UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

VICTOR GOMES PINTO

CARACTERIZAÇÕES DA ESFERA EM FORMAS ESPACIAIS

FORTALEZA
2017

VICTOR GOMES PINTO

CARACTERIZAÇÕES DA ESFERA EM FORMAS ESPACIAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Gervasio Colares

FORTALEZA

2017

VICTOR GOMES PINTO

CARACTERIZAÇÕES DA ESFERA EM FORMAS ESPACIAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovada em: 06 / 07 / 2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antônio Gervasio Colares (Orientador)
Departamento de Matemática - Pós-graduação em Matemática (UFC)

Prof. Dr. Gregorio Pacelli Feitosa Bessa (Suplente)
Departamento de Matemática - Pós-graduação em Matemática (UFC)

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva
Departamento de Matemática - Pós-graduação em Matemática (UFC)

Prof. Dr. Sebastião Carneiro de Almeida
Departamento de Economia Aplicada - CAEN (UFC)

À minha mãe, Maria Luiza.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Antônio Gervasio Colares pela orientação, paciência, incentivo e palavras de ânimo que me deu nos momentos difíceis durante todo o mestrado; por ter deixado, sempre que possível, eu caminhar com minhas próprias pernas e, assim, aprender de forma muito mais forte. Foi uma grande honra ter sido seu orientando.

À minha mãe, Luiza, que sempre me apoiou de todas as maneiras possíveis e nunca me deixou desanimar. Ao meu irmão Dario, por todo apoio, principalmente nesta reta final.

À Isa Sinara, por todo apoio, conselhos e periódicas injeções de ânimo (que não foram poucas!). A agradeço por cada um dos momentos em que, me vendo afogado em dificuldades ou emburrado com os pequenos insucessos, dizia, com um sorriso matreiro, "Isso aí é muito fácil. Não está dando certo por que você não está tentando por absurdo. Tente por absurdo. Se não conseguir, te explico daqui a pouco.", mesmo não fazendo ideia do que eu estava estudando ou do que é uma prova por absurdo. Esse tipo de coisa sempre fazia tudo ficar mais leve. A agradeço também por te me ajudado nas figuras, onde conseguiu fazer em cinco minutos o que eu pelejava por horas.

Ao Damásio, que é um irmão que a vida me deu. Sua ajuda se fez presente em muitos âmbitos e sou eternamente grato. Repetia tantas vezes "vai dar tudo certo", que me convencia, mesmo eu não acreditando. Sem sua ajuda, esse trabalho não teria sido possível.

Aos meus amigos e colegas de mestrado Elzon Cezar e Silvio Farias, que tanto ajudaram na minha formação. Elzon, com seu ceticismo (com cada palavra que eu dizia) nas minhas apresentações de soluções, sempre me fez preparar melhor cada argumento, e isso eu trago até hoje. Silvio, com sua extrema destreza em transmitir conhecimento, sempre foi meu primeiro amparo quando não conseguia entender algo nas disciplinas, pois, se ele entendia, com toda certeza conseguiria fazer outros entenderem.

À Talita, minha mais antiga amiga, por cada palavra doce que me ofertou durante todas as dificuldades, pela compreenssão da minha distância e por todo o carinho.

Ao Davi Lustosa, que me deu o pontapé inicial para entender muitas coisas do primeiro artigo, e também ao Diego de Sousa, que me ajudou de forma imprescindível, não só durante a realização deste trabalho, mas durante todo percurso do mestrado.

Ao professor Alexandre Fernandes, pelo apoio com a disciplina de estágio.

Aos professores participantes da banca examinadora Gregorio Pacelli Feitosa Bessa, Jonatan Floriano da Silva e Sebastião Carneiro de Almeida.

À Andrea Dantas pela prontidão em me ajudar, sempre que precisei.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro.

"Não entre em pânico."

Douglas Adams

RESUMO

Neste trabalho serão apresentadas três caracterizações da esfera. Primeiramente, será mostrado que dada uma hipersuperfície compacta e orientada M^n e $x : M \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica, onde Q_c^{n+1} é uma forma espacial simplesmente conexa, isto é, uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante c, $x(M)$ é uma esfera geodésica em Q_c^{n+1} se, e somente se, a $(r+1)$-ésima curvatura média H_{r+1} é uma constante não nula e o conjunto dos pontos que são omitidos em Q_c^{n+1} pelas hipersuperfícies totalmente geodésicas $(Q_c^n)_p$ tangentes a $x(M)$ é não vazio. Como segundo resultado, seja uma hipersuperfície compacta, conexa e orientável M do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, com função suporte não negativa e integrando de Minkowski σ. Será provado que a função curvatura média α da hipersuperfície é solução da equação de Poisson $\Delta\phi = \sigma$ se, e somente se, M é isométrica à n-esfera $S^n(c)$ de curvatura média c. Uma caracterização similar é provada para uma hipersuperfície com a curvatura escalar satisfazendo a mesma equação. Para o terceiro resultado é considerado uma imersão isométrica $x : M \to \mathbb{Q}^{n+1}$, onde M é uma hipersuperfície compacta tal que $x(M)$ é convexa, e será provado que, se alguma curvatura r-média é tal que $H_r \neq 0$ e existem constantes não negativas $C_1, C_2, ..., C_{r-1}$ tais que $H_r = \sum_{i=1}^{r-1} C_i H_i$, então $x(M)$ é uma esfera geodésica, onde $\mathbb{Q}^{n+1}$ é $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{H}^{n+1}$ ou $\mathbb{S}_+^{n+1}$.

Palavras-chave: r-ésima curvatura média. Equação de Poisson. Esferas Geodésicas. Hipersuperfícies.

ABSTRACT

In this work we present three characterizations of the sphere. Initially, it will be shown that given a compact and oriented hypersurface M^n and $x : M \rightarrow Q_c^{n+1}$ a isometric immersion, $x(M)$ is a geodesic sphere in Q_c^{n+1} if, and only if, H_{r+1} is a nonzero constant and the set of points that are omitted in Q_c^{n+1} by the totally geodesic hypersurfaces $(Q_c^n)_p$ tangent to $x(M)$ is non-empty. As a second result, let M be an orientable compact and connected hypersurface with non-negative support function of the Euclidean space $\mathbb{R}^{n+1}$ and Minkowski's integrand σ. We prove that the mean curvature function α of the hypersurface M is the solution of the Poisson equation $\Delta\phi = \sigma$ if, and only if, M is isometric to the n-sphere $S^n(c)$ of constant curvature c. A similar characterization is proved for a hypersurface with the scalar curvature satisfying the same equation. For the third result we consider an isometric immersion $x : M \rightarrow \mathbb{Q}^{n+1}$, where M is a compact hypersurface such that $x(M)$ is convex, and it will be proved that if any r-mean curvature is such that $H_r \neq 0$ and there are nonnegative constants $C_1, C_2, ..., C_{r-1}$ such that $H_r = \sum_{i=1}^{r-1} C_i H_i$, then $x(M)$ is a geodesic sphere, where $\mathbb{Q}^{n+1}$ is $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{H}^{n+1}$ or $\mathbb{S}_+^{n+1}$.

Keywords: r-mean curvature. Poisson equation. Geodesic spheres. Hypersurfaces.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Caracterizar esferas entre as hipersuperfícies compactas é uma das fascinantes áreas da geometria. Neste trabalho, veremos três resultados de caracterização para a esfera.

Sejam Q_c^{n+1} uma forma espacial simplesmente conexa, isto é, uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante c, e $x : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana compacta orientada M^n. Sejam também $\lambda_1, ..., \lambda_n$ os auto valores da segunda forma fundamental B associados aos vetores $e_1, ..., e_n$. As funções simétricas elementares associadas ao operador forma A são definidas por

$$S_r := S_r(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \sum_{i_1 < ... < i_r} \lambda_{i_1} ... \lambda_{i_r}, \quad \text{com } 1 \leq i_1, ..., i_r \leq n,$$

e a r-ésima curvatura média é definida por

$$H_r := H_r(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \frac{1}{\binom{n}{r}} S_r,$$

com $S_0 = H_0 = 1$ e $S_r = H_r = 0$, se $r \notin \{0, 1, ..., n\}$. As funções H_1, H_2 e H_n são conhecidas como curvatura média, escalar e de Gauss-Kronecker, respectivamente. A r-ésima transformação de Newton $P_r : T_pM \to T_pM$ é definida, indutivamente, por

$$P_0 = I \text{ e } P_r = S_r I - AP_{r-1}, \; r \geq 1.$$

Associado à transformação de Newton P_r, temos o operador diferencial de segunda ordem $L_r : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$, chamado de operador linearizado L_r, que é definido por

$$L_r f = tr(P_r \nabla^2 f).$$

Quando o ambiente é uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante, foi provado por H. Rosenberg em [15] que L_r pode ser escrito como

$$L_r f = div(P_r \nabla f).$$

O vetor posição X com respeito a $p_0 \in Q_c^{n+1}$, é dado por $X(x(p)) = S_c(s(p))\overline{\nabla} s(p)$, onde S_c é a solução da equação $y'' + cy = 0$, com condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$, isto é,

$$S_c(s) = \begin{cases} s; \; c = 0 \\ \frac{sen(s\sqrt{c})}{\sqrt{c}}; \; c > 0 \\ \frac{senh(s\sqrt{-c})}{\sqrt{-c}}; \; c < 0 \end{cases}$$

e $\overline{\nabla} s$ é o gradiente da função distância $s(\cdot) = d(\cdot, p_0)$ em Q_c^{n+1}. Também denotamos $S_c'(s(p)) = \theta_c(s(p))$ e X^T a componente de X tangente a M.

São conhecidas algumas caracterizações da esfera que envolvem a curvatura r-média. Um exemplo de tais caracterizações está em [7], onde é mostrado que se a $(r-1)$-ésima curvatura média de M é sempre não nula e a razão $\frac{H_r}{H_{r-1}}$ é constante para $r = 2, ..., n$, então $\psi(M)$ é uma esfera geodésica. Outro exemplo conhecido é o Teorema de Alexandrov, que afirma que uma hipersuperfície compacta n-dimensional mergulhada ou no espaço Euclidiano ou no espaço hiperbólico ou num hemisfério aberto da esfera unitária com r-ésima curvatura média constante, para algum $r = 1, ..., n$, deve ser uma hiperesfera geodésica (uma demonstração pode ser encontrada em [12]).

Para o primeiro resultado, será usada a fórmula

$$\int_M [H_r \theta_c + H_{r+1} \langle X, \eta \rangle] = 0,$$

que vale para $c \in \mathbb{R}$ qualquer, ond X é o vetor posição, η é um campo normal unitário da hipersuperfície, para mostrar o

Teorema 1.1 *(Alencar e Colares) Sejam M^n uma variedade Riemanniana compacta orientada e $x : M \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica com curvatura H_{r+1} constante não nula, onde $0 \leq r \leq n-1$. Se $c > 0$, assuma que $x(M)$ está contido em um hemisfério aberto de Q_c^{n+1}. Então o conjunto dos pontos*

$$W = Q_c^{n+1} - \bigcup_{p \in M} (Q_c^n)_p$$

que são omitidos em Q_c^{n+1} pelas hipersuperfícies totalmente geodésicas $(Q_c^n)_p$ tangentes a $x(M)$ é não vazio se, e somente se, $x(M)$ é uma esfera geodésica em Q_c^{n+1}.

O teorema de Alencar-Colares se assemelha ao Teorema de Alexandrov, porém tem como hipótese uma propriedade geométrica da hipersuperfície, ao invés da hipótese topológica de a hipersuperfície ser mergulhada.

O segundo método de caracterizar a esfera exposto neste trabalho envolve uma importante equação diferencial: a Equação de Poisson. Teoremas de caracterização da esfera utilizando equações diferenciais já são conhecidos, como podemos ver em [8] e [9]. A importância da equação de Poisson é muito conhecida na Física; é fundamental para a Eletrostática, Mecânica dos Fluidos e muitas outras áreas. É interessante o fato de que, em uma variedade Riemanniana M, a equação de Poisson $\Delta\varphi = \rho$ (Δ é o operador

Laplaciano, ρ é uma função conhecida e φ é desconhecida) possui uma única solução, a menos da adição de uma constante [6]. Neste caso, a função ρ deve ter integral igual a 0.

Dada uma hipersuperfície M do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ com função suporte $\rho = \langle \psi, N \rangle$ e curvatura média α, o integrando de Minkowski definido por $\sigma = 1 + \rho\alpha$ possui integral igual a zero, onde $\psi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ é a imersão, N é campo normal unitário e $\langle , \rangle$ é métrica Euclidiana em $\mathbb{R}^{n+1}$, como será visto adiante. Então é natural considerar a equação de Poisson $\Delta\varphi = \sigma$ em uma hipersuperfície compacta e orientada M do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$.

Para uma n-esfera $S^n(c)$ de curvatura c em $\mathbb{R}^{n+1}$, a função suporte é uma constante positiva e, por valer $\int_M (1 + \rho\alpha) = 0$, tem-se $\sigma = 0$. Como α é uma constante, $\Delta\alpha = 0$, logo, a equação de Poisson é satisfeita.

Este fato suscita a seguinte pergunta: uma hipersuperfície compacta, conexa e orientada do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, com função suporte não negativa e curvatura média α satisfazendo a equação de Poisson $\Delta\varphi = \sigma$, necessariamente é isométrica à esfera $S^n(c)$? A resposta para tal pergunta será respondida, baseada em [4], pelo seguinte teorema:

Teorema 1.2 *Seja M uma hipersuperfície compacta, conexa e orientável com função suporte não negativa de $\mathbb{R}^{n+1}$. A curvatura média α de M é solução da Equação de Poisson $\Delta\varphi = \sigma$ (σ é o integrando de Minkowski) se, e somente se, M é isométrica à n-esfera $S^n(c)$ de curvatura média constante igual a c.*

Uma caracterização semelhante também vale usando a curvatura escalar, acrescentando algumas hipóteses:

Teorema 1.3 *Seja M uma hipersuperfície compacta, conexa e orientável de $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura escalar S limitada superiormente pela constante $n(n-1)\lambda^{-1}$, onde $\lambda = sup\rho^2$ e ρ é a função suporte. Então a curvatura de Ricci na direção do campo vetorial ∇S é não negativa e a curvatura escalar S é a solução da equação de Poisson $\nabla\varphi = \sigma$ (σ é o integrando de Minkowski) se, e somente se, M é isométrica à n-esfera $S^n(c)$ de curvatura constante igual a $c = \lambda^{-1}$*

O terceiro método de caracterizar esferas exposto neste trabalho envolve, como o primeiro, a curvatura r-média. Tal método tem como hipótese que as curvaturas r-médias são linearmente relacionadas e a que a hipersuperfície é convexa (para garantir a positividade das r-ésimas curvaturas médias):

Teorema 1.4 *Sejam M uma hipersuperfície compacta e orientável imersa em $\mathbb{Q}^{n+1}$ e $\psi : M \to \mathbb{Q}^{n+1}$ sua imersão, onde $\mathbb{Q}^{n+1}$ é $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{H}^{n+1}$ ou $\mathbb{S}^{n+1}_+$. Assuma que $\psi(M)$ é* *convexa. Se* $H_r \neq 0$ *e existem constantes não negativas* $C_1, C_2, ..., C_{r-1}$ *tais que*

$$H_r = \sum_{i=1}^{r-1} C_i H_i,$$

então $x(M)$ *é uma esfera geodésica.*

Tal resultado está contido em [13] e generaliza [7].

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados conhecidos de Geometria Riemanniana que serão utilizados no decorrer do texto e uma série de lemas e proposições que nos serão úteis nas demonstrações dos teoremas principais. Os resultados mais conhecidos terão suas provas omitidas, pois podem ser encontradas facilmente na literatura, como, por exemplo, em [5].

2.1 Métricas Riemannianas

Neste trabalho, estudaremos variedades como objetos munidos de uma noção de distância; esta dada por um elemento chamado de métrica, que nada mais é do que um produto interno introduzido em cada espaço tangente.

Definição 2.1 *Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle , \rangle$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente T_pM, que varia diferencialmente no seguinte sentido: Se $\boldsymbol{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $\boldsymbol{x}(x_1, x_2, ..., x_n) = q \in \boldsymbol{x}(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\boldsymbol{x}(0, ..., 1, ..., 0)$, então $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q = g_{ij}(x_1, ..., x_n)$ é uma função diferenciável em U.*

Sempre que não houver possibilidade de confusão, deixaremos de escrever o índice p em $\langle , \rangle_p$ para não carregar desnecessariamente a notação, mas sempre lembrando que a métrica está sendo considerada no espaço tangente do ponto dado.

Definição 2.2 *Uma variedade diferenciável munida de uma métrica Riemanniana é chamada de variedade Riemanniana.*

Definição 2.3 *Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \to N$(isto é, f é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável) é chamado uma isometria se:*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)},$$

para todo $p \in M, u, v \in T_pM$.

Exemplo 2.1 *Variedades imersas. Uma aplicação $f : M^n \to N^{n+k}$ é uma imersão, se f é diferenciável e $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ é injetiva para todo p em M. Chamamos k de codimensão da imersão. Se N tem uma estrutura Riemanniana, f induz uma estrutura*

Riemanniana em M por $\langle u,v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}, u,v \in T_pM$. Como df_p é injetiva, $\langle,\rangle_p$ é positivo definido. As demais condições da Definição 2.3 são facilmente verificadas. A métrica de M é chamada, então, de métrica induzida por f, e f é uma imersão isométrica.

Quando a codimensão da imersão é 1, i.e., $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}; f(M) \subset \overline{M}$ é chamada de hipersuperfície.

2.2 Conexões Afins; Conexão Riemanniana; Geodésicas

Indicaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $\mathcal{C}^\infty(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M.

Definição 2.4 *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$

a qual indicaremos por $(X,Y) \to \nabla_X Y$, que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$
ii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$
iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$
onde $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f,g \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

A próxima proposição mostra que a escolha de uma conexão afim ∇ em M dá origem, de forma bem definida, a uma derivada de campos de vetores ao longo de curvas.

Definição 2.5 *Um campo de vetores V ao longo de uma curva $c : I \to M$ é uma correspondência que associa a cada $t \in I$ um vetor $V(t) \in T_{c(t)}M$.*

Definição 2.6 *Dizemos que um campo de vetores V ao longo de uma curva é diferenciável se, para toda função f em M, a função $t \mapsto V(t)f$ é uma curva diferenciável em I.*

Proposição 2.1 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva direnciável $c : I \to M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c, denominado covariante de V ao longo de c, tal que:*
a) $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}.$

b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, *onde* W *é um campo de vetores ao longo de* c *e* f *é uma função diferenciável em* I.

c) Se V *é induzido por um campo de vetores* $Y \in \mathfrak{X}(M)$, *i.e.,* $V(t) = Y(c(t))$, *então* $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$.

Definição 2.7 *Seja* M *uma variedade Riemanniana com uma conexão afim* ∇. *Um campo vetorial* V *ao longo de uma curva* $c : I \to M$ *é chamado de paralelo quando* $\frac{DV}{dt} = 0$, *para todo* $t \in I$.

Proposição 2.2 *Seja* M *uma variedade Riemanniana com uma conexão afim* ∇. *Seja* $c : I \to M$ *uma curva diferenciável em* M *e* V_0 *um vetor tangente a* M *em* $c(t_0)$, $t_0 \in I$ *(i.e.,* $V_0 \in T_{c(t_0)}M$*). Então existe um único campo de vetores paralelo* V *ao longo de* c, *tal que* $V(t_0) = V_0$, *(*$V(t)$ *é chamado de o transporte paralelo de* $V(t_0)$ *ao longo de* c*).*

Definição 2.8 *Uma conexão* ∇ *em uma variedade Riemanniana* M *é compatível com a métrica se e só se*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle,$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 2.9 *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável* M *é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, *onde* $[X, Y] = XY - YX$.

Teorema 2.1 *(Levi-Civita) Dada uma variedade Riemanniana* M, *existe uma única conexão afim* ∇ *em* M *satisfazendo as condições:*

a) ∇ *é simétrica;*

b) ∇ *é compatível com a métrica Riemanniana.*

A conexão dada pelo teorema acima é chamada de conexão de *conexão de Levi-Civita* ou conexão Riemanniana de M. A partir daqui, ∇ indicará a conexão de Levi-Civita e M será uma variedade Riemanniana munida de sua conexão Riemanniana.

Definição 2.10 *Uma curva parametrizada* $\gamma : I \to M$ *é uma geodésica em* $t_0 \in I$ *se* $\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0$ *no ponto* t_0. *Se* γ *é geodésica em* t, *para todo* $t \in I$, *dizemos que* γ *é uma geodésica. Se* $[a, b] \subset I$ *e* $\gamma : I \to M$ *é uma geodésica, a restrição de* γ *a* $[a, b]$ *é chamada (segmento de) geodésica ligando* $\gamma(a)$ *a* $\gamma(b)$. *É comum, por abuso de linguagem, chamarmos de geodésica à imagem* $\gamma(I)$ *de uma geodésica* γ.

Definição 2.11 *Um segmento de geodésica $\gamma : [a, b] \to M$ é chamado de minimizante se $l(\gamma) \leq l(c)$, onde $l(.)$ denota o comprimento de uma curva e c é quaquer curva diferenciável por partes ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.*

Definição 2.12 *Um conjunto $S \subset M$ é chamado de fortemente convexo se para quaisquer dois pontos p, q do fecho de S existe uma única geodésica minimizante γ ligando p a q, cujo interior está contido em S.*

É possível provar que todo ponto $p \in M$ possui uma vizinhança fortemente convexa.

O próximo resultado permite que o conceito de aplicação exponencial seja introduzido.

Proposição 2.3 *Dado $p \in M$, existem uma vizinhança V de p em M, um número $\epsilon > 0$ e uma aplicação diferenciável,*

$$\gamma : (-2, 2) \times \mathcal{U} \to M,$$

onde $\mathcal{U} = \{(p, w) \in TM; p \in V, w \in T_pM, |w| < \epsilon\}$, tal que $t \to \gamma(t, p, w), t \in (-2, 2)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por p com velocidade w, para cada $p \in V$ e cada $w \in T_pM$, $|w| < \epsilon$.

Sejam $p \in M$ e $\mathcal{U} \subset TM$ um aberto dado pela proposição anterior. Então a aplicação $exp : \mathcal{U} \to M$, dada por

$$exp(p, v) = \gamma(1, p, v) = \gamma\left(|v|, p, \frac{v}{|v|}\right), (p, v) \in \mathcal{U},$$

é chamada de aplicação exponencial em $\mathcal{U}$.

A aplicação exponencial é diferenciável e usaremos a restrição da exp a um aberto do espaço tangente T_pM, isto é, definiremos

$$exp_p : B_\epsilon(0) \subset T_pM \to M$$

por $exp_p(v) = exp(p, v)$. Indicaremos por $B_\epsilon(0)$ a bola aberta de centro na origem 0 de T_pM e de raio ϵ. Além da exp_p ser diferenciável, temos que $exp_p(0) = p$. Geometricamente, $exp_p(v)$ é o ponto de M obtido percorrendo um comprimento igual a $|v|$, a partir de p, sobre a geodésica que passa com velocidade igual a $\frac{v}{|v|}$.

Proposição 2.4 *Dado $p \in M$, existe um $\epsilon > 0$ tal que $exp_p : B_\epsilon(0) \subset T_pM \to M$ é um* *difeomorfismo da bola $B_\epsilon(0)$ de centro na origem de T_pM e raio ϵ sobre um aberto de M.*

Exemplo 2.2 *Se $M = \mathbb{R}^n$, a derivação covariante coincide com a usual. Assim, as geodésicas são retas parametrizadas propoporcionalmente ao comprimento de arco e a exponencial é a identidade.*

Lema 2.1 *(de Gauss) Sejam $p \in M$ e $v \in T_pM$ tal que $exp_p v$ esteja definida. Seja $w \in T_pM \approx T_v(T_pM)$. Então*

$$\langle (dexp_p)_v(v), (dexp_p)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Seja $V \subset T_pM$ uma vizinhança da origem tal que $exp_p|_V$ é um difeomorfismo. O conjunto $U = exp_p(V)$ é denominado de vizinhança normal (ou geodésica) de p. Se $B_\epsilon(0)$ é a bola de centro na origem de T_pM e raio ϵ, então $B_\epsilon(p) = \exp_p(B_\epsilon(0))$ é denominado bola normal (ou geodésica) de centro p e raio ϵ. Decorre do lema de Gauss que a fronteira de uma bola normal $S_\epsilon(p) = \exp_p(\partial B_\epsilon(0))$ é uma hipersuperfície em M ortogonal às geodésicas que partem de p, a qual denominamos esfera geodésica de centro p e raio ϵ.

Agora vamos definir o referencial geodésico, que nos será útil mais tarde.

Seja $p \in M$ e U uma vizinhança fortemente convexa de p. Fixada uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ para T_pM, existem n campos de vetores diferenciáveis $E_1, ..., E_n$ tais que

a) $E_i(p) = e_i(p)$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$;

b) $\{E_1(q), ..., E_n(q)\}$ é uma base ortonormal para T_qM, para todo $q \in U$;

c) $\nabla_{E_i} E_j = 0$, para todo $i, j \in \{1, ..., n\}$.

Para construir tais campos, dado $q \in U$, considere uma geodésica minimizante γ ligando p a q. Seja $E_i(q)$ o transporte paralelo de e_i ao longo de γ. Pode-se mostrar que os campos E_i construidos dessa forma satisfazem as condições a), b) e c). Então $\{E_1(q), ..., E_n(q)\}$ é chamado de referencial geodésico.

Definição 2.13 *Uma variedade Riemanniana M é (geodesicamente) completa se, para todo $p \in M$, a aplicação exponencial, exp_p, está definida para todo $v \in T_pM$, i.e., se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.*

Definição 2.14 *Um subconjunto B de uma variedade Riemanniana completa M é chamado de convexo quando, para quaisquer $p, q \in M$, existe uma única geodésica minimizante ligando p a q, cuja imagem esteja contida inteiramenta em B. Uma hipersuperfície* *imersa* $\psi : N^n \to M^{n+1}$ *compacta é chamada de convexa quando é fronteira de um subconjunto convexo de* M.

2.3 Divergente, Gradiente, Hessiano e Laplaciano

Definição 2.15 *Sejam* M *uma variedade Riemanniana,* $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ *e* $p \in M$. *Definimos o gradiente de* f *como o campo vetorial* ∇f *em* M *definido por*

$$\langle \nabla f(p), v \rangle = df_p(v) = vf, \ \ p \in M, v \in T_pM.$$

Definição 2.16 *Sejam* M *uma variedade Riemanniana,* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $p \in M$. *Definimos divergência de* X *como a função* $divX : M \to \mathbb{R}$ *dada por* $divX(p) =$ *traço da aplicação linear* $Y(p) \mapsto \nabla_Y X(p)$.

Definição 2.17 *Seja* M *uma variedade Riemanniana. Defina um operador* $\Delta : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$, *chamado de o Laplaciano de M, por*

$$\Delta f = div(\nabla f), \ \ f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Definição 2.18 *Um tensor* T *de ordem* r *em uma variedade Riemanniana é uma apliacação multilinear*

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times ... \times \mathfrak{X}(M)}_{r fatores} \to \mathcal{C}^\infty(M).$$

Definição 2.19 *Seja* $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. *O tensor de ordem* 2, *denotado por* $\nabla^2 f$, *em* M *dado por*

$$\nabla^2 f(X, Y) = XY(f) - \nabla_X Y(f),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *é chamado de Hessiano de f.*

Proposição 2.5 *Dada* $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, *o Hessiano* $\nabla^2 f$ *é um tensor simétrico, isto é,* $\nabla^2 f(X, Y) = \nabla^2 f(Y, X)$.

Prova:

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(X,Y) - \nabla^2 f(Y,X) &= (XY - YX)(f) + (\nabla_Y X - \nabla_X Y)(f) \\ &= [X,Y](f) + [Y,X](f) \\ &= [X,Y](f) - [X,Y](f) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Existe outra maneira de calcular o Hessiano de uma função f, que é dada pela proposição seguinte.

Proposição 2.6 *Seja M uma variedade Riemanniana e ∇ sua conexão de Levi-Civita. Então*

$$\nabla^2 f(X,Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle.$$

Prova: Basta fazer a simples manipulação:

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(X,Y) &= XY(f) - \nabla_X Y(f) \\ &= X\langle \nabla f, Y\rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y\rangle \\ &= \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle + \langle \nabla f, \nabla_X Y\rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y\rangle \\ &= \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle.\end{aligned}$$

□

Observação 2.1 *Dada uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ para T_pM, podemos escrever o laplaciano Δf da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned}\Delta f &= div(\nabla f) \\ &= \sum_k \langle \nabla_{e_k} \nabla f, e_k\rangle \\ &= \sum_k \nabla^2 f(e_k, e_k).\end{aligned}$$

Observação 2.2 *Podemos ver o Hessiano como o operador*

$$\begin{aligned}\nabla^2 f : \; T_pM &\to T_pM \\ X &\mapsto \nabla^2 f(X) = \nabla_X \nabla f.\end{aligned}$$

Proposição 2.7 *Seja $\{E_i\}$, $i \in \{1, ..., n\}$, um referencial geodésico em $p \in M$. Então vale*

$$\nabla f(p) = \sum_i \left(E_i(f)\right) E_i(p),$$

e

$$\Delta f(p) = \sum_i E_i \left(E_i(f)\right)(p).$$

Prova: Como $\{E_i\}$ é uma base ortonormal, temos:

$$\nabla f(p) = \sum_i a_i(p) E_i(p) \Rightarrow a_i(p) = \langle \nabla f(p), E_i(p) \rangle.$$

Mas por definição,

$$\langle \nabla f(p), E_i(p) \rangle = df_p(E_i(p)) = E_i(p) f.$$

Assim,

$$\nabla f(p) = \sum_i \left(E_i(f)\right) E_i(p),$$

o que prova a primeira igualdade. Para a segunda igualdade, temos

$$\begin{aligned}
\Delta f &= div(\nabla f) \\
&= div\left(\sum_i E_i(f) E_i\right) \\
&= \sum_j \langle \nabla_{E_j} \left(\sum_i E_i(f) E_i\right), E_j \rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle E_i(f) \underbrace{(\nabla_{E_j} E_i)}_{0} + E_j(E_i(f)) E_i, E_j \rangle \\
&= \sum_{i,j} E_j(E_i(f)) \langle E_i, E_j \rangle \\
&= \sum_i E_i(E_i(f)).
\end{aligned}$$

Proposição 2.8 *Sejam $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Vale:*

a) $div(fX) = \langle \nabla f, X \rangle + f \cdot div X$,

b) $\Delta(f \cdot g) = f \Delta g + g \Delta f + 2 \langle \nabla f, \nabla g \rangle$.

Teorema 2.2 *(Teorema da Divergência) Seja $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$ um domínio compacto e consideremos $M = \partial\Omega$ a hipersuperfície compacta formada pela fronteira de Ω. Se $Z : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ é um campo de vetores diferenciável sobre Ω e N é o campo normal unitário interior de*

M, então

$$\int_{\Omega} divZdV = -\int_{M} \langle Z, N\rangle dA.$$

Corolário 2.1 *Sejam $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta sem bordo, orientada e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então*

$$\int_{M} divXdA = 0.$$

Em particular, $\int_M \Delta f dA = 0$, para toda função $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$

2.4 Curvaturas

Definição 2.20 *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z, \ Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Observação 2.3 *Se $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X,Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, se indicarmos por $Z = (z_1, ..., z_n)$ as componentes do campo Z nas coordenadas naturais do $\mathbb{R}^n$, obteremos que*

$$\nabla_X Z = (Xz_1, ..., Xz_n),$$

de onde

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, ..., YXz_n),$$

o que implica que

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z = 0,$$

como afirmado.

Proposição 2.9 *A curvatura R de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:*

(i) R é bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, isto é,

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

$f, g \in \mathcal{C}^\infty(M),\ X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

(ii) *Para todo par* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, *o operador curvatura* $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ *é linear, isto é,*

$$R(X,Y)(Z + W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W,$$

$$R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z,$$

$f \in \mathcal{C}^\infty(M),\ X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Observação 2.4 *Dado um espaço vetorial* V, *indicaremos por* $\|x \wedge y\|$ *a expressão*

$$\sqrt{\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2},$$

que representa a área do paralelogramo bi-dimensional determinada pelo par de vetores $x, y \in V$.

Proposição 2.10 *Seja* $\sigma \subset T_pM$ *um subespaço bi-dimensional do espaço tangente* T_pM *e sejam* $x, y \in \sigma$ *dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{\|x \wedge y\|^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Definição 2.21 *Dado um ponto* $p \in M$ *e um subespaço bi-dimensional* $\sigma \subset T_pM$ *o número real* $K(x,y) = K(\sigma)$, *onde* $\{x, y\}$ *é uma base qualquer de* σ, *é chamado de curvatura seccional de* σ *em* p.

Lema 2.2 *Sejam* M *uma variedade Riemanniana e* p *um ponto de* M. *Defina um aplicação trilinear* $R' : T_pM \times T_pM \times T_p \to T_pM$ *por*

$$\langle R'(X,Y,W), Z\rangle = \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle Y, W\rangle\langle X, Z\rangle,$$

para todo $X, Y, Z, W \in T_pM$. *Então* M *tem curvatura seccional constante igual a* K_0 *se, e somente se,* $R = K_0R'$, *onde* R *é a curvatura de* M.

Definição 2.22 *Dada uma variedade Riemanniana* M *e* $p \in M$, *consideramos uma base ortonormal* $\{z_1, ..., z_n\}$ *de* T_pM. *Então, para quaisquer* $X, Y \in T_pM$ *definimos o tensor* *de Ricci, denotado por Ric, como o tensor do tipo* $(0,2)$ *dado por*

$$Ric(X,Y) = \sum_i \langle R(X,z_i)Y, z_i\rangle \ .$$

Além disso, se $\|X\| = 1$ *, então* $Ric(X,X)$ *é chamado de curvatura de Ricci na direção de* X*.*

É válido observar que esta definição não depende da escolha da base ortonormal escolhida para T_pM.

Definição 2.23 *Dada uma variedade Riemanniana* M *e* $p \in M$*, consideramos uma base ortonormal* $\{z_1, ..., z_n\}$ *de* T_pM*. Definimos a curvatura escalar* S *em* p *por*

$$S(p) = \sum_{ij} \langle R(z_i,z_j)z_i, z_j\rangle \ .$$

2.5 Segunda Forma Fundamental

Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+m=k}$ uma imersão. Para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. Isso nos diz que existe um difermorfismo $\varphi : \overline{U} \to V \subset \mathbb{R}^k$ em um aberto $V \subset \mathbb{R}^k$, tais que φ aplica difeomorficamente $f(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \cap \mathbb{R}^k$. Isso nos permite identificar U com $f(U)$ e cada $v \in T_pM, p \in U$ com $df_p(v) \in T_{f(p)}\overline{M}$, de modo a facilitar a notação. Também identificamos para estender, por exemplo, um campo local (isto é, definido em U) de vetores de M a um campo local (isto é, definido em $\overline{U}$) de vetores em $\overline{M}$. Dessa forma, para cada $p \in M$, T_pM é considerado um subespaço vetorial de $T_p\overline{M}$ de dimensão n. Assim, se considerarmos o espaço m-dimensional $(T_pM)^\perp = \{v \in T_p\overline{M}; \langle u,v\rangle = 0, \forall u \in T_pM\}$, podemos escrever

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp.$$

O espaço $(T_pM)^\perp$ é chamado de espaço normal à M em p. Assim, dado $v \in T_p\overline{M}, p \in M$, podemos escrever

$$v = v^T + v^N, \ v^T \in T_pM, \ v^N \in (T_pM)^\perp.$$

A conexão Riemanniana de $\overline{M}$ será indicada por $\overline{\nabla}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M, e $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T.$$

Não é difícil verificar que esta é a conexão Riemanniana relativa a métrica induzida de M. Temos então:

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T + (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^N = \nabla_X Y + (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^N.$$

Definição 2.24 *Sejam X e Y são campos locais de vetores em M, e $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ extensões locais a $\overline{M}$. Definimos a segunda forma fundamental da imersão f como sendo a aplicação $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ definida por*

$$B(X,Y) = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^N = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y.$$

Proposição 2.11 *A segunda forma fundamental $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ definida por*

$$B(X,Y) = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^N = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Definição 2.25 *Seja $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. À segunda forma fundamental e a η fica associada uma aplicação linear auto-adjunta $A_\eta : T_pM \to T_pM$ definida por*

$$\langle A_\eta(x), y\rangle = \langle B(x,y), \eta\rangle,$$

que chamamos de operador forma (shape operator). Quando não houver perigo de confusão, indicaremos $A_\eta(X)$ por AX.

A matriz de A com respeito à base ortonormal $\{e_1, ...e_n\}$ é dada por

$$(h_{ij}) = \left(\langle\overline{\nabla}_{e_i}e_j, \eta\rangle\right), i, j = 1, ...n.$$

Proposição 2.12 *Sejam $p \in M$, $x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. Seja N uma extensão local de*

η normal a M. Então

$$A_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T.$$

Observação 2.5 *Se a codimensão da imersão for 1, isto é, $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ e N for uma extensão local de η tal que $\langle N, N\rangle = 1$, então*

$$0 = X\langle N, N\rangle = 2\langle \overline{\nabla}_X N, N\rangle$$

$$\Rightarrow \langle \overline{\nabla}_X N, N\rangle = 0 \Rightarrow \overline{\nabla}_X N \textit{ é tangente à } M \Rightarrow (\overline{\nabla}_X N)^T = \overline{\nabla}_X N.$$

Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp, |\eta| = 1$. Como $A_\eta : T_pM \to T_pM$ é simétrica, existe uma base ortonormal de autovetores $\{e_1, ..., e_n\}$ de T_pM com autovalores reais $\lambda_1, ..., \lambda_n$, i.e., $A_\eta(e_i) = \lambda_i$, com $i \in \{1, ..., n\}$. Se M e $\overline{M}$ são orientáveis, escolhendo uma orientação para ambas, o vetor η fica univocamente determinado se exigirmos que $\{e_1, ..., e_n, \eta\}$ seja uma base na orientação de $\overline{M}$, se $\{e_1, ..., e_n\}$ for uma base na orientação de M. Neste caso, chamamos os e_i de direções principais e os λ_i de curvaturas principais de f.

Definição 2.26 *Uma imersão $f : M \to \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$ se, para todo $\eta \in (T_pM)^\perp$, a segunda forma fundamental é identicamente nula em p. A imersão f é dita totalmente geodésica se ela é geodésica para todo $p \in M$. A razão dessa terminologia é que f ser geodésica em p é equivalente a dizer que toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de $\overline{M}$ em p.*

Definição 2.27 *Sejam M uma variedade Riemanniana, $p \in M$, $\{e_1, ..., e_n\}$ a base ortonormal de T_pM de direções principais de f e $\lambda_1, ..., \lambda_n$ suas curvaturas principais. Então definimos a curvatura média, denotada por $\alpha(p)$, no ponto p por*

$$\alpha(p) = \frac{1}{n}(\lambda_1 + ... + \lambda_n).$$

Observação 2.6 *Como o traço de um operador independe da base na qual escrevemos, temos que*

$$\alpha = \frac{1}{n} trA$$

em qualquer referencial ortonormal em uma vizinhança de p que diagonalize o operador forma A em p.

Sejam M uma hipersuperfície e $\psi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ sua imersão. Seja $F : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, com $M \subset U$, e $f = F_{|M}$. Assim como denotamos por $\overline{\nabla}$ e ∇ as conexões de $\mathbb{R}^{n+1}$ e M, respectivamente, também denotaremos por $\overline{\nabla}^2$, ∇^2, $\overline{\Delta}$ e Δ o Hessiano e o Laplaciano em $\mathbb{R}^{n+1}$ e M, respectivamente. Vamos escrever expressões explícitas para o cálculo de ∇^2 e Δ em função de $\overline{\nabla}^2$ e de $\overline{\Delta}$. Para isso, para cada $p \in M$ associamos uma base ortonormal $\{e_1, ...e_n, N\}$, de modo que N seja normal a M em p. Temos que ∇f coincide com a componente tangencial de $\overline{\nabla} F$, isto é,

$$\nabla f(p) = (\overline{\nabla} F(p))^T = \overline{\nabla} F(p) - \langle \overline{\nabla} F(p), N(p) \rangle N(p).$$

Então, se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos:

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(X,Y) = \langle \overline{\nabla}_X \nabla f, Y \rangle &= \langle \overline{\nabla}_X \overline{\nabla} F, Y \rangle - \langle \overline{\nabla}_X (\langle \overline{\nabla} F, N \rangle N), Y \rangle \\ &= \overline{\nabla}^2 F(X,Y) - \langle X(\langle \overline{\nabla} F, N \rangle) N + \langle \overline{\nabla} F, N \rangle \overline{\nabla}_X N, Y \rangle \\ &= \overline{\nabla}^2 F(X,Y) + \langle \overline{\nabla} F, N \rangle \langle AX, Y \rangle. \end{aligned}$$

Se consideramos $\{e_1, ..., e_n\}$ como sendo as direções principais associadas às curvaturas principais $\lambda_1, ..., \lambda_n$ em T_pM, obtemos:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta} F &= \sum_i \overline{\nabla}^2 F(e_i, e_i) + \overline{\nabla} F^2(N,N) \\ &= \sum_i \big(\nabla^2 f(e_i, e_i) - \langle \overline{\nabla} F, N \rangle \langle A e_i, e_i \rangle \big) + \overline{\nabla}^2 F(N,N) \\ &= \Delta f - n\alpha \langle \overline{\nabla} F, N \rangle + \overline{\nabla}^2 F(N,N). \end{aligned}$$

Exemplo 2.3 *Consideremos $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \frac{1}{2}\|x - c\|^2$, para um certo ponto fixo $c \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $f = F_{|M}$. Dado $v \in T_pM$ e $\alpha : I \to M$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$, temos:*

$$\begin{aligned} \langle \overline{\nabla} F, v \rangle &= \frac{d}{dt}|_{t=0} \left(\frac{1}{2} \langle \alpha(t) - c, \alpha(t) - c \rangle \right) \\ &= \langle \alpha'(0), \alpha(0) - c \rangle \\ &= \langle x - c, v \rangle, \ \textit{isto é,} \\ \overline{\nabla} F &= x - c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}^2 F(X,Y) &= \langle \overline{\nabla}_X \overline{\nabla} F, Y\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X (x-c), Y\rangle \\ &= \langle X, Y\rangle,\end{aligned}$$

$$\nabla f = (x-c) - \langle x-c, N\rangle N = (x-c)^T$$

e

$$\nabla^2 f(X,Y) = \langle X,Y\rangle + \langle AX, Y\rangle\langle x-c, N\rangle.$$

É comum o uso sistemático das letras latinas X, Y, Z, etc., para indicar os campos diferenciáveis, tanto em M quanto em $\overline{M}$, desde que fique claro que estaremos considerando suas respectivas extensões, e as letras gregas η, ξ, ζ, etc., para indicar os campos diferenciáveis de vetores normais.

Proposição 2.13 *(Equação de Gauss) Sejam $f : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ uma imersão, B a segunda forma fundamental, X, Y, Z, T campos diferenciáveis, R e $\overline{R}$ as curvaturas de M e $\overline{M}$, respectivamente. Então vale:*

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z, T\rangle = \langle R(X,Y)Z, T\rangle - \langle B(Y,T), B(X,Z)\rangle + \langle B(X,T), B(Y,Z)\rangle.$$

Dados X e η, já vimos que a componente tangente de $\overline{\nabla}_X \eta$ é dada por $(\overline{\nabla}_X \eta)^T = -A_\eta(X)$. A componente normal de $\overline{\nabla}_X \eta$ é chamada de conexão normal da imersão e é denotada por $\nabla^\perp$. Explicitamente,

$$\nabla^\perp_X \eta = (\overline{\nabla}_X \eta)^N = \overline{\nabla}_X \eta - (\overline{\nabla}_X \eta)^T = \overline{\nabla}_X \eta + A_\eta(X).$$

Verifica-se facilmente que a conexão normal $\nabla^\perp$ possui as propriedades usuais de uma conexão, isto é, é linear em X, aditiva em η, e

$$\nabla^\perp_X (f\eta) = f\nabla^\perp_X \eta + X(f)\eta,\ f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Dada uma imersão isométrica, é conveniente denotar por $\mathfrak{X}(M)^\perp$ o espaço dos campos diferenciáveis de vetores normais a M. Podemos considerar a segunda forma fundamental da imersão como um tensor

$$B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^{\perp} \to \mathcal{C}^{\infty}(M)$$

definido por

$$B(X, Y, \eta) = \langle B(X, Y), \eta \rangle.$$

Podemos definir a derivada covariante deste tensor da maneira natural:

$$(\overline{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) = X(B(Y, Z, \eta)) - B(\nabla_X Y, Z, \eta) - B(Y, \nabla_X Z, \eta) - B(Y, Z, \nabla^{\perp}_X \eta).$$

Proposição 2.14 *(Equação de Codazzi) Com a notação acima, vale*

$$\langle \overline{R}(X, Y)Z, \eta \rangle = (\overline{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) - (\overline{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta).$$

Observação 2.7 *Se o espaço ambiente $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante, a equação de Codazzi se escreve como*

$$(\overline{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) = (\overline{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta).$$

Se a codimensão da imersão é 1, pela observação 2.5, temos

$$\nabla^{\perp}_X \eta = \overline{\nabla}_X \eta - (\overline{\nabla}_X \eta)^T = \overline{\nabla}_X \eta - \overline{\nabla}_X \eta = 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) &= X(B(Y, Z, \eta)) - B(\nabla_X Y, Z, \eta) - B(Y, \nabla_X Z, \eta) \\
&= X\langle B(Y, Z), \eta \rangle - \langle B(\nabla_X Y, Z), \eta \rangle - \langle B(Y, \nabla_X Z), \eta \rangle \\
&= X\langle AY, Z \rangle - \langle A(\nabla_X Y), Z \rangle - \langle AY, \nabla_X Z \rangle \\
&= \langle \nabla_X (AY), Z \rangle - \langle A(\nabla_X Y), Z \rangle \ \textit{e, analogamente,}
\end{aligned}$$

$$(\overline{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) = \langle \nabla_Y (AX), Z \rangle - \langle A(\nabla_Y X), Z \rangle.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_X B)(Y,Z,\eta) &= (\overline{\nabla}_Y B)(X,Z,\eta)\\
\Rightarrow \langle \nabla_X(AY),Z\rangle - \langle A(\nabla_X Y),Z\rangle &= \langle \nabla_Y(AX),Z\rangle - \langle A(\nabla_Y X),Z\rangle\\
\Rightarrow \langle \nabla_X(AY) - \nabla_Y(AX),Z\rangle &= \langle A(\nabla_X Y) - A(\nabla_Y X),Z\rangle\\
\Rightarrow \langle \nabla_X(AY) - \nabla_Y(AX),Z\rangle &= \langle A(\nabla_X Y - \nabla_Y X),Z\rangle\\
\Rightarrow \langle \nabla_X(AY) - \nabla_Y(AX),Z\rangle &= \langle A([X,Y]),Z\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla_X(AY) - \nabla_Y(AX) = A([X,Y]).$$

Definição 2.28 *Seja M uma variedade Riemanniana e ∇ sua conexão Riemanniana. Diz-se que uma imersão $\boldsymbol{x} : N^n \to M^{n+1}$ é totalmente umbílica se, para todo $p \in N$, a segunda forma fundamental B de x em p satisfaz*

$$\langle B(X,Y),\eta\rangle(p) = \lambda(p)\langle X,Y\rangle,\ \ \lambda(p) \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e todo campo unitário η normal a $x(N)$. Aqui estamos usando $\langle,\rangle$ para indicar a métrica em M e a métrica induzida por x em N.

Teorema 2.3 *Sejam M uma variedade Riemanniana, ∇ sua conexão Riemanniana e $\boldsymbol{x} : N^n \to M^{n+1}$ uma imersão totalmente umbílica. Se M tem curvatura seccional constante, λ, dado em (1), não depende de p. E ainda, se $M^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$, N for compacta e conexa e $\lambda \neq 0$, então $x(N)$ é uma n-esfera $S^n(\lambda) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, de curvatura igual a λ.*

Prova: Sejam $X, Y, T \in \mathfrak{X}(M)$. Veja que, em p, temos

$$\begin{aligned}
\lambda\langle X,Y\rangle &= \langle B(X,Y),\eta\rangle = \langle \nabla_X Y - (\nabla_X Y)^T,\eta\rangle = \langle \nabla_X Y,\eta\rangle = X\langle Y,\eta\rangle - \langle \nabla_X \eta, Y\rangle\\
&\Rightarrow \ -\langle \nabla_X\eta, Y\rangle = \lambda\langle X,Y\rangle \text{ e, analogamente,}\\
&\ \ -\langle \nabla_T\eta, Y\rangle = \lambda\langle T,Y\rangle.
\end{aligned}$$

Derivando a primeira equação em relação a T e a segunda em relação a X, obtemos

$$-\langle \nabla_T\nabla_X\eta, Y\rangle - \langle \nabla_X\eta, \nabla_T Y\rangle = T(\lambda)\langle X,Y\rangle + \lambda T\langle X,Y\rangle \text{ e, analogamente,} \tag{2}$$

$$-\langle\nabla_X\nabla_T\eta, Y\rangle - \langle\nabla_T\eta, \nabla_X Y\rangle = X(\lambda)\langle T, Y\rangle + \lambda X\langle T, Y\rangle. \tag{3}$$

Subtraindo (2) de (3), obtemos

$$\begin{aligned}
\langle\nabla_T\nabla_X\eta - \nabla_X\nabla_T\eta, Y\rangle &= -\langle\nabla_X\eta, \nabla_T Y\rangle + \langle\nabla_T\eta, \nabla_X Y\rangle - \langle T(\lambda)X - X(\lambda)T, Y\rangle \\
&\quad -\lambda T\langle X, Y\rangle + \lambda X\langle T, Y\rangle \\
&= -\langle\nabla_X\eta, \nabla_T Y\rangle + \langle\nabla_T\eta, \nabla_X Y\rangle - \langle T(\lambda)X - X(\lambda)T, Y\rangle \\
&\quad -\lambda\langle\nabla_T X, Y\rangle - \lambda\langle X, \nabla_T Y\rangle + \lambda\langle\nabla_X T, Y\rangle + \lambda\langle T, \nabla_X Y\rangle \\
&= -\langle\nabla_X\eta, \nabla_T Y\rangle + \langle\nabla_T\eta, \nabla_X Y\rangle - \langle T(\lambda)X - X(\lambda)T, Y\rangle \\
&\quad -\langle B(\nabla_T X, Y), \eta\rangle - \langle B(X, \nabla_T Y), \eta\rangle + \langle B(\nabla_X T, Y), \eta\rangle \\
&\quad +\langle B(T, \nabla_X Y), \eta\rangle \\
&= -\langle\nabla_X\eta, \nabla_T Y\rangle + \langle\nabla_T\eta, \nabla_X Y\rangle - \langle T(\lambda)X - X(\lambda)T, Y\rangle \\
&\quad -\langle A(\nabla_T X), Y\rangle - \langle AX, \nabla_T Y\rangle + \langle A(\nabla_X T), Y\rangle + \langle AT, \nabla_X Y\rangle \\
&= -\langle\nabla_X\eta, \nabla_T Y\rangle + \langle\nabla_T\eta, \nabla_X Y\rangle - \langle T(\lambda)X - X(\lambda)T, Y\rangle \\
&\quad +\langle A(\nabla_X T - \nabla_T X), Y\rangle + \langle\nabla_X\eta, \nabla_T Y\rangle - \langle\nabla_T\eta, \nabla_X Y\rangle \\
&= -\langle T(\lambda)X - X(\lambda)T, Y\rangle - \langle A[X, T], Y\rangle \\
&= -\langle T(\lambda)X - X(\lambda)T, Y\rangle - \langle\nabla_{[X,T]}\eta, Y\rangle
\end{aligned}$$

Daí,

$$\langle\nabla_T\nabla_X\eta - \nabla_X\nabla_T\eta + \nabla_{[X,T]}\eta, Y\rangle = -\langle T(\lambda)X - X(\lambda)T, Y\rangle$$

$$\Rightarrow \langle R(X, T)\eta, Y\rangle = -\langle T(\lambda)X - X(\lambda)T, Y\rangle \tag{4}$$

Como a curvatura seccional de M é constante e igual a, digamos, um certo $K \in \mathbb{R}$, temos

$$\langle R(X, T)\eta, Y\rangle = K\left(\langle X, \eta\rangle\langle T, Y\rangle - \langle T, \eta\rangle\langle X, Y\rangle\right) = 0.$$

Portanto, de (4), temos

$$-\langle T(\lambda)X - X(\lambda)T, Y\rangle = 0, \text{ para todo } Y \in \mathfrak{X}(N), \text{ ou seja,}$$

$$T(\lambda)X - X(\lambda)T = 0.$$

Supondo T e X linearmente independentes, obtemos $X(\lambda) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(N)$, de onde segue que λ é constante.

Agora, considere a aplicação $y : N \to \mathbb{R}^{n+1}$ dada por

$$y(p) = x(p) + \frac{\eta(p)}{\lambda}, p \in N.$$

Sejam $T, N \in \mathfrak{X}(N)$. Observe que

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_T y, Y\rangle &= \langle \nabla_T \left(x + \frac{\eta}{\lambda}\right), Y\rangle \\
&= \langle \nabla_T x, Y\rangle + \frac{1}{\lambda}\langle \nabla_T \eta, Y\rangle \\
&= \langle T, Y\rangle - \frac{1}{\lambda}\langle AT, Y\rangle \\
&= \langle T, Y\rangle - \frac{1}{\lambda}\langle B(T,Y), \eta\rangle \\
&= \langle T, Y\rangle - \frac{1}{\lambda}\lambda\langle T, Y\rangle \\
&= \langle T, Y\rangle - \langle T, Y\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como Y é arbitrário, isso implica que $y(N)$ é constante, ou seja, reduz-se a um único ponto, digamos, x_0. Daí,

$$\begin{aligned}
& x_0 = y(p) = x(p) + \frac{\eta(p)}{\lambda} \\
\Rightarrow \quad & x(p) - x_0 = -\frac{\eta(p)}{\lambda} \\
\Rightarrow \quad & \|x(p) - x_0\|^2 = \frac{1}{\lambda^2} \text{ , isto é,}
\end{aligned}$$

$x(N)$ está contida em uma esfera de centro x_0 e raio $\frac{1}{\lambda}$. Mas N é compacta e conexa, logo, $x(N)$ é a própria esfera.

$\square$

3 RESULTADOS FUNDAMENTAIS UTILIZADOS

3.1 Transformação de Newton, r-ésima Curvatura Média e Operador Linearizado L_r

Definição 3.1 *Sejam $x : M^n \to N^{n+1}$ uma imersão de uma variedade Riemanniana M^n na variedade Riemanniana N^{n+1} e A operador forma. Sejam $\lambda_1, ..., \lambda_n$ os autovalores de A associados aos autovetores $\{e_1, ..., e_n\}$. As funções simétricas elementares associadas a A são definidas por*

$$S_r := S_r(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \sum_{i_1<...<i_r} \lambda_{i_1}...\lambda_{i_r}, \quad com\ 1 \leq i_1, ..., i_r \leq n,$$

e a curvatura r-média é definida por

$$H_r := H_r(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \frac{1}{\binom{n}{r}} S_r,$$

com $S_0 = H_0 = 1$ e $S_r = H_r = 0$, se $r \notin \{0, 1, ..., n\}$. Observe que as funções H_1 e H_2 são a curvatura média e escalar, respectivamente. H_n é conhecida como curvatura de Gauss-Kronecker.

Definição 3.2 *A r-ésima transformação Newton $P_r : T_pM \to T_pM$ é definida, indutivamente, por*

$$P_0 = I \ e \ P_r = S_rI - AP_{r-1}, \ r \geq 1.$$

Proposição 3.1 *A r-ésima transformação de Newton P_r e o operador forma A comutam.*
Prova: A prova será por indução. O resultado vale para $P_0 = I$. Suponhamos que $AP_{r-1} = P_{r-1}A$. Assim

$$\begin{aligned} AP_r &= A(S_rI - AP_{r-1}) \\ &= A(S_rI - P_{r-1}A) \\ &= S_rA - AP_{r-1}A \\ &= (S_rI - AP_{r-1})A \\ &= P_rA. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.2 *A r-ésima transformação de Newton P_r é auto adjunta.*
Prova: A prova será feita por indução. O resultado vale para $P_0 = I$. Suponhamos que

P_{r-1} é auto adjunta e sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Então

$$\begin{aligned}
\langle P_r(X), Y\rangle &= \langle (S_r I - AP_{r-1})X, Y\rangle \\
&= \langle S_r X, Y\rangle - \langle AP_{r-1}(X), Y\rangle \\
&= \langle S_r X, Y\rangle - \langle P_{r-1}(X), AY\rangle \\
&= \langle X, S_r Y\rangle - \langle X, AP_{r-1}(Y)\rangle \\
&= \langle X, (S_r I - AP_{r-1})Y\rangle \\
&= \langle X, P_r(Y)\rangle.
\end{aligned}$$

□

Da definição de P_r, é imediato ver que uma base que diagonaliza A também diagonaliza P_r.

Se $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são autovalores de A, denotamos

$$S_r(A_i) = S_r(\lambda_1, ..., \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, ..., \lambda_n).$$

Proposição 3.3 *Seja $\lambda_1, ..., \lambda_n$ os auto valores de A. Fixado λ_i, temos*

$$S_r(A_i) = S_r - \lambda_i S_{r-1}(A_i).$$

Prova: Podemos escrever S_r como a soma de duas parcelas; uma onde λ_i aparece e outra onde λ_i não aparece:

$$S_r = A + \lambda_i C.$$

A é exatamente $S_r(A_i)$ e C é a soma cujas parcelas são somas de todos os produtos de $(r-1)$ curvaturas principais, exceto λ_i, ou seja, $S_{r-1}(A_i)$. Daí,

$$S_r = S_r(A_i) + \lambda_i S_{r-1}(A_i).$$

□

Proposição 3.4 *Para cada $1 \leqslant r \leqslant n-1$, tem-se:*

a) $P_r(e_i) = S_r(A_i)e_i,\ i \in \{1, ..., n\},$ *onde* $\{e_1, ..., e_n\}$ *é uma base que diagonaliza A em p;*

b) $tr(P_r) = (n-r)S_r$;

c) $tr(AP_r) = (r+1)S_{r+1}$;

d) $tr(A^2 P_r) = S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}$.

Prova:

a) A prova é por indução sobre r. Para $n = 1$, temos $P_1 = S_1 I - A$, logo,

$$P_1(e_i) = S_1 e_i - A(e_i) = (S_1 - \lambda_i)e_i = S_1(A_i)e_i.$$

Supondo que o resultado é válido para $n - 1$, temos

$$P_r(e_i) = S_r e_i - AP_{r-1}(e_i) = S_r e_i - A(S_{r-1}(A_i)e_i) = (S_r - S_{r-1}(A_i)\lambda_i)e_i = S_r(A_i)e_i.$$

b)

$$\begin{aligned} tr(P_r) &= \sum_{i=1}^{n} \langle P_r(e_i), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle S_r(A_i)e_i, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} S_r(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (S_r - \lambda_i S_{r-1}(A_i)) \\ &= nS_r - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_{r-1}(A_i) \\ &= (n-r)S_r. \end{aligned}$$

c) Da igualdade $P_{r+1} = S_{n+1} I - AP_r$, temos

$$AP_r = S_{n+1} I - P_{r+1}.$$

Daí,

$$tr(AP_r) = tr(S_{r+1} I) - tr(P_{r+1}) = nS_{r+1} - (n-r-1)S_{r+1} = (r+1)S_{r+1}.$$

d) Temos que

$$tr(AP_{r+1}) = tr(A(S_{r+1} I - AP_r)) = tr(S_{r+1} AI) - tr(A^2 P_r),$$

ou seja,

$$tr(A^2 P_r) = S_1 S_{r+1} - tr(AP_{r+1})$$

e, usando o item (c), obtemos

$$tr(A^2 P_r) = S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}. \quad \square$$

Agora, vamos ver um lema que será útil para provar importantes desigualdades envolvendo a curvatura r-média. Tais demonstrações podem ser encontradas em [3], e constam aqui para melhor comodidade na leitura.

Lema 3.1 *Se um polinômio $f \in \mathbb{R}[X]$ possui $k \geqslant 1$ raízes reais, então sua derivada f' possui ao menos $k-1$ raízes reais. Em particular, se todas as raízes de f forem reais, então as raízes de f' também serão reais.*

Prova: Podemos considerar $k > 1$. Sejam $x_1, ..., x_r$ raízes reais de f, com $x_1 < ... < x_r$ e multiplicidade $m_1, ..., m_r$, respectivamente, tais que $m_1 + ... + m_r = k$. Então, cada x_i é raiz de f', com multiplicidade $m_i - 1$, se $m_i \geq 2$. Veja também que, entre x_i e x_{i+1} há, pelo Teorema de Rôlle, pelo menos uma outra raíz de f', de modo que contabilizamos ao menos

$$(m_1 - 1) + ... + (m_r - 1) + (r - 1) = k - 1$$

raízes reais para f'. $\square$

Proposição 3.5 *Para $1 \leq r \leq n$, vale $H_r^2 \geq H_{r-1} \cdot H_{r+1}$. Além disso, se a igualdade ocorre, então $\lambda_1 = ... = \lambda_n$.*

Prova: A prova será por indução sobre a quantidade n dos números reais $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Para $n = 2$, temos

$$\begin{aligned} H_1^2 \geq H_0 \cdot H_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 (\lambda_1 + \lambda_2)^2 \geq \lambda_1 \lambda_2 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}(\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2 - 4\lambda_1\lambda_2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

com igualdade se, e somente se, $\lambda_1 = \lambda_2$. Agora, suponha a desigualdade válida para $(n-1)$ números reais, com igualdade ocorrendo para $H_{n+1} \neq 0$, se, e somente se, os $(n-1)$ números reais forem iguais. Para $n \geq 3$ números reais $\lambda_1, ..., \lambda_n$, seja

$$\begin{aligned} f(x) = (x + \lambda_1)...(x + \lambda_n) \quad &= \quad S_0 x^n + S_1 x^{n-1} + ... + S_n \\ &= \quad H_0 x^n + \binom{n}{1} H_1 x^{n-1} + ... + \binom{n}{n} H_n \\ &= \quad \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} H_r(\lambda_i) x^{x-r}. \end{aligned}$$

Daí,

$$f'(x) = \sum_{r=0}^{n} (n-r) \binom{n}{r} H_r(\lambda_i) x^{x-r-1} = \sum_{r=0}^{n-1} (n-r) \binom{n}{r} H_r(\lambda_i) x^{x-r-1}.$$

Pelo lema anterior, existem $y_1, ...y_{n-1}$ tais que

$$\begin{aligned} f'(x) = n(x-y_1)...(x-y_{n-1}) &= n\sum_{r=0}^{n-1} S_r(y_i)x^{n-1-r} \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} n\binom{n-1}{r} H_r(y_i)x^{n-r-1}. \end{aligned}$$

Como $(n-r)\binom{n}{r} = n\binom{n-1}{r}$, obtemos $H_r(\lambda_i) = H_r(y_i)$, para $0 \leq r \leq n-1$. Assim, pela hipótese de indução, segue que, para $0 \leq r \leq n-2$,

$$H_r^2(\lambda_i) = H_r^2(y_i) \geq H_{r-1}(y_i) \cdot H_{r+1}(y_i) = H_{r-1}(y_i) \cdot H_{r+1}(\lambda_i).$$

Além disso, se tivermos a igualdade para os λ_i, com $H_{r+1}(\lambda_i) \neq 0$, então também teremos igualdade para os y_i, com $H_{r+1}(y_i) \neq 0$. Novamente pela hipótese de indução, segue que $y_1 = ... = y_{n-1}$ e, daí, $\lambda_1 = ... = \lambda_n$.

Agora, vejamos o caso em que $r = n-1$. Se algum $\lambda_i = 0$, a desigualdade é óbvia. Se não, $H_n \neq 0$ e

$$\begin{aligned} H_{n-1}^2 \geq H_{n-2} \cdot H_n \quad &\Leftrightarrow \quad \left[\binom{n}{n-1}^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{H_n}{\lambda_i}\right]^2 \geq \left[\binom{n}{n-2}^{-1} \sum_{i<j} \frac{H_n}{\lambda_i\lambda_j}\right] \\ &\Leftrightarrow \quad (n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}\right)^2 \geq 2n\sum_{i<j} \frac{1}{\lambda_i\lambda_j}. \end{aligned}$$

Denotando $\alpha_i = \frac{1}{\lambda_i}$, temos que a desigualdade anterior é equivalente a

$$\begin{aligned} & n\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2 - 2n\sum_{i<j} \alpha_i\alpha_j \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & n\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2 - 2\sum_{i<j} \alpha_i\alpha_j\right] - \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & n\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

que é verdade pela desigualdade de Cauchy-Schwarz. Também nesse caso, vê-se que ocorre a igualdade se, e somente se, todos os α_i (e portanto os λ_i) forem iguais. O caso $r = n$ é óbvio, desde que $H_{r+1} = H_{n+1} = 0$. $\square$

Proposição 3.6 *Se $H_1, H_2, ..., H_{r-1}$ são não negativas e H_r é positivo para algum $1 < r \leq n$, então $H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}} \geq ... \geq H_r^{\frac{1}{r}}$. Além disso, se a igualdade ocorrer para algum $1 \leq j < r$, então $\lambda_1 = ... = \lambda_n$.*

Prova: Observe que $H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}}$ segue da proposição anterior. Suponha então válida para algum $2 \leq k < r$. Então assumindo $H_1, H_2, ...H_k \geq 0$ e $H_{k+1} > 0$ segue, pela proposição anterior, que $H_k > 0$. De fato, $H_k = 0 \Rightarrow 0 \geq H_{k-1} \cdot H_{k-1} \Rightarrow H_{k-1} = 0 \Rightarrow H_k^2 = 0 = 0 \cdot H_{k+1} = H_{k-1} \cdot H_{k+1}$, isto é, $H^2 = H_k^2 = H_{k-1} \cdot H_{k+1}$ com $H_{k+1} \neq 0$, logo, pela proposição anterior, $\lambda = \lambda_1 = ... = \lambda_n$, daí, $\lambda^k = H_k = 0$, donde $\lambda = 0$ e, portanto, $H_{k+1} = 0$, o que é uma contradição. Assim, $H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}} \geq ... \geq H_k^{\frac{1}{k}}$ e, então

$$H_k^2 \geq H_{k-1} \cdot H_{k+1} \geq H_k^{\frac{k-1}{k}} \cdot H_{k+1},$$

ou ainda $H^{\frac{1}{k}} \geq H_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}$. Segue imediatamente das desigualdades acima que, caso $H^{\frac{1}{k}} = H_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}$ para algum $1 \leq k < n$, então $H_k^2 = H_{k-1} \cdot H_{k+1}$. Daí, a proposição anterior garante que $\lambda_1 = ...\lambda_n$. □

Definição 3.3 *Associado à transformação de Newton P_r, temos o operador diferencial de segunda ordem $L_r : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$, chamado de operador linearizado L_r e que é definido por*

$$L_r f = tr(P_r \nabla^2 f).$$

Em particular, quando $r = 0$, tem-se $L_0 f = \Delta f$. Por este motivo, dizemos que o operador L_r generaliza, em certo sentido, o Laplaciano.

Observação 3.1 *Quando N^{n+1} é uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante, foi provado por H. Rosenberg em [15] que L_r pode ser escrito como*

$$L_r f = div(P_r \nabla f).$$

Daí, segue do teorema da divergência que

$$\int_M L_r f = 0.$$

Definição 3.4 *Sejam Q_c^{n+1} uma forma espacial simplesmente conexa, isto é, uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante c, e $x : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana orientada M^n. O vetor posição X, com respeito a $p_0 \in Q_c^{n+1}$, é dado por $X(x(p)) = S_c(s(p))\overline{\nabla} s(p)$, onde S_c é a solução da equação $y'' + cy = 0$ com condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$, isto é,*

$$S_c(s) = \begin{cases} s;\ c = 0 \\ \frac{sen(s\sqrt{c})}{\sqrt{c}};\ c > 0 \\ \frac{senh(s\sqrt{-c})}{\sqrt{-c}};\ c < 0 \end{cases}$$

e $\overline{\nabla}s$ é o gradiente da função distância $s(\cdot) = d(\cdot, p_0)$ em Q_c^{n+1}. Denotaremos $S_c'(s(p)) = \theta_c(s(p))$.Também definimos a função suporte da imersão $x : M \to Q_c^{n+1}$ no ponto p_0 para o campo vetorial normal unitário η por $\rho = \langle X, N\rangle$. A partir daqui, X sempre denotará o vetor posição, a menos que se diga explicitamente o contrário.

Veja que se $c = 0$, i.e., $Q_c^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$, então $s(x) = d(x, p_0) = |x - p_0|$. Dados $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $v \in T_x\mathbb{R}^{n+1}$, seja $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma curva suave, tal que $\alpha(0) = x$ e $\alpha'(0) = v$. Daí,

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\nabla} s(x), v\rangle &= ds_x(v) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}(s \circ \alpha)(t) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}\sqrt{\langle \alpha(t) - p_0, \alpha(t) - p_0\rangle} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\langle \alpha(t) - p_0, \alpha(t) - p_0\rangle}} \cdot 2\langle \alpha'(t), \alpha(t) - p_0\rangle|_{t=0} \\
&= \frac{1}{|x - p_0|}\langle x - p_0, v\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\overline{\nabla} s(x) = \frac{x - p_0}{|x - p_0|}.$$

Assim, $X(x) = x - p_0$. Tomando p_0 como sendo a origem de $\mathbb{R}^{n+1}$, temos $X(x) = x$. Então, dada a imersão $\psi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$, temos

$$X(\psi(p)) = \psi(p), \tag{5}$$

isto é, podemos interpretar a imersão ψ como o vetor posição da hipersuperfície.

No caso em que $c > 0$, vamos supor, sem perda de generalidade, que $c = 1$ e, portanto, Q_c^{n+1} é a esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$ em $\mathbb{R}^{n+2}$. Neste caso, para qualquer ponto $p_0 \in \mathbb{S}^{n+1}$, a função distância $s(\cdot) = d(\cdot, p_0)$, dada pelo comprimento da geodésica minimizante, é diferenciável em $\mathbb{S}^{n+1} - \{p_0, -p_0\}$. Assim, o vetor posição com origem em p_0 dado por

$$X(p) = \sin s \overline{\nabla} s(p)$$

só é diferenciável em $\mathbb{S}^{n+1} - \{p_0, -p_0\}$. Como a esfera é unitária e $s(p) = d(p, p_0)$, obtemos que o ângulo s corresponde ao arco de p_0 a p com vetor tangente $\overline{\nabla} s$, i.e., $\sphericalangle(p, p_0) = s$ e $\sin s$ é igual ao raio do círculo (paralelo) que passa por p.

Visto que $\overline{\nabla} s(p)$ é o vetor velocidade da geodésica que parte de p_0, então $\overline{\nabla} s(p)$

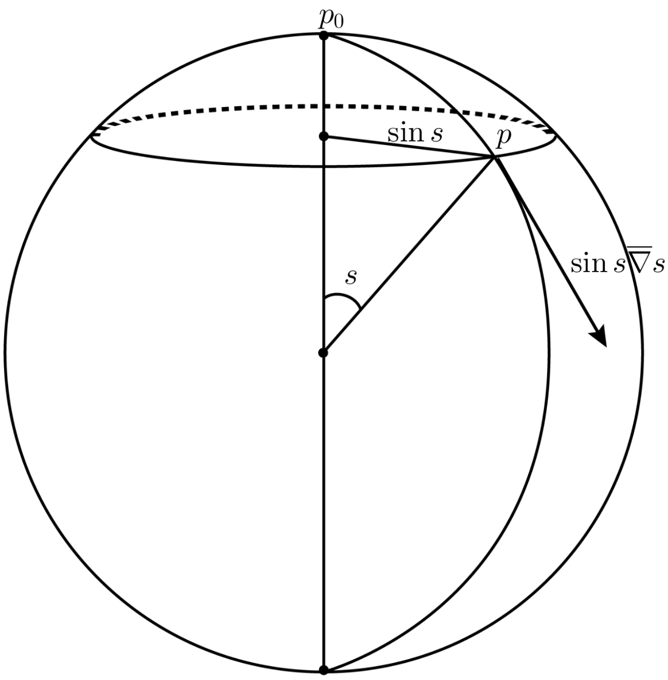

Figura 1: Vetor posição na esfera

é ortogonal a p. Logo, podemos decompor p_0 da seguinte maneira:

$$p_0 = \alpha p + \beta\overline{\nabla}s(p),$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Daí, $\alpha = \langle p_0, p\rangle = |p_0|\cdot|p|\cos s$ e $\beta = \langle p_0, \overline{\nabla}s(p)\rangle = |p_0|\cdot|\overline{\nabla}s(p)|\cos(s+\frac{\pi}{2}) = -\sin s(p)$. Assim,

$$p_0 = \cos s(p)p - \sin s(p)\overline{\nabla}s(p).$$

Como $\langle p, \eta(p)\rangle = 0$, temos

$$\langle p_0, \eta(p)\rangle = -\sin s(p)\langle\overline{\nabla}s(p), \eta(p)\rangle = -\rho(p),$$

onde ρ é a função suporte. Daí,

$$|\rho(p)| = |\langle p_0, \eta(p)\rangle|. \tag{6}$$

No caso em que $c < 0$, vamos utilizar o modelo do hiperbolóide para o espaço hiperbólico. Para isto, denotaremos as $(n+2)$ coordenadas de um ponto $x \in \mathbb{R}^{n+2}$ por $(x_0, x_1, ..., x_{n+1})$. Seja $\mathbb{L}^{n+2}$ o espaço vetorial $\mathbb{R}^{n+2}$ munido com a métrica

$$\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle : \mathbb{R}^{n+2}_1 \times \mathbb{R}^{n+2}_1 \to \mathbb{R}$$

dada por

$$\langle\langle x, y\rangle\rangle = x_0y_0 + x_1y_1 + ... + x_ny_n - x_{n+1}y_{n+1}.$$

Esta métrica, que é um exemplo do que chamamos de métrica pseudo Riemanniana (forma bilinear simétrica, não degenerada, mas não necessariamente positiva definida), é chamada de métrica de Lorentz e $\mathbb{L}^{n+2}$ é chamado de espaço de Lorentz.

O espaço hiperbólico real de curvatura seccional constante -1 pode ser visto como a hipersuperfície de $\mathbb{L}^{n+2}$ definida por

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{x \in \mathbb{L}^{n+2}; \|x\|^2 = -1, x_{n+1} \geq 0\},$$

com a métrica positiva induzida pela métrica de Lorentz de $\mathbb{L}^{n+2}$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $p_0 = e_{n+2} = (0, ..., 0, 1)$. Os vetores p_0, p e $\overline{\nabla}s(p)$ estão num mesmo plano e não são colineares, portanto, podemos escrever p_0 como combinação linear dos outros dois vetores, isto é,

$$p_0 = \alpha p - \beta\overline{\nabla}s(p),$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Observamos que, como $\langle\langle\overline{\nabla}s(p), p\rangle\rangle = 0$,

$$-1 = \|p_0\|^2 = \alpha^2\|p\|^2 + \beta^2\|\overline{\nabla}s(p)\|^2 = -\alpha^2 + \beta^2.$$

Daí, $\alpha = \cosh s(p)$ e $\beta = \sinh s(p)$ e, portanto,

$$p_0 = \cosh s(p)p - \sinh s(p)\overline{\nabla}s(p).$$

Seja $\eta(p)$ o vetor normal a M em p. Como $\langle\langle p, \eta\rangle\rangle = 0$,

$$\begin{aligned}
\langle\langle p_0, \eta\rangle\rangle &= \cosh s(p)\langle\langle p, \eta(p)\rangle\rangle - \sinh s(p)\langle\langle\overline{\nabla}s(p), \eta(p)\rangle\rangle \\
&= \langle\langle\sinh s(p)\overline{\nabla}s(p), \eta(p)\rangle\rangle \\
&= \langle\langle X, \eta(p)\rangle\rangle \\
&= -\rho(p)
\end{aligned}$$

Assim,

$$|\rho(p)| = |\langle\langle p_0, \eta\rangle\rangle|. \tag{7}$$

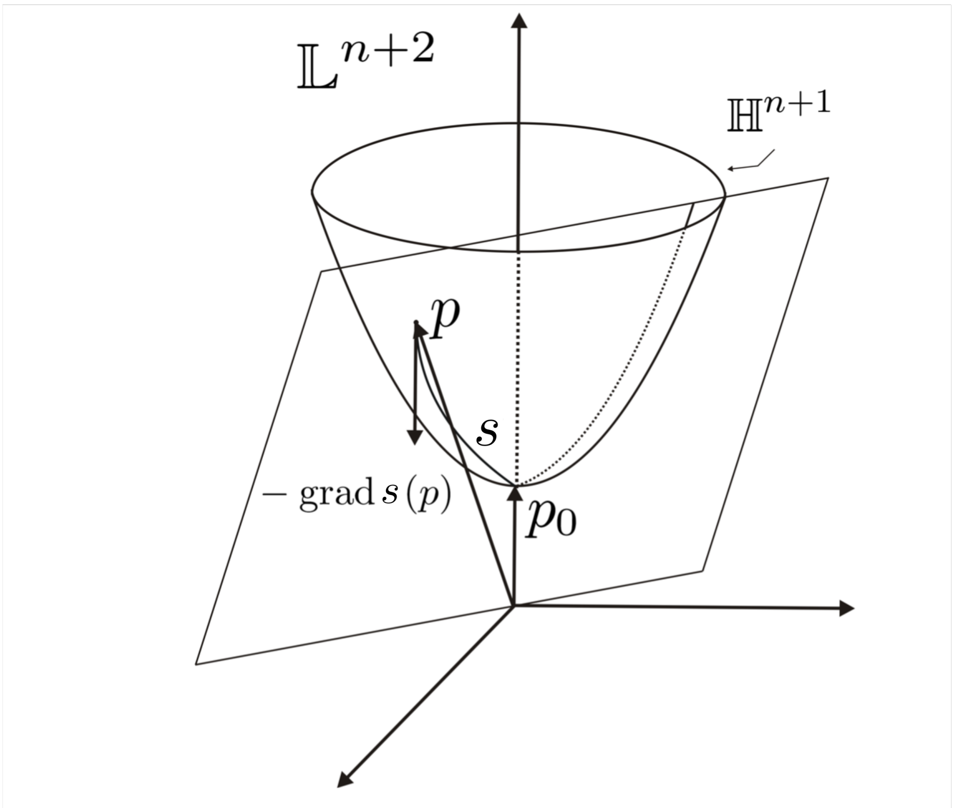

Figura 2: Vetor posição no espaço hiperbólico

Proposição 3.7 *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(Q_c^{n+1})$, então*

$$\langle \overline{\nabla}_X \overline{\nabla} s, Y\rangle = \frac{\theta_c}{S_c}\left(\langle X, Y\rangle - \langle \overline{\nabla} s, X\rangle\langle \overline{\nabla} s, Y\rangle\right),$$

onde s é a função distância em $\mathfrak{X}(Q_c^{n+1})$.

Prova: Inicialmente, veja o caso em que $c = 0$. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n+1})$ e $s : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ a função distância dada por

$$r(p) = d(p, p_0) = |p - p_0|,\ p_0 \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Como $s^2 = |p - p_0|^2 = \langle p - p_0, p - p_0\rangle$, temos que

$$Y(s^2) = 2\langle Y, p - p_0\rangle = 2s\langle \overline{\nabla} s, Y\rangle,$$

isto é,

$$\langle Y, p - p_0\rangle = s\langle \overline{\nabla} s, Y\rangle.$$

Derivando em relação a X a equação acima, obtemos

$$\langle\overline{\nabla}_X Y, p-p_0\rangle + \langle X,Y\rangle = \langle\overline{\nabla}s, X\rangle\langle\overline{\nabla}s, Y\rangle + r\left(\langle\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}s, Y\rangle + \langle\overline{\nabla}s, \overline{\nabla}_X Y\rangle\right).$$

Como $s\overline{\nabla}s = p - p_0$, obtemos

$$\langle\overline{\nabla}_X Y, p-p_0\rangle + \langle X,Y\rangle = \langle\overline{\nabla}s, X\rangle\langle\overline{\nabla}s, Y\rangle + s\langle\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}s, Y\rangle + \langle p-p_0, \overline{\nabla}_X Y\rangle,$$

ou seja,

$$\langle\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}s, Y\rangle = \frac{1}{s}\left(\langle X,Y\rangle - \langle\overline{\nabla}s, X\rangle\langle\overline{\nabla}s, Y\rangle\right).$$

Visto que $S_c = s$ e $\theta_c = 1$ em $\mathbb{R}^{n+1}$, está provado o resultado para este caso.

No caso em que $c = 1$, consideremos $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{n+1})$. Derivando a igualdade

$$p_0 = \cos s(p)p - \sin s(p)\overline{\nabla}s(p)$$

em relação a X, obtemos

$$0 = -\sin s(p)\langle\overline{\nabla}s(p), X\rangle p + \cos s(p)X - \cos s(p)\langle\overline{\nabla}s(p), X\rangle\overline{\nabla}s(p) - \sin s(p)\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}s(p),$$

ou seja,

$$\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}s(p) = -\langle\overline{\nabla}s(p), X\rangle p + \frac{\cos s(p)}{\sin s(p)}\left(X - \langle\overline{\nabla}s(p), X\rangle\overline{\nabla}s(p)\right).$$

Visto que, em $\mathbb{S}^{n+1}$, $S_c = \sin s(p)$ e $\theta_c = \cos s(p)$, concluímos a prova neste caso.

Finalmente, para o caso em que $c = 1$, seja $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$. Derivando a igualdade

$$p_0 = \cosh s(p)p - \sinh s(p)\overline{\nabla}s(p),$$

em relação a X, obtemos

$$0 = \sinh s(p)\langle\overline{\nabla}s(p), X\rangle p + \cosh s(p)X - \cosh s(p)\langle\overline{\nabla}s(p), X\rangle\overline{\nabla}s(p) - \sinh s(p)\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}s(p),$$

ou seja,

$$\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}s(p) = \langle\overline{\nabla}s(p), X\rangle p + \frac{\cosh s(p)}{\sinh s(p)}\left(X - \langle\overline{\nabla}s(p), X\rangle\overline{\nabla}s(p)\right).$$

Como $\langle p, Y\rangle = 0$,

$$\langle\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}s(p), Y\rangle = \frac{\cosh s(p)}{\sinh s(p)}\left(\langle X,Y\rangle - \langle\overline{\nabla}s(p), X\rangle\langle\overline{\nabla}s(p), Y\right\rangle.$$

Como $S_c = \sinh s(p)$ e $\theta_c = \cosh s(p)$, concluímos a demonstração. $\square$

Lema 3.2 *Seja $M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana orientada M^n em uma forma espacial Q_c^{n+1}. Então temos as seguintes identidades:*

a) $\overline{\nabla}_{e_j} X = \theta_c(s) e_j$

b) $\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j} X = \theta_c(s) h_{ij}\eta - c\langle X, e_i\rangle e_j$

c) $\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j}\langle X, \eta\rangle = -\theta_c(s)h_{ij} - \sum_{k=1}^n \left(\overline{\nabla}_{e_k} h_{ij}\right)\langle X, e_k\rangle - h_{ij}^2\langle X, \eta\rangle$, *onde η é o campo vetorial normal unitário e $\{e_1, ...e_n\}$ é um referencial geodésico em M.*

Prova: Primeiramente, veja que

$$\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla} s = \sum_{j=1}^n \langle \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla} s, e_j\rangle e_j. \tag{8}$$

Pela proposição 3.7, temos

$$\nabla^2 s(X,Y) = \langle \overline{\nabla}_X \overline{\nabla} s, Y\rangle = \frac{\theta_c(s)}{S_c(s)}\left[\langle X, Y\rangle - \langle \overline{\nabla} s, X\rangle\langle \overline{\nabla} s, Y\rangle\right].$$

Fazendo $X = e_i$ e $Y = e_j$, obtemos

$$\nabla^2 s(e_i,e_j) = \langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla} s, e_j\rangle = \frac{\theta_c(s)}{S_c(s)}\left[\langle e_i, e_j\rangle - \langle \overline{\nabla} s, e_i\rangle\langle \overline{\nabla} s, e_j\rangle\right].$$

Substituindo essa informação em (8), obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla} s &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{\theta_c(s)}{S_c(s)}\left(\langle e_i, e_j\rangle - \langle \overline{\nabla} s, e_i\rangle\langle \overline{\nabla} s, e_j\rangle\right) e_j\right] \\
&= \frac{\theta_c(s)}{S_c(s)}\left[\sum_{j=1}^n \langle e_i, e_j\rangle e_j - \sum_{j=1}^n \langle \overline{\nabla} s, e_i\rangle\langle \overline{\nabla} s, e_j\rangle e_j\right] \\
&= \frac{\theta_c(s)}{S_c(s)}\left(e_i - \langle \overline{\nabla} s, e_i\rangle \overline{\nabla} s\right).
\end{aligned}$$

Para o item (a) temos

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{e_j} X &= \overline{\nabla}_{e_j}(S_c(s)\overline{\nabla} s) \\
&= S_c(s)\overline{\nabla}_{e_j}\overline{\nabla} s + S_c'(s)\langle \overline{\nabla} s, e_j\rangle \overline{\nabla} s \\
&= S_c(s)\frac{\theta_c(s)}{S_c(s)}\left(e_i - \langle \overline{\nabla} s, e_i\rangle \overline{\nabla} s\right) + \theta_c(s)\langle \overline{\nabla} s, e_j\rangle \overline{\nabla} s \\
&= \theta_c(s)\left[e_j - \langle \overline{\nabla} s, e_i\rangle \overline{\nabla} s + \langle \overline{\nabla} s, e_i\rangle \overline{\nabla} s\right] \\
&= \theta_c(s) e_j.
\end{aligned}$$

Para o item (b), primeiramente veja que, como S_c satisfaz a equação $y'' + cy = 0$, i.e., $S_c'' + cS_c = 0$, temos que $\theta_c' = -cS_c$. Então

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j}X &= \overline{\nabla}_{e_i}(\theta_c(s)e_j)\\
&= \theta_c(s)\overline{\nabla}_{e_i}e_j + \theta_c'(s)\langle\overline{\nabla}s, e_i\rangle e_j\\
&= \theta_c(s)\left(\langle\overline{\nabla}_{e_i}e_j,\eta\rangle\eta + \nabla_{e_i}e_j\right) - cS_c(s)\langle\overline{\nabla}s, e_i\rangle e_j\\
&= \theta_c h_{ij}\eta - c\langle X, e_i\rangle e_j,
\end{aligned}$$

onde (h_{ij}) é a matriz da segunda forma fundamental B com respeito a e_i.

Finalmente, para o item (c), temos

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j}\eta &= \overline{\nabla}_{e_i}\left(\sum_k\langle\overline{\nabla}_{e_j}\eta, e_k\rangle e_k\right)\\
&= \overline{\nabla}_{e_i}\left(-\sum_k\langle\overline{\nabla}_{e_j}e_k, \eta\rangle e_k\right)\\
&= \overline{\nabla}_{e_i}\left(-\sum_k h_{jk}e_k\right)\\
&= -\sum_k e_i(h_{jk})e_k - \sum_k h_{jk}\overline{\nabla}_{e_i}e_k\\
&= -\sum_k e_i(h_{jk})e_k - \sum_k h_{jk}\left(\langle\overline{\nabla}_{e_i}e_k,\eta\rangle\eta + \underbrace{\nabla_{e_i}e_k}_{0}\right)\\
&= -\sum_k e_i(h_{jk})e_k - \sum_k h_{jk}h_{ik}\eta\\
&= -\sum_k e_i(h_{jk})e_k - h_{ij}^2\eta.
\end{aligned}$$

Daí, usando os itens (a) e (b),

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j}\langle X,\eta\rangle &= e_i\left(\langle\overline{\nabla}_{e_j}X,\eta\rangle + \langle X,\overline{\nabla}_{e_j}\eta\rangle\right)\\
&= \langle\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j}X,\eta\rangle + \langle\overline{\nabla}_{e_j}X,\overline{\nabla}_{e_i}\eta\rangle + \langle\overline{\nabla}_{e_i}X,\overline{\nabla}_{e_j}\eta\rangle + \langle X,\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j}\eta\rangle\\
&= \langle\theta_c(s)h_{ij}\eta - c\langle X,e_i\rangle e_j,\eta\rangle + \langle\theta_c(s)e_j,\overline{\nabla}_{e_i}\eta\rangle + \langle\theta_c(s)e_i,\overline{\nabla}_{e_j}\eta\rangle\\
&\quad + \langle X, -\sum_k e_i(h_{jk})e_k - h_{ij}^2\eta\rangle\\
&= \theta_c(s)h_{ij} - \theta_c(s)\langle\overline{\nabla}_{e_i}e_j,\eta\rangle - \theta_c(s)\langle\overline{\nabla}_{e_j}e_i,\eta\rangle - \sum_k e_i(h_{jk})\langle X,e_k\rangle - h_{ij}^2\langle X,\eta\rangle\\
&= \theta_c(s)h_{ij} - 2\theta_c(s)h_{ij} - \sum_k e_i(h_{jk})\langle X,e_k\rangle - h_{ij}^2\langle X,\eta\rangle\\
&= -\theta_c(s)h_{ij} - \sum_k e_k(h_{ij})\langle X,e_k\rangle - h_{ij}^2\langle X,\eta\rangle,
\end{aligned}$$

pela observação 2.7. $\square$

A prova para o próximo lema pode ser encontrada em [14], página 489, Lema A.

Lema 3.3 *Seja (h_{ij}) uma matriz simétrica $n \times x$ de funções diferenciáveis reais em um conjunto aberto do $\mathbb{R}^m$. Seja S_j a j-ésima função elementar simétrica dos autovalores de (h_{ij}) e h^r_{kl} o (k,l)-ésimo elemento da r-ésima potência da matriz (h_{ij}). Então, para todo vetor x no domínio de (h_{ij}), vale*

$$r\overline{\nabla}_x S_{r+1} = \sum_{i,j} \left(\overline{\nabla}_x (P_r)_{ij} \right),$$

onde $(P_r)_{ij} = \langle P_r(e_i), e_j \rangle$.

Proposição 3.8 *Seja $M^n \to Q^{n+1}_c$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana orientada M^n em uma forma espacial Q^{n+1}_c. Então*

$$L_r\langle X, \eta\rangle = -(r+1)S_{r+1}\theta_c(s) - (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})\langle X, \eta\rangle - \langle \nabla S_{r+1}, X\rangle.$$

Prova: Consideremos um referencial geodésico $\{e_1, ..., e_n\}$. Veja que

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{e_i} \nabla \langle X, \eta\rangle &= \overline{\nabla}_{e_i} \left[\sum_k e_k(\langle X, \eta\rangle) e_k \right] \\ &= \sum_k \left[e_i \left(e_k \langle X, \eta\rangle \right) e_k + e_k\langle X, \eta\rangle \overline{\nabla}_{e_i} e_k \right]. \end{aligned}$$

Pelo item (c) do lema 3.2, temos

$$\overline{\nabla}_{e_i} \nabla \langle X, \eta\rangle = \sum_k \left[-\theta_c(s) h_{ik} e_k - \sum_l \left(\overline{\nabla}_{e_l} h_{ik} \right) \langle X, e_l\rangle e_k - h^2_{ik}\langle X, \eta\rangle e_k + e_k\langle X, \eta\rangle \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_k, \eta\rangle \eta \right]$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\nabla}_{e_i}\nabla\langle X,\eta\rangle, P_r(e_i)\rangle &= -\theta_c(s)\theta_c(s)\sum_k h_{ik}\langle e_k, P_r(e_i)\rangle - \langle X,\eta\rangle\sum_k h_{ik}^2\langle e_k, P_r(e_i)\rangle \\
&\quad -\sum_{kl}\left(\overline{\nabla}_{e_l}h_{ik}\right)\langle X, e_l\rangle\langle e_k, P_r(e_i)\rangle \\
&= -\theta_c(s)tr(AP_r) - \langle X,\eta\rangle tr(A^2P_r) - tr\left(\sum_l\left(\overline{\nabla}_{e_l}h_{ik}P_r\right)\langle X, e_l\rangle\right) \\
&= -(r+1)S_{r+1}\theta_c(s) - (S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})\langle X,\eta\rangle \\
&\quad -tr\left(\sum_l\left(\overline{\nabla}_{e_l}h_{ik}P_r\right)\langle X, e_l\rangle\right),
\end{aligned}$$

pela proposição 3.4. Para concluir a demonstração, basta mostrar que

$$-tr\left(\sum_l\left(\overline{\nabla}_{e_l}h_{ik}P_r\right)\langle X, e_l\rangle\right) = \langle S_{r+1}, X\rangle.$$

Com efeito, o lema 3.3 nos dá

$$\begin{aligned}
r\overline{\nabla}_{e_l}S_{r+1} &= \sum_{ik} h_{ik}(\overline{\nabla}_{e_l}(P_r)_{ik}) \\
&= \sum_{ik} h_{ik}\left(e_l\langle P_r(e_i), e_k\rangle\right) \\
&= \sum_{ik} h_{ik}\left(e_l\lambda_i^r\langle e_i, e_k\rangle\right) \\
&= \sum_k h_{kk}(e_l\lambda_k^r) \\
&= \sum_k e_l(\lambda_k\lambda_k^r) - \sum_k (e_l\lambda_k)\lambda_k^r.
\end{aligned}$$

Como $tr(AP_r) = (r+1)S_{r+1}$, temos $\overline{\nabla}_{e_l}tr(AP_r) = (r+1)\overline{\nabla}_{e_l}S_{r+1}$. Assim,

$$\begin{aligned}
r\overline{\nabla}_{e_l}S_{r+1} &= \sum_k e_l(\lambda_k\lambda_k^r) - \sum_k (e_l\lambda_k)\lambda_k^r \\
&= \overline{\nabla}_{e_l}tr(AP_r) - \sum_k e_l(\lambda_k)\lambda_k^r \\
&= (r+1)\overline{\nabla}_{e_l}S_{r+1} - tr\left((\overline{\nabla}_{e_l}h_{ik}\left((P_r)_{ik}\right)\right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\overline{\nabla}_{e_l}S_{r+1} = tr\left((\overline{\nabla}_{e_l}h_{ik}\left((P_r)_{ik}\right)\right).$$

Assim,

$$tr\left(\sum_{l}\left(\overline{\nabla}_{e_l} h_{ik} P_r\right)\langle X, e_l\rangle\right) = \langle \nabla S_{r+1}, X\rangle,$$

o que conclui a prova. □

3.2 Fórmulas de Minkowski, Equação de Poisson em Hipersuperfícies Compactas

Definição 3.5 *A função suporte da imersão $\psi : M \to Q_c^{n+1}$ no ponto p_0 para o campo vetorial normal unitário N é definida por $\rho = \langle X, N\rangle$. No caso em que $c = 0$, isto é, quando M for uma hipersuperfície do espaço euclidiano, temos, por* (5)*:*

$$\rho = \langle \psi, N\rangle. \tag{9}$$

Observação 3.2 *Decompondo a imersão nas componentes normal e tangente, que vemos como o vetor posição, temos*

$$\psi = \psi^T + \langle \psi, N\rangle N,$$

isto é,

$$\psi = \psi^T + \rho N. \tag{10}$$

Proposição 3.9 *Se $Q_c^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$, então $\nabla_X \psi^T = X + \rho AX$, para $X \in \mathfrak{X}(M)$ qualquer.*
Prova: Tomando a derivada covariante de (10) em relação a $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X \psi &= \overline{\nabla}_X \psi^T + \overline{\nabla}_X(\rho N)\\
\Rightarrow \overline{\nabla}_X \psi &= B(X, \psi^T) + \nabla_X \psi^T + (X\rho)N + \rho\, \overline{\nabla}_X N\\
\Rightarrow \nabla_X \psi^T &= \overline{\nabla}_X \psi - B(X, \psi^T) - (X\rho)N - \rho\, \overline{\nabla}_X N.
\end{aligned} \tag{11}$$

Tomando arbitrariamente $Y \in \mathfrak{X}(M)$, de (11) nós temos:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X \psi^T, Y\rangle &= \langle \overline{\nabla}_X \psi - B(X, \psi^T) - (X\rho)N - \rho\, \overline{\nabla}_X N, Y\rangle\\
&= \langle \overline{\nabla}_X \psi - \rho(\overline{\nabla}_X N)^T, Y\rangle\\
&= \langle \overline{\nabla}_X \psi + \rho AX, Y\rangle,
\end{aligned}$$

daí

$$\begin{aligned}\nabla_X \psi^T &= \overline{\nabla}_X \psi + \rho A X \\ &= X + \rho A X.\end{aligned}$$

□

Proposição 3.10 *Se $Q_c^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$, então vale $\nabla \rho = -A(\psi^T)$.*
Prova: Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned}\langle \nabla \rho, X \rangle &= X\rho \\ &= X\langle \psi, N\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X \psi, N\rangle + \langle \psi, \overline{\nabla}_X N\rangle \\ &= \underbrace{\langle X, N\rangle}_{0} + \langle \psi^T + \psi^\perp, \overline{\nabla}_X N\rangle \\ &= -\langle \psi^T, AX\rangle \\ &= \langle -A(\psi^T), X\rangle.\end{aligned}$$

□

Teorema 3.1 *(Fórmula de Minkowski) Seja M uma hipersuperfície compacta, orientada e $\psi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ sua imersão isométrica. Então vale*

$$\int_M (1 + \alpha\langle \psi, N\rangle)\, dM = 0,$$

onde N é um campo normal unitário e α é a curvatura média de M.
Prova: Considere $f : M \to \mathbb{R}$ dada por $f(p) = \frac{1}{2}\|\psi(p)\|^2$ e uma base de direções principais $\{e_1, ..., e_n\}$ em T_pM associada às curvaturas principais $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Pelo exemplo 2.3, temos

$$\nabla^2 f(e_i, e_i) = \langle e_i, e_i\rangle + \langle \psi, N\rangle\langle Ae_i, e_i\rangle = 1 + \langle \psi, N\rangle\langle Ae_i, e_i\rangle.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\Delta f &= \sum_i (1 + \langle \psi, N\rangle\langle Ae_i, e_i\rangle) \\ &= n + \sum_i (\langle \psi, N\rangle\langle Ae_i, e_i\rangle) \\ &= n + n\alpha\langle \psi, N\rangle \\ &= n(1 + \alpha\langle \psi, N\rangle). \qquad (12)\end{aligned}$$

Integrando (12), pelo corolário 2.1 do teorema da divergência, obtemos

$$\int_M n(1+\alpha\langle\psi,N\rangle)dM = 0$$

$$\Rightarrow \int_M (1+\alpha\langle\psi,N\rangle)dM = 0,$$

o que prova o afirmado. □

Observação 3.3 *Pela teorema anterior, é lícito considerarmos a Equação de Poisson* $\Delta\varphi = \sigma$*, onde* σ *é o integrando de Minkowski definido por* $\sigma = 1 + \rho\alpha$*.*

Veja que se definirmos a derivada covariante

$$(\nabla A)(X,Y) = \nabla_X AY - A(\nabla_X Y),$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e A é operador forma, vale

$$(\nabla A)(X,Y) = (\nabla A)(Y,X), \tag{13}$$

pois

$$\begin{aligned}
(\nabla A)(X,Y) - (\nabla A)(Y,X) &= \nabla_X AY - A(\nabla_X Y) - \nabla_Y AX + A(\nabla_Y X) \\
&= \nabla_X AY - \nabla_Y AX + A(\nabla_Y X - \nabla_X Y) \\
&= A([X,Y]) + A([Y,X]) \\
&= A([X,Y]) - A([X,Y]) \\
&= 0\ ,
\end{aligned}$$

pela observação 2.7.

Proposição 3.11 *Dado um referencial geodésico* $\{e_1, ..., e_n\}$ *em uma vizinhança de* $p \in M$*, podemos escrever, no ponto* p*, o gradiente da curvatura média como*

$$n\nabla\alpha = \sum_i (\nabla A)(e_i, e_i).$$

Prova: Como o referencial é geodésico, temos $(\nabla A)(e_j, e_i) = \nabla_{e_j} Ae_i - A(\underbrace{\nabla_{e_j} e_i}_{0})$, logo, por (13)

$$\nabla_{e_j} Ae_i = (\nabla A)(e_j, e_i) = (\nabla A)(e_i, e_j) = \nabla_{e_i} Ae_j.$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
n\nabla\alpha &= n\sum_{j}^{n}\langle\nabla\alpha, e_j\rangle e_j \\
&= n\sum_{j=1}^{n} e_j(\alpha)e_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} e_j(n\alpha)e_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} e_j\langle Ae_i, e_i\rangle e_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\left(\langle\nabla_{e_j}Ae_i, e_i\rangle + \langle Ae_i, \underbrace{\nabla_{e_j}e_i}_{0}\rangle\right) e_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\langle\nabla_{e_j}Ae_i, e_i\rangle e_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}Ae_j, e_i\rangle e_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\left(e_i\langle Ae_j, e_i\rangle - \langle Ae_j, \underbrace{\nabla_{e_i}e_i}_{0}\rangle\right) e_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\left(e_i\langle Ae_j, e_i\rangle\right) e_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\left(e_i\langle Ae_i, e_j\rangle\right) e_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\left(\langle\nabla_{e_i}Ae_i, e_j\rangle + \langle Ae_i, \underbrace{\nabla_{e_i}e_j}_{0}\rangle\right) e_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}Ae_i, e_j\rangle e_j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\nabla_{e_i}Ae_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\nabla_{e_i}Ae_i - A(\underbrace{\nabla_{e_i}e_i}_{0})\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\nabla A)(e_i, e_i)
\end{aligned}
$$

□

Proposição 3.12 *A curvatura escalar S de uma hipersuperfície $\psi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ é dada por*

$$S = n^2\alpha^2 - \|A\|^2.$$

Prova: Sejam R e R' as curvaturas de M e $\mathbb{R}^{n+1}$, respectivamente. Pela equação de Gauss e pelo fato de que a curvatura seccional de $\mathbb{R}^{n+1}$ é zero, temos

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle B(X,W), B(Y,Z)\rangle - \langle B(X,Z), B(Y,W)\rangle.$$

Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança de p. A escolhemos de modo que diagonaliza A em p. Temos

$$\begin{aligned} S(p) &= \sum_{i,j}\langle R(e_i,e_j)e_i, e_j\rangle \\ &= \sum_{i,j}\langle B(e_i,e_j), B(e_j,e_i)\rangle - \langle B(e_i,e_i), B(e_j,e_j)\rangle \\ &= \sum_{i\neq j}\lambda_i\lambda_j. \end{aligned}$$

Daí,

$$S = \sum_{i\neq j}^{n}\lambda_i\lambda_j = \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 = n^2\alpha^2 - \|A\|^2.$$

□

A demonstração do teorema seguinte pode ser encontrada em [6].

Teorema 3.2 *(Solução da equação de Poisson) Seja M uma variedade Riemanniana compacta. Se σ é uma função diferenciável tal que $\int_M \sigma = 0$, então existe uma solução da equação $\Delta\varphi = \sigma$, única, a menos da adição de uma constante.*

Lema 3.4 *Sejam M uma hipersuperfície compacta e orientada de $\mathbb{R}^{n+1}$ e σ o integrando de Minkowski. Então a solução φ da Equação de Poisson $\Delta\varphi = \sigma$ satisfaz:*

$$\int_M \left(\langle\nabla\sigma, \nabla\varphi\rangle + \sigma^2\right) = 0 \;\; e \;\; \int_M \left(\varphi\sigma + \|\nabla\varphi\|^2\right) = 0.$$

Prova: Se φ é uma solução da Equação de Poisson, temos, pelo item (a) da proposição 2.8:

$$div(\sigma\nabla\varphi) = \langle\nabla\sigma, \nabla\varphi\rangle + \sigma\Delta\varphi = \langle\nabla\sigma, \nabla\varphi\rangle + \sigma^2,$$

e integrando ambos os lados, chegamos a $\int_M (\langle\nabla\sigma, \nabla\varphi\rangle + \sigma^2) = 0$, pelo corolário 2.1 do Teorema da divergência.

Para a segunda igualdade, pelo item (b) da proposição 2.8, temos

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi^2 &= \varphi\Delta\varphi + \varphi\Delta\varphi + 2\langle\nabla f, \nabla g\rangle \\
&= 2\varphi\sigma + \|\nabla\varphi\|^2 \\
\Rightarrow \frac{1}{2}\Delta\varphi^2 &= \varphi\sigma + \|\nabla\varphi\|^2
\end{aligned}$$

Integrando ambos os lados da igualdade, obtemos

$$\int_M \left(\varphi\sigma + \|\nabla\varphi\|^2\right) = \frac{1}{2}\int_M \Delta\varphi^2 = 0,$$

novamente pelo corolário 2.1 do Teorema da divergência. □

Teorema 3.3 *(Fórmula de Bochner) Seja M uma variedade Riemanniana e $f : M \to \mathbb{R}$. Então*

$$\frac{1}{2}\Delta\|\nabla f\|^2 = Ric(\nabla f, \nabla f) + \|\nabla^2 f\|^2 + \langle\nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle.$$

Prova: Seja $\{e_i\}$ um referencial geodésico em $p \in M$. Primeiramente, veja que pela proposição 2.7 temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\|\nabla f\|^2 &= \frac{1}{2}\sum_i e_i e_i\langle\nabla f, \nabla f\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_i e_i\left(\langle\nabla_{e_i}\nabla f, \nabla f\rangle + \langle\nabla f, \nabla_{e_i}\nabla f\rangle\right) \\
&= \sum_i e_i\langle\nabla_{e_i}\nabla f, \nabla f\rangle \\
&= \sum_i e_i\nabla^2 f(e_i, \nabla f) \\
&= \sum_i e_i\nabla^2 f(\nabla f, e_i) \\
&= \sum_i e_i\langle\nabla_{\nabla f}\nabla f, e_i\rangle \\
&= \sum_i \left(\langle\nabla_{e_i}\nabla_{\nabla f}\nabla f, e_i\rangle + \langle\nabla_{\nabla f}\nabla f, \underbrace{\nabla_{e_i}e_i}_{0}\rangle\right) \\
&= \sum_i\langle\nabla_{e_i}\nabla_{\nabla f}\nabla f - \nabla_{\nabla f}\nabla_{e_i}\nabla f + \nabla_{[\nabla f, e_i]}\nabla f + \nabla_{\nabla f}\nabla_{e_i}\nabla f - \nabla_{[\nabla f, e_i]}\nabla f, e_i\rangle \\
&= \sum_i\langle R(\nabla f, e_i)\nabla f, e_i\rangle + \sum_i\langle\nabla_{\nabla f}\nabla_{e_i}\nabla f, e_i\rangle + \sum_i\langle\nabla_{[e_i, \nabla f]}\nabla f, e_i\rangle\ . \qquad (14)
\end{aligned}$$

Agora, também pela proposição 2.7, perceba que

$$\nabla_{\nabla f}e_i = \nabla_{\sum e_i(f)e_i}e_i = \sum e_i(f)\underbrace{\nabla_{e_i}e_i}_{0} = 0\ . \qquad (15)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_i \langle \nabla_{\nabla f} \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle &= \sum_i \nabla f \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle - \langle \nabla_{e_i} \nabla f, \underbrace{\nabla_{\nabla f} e_i}_{0} \rangle \\
&= \nabla f \sum_i \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle \\
&= \nabla f \sum_i e_i \langle \nabla f, e_i \rangle - \langle \nabla f, \underbrace{\nabla_{e_i} e_i}_{0} \rangle \\
&= \nabla f \sum_i e_i e_i(f) \\
&= \nabla f \Delta f \\
&= \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle \ . \qquad (16)
\end{aligned}$$

Também temos que

$$\begin{aligned}
\sum_i \langle \nabla_{[\nabla f, e_i]} \nabla f, e_i \rangle &= \sum_i \nabla^2([e_i, \nabla f], e_i) \\
&= \sum_i \nabla^2(\nabla_{e_i} \nabla f - \underbrace{\nabla_{\nabla f} e_i}_{0}, e_i) \\
&= \sum_i \nabla^2(e_i, \nabla_{e_i} \nabla f) \\
&= \sum_i \langle \nabla_{e_i} \nabla f, \nabla_{e_i} \nabla f \rangle \\
&= \|\nabla^2 f\|^2 \qquad (17)
\end{aligned}$$

Finalmente, substituindo (16) e (17) em (14), obtemos a igualdade desejada. □

Corolário 3.1 *(Fórmula de Bochner para hipersuperfícies) Sejam M uma variedade Riemanniana, S sua curvatura escalar e A_S o operador hessiano da função curvatura escalar. Então*

$$\int_M \big((Ric(\nabla S, \nabla S) + \|A_S\|^2 - (\Delta S)^2\big) = 0.$$

Prova: Integrando a fórmula de Bochner do teorema anterior e tomando $f = S$, obtemos:

$$\int_M \big(Ric(\nabla S, \nabla S) + \|A_S\|^2 + \langle \nabla S, \nabla(\Delta S) \rangle\big) = \underbrace{\frac{1}{2}\int_M \Delta \|\nabla S\|^2}_{0} = 0 \ . \qquad (18)$$

Fazendo $f = \Delta S$ e $X = \nabla S$ no item $a)$ da proposição 2.8, temos:

$$0 = \int_M div\,(\Delta S(\nabla S)) = \int_M (\Delta S)^2 + \int_M \langle \nabla(\Delta S), \nabla S \rangle$$

$$\Rightarrow \int_M \langle \nabla(\Delta S), \nabla S\rangle = -\int_M (\Delta S)^2 \tag{19}$$

Substituindo (19) em (18), obtemos o resultado afirmado. $\square$

O nosso próximo objetivo é estabelecer três igualdades envolvendo os objetos definidos neste capítulo e, como consequência dessas, generalizar a Fórmula de Minkowski, provada do Teorema 3.1, para as variedades Riemannianas de curvatura seccional constante $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{S}^{n+1}$ e $\mathbb{H}^{n+1}$.

No Teorema abaixo, denotaremos por $\overline{\nabla}$ a conexão de $\mathbb{R}^{n+1}$ e por ∇ a conexão Riemanniana de qualquer hipersuperfície M^n de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Teorema 3.4 *Seja M uma hipersuperfície orientável imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$, $\psi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ sua imersão e N um campo normal unitário de vetores sobre M. Então, para $r = 0, ..., n-1$, vale*

$$L_r(\|\psi\|^2) = 2\left[(n-r)S_r + (r+1)S_{r+1}\langle \psi, N\rangle\right]. \tag{20}$$

Prova: Dado $p \in M$, sejam $\{e_1(p), ..., e_n(p)\}$ uma base ortonormal de T_pM que diagonaliza A em p, e $\lambda_1, ..., \lambda_n$ os autovalores de A associados a $\{e_1(p), ..., e_n(p)\}$, respectivamente. Denotamos por $\{e_1, ..., e_n\}$ o referencial geodésico que estende a base $\{e_1(p), ..., e_n(p)\}$ a uma vizinhança de p em M.

Como $\nabla_{e_i} e_i = 0$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$, então $B(e_i) = \overline{\nabla}_{e_i} e_i - \underbrace{\nabla_{e_i} e_i}_{0} = \overline{\nabla}_{e_i} e_i$, i.e., $\overline{\nabla}_{e_i} e_i \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$. Daí, existe $a_i \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overline{\nabla}_{e_i} e_i = a_i N.$$

Assim,

$$a_i = a_i\|N\|^2 = \langle a_i N, N\rangle = \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_i, N\rangle = \langle B(e_i, e_i), N\rangle = \langle Ae_i, e_i\rangle = \lambda_i\|e_i\|^2 = \lambda_i,$$

e, portanto,

$$\overline{\nabla}_{e_i} e_i = \lambda_i N. \tag{21}$$

Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$X\|\psi\|^2 = X\langle \psi, \psi\rangle = 2\langle \overline{\nabla}_X \psi, \psi\rangle = 2\langle X, \psi\rangle, \text{ logo,}$$

$$XX\|\psi\|^2 = 2\left(\langle \overline{\nabla}_X X, \psi\rangle + \langle X, \overline{\nabla}_X \psi\rangle\right) = 2\|X\|^2 + 2\langle \psi, \overline{\nabla}_X X\rangle$$

$$\Rightarrow XX\|\psi\|^2 = 2\|X\|^2 + 2\langle \psi, \overline{\nabla}_X X\rangle. \tag{22}$$

Vimos que P_r é auto adjunto. Denotamos por λ_i^r o autovalor de P_r associado a $e_i(p)$.

Assim,

$$\begin{array}{rcl}
L_r(\|\psi\|^2) & = & tr\left[P_r\nabla^2\|\psi\|^2\right]\\
& = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\langle P_r\nabla^2\|\psi\|^2 e_i, e_i\rangle\\
& = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\langle P_r(\nabla_{e_i}\nabla\|\psi\|^2), e_i\rangle\\
& = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i}\nabla\|\psi\|^2, P_r(e_i)\rangle\\
& = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^r\langle \nabla_{e_i}\nabla\|\psi\|^2, e_i\rangle\\
\text{proposição 2.7} \rightarrow & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^r\langle \nabla_{e_i}\left(\sum_{j=1}^{n} e_j(\|\psi\|^2)e_j\right), e_i\rangle\\
& = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^r\langle \sum_{j=1}^{n}\left(e_j\|\psi\|^2\underbrace{\nabla_{e_i}e_j}_{0} + e_i(e_j\|\psi\|^2)e_j\right), e_i\rangle\\
& = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^r e_i e_i\|\psi\|^2\\
(22) \rightarrow & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^r(2\|e_i\|^2 + 2\langle\psi, \overline{\nabla}_{e_i}e_i\rangle\\
(21) \rightarrow & = & \displaystyle 2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^r + 2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^r\langle\psi, \lambda_i N\rangle\\
& = & \displaystyle 2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^r + \langle\psi, N\rangle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda_i^r\\
& = & 2tr(P_r) + 2tr(AP_r)\langle\psi, N\rangle\\
\text{proposição 3.4} \rightarrow & = & 2(n-r)S_r + 2(r+1)S_{n+1}\langle\psi, N\rangle
\end{array}$$

□

Corolário 3.1 *Sejam M uma hipersuperfície compacta orientável imersa no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, $\psi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ sua imersão e N um campo de vetores normal unitário sobre M. Então, para $r = 0, ..., n-1$, vale*

$$\int_M (H_r + H_{r+1}\langle\psi, N\rangle) = 0.$$

Prova: Multiplicando a igualdade de (20) por $\frac{r!(n-r-1)}{n!}$, onde $r = 0, ..., n-1$, obtemos

$$\frac{r!(n-r-1)}{n!}L_r(\|\psi\|^2) = 2(H_r + H_{r+1}\langle\psi, N\rangle). \tag{23}$$

Integrando (23), temos

$$\int_M (H_r + H_{r+1}\langle \psi, N\rangle) = \frac{r!(n-r-1)}{2(n!)} \int_M L_r(\|\psi\|^2) = 0,$$

pela observação 3.1. □

Agora, uma versão do teorema (e de seu corolário) anterior para o espaço hiperbólico.

Seja M uma hipersuperfície compacta e orientável imersa no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$ e $\psi : M \to \mathbb{H}^{n+1}$ sua imersão. Podemos ver ψ como uma aplicação $\psi : M \to \mathbb{L}^{n+2}$, com $\|\psi\|^2 = -1$ e $\psi_{n+1} \geq 0$, como também podemos ver um campo normal unitário correspondendo a ψ como a aplicação $N : M \to \mathbb{L}^{n+2}$, com $\|N\|^2 = 1$ e $\langle \psi, N\rangle = 0$.

Tomando $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ arbitrário, definimos as funções $F : \mathbb{H}^{n+1} \to \mathbb{R}$ e $f : M \to \mathbb{R}$ por

$$F = \langle x, a\rangle \text{ e } f = \langle \psi, a\rangle. \tag{24}$$

Como f é a restrição de F à hipersuperfície M, temos

$$\nabla f = P_M(\nabla F),$$

onde $P_M(\nabla F)$ denota a projeção do gradiente de F no plano tangente correspondente em M.

No seguinte teorema, denotaremos como ∇, $\overline{\nabla}$, $\overline{\overline{\nabla}}$ as conexões Riemannianas de M, $\mathbb{H}^{n+1}$ e $\mathbb{L}^{n+2}$, respectivamente.

Teorema 3.5 *Seja M uma hipersuperfície orientável imersa em $\mathbb{H}^{n+1}$, $\psi : M \to \mathbb{H}^{n+1}$ sua imersão e N um campo normal unitário de vetores sobre M. Então, para $r = 0, ..., n-1$ e $a \in \mathbb{R}^{n+2}_1$, vale*

$$L_r(\langle \psi, a\rangle) = (n-r)S_r\langle \psi, a\rangle + (r+1)S_{r+1}\langle N, a\rangle. \tag{25}$$

Prova: Sejam F e f as funções definidas em (24). Se $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$, então $XF = X\langle x, a\rangle = \langle \overline{\overline{\nabla}}_X x, a\rangle = \langle X, a\rangle$, logo $\nabla F = P_{\mathbb{H}^{n+1}}(a)$, onde $P_{\mathbb{H}^{n+1}}$ representa a projeção de $a \in \mathbb{R}^{n+2}_1$ no plano tangente correspondente de $\mathbb{H}^{n+1}$. Assim

$$\nabla f = P_M(\nabla F) = P_M\left(P_{\mathbb{H}^{n+1}}(a)\right).$$

Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle &= \langle \overline{\nabla}_X P_M\left(P_{\mathbb{H}^{n+1}}(a)\right), Y\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X\left(P_{\mathbb{H}^{n+1}}(a) - \langle P_{\mathbb{H}^{n+1}}(a), N\rangle N\right), Y\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X P_{\mathbb{H}^{n+1}}(a) + \overline{\nabla}_X\left(\langle -P_{\mathbb{H}^{n+1}}(a), N\rangle N\right), Y\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X P_{\mathbb{H}^{n+1}}(a), Y\rangle + \langle P_{\mathbb{H}^{n+1}}(a), N\rangle\langle -\nabla_X N, Y\rangle \\
&= \langle \overline{\overline{\nabla}}_X(a + \langle a, \psi\rangle\psi), Y\rangle + \langle a, N\rangle\langle AX, Y\rangle \\
&= \langle a, \psi\rangle\langle \overline{\overline{\nabla}}_X \psi, Y\rangle + \langle a, N\rangle\langle AX, Y\rangle \\
&= \langle a, \psi\rangle\langle X, Y\rangle + \langle a, N\rangle\langle AX, Y\rangle,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle = \langle \psi, a\rangle\langle X, Y\rangle + \langle N, a\rangle\langle AX, Y\rangle. \tag{26}$$

Tomando um referencial ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ de T_pM que diagonaliza A em p, temos

$$\begin{aligned}
L_r(\langle\psi, a\rangle) &= tr\left[P_r \nabla^2\langle\psi, a\rangle\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle P_r(\nabla_{e_i}\nabla\langle\psi, a\rangle), e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i}\nabla\langle\psi, a\rangle, P_r(e_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^r\langle \nabla_{e_i}\nabla\langle\psi, a\rangle, e_i\rangle \\
(26) \rightarrow \quad &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^r\left(\langle\psi, a\rangle\langle e_i, e_i\rangle + \langle N, a\rangle\langle Ae_i, e_i\rangle\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^r\left(\langle\psi, a\rangle + \lambda_i\langle N, a\rangle\right) \\
&= \langle\psi, a\rangle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^r + \langle N, a\rangle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^r\lambda_i \\
&= \langle\psi, a\rangle tr(P_r) + \langle N, a\rangle tr(AP_r) \\
&= (n-r)S_r\langle\psi, a\rangle + (r+1)S_{r+1}\langle N, a\rangle,
\end{aligned}$$

o que prova o afirmado. $\square$

Corolário 3.2 *Sejam M uma hipersuperfície compacta orientável imersa no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$, $\psi : M \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ sua imersão e N um campo de vetores normal unitário* *sobre M. Então, para $r = 0, ..., n-1$ e $a \in \mathbb{R}^{n+2}_1$ arbitrário, vale*

$$\int_M (H_r\langle \psi, a\rangle + H_{r+1}\langle N, a\rangle) = 0.$$

Prova: Multiplicando a igualdade de (25) por $\frac{r!(n-r-1)}{n!}$, onde $r = 0, ..., n-1$, obtemos

$$\frac{r!(n-r-1)}{n!} L_r(\langle \psi, a\rangle) = H_r\langle \psi, a\rangle + H_{r+1}\langle N, a\rangle. \tag{27}$$

Integrando (27), temos

$$\int_M (H_r\langle \psi, a\rangle + H_{r+1}\langle N, a\rangle) = \frac{r!(n-r-1)}{2(n!)} \int_M L_r(\langle \psi, a) = 0,$$

pela observação 3.1. □

Seja M uma hipersuperfície compacta e orientável imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$ e $\psi : M \to \mathbb{S}^{n+1}$ sua imersão. Podemos ver ψ como uma aplicação $\psi : M \to \mathbb{R}^{n+2}$, com $\|\psi\|^2 = 1$, como também podemos ver um campo normal unitário correspondendo a ψ como a aplicação $N : M \to \mathbb{R}^{n+2}$, com $\|N\|^2 = 1$ e $\langle \psi, N\rangle = 0$.

Tomando $a \in \mathbb{R}^{n+2}$ arbitrário, definimos as funções $F : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{R}$ e $f : M \to \mathbb{R}$ por

$$F = \langle p, a\rangle \text{ e } f = \langle \psi, a\rangle. \tag{28}$$

Como f é a restrição de F à hipersuperfície M, temos

$$\nabla f = P_M(\nabla F),$$

onde $P_M(\nabla F)$ denota a projeção do gradiente de F no plano tangente correspondente em M.

No próximo teorema, denotaremos como ∇, $\overline{\nabla}$, $\overline{\overline{\nabla}}$ as conexões Riemannianas de M, $\mathbb{S}^{n+1}$ e $\mathbb{R}^{n+2}$, respectivamente.

Teorema 3.6 *Seja M uma hipersuperfície orientável imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$, $\psi : M \to \mathbb{S}^{n+1}$ sua imersão e N um campo normal unitário de vetores sobre M. Então, para $r = 0, ..., n-1$ e $a \in \mathbb{R}^{n+2}$, vale*

$$L_r(\langle \psi, a\rangle) = (r+1)S_{r+1}\langle N, a\rangle - (n-r)S_r\langle \psi, a\rangle. \tag{29}$$

Prova: Sejam F e f as funções definidas em (28). Se $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{n+1})$, então $XF = X\langle p, a\rangle = \langle \overline{\overline{\nabla}}_X p, a\rangle = \langle X, a\rangle$, logo $\overline{\nabla} F = P_{\mathbb{S}^{n+1}}(a)$, onde $P_{\mathbb{S}^{n+1}}$ representa a projeção de

$a \in \mathbb{R}^{n+2}$ no plano tangente correspondente de $\mathbb{S}^{n+1}$. Assim

$$\nabla f = P_M(\nabla F) = P_M\left(P_{\mathbb{S}^{n+1}}(a)\right).$$

De modo análogo ao cálculo feito na demonstração do teorema 3.5, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle &= \langle \overline{\nabla}_X \left(P_{\mathbb{S}^{n+1}}(a) - \langle P_{\mathbb{S}^{n+1}}(a), N\rangle N\right), Y\rangle \\ &= \langle \overline{\overline{\nabla}}_X (a - \langle a, \psi\rangle \psi) - \langle P_{\mathbb{S}^{n+1}}(a), N\rangle \langle \nabla_X N, Y\rangle \\ &= -\langle a, \psi\rangle\langle X, Y\rangle + \langle a, N\rangle\langle AX, Y\rangle, \end{aligned}$$

isto é,

$$\langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle = \langle N, a\rangle\langle AX, Y\rangle - \langle \psi, a\rangle\langle X, Y\rangle. \tag{30}$$

Tomando um referencial ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ de T_pM que diagonaliza A em p, temos

$$\begin{aligned} L_r(\langle \psi, a\rangle) &= tr\left[P_r \nabla^2 \langle \psi, a\rangle\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle P_r(\nabla_{e_i} \nabla \langle \psi, a\rangle), e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \nabla \langle \psi, a\rangle, P_r(e_i)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r \langle \nabla_{e_i} \nabla \langle \psi, a\rangle, e_i\rangle \\ (30) \rightarrow &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r \left(\langle N, a\rangle\langle Ae_i, e_i\rangle - \langle \psi, a\rangle\langle e_i, e_i\rangle\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r \left(\lambda_i \langle N, a\rangle - \langle \psi, a\rangle\right) \\ &= \langle N, a\rangle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r \lambda_i - \langle \psi, a\rangle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r \\ &= \langle N, a\rangle tr(AP_r) - \langle \psi, a\rangle tr(P_r) \\ &= (r+1)S_{r+1}\langle N, a\rangle - (n-r)S_r\langle \psi, a\rangle, \end{aligned}$$

o que prova o afirmado. □

Corolário 3.3 *Sejam M uma hipersuperfície compacta orientável imersa na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$, $\psi : M \to \mathbb{S}^{n+1}$ sua imersão e N um campo de vetores normal unitário sobre M.*

Então, para $r = 0, ..., n-1$ e $a \in \mathbb{R}^{n+2}$ arbitrário, vale

$$\int_M (H_r\langle\psi, a\rangle - H_{r+1}\langle N, a\rangle) = 0.$$

Prova: Multiplicando a igualdade de (29) por $\frac{r!(n-r-1)}{n!}$, onde $r = 0, ..., n-1$, obtemos

$$\frac{r!(n-r-1)}{n!} L_r(\langle\psi, a\rangle) = H_r\langle\psi, a\rangle - H_{r+1}\langle N, a\rangle. \tag{31}$$

Integrando (31), temos

$$\int_M (H_r\langle\psi, a\rangle - H_{r+1}\langle N, a\rangle) = \frac{r!(n-r-1)}{2(n!)} \int_M L_r(\langle\psi, a) = 0,$$

pela observação 3.1. $\square$

Agora, vejamos duas proposições que serão usadas para provar uma versão conveniente da fórmula de Minkowski, na qual aparece o termo θ_c.

Proposição 3.13 *Seja $x : M^n \to N^{n+1}$ uma imersão isométrica. Seja $F : N \to \mathbb{R}$ uma função suave e consideremos $f = F \circ x : M \to \mathbb{R}$. Para um referencial ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ numa vizinhança $U \subset M$, temos*

$$L_r f = \sum_{i=1}^{n} \nabla^2 F(e_i, P_r(e_i)) + (r+1) S_{r+1} \langle \overline{\nabla} F, \eta\rangle,$$

onde η denota o campo vetorial normal unitário da imersão e $\overline{\nabla}$ é o gradiente em N.

Prova: Temos

$$\begin{aligned}
L_r f &= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i}\nabla f, P_r(e_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_{e_i}\nabla f - \left[\overline{\nabla}_{e_i}\nabla f - \nabla_{e_i}\nabla f\right], P_r(e_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_{e_i}\nabla f - B(e_i,\nabla f), P_r(e_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_{e_i}\nabla f, P_r(e_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_{e_i}\left(\overline{\nabla}(F) - (\overline{\nabla}F)^{\perp}\right), P_r(e_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}F, P_r(e_i)\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_{e_i}(\overline{\nabla}F)^{\perp}, P_r(e_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\nabla^2 F\left(e_i, P_r(e_i)\right) - \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_{e_i}(\langle\overline{\nabla}F,\eta\rangle\eta), P_r(e_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\nabla^2 F\left(e_i, P_r(e_i)\right) - \sum_{i=1}^{n}\langle \langle\overline{\nabla}F,\eta\rangle\overline{\nabla}_{e_i}\eta, P_r(e_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\nabla^2 F\left(e_i, P_r(e_i)\right) - \langle\overline{\nabla}F,\eta\rangle\sum_{i=1}^{n}\langle -Ae_i, P_r(e_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\nabla^2 F\left(e_i, P_r(e_i)\right) + \langle\overline{\nabla}F,\eta\rangle\sum_{i=1}^{n}\langle P_rAe_i, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\nabla^2 F\left(e_i, P_r(e_i)\right) + \langle\overline{\nabla}F,\eta\rangle tr(AP_r) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\nabla^2 F\left(e_i, P_r(e_i)\right) + (n+1)S_{n+1}\langle\overline{\nabla}F,\eta\rangle
\end{aligned}$$

□

Prova: Considere $F = \theta_c \circ s$ na proposição 3.13 e seja $\{e_1, ..., e_n\}$ um referencial ortonormal numa vizinhança $U \subset M$. Então

$$L_r\theta_c = \sum_{i=1}^{n}\nabla^2\theta_c(s)(e_i, P_r(e_i)) + (r+1)S_{r+1}\langle\overline{\nabla}\theta_c(s),\eta\rangle.$$

Agora veja que

$$\begin{aligned}\nabla^2\theta_c(s)(e_i,P_r(e_i)) &= \langle\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}\theta_c(s),P_r(e_i)\rangle\\ &= \langle\overline{\nabla}_{e_i}\theta_c'(s)\overline{\nabla}s,P_r(e_i)\rangle\\ &= \theta_c'(s)\langle\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}s,P_r(e_i)\rangle+\theta_c''(s)\langle\langle\overline{\nabla}s,e_i\rangle\overline{\nabla}s,P_r(e_i)\rangle\\ &= \theta_c'(s)\nabla^2s\,(e_i,P_r(e_i))+\theta_c''(s)\langle\overline{\nabla}s,e_i\rangle\langle\overline{\nabla}s,P_r(e_i)\rangle\\ &= -cS_c(s)\nabla^2s\,(e_i,P_r(e_i))-c\theta_c(s)\langle\overline{\nabla}s,e_i\rangle\langle\overline{\nabla}s,P_r(e_i)\rangle,\end{aligned}$$

pois S_c é a solução da equação $y''+cy=0$", i.e., temos que $S_c''(s)+cS_c(s)=0$, de onde obtemos $\theta_c'=-cS_c(s)$ e $\theta_c''(s)=-c\theta_c(s)$. Da proposição 3.7, temos

$$\begin{aligned}\nabla^2\theta_c(s)(e_i,P_r(e_i)) &= -c\theta_c\left[\langle e_i,P_r(e_i)\rangle-\langle\overline{\nabla}s,e_i\rangle\langle\overline{\nabla}s,P_r(e_i)\rangle\right]\\ &\quad -c\theta_c(s)\langle\overline{\nabla}s,e_i\rangle\langle\overline{\nabla}s,P_r(e_i)\rangle\\ &= -c\theta_c(s)\langle e_i,P_r(e_i)\rangle.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}L_r\theta_c &= -c\theta_c(s)\sum_{i=1}^n\langle e_i,P_r(e_i)\rangle+(r+1)S_{r+1}\langle\overline{\nabla}\theta_c(s),\eta\rangle\\ &= -c\theta_c(s)tr(P_r)+(r+1)S_{r+1}\langle\theta_c'(s)\overline{\nabla}s,\eta\rangle\\ &= -c\theta_c(s)tr(P_r)+(r+1)S_{r+1}\langle -cS_c(s)\overline{\nabla}s,\eta\rangle\\ &= -c\theta_c(s)tr(P_r)-c(r+1)S_{r+1}\langle X,\eta\rangle\\ &= -c\theta_c(s)(n-r)S_r-c(r+1)S_{r+1}\langle X,\eta\rangle\end{aligned}$$

□

Teorema 3.7 *Seja $x:M^n\to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana compacta orientada M^n em uma forma espacial Q_c^{n+1}. Então, para qualquer c, vale*

$$\int_M\left[H_r\theta_c+H_{r+1}\langle X,\eta\rangle\right]dM=0.$$

Prova: Integrando a igualdade da proposição 3.14, obtemos

$$0=\int_M L_r\theta_c=-c\int_M\left[(n-r)S_r\theta_c(s)+(r+1)S_{r+1}\langle X,\eta\rangle\right]$$

$$\Rightarrow\int_M\left[(n-r)S_r\theta_c(s)+(r+1)S_{r+1}\langle X,\eta\rangle\right]=0$$

$$\Rightarrow (n-r)\binom{n}{r}\int_M H_r\theta_c(s) + (r+1)\binom{n}{r+1}\int_M \langle X,\eta\rangle H_{r+1} = 0$$

$$\Rightarrow \int_M H_r\theta_c(s) + \int_M \langle X,\eta\rangle H_{r+1} = 0,$$

pois

$$(r+1)\binom{n}{r+1} = (r+1)\frac{n!}{(r+1)!(n-(r+1))!} = \frac{n!}{r!(n-(r+1))!} = (n-r)\frac{n!}{r!(n-r)!} = (n-r)\binom{n}{r}.$$

□

Agora se faz necessário enunciar resultados semelhantes ao teorema 2.3, que serão de fundamental importância. Tais resultados encontram-se demonstrados com detalhes em [11].

Teorema 3.8 *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa. Se $\boldsymbol{x} : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ é uma imersão totalmente umbílica, então $x(M)$ é uma esfera euclidiana n-dimensional e, consequentemente, $x(M)$ é uma esfera geodésica de $\mathbb{S}^{n+1}$.*

Teorema 3.9 *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa. Se $\boldsymbol{x} : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ é uma imersão totalmente umbílica, então $x(M)$ é a interseção de $\mathbb{H}^{n+1}$ com um n-plano ou uma n-esfera de $\mathbb{R}^{n+1}$. Mais do que isso, as hipersuperfícies umbílicas compactas do espaço hiperbólico são as esferas geodésicas.*

4 TEOREMAS DE CARACTERIZAÇÃO DA ESFERA

4.1 Caracterização via hipersuperfícies com H_{r+1} constante cujas hipersuperfícies totalmente geodésicas tangentes omitem um conjunto não vazio do ambiente

Teorema 4.1 *(Alencar e Colares) Sejam M^n uma variedade Riemanniana compacta orientada e $x : M \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica com curvatura H_{r+1} constante não nula, onde $0 \leq r \leq n-1$. Se $c > 0$, assuma que $x(M)$ está contido em um hemisfério aberto de Q_c^{n+1}. Então o conjunto dos pontos*

$$W = Q_c^{n+1} - \bigcup_{p \in M} (Q_c^n)_p$$

que são omitidos em Q_c^{n+1} pelas hipersuperfícies totalmente geodésicas $(Q_c^n)_p$ tangentes a $x(M)$ é não vazio se, e somente se, $x(M)$ é uma esfera geodésica em Q_c^{n+1}.

Prova: Primeiramente, observemos que se W é não vazio, então existe um ponto $p_0 \in W$. Tal ponto é tal que $\langle X, \eta \rangle$ nunca se anula. Isso decorre das expressões da função suporte, dadas em (5), (6) e (7). Outra observação importante é que existe $p \in M$ tal que todas as curvaturas principais de x têm o mesmo sinal.

Com efeito, considere a hiperesfera de centro p_0 e raio r, em Q_c^{n+1}:

$$\mathbb{S}^n(r) = \{p \in Q_c^{n+1}; s(p) = r\}.$$

Então o campo normal (interior) à $\mathbb{S}^n(r)$ é $N = -\overline{\nabla} s$. A proposição 3.7 afirma que

$$\langle \overline{\nabla}_X \overline{\nabla} s, Y \rangle = \frac{\theta_c}{S_c} \left(\langle X, Y \rangle - \langle \overline{\nabla} s, X \rangle \langle \overline{\nabla} s, Y \rangle \right).$$

Tomando $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n(r))$, obtem-se

$$\langle A(X), Y \rangle = \langle -\overline{\nabla}_X N, Y \rangle = \langle \overline{\nabla}_X \overline{\nabla} s, Y \rangle = \frac{\theta_c}{S_c} \langle X, Y \rangle,$$

o que diz que todas as curvaturas principais de $\mathbb{S}^n(r)$ são constantes e iguais a $\dfrac{\theta_c}{S_c}$. Agora, tomando $q \in M$ como sendo o ponto onde a função $s(p) = d(p, p_0)$ atinge o máximo, a hipersuperfície M é mais curvada que a esfera $\mathbb{S}^n(r)$, isto é, $\lambda_i \geq \dfrac{\theta_c}{S_c} > 0$, em p.

Assim, para a escolha apropriada do vetor normal η, podemos assumir que $H_{r+1} > 0$ em p e, por ser constante, $H_{r+1} > 0$ em M.

Pela proposição 3.6, temos $H_r \geq H_{r+1}^{\frac{r}{r+1}}$, $1 \leq r \leq n-1$, onde a igualdade ocorre somente nos pontos umbílicos. Assim, $H_r > 0$. Daí, fazendo $r = 0$ no teorema 3.7, obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_M [H_0\theta_c(s) + H_1\langle X, \eta\rangle] = 0 \\
\Rightarrow \quad & \theta_c(s) + H_1\langle X, \eta\rangle = 0 \\
\Rightarrow \quad & 0 = \theta_c(s) + H_1\langle X, \eta\rangle > H_1\langle X, \eta\rangle \\
\Rightarrow \quad & \langle X, \eta\rangle < 0,
\end{aligned}$$

pois $H_1 > 0$ e $\theta_c > 0$, para qualquer c, desde que, para $c < 0$ tem-se $S_c = \cosh s\sqrt{-c} > 0$, para $c = 0$ tem-se $\theta_c = 1$ e para $c < 0$, podemos trocar p_0 por $-p_0$, se necessário, pois se $p_0 \in W$, então $-p_0 \in W$, e as funções suporte correspondentes possuem sinais opostos. Pelo teorema 3.7 e pela proposição 3.6, temos que

$$\begin{aligned}
& H_{r+1}^{\frac{r}{r+1}} \int_M \theta_c dM \leq \int_M H_r\theta_c dM = -H_{r+1}\int_M \langle X, \eta\rangle dM \\
\Leftrightarrow \quad & -H_{r+1}\int_M \langle X, \eta\rangle dM \geq H_{r+1}^{-\frac{1}{r+1}} \cdot H_{r+1}^{\frac{r+1}{r+1}} \int_M \theta_c dM \\
\Leftrightarrow \quad & -H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}} \int_M \langle X, \eta\rangle dM \geq H_{r+1}\int_M \theta_c dM \\
\Leftrightarrow \quad & -H_{r+1}\int_M \theta_c dM \geq H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}} \int_M \langle X, \eta\rangle dM.
\end{aligned} \tag{32}$$

Podemos integrar a igualdade da proposição 3.8 e, pelo teorema da divergência, temos

$$\int_M \{-(r+2)n_{r+2}H_{r+2} + nn_{r+1}H_1H_{r+1}\}\langle X, \eta\rangle dM = -(r+1)n_{r+1}H_{r+1}\int_M \theta_c dM. \tag{33}$$

Usando a desigualdade (32) em (33), obtemos

$$\int_M \{-(r+2)n_{r+2}H_{r+2} + nn_{r+1}H_1H_{r+1}\}\langle X, \eta\rangle dM \geq (r+1)n_{r+1}H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}} \int_M \langle X, \eta\rangle dM. \tag{34}$$

Se denotarmos

$$c(r) = (n-r)n_r = (n-r)\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-(r+1))!},$$

obtemos

$$(r+2)n_{r+2} = (r+2)\frac{n!}{(n+2)!(n-(r+2))!} = \frac{n!}{(r+1)!(n-(r+2))!} = c(r+1),$$

$$nn_{r+1} = n\frac{n!}{(r+1)!(n-(r+1))!} = \frac{n}{r+1}\frac{n!}{r!(n-(r+1))!} = \frac{n}{r+1}c(r)$$

e

$$(r+1)n_{r+1} = (r+1)\frac{n!}{(r+1)!(n-(r+1))!} = \frac{n!}{r!(n-(r+1))!} = c(r).$$

Assim, a expressão (34) pode ser escrita como

$$\int_M \{-c(r+1)H_{r+2} + n\frac{n}{r+1}c(r)H_1H_{r+1}\}\langle X,\eta\rangle dM \geq c(r)H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}}\int_M \langle X,\eta\rangle dM.$$

Multiplicando tal desigualdade por $(r+1)$, temos

$$\int_M \{-(r+1)c(r+1)H_{r+2} + nc(r)H_1H_{r+1} - (r+1)c(r)H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}}\}\langle X,\eta\rangle dM \geq 0.$$

Mas em [2], página 392, Alencar, do Carmo e Rosenberg mostraram que

$$-(r+1)c(r+1)H_{n+2} + nc(r)H_1H_{r+1} - (r+1)c(r)H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}} \geq 0.$$

Desde que $\langle X,\eta\rangle < 0$, deve valer a igualdade. Mas a igualdade ocorre nos pontos umbílicos, logo, $x(M)$ é uma esfera geodésica.

4.2 Caracterização via equação de Poisson em hipersuperfícies compactas

Teorema 4.2 *(Deshmukh) Seja M uma hipersuperfície compacta, conexa e orientável com função suporte não negativa de $\mathbb{R}^{n+1}$. A curvatura média α de M é solução da Equação de Poisson $\Delta\varphi = \sigma$ (σ é o integrando de Minkowski) se, e somente se, M é isométrica à n-esfera $S^n(c)$ de curvatura constante igual a c.*

Prova: Suponha que a curvatura média α é solução da Equação de Poisson $\Delta\varphi = \sigma$ da hipersuperfície M. Definimos a função diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$f = \frac{1}{2n}\|\psi\|^2. \tag{35}$$

Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então, por definição, temos:

$$\begin{aligned} \langle \nabla f, X\rangle &= Xf \\ &= X\left(\frac{1}{2n}\|\psi\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2n}\left(X\|\psi\|^2\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2n} X\langle \psi, \psi \rangle \\
&= \frac{1}{2n} 2\langle \overline{\nabla}_X \psi, \psi \rangle \\
&= n^{-1} \langle \underbrace{\overline{\nabla}_X \psi}_{X}, \psi \rangle \\
&= n^{-1} \langle \psi, X \rangle \\
&= n^{-1} \langle \psi^T + \psi^\perp, X \rangle \\
&= \langle n^{-1} \psi^T, X \rangle,
\end{aligned}
$$

isto é, o gradiente de f é dado por

$$\nabla f = n^{-1} \psi^T. \tag{36}$$

Daí, dado um referencial ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ em um vizinhança de p, que escolhemos de modo que diagonalize A em p, temos:

$$
\begin{aligned}
\Delta f &= div(\nabla f) \\
&= div(n^{-1} \psi^T) \\
&= n^{-1} div(\psi^T) \\
&= n^{-1} \sum_i \langle \nabla_{e_i} \psi^T, e_i \rangle \\
&= n^{-1} \sum_i \langle e_i + \rho A e_i, e_i \rangle \\
&= n^{-1} \sum_i (1 + \rho \langle A e_i, e_i \rangle) \\
&= n^{-1} \left(n + \rho \sum_i \langle A e_i, e_i \rangle \right) \\
&= n^{-1} (n + \rho n \alpha) \\
&= 1 + \rho \alpha \\
&= \sigma,
\end{aligned}
$$

ou seja, f é solução da Equação de Poisson. Pelo Teorema 3.2, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha = f + c$ e, consequentemente, $\nabla \alpha = \nabla(f + c) = n^{-1} \psi^T$, o que nos dá

$$n \nabla \alpha = \psi^T. \tag{37}$$

Agora, considere o Hessiano como o operador

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f : \ T_p M &\to T_p M \\
X &\mapsto \nabla^2 f(X) = \nabla_X \nabla f \ .
\end{aligned}
$$

Denotando o operador Hessiano da curvatura média α por A_α, e tomando $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} nA_\alpha(X) &= n\nabla^2\alpha(X) \\ &= n\nabla_X\nabla\alpha \\ &= \nabla_X(n\nabla\alpha) \\ (37) \rightarrow &= \nabla_X\psi^T \\ \text{proposição 3.9} \rightarrow &= X + \rho AX \\ &= (I+\rho A)(X), \end{aligned}$$

isto é,

$$nA_\alpha = I + \rho A.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} nA_\alpha = I + \rho A \;\; &\Rightarrow \;\; nAA_\alpha = A + \rho AA \\ &\Rightarrow \;\; ntr(AA_\alpha) = trA + \rho tr(AA) \\ &\Rightarrow \;\; ntr(AA_\alpha) = n\alpha + \rho\|A\|^2 \end{aligned} \tag{38}$$

Agora, considere o campo $A(\nabla\alpha)$. Calculamos seu divergente:

$$\begin{aligned} div\,(A(\nabla\alpha)) &= \sum_i \langle \nabla_{e_i} A(\nabla\alpha), e_i\rangle \\ &= \sum_i \left(e_i\langle A(\nabla\alpha), e_i\rangle - \langle A(\nabla\alpha), \nabla_{e_i}e_i\rangle\right) \\ &= \sum_i \left(e_i\langle Ae_i, \nabla\alpha\rangle - \langle A(\nabla\alpha), \nabla_{e_i}e_i\rangle\right) \\ &= \sum_i \left(\nabla_{e_i}Ae_i, \nabla\alpha\rangle + \langle Ae_i, \nabla_{e_i}\nabla\alpha\rangle - \langle A(\nabla\alpha), \nabla_{e_i}e_i\rangle\right) \\ &= \sum_i \left(\langle \nabla A(e_i,e_i) + A(\nabla_{e_i}e_i), \nabla\alpha\rangle + \langle Ae_i, \nabla_{e_i}\nabla\alpha\rangle - \langle A(\nabla\alpha), \nabla_{e_i}e_i\rangle\right) \\ &= \sum_i \left(\langle \nabla A(e_i,e_i), \nabla\alpha\rangle + \langle A(\nabla_{e_i}e_i), \nabla\alpha\rangle + \langle Ae_i, \nabla_{e_i}\nabla\alpha\rangle - \langle A(\nabla_{e_i}e_i), \nabla\alpha\rangle\right) \\ &= n\langle\nabla\alpha, \nabla\alpha\rangle + \sum_i \langle Ae_i, A_\alpha(e_i)\rangle \\ &= n\|\nabla\alpha\|^2 + \sum_i \langle AA_\alpha(e_i), e_i\rangle \\ &= n\|\nabla\alpha\|^2 + tr(AA_\alpha), \end{aligned}$$

onde a sétima igualdade é justificada pela proposição 3.11. Daí, temos

$$
\begin{aligned}
& div\,(A(\nabla\alpha)) = tr(AA_\alpha) + n\|\nabla\alpha\|^2 \\
\Rightarrow\ & ndiv\,(A(\nabla\alpha)) = ntr(AA_\alpha) + n^2\|\nabla\alpha\|^2 \\
\Rightarrow\ & \underbrace{\int_M ndiv\,(A(\nabla\alpha))\,dM}_{0} = \int_M \left(ntr(AA_\alpha) + n^2\|\nabla\alpha\|^2\right) dM \\
\Rightarrow\ & \int_M \left(ntr(AA_\alpha) + n^2\|\nabla\alpha\|^2\right) dM = 0 \\
(38) \to\ \Rightarrow\ & \int_M \left(n\alpha + \rho\|A\|^2 + n^2\|\nabla\alpha\|^2\right) dM = 0 \qquad (39)
\end{aligned}
$$

Do Lema 3.4, temos o seguinte:

$$
\begin{aligned}
& \int_M \left(\alpha\sigma + \|\nabla\alpha\|^2\right) dM = 0 \\
\Rightarrow\ & \int_M \left(\alpha(1+\rho\alpha) + \|\nabla\alpha\|^2\right) dM = 0 \\
\Rightarrow\ & \int_M \left(\alpha + \rho\alpha^2) + \|\nabla\alpha\|^2\right) dM = 0 \\
\Rightarrow\ & n\int_M \left(\alpha + \rho\alpha^2) + \|\nabla\alpha\|^2\right) dM = 0 \\
\Rightarrow\ & \int_M \left(n\alpha + n\rho\alpha^2) + n\|\nabla\alpha\|^2\right) dM = 0 \qquad (40)
\end{aligned}
$$

Subtraindo (40) de (39), obtemos:

$$\int_M \left(\rho\|A\|^2 - n\rho\alpha^2 + n^2\|\nabla\alpha\|^2 - n\|\nabla\alpha\|^2\right) dM = 0$$

$$\Rightarrow \int_M \left(\rho\left(\|A\|^2 - n\alpha^2\right) + n(n-1)\|\nabla\alpha\|^2\right) dM = 0. \qquad (41)$$

Agora, considerando a norma de operadores $\langle A, B\rangle := tr(A\cdot B^t)$, veja que

$$|trA| = |tr(A\cdot I)| = \|tr(A\cdot I^t)\| = \|\langle A, I^t\rangle\| \leq \|A\|\|I^t\| = \|A\|\sqrt{n}, \qquad (42)$$

pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, onde A é o operador forma. Daí,

$$n\|A\|^2 \geqslant (trA)^2 = (n\alpha)^2 = n^2\alpha^2,$$

isto é,

$$\|A\|^2 \geqslant n\alpha^2.$$

Desta maneira, como a função suporte ρ é não negativa, a igualdade (41) nos dá:

$$\rho\left(\|A\|^2 - n\alpha^2\right) = 0 \text{ e } \nabla\alpha = 0.$$

Note que não pode ocorrer $\rho = 0$, pois isso entraria em contradição com a fórmula de Minkowski (teorema 3.1). Então nós temos que $\|A\|^2 - n\alpha^2 = 0$ e α é constante. Agora observe que em (42) vale a igualdade na desigualdade de Cauchy-Schwarz se, e somente se, $A = \lambda I$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Vemos que

$$A = \lambda I \Rightarrow \|A\|^2 = \lambda^2\|I\|^2 = \lambda^2 n.$$

Daí, $\lambda^2 n = \|A\|^2 = n\alpha^2 \Rightarrow \ \lambda^2 = \alpha^2 \Rightarrow |\lambda| = |\alpha|$ Assim, $\|A\|^2 = n\alpha^2 \Rightarrow A = |\alpha| I$. Portanto, M é uma hipersuperfície totalmente umbílica. Pelo teorema 2.3, M é isométrica à n-esfera de raio igual a $\frac{1}{|\alpha|}$, isto é, curvatura igual a $c = \alpha^2$, como queríamos mostrar.

A recíproca é trivialmente satisfeita, tendo em vista que, se M é uma esfera de raio r, sua curvatura média α é constante e igual a $-\frac{1}{r}$ (escolhendo a orientação dada por um campo normal exterior unitário), logo, $\Delta\alpha = 0$. Também temos que

$$\rho = \langle \psi, N\rangle = r\|N\|^2 = r,$$

ou seja,

$$\sigma = 1 + \rho\alpha = 1 - r\frac{1}{r} = 0.$$

Então, vale $\Delta\alpha = \sigma$. □

Teorema 4.3 *Seja M uma hipersuperfície compacta, conexa e orientável de $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura escalar S limitada superiormente pela constante $n(n-1)\lambda^{-1}$, onde $\lambda = sup\rho^2$ e ρ é a função suporte. Então a curvatura de Ricci na direção do campo vetorial ∇S é não negativa e a curvatura escalar S é a solução da equação de Poisson $\nabla\varphi = \sigma$ (σ é o integrando de Minkowski) se, e somente se, M é isométrica à n-esfera $S^n(c)$ de curvatura constante igual a $c = \lambda^{-1}$*

Prova: Suponha que a curvatura escalar S é solução da Equação de Poisson $\Delta\varphi = \sigma$ da hipersuperfície M. Definimos, como na prova do teorema anterior, a função diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$f = \frac{1}{2n}\|\psi\|^2. \tag{43}$$

Já sabemos que $\nabla f = n^{-1}\psi^T$ e que f satisfaz a equação de Poisson $\Delta\varphi = \sigma$, logo, pelo Teorema 3.2, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $S = f + c$ e, consequentemente, $\nabla S = \nabla(f+c) = n^{-1}\psi^T$, o que nos dá

$$n\nabla S = \psi^T. \tag{44}$$

Denotando o operador Hessiano da curvatura escalar S por A_S, e tomando $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos o seguinte:

$$\begin{array}{rcl} nA_S(X) & = & n\nabla^2 S(X) \\ & = & n\nabla_X \nabla S \\ & = & \nabla_X(n\nabla S) \\ (44) \rightarrow & = & \nabla_X \psi^T \\ \text{proposição 3.9} \rightarrow & = & X + \rho A X \\ & = & (I + \rho A)(X), \end{array}$$

isto é,

$$nA_S = I + \rho A. \tag{45}$$

Daí,

$$\begin{array}{rcl} n^2\|A_S\|^2 & = & \|nA_S\|^2 \\ & = & tr(nA_S)^2 \\ & = & tr(I + \rho A)^2 \\ & = & tr(I + 2\rho A + \rho^2 A^2) \\ & = & n + 2\rho n\alpha + \rho^2\|A\|^2, \end{array}$$

o que, integrando sobre M, nos dá

$$\int_M \|A_S\|^2 dM = \frac{1}{n^2}\int_M \left(n + 2\rho n\alpha + \rho^2\|A\|^2\right) dM \tag{46}$$

$$= \frac{1}{n^2}\int_M \left(\rho^2\|A\|^2 + 2\rho n\alpha + 2n - n\right) dM \tag{47}$$

$$\text{teorema 3.1} \rightarrow \quad = \frac{1}{n^2}\int_M \left(\rho^2\|A\|^2 - n\right) + \frac{2}{n}\underbrace{\int_M (1 + \rho\alpha)\, dM}_{0}, \tag{48}$$

isto é,

$$\int_M \|A_S\|^2 = \frac{1}{n^2}\int_M \left(\rho^2\|A\|^2 - n\right) dM. \tag{49}$$

Também temos $(\Delta S)^2 = \sigma^2 = 1 + 2\rho\alpha + \rho^2\alpha^2$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_M (\Delta S)^2 dM &= \int_M \left(1 + 2\rho\alpha + \rho^2\alpha^2\right) dM \\
&= \int_M \left(2 + 2\rho\alpha - 1 + \rho^2\alpha^2\right) dM \\
&= \underbrace{2\int_M (1 + \rho\alpha)\, dM}_{0} + \int_M \left(\rho^2\alpha^2 - 1\right) dM,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_M (\Delta S)^2 dM = \int_M \left(\rho^2\alpha^2 - 1\right) dM. \tag{50}$$

Agora, substituindo (49) e (50) na fórmula de Bochner para hipersuperfícies:

$$\int_M \left((Ric(\nabla S, \nabla S) + \|A_S\|^2 - (\Delta S)^2\right) dM = 0,$$

temos

$$\begin{aligned}
&\int_M Ric(\nabla S, \nabla S) dM + \int_M \|A_S\|^2 dM - \int_M (\Delta S)^2 dM \\
=& \int_M Ric(\nabla S, \nabla S) dM + \frac{1}{n^2}\int_M \left(\rho^2\|A\|^2 - n\right) dM - \int_M \left(\rho^2\alpha^2 - 1\right) dM \\
=& \int_M Ric(\nabla S, \nabla S) dM + \frac{1}{n^2}\int_M \left(\rho^2\|A\|^2 - n - n^2\rho^2\alpha^2 + n^2\right) dM \\
=& \int_M Ric(\nabla S, \nabla S) dM + \frac{1}{n^2}\int_M \left(\rho^2(\|A\|^2 - n^2\alpha^2) - n + n^2\right) dM \\
=& \int_M Ric(\nabla S, \nabla S) dM + \frac{1}{n^2}\int_M \left(-\rho^2 S - n + n^2\right) dM \\
\Rightarrow& \int_M \left(Ric(\nabla S, \nabla S) + \frac{1}{n^2}\left(n(n-1) - \rho^2 S\right)\right) dM = 0.
\end{aligned} \tag{51}$$

Note agora que se tivéssemos $\lambda = sup\rho^2 = 0$, teríamos $\rho^2 = 0$. Mas isto não pode acontecer, pois o teorema 3.1 afirma que

$$\int_M (1 + \rho\alpha) dM = 0.$$

Então temos $\lambda = sup\rho^2 > 0$. A desigualdade $S \leq n(n-1)\lambda^{-1}$ nos dá

$$\rho^2 S \leq n(n-1)\underbrace{\rho^2\lambda^{-1}}_{\leq 1} \leq n(n-1)\ . \tag{52}$$

Como a curvatura de Ricci na direção do campo vetorial ∇S é não negativa, a equação

(51) nos dá

$$Ric(\nabla S, \nabla S) = 0 \text{ e } \rho^2 S = n(n-1). \tag{53}$$

Dessa forma, a desigualdade de (52) fica

$$n(n-1) = \rho^2 S \leq n(n-1)\rho^2\lambda^{-1} \leq n(n-1)$$

$$\Rightarrow 1 \leq \rho^2\lambda^{-1} \leq 1,$$

ou seja, $\rho^2 = \lambda$, o que nos diz que ρ é constante. Por sua vez, a segunda equação de (53) nos diz que a curvatura escalar S é constante. Agora, usando a equação (45), nós temos

$$\begin{aligned} nA_S &= I + \rho A \\ \Rightarrow 0 &= I + \rho A \\ \Rightarrow A &= -\rho^{-1} \\ \Rightarrow A &= -\lambda^{-\frac{1}{2}} I \ , \end{aligned}$$

o que, pelo teorema 2.3, mostra que M é isométrica à n-esfera de curvatura igual a $c = \lambda^{-1}$, como queríamos mostrar.

A recíproca é trivialmente satisfeita, tendo em vista que, se M é uma esfera, sua curvatura escalar S é constante, logo, $\Delta S = 0$. Repetindo o argumento usado no teorema anterior, $\sigma = 0$. Então, vale $\Delta S = \sigma$. □

4.3 Caracterização via hipersuperfícies com curvaturas médias linearmente relacionadas

Teorema 4.4 *(Onat) Sejam M uma hipersuperfície compacta e orientável imersa em $\mathbb{Q}^{n+1}$ e $\psi : M \to \mathbb{Q}^{n+1}$ sua imersão, onde $\mathbb{Q}^{n+1}$ é $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{H}^{n+1}$ ou $\mathbb{S}^{n+1}_+$. Assuma que $\psi(M)$ é convexa. Se $H_r \neq 0$, com $r \leq n$, e existem constantes não negativas $C_1, C_2, ..., C_{r-1}$ tais que*

$$H_r = \sum_{i=1}^{r-1} C_i H_i,$$

então $x(M)$ é uma esfera geodésica.

Prova: Como M é convexa, então o operador forma é definido positivo. Isto implica que as curvaturas principais são positivas e, consequentemente, as curvaturas r-médias são positivas.

Caso 1: Considere $\mathbb{Q}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$. Veja que a igualdade obtida no corolário 3.1 pode ser escrita como

$$\int_M H_{r-1} dM = \int_M \left(-H_r\langle\psi, N\rangle\right) dM, \tag{54}$$

assim como a desigualdade da proposição 3.5 pode ser escrita como

$$\frac{H_r}{H_{r-1}} \geq \frac{H_{r+1}}{H_r},$$

o que nos diz que vale

$$\frac{H_i}{H_{i-1}} \geq \frac{H_r}{H_{r-1}}, \tag{55}$$

para $1 \leq i < r \leq n$ ou, equivalentemente,

$$\frac{H_i}{H_r} \geq \frac{H_{i-1}}{H_{r-1}}, \tag{56}$$

se, e somente se, todas as curvaturas principais forem iguais. Da hipótese e da desigualdade (56), temos

$$\begin{aligned}
& H_r = \sum_{i=1}^{r-1} C_i H_i \\
\Rightarrow \quad & 1 = \sum_{i=1}^{r-1} C_i \frac{H_i}{H_r} \geq \sum_{i=1}^{r-1} C_i \frac{H_{i-1}}{H_{r-1}} \\
\Rightarrow \quad & H_{r-1} \geq \sum_{i=1}^{r-1} C_i H_{i-1} \\
\Rightarrow \quad & H_{r-1} - \sum_{i=1}^{r-1} C_i H_{i-1} \geq 0.
\end{aligned} \tag{57}$$

Integrando a desigualdade (57) e usando (54) para $1 \leq i < r \leq n$, temos

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_M \left(H_{r-1} - \sum_{i=1}^{r-1} C_i H_{i-1}\right) dM \\
&= \int_M \left(-H_r\langle\psi, N\rangle + \sum_{i=1}^{r-1} C_i H_i \langle\psi, N\rangle\right) dM \\
&= \int_M \left(-H_r + \sum_{i=1}^{r-1} C_i H_i\right) \langle\psi, N\rangle dM \\
&= \int_M \left(-H_r + H_r\right) \langle\psi, N\rangle dM \\
&= 0,
\end{aligned}$$

portanto,

$$H_{r-1} = \sum_{i=1}^{r-1} C_i H_{i-1},$$

isto é,

$$1 = \sum_{i=1}^{r-1} C_i \frac{H_{i-1}}{H_{r-1}}.$$

Assim, temos

$$\sum_{i=1}^{r-1} C_i \frac{H_i}{H_r} = 1 = \sum_{i=1}^{r-1} C_i \frac{H_{i-1}}{H_{r-1}},$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^{r-1} C_i \left(\frac{H_i}{H_r} - \frac{H_{i-1}}{H_{r-1}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{H_i}{H_r} = \frac{H_{i-1}}{H_{r-1}}.$$

Então a desigualdade (56) trata-se, na verdade, de uma igualdade, isto é, todas as curvaturas principais são iguais. Então, $\psi(M)$ é totalmente umbílica, logo, é uma esfera geodésica, pelo teorema 2.3.

Caso 2: Considere $\mathbb{Q}^{n+1} = \mathbb{H}^{n+1}$. Veja que a igualdade obtida no corolário 3.2 pode ser escrita como

$$\int_M H_{r-1}\langle \psi, a \rangle dM = \int_M \left(-H_r \langle N, a \rangle \right) dM.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_M H_{r-1}\langle \psi, a \rangle dM &= -\int_M H_r \langle N, a \rangle dM \\
&= -\int_M \sum_{i=1}^{r-1} C_i H_i \langle N, a \rangle dM \\
&= -\int_M C_1 H_1 \langle N, a \rangle dM - \int_M C_2 H_2 \langle N, a \rangle dM - ... - \int_M C_{r-1} H_{r-1} \langle N, a \rangle dM \\
&= \int_M C_1 H_0 \langle \psi, a \rangle dM + \int_M C_2 H_1 \langle \psi, a \rangle dM + ... + \int_M C_{r-1} H_{r-1} \langle \psi, a \rangle dM \\
&= \int_M \sum_{i=1}^{r-1} C_i H_{i-1} \langle \psi, a \rangle dM,
\end{aligned}$$

portanto,

$$\int_M \left(H_{r-1} - \sum_{i=1}^{r-1} C_i H_{i-1} \right) \langle \psi, a \rangle dM = 0.$$

Se tomarmos $a = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{n+2}_1$, $\langle \psi, a \rangle$ não muda de sinal em M. Daí,

$$H_{r-1} = \sum_{i=1}^{r-1} C_i H_{i-1}.$$

Pelo mesmo argumento do caso 1, $\psi(M)$ é totalmente umbílica e, pelo teorema (3.9), $\psi(M)$ é uma esfera geodésica.

Caso 3: Considere $\mathbb{Q}^{n+1} = \mathbb{S}^{n+1}_+$. Veja que a igualdade obtida no corolário 3.3 pode ser escrita como

$$\int_M H_{r-1} \langle \psi, a \rangle dM = \int_M (H_r \langle N, a \rangle)\, dM.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_M H_{r-1} \langle \psi, a \rangle dM &= \int_M H_r \langle N, a \rangle dM \\
&= \int_M \sum_{i=1}^{r-1} C_i H_i \langle N, a \rangle dM \\
&= \sum_{i=1}^{r-1} C_i \int_M H_i \langle N, a \rangle dM \\
&= \sum_{i=1}^{r-1} C_i \int_M H_{i-1} \langle \psi, a \rangle dM \\
&= \int_M \sum_{i=1}^{r-1} C_i H_{i-1} \langle \psi, a \rangle dM,
\end{aligned}$$

portanto,

$$\int_M \left(H_{r-1} - \sum_{i=1}^{r-1} C_i H_{i-1} \right) \langle \psi, a \rangle dM = 0.$$

Como M está na semi esfera $\mathbb{S}^{n+1}_+$, podemos tomar um vetor $a \in \mathbb{S}^{n+1}_+$ tal que $\langle \psi, a \rangle$ não muda de sinal em M. Daí,

$$H_{r-1} = \sum_{i=1}^{r-1} C_i H_{i-1}.$$

Pelo mesmo argumento do caso 1, $\psi(M)$ é totalmente umbílica e, pelo teorema 3.8, $\psi(M)$ é uma esfera geodésica. □

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foram demonstrados quatro teoremas para caracterização de esferas, que são os resultados do capítulo 4. Com eles temos como conclusão quatro maneiras distintas de verificar se uma hipersuperfície compacta imersa em uma forma espacial é uma esfera geodésica.

O primeiro resultado mostra que dada uma hipersuperfície compacta e orientada M^n e $x : M \rightarrow Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica, onde Q_c^{n+1} é uma forma espacial simplesmente conexa com curvatura seccional constante c, $x(M)$ é uma esfera geodésica em Q_c^{n+1} se, e somente se, a $(r+1)$-ésima curvatura média H_{r+1} é uma constante não nula e o conjunto dos pontos que são omitidos em Q_c^{n+1} pelas hipersuperfícies totalmente geodésicas $(Q_c^n)_p$ tangentes a $x(M)$ é não vazio.

O segundo resultado mostra que se M é uma hipersuperfície compacta, conexa e orientável do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, com função suporte não negativa e integrando de Minkowski σ, então a função curvatura média α da hipersuperfície é solução da equação de Poisson $\Delta\phi = \sigma$ se, e somente se, M é isométrica à n-esfera $S^n(c)$ de curvatura média c.

O terceiro resultado mostra que se M é uma hipersuperfície compacta, conexa e orientável de $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura escalar S limitada superiormente pela constante $n(n-1)\lambda^{-1}$, onde $\lambda = sup\rho^2$ e ρ é a função suporte, então a curvatura de Ricci na direção do campo vetorial ∇S é não negativa e a curvatura escalar S é a solução da equação de Poisson $\nabla\varphi = \sigma$ (σ é o integrando de Minkowski) se, e somente se, M é isométrica à n-esfera $S^n(c)$ de curvatura média constante igual a $c = \lambda^{-1}$.

Finalmente como quarto resultado, dada uma imersão isométrica $x : M \rightarrow \mathbb{Q}^{n+1}$, onde M é uma hipersuperfície compacta tal que $x(M)$ é convexa, então se alguma curvatura r-média é tal que $H_r \neq 0$ e existem constantes não negativas $C_1, C_2, ..., C_{r-1}$ tais que $H_r = \sum_{i=1}^{r-1} C_i H_i$, devemos ter que $x(M)$ é uma esfera geodésica, onde $\mathbb{Q}^{n+1}$ é $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{H}^{n+1}$ ou $\mathbb{S}_+^{n+1}$.

Tais teoremas são muito interessantes, como também os resultados desenvolvidos e utilizados nas provas desses são de grande valia. Por exemplo, as fórmulas de Minkowski (corolários 3.1, 3.2, 3.3 e o teorema 3.7), que relacionam vários dos objetos definidos no trabalho e que podem ser utilizadas em vários outros contextos.

REFERÊNCIAS

[1] ALENCAR, H. e COLARES, A.G. - **Integral formulas for the r-mean curvature linearized operator of a hypersurface**, Ann. Global Anal. Geom., Vol. 16, 1998, p. 203-220.

[2] ALENCAR, H., CARMO, M. P. do. e ROSENBERG, H. - On the first eigenvalue of the linearized operator of the r-th mean curvature of a hypersurface, Ann. Global Anal. Geom., Vol. 11, 1993, p. 387-391.

[3] CAMINHA, A. - **On Hypersurfaces in Space of Constant Sectional Curvature.** 75 folhas.Tese (Doutorado em Matemática), Universidade Federal do Ceará, coordenação de aperfeiçoamento de pessoal de nível superior. Ano de obtenção: (2004).

[4] S. DESHMUKH - **A Note on hypersurfaces of a Euclidean space**, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I (2013), http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2013.09.003.

[5] CARMO, M. P. do. - **Geometria Riemanniana.** Coleção Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, (2008).

[6] DONALDSON, S. - **Geometric analysis lecture notes**, available online at http://www2.imperial.ac.uk/ skdona/.

[7] KOH, S. E. - **A Characterization of rounds spheres**, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), no. 12, 3657-3660

[8] P. Li - **Curvature and function theory on Riemannian manifolds**, in: Survey in Differential Geometry: Papers Dedicated to Atiyah, Bott, Hirzebruch, and Singer, vol. VII, International Press, 2000, pp.275-432.

[9] P. Li - **Lecture Notes on Geometric Analysis, Global Analysis Reseach**, Seoul National University, Korea, 1993.

[10] PINHEIRO, N. R. - **Hipersuperfícies com curvatura média constante e hiperplanos.** 57 folhas. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal de Alagoas, 2010.

[11] MONTEIRO, L. C. S. - **Estabilidade de Hipersuperfícies de Curvatura Média Constante em Variedades Riemannianas de Curvatura Secccional Constante.** 123 folhas. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, 2006.

[12] MONTIEL, S. e ROS, A. - **Compact hypersurfaces: The Alexandrov theorem for higher order mean curvatures**, in Lawson, B. e Tenenblat, K. (eds), Differential Geometry, Pitman Monographs, Vol. 52, Longman, Essex, 1991, p. 279-296.

[13] ONAT, L. - **On a Characterization of Round Spheres**, Bull. Korean Math. Soc. 39 (2002), No. 4, pp. 681-685.

[14] REILLY, R. - **Extrinsic rigidity theorems for compact submanifolds of the sphere**, J. Differential Geom., Vol. 4, 1970, p. 487-497.

[15] ROSENBERG, H. - **Hypersurfaces of Constant Curvature in Space Forms.**

Bull. Sc. Math. **117**, 217-239 (1993)

[16] SANTOS, P. J. - **Hipersuperfícies Compactas: O Teorema de Alexandrov para Curvatura Média de Ordem Superior.** 43 folhas. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal do Piaui, Teresina, 2010.

[17] SANTOS, V. O. - **Fórmulas integrais para a Curvatura r-Média e Aplicações.** 66 folhas. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal de Alagoas, 2010