



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

TIAGO SILVA

NOÇÕES DE GEOMETRIA HIPERBÓLICA

FORTALEZA

2017

TIAGO SILVA

NOÇÕES DE GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em rede nacional do Departamento de matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S584n Silva, Tiago.
Noções de Geometria Hiperbólica / Tiago Silva. – 2017.
58 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2017.
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Geometria Hiperbólica. 2. Trigonometria Hiperbólica. 3. Quinto Postulado. I. Título.

CDD 510

TIAGO SILVA

NOÇÕES DE GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em rede nacional do Departamento de matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 07/07/2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Prof. Dr. Carlos Augusto David Ribeiro
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

A Deus, a razão de tudo.

A minha Família, o meu alicerce.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por todas as bênçãos que me concedestes, por ser fazer presente em todos os momentos, a ele a minha gratidão, honra e glória.

A minha esposa, Maria Elizângela Silva Araújo, por todo amor, companheirismo, compreensão, nos momentos mais difíceis dessa caminhada o seu apoio e incentivo foram fundamentais.

A meu irmão José Lucas silva, por todo apoio e auxílio, nas diversas situações em que precisei de sua ajuda nenhum empecilho o impediu de ajudar-me.

A minha família, em especial a minha mãe Joselina Venuto da Silva que apesar das muitas dificuldades, com força e bravura soube criar seus filhos no caminho da dignidade sempre nos incentivando a estudar, oportunidade que não teve. A ela minha gratidão, amor e carinho.

Ao professor Marcelo Ferreira de melo pela sua contribuição e excelente orientação neste trabalho.

A todos os professores do PROFMAT/UFC pelas excelentes contribuições durante todo o curso, pelo empenho em despertar e aperfeiçoar todos os mestrandos para o conhecimento da matemática.

A todos os meus colegas de curso pelos momentos enriquecedores e fundamentais para que no final dessa caminhada tivéssemos sucesso.

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

“Não existe uma estrada real para a Geometria.” (Euclides de Alexandria).

RESUMO

O surgimento da Geometria hiperbólica é um dos capítulos mais interessantes da história da matemática. Durante muito tempo o quinto postulado de Euclides chamou a atenção dos matemáticos, eles viram a possibilidade de demonstrar-lo como um teorema, usando como hipótese os quatro primeiros. As varias tentativas de se provar o quinto postulado ocuparam os geômetras por mais de 2000 anos, porém todos fracassaram. Contudo essas tentativas foram fundamentais para se enxergar uma nova geometria tão consistente quanto a de Euclides. Este trabalho aborda os principais tópicos da Geometria hiperbólica, o contexto histórico, os principais matemáticos que contribuíram para o seu nascimento, alguns resultados e provas envolvendo retas paralelas, triângulos generalizados e seus critérios de congruência, buscando um desenvolvimento de forma simples e acessível. Além disso, apresenta de forma clara a trigonometria hiperbólica, seus principais teoremas e identidades trigonométricas. Por fim espera-se que este trabalho contribua para que uma nova geometria se propague nas universidades e nas escolas de ensino básico.

Palavras-chave: Geometria hiperbólica. Trigonometria hiperbólica. Quinto postulado.

ABSTRACT

The emergence of hyperbolic geometry is one of the most interesting chapters in the history of mathematics. For a long time the fifth postulate of Euclid drew the attention of mathematicians, they saw the possibility of demonstrating it as a theorem, using as hypothesis the first four. The various attempts to prove the fifth postulate occupied the geometers for over 2000 years, but all failed. However these attempts were fundamental to see a new geometry as consistent as Euclid's. This work deals with the main topics of hyperbolic geometry, the historical context, the main mathematicians who contributed to its birth, some results and tests involving parallel lines, generalized triangles and their congruence criteria, seeking a simple and accessible development. In addition, it clearly presents hyperbolic trigonometry, its main theorems and trigonometric identities. Finally, it is hoped that this work will contribute to a new geometry spread in universities and elementary schools.

Keywords: Hyperbolic Geometry. Hyperbolic Trigonometry. Fifth Postulate.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Infinitude de paralelas a uma reta passando por um ponto dado.....	16
Figura 2: Axioma de pasch na demonstração da infinitude de retas passando por um ponto dado	17
Figura 3: Demonstração de congruência de ângulos no paralelismo	19
Figura 4: Ângulos de paralelismos são agudos.	19
Figura 5: paralelismo à direita	21
Figura 6: Propriedade simétrica do paralelismo entre retas	22
Figura 7: Propriedade Transitiva do paralelismo entre retas (1º caso).	23
Figura 8: Propriedade Transitiva do paralelismo entre retas (2º caso).	23
Figura 9: Triângulo generalizado 1.....	25
Figura 10: Triângulo generalizado 2.....	25
Figura 11: Triângulo generalizado 3.....	25
Figura 12: Axioma de Pasch para triângulos generalizados: reta entrando pelo vértice	26
Figura 13: Axioma de Pasch para triângulos generalizados: reta entrando pelo lado.	26
Figura 14: Axioma de Pasch para triângulos generalizados: reta entrando pelo lado.	27
Figura 15: Teorema do Ângulo Externo.	27
Figura 16: Caso 1 de congruência de triângulos generalizados	28
Figura 17: Caso 2 de congruência de triângulos generalizados.....	29
Figura 18: Congruência de triângulos isósceles	29
Figura 19: O Ângulo de Paralelismo	30
Figura 20: A função paralelismo é decrescente	30
Figura 21: Demonstração de que o conjunto imagem da função θ é o conjunto $]0,90^\circ]$	31
Figura 22: Demonstração de que o conjunto imagem da função θ é o conjunto $]0,90^\circ]$	31
Figura 23: pontos correspondentes	32
Figura 24: Reta bissetriz das retas m e n.....	33

Figura 25: Existência da bissetriz.....	33
Figura 26: Unicidade de pontos correspondentes em retas paralelas	34
Figura 27: Existência de pontos correspondentes em retas paralelas.....	34
Figura 28: Não colinearidade de pontos correspondentes em três retas paralelas.....	35
Figura 29: Definido Horocírculo	35
Figura 30: Horocírculos congruentes	36
Figura 31: Reta tangente a um horocírculo	36
Figura 32: Congruência entre segmentos de raios de horocírculos concêntricos.....	38
Figura 33: propriedades de arcos correspondentes de horocírculos concêntricos.....	39
Figura 34: Propriedades de arcos correspondentes em horocírculos concêntricos	39
Figura 35: Propriedades de arcos correspondentes em horocírculos concêntricos	41
Figura 36: Relacionando comprimento e distância entre arcos correspondentes de horocírculos concêntricos.....	42
Figura 37: Introduzindo sistema de coordenadas no plano hiperbólico	44
Figura 38: Encontrando a equação de um horocírculo	45
Figura 39: Reta paralela aos eixos coordenados.....	46
Figura 40: Equação envolvendo números complementares	47
Figura 41: Triângulo retângulo	48
Figura 42: Relações trigonométricas hiperbólicas em triângulos retângulos ordinários.....	49
Figura 43: Triângulo Hiperbólico Ordinário	51
Figura 44: O plano hiperbólico Δ	53
Figura 45: Pontos e retas no plano hiperbólico Δ	54
Figura 46: Ângulo hiperbólico no modelo Δ	54
Figura 47: Comprimento de um segmento hiperbólico.....	55

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	ASPECTOS HISTÓRICOS	12
2.1	Descoberta da nova geometria	13
3	QUINTO POSTULADO DA GEOMETRIA HIPERBÓLICA	16
4	UM PUCO DA GEOMETRIA HIPERBÓLICA CONCLUSÃO	21
4.1	Propriedades elementares das paralelas	21
4.2	Pontos ideais e triângulos generalizados	24
4.3	Propriedades dos triângulos generalizados	25
4.4	O ângulo de paralelismo	30
4.5	Horocírculos e curvas equidistantes	32
5	TRIGONOMETRIA HIPERBÓLICA	38
5.1	Arcos concêntricos de horocírculos	38
5.2	Sistemas de coordenadas na geometria hiperbólica	44
5.3	Trigonometria hiperbólica em triângulos retângulos	48
5.4	Trigonometria hiperbólica em triângulos quaisquer	50
6	CONSISTÊNCIA DA GEOMETRIA HIPERBÓLICA	53
6.1	Um modelo para a geometria hiperbólica	53
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	56
	REFERÊNCIAS	57

1 INTRODUÇÃO

O surgimento de uma geometria autoconsistente, diferente da geometria usual de Euclides, foi um dos acontecimentos notáveis e revolucionários que aconteceram na primeira metade do século XIX. Em uma busca incessante para se provar o “problema das paralelas”, que consistia em mostrar o que o quinto postulado de Euclides era independente dos demais, ou seja, imaginava-se que este fosse apenas uma proposição que pudesse ser demonstrada utilizando-se os outros postulados, muitos matemáticos tentaram, porem todos fracassaram. Contudo, todos os fracassos e questionamentos serviram de base para a fundamentação de uma Geometria não Euclidiana.

Neste trabalho, faremos um breve estudo sobre a Geometria Hiperbólica, analisando o contexto histórico em que se inicia sua descoberta, os principais resultados dessa nova geometria, sua consistência e os principais pontos da trigonometria hiperbólica. O desenvolvimento do trabalho é dividido em cinco capítulos.

No primeiro capítulo, retratamos os aspectos históricos envolvidos a descoberta da Geometria Hiperbólica com o intuito de possibilitar um entendimento maior sobre as conseqüências do quinto postulado na Geometria Euclidiana. Vemos também os principais personagens que estiveram envolvidos nesta descoberta.

No segundo capítulo apresentaremos a versão do quinto postulado de Euclides na Geometria Hiperbólica, bem como os resultados que este postulado desencadeia, começando então a desenvolve-se todo o estudo base da nova geometria.

No terceiro capítulo trataremos alguns tópicos da Geometria hiperbólica, propriedades elementares das paralelas, as definições de triângulos generalizados e ângulo de paralelismo, bem como as suas propriedades e teoremas.

No quarto capítulo abordaremos a Trigonometria hiperbólica, seus principais teoremas e identidades trigonométricas.

Finalmente no quinto capítulo, apresentaremos um modelo de plano para a Geometria hiperbólica, evidenciando que esta geometria é tão consistente e fascinante quanto a de Euclides.

2 ASPECTOS HISTÓRICOS

O matemático grego Euclides de Alexandria por volta de 300 a.C. trouxe a público sua obra os *Elementos*, apresentando a geometria na forma axiomática estabelecendo aí o ponto inicial da geometria que hoje conhecemos. Nesta obra Euclides dispõe de cinco postulados, os matemáticos da época e os posteriores ao observarem o quinto, que depois passou a ser conhecido como “o postulado das paralelas”, acreditaram que este poderia ser provado como uma proposição resultante dos quatro primeiros. As várias tentativas de se provar o quinto postulado ocuparam os geometras por mais de 2000 anos, porém culminaram em alguns dos desenvolvimentos de maior alcance da matemática moderna.

O quinto postulado era o mais extenso e mais complexo, para os gregos antigos parecia mais uma proposição do que um postulado. O matemático e físico escocês John Playfair (1748-1819), formulou um substituto mais simples e considerado mais acessível, que é o mais utilizado até os dias atuais.

Postulado V (axioma de playfair) por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela a reta dada. (BARBOSA, 2007, pag. 9).

As primeiras tentativas de se provar esse postulado foram dadas por Ptolomeu (85-265), Proclus Diadochus (410-485), Nasiredin (1201-1274) e John Wallis (1616-1703), porém todos eles fracassaram, pois suas provas usavam informações equivalentes ao quinto postulado. Em 1889, foi descoberto um livro que havia sido publicado em Milão em 1733, escrito por Girolano Saccheri (1667-1773), um padre jesuíta professor da universidade de Paiva, neste livro ele apresentava uma tentativa de prova para o quinto postulado. Em sua demonstração ele usa o método de redução ao absurdo, método que nenhum matemático ainda havia tentado, que consiste em negar uma proposição e tentar chegar a uma contradição.

Saccheri considerou um quadrilátero ABCD, em que os lados AD e BC são congruentes e os ângulos A e B são retos. Daí, a partir dos quatro primeiros postulados, ele iria mostrar que os outros dois ângulos são retos. Fazer isto era equivalente a provar o quinto postulado. Sem nenhuma dificuldade e com o auxílio dos quatro primeiros postulados Saccheri mostrou que os dois ângulos eram congruentes. Surge aí então três possibilidades: os ângulos C e D são agudos, retos ou obtusos. A hipótese dos ângulos retos é equivalente ao quinto postulado. Tendo como hipótese que C e D são obtusos e assumido que a reta é ilimitada, facilmente chegou-se a uma contradição. No entanto, a possibilidade dos dois ângulos serem agudos mostrou-se muito mais difícil. Após ter chegado a vários resultados, alguns dos quais viriam a se tornar teoremas conhecidos da Geometria hiperbólica, Saccheri

forçou uma contradição admitindo ser impossível a existência de duas retas paralelas assintóticas, ou seja, retas que são paralelas, mas que vão se aproximando a medida que são prolongadas. Segundo Eves (2011) se Saccheri não tivesse tão convicto de exibir uma contradição, e ao invés disso tivesse admitido sua incapacidade de encontrá-la, os méritos pela descoberta da nova geometria seriam devidamente dados a ele.

Assim como Saccheri, o suíço Johann Heinrich Lambert (1728-1777) fez o uso do método de redução ao absurdo, em um trabalho muito semelhante, ele considerou um quadrilátero com três ângulos retos. O diferencial de Lambert é que ele conseguiu ir um pouco mais longe na dedução de novos resultados, todavia suas conclusões finais sobre a hipótese do ângulo agudo são insatisfatória. Suas observações seriam mais tarde confirmados pelos matemáticos Riemann e Lobachewsky.

Adien-Marie Legendre (1752- 1833), analista francês do século XVIII, começou diferente, considerando as hipóteses de a soma dos ângulos internos de um triângulo ser menor, igual ou maior que dois ângulos retos. Assumindo tacitamente a infinitude da reta, foi capaz de eliminar a terceira hipótese, mas, apesar de várias tentativas, não conseguiu descartar a primeira. Todos esses esforços apareceram nas sucessivas edições de seu *Éléments de Géométrie*, um texto largamente adotado, e dessa forma Legendre contribuiu muito para popularizar o problema do postulado das paralelas.

2.1 Descoberta da nova geometria

Os inúmeros esforços e os recorrentes insucessos acerca da demonstração do quinto postulado como um teorema foram preparando um caminho produtivo e com muitos argumentos que levaria a uma nova geometria. Os primeiros a suspeitarem que o postulado das paralelas fosse independente dos demais foram o alemão Gauss, o húngaro Janos Bolyai (1802-1860) e o russo Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856).

Uma figura de grande destaque na matemática, considerado hoje o “*príncipe da matemática*” o alemão Carl Friedrich Gauss (1777- 1855) deu uma grande contribuição no desenvolvimento das idéias que levaram a descoberta da geometria não euclidiana, nome dado por Gauss para designar a nova geometria. Foi o primeiro matemático a reconhecer a existência de uma Geometria consistente diferente da Euclidiana.

Poucos resultados a cerca do quinto postulado foram tornados públicos durante a sua vida, cartas enviadas a matemáticos da época evidencia o seu conhecimento acerca do problema. Foi durante a segunda metade do século XIX que ele começou a desenvolver as

idéias da nova Geometria formulando os seus teoremas, porém Gauss era prudente em suas divulgações talvez pelo receio da não aceitação de uma Geometria diferente da clássica e da contestação da filosofia de Kant, adotada pela igreja, que coloca o universo como euclidiano.

Janos (ou Johann) Bolyai era um oficial húngaro do exército austríaco, filho de Farkas (ou Wolfgang) Bolyai, um professor provinciano de matemática, de longa data amigo pessoal de Gauss. O jovem Bolyai sem dúvida recebeu estímulo considerável para estudar o postulado das paralelas da parte de seu pai que, em tempos anteriores, havia demonstrado interesse pelo problema. Apesar de seu Pai ter expressamente recomendado que este problema deveria ser deixado de lado. Ele escreveu “pelo amor de Deus, eu lhe peço que desista! Tema tanto isso quanto as paixões sensuais porque isso também pode tomar todo o seu tempo, e privá-lo de sua saúde, paz de espírito e felicidade na vida.” (BOYER, 1974, p. 397).

Já em 1823 Janos Bolyai começou a entender a verdadeira natureza do problema que enfrentava e, numa carta escrita a seu pai naquele ano, mostrou o entusiasmo que tinha por seu trabalho. Nessa carta ele revelou a disposição de publicar um ensaio sobre a teoria das paralelas tão logo encontrasse tempo e oportunidade para pôr o material em ordem, e exclamou, “Do nada eu criei um universo novo e estranho”. O pai insistiu para que o tratado proposto fosse publicado como um apêndice de um alentado trabalho semifilosófico seu, designado *Tentamen*, em dois volumes, sobre matemática elementar.

O desenvolvimento e arranjo das ideias transcorreram mais lentamente do que Janos previra, mas finalmente, em 1829, ele submeteu o manuscrito concluído a seu pai e três anos mais tarde, em 1832, o ensaio aparecia como um apêndice de 26 páginas do primeiro volume do trabalho de seu pai. Janos Bolyai jamais publicou nada depois disso, embora tivesse deixado uma pilha de manuscritos. Seu interesse principal era com o que ele chamava “a ciência absoluta do espaço” referindo-se com isso à coleção das proposições que independem do postulado das paralelas e que, por consequência, valem tanto na geometria euclidiana como na nova geometria. Em 1848, Bolyai tomou conhecimento de que a honra pela descoberta da nova Geometria devia se dividida com outra pessoa.

Nicolai Ivanovitch Lobachevsky passou a maior parte de sua vida na Universidade de Kazan, primeiro como aluno, depois como professor de matemática e finalmente como reitor. Seu primeiro artigo sobre geometria não euclidiana foi publicado em 1829 e 1830 no *Kasan Bulletin*, dois ou três anos antes de o trabalho de Bolyai aparecer impresso. Seu trabalho sugeria uma nova Geometria na qual mais de uma reta paralela a uma reta dada podiam ser traçadas por um ponto e o onde a soma dos ângulos de um triângulo seria menor do que dois retos. Essa memória mereceu muito pouca atenção na Rússia e, por ter sido

escrita em russo, praticamente nenhuma em outros lugares.

Lobachevsky deu continuidade a seus esforços iniciais com outras exposições. Por exemplo, na expectativa de alcançar um grupo mais amplo de leitores, ele publicou, em 1840, um pequeno livro escrito em alemão intitulado *Geometrische Untersuchungen Zur Theorie der Parallellinien* (Investigações Geométricas sobre a Teoria das Paralelas) , e mais tarde, em 1855, um ano antes de sua morte e algum tempo depois de ficar cego, uma abordagem final, mais condensada, em francês, com o título de *Pangéométrie* (Pangeometria) .

Eves (2011) afirma que as novas descobertas disseminavam-se tão lentamente naqueles tempos que Gauss com certeza jamais ouvira falar do trabalho de Lobachevsky antes do aparecimento do texto em alemão citado; e não teve conhecimento de Janos Bolyai antes de 1848.

Os trabalhos de Lobachevsky e Janos Bolyai não receberam, na época em que foram publicados, o reconhecimento esperado pelo coroamento de tantos séculos de investigação. No entanto, isso não deve nos surpreender. A história das descobertas científicas nos ensina que , toda mudança radical em um dos compartimentos da ciência, não produz, de imediato, alterações nas convicções e nas pressuposições nas quais os cientistas baseiam suas visões particulares da parte da ciência a que se dedicam. (BARBOSA, 2007, pag. 46).

Nos primeiros anos da descoberta da nova Geometria as idéias foram se propagando lentamente. Passados alguns anos, algumas publicações de traduções nas principais línguas da época, como francês e alemão, trouxeram, finalmente, o crédito e a consideração devidos à nova Geometria.

3 QUINTO POSTULADO DA GEOMETRIA HIPERBÓLICA

O postulado característico da geometria hiperbólica é dado por: “*Por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas pelo menos duas retas que não encontram a reta dada.*”

Proposição 1 *Sejam n uma reta e P um ponto não pertencente a n . Então, existem infinitas retas que passam por P e não intersectam n .*

Demonstração:

Se o postulado acima é válido, então existem duas retas m e m' passando por P e não interceptando a reta n . Elas determinam no plano quatro ângulos, sendo que a reta n está completamente contida em um deles.

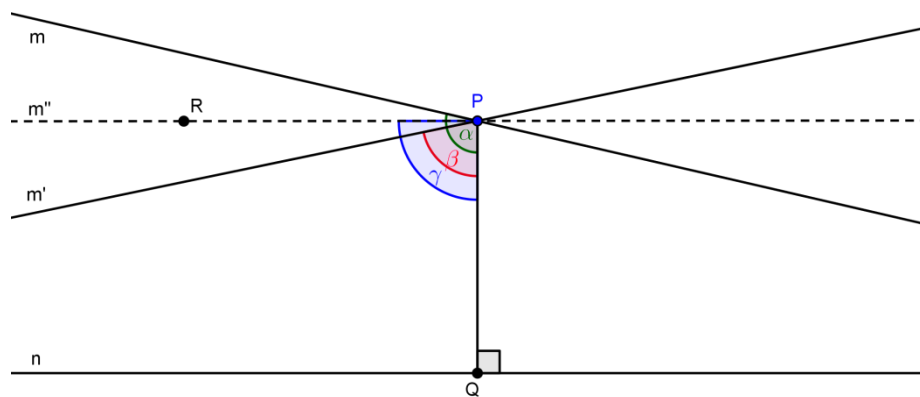


Figura 1: Infinitude de paralelas a uma reta passando por um ponto dado.

Seja Q o pé perpendicular baixada de P a n . Considere os ângulos α e β de vértice comum P formados pelas retas m e \overrightarrow{PQ} e; m' e \overrightarrow{PQ} , respectivamente. Seja R um ponto contido na região angular α , mas não esteja contido na região angular β . Seja $m'' \neq m, m'$, uma reta passando por P e R contida nas regiões oposta pelo vértice P que não contém n , γ é o ângulo formado pela reta m'' e \overrightarrow{PQ} , conforme a figura 1

Afirmção: $m'' \cap n = \emptyset$

De fato se $m'' \cap n = \{A\}$, temos o triângulo PQA . A reta m entra no triângulo PQA por P e em consequência m interceptará a reta n , o que é uma contradição.

que não interceptam n , e que chamaremos de \mathbf{N} , e a dos que representam retas que interceptam n , e que chamaremos de \mathbf{M} . É claro que $\mathbf{N} \cap \mathbf{M}$ é vazio, que $E \in \mathbf{N}$ e que $Q \in \mathbf{M}$. Além disso, se $A \in \mathbf{M}$, então $QA \subset \mathbf{M}$. Para ver que isto ocorre, seja A' o ponto de n onde a reta que passa por P e A intercepta n ; observe que qualquer reta que penetre no triângulo PQA' pelo vértice P deve cortar o lado QA' . Da mesma forma, se $B \in \mathbf{N}$, então, $EB \subset \mathbf{N}$.

Segue-se, então, do axioma de Dedekind para os números reais, que vale para os pontos de uma reta ou de um segmento, que existe exatamente um ponto S que separa os conjuntos \mathbf{M} e \mathbf{N} . A questão que se coloca imediatamente é se este ponto de separação pertence ao conjunto \mathbf{M} ou ao conjunto \mathbf{N} . Suponha que pertence ao conjunto \mathbf{M} , ou seja, a reta que passa por P e S intercepta n em um ponto S' . Tome agora qualquer ponto na semi-reta de origem Q passando por S' e que esteja fora do segmento QS' . É claro que esta reta intercepta EQ em um ponto que fica fora do segmento QS , o que é um absurdo. Logo $S \in \mathbf{N}$.

O mesmo raciocínio pode agora ser repetido com o segmento QF , obtendo-se outro ponto de separação daquele lado. Estes dois pontos correspondem a retas que separam todas as retas que passam pelo ponto P em duas categorias – as retas que interceptam n e as que não interceptam n . Além disto, estas duas retas não interceptam n .

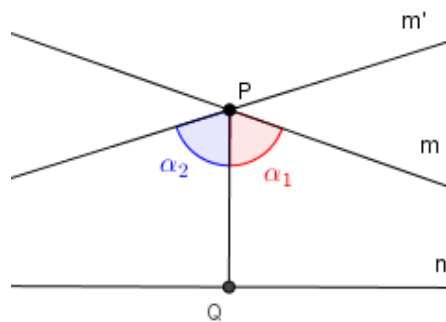
□

Chamaremos estas duas retas de *paralelas* à reta n passando por P .

Proposição 3 *sejam n uma reta e P um ponto não pertencente a n . As retas paralelas a n passando por P formam ângulos iguais com a perpendicular baixada de P à reta n . Além disso, o ângulo mencionado é agudo.*

Demonstração:

Seja Q o pé da perpendicular baixada de P a n . Sejam α_1 e α_2 as medidas dos ângulos entre as paralelas m e m' a n por P com PQ em comum. Suponha que $\alpha_1 < \alpha_2$.



No lado que está o ângulo α_2 , trace uma reta passando por P e que forme ângulo α_1 com PQ . Pela proposição anterior, esta reta cortará a reta n em um ponto, que chamaremos de R_2 . Seja, então, R_1 um ponto na reta n tal que Q seja o ponto médio de R_1R_2 , conforme a

figura 4.

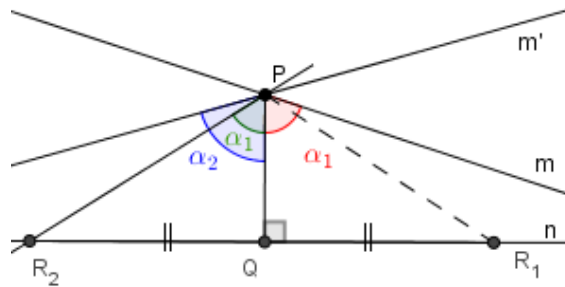


Figura 3: Demonstração de congruência de ângulos no paralelismo

Pelo caso LAL, os triângulos PQR_1 e PQR_2 são congruentes, o que implica $\widehat{QPR}_1 = \alpha_1$, o que é um absurdo. Logo $\alpha_1 = \alpha_2$.

Vamos agora mostrar que esses ângulos são agudos. Como $m \neq m'$, seja β a medida do ângulo entre essas retas, conforme a figura 5.

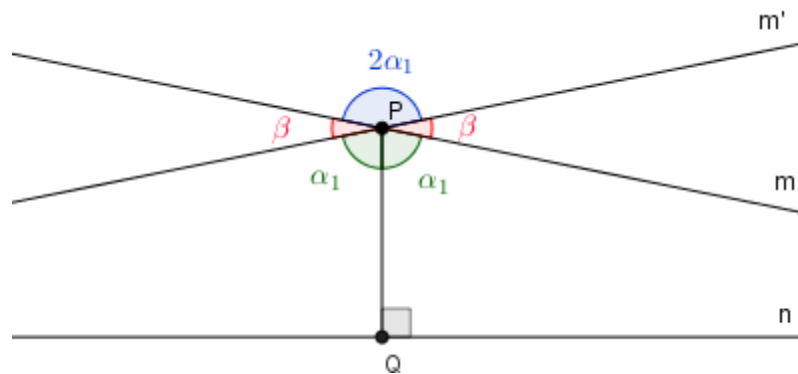


Figura 4: Ângulos de paralelismos são agudos.

Logo,

$$(\alpha_1 + \alpha_1) + \beta + 2\alpha_1 + \beta = 360^\circ$$

$$4\alpha_1 + 2\beta = 360^\circ$$

$$2\alpha_1 + \beta = 180^\circ$$

$$\alpha_1 = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$$

$$\alpha_1 < 90^\circ$$

□

Essas duas retas paralelas se distinguem uma da outra no que diz respeito ao sentido, uma será denominada de *reta paralela à direita* e a outra, de *reta paralela à esquerda*. Além disso, é única a paralela a uma dada reta em um sentido predeterminado passando por um ponto.

4 UM POUCO DA GEOMETRIA HIPERBÓLICA

4.1 Propriedades elementares das paralelas

Proposição 4 *Se uma reta m é paralela a reta n passando por um ponto P em um determinado sentido, então a reta m é paralela a n , nesse mesmo sentido, em qualquer um de seus pontos.*

Demonstração:

Suponhamos que m seja a paralela à direita de n e seja Q um ponto qualquer de m . Devemos mostrar que m é também uma das retas paralela à reta n passando pelo ponto R e que é paralela à direita.

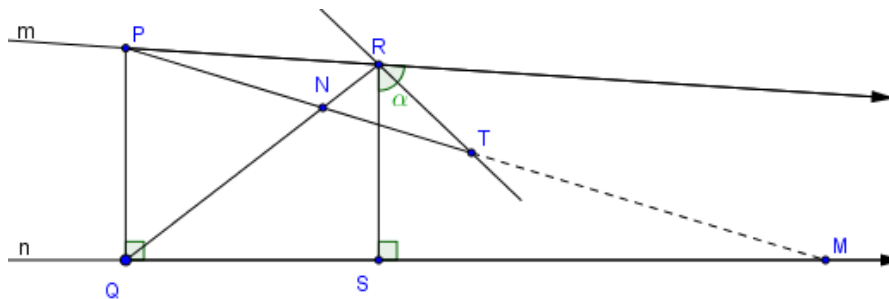


Figura 5: paralelismo à direita.

Temos dois casos a considerar,

1º caso: Suponhamos que $R \in m$ esteja à direita de P . Trace PQ e RS perpendiculares a n . Sendo α o ângulo formado pelo segmento RS com a reta n , vamos mostrar que toda reta entrando no ângulo α por R corta a reta n . Seja RT um segmento de uma de tais retas, tracemos PT e RQ . Pelo paralelismo no ponto P , temos que a reta que contém o segmento PT deve cortar n em um ponto M e, pelo axioma de Pasch, deve cortar o segmento RQ em um ponto N . Novamente usando o axioma de Pasch, concluímos que RT , se prolongado, deve cortar o lado QM do triângulo QMN .

2º caso: Suponhamos agora que $R \in m$ esteja à esquerda de P . Trace PQ e RS perpendiculares a n . Considere α o ângulo suplementar de $\widehat{P\hat{R}S}$, vamos mostrar que toda reta entrando no ângulo α por R corta a reta n . Seja RT um segmento de uma de tais retas, tracemos PT e RQ . Pelo paralelismo no ponto P , temos que a reta que contém o segmento PT deve cortar n em um ponto M e, pelo axioma de Pasch, deve cortar o segmento RQ em um ponto N . Novamente usando o axioma de Pasch, concluímos que RT , se prolongado, deve cortar o lado QM do triângulo QMN . Portanto fica mostrado o paralelismo à esquerda

□

determinado sentido, então m é paralela a m' .

Demonstração:

Primeiro, vamos considerar o caso em que a terceira reta está entre as outras duas, conforme a figura 8.

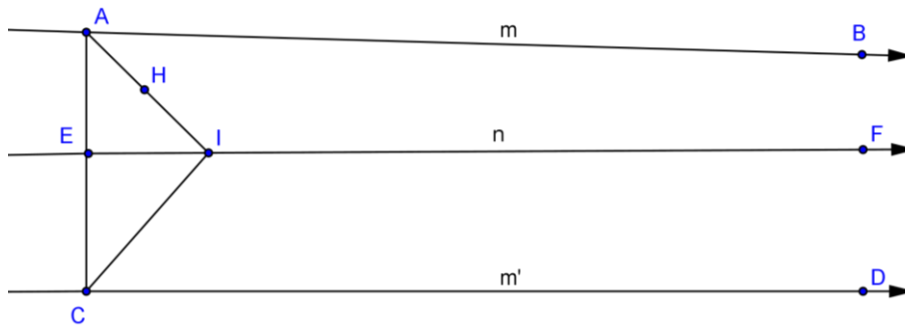


Figura 7: Propriedade Transitiva do paralelismo entre retas (1º caso).

Considere a reta m que passa por A e B , e a reta m' , que passa por C e D , paralelas à reta n , que passa por E e F , ambas na mesma direção. Suponha que o segmento AC seja perpendicular a CD . Considere uma reta que passe nos pontos A e H , este último situado dentro do ângulo $C\hat{A}B$. Como m é paralela a n , esta corta a reta que passa pelos pontos E e F em algum ponto I . Tracemos o segmento CI . Usando a proposição anterior, sabemos que a reta que passa por E e F é paralela à reta que passa por C e D . Logo, a reta que entra no ângulo $C\hat{I}F$ deve interceptar a reta que passa por C e D . Isto prova o resultado neste caso.

Agora, vamos considerar o caso em que as duas retas, m e m' , estão do mesmo lado da reta n (ver figura 9).

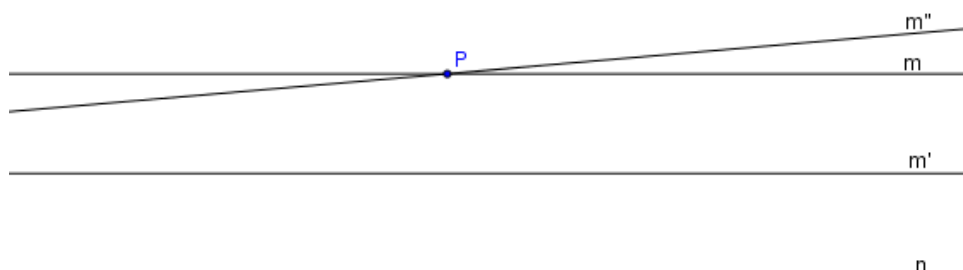


Figura 8: Propriedade Transitiva do paralelismo entre retas (2º caso).

Suponha que m' seja a reta que está entre as outras duas. Tome um ponto $P \in m$.

Considere a reta m'' , passando por P , paralela a m' , na mesma direção do paralelismo. De acordo com a primeira parte provada, m'' é paralela a n . Como m também é paralela a n e o paralelismo de m e m'' é na mesma direção, concluímos que $m = m''$, já que a paralela, em uma determinada direção e passando pelo mesmo ponto, é única. Consequentemente, m é paralela a m' .

□

4.2 Pontos ideais e triângulos generalizados

Introduziremos agora a noção de *ponto ideal*. Vamos acrescentar dois pontos a cada reta do plano, os quais, na ordenação destas retas, localizam-se, um, antes de todos os seus pontos, e outro, depois de todos eles. (É o mesmo procedimento usado para incluir os pontos $+\infty$ e $-\infty$ no conjunto dos números reais. Eles são denominados pontos ideais. Admitiremos que esses novos pontos são adicionados de modo que as retas paralelas tenham em comum um ponto ideal na direção do paralelismo, ou seja, o mesmo ponto ideal é adicionado as retas paralelas, no lado do paralelismo. Assim, duas retas são paralelas se têm um ponto ideal em comum.

Vamos formalizar a construção dos pontos ideais. Considere o conjunto S de todas as semirretas do plano. Sejam s_1 e $s_2 \in S$. Definimos:

$$s_1 \sim s_2 \Leftrightarrow s_1 // s_2$$

Vamos convencionar por ora que uma reta possa ser paralela a ela mesma, com isto e as Proposições 5 e 6, é imediato que \sim é uma relação de equivalência em S .

As classes de equivalência da relação \sim definida acima no conjunto S das semirretas do plano são chamadas de pontos ideais. Geralmente uma classe de equivalência acima é indicada pela letra Ω . Sejam r uma reta e $A \in r$. Logo, A define duas semirretas em r que podem ser representantes de duas classes de equivalência acima definidas. Qualquer outro ponto $B \in r$ definirá as mesmas classes que A define. Assim, podemos dizer que uma reta r determina dois pontos ideais, um para cada sentido de paralelismo em r .

Vamos considerar a noção de *triângulo generalizado*.

- 1) Triângulo formado por dois pontos ordinários A e B e um ponto ideal Ω .
- 2) Triângulo formado por um ponto ordinário A e dois pontos ideais Ω_1 e Ω_2 .
- 3) Triângulo formado por três pontos ideais Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 .

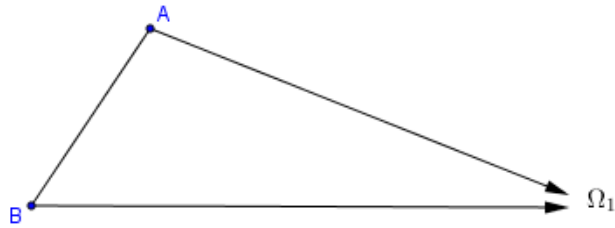


Figura 9: Triângulo generalizado 1

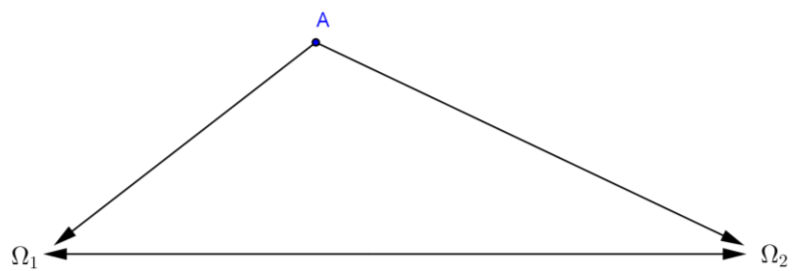


Figura 10: Triângulo generalizado 2

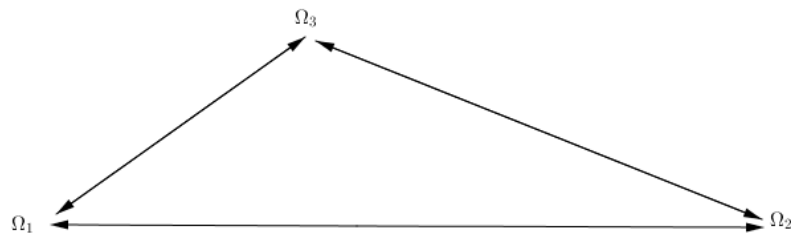


Figura 11: Triângulo generalizado 3

4.3 Propriedades dos triângulos generalizados

Vamos considerar inicialmente os triângulos generalizados formados por dois pontos ordinários e um ponto ideal.

Proposição 7 *Se uma reta r penetra em um triângulo generalizado $AB\Omega$ por um de seus vértices, então, r intercepta o lado oposto a este vértice.*

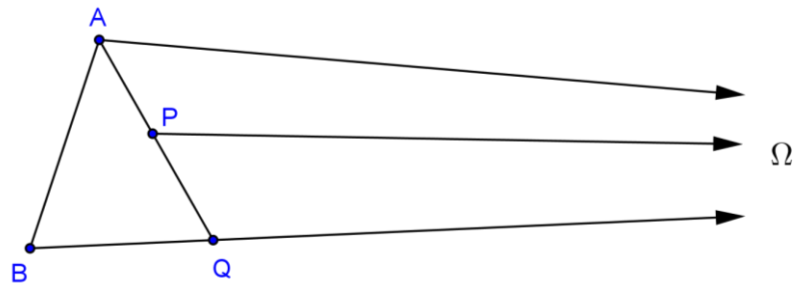


Figura 12: Axioma de Pasch para triângulos generalizados: reta entrando pelo vértice.

Demonstração:

Se r penetra por A , ou por B , então, deve interceptar o lado oposto. Isto ocorre simplesmente porque as retas $A\Omega$ e $B\Omega$ são paralelas. Considere, pois, uma reta que vem do ponto Ω e passa em algum ponto P interior ao triângulo. Pelo paralelismo, a semirreta \overrightarrow{AP} intercepta $B\Omega$ em um ponto Q . Pelo axioma de Pasch, a reta que vem de Ω e passa por P deve interceptar um dos outros dois lados do triângulo ABQ . Não pode interceptar BQ , pois do contrário, coincidiria com o lado $B\Omega$. Logo, intercepta AB .

□

Proposição 8 *Se uma reta r corta um dos lados do triângulo generalizado $AB\Omega$ e não passando por nenhum dos seus vértices, então, intercepta um e somente um dos outros dois lados.*

Demonstração:

Se r corta o lado $A\Omega$, considere Q o ponto dessa interseção, conforme a figura 14.

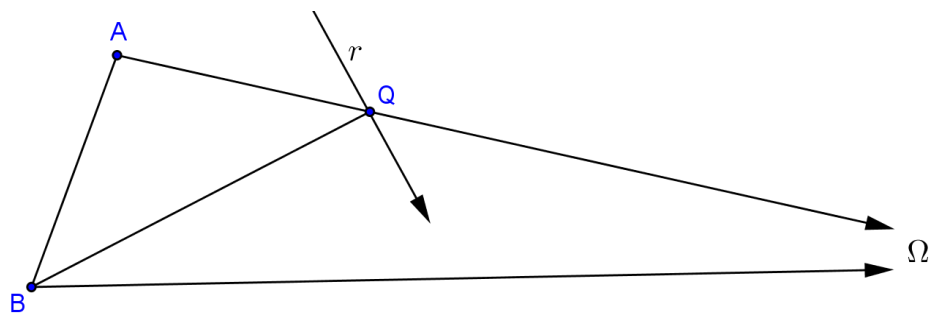


Figura 13: Axioma de Pasch para triângulos generalizados: reta entrando pelo lado.

Se r penetra $BQ\Omega$, pela proposição anterior r corta $B\Omega$, da mesma forma se r penetra ABQ ,

pelo axioma de Pasch r corta AB .

Se r intercepta AB em um ponto R , conforme figura 15.

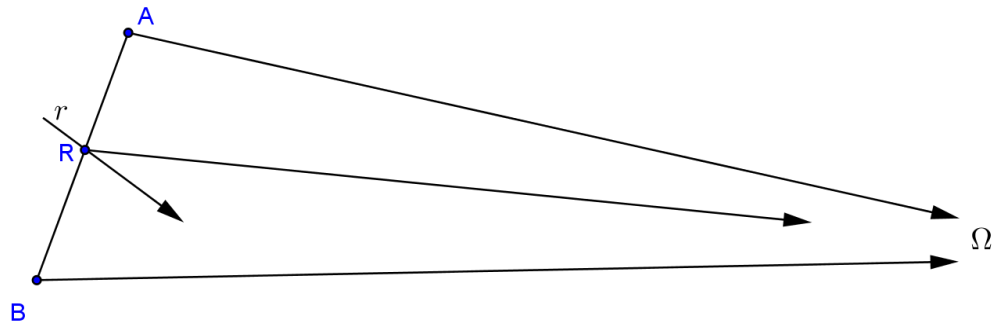


Figura 14: Axioma de Pasch para triângulos generalizados: reta entrando pelo lado.

Se r penetrar qualquer um dos triângulos $AR\Omega$ e $BR\Omega$, fica provado conforme a proposição anterior.

□

Proposição 9 (Teorema do Ângulo Externo) *Um ângulo externo de um triângulo generalizado $AB\Omega$ é sempre maior do que o ângulo interno que não lhe seja adjacente.*

Demonstração:

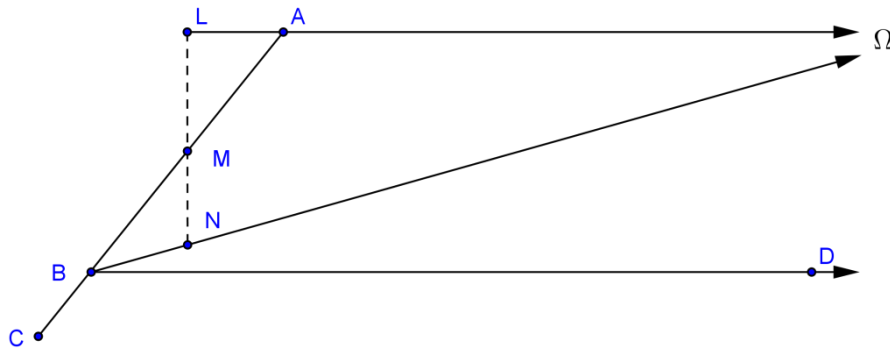


Figura 15: Teorema do Ângulo Externo.

Dado um triângulo generalizado $AB\Omega$, seja C um ponto na semirreta \overrightarrow{AB} , fora do segmento AB . Temos que $C\hat{B}\Omega$ é um ângulo externo do triângulo. Vamos provar que $C\hat{B}\Omega > B\hat{A}\Omega$. Para isto, trace, a partir de B , um segmento BD , tal que $C\hat{B}D = B\hat{A}\Omega$.

Em decorrência dos quatro primeiros postulados, a reta que passa por B e D não intercepta $A\Omega$. Consequentemente, o ponto D não pode estar na região interior ao triângulo $AB\Omega$. Se o ponto D ficar fora do triângulo, como na figura 16, então, o resultado fica demonstrado. Resta, portanto, apenas excluir a possibilidade de que o ponto D esteja sobre $B\Omega$.

Suponha que tal ocorra. Seja M o ponto médio de AB . Baixe uma perpendicular de M até um ponto $N \in B\Omega$. Na reta que passa por A e Ω , marque um ponto L de modo que $LA = BN$ e que L e N estejam em lados opostos relativamente à reta que passa por A e B . Pelo caso de congruência de triângulos LAL temos $LAM \equiv NBM$. Logo, L , M e N são colineares e LN é uma perpendicular comum a $L\Omega$ e a $N\Omega$. Contradição com a proposição 3.

□

Definição: Dois triângulos generalizados, $AB\Omega$ e $A'B'\Omega'$ são congruentes se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre os vértices de modo que seus lados finitos correspondentes sejam congruentes e seus ângulos correspondentes também sejam congruentes.

Proposição 10 (*Caso 1 de Congruência de Triângulos*). Se $AB = A'B'$ e $B\hat{A}\Omega = B'\hat{A}'\Omega'$, então $AB\Omega \equiv A'B'\Omega'$.

Demonstração:

Sem perda de generalidade, podemos supor que $B\hat{A}\Omega > B'\hat{A}'\Omega'$. Tome, pois, uma semirreta \overrightarrow{BC} tal que $B\hat{A}C = B'\hat{A}'\Omega'$. Pela proposição 7, ela corta o lado $A\Omega$ em um ponto D . Seja D' um ponto de $A'\Omega'$ tal que $AD = A'D'$. Logo pelo caso LAL, segue que $ABD \equiv A'B'D'$, assim,

$$B\hat{A}D = B'\hat{A}'D' = B'\hat{A}'\Omega',$$

O que é um absurdo.

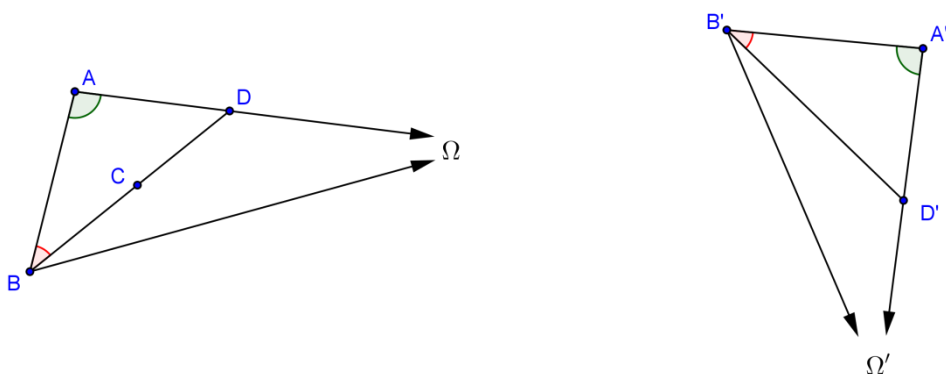


Figura 16: Caso 1 de congruência de triângulos generalizados.

□

Proposição 11 (*Caso 2 de Congruência de Triângulos*). Se $B\hat{A}\Omega = B'\hat{A}'\Omega'$ e $B\hat{A}\Omega = B'\hat{A}'\Omega'$, então $AB\Omega \equiv A'B'\Omega'$.

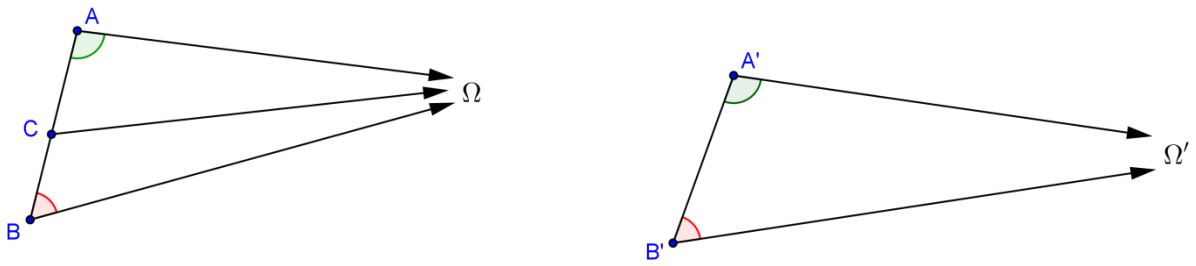


Figura 17: Caso 2 de congruência de triângulos generalizados.

Devemos mostrar que $AB = A'B'$

Suponhamos que $AB > A'B'$. Seja C um ponto de AB tal que $AC = A'B'$. Pela proposição anterior temos que $AC\Omega \equiv A'B'\Omega'$. Portanto, $\widehat{A}C\Omega = \widehat{A'}B'\Omega'$, como por hipótese $\widehat{A}B\Omega = \widehat{A'}B'\Omega'$ o triângulo $CB\Omega$ possui um ângulo externo igual a um ângulo interno não adjacente, o que é uma contradição proposição 9.

□

Dizemos que o triângulo generalizado $AB\Omega$ é *isósceles* de base AB quando $\widehat{A}B\Omega = \widehat{B}A\Omega$.

Proposição 12 Se $AB = A'B'$, $\widehat{A}B\Omega = \widehat{B}A\Omega$ e $\widehat{A'}B'\Omega' = \widehat{B'}A'\Omega'$, então $AB\Omega \equiv A'B'\Omega'$.

Demonstração:

Basta mostrarmos que $\widehat{A}B\Omega = \widehat{A'}B'\Omega'$. Suponhamos que $\widehat{A}B\Omega > \widehat{A'}B'\Omega'$. Construa, então, ângulos $\widehat{A}BC$ e $\widehat{B}AD$, iguais entre si e iguais a $\widehat{A'}B'\Omega'$. Pela proposição 7 e pelo axioma de Pasch, concluímos que as semirretas \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{BC} se intersectam em um ponto, que chamaremos de E , no interior do triângulo $AB\Omega$.

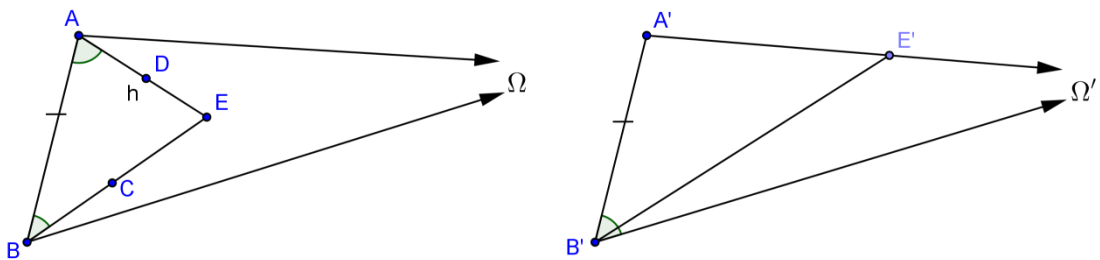


Figura 18: Congruência de triângulos isósceles.

Marque no lado $A'\Omega'$, um ponto E' tal que $AE = A'E'$. Segue-se que os triângulos ABE e $A'B'E'$ são congruentes. Mas, então teremos $\widehat{A'}B'E' = \widehat{A}BE$. Como este último é igual a $\widehat{A'}B'\Omega'$, o ponto E' deve pertencer a $B'\Omega'$, o que é um absurdo. Logo $\widehat{A}B\Omega = \widehat{A'}B'\Omega'$.

□

4.4 O Ângulo de paralelismo

Considere um triângulo generalizado $AP\Omega$, em que $P\hat{A}\Omega = 90^\circ$. Pelo teorema do ângulo externo para triângulos generalizados, é fácil concluir que $A\hat{P}\Omega$ é agudo. A este chamaremos de *ângulo de paralelismo*.

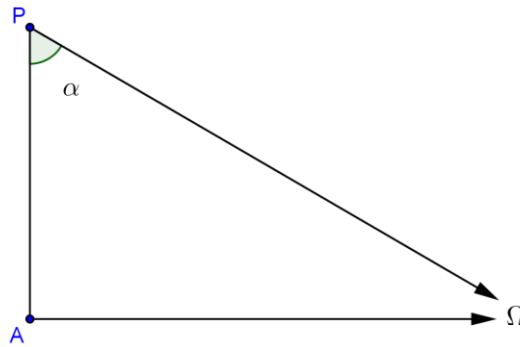


Figura 19: O Ângulo de Paralelismo

Notemos que o ângulo de paralelismo α depende apenas da altura AP do triângulo generalizado $AP\Omega$. Vamos representar por h tal comprimento e por $\theta(h)$ o ângulo de paralelismo. De fato, é consequência imediata do teorema do ângulo externo que θ é uma função decrescente, isto é,

$$\text{Se } h_1 < h_2 \text{ então } \theta(h_1) > \theta(h_2)$$

Conforme a figura 18.

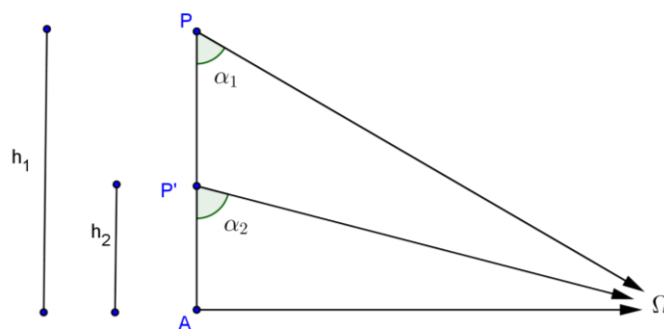


Figura 20: A função paralelismo é decrescente

Proposição 13 A função Ângulo de paralelismo θ está definida para qualquer número real não negativo e é sobre o intervalo $]0,90^\circ]$.

Demonstração:

Vamos mostrar que, dado qualquer ângulo agudo α , existe um número real não

\overrightarrow{DF} corta \overrightarrow{AB} . Se DF já não intersecta \overrightarrow{AB} , F pertence a uma das retas perpendiculares a \overrightarrow{AC} que intersecta \overrightarrow{AB} . A afirmação é agora consequência do axioma de Pasch. Mas, se qualquer semirreta que divide o ângulo $A\hat{D}E$ intersecta \overrightarrow{AB} , então \overrightarrow{DE} é paralela a \overrightarrow{AB} . Portanto, o comprimento h do segmento AD tem α como ângulo de paralelismo

□

É interessante estender a definição de θ para valores negativos de h através da equação:

$$\theta(h) + \theta(-h) = \pi$$

Isto permite que coloquemos coordenadas em uma reta, na forma usual, e tenhamos a função θ definida para cada ponto desta reta.

4.5 Horocírculos e curvas equidistantes

Na Geometria euclidiana, quando consideramos a curva limite obtida de um círculo quando fixamos um de seus pontos e fazemos o seu raio tornar-se arbitrariamente grande, obtemos uma reta. Na Geometria Hiperbólica obtem-se uma curva com características muito especiais. De fato, modificando nossa definição de círculo, podemos incorporar esta curva e obter suas propriedades de uma maneira simples. Para isto, vamos considerar a noção de pontos correspondentes.

Dados duas retas m e n e dois pontos P e Q , sendo $P \in m$ e $Q \in n$, diremos que eles são *pontos correspondentes* se o segmento PQ forma com as duas retas ângulos congruentes no mesmo lado da reta que passa por P e Q . Neste caso, diremos que o ponto P corresponde ao ponto Q , ou que o ponto Q corresponde ao ponto P .

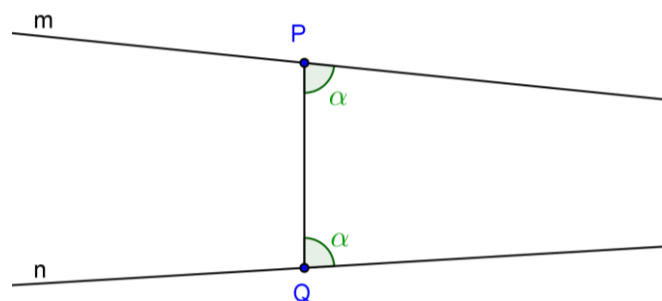


Figura 23: pontos correspondentes.

Dadas duas retas paralelas m e n , considere uma terceira reta s , paralela a estas

duas na mesma direção. Seja C um ponto qualquer de s e sejam E e D os pés das perpendiculares baixadas de C às retas m e n . Se ocorrer que $CE = CD$ e que s seja a bissetriz do ângulo $E\hat{C}D$, então, diremos que s é a *bissetriz generalizada* do ângulo generalizado formado entre m e n .

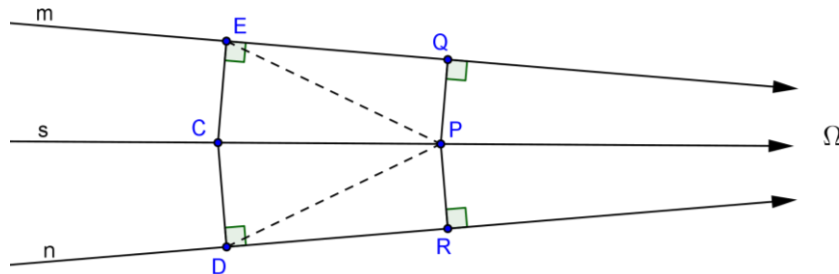


Figura 24: Reta bissetriz das retas m e n .

É fácil ver que se, esta propriedade ocorre em um ponto C , então, ocorre em qualquer outro ponto da reta s . De fato, se P é outro ponto de s , por congruência de triângulo é fácil ver que $PEC \equiv PDC$. Consequentemente, $PD = PE$ e $P\hat{E}C = P\hat{D}C$. Sejam Q e R os pés das perpendiculares baixadas de P às retas m e n , respectivamente. É consequência direta do que já obtivemos que $PEQ \equiv PDR$. Logo, $PQ = PR$ e $Q\hat{P}C = R\hat{P}C$.

Assim, s tem a propriedade de ser o conjunto dos pontos que são equidistantes das retas m e n . Vamos mostrar agora que tais bissetrizes sempre existem. Tome um ponto A sobre m e um ponto B em n . Trace as bissetrizes dos ângulos que o segmento AB forma com estas duas retas do mesmo lado da reta que passa por A e B . Estas duas bissetrizes se interceptam em um ponto C .

Afirmção: O ponto C pertence a bissetriz s .

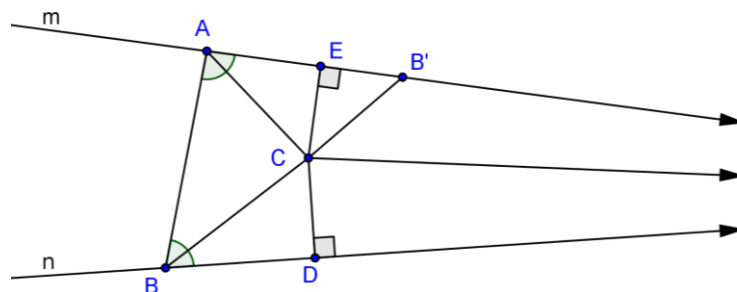


Figura 25: Existência da bissetriz.

De fato, seja $B' \in m$ um ponto tal que $AB = AB'$, escolhido como na figura 23. Assim pelo caso de congruência LAL, ocorre que $BCA = B'CA$. Logo $CB = CB'$ e $C\hat{B}'A = C\hat{B}A$. Sejam

D e E os pés das perpendiculares baixadas de C às retas n e m , respectivamente. Segue-se que $CDB \equiv CEB'$. Portanto $CE = CD$, assim, $C \in s$.

Proposição 14 *Sejam m e n retas paralelas e $P \in m$. Então, existe um único ponto em n tal que P e este ponto são pontos correspondentes.*

Demonstração:

Suponha que existam sobre n dois pontos, Q_1 e Q_2 correspondentes a P , conforme a figura 24

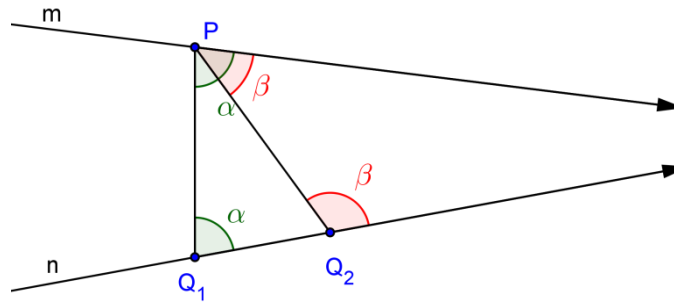


Figura 26: Unicidade de pontos correspondentes em retas paralelas

Sejam α e β os ângulos que PQ_1 e PQ_2 , respectivamente, formam com a reta m . Por construção tem-se $\beta < \alpha$, mas pelo teorema do ângulo externo $\beta > \alpha$. Contradição! isso prova a unicidade.

Para provar a existência, considere a bissetriz generalizada s do ângulo que m e n formam. Dado $P \in m$, seja $K \in s$ o pé da perpendicular baixada de P àquela reta. Sejam agora M e N os pés das perpendiculares baixadas de K às retas m e n , respectivamente. Seja $Q \in n$ tal que $QN = PM$ e trace QK , é imediato que os triângulos PMK e QNK são congruentes. Daí decorre que os pontos P , K e Q são colineares e que $K\hat{P}M = KN\hat{Q}$. Logo P e Q são pontos correspondentes.

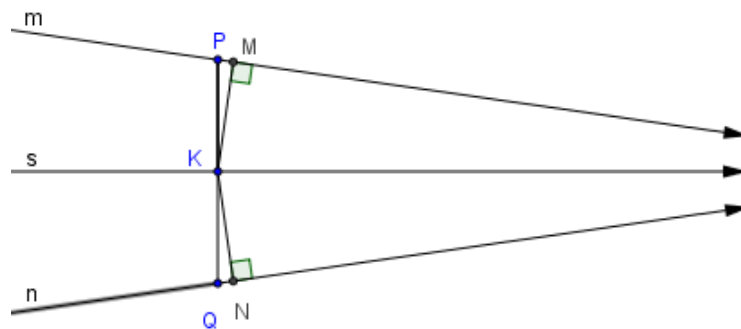


Figura 27: Existência de pontos correspondentes em retas paralelas

Proposição 15 *Se três pontos P , Q e R estão em três retas paralelas em um mesmo sentido, e*

se P corresponde a Q e Q corresponde a R , então, os três pontos não são colineares.

Demonstração:

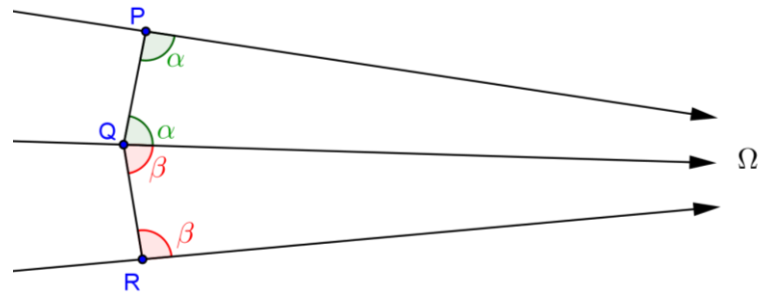


Figura 28: Não colinearidade de pontos correspondentes em três retas paralelas

Observe que o ângulo formado entre PQ e qualquer uma das retas é igual ao ângulo de paralelismo correspondente à metade do segmento PQ . Logo, é um ângulo agudo. Se os três pontos fossem colineares, teríamos a soma de dois ângulos agudos resultando em um ângulo raso. Este absurdo prova o teorema.

□

Considere a família de retas paralelas que passa por um ponto ideal Ω e P um ponto de uma delas. O conjunto dos pontos correspondentes a P é chamado de *horocírculo* de centro Ω , sendo $P\Omega$ chamado raio do horocírculo.

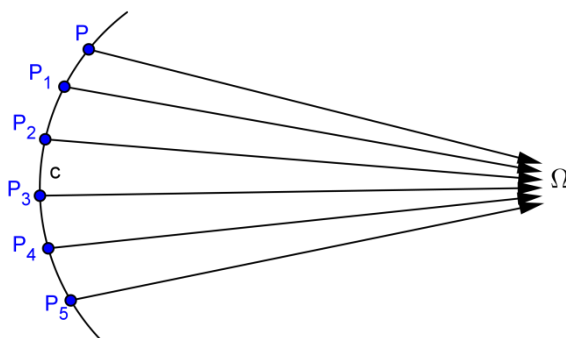


Figura 29: Definido Horocírculo.

Proposição 16 *Dois horocírculos quaisquer são congruentes.*

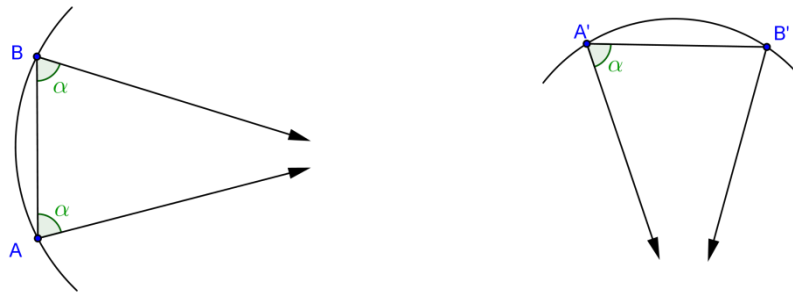


Figura 30: Horocírculos congruentes.

Demonstração:

Sejam \mathcal{H} e \mathcal{H}' dois horocírculos com centros nos pontos ideais Ω e Ω' , respectivamente. Sejam A e B pontos de \mathcal{H} e A' um ponto de \mathcal{H}' . Seja α o ângulo $B\hat{A}\Omega$. Construa um ângulo $B'\hat{A}'\Omega' = \alpha$ com $AB = A'B'$. Pela proposição 12, temos que $AB\Omega \equiv A'B'\Omega'$. Portanto, $A\hat{B}\Omega = A'\hat{B}'\Omega'$ e, conseqüentemente, B' é correspondente a A' nas retas $A'\Omega'$ e $B'\Omega'$. Portanto, $B' \in \mathcal{H}'$. Isto prova a proposição. \square

Proposição 17 *Uma reta é tangente a um horocírculo se, e somente se, é normal a um dos seus raios sem sua extremidade.*

Demonstração:

\Rightarrow) Seja P o ponto de interseção do horocírculo \mathcal{H} com a reta r , tangente a \mathcal{H} . Suponhamos que o ângulo entre $P\Omega$ e r seja agudo.

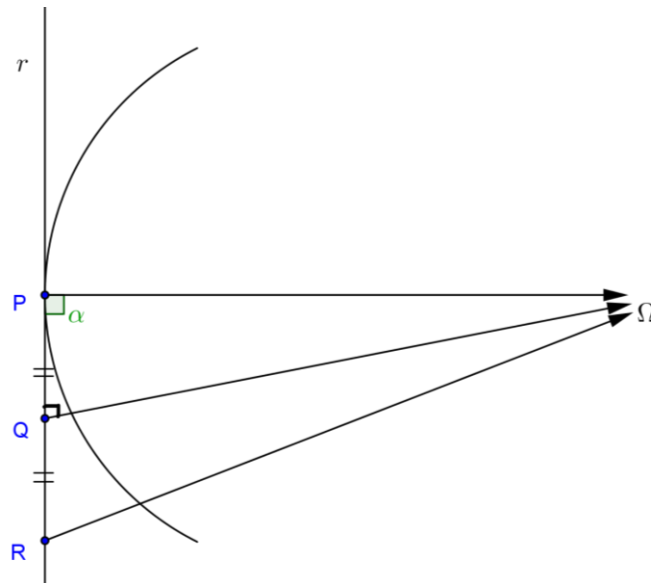


Figura 31: Reta tangente a um horocírculo.

Seja $h > 0$ tal que $\theta(h) = \alpha < 90^\circ$ (θ é a função ângulo de paralelismo). Seja $Q \in r$ tal que $PQ = h$. Seja $R \in r$ tal que $PQ = QR$, como na figura 32. Logo, pelo caso 1 de

congruência de triângulos generalizados, $PQ\Omega \equiv RQ\Omega$. Assim $\widehat{P}\hat{R}\Omega = \widehat{R}\hat{P}\Omega$, ou seja, P e R são correspondentes. Daí, $R \in \mathcal{H}$, contradizendo a hipótese. Portanto $\alpha = 90^\circ$.

\Leftarrow) Se r é normal a $P\Omega$ e r cortar \mathcal{H} em um outro ponto Q , teremos que P e Q serão correspondentes e $PQ\Omega$ será um triângulo generalizado com dois ângulos retos. Absurdo! Logo P é o ponto de interseção de \mathcal{H} com a reta r , portanto r é tangente a \mathcal{H} .

□

Seja r uma reta. Considere agora o conjunto de todas as retas perpendiculares a r . Seja P um ponto qual quer de uma dessas retas, e $P \in r$. O lugar geométrico \mathcal{C} de todos os pontos correspondentes de P nas demais retas desse conjunto é chamado de *curva equidistante* de r .

5 TRIGONOMETRIA HIPERBÓLICA

5.1 Arcos concêntricos de horocírculos

Proposição 18 *Segmentos de raios entre dois horocírculos concêntricos são congruentes.*

Demonstração:

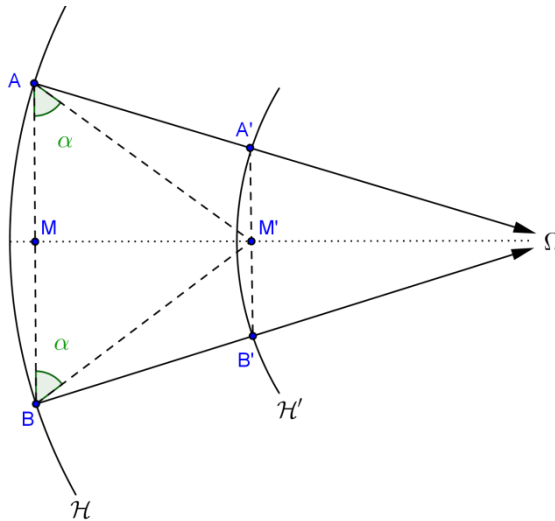


Figura 32: Congruência entre segmentos de raios de horocírculos concêntricos.

Demonstração:

Dados dois horocírculos concêntricos \mathcal{H} e \mathcal{H}' , com centro em Ω e os pontos $A, B \in \mathcal{H}$ e identificando os pontos A' e B' , respectivamente interseção dos raios $A\Omega$ e $B\Omega$ de \mathcal{H} com \mathcal{H}' . Seja M o ponto médio de AB . Pelo caso 1 de congruência para triângulos generalizados temos $AM\Omega \equiv BM\Omega$.

É fácil verificar também que $AMM' \equiv BMM'$ (caso LAL), e que $AA'M' \equiv BB'M'$ (caso LLA_o). Daí, concluímos que $AB = A'B'$, como queríamos. □

Proposição 19 *Se um raio divide ao meio um arco de um horocírculo, também divide ao meio o arco correspondente de qualquer horocírculo concêntrico.*

Demonstração:

Dados dois horocírculos concêntricos \mathcal{H} e \mathcal{H}' , com centro Ω , os pontos $A, B \in \mathcal{H}$, os pontos A' e B' respectivamente interseção dos raios $A\Omega$ e $B\Omega$ de \mathcal{H} com \mathcal{H}' , M dividindo ao meio o arco AB e seja M' um ponto do arco $A'B'$. Seja C o ponto médio do segmento AB e C' ponto médio de $A'B'$, conforme figura 34.

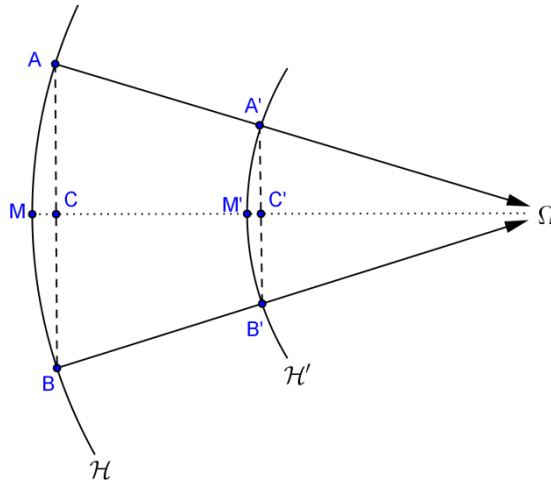


Figura 33: propriedades de arcos correspondentes de horocírculos concêntricos.

Corolário 1 O conjunto dos pontos médios de arcos correspondentes em horocírculos concêntricos constituem um raio.

Corolário 2 Se os pontos $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ dividem um arco AB de um horocírculo em n partes iguais, os raios passando por estes pontos cortam o arco $A'B'$ correspondente, de um horocírculo concêntrico, em pontos $P'_1, P'_2, P'_3, \dots, P'_n$, dividindo também este arco em n partes iguais.

Demonstração:

Basta aplicar a proposição 19 aos arcos $AP_2, P_1P_3, P_2P_4, \dots, P_{n-2}P_n$.

□

Proposição 20 Sejam \mathcal{H} e \mathcal{H}' horocírculos concêntricos. Dados pontos A, B e C de \mathcal{H} , representemos por A', B' e C' os pontos de \mathcal{H}' determinados pelos raios que passam pelos três primeiros pontos, então

$$\frac{\text{Arco } AB}{\text{Arco } AC} = \frac{\text{Arco } A'B'}{\text{Arco } A'C'}$$

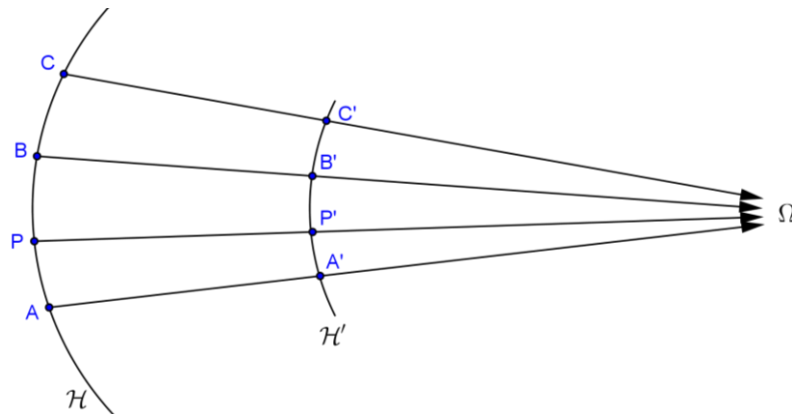


Figura 34: Propriedades de arcos correspondentes em horocírculos concêntricos

Demonstração:

Existem dois casos a considerar.

1º caso: Suponha que os arcos AB e AC são comensuráveis. Seja AP o arco que constitui a unidade de medida comum. Então temos

$$\frac{\text{Arco } AB}{\text{Arco } AP} = m \quad e \quad \frac{\text{Arco } AC}{\text{Arco } AP} = n,$$

Com $m, n \in \mathbb{N}$.

Trace o raio que passa pelo ponto P . Ele cortará o arco $A'C'$ em um ponto P' , pelo corolário 2 podemos concluir que

$$\frac{\text{Arco } A'B'}{\text{Arco } A'P'} = m \quad e \quad \frac{\text{Arco } A'C'}{\text{Arco } A'P'} = n,$$

2º caso: Suponha agora que os arcos AB e AC são incomensuráveis. Seja AP um arco que é uma unidade para o arco AB , isto é

$$\text{Arco } AB = m(\text{Arco } AP),$$

Onde $m \in \mathbb{N}$. Logo existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n(\text{Arco } AP) < \text{Arco } AC < (n+1)(\text{Arco } AP)$$

Logo:

$$\frac{m}{n+1} < \frac{\text{Arco } AB}{\text{Arco } AC} < \frac{m}{n}$$

Além disso, quando o arco AP tende a zero, os dois quocientes $\frac{n}{n+1}$ e $\frac{m}{n}$ tendem a um mesmo número real α .

Por outro lado, é claro que, para cada construção do tipo descrito, o raio traçado pelos pontos A, B e P determinam em qualquer horocírculo concêntrico pontos A', B' e P' , os quais, pela parte demonstrada do teorema, satisfazem às seguintes relações:

$$\begin{aligned} \text{Arco } A'B' &= m(\text{Arco } A'P') \\ n(\text{Arco } A'P') &< \text{Arco } A'C' < (n+1)(\text{Arco } A'P'). \end{aligned}$$

Como consequência, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{m}{n+1} < \frac{\text{Arco } A'B'}{\text{Arco } A'C'} < \frac{m}{n} &\implies \\ \frac{m}{n+1} - \frac{m}{n} < \frac{\text{Arco } AB}{\text{Arco } AC} - \frac{\text{Arco } A'B'}{\text{Arco } A'C'} < \frac{m}{n} - \frac{m}{n+1} &\implies \\ 0 < \left| \frac{\text{Arco } AB}{\text{Arco } AC} - \frac{\text{Arco } A'B'}{\text{Arco } A'C'} \right| < \frac{m}{n} - \frac{m}{n+1} \end{aligned}$$

Fazendo $AP \rightarrow 0$, temos $m, n \rightarrow \infty$ com $\frac{m}{n}$ limitado.

Logo, $\frac{m}{n} - \frac{m}{n+1} \rightarrow 0$, ou seja:

$$\left| \frac{\text{Arco } AB}{\text{Arco } AC} - \frac{\text{Arco } A'B'}{\text{Arco } A'C'} \right| = 0 \Rightarrow \frac{\text{Arco } AB}{\text{Arco } AC} = \frac{\text{Arco } A'B'}{\text{Arco } A'C'}$$

□

Proposição 21 *A razão entre arcos correspondentes de horocírculos concêntricos depende somente da distância entre eles, medida ao longo de um raio.*

Demonstração:

Consideremos a família de horocírculos cujo centro é Ω . Fixe um raio a e pontos A, A_1, A_2, A_3, \dots de a tais que:

$$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots$$

Vamos supor que nossa notação tenha sido fixada de modo que os pontos A_i pertençam a semirreta $A\Omega$. Fixe agora um outro raio b e sobre ele considere os pontos B, B_1, B_2, B_3, \dots correspondentes, na mesma ordem, os pontos escolhidos. Pelo que vimos teremos

$$BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \dots$$

Considere os arcos de horocírculos $AB, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots$

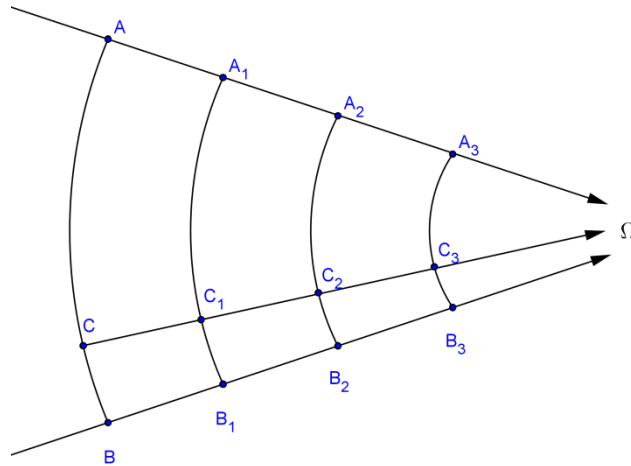


Figura 35: Propriedades de arcos correspondentes em horocírculos concêntricos.

Todos eles são correspondentes. Como os arcos correspondentes de horocírculos aumentam quando nos afastamos do centro comum, podemos marcar no arco AB um ponto C tal que

$$\text{Arco } AC = \text{Arco } A_1B_1$$

Trace o raio que passa pelo ponto C . Ele determina pontos C_1 no $\text{Arco } A_1B_1$, C_2 no $\text{Arco } A_2B_2$, C_3 no $\text{Arco } A_3B_3$, ... Da congruência das figuras ACC_1A_1 e $A_1B_1B_2A_2$ segue-se que os arcos C_1A_1 e B_2A_2 são congruentes. Portanto, para $i = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{Arco } A_i C_i = \text{Arco } A_{i+1} B_{i+1}$$

Consequentemente,

$$\frac{\text{Arco } AB}{\text{Arco } AC} = \frac{\text{Arco } A_1 B_1}{\text{Arco } A_1 C_1} = \frac{\text{Arco } A_2 B_2}{\text{Arco } A_2 C_2} = \dots$$

Logo

$$\frac{\text{Arco } AB}{\text{Arco } A_1 B_1} = \frac{\text{Arco } A_1 B_1}{\text{Arco } A_2 B_2} = \frac{\text{Arco } A_2 B_2}{\text{Arco } A_3 B_3} = \dots$$

□

Vamos agora fixar uma unidade de comprimento para a geometria hiperbólica. O valor de $\frac{\text{Arco } AB}{\text{Arco } A_1 B_1}$ é maior do que 1, podendo ser alterado para maior ou menor pela simples mudança da distancia entre os dois arcos. Vamos assumir que

$$\frac{\text{Arco } AB}{\text{Arco } A_1 B_1} = e$$

Onde e é o numero de Euler.

Definimos nossa unidade de comprimento como a distância entre os dois arcos.

Proposição 22 Se s_0 e s_x representam os comprimentos de dois arcos correspondentes em horocírculos concêntricos, sendo $s_x < s_0$ e sendo x a distância entre eles ao longo de um raio comum, então

$$s_x = s_0 e^{-x}$$

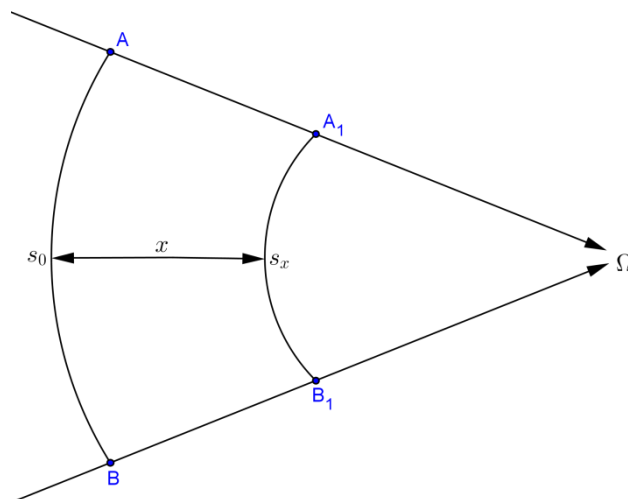
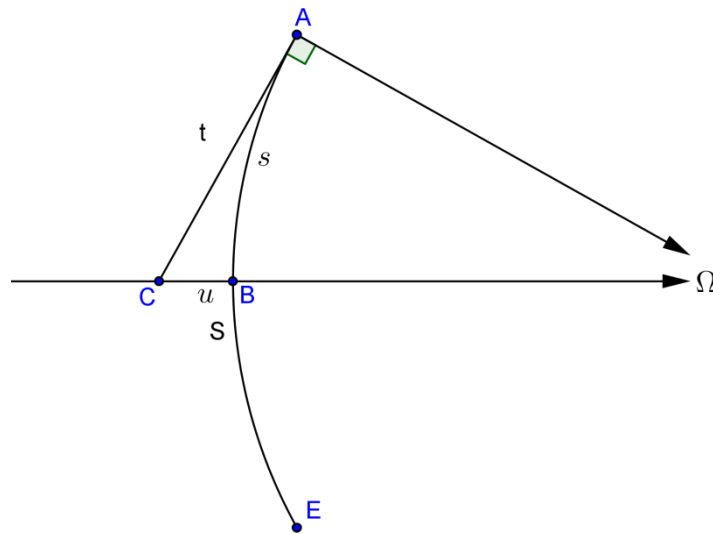


Figura 36: Relacionando comprimento e distância entre arcos correspondentes de horocírculos concêntricos.

Considere a figura abaixo



Tomemos $Arco AE = S$, $Arco AB = s$, nessas condições, na figura acima vale a seguinte proposição.

Proposição 23

$$S - s = S e^{-(t+u)} \quad (1)$$

$$S + s = S e^{t-u} \quad (2)$$

Corolário 3 Nas condições da proposição anterior, valem as seguintes relações:

$$e^u = \cosh t \quad e \quad s = S \tanh t$$

Demonstração:

Somando (1) e (2) da proposição 23, obtemos

$$2S = S(e^{-t}e^{-u} - e^t e^{-u}) \Rightarrow 2e^u = e^t + e^{-t} \Rightarrow e^u = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \Rightarrow e^u = \cosh t$$

Subtraindo (1) e (2) da proposição 23, obtemos

$$2s = S(e^t e^u - e^{-t} e^{-u}) \Rightarrow$$

$$s = \frac{S}{2} \left(\frac{e^t - e^{-t}}{e^u} \right) \Rightarrow$$

$$s = \frac{S}{e^u} \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right) \Rightarrow$$

$$s = \frac{S}{e^u} \sinh t \Rightarrow$$

$$s = S \left(\frac{\sinh t}{\cosh t} \right) \Rightarrow$$

$$s = S \tanh t$$

□

5.2 Sistemas de coordenadas na geometria hiperbólica

Vamos agora introduzir um sistema de coordenadas para representar os pontos do plano na geometria hiperbólica. Tomemos dois eixos perpendiculares orientados a partir do O . Chamaremos esses eixos de eixo Ox e eixo Oy .

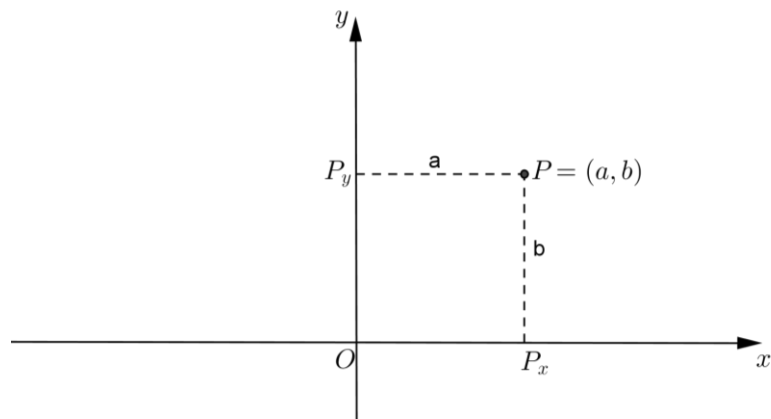


Figura 37: Introduzindo sistema de coordenadas no plano hiperbólico.

- i) P_x é a projeção do ponto P no eixo Ox , sendo a um número associado ao ponto P_x neste eixo.
- ii) b é comprimento do segmento PP_x , sendo $b > 0$ caso P esteja acima do eixo Ox , ou $b < 0$ no outro caso.

Chamaremos a de abscissa do ponto P e b de ordenada do ponto P , conforme a figura 37.

É importante observar que, diferentemente do que ocorre na geometria euclidiana, o número associado à projeção ortogonal de P no eixo Oy não coincide com a ordenada de P .

Proposição 24 *Seja Ω o ponto ideal no final da parte positiva do eixo Ox . A equação do horocírculo centrado em Ω e passando pela origem O é*

$$e^x = \cosh y$$

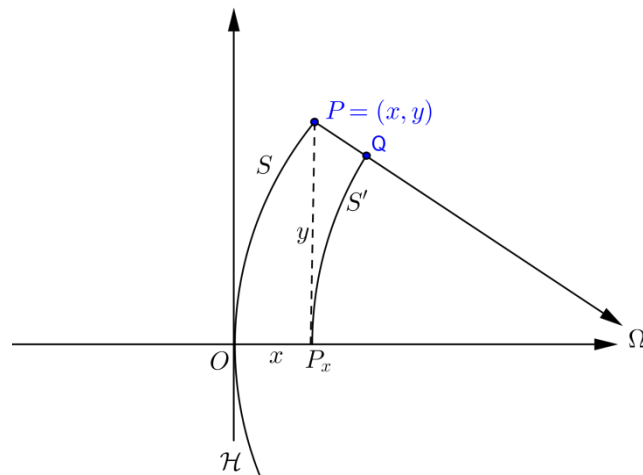


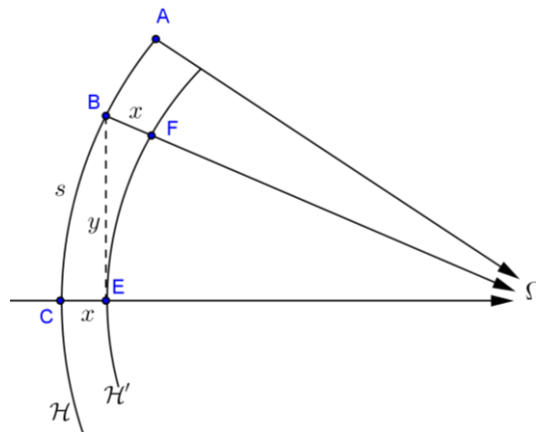
Figura 38: Encontrando a equação de um horocírculo.

Demonstração:

Pela proposição 18 $OC = PB = x$, e pelo corolário 3 $e^x = \cosh y$.

□

Considere a figura abaixo



Proposição 25 Na figura acima, temos Arco $AC = S$, Arco $BC = s$ e $BE = y$, sendo \mathcal{H} horocírculo de centro Ω e raio $C\Omega$. Então $s = S \sinh y$.

Demonstração:

Tomemos por E um horocírculo \mathcal{H}' de centro em Ω . Seja F o ponto de intersecção de $B\Omega$ com \mathcal{H}' . Seja Arco $EF = s'$. Temos que arcos BC e EF são correspondentes. Pela proposição 22

$$s' = se^{-x}$$

E pelo corolário 3, $s' = S \tanh y$. Logo,

$$se^{-x} = S \tanh y \Rightarrow s = Se^x \tanh y$$

Também pelo corolário 3, $e^x = \cosh y$. Logo,

$$s = S \cosh y \tanh y \Rightarrow s = S \sinh y.$$

□

Proposição 26 A equação da reta simultaneamente paralela aos eixos coordenados nas direções positivas é

$$e^{-x} = \tanh y$$

Demonstração:

Seja $\Omega\Omega'$ a reta que é simultaneamente paralela ao eixo Ox e Oy , ambos na direção positiva, como representado na figura 39.

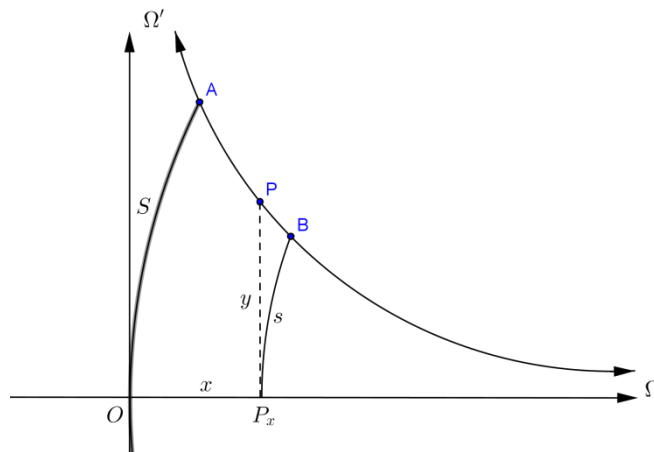


Figura 39: Reta paralela aos eixos coordenados

O horocírculo de centro Ω e passando pela origem intersecta esta reta num ponto A , como vimos a medida do arco OA será S . seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer da reta e P_x a sua projeção no eixo Ox . Considere o horocírculo centrado em Ω e passando pelo ponto P_x . Seja B o ponto de interseção com a reta. Seja $\text{Arco } BP_x = s$. Pelo que já vimos, é imediato que

$$s = S \tanh y$$

$$s = S e^{-x}$$

Logo

$$S e^{-x} = S \tanh y \Rightarrow e^{-x} = \tanh y$$

□

Dois números positivos z e z' são chamados **complementares** quando os ângulos de paralelismo a eles associados são complementares, ou seja:

$$\theta(z) + \theta(z') = \frac{\pi}{2}$$

Proposição 27 Se z e z' são complementares, então:

$$e^{-x} = \tanh\left(\frac{z'}{2}\right)$$

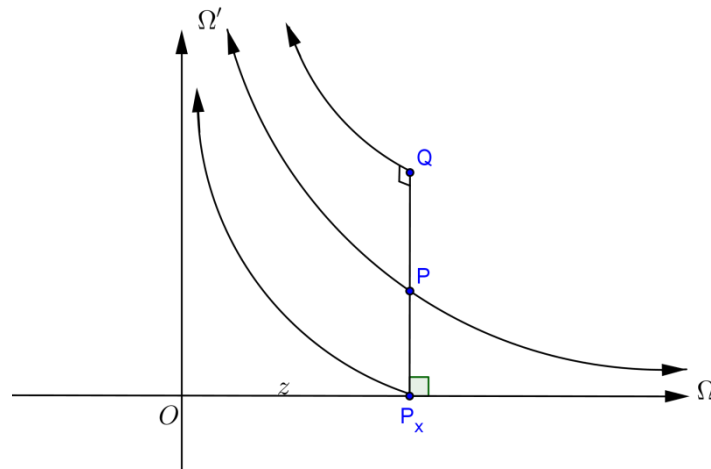


Figura 40: Equação envolvendo números complementares.

Seja z a abscissa de P_x . Por este ponto, trace a reta perpendicular ao eixo Ox . Seja Q um ponto desta perpendicular tal que $PQ = PP_x$. Temos que $P_xP\Omega \equiv QP\Omega'$ (1º caso de congruência de triângulos generalizados), logo $\hat{Q} = 90^\circ$. O ângulo $O\hat{P}_x\Omega'$ é o ângulo de paralelismo correspondente a z , e $Q\hat{P}_x\Omega'$ é o ângulo de paralelismo do segmento QP_x . Como os dois ângulos são complementares, então concluímos que o comprimento de QP_x é z' . Portanto $P = \left(z, \frac{z'}{2}\right)$. Como P esta sobre a reta $\Omega\Omega'$, concluímos $e^{-z} = \tanh\left(\frac{z'}{2}\right)$. \square

Corolário 4 Se z e z' são complementares, valem as seguintes relações:

- 1) $\sinh z = \frac{1}{\sinh z'}$
- 2) $\cosh z = \cotanh z'$
- 3) $\tanh z = \operatorname{sech} z'$

Demonstração:

- 1) Temos:

$$\begin{aligned} \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{\cotanh\left(\frac{z'}{2}\right) - \tanh\left(\frac{z'}{2}\right)}{2} = \frac{\frac{\cosh^2\left(\frac{z'}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{z'}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{z'}{2}\right)\cosh\left(\frac{z'}{2}\right)}}{2} \\ &= \frac{\cosh^2\left(\frac{z'}{2}\right) - 1 - \cosh^2\left(\frac{z'}{2}\right)}{\sinh z'} = \frac{1}{\sinh z'} \end{aligned}$$

2) Temos:

$$\begin{aligned} \cosh z &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{\operatorname{cotan} h\left(\frac{z'}{2}\right) + \tanh\left(\frac{z'}{2}\right)}{2} = \frac{\cosh^2\left(\frac{z'}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{z'}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{z'}{2}\right) \cosh\left(\frac{z'}{2}\right)} \\ &= \frac{\cosh z'}{\sinh z'} = \operatorname{cotanh} z' \end{aligned}$$

3) Temos:

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{\operatorname{cossech} z'}{\operatorname{cotanh} z'} = \frac{1}{\cosh z'} = \operatorname{sech} z'$$

5.3 Trigonometria hiperbólica em triângulos retângulos

Seja ABC um triângulo retângulo com ângulo reto em C . Designaremos por a, b e c , respectivamente, os comprimentos dos lados BC, AC e AB . Representaremos por λ e μ as medidas dos ângulos \hat{A} e \hat{B} respectivamente, conforme figura 41.

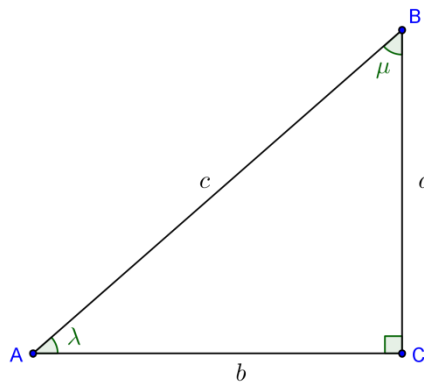


Figura 41: Triângulo retângulo.

Chamaremos tal triângulo de triângulo retângulo com partes a, b, c, λ, μ .

Proposição 28 Em um triângulo retângulo com partes a, b, c, λ, μ , tem-se:

- 1) $\sinh(c) = \sinh(a) \cosh(l)$
- 2) $\sinh(c) = \sinh(b) \cosh(m)$

Sendo l e m tais que $\theta(l) = \lambda$ e $\theta(m) = \mu$.

Demonstração:

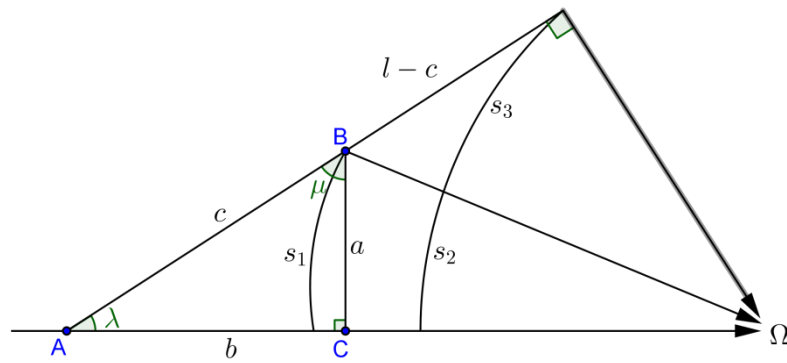


Figura 42: Relações trigonométricas hiperbólicas em triângulos retângulos ordinários

Considere a figura 42.

Temos $s_1 = S \sinh a$ (Proposição 25) e $s_3 = s_1 e^{-u}$ (Proposição 22). Logo,

$$\begin{aligned}
 \sinh a &= \frac{s_1}{S} = \frac{e^u s_3}{S} = e^u \left(\frac{s_1 + s_2}{S} - \frac{s_2}{S} \right) \\
 &= \cosh(l - c) (\tanh l - \tanh(l - c)) \\
 &= \cosh(l - c) \tanh l - \sinh(l - c) \\
 &= \frac{\cosh(l - c) \sinh l - \cosh l \sinh(l - c)}{\cosh l} \\
 &= \frac{\sinh(l - (l - c))}{\cosh l} \\
 &= \frac{\sinh c}{\cosh c}
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sinh(c) = \sinh(a) \cosh(l).$$

De modo análogo, temos

$$\sinh(c) = \sinh(b) \cosh(m).$$

□

Corolário 5 Seja ABC um triângulo retângulo com partes $a, b, c, \lambda, e \mu$. Então:

- 1) $\cosh(l) = \sinh(c) \sinh(a')$
- 2) $\cosh(m) = \sinh(c) \sinh(b')$
- 3) $\cosh(c) = \sinh(l) \sinh(m)$
- 4) $\cosh(a') = \sinh(l) \sinh(b')$
- 5) $\cosh(b') = \sinh(m) \sinh(a')$

Sendo a, a' complementares, b, b' complementares e $\theta(l) = \lambda$ e $\theta(m) = \mu$.

Como aplicação destas fórmulas, deduzimos o seguinte teorema que é a versão hiperbólica do Teorema de Pitágoras, tão conhecido da Geometria Euclidiana.

Proposição 29 (*Teorema de Pitágoras Hiperbólico*). *Em um triângulo retângulo com partes a, b, c, λ e μ , tem-se:*

$$\cosh c = \cosh a \cosh b$$

Demonstração:

Pelo corolário 5, temos

$$\cosh c = \sinh l \sinh m$$

$$\cosh a' = \sinh l \sinh b'$$

$$\cosh b' = \sinh m \sinh a'$$

Logo

$$\cosh c = \frac{\cosh a' \cosh b'}{\sinh a' \sinh b'} = \cotanh a' \cotanh b'$$

Pelo corolário 4, temos

$$\cotanh a' = \cosh a \quad e \quad \cotanh b' = \cosh b$$

Portanto

$$\cosh c = \cosh a \cosh b$$

□

5.4 Trigonometria hiperbólica em triângulos quaisquer

Seja ABC um triângulo com ângulos λ, μ e ν nos vértices A, B, C , respectivamente. Seja $BC = a, AC = b, AB = c$, e l, m e n os segmentos para os quais eles, respectivamente, são ângulos de paralelismo.

Proposição 30 (*Lei dos senos*). *Em um triângulo com lados a, b e c e ângulos opostos a estes lados λ, μ e ν tem-se*

$$\frac{\sinh a}{\operatorname{sech} l} = \frac{\sinh b}{\operatorname{sech} m} = \frac{\sinh c}{\operatorname{sech} n}$$

Demonstração:

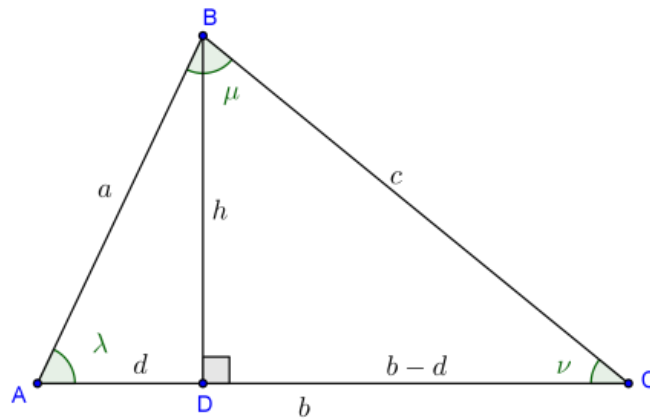


Figura 43: Triângulo Hiperbólico Ordinário.

Trace a altura BD do vértice B e represente por h o seu comprimento. Formamos assim dois triângulos retângulos BDA e BDC , ambos com ângulo reto no vértice D . Aplicando o item 2 da proposição 28 a estes dois triângulos, obtemos

$$\frac{\sinh a}{\sinh c} = \frac{\cosh n}{\cosh l} = \frac{\operatorname{sech} l}{\operatorname{sech} n} \Rightarrow \frac{\sinh a}{\operatorname{sech} l} = \frac{\sinh c}{\operatorname{sech} n}$$

De modo análogo

$$\frac{\sinh b}{\operatorname{sech} m} = \frac{\sinh c}{\operatorname{sech} n}$$

□

Proposição 31 (*Lei dos cossenos*). Em um triângulo com lados a, b e c e ângulos opostos a esses lados λ, μ e ν tem-se

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \tanh l$$

Demonstração:

No triângulo ABC da figura 43, trace a altura BD . Suponhamos, inicialmente que o ponto D pertença ao segmento AC . Seja d o comprimento do lado AD e, conseqüentemente, $b - d$ o comprimento do lado CD . Pelo Teorema de Pitágoras hiperbólico aplicado aos triângulos BCD e BDA , tem-se:

$$\cosh a = \cosh h \cosh(b - d), e$$

$$\cosh c = \cosh h \cosh d$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \cosh a &= \frac{\cosh c \cosh(b - d)}{\cosh d} = \frac{\cosh c (\cosh b \cosh d - \sinh b \sinh d)}{\cosh d} \\ &= \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \tanh d \end{aligned}$$

Mas,

$$\tanh d = \tanh c \tanh l$$

De fato, com auxílio da proposição 28, corolários 4 e 5 e o Teorema de Pitágoras Hiperbólico, temos

$$\tanh l = \frac{\sinh l}{\cosh l} = \frac{\frac{\cosh h'}{\sinh d}}{\frac{\sinh c}{\sinh h}} = \frac{\frac{\cosh h}{\sinh h} \sinh d}{\frac{\sinh c}{\sinh h}} = \frac{\frac{\cosh c}{\cosh d} \sinh d}{\sinh c} = \frac{\tanh c}{\tanh d} \Rightarrow$$

$$\tanh d = \tanh c \tanh l$$

Logo

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \cosh c \frac{\sinh c}{\cosh c} \tanh l$$

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \tanh l$$

□

6 CONSISTÊNCIA DA GEOMETRIA HIPERBÓLICA

6.1 Um modelo para a geometria hiperbólica

Vamos considerar no plano euclidiano um círculo ξ de centro O e raio r . A região Δ limitada por este círculo será o modelo do nosso plano hiperbólico. Os pontos que pertencem ao plano hiperbólico Δ estão a uma distância menor que r do centro O .

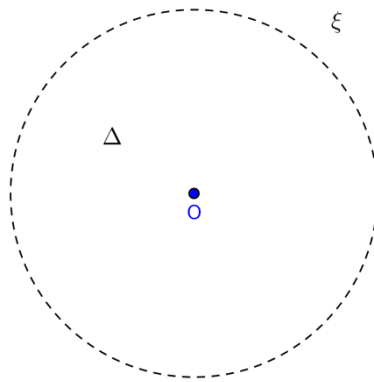


Figura 44: O plano hiperbólico Δ .

Usando a geometria Euclidiana podemos provar que:

- Dados dois pontos A e B não colineares com O , em Δ , existe um único círculo euclidiano c que passa pelos pontos A e B , e ortogonal ao círculo ξ .
- Se os pontos O , P e Q são colineares, então existe uma única reta euclidiana s passando por eles e ortogonal ao círculo ξ . Além disso, a intersecção em Δ de círculos e/ou retas distintas ocorre em um único ponto de Δ .

Os pontos de Δ são os **pontos hiperbólicos**. Existem dois tipos de **retas hiperbólicas**, pode ser um diâmetro de ξ ou um arco de circunferência ortogonal a ξ .

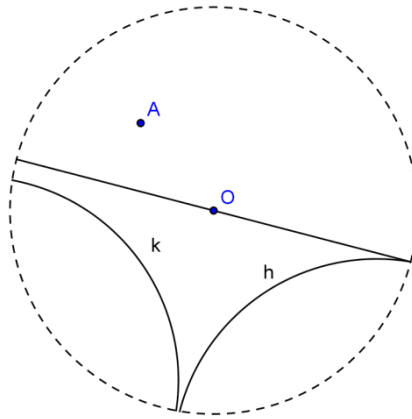


Figura 45: Pontos e retas no plano hiperbólico Δ .

Definimos o **ângulo hiperbólico** entre duas retas hiperbólicas como o ângulo (euclidiano) entre suas tangentes no ponto de intersecção, conforme figura. Dessa forma, a medição de ângulos é feita exatamente como na Geometria Euclidiana e, portanto, obedece aos axiomas relativos a tais medições.

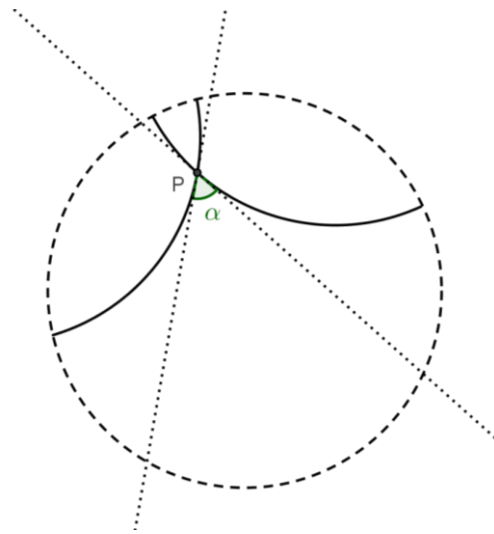


Figura 46: Ângulo hiperbólico no modelo Δ .

Vamos agora introduzir, na Geometria Hiperbólica, a noção de comprimento de um **segmento hiperbólico**. Dado o segmento hiperbólico AB , sejam S e T os pontos do círculo ξ que são “extremidades” da reta hiperbólica que contém AB . Definimos o comprimento do segmento AB como

$$d(A, B) = \ln \left(\frac{AT \cdot BS}{AS \cdot BT} \right)$$

onde AT , AS , BT e BS representam os comprimentos dos segmentos de retas euclidianos.

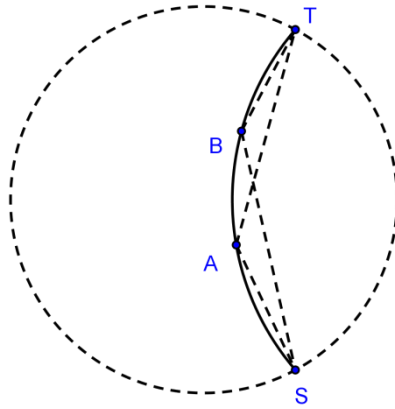


Figura 47: Comprimento de um segmento hiperbólico.

Proposição 32 *Sejam A , e B pontos de Δ . O comprimento do segmento AB dado por $d(A, B)$, satisfaz as seguintes propriedades:*

- i) $d(A, B) = d(B, A)$.
- ii) $d(A, B) \geq 0$, e $d(A, B) = 0$ se e só se $A = B$.

Demonstração:

- i) $d(A, B) = \ln \left(\frac{AT \cdot BS}{AS \cdot BT} \right) = \ln \left(\frac{BS \cdot AT}{BT \cdot AS} \right) = d(B, A)$
- ii) É imediato que $AT \geq BT$, $AS \leq BS$, portanto

$$\frac{AT \cdot BS}{AS \cdot BT} \geq 1$$

Consequentemente, $d(A, B) \geq 0$. Além disso, é claro das desigualdades que a igualdade só ocorre quando $A = B$.

□

7 CONSINDERAÇÕES FINAIS

A descoberta de uma nova geometria foi um marco para a matemática, a partir daí houve uma libertação da geometria de seus moldes tradicionais. Despedaçou-se uma convicção secular e profundamente arraigada de que apenas uma geometria era possível e abriu-se caminho para a criação de muitos outros sistemas geométricos. A criação da Geometria Hiperbólica não só libertou a geometria como também teve um efeito semelhante com a matemática como um todo. A matemática despontou como uma criação arbitrária do espírito humano e não como algo necessariamente ditado a nós pelo mundo em que vivemos.

Estamos acostumados a utilizar a Geometria Euclidiana, no meio em que vivemos certamente é considerada a mais adequada. Porém, as diferenças entre essas geometrias são poucas, de fato a Geometria de Euclides é a mais conveniente, pela sua simplicidade, para a utilização em vários setores, engenharia, agrimensura, arquitetura etc. No entanto, a Geometria hiperbólica serviria para o mesmo propósito. Nossas casas, túneis, se manteriam se fossem construídos com base nesta geometria.

A Geometria Hiperbólica é pouco conhecida no ensino superior, e quase nada no ensino básico. Devido a Geometria Euclidiana mostrar-se mais fácil ao entendimento, essa nova geometria tem pouco destaque nesses âmbitos de ensino. Esperamos que este trabalho venha contribuir para que o conhecimento da Geometria Hiperbólica se propague não só nas universidades, como também no ensino básico. Uma nova geometria apresentada de forma consistente proporcionaria muito mais o valor da matemática no nosso cotidiano.

REFERÊNCIAS

ARCARI, Inedio. **Um texto de Geometria Hiperbólica**. Campinas – SP, 2008.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Hiperbólica**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008.

BONOLA, R. **Non-Euclidean Geometry: a critical and historical study of its development**. New York. Dover Publications, Inc. 1955.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São paulo - SP:Edgard Blücher, 1996.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Higyno H. Domingues.Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2007

EVES, Howard. **Tópicos de História da matemática para uso em sala de aula. Geometria;** tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo, SP : ATUAL, 1992.