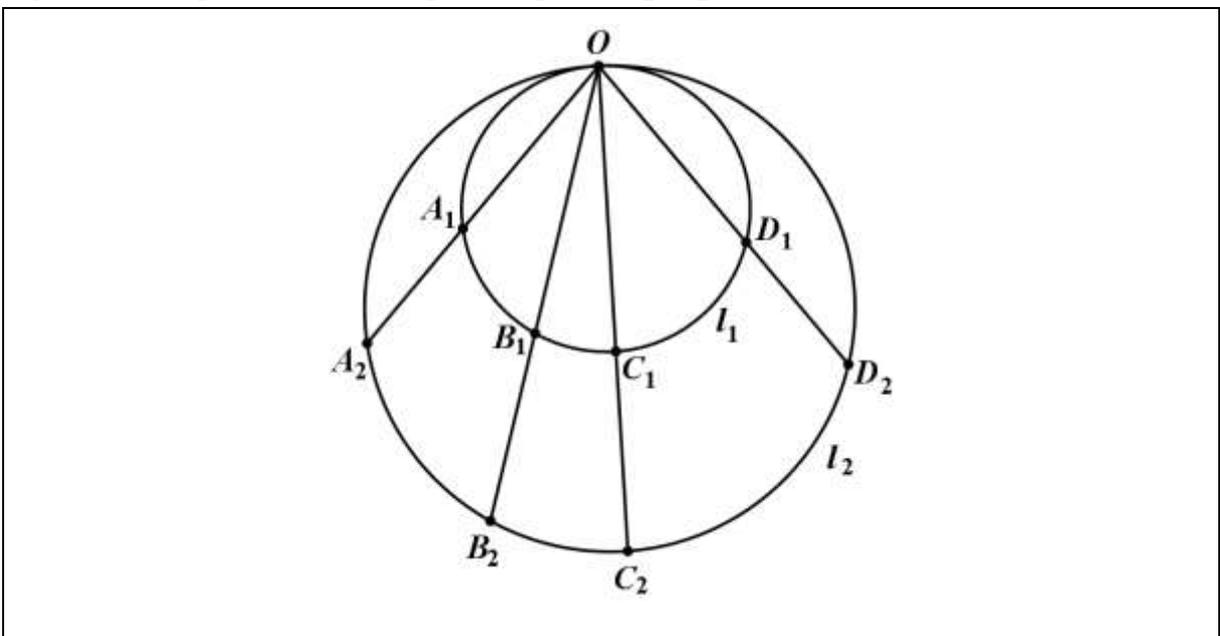
Figura 7 – Perspectividade entre pontos, quando l_1 e l_2 são retas



Fonte: Elaboração própria.

A figura abaixo ilustra a perspectiva $A_1B_1C_1D_1 \overset{O}{\wedge} A_2B_2C_2D_2$, quando l_1 e l_2 são circunferências.

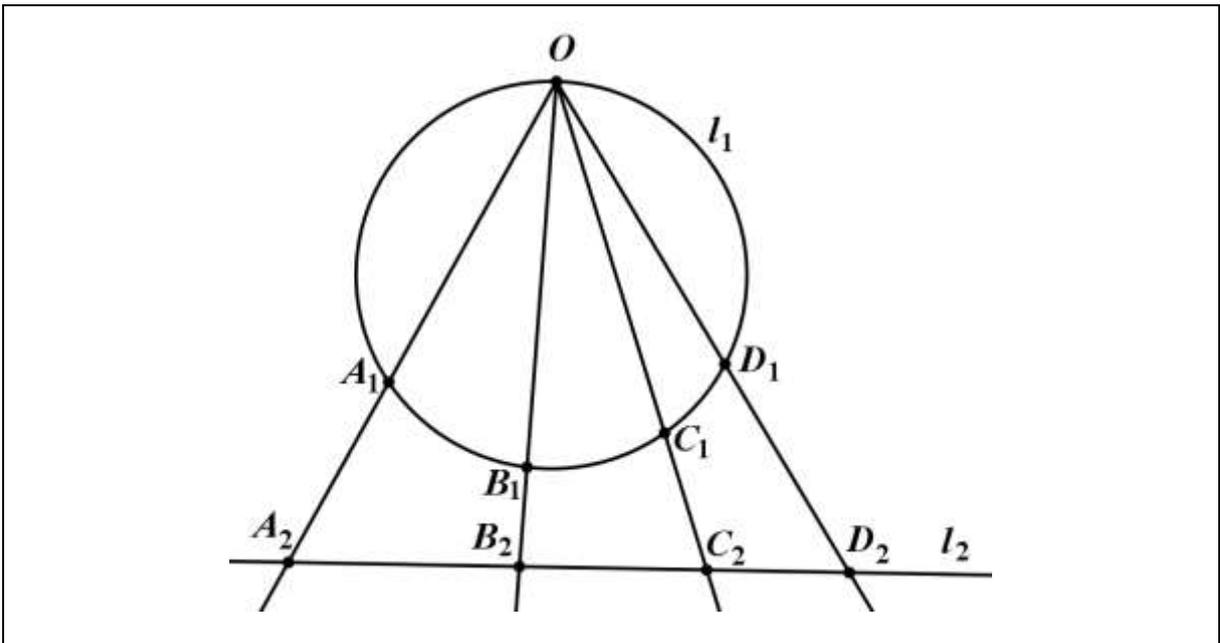
Figura 8 – Perspectividade entre pontos, quando l_1 e l_2 são circunferências



Fonte: Elaboração própria.

A figura abaixo ilustra a perspectiva $A_1B_1C_1D_1 \overset{O}{\wedge} A_2B_2C_2D_2$, quando l_1 é uma circunferência e l_2 é uma reta.

Figura 9 – Perspectividade entre pontos, quando l_1 é uma circunferência l_2 é uma reta



Fonte: Elaboração própria.

De acordo com as Definições 2 e 3, a perspectividade com relação a um ponto preserva a razão cruzada e, portanto, preserva pontos conjugados harmônicos.

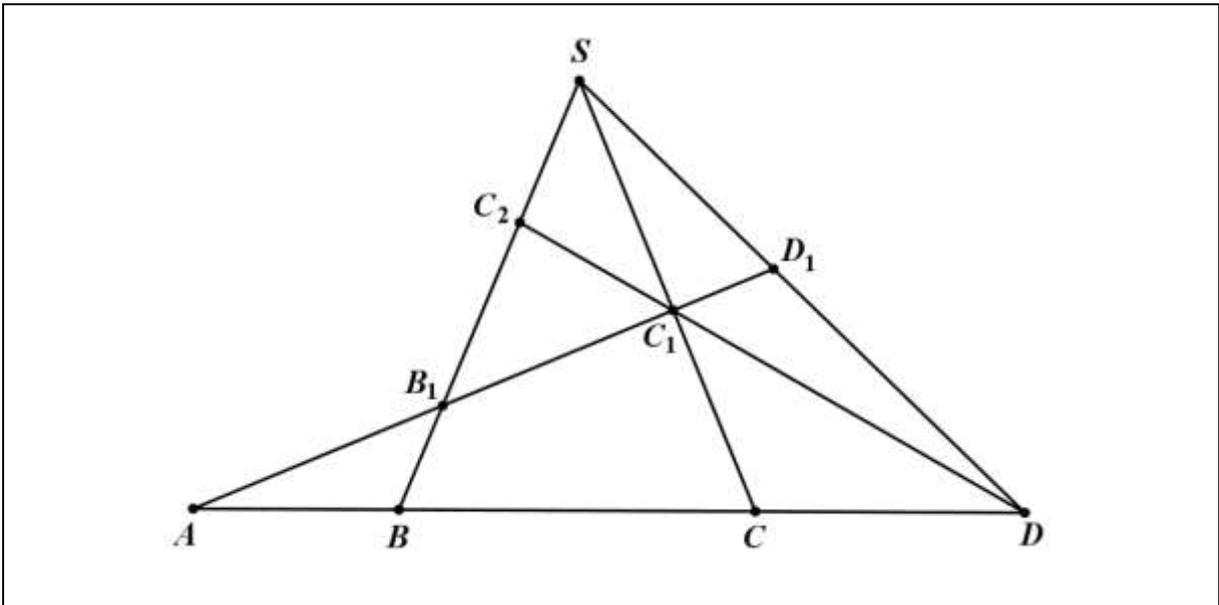
Definição 7. Suponha que l_1 e l_2 são tais que cada uma delas é uma reta ou uma circunferência. Uma projetividade (denotada por $\bar{\lambda}$) é qualquer mapeamento de l_1 a l_2 que pode ser representado como uma composição finita de perspectividades.

Proposição 5. Existe uma projetividade $ABCD \bar{\lambda} BADC$ para quaisquer pontos dois a dois distintos A, B, C e D de uma reta.

Demonstração.

Para mostrar tal fato, vamos elaborar a seguinte construção, conforme a figura abaixo.

Figura 10 – Proposição 5



Fonte: Elaboração própria.

Por um ponto S não incidente com a reta $l = \overleftrightarrow{AB}$ projete $ABCD$ em $AB_1C_1D_1$ sobre a reta l_1 incidente a A . De D projete $A_1B_1C_1D_1$ sobre a reta \overleftrightarrow{SB} . Os últimos quatro pontos obtidos serão projetados em $BADC$ por C_1 , ou seja,

$$ABCD \stackrel{S}{\wedge} AB_1C_1D_1 \stackrel{D}{\wedge} BB_1C_2S \stackrel{C_1}{\wedge} BADC.$$

Portanto,

$$ABCD \bar{\wedge} BADC.$$

□

Teorema 1. Suponha que os pontos A, B, C, D_1 e D_2 sejam colineares ou concíclicos. Se $R(A, B; C, D_1) = R(A, B; C, D_2)$, então $D_1 = D_2$.

Demonstração.

Primeiramente vamos demonstrar o caso em que os pontos A, B, C, D_1 e D_2 são colineares.

Sendo $R(A, B; C, D_1) = R(A, B; C, D_2)$, pela Definição 1, temos

$$\frac{\overline{AC} \overline{D_1B}}{\overline{CB} \overline{AD_1}} = \frac{\overline{AC} \overline{D_2B}}{\overline{CB} \overline{AD_2}}.$$

Isto implica

$$\frac{\overline{D_1B}}{\overline{D_1A}} = \frac{\overline{D_2B}}{\overline{D_2A}}.$$

Visto que os comprimentos são direcionados, temos $\overline{D_2B} = \overline{D_2D_1} + \overline{D_1B}$ e $\overline{D_2A} = \overline{D_2D_1} + \overline{D_1A}$.

Logo,

$$\frac{\overline{D_1B}}{\overline{D_1A}} = \frac{\overline{D_2D_1} + \overline{D_1B}}{\overline{D_2D_1} + \overline{D_1A}},$$

o que implica

$$\overline{D_2D_1}(\overline{D_1A} - \overline{D_1B}) = 0,$$

que, por sua vez, implica

$$\overline{D_2D_1} = 0 \text{ ou } \overline{D_1A} = \overline{D_1B}.$$

Se $\overline{D_2D_1} = 0$, então $D_1 = D_2$.

Se $\overline{D_1A} = \overline{D_1B}$, então $\overline{D_2A} = \overline{D_2B}$. Daí, $D_1 = D_2$.

Agora, vamos demonstrar o caso em que os pontos A, B, C, D_1, D_2 e O são concíclicos.

Sendo $R(A, B; C, D_1) = R(A, B; C, D_2)$ pela Definição 3, temos $R(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD_1}) = R(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD_2})$. Seja r uma reta que intersecta as retas $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD_1}$ e $\overrightarrow{OD_2}$ em A_1, B_1, C_1, D_3 e D_4 , respectivamente.

Logo, pela Definição 2,

$$R(A_1, B_1; C_1, D_3) = R(A_1, B_1; C_1, D_4).$$

Com isso, $D_3 = D_4$, ou seja, $\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OD_2}$.

Portanto, $D_1 = D_2$. □

Corolário 1. Se uma projetividade deixa invariante cada um de três pontos distintos de uma reta (circunferência), então ela deixa invariante todos os pontos da reta (circunferência).

Teorema 2. Se os pontos A, B, C e D são dois a dois distintos, um dos pontos C, D está entre A e B e $R(A, B; C, D) = R(B, A; C, D)$, então $H(A, B; C, D)$.

Demonstração.

Pela Propriedade 3, temos

$$R(B, A; C, D) = R(A, B; D, C).$$

Pela Propriedade 5, temos

$$R(A, B; D, C) = \frac{1}{R(A, B; C, D)}.$$

Sendo $R(A, B; C, D) = R(B, A; C, D)$, então

$$R(A, B; C, D) = \frac{1}{R(A, B; C, D)},$$

o que implica

$$R(A, B; C, D)^2 = 1,$$

ou seja,

$$R(A, B; C, D) = 1 \text{ ou } R(A, B; C, D) = -1.$$

Pela Propriedade 2, $R(A, B; C, D) < 0$. Por isso, $R(A, B; C, D) = -1$.

Portanto, $H(A, B; C, D)$.

□

Proposição 6. Dado um quadrilátero $ABCD$. Sejam, $P = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$, $Q = \overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{BC}$, $R = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{PQ}$ e $S = \overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{PQ}$, então $H(P, Q; R, S)$.

Demonstração.

Seja $T = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BD}$. Considere a sequência de perspectividades.

$$PQRS \stackrel{\underline{A}}{\wedge} BDTS \stackrel{\underline{C}}{\wedge} QPRS.$$

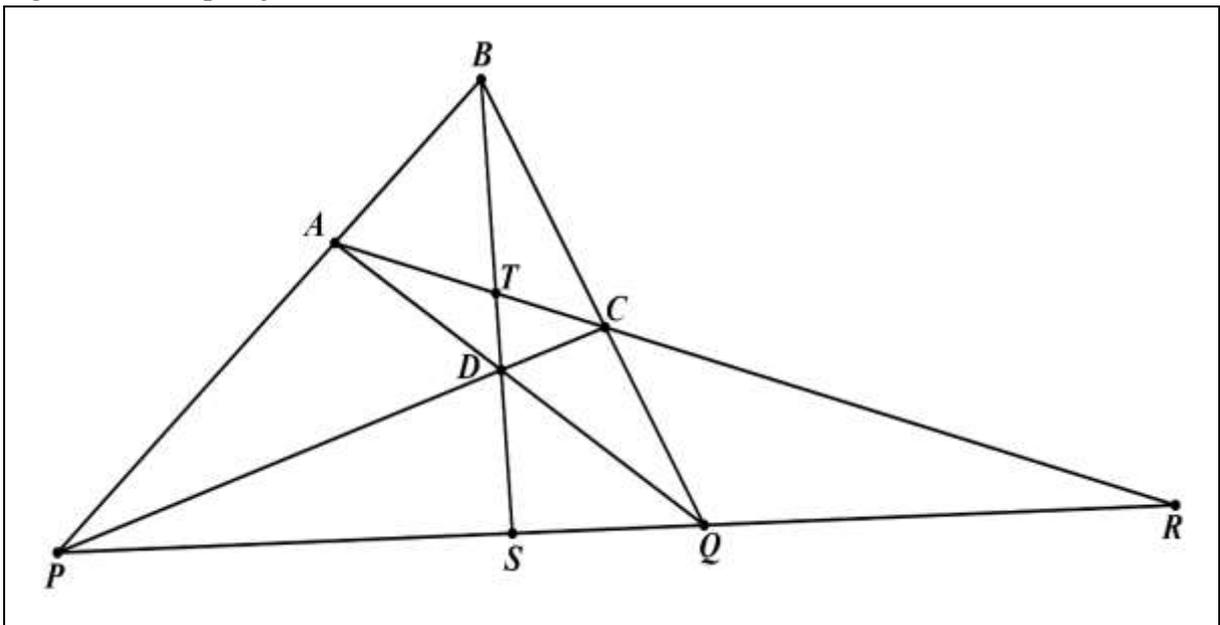
Como a razão cruzada é preservada por perspectividade, tem-se

$$R(P, Q; R, S) = R(Q, P; R, S).$$

Invocando o Teorema 2, obtemos que $H(P, Q; R, S)$.

□

Figura 11 – Proposição 6



Fonte: Elaboração própria.

Definição 8. Dizemos que os triângulos $A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_2$ estão em perspectiva em relação a um ponto se as retas $\overleftrightarrow{A_1A_2}$, $\overleftrightarrow{B_1B_2}$ e $\overleftrightarrow{C_1C_2}$ forem concorrentes. Eles estão em perspectiva em relação a uma reta se os pontos $K = \overleftrightarrow{B_1C_1} \cap \overleftrightarrow{B_2C_2}$, $L = \overleftrightarrow{A_1C_1} \cap \overleftrightarrow{A_2C_2}$ e $M = \overleftrightarrow{A_1B_1} \cap \overleftrightarrow{A_2B_2}$ forem colineares.

Teorema de Desargues. Dois triângulos estão em perspectiva em relação a um ponto se, e somente se, eles estão em perspectiva em relação a uma reta.

Demonstração.

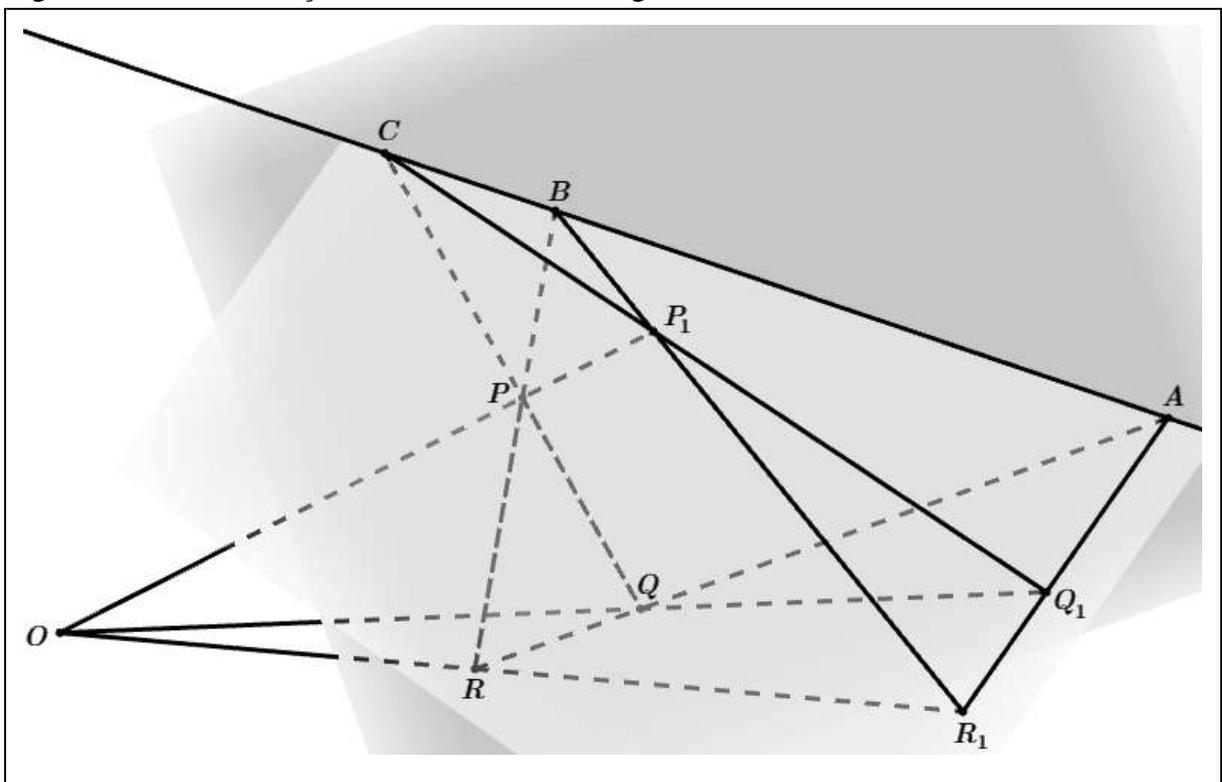
Sejam PQR e $P_1Q_1R_1$ dois triângulos. Temos primeiro que mostrar que, se as retas $\overleftrightarrow{PP_1}$, $\overleftrightarrow{QQ_1}$ e $\overleftrightarrow{RR_1}$ são concorrentes em O , então os pontos

$$A = \overleftrightarrow{QR} \cap \overleftrightarrow{Q_1R_1}, B = \overleftrightarrow{RP} \cap \overleftrightarrow{R_1P_1} \text{ e } C = \overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{P_1Q_1}$$

são colineares.

Repare que o teorema é trivial quando os dois triângulos estão em planos distintos. Neste caso, os pontos A , B e C estão ambos nos planos $\alpha = PQR$ e $\beta = P_1Q_1R_1$. Portanto, estão sobre a reta $\alpha \cap \beta$. Como ilustra a figura abaixo.

Figura 12 – Demonstração do Teorema de Desargues



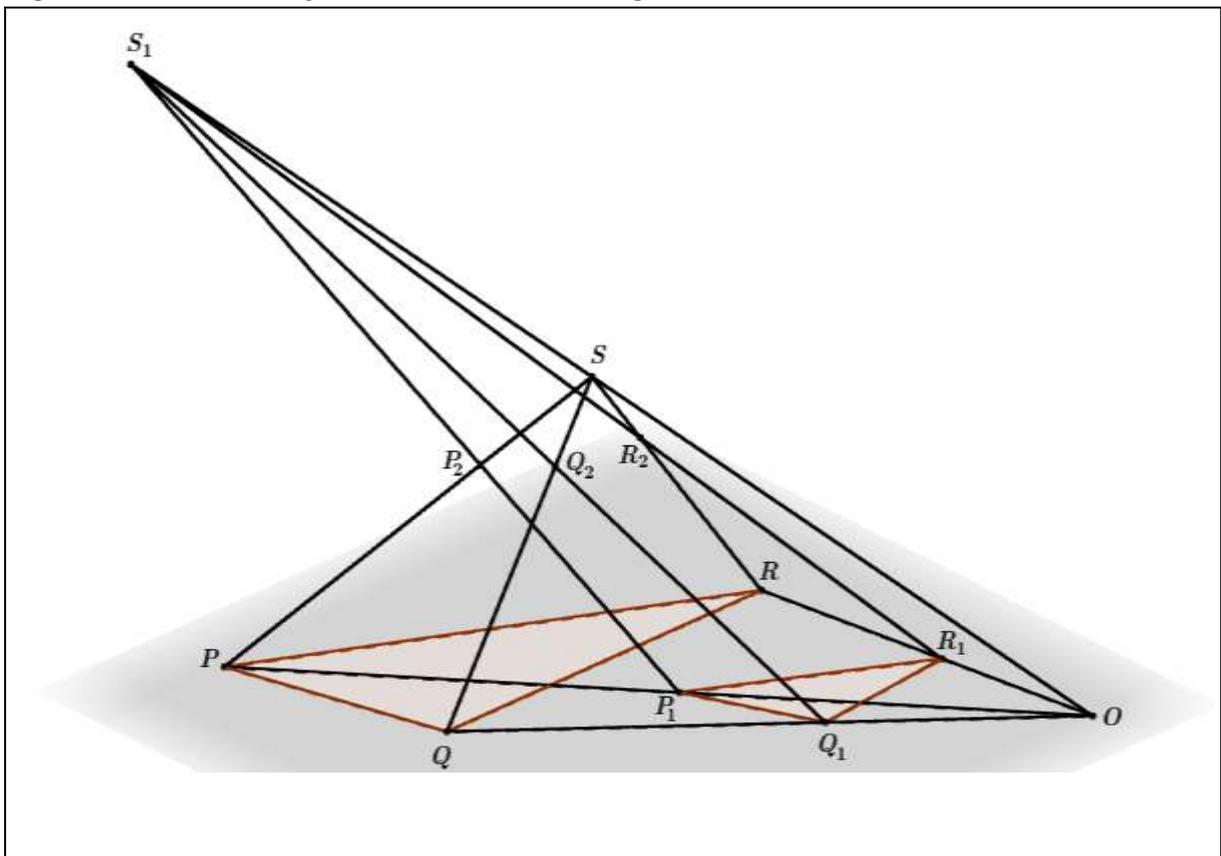
Fonte: Elaboração própria.

Caso os triângulos estejam em um mesmo plano, tomamos dois pontos S e S_1 numa reta qualquer incidente no ponto O e fora do plano PQR . Assim, as retas $\overrightarrow{PP_1}$, $\overrightarrow{QQ_1}$, $\overrightarrow{RR_1}$ e $\overrightarrow{SS_1}$ passam todas por O . Como P, P_1, S e S_1 pertencem ao plano OPS , segue que \overrightarrow{PS} e $\overrightarrow{P_1S_1}$ se intersectam em um ponto P_2 . Analogamente, determinamos os pontos $Q_2 = \overrightarrow{QS} \cap \overrightarrow{Q_1S_1}$ e $R_2 = \overrightarrow{RS} \cap \overrightarrow{R_1S_1}$. Aplicando a parte óbvia do teorema para os triângulos QRS , $Q_1R_1S_1$, que estão em planos distintos, temos que os pontos

$$R_2 = \overrightarrow{RS} \cap \overrightarrow{R_1S_1}, Q_2 = \overrightarrow{SQ} \cap \overrightarrow{S_1Q_1} \text{ e } A = \overrightarrow{QR} \cap \overrightarrow{Q_1R_1}$$

são colineares. Portanto, $A \in \overrightarrow{Q_1R_1}$. Analogamente, temos $B \in \overrightarrow{P_1R_1}$ e $C \in \overrightarrow{P_1Q_1}$. Logo, os três pontos A, B e C estão sobre a reta $\alpha \cap \beta$, onde α é o plano que contém os pontos P, Q e R , e β é o plano que contém os pontos P_2, Q_2 e R_2 .

Figura 13 – Demonstração do Teorema de Desargues



Fonte: Elaboração própria.

Suponha agora que os triângulos PQR e $P_1Q_1R_1$ estão em perspectiva em relação a uma reta. Temos que mostrar que as retas $\overrightarrow{PP_1}$, $\overrightarrow{QQ_1}$ e $\overrightarrow{RR_1}$ são concorrentes em O . Com isso, os pontos $A = \overrightarrow{QR} \cap \overrightarrow{Q_1R_1}$, $B = \overrightarrow{RP} \cap \overrightarrow{R_1P_1}$ e $C = \overrightarrow{QP} \cap \overrightarrow{Q_1P_1}$ são colineares. Por esse motivo, os triângulos PP_1B e QQ_1A estão em perspectiva em relação ao ponto C .

Portanto, $O = \overleftrightarrow{PP_1} \cap \overleftrightarrow{QQ_1}$, $R_1 = \overleftrightarrow{BP_1} \cap \overleftrightarrow{AQ_1}$ e $R = \overleftrightarrow{BP} \cap \overleftrightarrow{AQ}$ são colineares. Daí, $O = \overleftrightarrow{RR_1} \cap \overleftrightarrow{PP_1} \cap \overleftrightarrow{QQ_1}$, o que mostra que os triângulos PQR e $P_1Q_1R_1$ estão em perspectiva em relação ao ponto O .

□

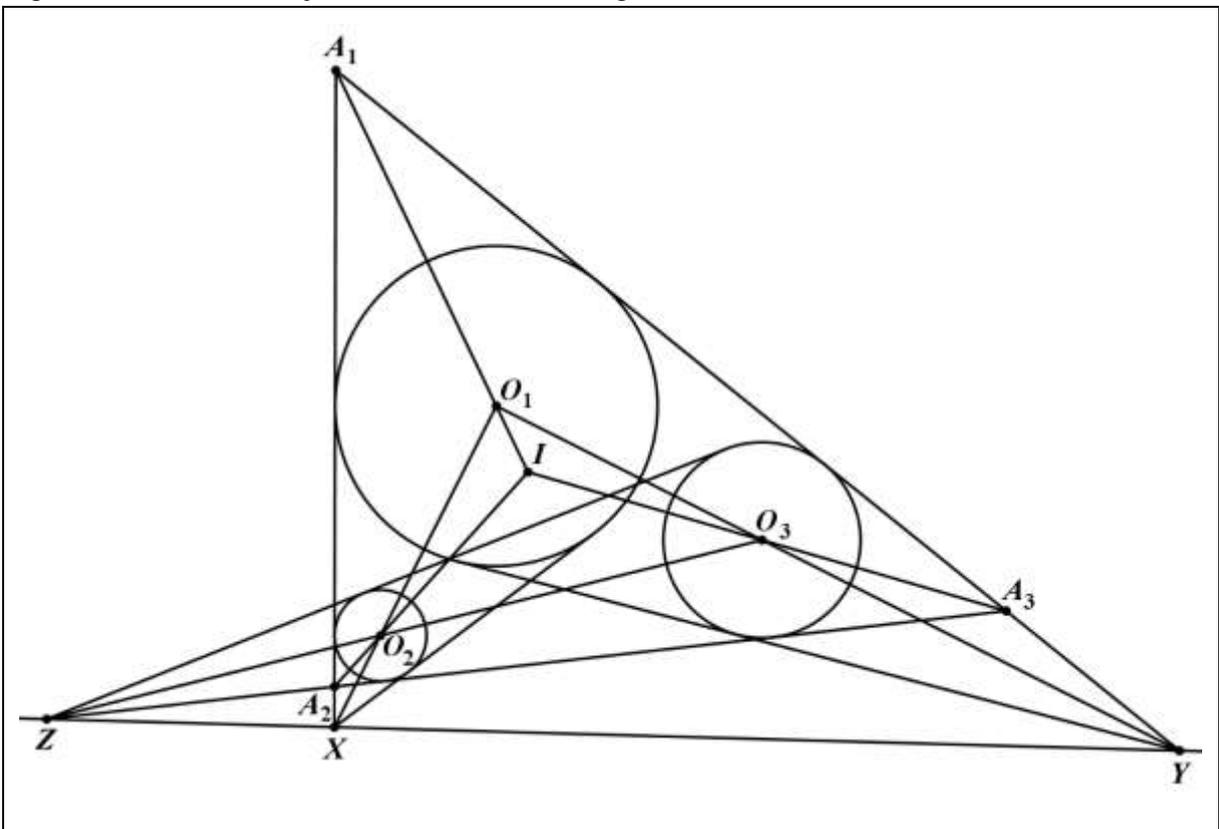
Teorema de Monge. Se C_1, C_2 e C_3 são círculos, então a interseção das retas tangentes externas (centro externo de similaridade) dos círculos C_1 e C_2 , C_1 e C_3 , e C_2 e C_3 são colineares.

Demonstração.

Sejam O_1, O_2 e O_3 os centros dos círculos C_1, C_2 e C_3 , respectivamente. Sendo A_1 a interseção das retas tangentes aos pares de círculos C_1, C_2 e C_1, C_3 , A_2 a interseção das retas tangentes aos pares de círculos C_2, C_1 e C_2, C_3 e A_3 a interseção das retas tangentes aos pares de círculos C_3, C_1 e C_3, C_2 , onde todas as retas tangentes mencionadas acima são disjuntas ao triângulo $O_1O_2O_3$. Com isso, as retas $\overleftrightarrow{A_1O_1}$, $\overleftrightarrow{A_2O_2}$ e $\overleftrightarrow{A_3O_3}$ são as bissetrizes internas do triângulo $A_1A_2A_3$. Portanto, os triângulos $A_1A_2A_3$ e $O_1O_2O_3$ estão em perspectiva em relação ao ponto I , incentro do triângulo $A_1A_2A_3$. Pelo Teorema de Desargues, os exincentros $X = \overleftrightarrow{A_1A_2} \cap \overleftrightarrow{O_1O_2}$, $Y = \overleftrightarrow{A_1A_3} \cap \overleftrightarrow{O_1O_3}$ e $Z = \overleftrightarrow{A_2A_3} \cap \overleftrightarrow{O_2O_3}$ são colineares.

□

Figura 14 – Demonstração do Teorema de Monge



Fonte: Elaboração própria.

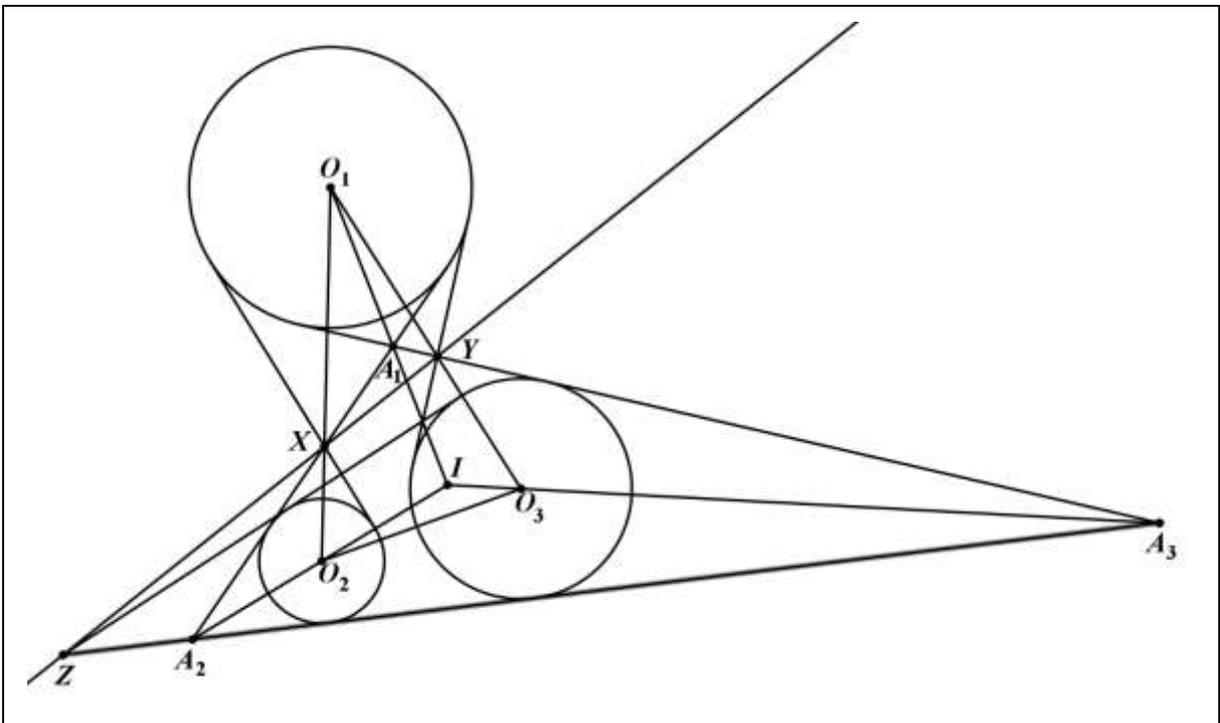
Teorema de Monge e D'Alembert. São dados três círculos C_1, C_2 e C_3 . Se as retas tangentes internas comuns aos círculos C_1 e C_2 se intersectam em X (centro interno de similaridade), as retas tangentes internas comuns aos círculos C_1 e C_3 se intersectam em Y (centro interno de similaridade) e as retas tangentes externas comuns aos círculos C_2 e C_3 se intersectam em Z (centro externo de similaridade), então os pontos X, Y e Z são colineares.

Demonstração.

Sejam O_1, O_2 e O_3 os centros dos círculos C_1, C_2 e C_3 , respectivamente. A reta \overleftrightarrow{XY} divide o plano em dois semiplanos, um contém o ponto O_1 e o outro contém os pontos O_2 e O_3 . Sejam A_1 um ponto pertencente ao semiplano que contém o ponto O_1 e interno ao triângulo $O_1O_2O_3$, obtido pela interseção das retas tangentes aos pares de círculos C_1, C_2 e C_1, C_3 , A_2 a interseção da reta \overleftrightarrow{AX} com a reta tangente aos círculos C_2, C_3 e disjunta ao triângulo $O_1O_2O_3$, e A_3 a interseção das retas \overleftrightarrow{AY} e \overleftrightarrow{BZ} . Com isso, as retas $\overleftrightarrow{A_1O_1}, \overleftrightarrow{A_2O_2}$ e $\overleftrightarrow{A_3O_3}$ são as bissetrizes internas do triângulo $A_1A_2A_3$. Portanto, os triângulos $A_1A_2A_3$ e $O_1O_2O_3$ estão em perspectiva em relação ao ponto I , incentro do triângulo $A_1A_2A_3$. Pelo Teorema de Desargues, os pontos $X = \overleftrightarrow{A_1A_2} \cap \overleftrightarrow{O_1O_2}$, $Y = \overleftrightarrow{A_1A_3} \cap \overleftrightarrow{O_1O_3}$ e $Z = \overleftrightarrow{A_2A_3} \cap \overleftrightarrow{O_2O_3}$ são colineares.

□

Figura 15 – Demonstração do Teorema de Monge e D'Alembert



Fonte: Elaboração própria.

Teorema de Pappus. Se os pontos A_1, A_2 e A_3 pertencem à reta a , e os pontos B_1, B_2 e B_3 pertencem à reta b , então os pontos $C_3 = \overleftrightarrow{A_1B_2} \cap \overleftrightarrow{A_2B_1}$, $C_2 = \overleftrightarrow{A_1B_3} \cap \overleftrightarrow{A_3B_1}$ e $C_1 = \overleftrightarrow{A_2B_3} \cap \overleftrightarrow{A_3B_2}$ são colineares.

Demonstração.

Considere os pontos C_4, D, E e F definidos por $C_4 = \overleftrightarrow{C_1C_3} \cap \overleftrightarrow{A_3B_1}$, $D = \overleftrightarrow{A_1B_2} \cap \overleftrightarrow{A_3B_1}$, $E = \overleftrightarrow{A_2B_1} \cap \overleftrightarrow{A_3B_2}$ e $F = a \cap b$. Vamos provar que $C_4 = C_2$.

Considere a sequência de perspectividades:

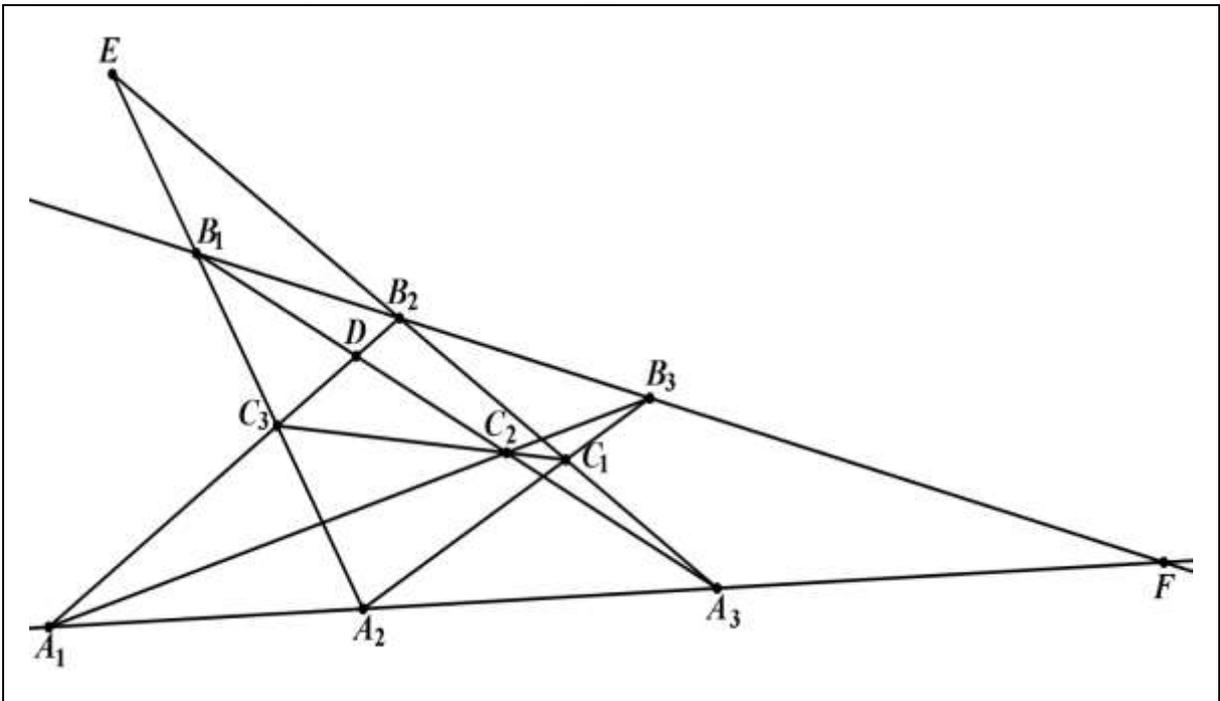
$$A_3B_1DC_2 \stackrel{A_1}{\cong} FB_1B_2B_3 \stackrel{A_2}{\cong} A_3EB_2C_1 \stackrel{C_3}{\cong} A_3B_1DC_4.$$

Logo,

$$A_3B_1DC_2 \bar{\wedge} A_3B_1DC_4.$$

Pelo Corolário 1, $C_4 = C_2$. Como, por definição, C_1, C_3 e C_4 são colineares, concluímos que C_1, C_2 e C_3 são colineares. □

Figura 16 – Demonstração do Teorema de Pappus



Fonte: Elaboração própria.

Teorema de Pascal. Sejam A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 e B_3 pontos concíclicos. Se $C_3 = \overleftrightarrow{A_1B_2} \cap \overleftrightarrow{A_2B_1}$, $C_2 = \overleftrightarrow{A_1B_3} \cap \overleftrightarrow{A_3B_1}$ e $C_1 = \overleftrightarrow{A_2B_3} \cap \overleftrightarrow{A_3B_2}$, então os pontos C_1, C_2 e C_3 são colineares.

Demonstração.

Considere os pontos C_4 , D e E definidos por $C_4 = \overleftrightarrow{C_1C_3} \cap \overleftrightarrow{A_3B_1}$, $D = \overleftrightarrow{A_1B_2} \cap \overleftrightarrow{A_3B_1}$ e $E = \overleftrightarrow{A_2B_1} \cap \overleftrightarrow{A_3B_2}$. Vamos provar que $C_4 = C_2$.

Considere a sequência de perspectividades:

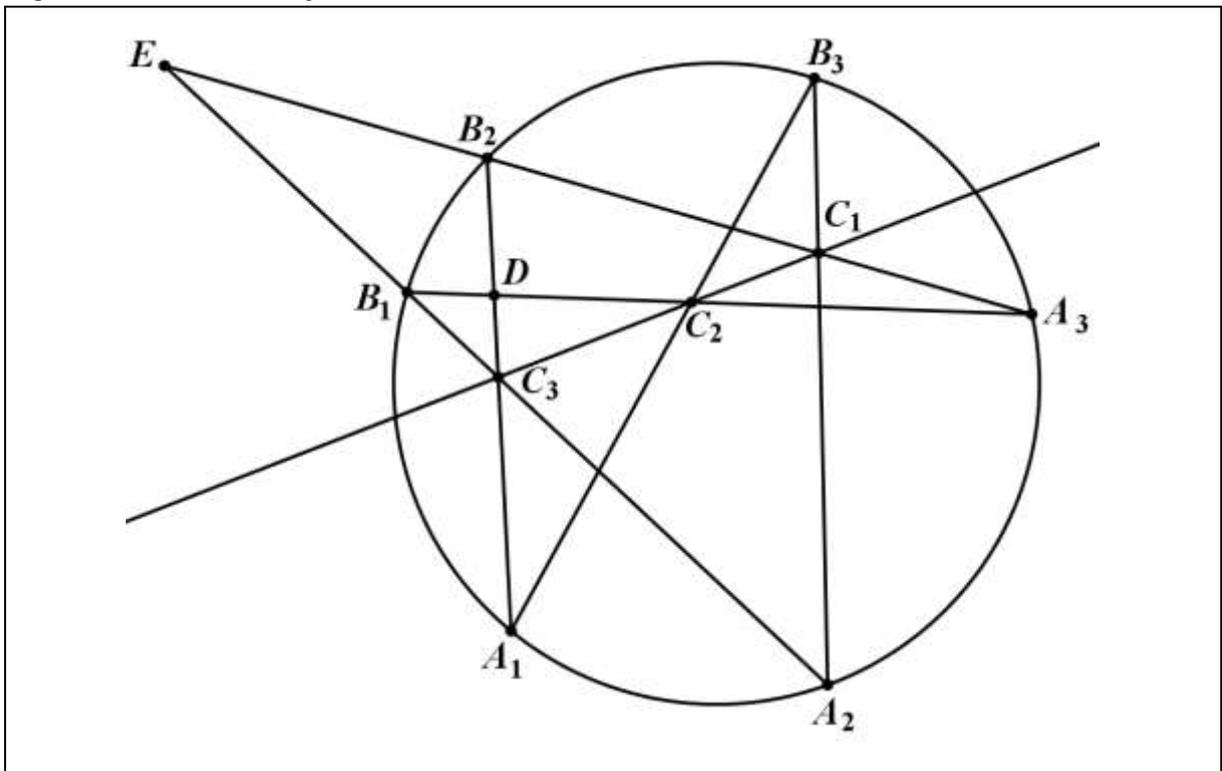
$$A_3B_1DC_2 \stackrel{A_1}{\cong} A_3B_1B_2B_3 \stackrel{A_2}{\cong} A_3EB_2C_1 \stackrel{C_3}{\cong} A_3B_1DC_4.$$

Logo,

$$A_3B_1DC_2 \bar{\parallel} A_3B_1DC_4.$$

Pelo Corolário 1, $C_4 = C_2$. Como, por definição, C_1 , C_3 e C_4 são colineares, concluímos que C_1 , C_2 e C_3 são colineares. □

Figura 17 – Demonstração do Teorema de Pascal



Fonte: Elaboração própria.

Definição 9. Dado uma circunferência $C(O, r)$. Seja A^* a imagem do ponto $A \neq O$ pela inversão em relação à circunferência C . A reta a passando por A^* e perpendicular a \overleftrightarrow{OA} é chamada a polar de A em relação a C . Inversamente, o ponto A é chamado o pólo da reta a em relação a C .

Teorema 3. Sejam A e B dois pontos do plano, com a e b suas respectivas polares em relação a uma dada circunferência C . Tem-se que $A \in b$ se, e somente se, $B \in a$.

Demonstração.

Considere um ponto $B \in a$. Seja $B_1 \in \overline{OB}$ tal que $\overrightarrow{AB_1} \perp \overline{OB}$. Os triângulos OAB_1 e OBA^* são retângulos e têm o ângulo $\angle AOB_1$ e $\angle BOA^*$ em comum; logo, são semelhantes. Com isso,

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA^*}}$$

o que implica

$$\overline{OB} \cdot \overline{OB_1} = \overline{OA} \cdot \overline{OA^*} = r^2.$$

Portanto, B_1 é o inverso de B , ou seja, $B_1 = B^*$. Daí, $\overrightarrow{AB_1} = b$ e $A \in b$.

Analogamente, se $A \in b$, então $B \in a$.

□

Definição 10. Os pontos A e B são chamados conjugados em relação à circunferência C , se um deles estiver na polar do outro.

Teorema 4. Se a reta determinada por dois pontos conjugados A e B intersecta a circunferência Γ em C e D , então $H(A, B; C, D)$. Reciprocamente, se $H(A, B; C, D)$, onde C e $D \in \Gamma$, então A e B são conjugados em relação à circunferência Γ .

Demonstração.

Sejam C_1 e D_1 pontos de interseção da reta \overline{OA} com a circunferência Γ , onde O é o centro da circunferência Γ . Dado que a inversão preserva a razão cruzada, obtemos

$$R(C_1, D_1; A, A^*) = R(C_1, D_1; A^*, A).$$

Pelo Teorema 2,

$$H(C_1, D_1; A, A^*).$$

Seja p a reta que contém A e intersecta a circunferência Γ nos pontos C e D . Sejam $E = \overline{CC_1} \cap \overline{DD_1}$ e $F = \overline{CD} \cap \overline{C_1D_1}$. Como C_1D_1 é o diâmetro da circunferência Γ , temos

$$\overline{C_1F} \perp \overline{D_1E} \text{ e } \overline{D_1F} \perp \overline{C_1E}.$$

Portanto, o ponto F é o ortocentro do triângulo C_1D_1E .

Sejam $B = \overline{EF} \cap \overline{CD}$ e $A_1 = \overline{EF} \cap \overline{C_1D_1}$. Como

$$C_1D_1AA_1 \overset{E}{\wedge} CDAB \overset{F}{\wedge} D_1C_1AA_1,$$

tem-se

$$C_1D_1AA_1 \overline{\wedge} D_1C_1AA_1,$$

o que implica

$$R(C_1, D_1; A, A_1) = R(D_1, C_1; A, A_1).$$

Pelo Teorema 2, $H(C_1, D_1; A, A_1)$. Como perspectividade preserva pontos conjugados harmônicos, $H(C, D; A, B)$.

De $H(C_1, D_1; A, A^*)$ e $H(C_1, D_1; A, A_1)$ obtemos, $A^* = A_1$; portanto, $A^* \in \overleftrightarrow{EF}$. No entanto, $\overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{C_1D_1}$ e a reta $\overleftrightarrow{EF} = a$ é a polar do ponto A . Com isso, $B = \overleftrightarrow{EF} \cap \overleftrightarrow{CD} \in a$. Pelo Teorema 3, $A \in b$, onde b é a polar do ponto B .

Portanto, A e B são pontos conjugados em relação à circunferência Γ .

Para o ponto B pertencente à polar do ponto A , temos

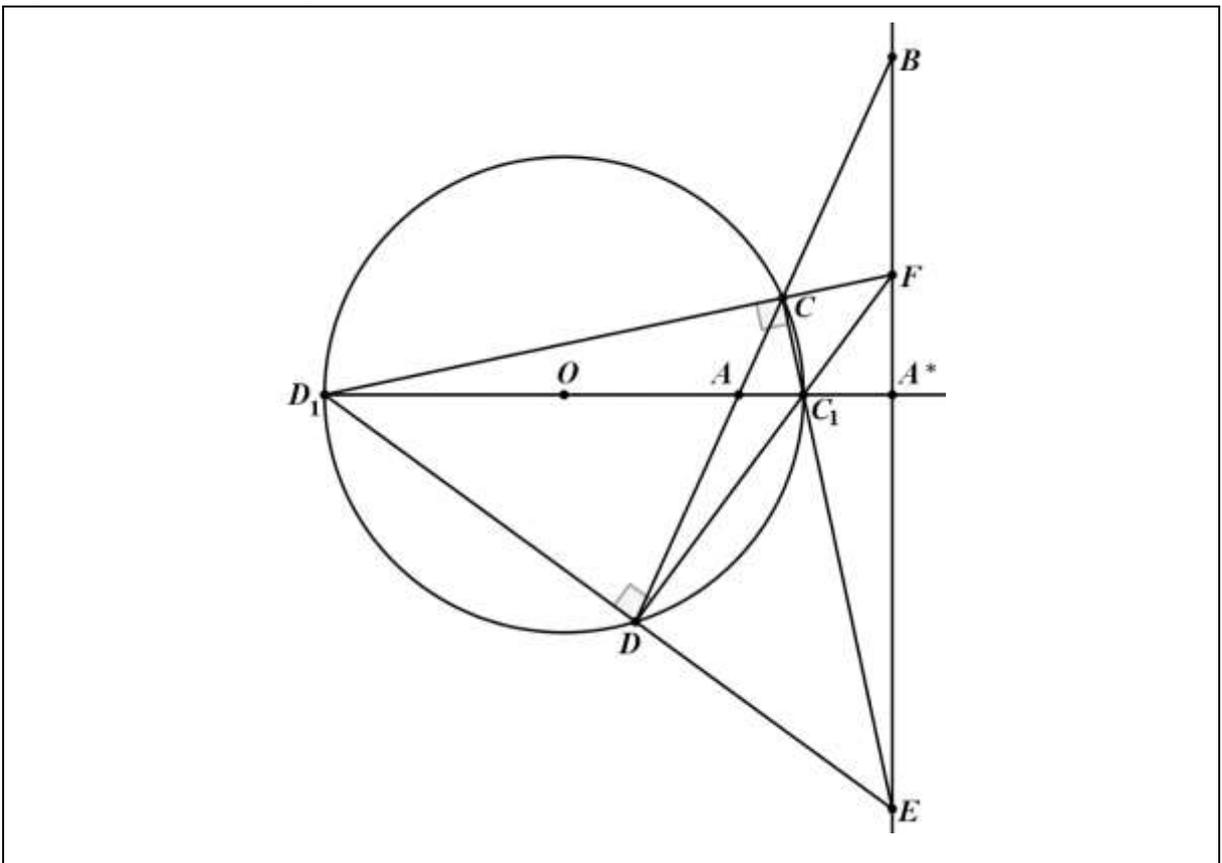
$$C_1D_1AA^* \overset{E}{\wedge} CDAB.$$

Sendo $H(C_1, D_1; A, A^*)$, conclui-se que $H(C, D; A, B)$.

Portanto, $H(A, B; C, D)$.

□

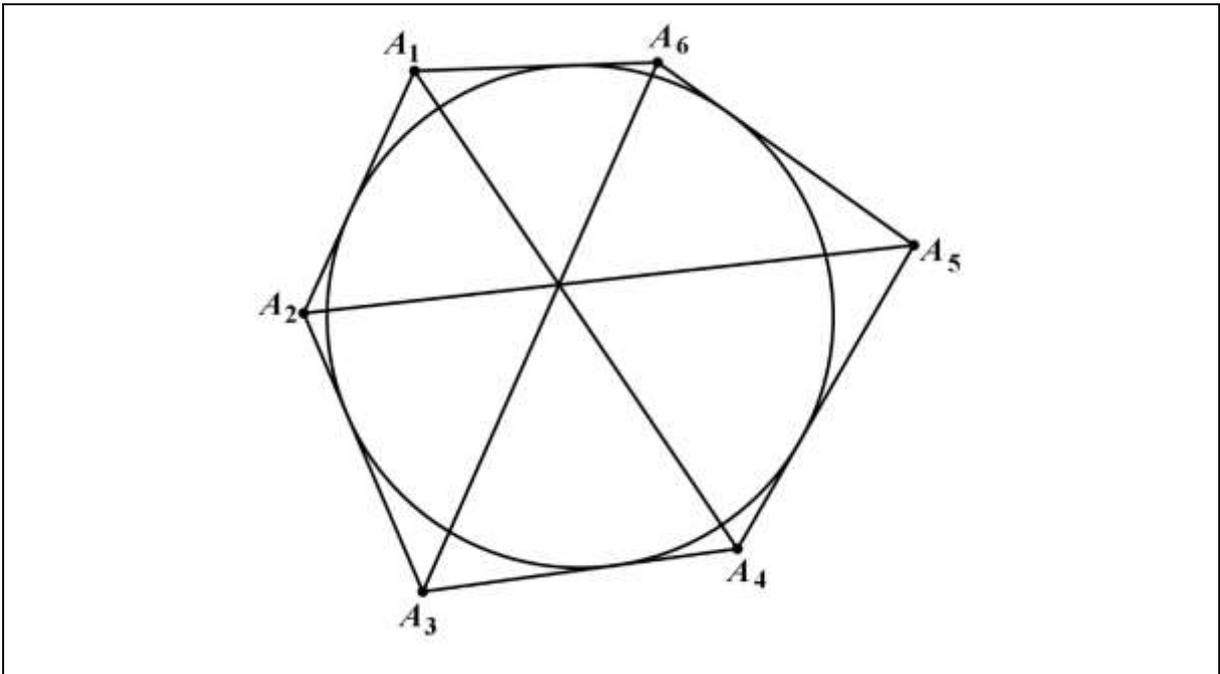
Figura 18 – Demonstração do Teorema 4



Fonte: Elaboração própria.

Teorema de Brianchon. Suponha que o hexágono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ esteja circunscrito à circunferência $C(O, r)$. Então as retas $\overleftrightarrow{A_1A_4}$, $\overleftrightarrow{A_2A_5}$ e $\overleftrightarrow{A_3A_6}$ são concorrentes.

Figura 19 – Teorema de Brianchon



Fonte: Elaboração própria.

Demonstração.

Usaremos a convenção em que os pontos serão indicados por letras maiúsculas, e suas polares com as correspondentes letras minúsculas.

Denotando por M_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, os pontos de tangência de $A_i A_{i+1}$ com a circunferência C , temos $m_i = \overleftrightarrow{A_i A_{i+1}}$, onde $A_7 = A_1$. Logo, pelo Teorema 3, $M_i \in a_i$ e $M_i \in a_{i+1}$. Portanto, $a_i = \overleftrightarrow{M_{i-1} M_i}$, onde $M_0 = M_6$.

Seja $b_j = \overleftrightarrow{A_j A_{j+3}}$, $j = 1, 2, 3$. Então, pelo Teorema 3, $B_j = a_j \cap a_{j+3} = \overleftrightarrow{M_{j-1} M_j} \cap \overleftrightarrow{M_{j+2} M_{j+3}}$.

Temos que provar que existe um ponto P tal que $P \in b_1, b_2, b_3$, ou analogamente, que existe uma reta p tal que $B_1, B_2, B_3 \in p$. Por isso, basta provar que os pontos B_1, B_2 e B_3 são colineares. No entanto, aplicando o Teorema de Pascal a

$$M_1 M_3 M_5 M_4 M_6 M_2,$$

concluimos que os pontos $B_1 = \overleftrightarrow{M_1 M_6} \cap \overleftrightarrow{M_3 M_4}$, $B_2 = \overleftrightarrow{M_1 M_2} \cap \overleftrightarrow{M_4 M_5}$ e $B_3 = \overleftrightarrow{M_2 M_3} \cap \overleftrightarrow{M_5 M_6}$ são colineares.

□

Teorema de Brocard. O quadrilátero $ABCD$ está inscrito na circunferência $C(O, r)$. Se $E = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$, $F = \overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{BC}$ e $G = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BD}$, então O é o ortocentro do triângulo EFG .

Demonstração.

Vamos provar que \overleftrightarrow{EG} é a polar do ponto F . Sejam $X = \overleftrightarrow{EG} \cap \overleftrightarrow{BC}$ e $Y = \overleftrightarrow{EG} \cap \overleftrightarrow{AD}$. Então,

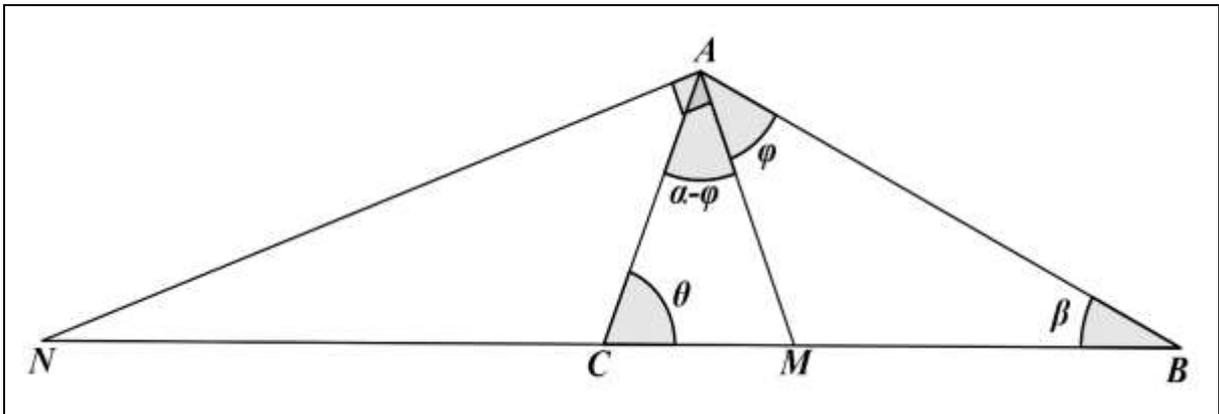
3 SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS

1. Dado o triângulo ABC e um ponto M no segmento BC , seja N o ponto da reta \overleftrightarrow{BC} tal que $\angle MAN = 90^\circ$. Prove que $H(B, C; M, N)$ se, e somente se, AM é a bissetriz do ângulo $\angle BAC$.

Solução.

Sejam $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CBA$, $\theta = \angle ACB$ e $\varphi = \angle BAM$, como ilustra a figura abaixo.

Figura 21 – Problema 1



Fonte: Elaboração própria.

Aplicando a lei dos senos nos triângulos ABM e ACM , tem-se

$$\frac{\overline{BM}}{\text{sen}\varphi} = \frac{\overline{AM}}{\text{sen}\beta} \Rightarrow \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}} = \frac{\text{sen}\varphi}{\text{sen}\beta} \quad (1)$$

e

$$\frac{\overline{AM}}{\text{sen}\theta} = \frac{\overline{MC}}{\text{sen}(\alpha - \varphi)} \Rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}(\alpha - \varphi)}. \quad (2)$$

Multiplicando (1) por (2), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} &= \frac{\overline{BM} \overline{AM}}{\overline{AM} \overline{MC}} \\ &= \frac{\text{sen}\varphi}{\text{sen}\beta} \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}(\alpha - \varphi)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Similarmente, aplicando a lei dos senos nos triângulos ABN e ACN , tem-se

$$\frac{\overline{BN}}{\text{sen}(\varphi + 90^\circ)} = \frac{\overline{AN}}{\text{sen}\beta} \Rightarrow \frac{\overline{AN}}{\overline{BN}} = \frac{\text{sen}\beta}{\text{sen}(\varphi + 90^\circ)} \quad (4)$$

e

$$\frac{\overline{AN}}{\text{sen}(180^\circ - \theta)} = \frac{\overline{NC}}{\text{sen}(90^\circ + \varphi - \alpha)} \Rightarrow \frac{\overline{NC}}{\overline{AN}} = \frac{\text{sen}(90^\circ + \varphi - \alpha)}{\text{sen}(180^\circ - \theta)}. \quad (5)$$

Multiplicando (4) por (5), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\overline{NC}}{\overline{BN}} &= \frac{\overline{NC} \overline{AN}}{\overline{AN} \overline{BN}} \\ &= \frac{\text{sen}(90^\circ + \varphi - \alpha)}{\text{sen}(180^\circ - \theta)} \frac{\text{sen}\beta}{\text{sen}(\varphi + 90^\circ)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Usando a definição de razão cruzada e as identidades (3) e (6), obtemos

$$\begin{aligned} R(B, C; M, N) &= \frac{\overline{BM} \overline{NC}}{\overline{MC} \overline{BN}} \\ &= \frac{\text{sen}\varphi}{\text{sen}\beta} \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}(\alpha - \varphi)} \frac{\text{sen}(90^\circ + \varphi - \alpha)}{\text{sen}(180^\circ - \theta)} \frac{\text{sen}\beta}{\text{sen}(\varphi + 90^\circ)} \\ &= \frac{\text{sen}\varphi \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos(\varphi - \alpha)}{\text{sen}(\alpha - \varphi) \cdot \cos\varphi \cdot \text{sen}\theta} \\ &= \frac{\tan\varphi}{\tan(\alpha - \varphi)}. \end{aligned}$$

Sendo $B \neq C$ e $M \neq N$, a relação $|R(B, C; M, N)| = 1$ implica que $R(B, C; M, N) = -1$, pois as semirretas \overline{BM} , \overline{MC} e \overline{BN} têm o mesmo sentido e a semirreta \overline{NC} tem sentido oposto.

Portanto, $H(B, C; M, N) \Leftrightarrow R(B, C; M, N) = -1$

$$\Leftrightarrow |R(B, C; M, N)| = 1$$

$$\Leftrightarrow \tan\varphi = \tan(\alpha - \varphi)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2\varphi$$

$$\Leftrightarrow AM \text{ é a bissetriz do ângulo } \angle BAC.$$

2. Sejam A, B e C os pontos diagonais do quadrilátero $PQRS$, ou equivalentemente, $A = \overline{PQ} \cap \overline{RS}$, $B = \overline{QR} \cap \overline{SP}$ e $C = \overline{PR} \cap \overline{QS}$. Se apenas os pontos A, B, C e S são dados, usando apenas régua, construa os pontos P, Q e R .

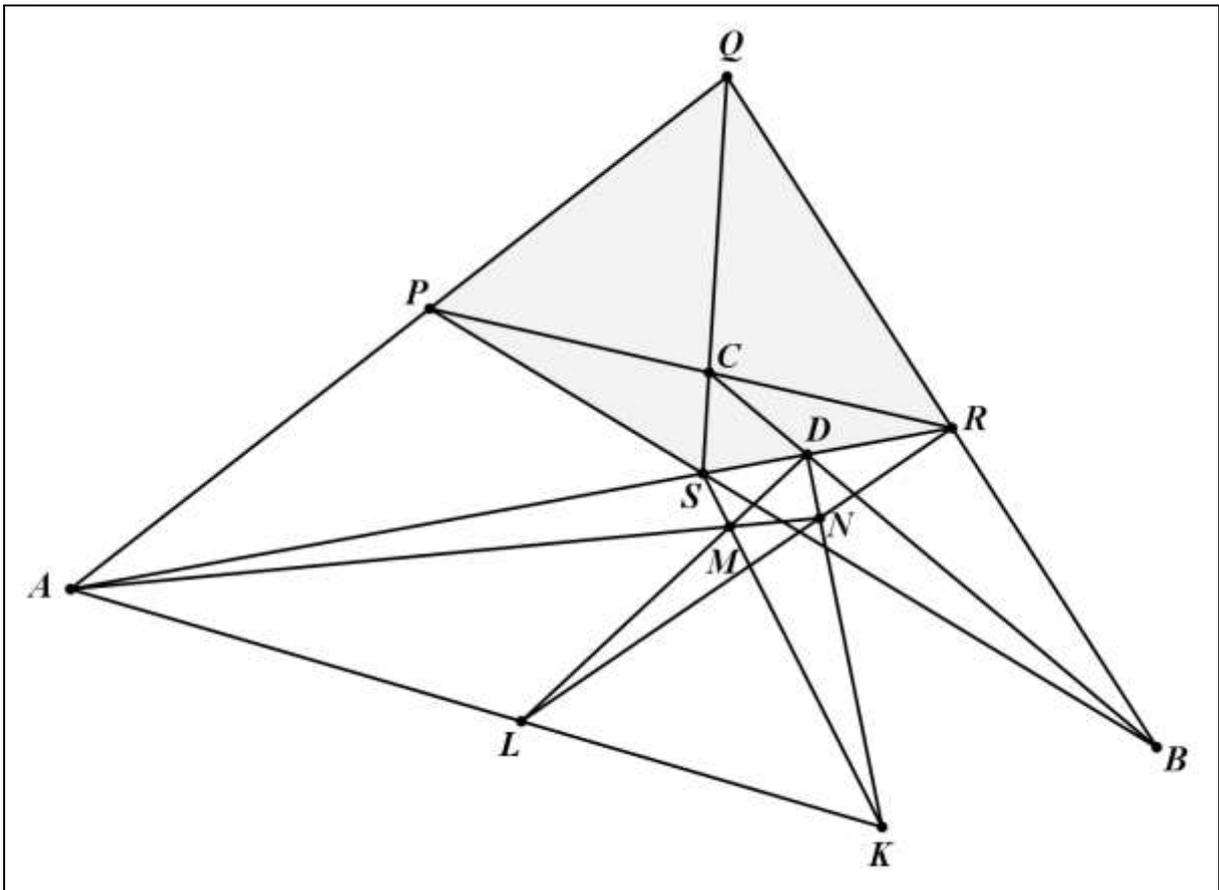
Solução.

Trace as retas \overline{AS} e \overline{BC} e marque o ponto de interseção dessas retas. Chamemos esse ponto de D . Temos que $QBPC$ é um quadrilátero tal que $R = \overline{QB} \cap \overline{PC}$, $S = \overline{QC} \cap \overline{BP}$, $A = \overline{QP} \cap \overline{RS}$ e $D = \overline{BC} \cap \overline{RS}$. Conclui-se então, pela Proposição 6, que $H(D, A; S, R)$. Como $R(D, A; S, R) = R(A, D; S, R)$ e são conhecidas as posições dos pontos D, A e S , podemos construir R da seguinte forma: escolha um ponto K não pertencente à reta \overline{AD} . Trace a reta \overline{AK} e marque um ponto L na reta \overline{AK} , com L diferente de A e K . Em seguida, construa as retas \overline{LD} e \overline{KS} e marque o ponto de interseção da reta \overline{LD} com a reta \overline{KS} . Chamemos esse ponto de M .

Trace as retas \overleftrightarrow{AM} e \overleftrightarrow{KD} . Marque o ponto N , interseção da reta \overleftrightarrow{AM} com a reta \overleftrightarrow{KD} e, em seguida, construa as retas \overleftrightarrow{AD} e \overleftrightarrow{LN} . O ponto de interseção das retas \overleftrightarrow{AD} e \overleftrightarrow{LN} é o ponto R .

Em seguida, construa o ponto P , dado pela interseção das retas \overleftrightarrow{BS} e \overleftrightarrow{RC} , e o ponto Q , dado pela interseção das retas \overleftrightarrow{AP} e \overleftrightarrow{SC} .

Figura 22 – Problema 2



Fonte: Elaboração própria.

3. Suponha que a circunferência inscrita no triângulo ABC tangencia os lados BC , AC e AB em D , E e F , respectivamente. Seja M um ponto do plano tal que a circunferência inscrita no triângulo BCM tangencia BC em D . Sejam P e Q , respectivamente, os pontos onde a circunferência inscrita em BCM tangencia os lados BM e CM . Prove que as retas \overleftrightarrow{EF} , \overleftrightarrow{PQ} e \overleftrightarrow{BC} são concorrentes.

Solução.

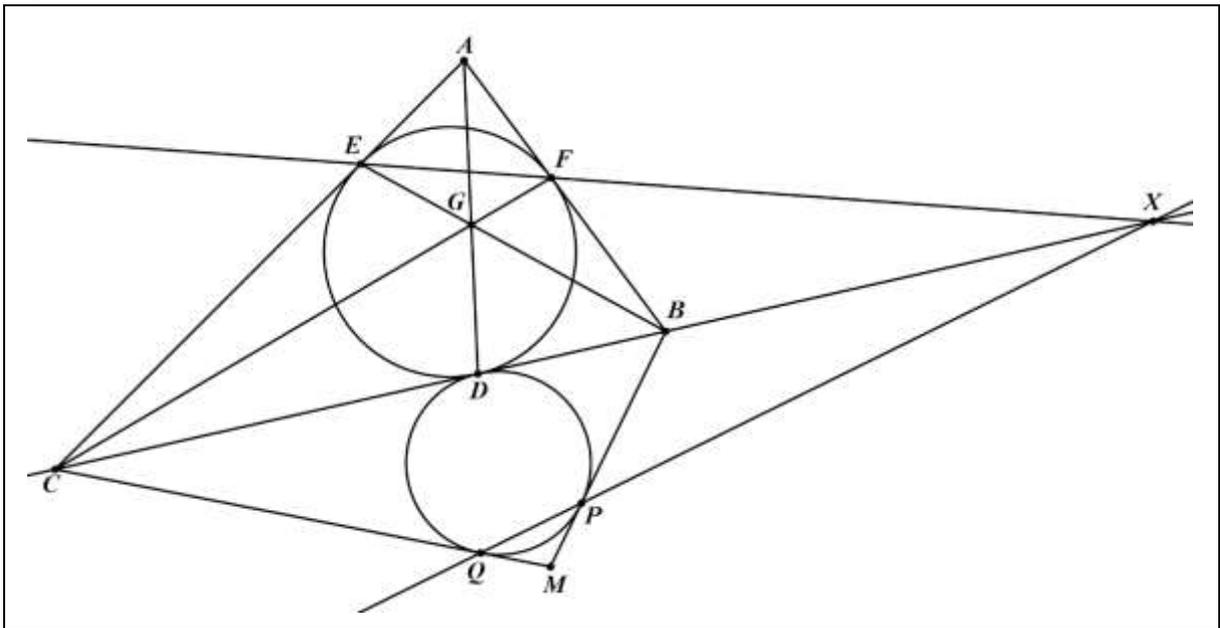
As semirretas \overleftrightarrow{AD} , \overleftrightarrow{BE} e \overleftrightarrow{CF} são as bissetrizes internas do triângulo ABC . Usando o teorema de Ceva, conclui-se que as semirretas \overleftrightarrow{AD} , \overleftrightarrow{BE} e \overleftrightarrow{CF} são concorrentes em um ponto G , chamado de ponto de Gergonne do triângulo ABC . Seja X o ponto de interseção das retas \overleftrightarrow{BC} e \overleftrightarrow{EF} . Tem-se

que $AFGE$ é um quadrilátero tal que $B = \overleftrightarrow{AF} \cap \overleftrightarrow{GE}$, $C = \overleftrightarrow{AE} \cap \overleftrightarrow{FG}$, $D = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{AG}$ e $X = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{EF}$. Portanto, pela Proposição 6, $H(B, C, D, X)$.

De modo análogo, tem-se $H(B, C; D, Y)$, onde $Y = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{PQ}$.

Logo, $H(B, C; D, X)$ e $H(B, C; D, Y)$, o que implica, $R(B, C; D, X) = R(B, C; D, Y)$, pelo Teorema 1, temos que $X = Y$, o que demonstra que as retas \overleftrightarrow{BC} , \overleftrightarrow{EF} e \overleftrightarrow{PQ} são concorrentes.

Figura 23 – Problema 3



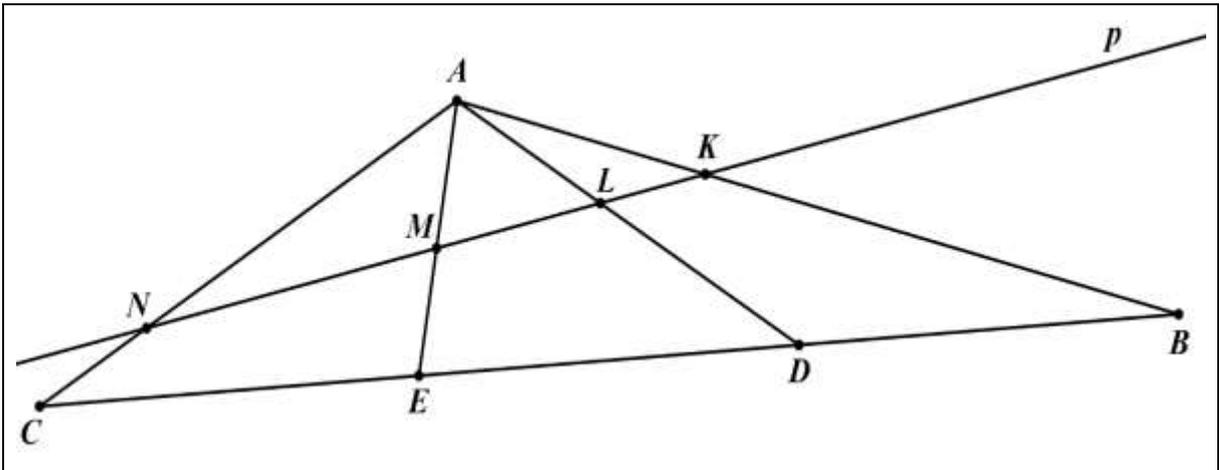
Fonte: Elaboração própria.

4. Dado um triângulo ABC , sejam D e E pontos no segmento BC tais que $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}$, sendo o ponto D diferente dos pontos B e C . A reta p intersecta os segmentos AB , AD , AE e AC nos pontos K , L , M e N , respectivamente. Prove que $\overline{KN} \geq 3\overline{LM}$ e verifique que a igualdade ocorre se, e somente se, $\overline{KL} = \overline{LM} = \overline{MN}$.

Solução.

Sejam $x = \overline{KL}$, $y = \overline{LM}$ e $z = \overline{MN}$. Temos que provar que $x + y + z \geq 3y$, ou equivalentemente, $x + z \geq 2y$. As quatro retas \overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{AD} , \overleftrightarrow{AE} e \overleftrightarrow{AC} são concorrente em A e, pelo enunciado do problema, $K = \overleftrightarrow{AB} \cap p$, $L = \overleftrightarrow{AD} \cap p$, $M = \overleftrightarrow{AE} \cap p$ e $N = \overleftrightarrow{AC} \cap p$, como mostra a figura abaixo.

Figura 24 – Problema 4



Fonte: Elaboração própria.

Logo, $KL MN \overset{A}{\wedge} BDEC$. Como a perspectividade preserva a razão cruzada, por isso, $R(K, L; M, N) = R(B, D; E, C)$, pelas Propriedade 5 e 4, respectivamente, temos

$$R(K, N; L, M) = R(B, C; D, E).$$

Logo,

$$\frac{\overline{KL} \overline{MN}}{\overline{LN} \overline{KM}} = \frac{\overline{BD} \overline{EC}}{\overline{DC} \overline{BE}},$$

e portanto,

$$\frac{X}{(Y+Z)} \frac{Z}{(X+Y)} = \frac{1}{2} \frac{1}{2'}$$

o que implica

$$4xz = (x+y)(y+z). \quad (1)$$

Suponha que $y > \frac{x+z}{2}$.

Tem-se

$$x + y > \frac{3x+z}{2} = \frac{2(x+x+x+z)}{4} \geq 2\sqrt[4]{xxxz}.$$

A última desigualdade ocorre porque a média aritmética de números reais positivos é maior ou igual a média geométrica desses números. Analogamente,

$$z + y > 2\sqrt[4]{xzzz}.$$

Assim,

$$(x+y)(y+z) > 2\sqrt[4]{xxxz} \cdot 2\sqrt[4]{xzzz} = 4xy,$$

o que contradiz (1).

Portanto, $y \leq \frac{x+z}{2}$, ou seja, $x + z \geq 2y$.

Analisemos, agora, o caso da igualdade.

Se $y = \frac{x+z}{2}$, então

$$\begin{aligned} 4xz &= (x + y)(y + z) \\ &= \frac{(3x + z)(x + 3z)}{4}, \end{aligned}$$

e portanto

$$16xz = (3x + z)(x + 3z),$$

o que implica

$$3(x - z)^2 = 0,$$

ou seja,

$$x = z.$$

Substituindo $x = z$ em $y = \frac{x+z}{2}$, temos $y = z$.

Portanto, a igualdade é verdadeira se, $\overline{KL} = \overline{LM} = \overline{MN}$.

Se $\overline{KL} = \overline{LM} = \overline{MN}$, então $\overline{KM} = \overline{KL} + \overline{LM} + \overline{MN}$.

Assim, temos $\overline{KM} = 3\overline{LM}$ se, e somente se, $\overline{KL} = \overline{LM} = \overline{MN}$.

5. O ponto M_1 pertence ao lado AB do quadrilátero $ABCD$. Os pontos M_2, M_3, \dots são definidos da seguinte forma: M_2 é a interseção da reta \overleftrightarrow{BC} com a reta $\overleftrightarrow{DM_1}$, M_3 é a interseção da reta \overleftrightarrow{CD} com a reta $\overleftrightarrow{AM_2}$, M_4 é a interseção da reta \overleftrightarrow{DA} com a reta $\overleftrightarrow{BM_3}$, e assim por diante. Prove que $M_{13} = M_1$

Solução.

Sejam $E = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$ e $F = \overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{BC}$. Considere a sequência.

$$\underline{\underline{D}} \quad \underline{\underline{A}} \quad \underline{\underline{B}} \quad \underline{\underline{C}}$$

$$ABEM_1 \wedge FBCM_2 \wedge DECM_3 \wedge DAFM_4 \wedge EABM_5.$$

De acordo com as condições dadas no problema, esta sequência de perspectividades tem que ser aplicada mais duas vezes para se chegar ao ponto M_{13} . Observe que a sequência de perspectividades é a projetividade $ABEM_1 \bar{\wedge} EABM_5$, que leva A em E , B em A e E em B . Claramente, se aplicamos a sequência de perspectividades três vezes, os pontos A, B e C serão deixados fixos, enquanto M_1 será projetado em M_{13} . De fato:

Na primeira sequência, obtemos

$$ABEM_1 \bar{\wedge} EABM_5. \quad (1)$$

Na segunda, obteremos

$$EABM_5 \bar{\wedge} BEAM_9. \quad (2)$$

E na terceira, obteremos

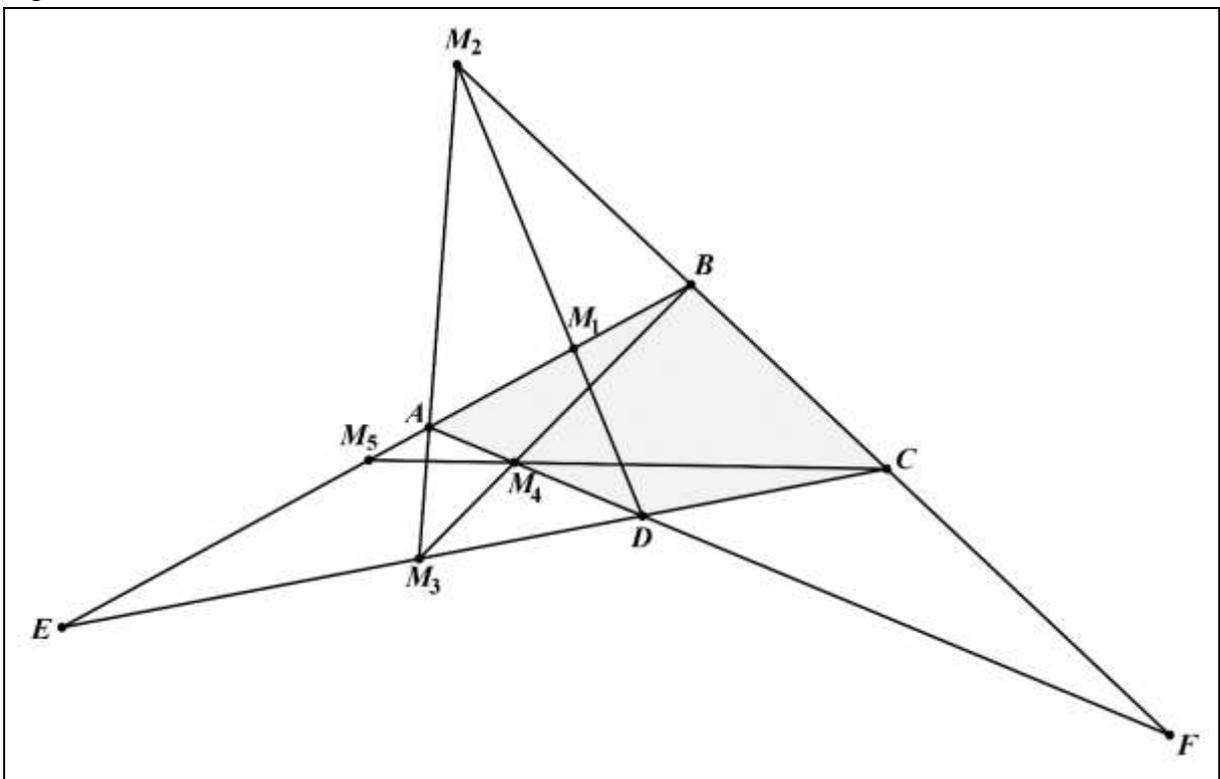
$$BEAM_9 \bar{\wedge} ABEM_{13}. \quad (3)$$

Por (1), (2) e (3), concluímos que $ABEM_1 \bar{\wedge} ABEM_{13}$.

Pelo Corolário 1, essa projetividade é a identidade.

Portanto, $M_{13} = M_1$.

Figura 25 – Problema 5



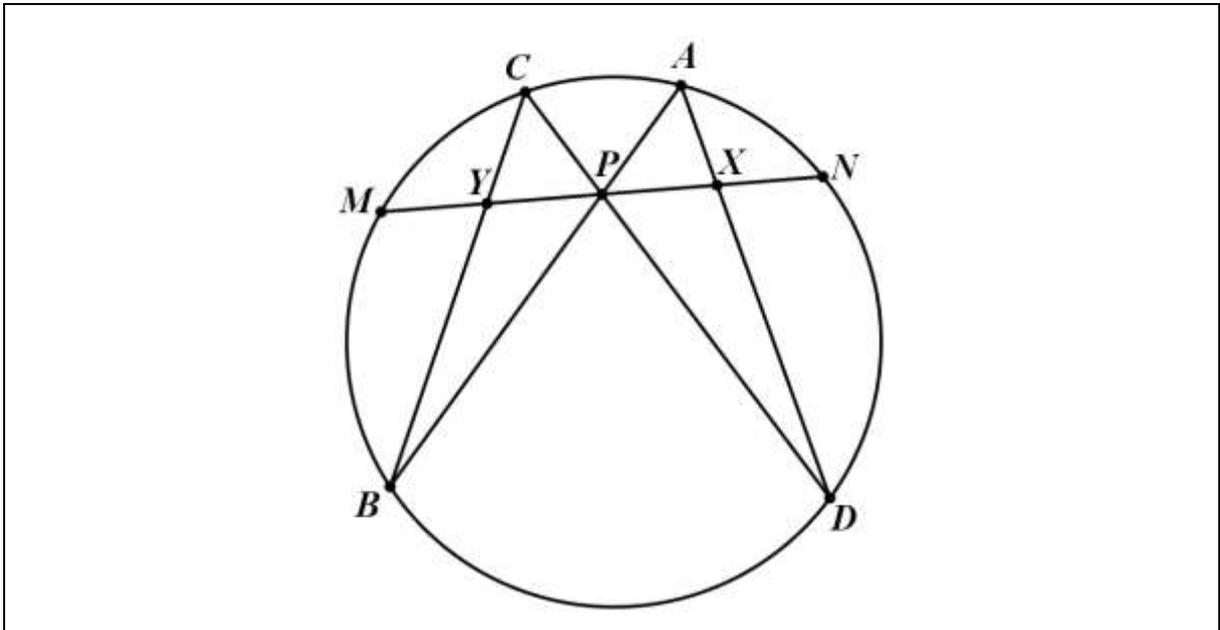
Fonte: Elaboração própria.

6. [Teorema da Borboleta] Os pontos M e N pertencem à circunferência $C(O, r)$. Seja P o ponto médio da corda MN e sejam AB e CD (A e C em um mesmo lado de MN) cordas arbitrárias da circunferência $C(O, r)$ passando por P . Prove que as cordas AD e BC intersectam MN em pontos equidistantes de P .

Solução.

Considere os pontos $Y = MN \cap BC$ e $X = MN \cap AD$, como mostra a figura abaixo.

Figura 26 – Problema 6



Fonte: Elaboração própria.

Seja Z o ponto simétrico de Y em relação ao ponto P . Temos que provar que $X = Z$.

Considere a sequência de perspectividades

$$MNXP \stackrel{D}{\wedge} MNAC \stackrel{B}{\wedge} MNPY.$$

Como a razão cruzada é preservada por perspectividade, temos $R(M, N; X, P) = R(M, N; P, Y)$. Pela Definição 1, por $\overline{MP} = \overline{NP}$, $\overline{YN} = \overline{ZM}$, $\overline{MY} = \overline{NZ}$ e pelos pares de segmentos com o mesmo comprimento terem sentidos opostos, temos

$$\begin{aligned} R(M, N; P, Y) &= \frac{\overline{MP}}{\overline{PN}} \frac{\overline{YN}}{\overline{MY}} \\ &= 1 \cdot \frac{\overline{ZM}}{\overline{NZ}} \\ &= \frac{\overline{NP}}{\overline{PM}} \frac{\overline{ZM}}{\overline{NZ}} \\ &= R(N, M; P, Z). \end{aligned}$$

Pela Propriedade 3, temos

$$R(N, M; P, Z) = R(M, N; Z, P).$$

Portanto, $R(M, N; X, P) = R(M, N; Z, P)$. Isto implica, pela Propriedade 5, $R(M, N; P, X) = R(M, N; P, Z)$. Pelo Teorema 1, temos $X = Z$.

7. Dado um triângulo ABC , sejam D e E pontos dos lados AB e AC , respectivamente, tais que $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC}$. Considere P um ponto no interior do triângulo ADE . Suponha que as retas \overrightarrow{BP} e \overrightarrow{CP} intersectam a reta \overrightarrow{DE} em F e G , respectivamente. As circunferências circunscritas aos triângulos PDG e PFE se intersectam em P e Q . Prove que os pontos A , P e Q são colineares.

Solução.

Sejam $J = DQ \cap BP$, $K = EQ \cap CP$ e $T = DE \cap PQ$. Primeiramente, vamos provar que $\overrightarrow{JK} \parallel \overrightarrow{DE}$.

Aplicando o teorema de Menelaus nos triângulos DTQ e ETQ em relação às retas \overrightarrow{PF} e \overrightarrow{PG} , respectivamente, obtemos

$$\frac{\overline{DJ} \overline{QP} \overline{TF}}{\overline{JQ} \overline{PT} \overline{FD}} = 1 \quad (1)$$

e

$$\frac{\overline{EK} \overline{QP} \overline{TG}}{\overline{KQ} \overline{PT} \overline{GE}} = 1. \quad (2)$$

Dividindo (1) por (2), tem-se

$$\frac{\overline{DJ} \overline{QP} \overline{TF} \overline{KQ} \overline{PT} \overline{GE}}{\overline{JQ} \overline{PT} \overline{FD} \overline{EK} \overline{QP} \overline{TG}} = \frac{\overline{DJ} \overline{TF} \overline{KQ} \overline{GE}}{\overline{JQ} \overline{FD} \overline{EK} \overline{TG}} = 1. \quad (3)$$

O ponto P está no eixo radical das circunferências circunscritas aos triângulos DTQ e ETQ , por isso,

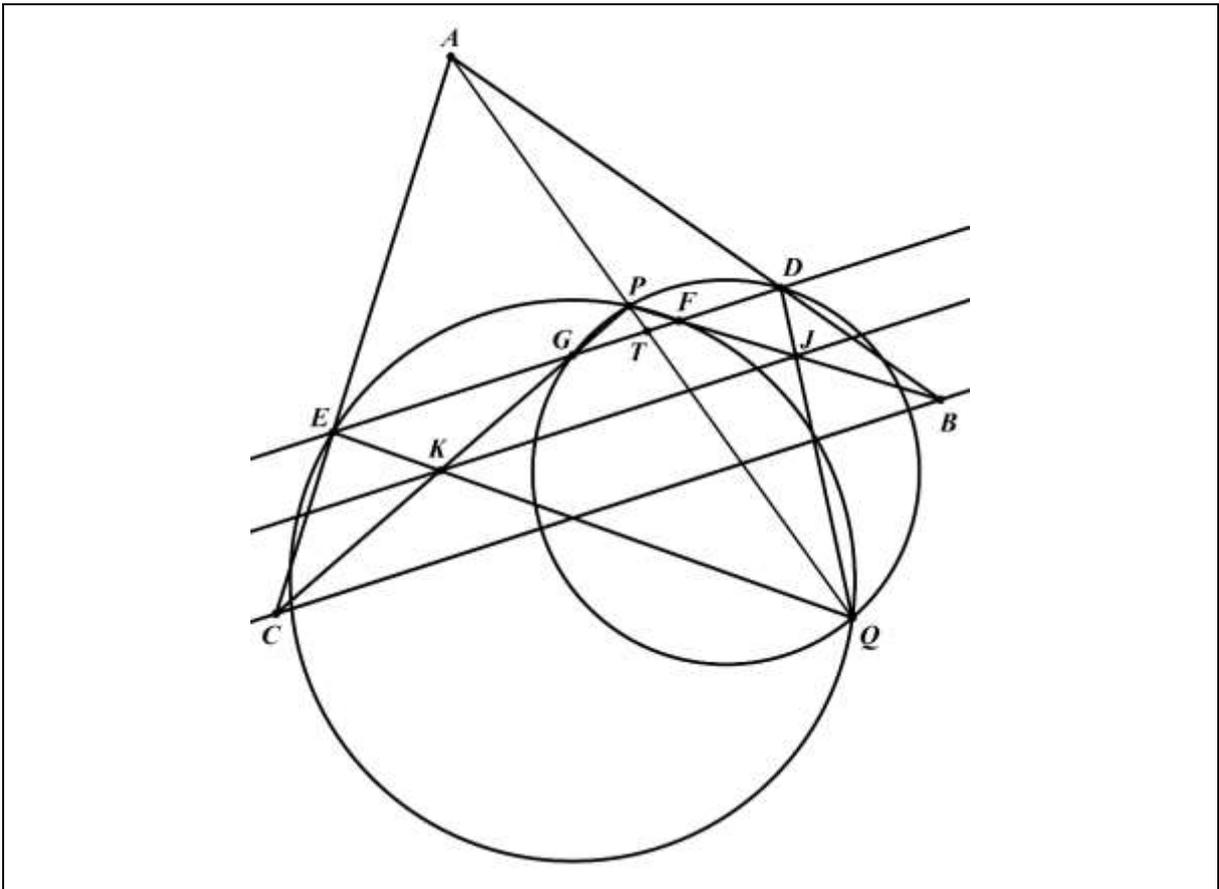
$$\frac{\overline{DT}}{\overline{TE}} = \frac{\overline{FT}}{\overline{TG}} \Rightarrow \frac{\overline{FT}}{\overline{TG}} = \frac{\overline{DT} - \overline{FT}}{\overline{TE} - \overline{TG}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{GE}} \Rightarrow \frac{\overline{FT} \overline{GE}}{\overline{FD} \overline{TG}} = 1. \quad (4)$$

Substituindo (4) em (3), temos

$$\frac{\overline{DJ} \overline{TF} \overline{KQ} \overline{GE}}{\overline{JQ} \overline{FD} \overline{EK} \overline{TG}} = \frac{\overline{DJ} \overline{KQ}}{\overline{JQ} \overline{EK}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{DJ}}{\overline{JQ}} = \frac{\overline{EK}}{\overline{KQ}}.$$

Logo, a reta \overrightarrow{JK} divide os lados do triângulo QDE em segmentos proporcionais, mostrando que os triângulos QDE e QJK são semelhantes. Portanto, as retas \overrightarrow{JK} e \overrightarrow{DE} são paralelas, como mostra a figura abaixo.

Figura 27 – Problema 7



Fonte: Elaboração própria.

Como as retas \overleftrightarrow{DE} , \overleftrightarrow{JK} e \overleftrightarrow{BC} são paralelas e contêm os vértices correspondentes dos triângulos DJB e EKC , temos que esses triângulos estão em perspectivas em relação a um ponto no infinito. Portanto, pelo Teorema de Desargues, os pontos $Q = \overleftrightarrow{DJ} \cap \overleftrightarrow{EK}$, $P = \overleftrightarrow{BJ} \cap \overleftrightarrow{CK}$ e $A = \overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{CE}$ são colineares.

8. Seja $A_1A_2A_3$ um triângulo não isósceles de incentro I . Seja C_i , $i = 1, 2, 3$, a menor circunferência através de I tangente a ambos A_iA_{i+1} e A_iA_{i+2} (os índices são tomados módulo 3). Seja B_i , $i = 1, 2, 3$, o outro ponto de interseção de C_{i+1} e C_{i+2} . Demonstre que os circuncentros dos triângulos A_1B_1I , A_2B_2I e A_3B_3I são colineares.

Solução.

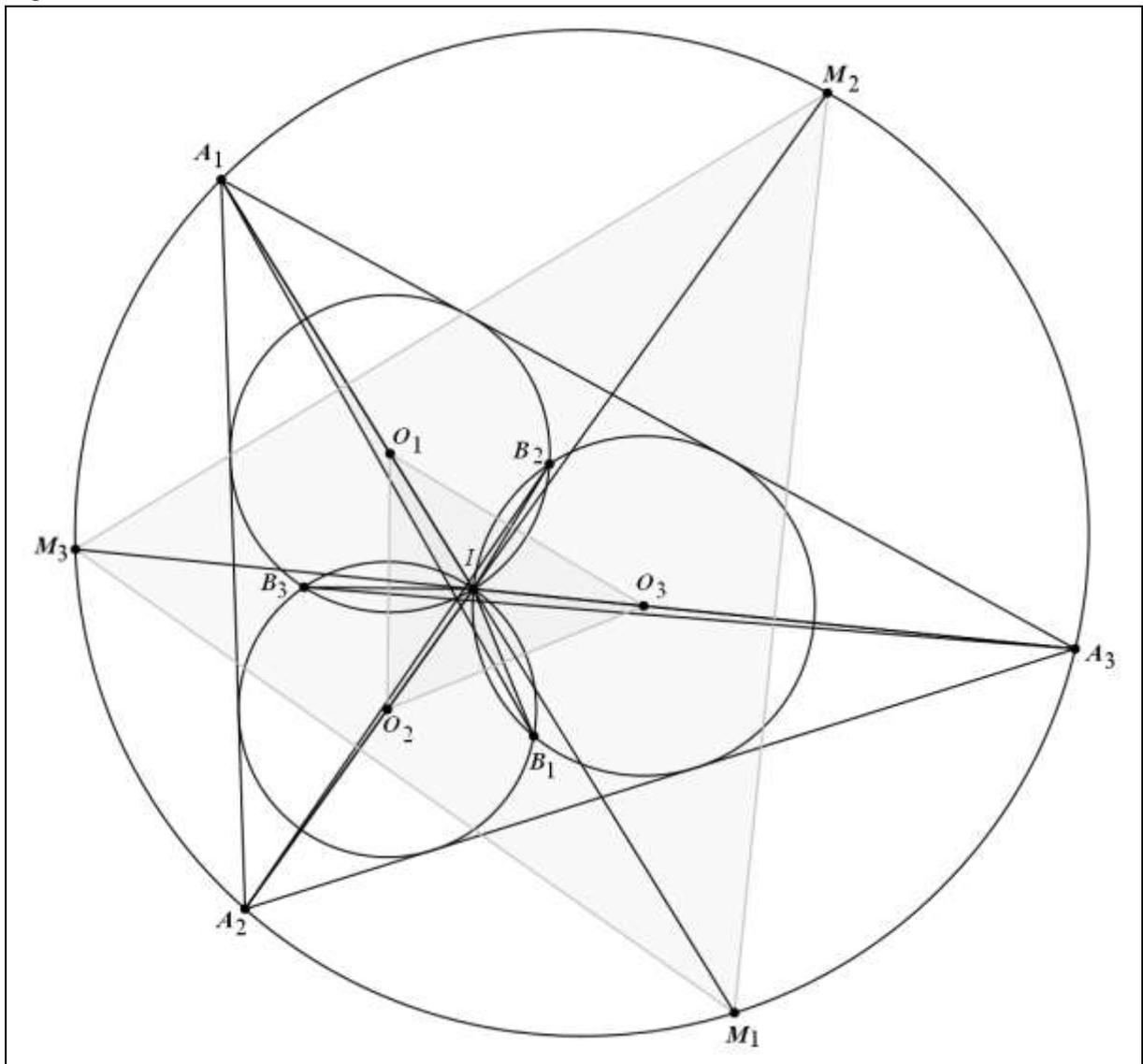
Para $i = 1, 2, 3$, denotamos por O_i o centro da circunferência C_i e por M_i o ponto médio do arco $\widehat{A_{i+1}A_{i+2}}$ que não contém o ponto A_i . Primeiramente, temos que a reta $\overleftrightarrow{IB_i}$ é o eixo radical das circunferências C_{i+1} e C_{i+2} . Como o eixo radical de duas circunferências é perpendicular à reta que contém os centros das duas circunferências, temos $\overleftrightarrow{IB_i} \perp \overleftrightarrow{O_{i+1}O_{i+2}}$. Como o segmento IB_i

é uma corda das circunferências C_{i+1} e C_{i+2} , então a reta $\overleftrightarrow{O_{i+1}O_{i+2}}$ é a mediatriz do segmento IB_i , e portanto, contém o circuncentro R_i do triângulo A_iB_iI .

Seja $\overleftrightarrow{A_iI}$ a bissetriz interna do triângulo $A_1A_2A_3$ e M_i o ponto médio do arco $A_{i+1}\widehat{A_{i+2}}$ que não contém o ponto A_i , temos que M_i pertence a bissetriz $\overleftrightarrow{A_iI}$, o que implica, $\overleftrightarrow{M_iA_i} = \overleftrightarrow{M_iI}$. Com isso, a reta $\overleftrightarrow{M_iM_{i+1}}$ é a mediatriz do segmento $A_{i+2}I$. Logo, R_{i+2} pertence à reta $\overleftrightarrow{M_iM_{i+1}}$.

Portanto, $R_i = \overleftrightarrow{O_{i+1}O_{i+2}} \cap \overleftrightarrow{M_{i+1}M_{i+2}}$. As retas $\overleftrightarrow{O_1M_1}$, $\overleftrightarrow{O_2M_2}$ e $\overleftrightarrow{O_3M_3}$ são concorrentes em I . Daí, os triângulos $O_1O_2O_3$ e $M_1M_2M_3$ estão em perspectiva em relação ao ponto I . Pelo Teorema de Desargues, os pontos de interseção das retas $\overleftrightarrow{O_{i+1}O_{i+2}}$ e $\overleftrightarrow{M_iM_{i+1}}$, ou seja, os R_i , são colineares.

Figura 28 – Problema 8



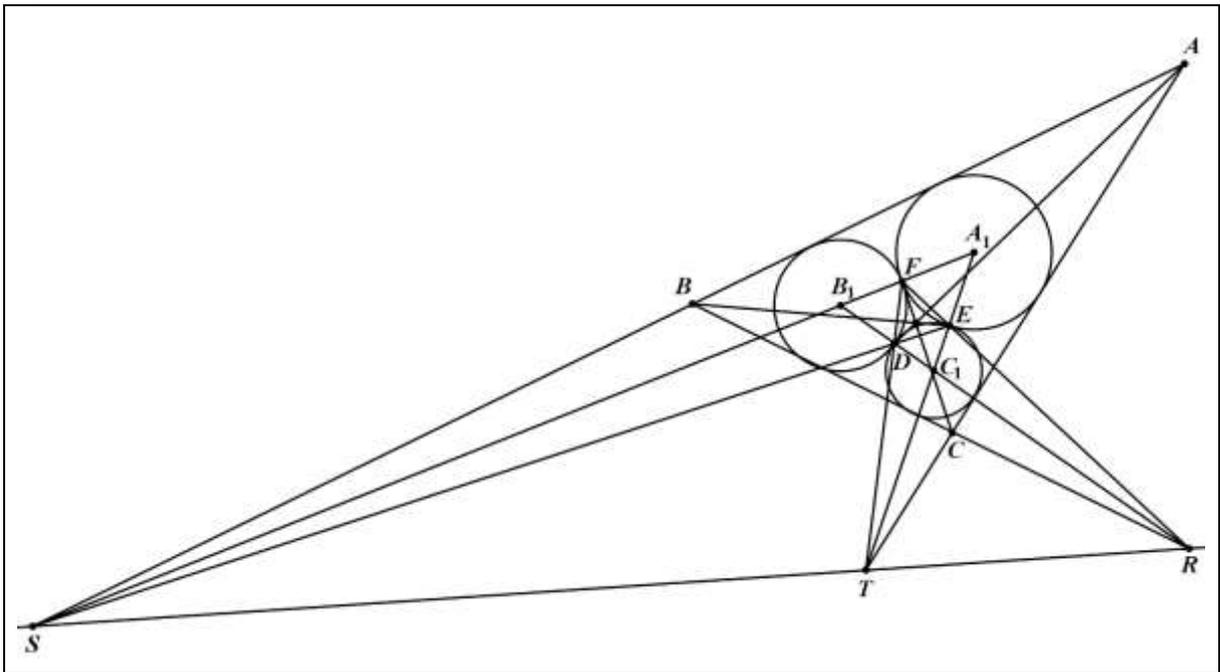
Fonte: Elaboração própria.

9. Sejam C_a , C_b e C_c circunferências no interior do triângulo ABC , que são tangentes (externamente) uma à outra, com, C_a tangente a AB e AC , C_b tangente a BA e BC e C_c tangente a CA e CB . Seja D o ponto comum de C_b e C_c , E o ponto comum de C_c e C_a , e F o ponto comum de C_a e C_b . Mostre que \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{BE} , \overrightarrow{CF} são concorrentes.

Solução.

Sejam A_1 , B_1 e C_1 os centros dos círculos C_a , C_b e C_c , respectivamente. Sejam $R = \overrightarrow{EF} \cap \overrightarrow{B_1C_1}$, $S = \overrightarrow{ED} \cap \overrightarrow{A_1B_1}$ e $T = \overrightarrow{FD} \cap \overrightarrow{A_1C_1}$. Com isso, R é o centro externo de similaridade dos círculos C_b e C_c , S é o centro externo de similaridade dos círculos C_a e C_b e T é o centro externo de similaridade dos círculos C_a e C_c . Então, pelo Teorema de Monge, os pontos R , S e T são colineares. Portanto, os triângulos ABC e DEF estão em perspectiva em relação à reta \overrightarrow{RS} . Pelo Teorema de Desargues, esses triângulos estão em perspectiva em relação a um ponto, ou seja, as retas \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{BE} , \overrightarrow{CF} são concorrentes.

Figura 29 – Problema 9



Fonte: Elaboração própria.

10. Seja Γ a circunferência circunscrita ao triângulo ABC . A circunferência Γ_1 é tangente a BC , CA e AB em D , E , F , respectivamente. Uma circunferência Γ_A é tangente a BC em D e a Γ em A_1 , de modo que A_1 e A estão em lados diferentes de BC . Defina-se B_1 e C_1 similarmente. Prove que as retas $\overrightarrow{DA_1}$, $\overrightarrow{EB_1}$ e $\overrightarrow{FC_1}$ são concorrentes.

Solução.

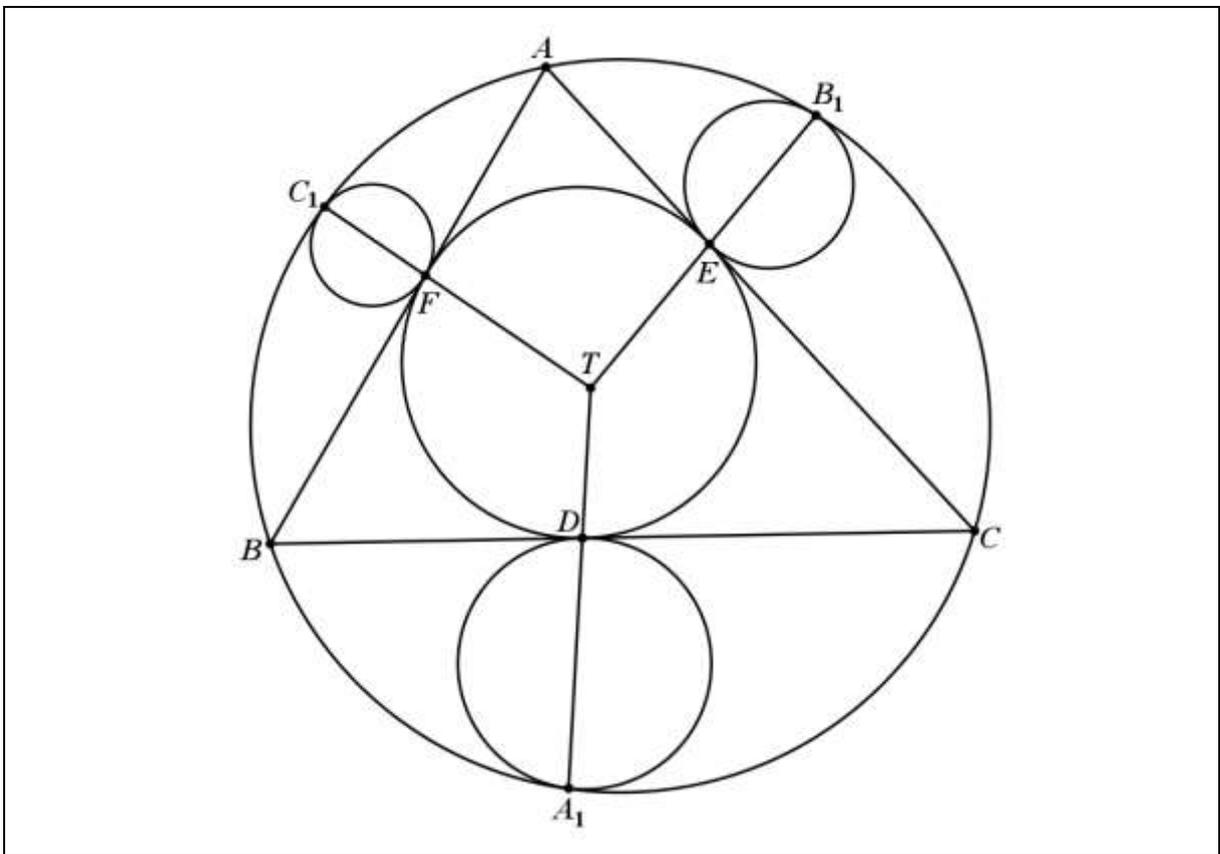
Seja T o centro interno de similaridade das circunferência Γ e Γ_1 . Aplicando o Teorema de Monge e D'Alembert nas circunferência Γ , Γ_1 e Γ_A , obtemos que os pontos T , A_1 e D são colineares.

O ponto E é o centro interno de similaridade das circunferência Γ_1 e Γ_B e B_1 é o centro externo de similaridade das circunferência Γ e Γ_B , pelo teorema de Monge e D'Alembert, os pontos E , B_1 e T são colineares.

Analogamente, temos que os pontos F , T e C_1 são colineares.

Portanto, as retas $\overrightarrow{DA_1}$, $\overrightarrow{EB_1}$ e $\overrightarrow{FC_1}$ são concorrentes no ponto T .

Figura 30 – Problema 10



Fonte: Elaboração própria.

11. O ponto P encontra-se no lado AB de um quadrilátero convexo $ABCD$. Seja Γ_C o círculo inscrito ao triângulo CPD , e I seu incentro. Suponha que Γ_C é tangente aos círculos inscritos aos triângulos APD e BPC nos pontos K e L , respectivamente. As diagonais AC e BD se encontram em E , e as retas AK e BL se encontram em F . Prove que os pontos E , I e F são colineares.

Solução.

Seja Γ o círculo tangente aos segmentos AB , BC e AD e seja Γ_A e Γ_B os círculos inscritos aos triângulos APD e BPC , respectivamente. Dados que A é o centro externo de similaridade dos círculos Γ_A e Γ , e K é o centro interno de similaridade dos círculos Γ_A e Γ_C , pelo teorema de Monge e D'Alembert, a reta \overleftrightarrow{AK} intersecta o segmento OI no centro interno de similaridade dos círculos Γ e Γ_C , onde O é o centro do círculo Γ . Da mesma forma, a reta \overleftrightarrow{BL} intersecta o segmento OI no centro interno de similaridade F dos círculos Γ e Γ_C . Agora basta provar que o ponto E pertence à reta \overleftrightarrow{OI} . Sejam $M = AP \cap \Gamma_A$, $R = AD \cap \Gamma_A$ e $N = CD \cap \Gamma_C$. Pelas propriedades das retas tangentes, temos

$$\begin{aligned} AP + CD &= AM + MP + CN + ND \\ &= AR + PK + CL + DK \\ &= AR + DR + PL + CL \\ &= PC + AD. \end{aligned}$$

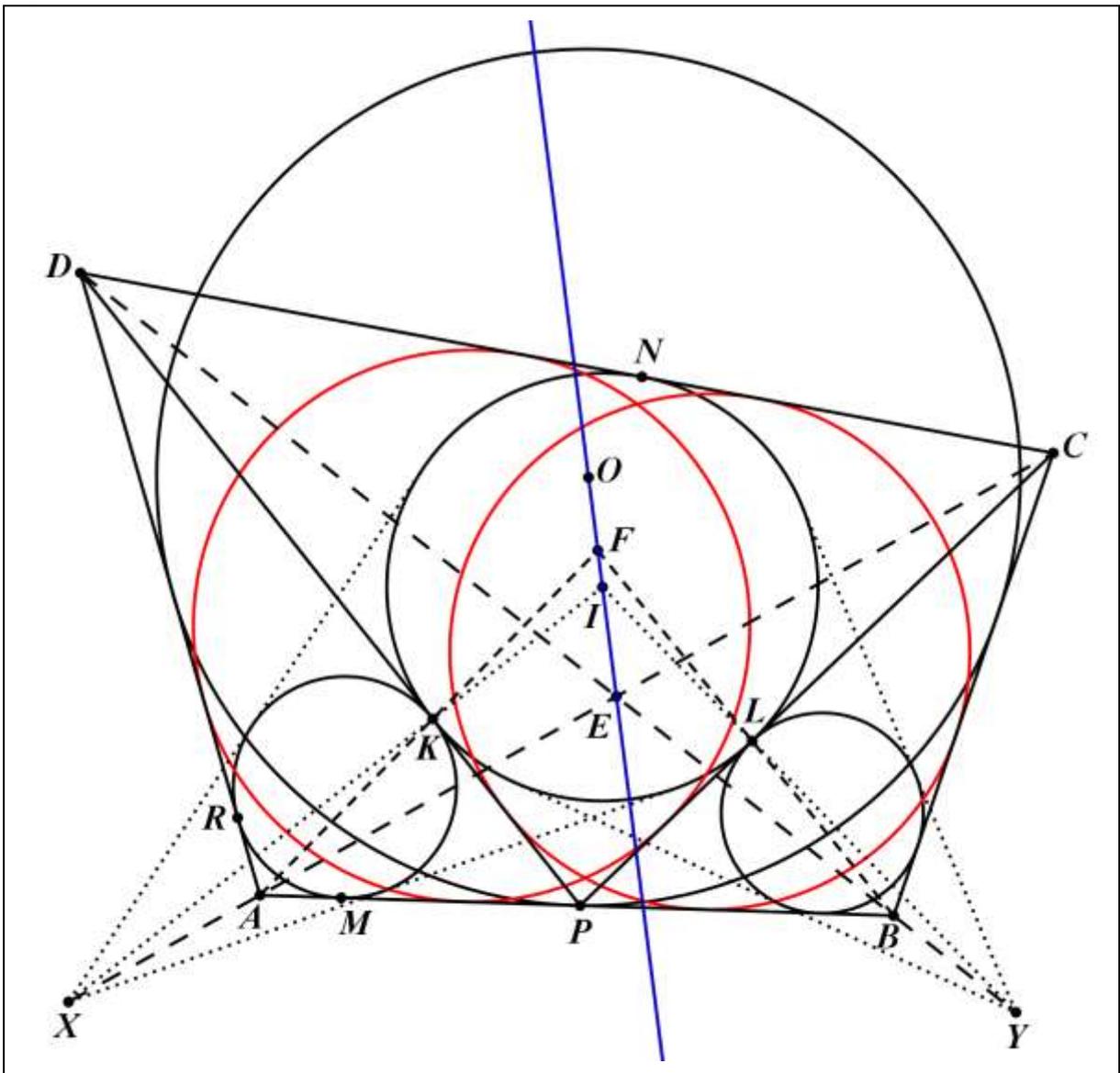
De maneira análoga,

$$BP + CD = PD + BC.$$

Por isso, existem círculos Γ_1 e Γ_2 inscritos nos quadriláteros $APCD$ e $BCPD$, respectivamente. Seja X o centro externo de similaridade dos círculos Γ_A e Γ_C e Y o centro externo de similaridade dos círculos Γ_B e Γ_C . Pelo Teorema de Monge aplicado aos círculos Γ_A , Γ_C e Γ_1 , segue que os pontos A , C e X são colineares. Invocando o Teorema de Monge com os círculos Γ_B , Γ_C e Γ_2 , temos que os pontos B , D e Y são colineares.

Seja E_1 o centro externo de similaridade dos círculos Γ e Γ_C . Pelo Teorema Monge aplicado aos círculos Γ e Γ_A e Γ_C , segue que os pontos A , X e E_1 são colineares. Então, $E_1 \in AC$ e $E_1 \in \overleftrightarrow{OI}$. Similarmente, $E_1 \in BD$ e $E_1 \in \overleftrightarrow{OI}$. Portanto, $E_1 = E$ e E , I e F são colineares.

Figura 31 – Problema 11



Fonte: Elaboração própria.

12. Dado um triângulo ABC e um ponto T , sejam P e Q os pés das perpendiculares de T em relação às retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{AC} , respectivamente. Sejam R e S os pés das perpendiculares de A em relação às retas \overleftrightarrow{TC} e \overleftrightarrow{TB} , respectivamente. Prove que a interseção das retas \overleftrightarrow{PR} e \overleftrightarrow{QS} pertence à reta \overleftrightarrow{BC} .

Solução.

Temos que provar que o ponto $X = \overleftrightarrow{PR} \cap \overleftrightarrow{QS}$ pertence à reta \overleftrightarrow{BC} .

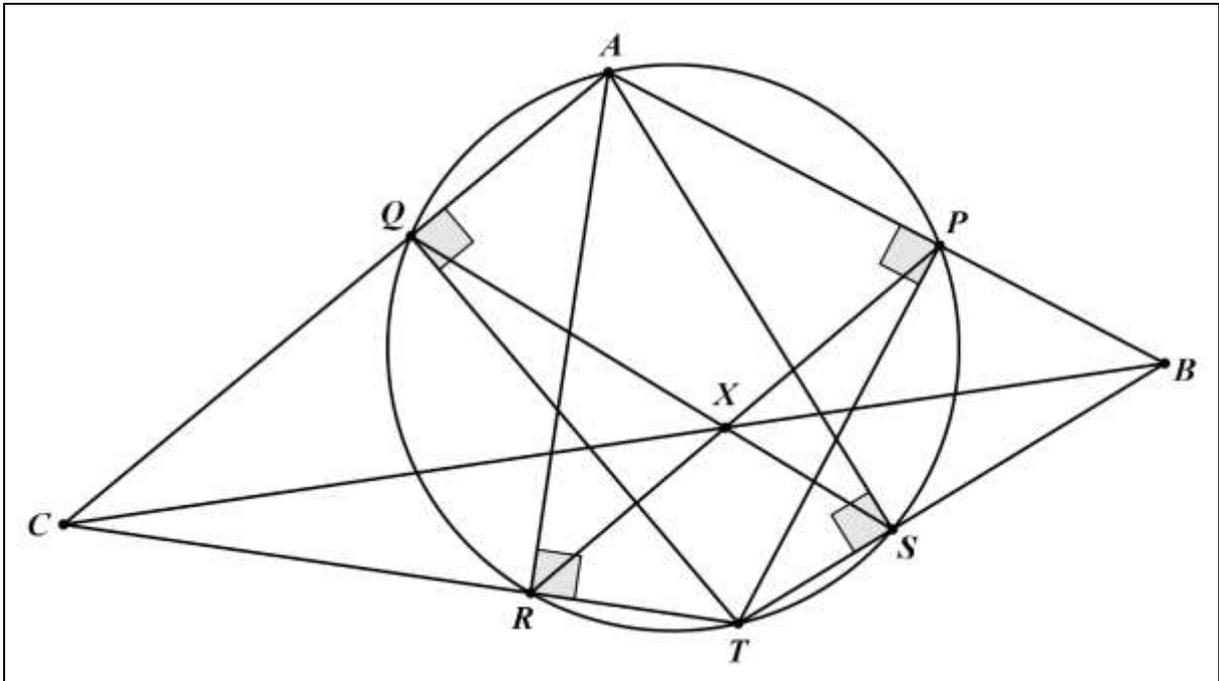
Pelo enunciado do problema, temos

$$\angle APT = \angle AST = \angle AQT = \angle ART = 90^\circ.$$

Logo, a circunferência que possui diâmetro AT , contém os pontos P, S, Q e R .

Portanto, aplicando o Teorema de Pascal, concluímos que os pontos $B = \overleftrightarrow{AP} \cap \overleftrightarrow{ST}$, $C = \overleftrightarrow{AQ} \cap \overleftrightarrow{RT}$ e $X = \overleftrightarrow{PR} \cap \overleftrightarrow{QS}$ são colineares.

Figura 32 – Problema 12



Fonte: Elaboração própria.

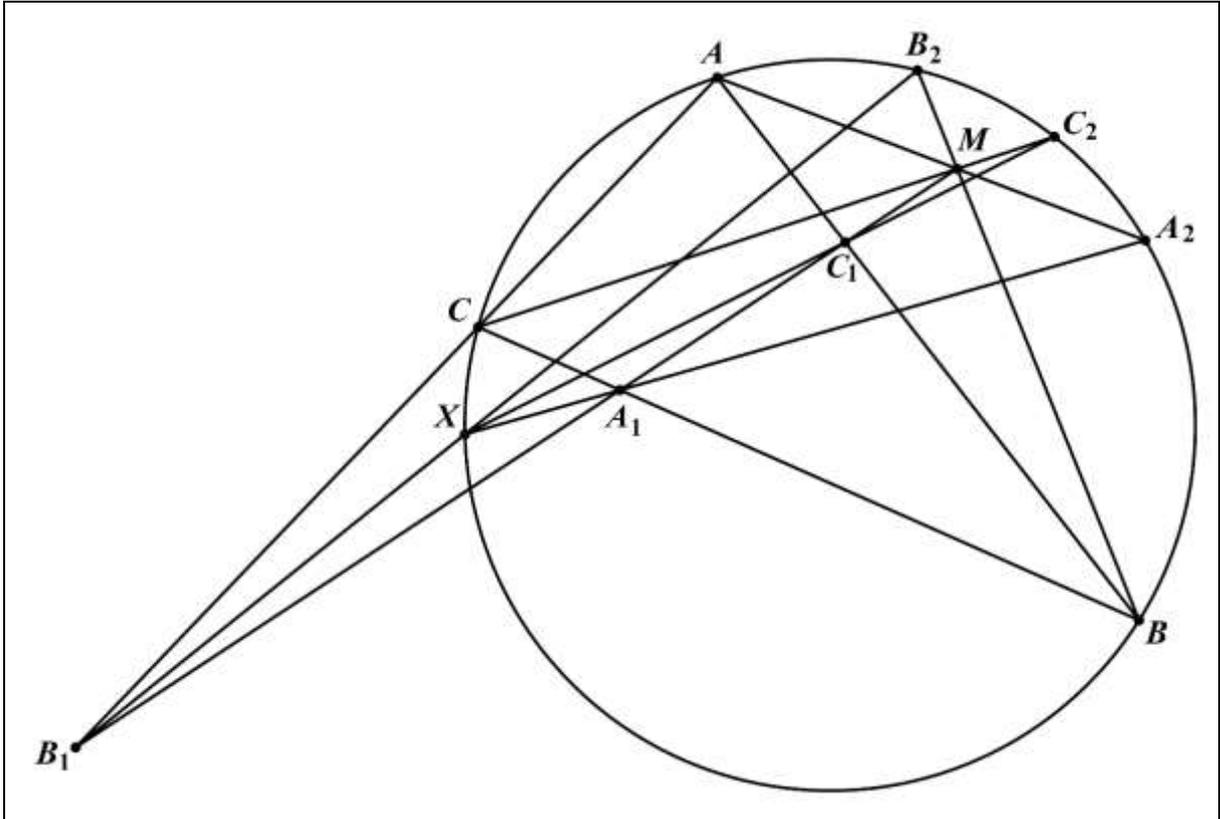
13. São dados um triângulo ABC e um ponto M . Uma reta que passa por M intersecta as retas \overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{BC} , e \overleftrightarrow{AC} em C_1 , A_1 e B_1 , respectivamente. As retas \overleftrightarrow{AM} , \overleftrightarrow{BM} e \overleftrightarrow{CM} intersectam a circunferência circunscrita ao triângulo ABC , respectivamente, em A_2 , B_2 e C_2 . Prove que as retas $\overleftrightarrow{A_1A_2}$, $\overleftrightarrow{B_1B_2}$ e $\overleftrightarrow{C_1C_2}$ se intersectam em um ponto que pertence à circunferência circunscrita ao triângulo ABC .

Solução.

Suponha que a reta $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ intersecta a circunferência circunscrita ao triângulo ABC em A_2 e X . Seja $Y = \overleftrightarrow{XB_2} \cap \overleftrightarrow{AC}$. Com isso, os pontos A , B , C , A_2 , B_2 e X pertencem à circunferência circunscrita ao triângulo ABC . Aplicando o Teorema de Pascal a esses pontos, obtemos que os pontos $M = \overleftrightarrow{AA_2} \cap \overleftrightarrow{BB_2}$, $Y = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{XB_2}$ e $A_1 = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{XA_2}$ são colineares. Daí, o ponto Y pertence à reta $\overleftrightarrow{A_1M}$. De acordo com a definição do ponto Y , este pertence à reta \overleftrightarrow{AC} . Portanto, $Y = \overleftrightarrow{A_1M} \cap \overleftrightarrow{AC} = B_1$. Logo, $B_1 = \overleftrightarrow{XB_2} \cap \overleftrightarrow{AC}$, o que mostra que os pontos X , B_1 e B_2 são colineares.

Analogamente, mostramos que os pontos X , C_1 e C_2 são colineares. Portanto, as retas $\overleftrightarrow{A_1A_2}$, $\overleftrightarrow{B_1B_2}$ e $\overleftrightarrow{C_1C_2}$ se intersectam no ponto X , o qual pertence ao círculo circunscrito ao triângulo ABC .

Figura 33 – Problema 13



Fonte: Elaboração própria.

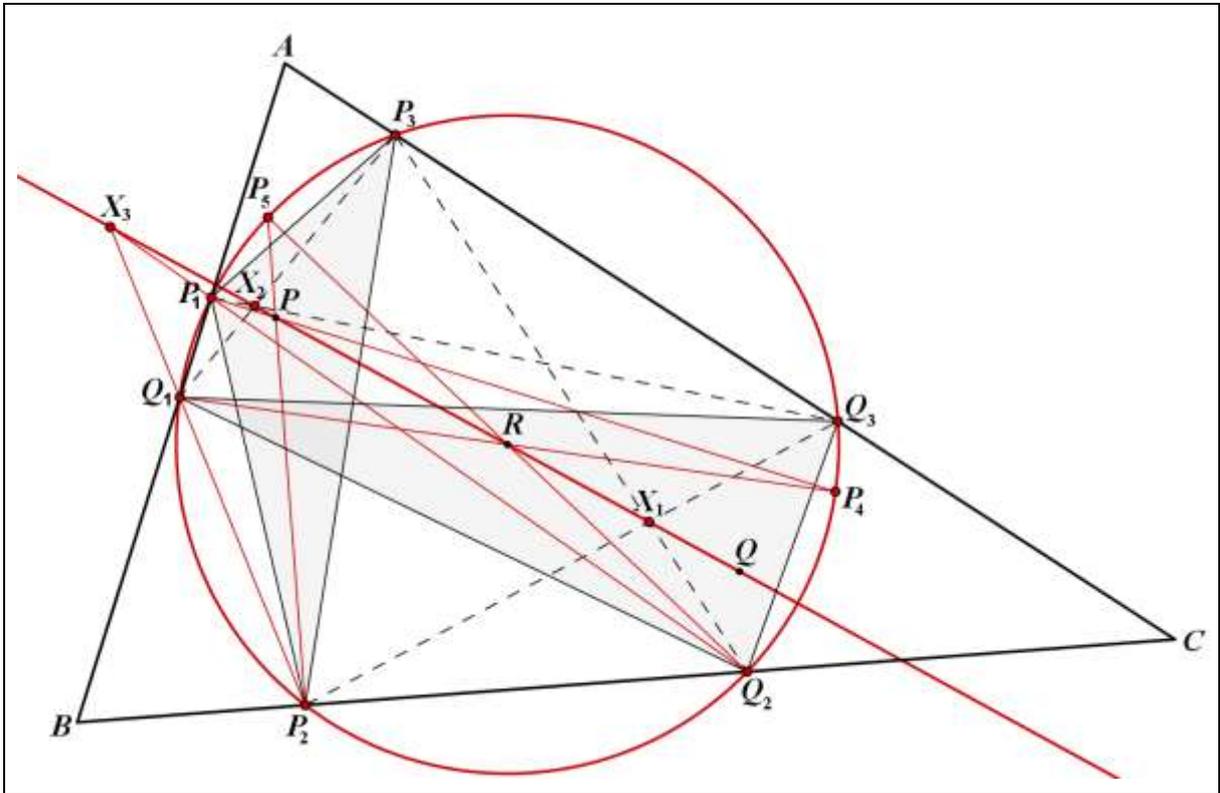
14. Sejam P e Q pontos conjugados isogonais e suponha que os triângulos $P_1P_2P_3$ e $Q_1Q_2Q_3$ são os seus triângulos pedais. Sejam $X_1 = \overleftrightarrow{P_2Q_3} \cap \overleftrightarrow{P_3Q_2}$, $X_2 = \overleftrightarrow{P_1Q_3} \cap \overleftrightarrow{P_3Q_1}$ e $X_3 = \overleftrightarrow{P_1Q_2} \cap \overleftrightarrow{P_2Q_1}$. Prove que os pontos X_1 , X_2 e X_3 pertencem à reta \overleftrightarrow{PQ} .

Solução.

Pelas propriedades dos triângulos pedais, temos que os triângulos pedais em relação aos pontos conjugados isogonais P e Q possuem o mesmo circuncírculo, chamado de círculo pedal, e o centro desse círculo é o ponto médio dos pontos P e Q . Denotamos por R esse ponto médio. Sejam $P_4 = \overleftrightarrow{PP_1} \cap \overleftrightarrow{Q_1R}$ e $P_5 = \overleftrightarrow{PP_2} \cap \overleftrightarrow{Q_2R}$. Os pontos P_4 e P_5 pertencem ao círculo pedal, pois as retas $\overleftrightarrow{Q_1R}$ e $\overleftrightarrow{Q_2R}$ passam pelo centro R , $\overleftrightarrow{P_1P} \perp \overleftrightarrow{Q_1P_1}$ e $\overleftrightarrow{P_2P} \perp \overleftrightarrow{Q_2P_2}$. Usando o teorema de Pascal nos pontos P_2, P_4, Q_2, P_1, P_5 e Q_1 , obtemos que os pontos $P = \overleftrightarrow{P_2P_5} \cap \overleftrightarrow{P_4P_1}$, $X_3 = \overleftrightarrow{P_1Q_2} \cap \overleftrightarrow{P_2Q_1}$ e $R = \overleftrightarrow{P_4Q_1} \cap \overleftrightarrow{Q_2P_5}$ são colineares, o que implica que $X_3 \in \overleftrightarrow{PQ}$. Analogamente,

os pontos X_1 e X_2 pertencem à reta \overleftrightarrow{PQ} . Portanto, os pontos X_1 , X_2 e X_3 pertencem à reta \overleftrightarrow{PQ} .

Figura 34 – Problema 14



Fonte: Elaboração própria.

15. Se os pontos A e M são conjugados com respeito à circunferência C , então a circunferência com diâmetro AM é ortogonal à circunferência C .

Solução.

Uma circunferência Γ é invariante pela inversão em relação a uma circunferência C se, e somente se, $\Gamma = C$ ou $\Gamma \perp C$.

Primeiramente, vamos mostrar que a circunferência C_1 , com diâmetro AM , é invariante pela inversão em relação à circunferência C .

Uma vez que o ponto M pertence ao polar do ponto A em relação à circunferência C , temos $\angle MA^*A = 90^\circ$, onde A^* é o inverso do ponto A em relação à circunferência C .

Portanto, $A^* \in C_1$. Analogamente, $M^* \in C_1$, onde M^* é o inverso do ponto M em relação à circunferência C .

Seja C_1^* a imagem de C_1 pela inversão em relação à circunferência C . Como $A \in C_1$, temos que $A^* \in C_1^*$. Como A é o inverso de A^* e $A^* \in C_1$, obtemos que $A \in C_1^*$.

Da mesma forma, obtemos $M \in C_1^*$ e $M^* \in C_1$.

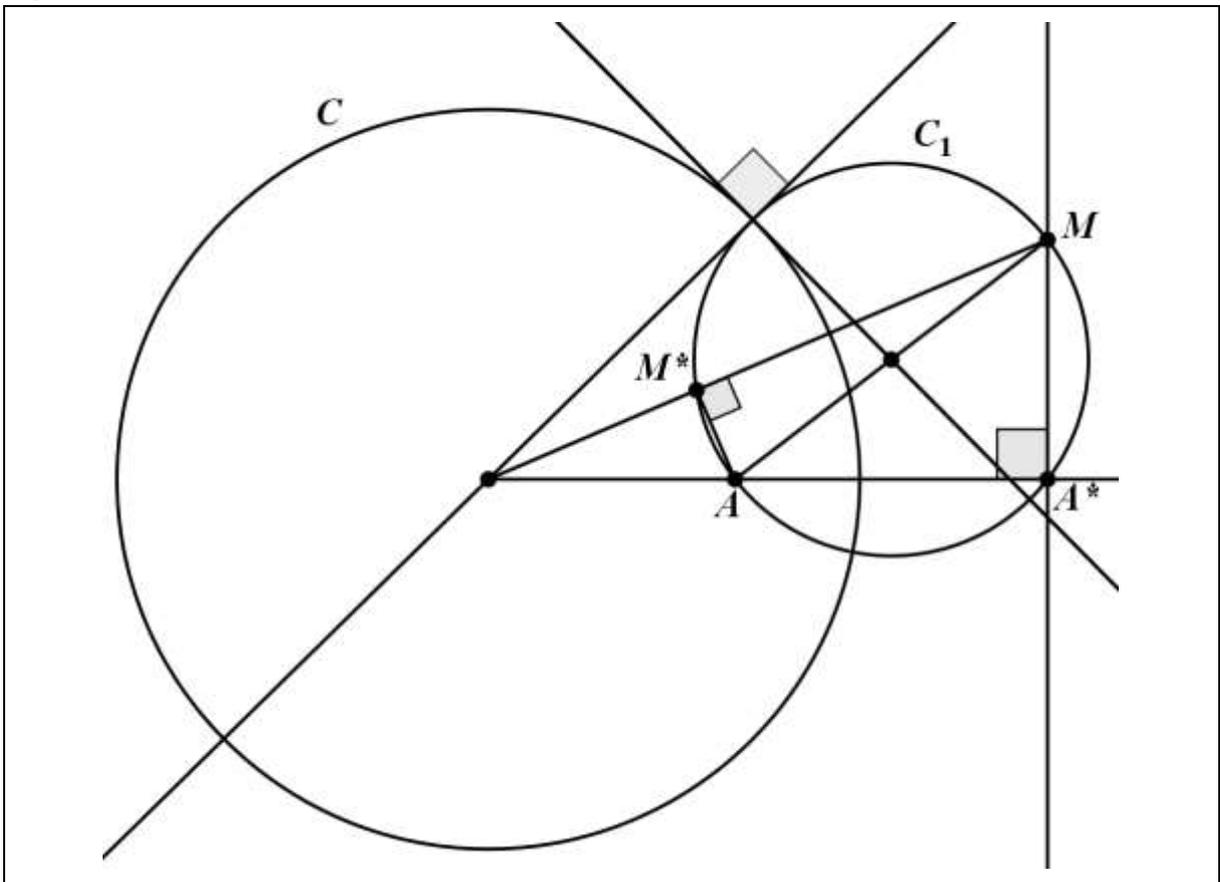
Observe que as circunferências C_1 e C_1^* têm os quatro pontos A , A^* , M e M^* em comum.

Daí, $C_1 = C_1^*$ e, de acordo com a afirmação mencionada inicialmente, concluímos $C_1 = C$ ou $C_1 \perp C$.

O caso em que $C_1 = C$ não pode ocorrer, pois a circunferência C_1 tem diâmetro AM e este não pode ser o diâmetro de C , visto que A e M são conjugados.

Assim, $C_1 \perp C$.

Figura 35 – Problema 15



Fonte: Elaboração própria.

16. O ponto conjugado isogonal do baricentro é chamado de ponto Lemoine. As retas conectadas aos vértices com o ponto de Lemoine são chamadas de simedianas. Suponha que as retas tangentes nos pontos B e C em relação a circunferência circunscrita ao triângulo ABC se intersectam no ponto P . Prove que \overrightarrow{AP} é uma simediana do triângulo ABC .

Solução.

Seja Q o ponto de interseção das retas \overrightarrow{AP} e \overrightarrow{BC} , e seja Q_1 um ponto da reta \overrightarrow{BC} tal que a reta $\overrightarrow{AQ_1}$ seja isogonal à reta \overrightarrow{AQ} no triângulo ABC . Com isso,

$$\angle Q_1AC = \angle BAQ \text{ e } \angle BAQ_1 = \angle QAC. \quad (1)$$

Para um ponto arbitrário X do segmento BC , a lei dos senos aplicada aos triângulos BAX e XAC , nos dá

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} &= \frac{\overline{BX} \overline{AX}}{\overline{AX} \overline{XC}} \\ &= \frac{\text{sen}(\angle BAX) \text{sen}(\angle ACX)}{\text{sen}(\angle ABX) \text{sen}(\angle XAC)} \\ &= \frac{\text{sen}(\angle ACX) \text{sen}(\angle BAX)}{\text{sen}(\angle ABX) \text{sen}(\angle XAC)} \\ &= \frac{\overline{AB} \text{sen}(\angle BAX)}{\overline{AC} \text{sen}(\angle XAC)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Fazendo $X = Q$ e $X = Q_1$, respectivamente, e substituindo em (2), obtemos:

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{AB} \text{sen}(\angle BAQ)}{\overline{AC} \text{sen}(\angle QAC)} \quad (3)$$

e

$$\frac{\overline{BQ_1}}{\overline{Q_1C}} = \frac{\overline{AB} \text{sen}(\angle BAQ_1)}{\overline{AC} \text{sen}(\angle Q_1AC)}. \quad (4)$$

Multiplicando (3) por (4) e usando (1), obtemos

$$\frac{\overline{BQ} \overline{BQ_1}}{\overline{QC} \overline{Q_1C}} = \frac{\overline{AB} \text{sen}(\angle BAQ) \overline{AB} \text{sen}(\angle BAQ_1)}{\overline{AC} \text{sen}(\angle QAC) \overline{AC} \text{sen}(\angle Q_1AC)} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

Portanto, se provarmos que $\frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$, teremos imediatamente $\frac{\overline{BQ_1}}{\overline{Q_1C}} = 1$, ou seja, que Q_1 é o ponto médio do segmento BC . Teremos então que a reta \overleftrightarrow{AQ} é a conjugada isogonal da mediana, o que implica que a reta \overleftrightarrow{AP} é uma simediana do triângulo ABC .

Como o ponto P pertence às polares dos pontos B e C , temos pelo, Teorema 3, que os pontos B e C pertencem à polar do ponto P . Assim, a polar do ponto P é a reta \overleftrightarrow{BC} . Seja o ponto D a interseção da reta \overleftrightarrow{BC} com a reta tangente à circunferência circunscrita ao triângulo ABC no ponto A . O ponto D pertence às polares dos pontos A e P . Assim, a reta \overleftrightarrow{AP} é a polar do ponto D .

Portanto, pelo Teorema 4, $H(B, C; D, Q)$.

Vamos agora calcular a razão $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$. Uma vez que os triângulos ABD e CAD são semelhantes, temos

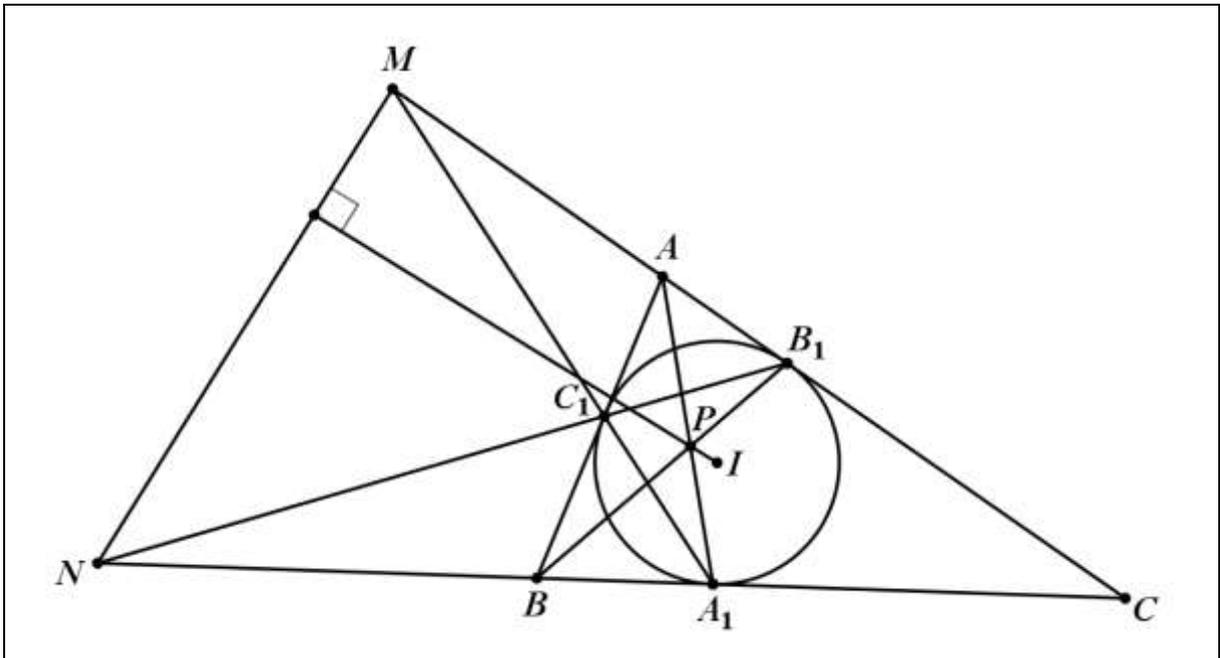
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}},$$

Pelo Teorema 3, B_1 e C_1 pertencem à polar do ponto A em relação ao círculo inscrito ao triângulo ABC . Daí, a reta $\overleftrightarrow{B_1C_1}$ é a polar do ponto A em relação ao círculo inscrito ao triângulo ABC .

O ponto N pertence às retas \overleftrightarrow{BC} e $\overleftrightarrow{B_1C_1}$, que são as polares dos pontos A_1 e A , respectivamente, em relação ao círculo inscrito ao triângulo ABC . Pelo Teorema 3, os pontos A_1 e A pertencem à polar do ponto N . Portanto, a reta $\overleftrightarrow{AA_1}$ é a polar de N . Analogamente, a reta $\overleftrightarrow{BB_1}$ é a polar do ponto M . Sendo $P = \overleftrightarrow{AA_1} \cap \overleftrightarrow{BB_1}$. Pelo Teorema 3, os pontos N e M pertencem à polar de P . Assim, a reta \overleftrightarrow{MN} é a polar de P .

Portanto, pela Definição 9, a reta \overleftrightarrow{MN} é perpendicular à reta \overleftrightarrow{IP} .

Figura 37 – Problema 17



Fonte: Elaboração própria.

18. Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscrito a uma circunferência. Sejam M, N, P e Q os pontos de tangência da circunferência com os lados AB, BC, CD e DA , respectivamente. Prove que as retas \overleftrightarrow{AC} , \overleftrightarrow{BD} , \overleftrightarrow{MP} e \overleftrightarrow{NQ} se intersectam em um ponto.

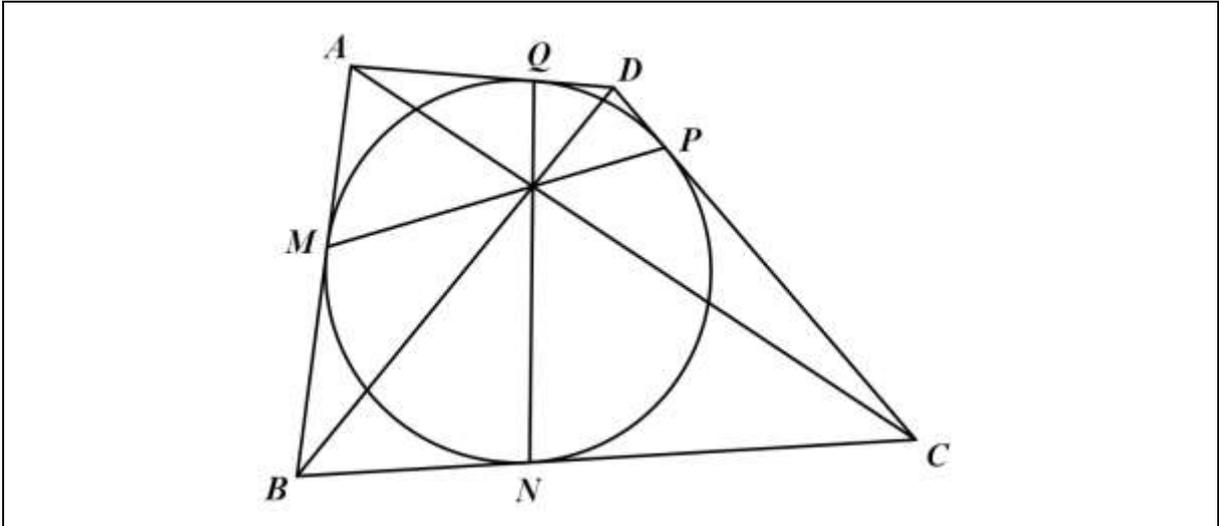
Solução.

Aplicando o Teorema de Brianchon no hexágono degenerado $AMBCPD$, concluímos que as retas \overleftrightarrow{AC} , \overleftrightarrow{MP} e \overleftrightarrow{BD} são concorrentes. Portanto, a reta \overleftrightarrow{MP} contém o ponto de interseção das retas \overleftrightarrow{AC} e \overleftrightarrow{BD} .

Analogamente, aplicando o Teorema de Brianchon no hexágono degenerado $ABNC DQ$, temos que a reta \overleftrightarrow{NQ} contém o ponto de interseção das retas \overleftrightarrow{AC} e \overleftrightarrow{BD} .

Assim, as retas \overleftrightarrow{AC} , \overleftrightarrow{BD} , \overleftrightarrow{MP} e \overleftrightarrow{NQ} são concorrentes.

Figura 38 – Problema 18



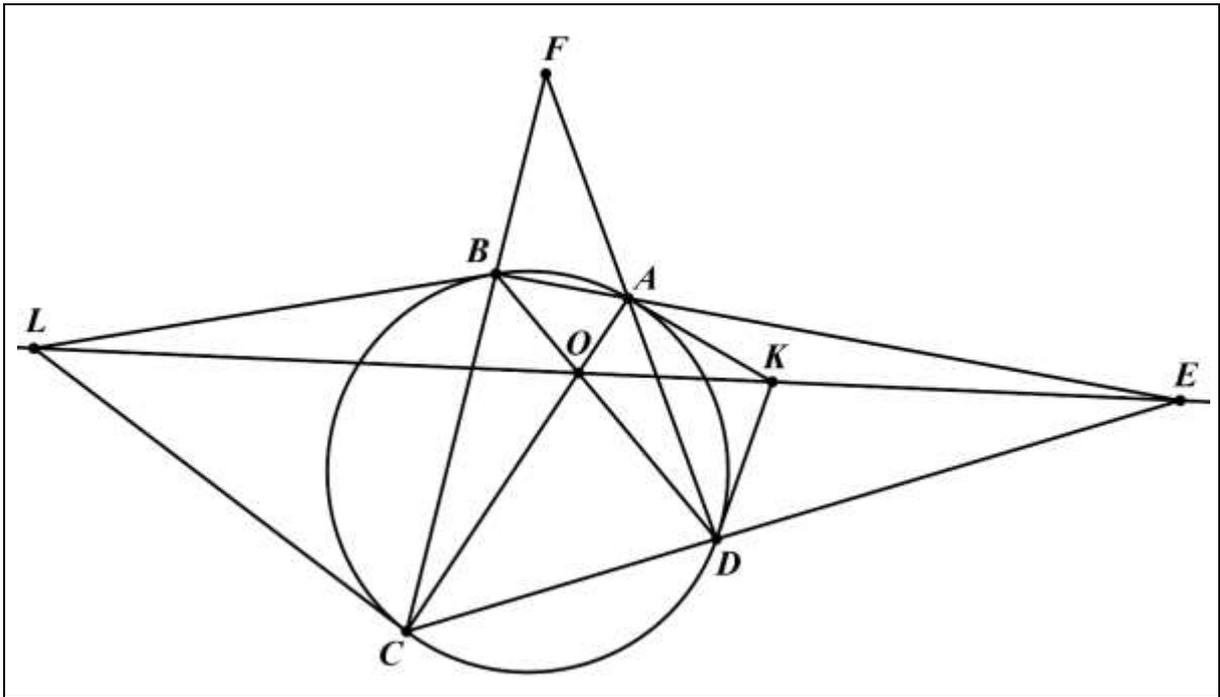
Fonte: Elaboração própria.

19. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível, cujas diagonais AC e BD se intersectam no ponto O , as extensões dos lados AB e CD em E , as tangentes à circunferência em A e em D se intersectam em K , e as tangentes à circunferência em B e C se intersectam em L . Prove que os pontos E , K , O , e L são colineares.

Solução.

O teorema de Brocard afirma que a polar do ponto $F = \overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{BC}$ é a reta $f = \overleftrightarrow{EO}$. Como a polar de um ponto pertencente à circunferência de inversão é igual à tangente nesse ponto, então $K = a \cap d$, onde a e d são as polares dos pontos A e D , respectivamente. Pelo Teorema 3, temos $A \in k$ e $D \in k$, onde k é a polar do ponto K em relação à circunferência circunscrita ao quadrilátero $ABCD$. Assim, $k = \overleftrightarrow{AD}$. Como $F \in \overleftrightarrow{AD} = k$, o Teorema 3 implica que $K \in f$, onde f é a polar do ponto F . Analogamente, podemos provar que $L \in f$. Portanto, os pontos E , O , K e L pertencem a f .

Figura 39 – Problema 19



Fonte: Elaboração própria.

20. Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico. As retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD} se intersectam no ponto E , e as diagonais AC e BD no ponto F . A circunferência circunscrita aos triângulos AFD e BFC se intersectam em H e F . Prove que $\angle EHF = 90^\circ$.

Solução.

Seja $G = \overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{BC}$ e seja C a circunferência circunscrita ao quadrilátero $ABCD$. Denotamos por C_1 e C_2 as circunferências circunscritas aos triângulos ADF e BCF , respectivamente. Observe que a reta \overleftrightarrow{AD} é o eixo radical das circunferências C e C_1 , a reta \overleftrightarrow{BC} é o eixo radical de C e C_2 e a reta \overleftrightarrow{FH} é o eixo radical de C_1 e C_2 .

É sabido que os três eixos radicais concorrem em um ponto, digamos G . Concluímos que os pontos F , G e H são colineares.

Sem perder de generalidade, suponha que F está entre G e H . Usando os quadriláteros $ADFH$ e $BCFH$, inscritos nas circunferências C_1 e C_2 , respectivamente, obtemos

$$\angle DHF = \angle DAF = \angle DAC \text{ e } \angle FHC = \angle FBC = \angle DBC.$$

Portanto,

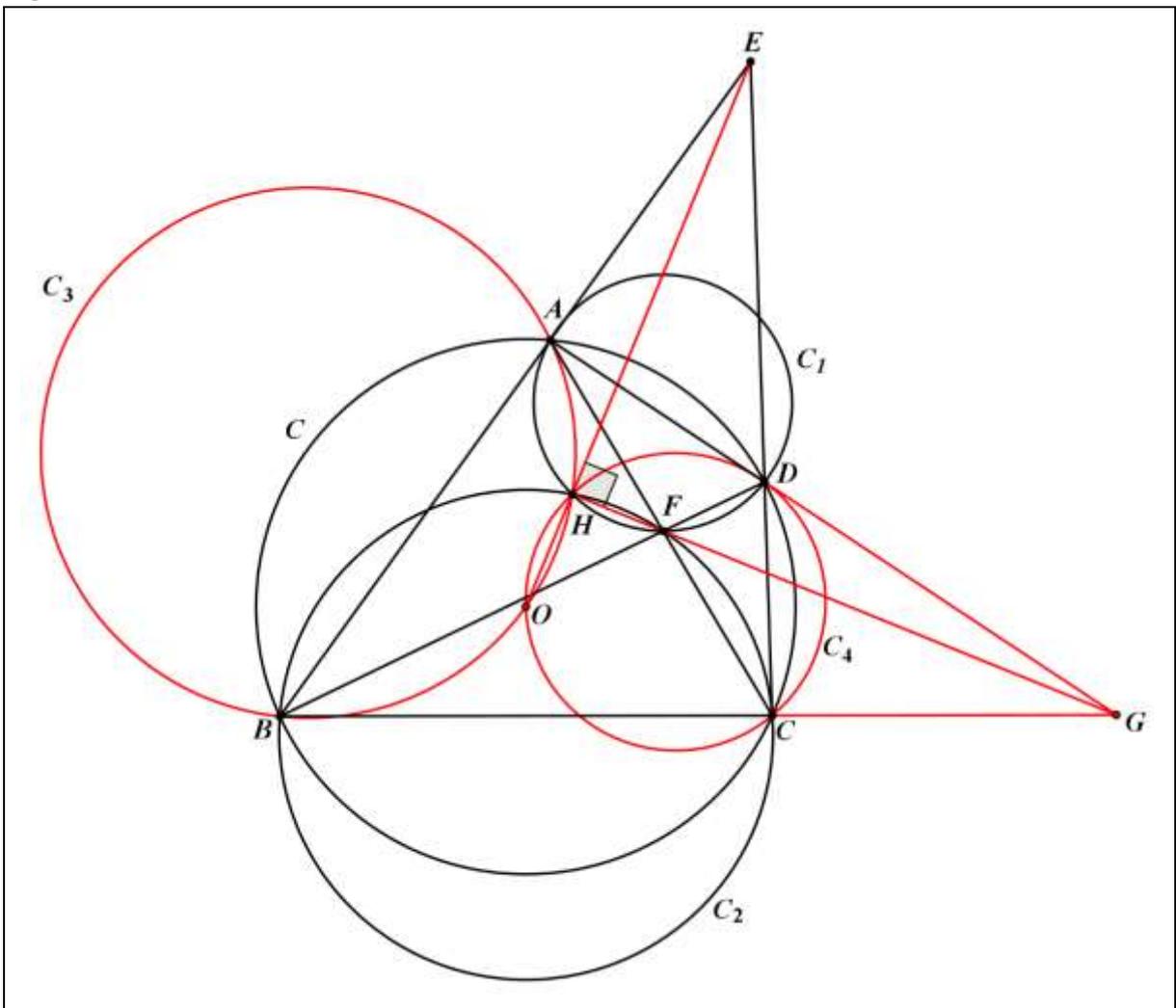
$$\angle DHC = \angle DHF + \angle FHC = \angle DAC + \angle DBC = 2\angle DBC = \angle DOC.$$

Assim, os pontos D , C , H e O pertencem a uma circunferência. Analogamente, os pontos A , B , H e O pertencem a uma outra circunferência. Denotamos por C_3 e C_4 as circunferências circunscritas aos quadriláteros $ABHO$ e $DCHO$, respectivamente. Temos que a reta \overleftrightarrow{AB} é o eixo

radical das circunferências C e C_3 . Similarmente, as retas \overleftrightarrow{CD} e \overleftrightarrow{OH} são os eixos radicais dos pares de circunferências C e C_4 , C_3 e C_4 , respectivamente. Assim, essas retas são concorrentes em um ponto $E = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{OH}$. Com isso, os pontos O , H e E são colineares.

Usando o Teorema de Brocard temos $\overleftrightarrow{FH} \perp \overleftrightarrow{OE}$. Assim, como $\overleftrightarrow{FH} = \overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{OE} = \overleftrightarrow{HE}$, obtemos que $\overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{HE}$.

Figura 40 – Problema 20



Fonte: Elaboração própria.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conclui-se, através deste estudo, que vários problemas de Geometria Euclidiana podem ser resolvidos, de forma elegante, utilizando-se técnicas oriundas da Geometria Projetiva.

Espera-se que esta dissertação seja utilizada por discentes, docentes e admiradores da Matemática na aprendizagem das técnicas aqui apresentadas, principalmente como instrumento preparatório para Olimpíadas de Matemática, contribuindo assim para o ensino da Geometria.

REFERÊNCIAS

AUFFINGER, A.C.T.C.; VALENTIM, F.J.S. **Introdução à Geometria Projetiva**. Universidade Federal do Espírito Santo, 2013.

CASTRO, L.G.M. **Introdução à Geometria Projetiva**. Artigo baseado em aula ministrada na III Semana Olímpica. Piracicaba, 2000.

LUKIĆ, M. **Projective Geometry**. Disponível em: <<http://www.imomath.com/index.php?options=330>>. Acesso em: 12 abr. 2017.

POHOATA, C; VONK, J. **The Monge-D'Alembert Circle Theorem**. Disponível em: <<https://pt.scribd.com/document/73955970/The-Monge-Dalembert-Ircle-Theorem>>. Acesso em: 15 mai. 2017.

REMOROV, A. **Projective Geometry**. Disponível em: <<http://alexanderrem.weebly.com/math-competitions.html>>. Acesso em: 20 abr. 2017.