UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

HALYSON IRENE BALTAZAR

MÉTRICAS CRÍTICAS DO FUNCIONAL VOLUME E NÃO-EXISTÊNCIA DE MÚLTIPLOS BURACOS NEGROS EM ESPAÇO-TEMPO ESTÁTICO

FORTALEZA

2017

HALYSON IRENE BALTAZAR

MÉTRICAS CRÍTICAS DO FUNCIONAL VOLUME E NÃO-EXISTÊNCIA DE MÚLTIPLOS BURACOS NEGROS EM ESPAÇO-TEMPO ESTÁTICO

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B158m Baltazar, Halyson Irene.
Métricas críticas do funcional volume e não-existência de múltiplos buracos negros em espaço-tempo estático / Halyson Irene Baltazar. – 2017.
66 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática , Fortaleza, 2017.
Orientação: Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior.

1. Funcional Volume. 2. Métricas Críticas. 3. Ricci Paralelo. 4. Espaço-Tempo Estático. 5. Buraco Negro. I. Título.

CDD 510

HALYSON IRENE BALTAZAR

MÉTRICAS CRÍTICAS DO FUNCIONAL VOLUME E NÃO-EXISTÊNCIA DE MÚLTIPLOS BURACOS NEGROS EM ESPAÇO-TEMPO ESTÁTICO.

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovoda em: 05 / 07 / 2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes
Universidade Federal do Amazonas (UFAM)

Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

A minha amada mãe, por todas suas orações.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus. Ele que sempre esteve presente na minha vida, me guiou, me orientou e fortaleceu minha alma sempre que pensei em fraquejar.

A minha querida e amada família, minha mãe Lúcia Maria, por todo zelo, preocupação e por todo cuidado que sempre teve comigo, meu pai Vitor, pelos momentos de descontração e todas as conversas de apoio e acima de tudo, por sempre me passar o otimismo necessário para seguir em frente, a minha irmã Pollyana e ao meu cunhado Cauê, pelas suas orações e por sempre acreditarem no meu potencial. Também não poderia deixar de agradecer o anjinho Isabela, querida sobrinha que veio para alegrar nossas vidas.

A minha amada esposa Danielle, pela sua paciência e compreensão nos momentos que estive mais ausente concluindo meus estudos em Fortaleza, por ter aguentado meus estresses, pois muitas foram as vezes que deixamos de sair por conta dos meus estudos. Esses quatro anos foram delicados, difíceis de acreditar que suportamos tudo isso juntos, momentos difíceis, mais que servem de lições para nossas vidas, serei eternamente grato por toda a fé que depositou em mim. Muito obrigado por me fazer acreditar que nada disso é por acaso!

Agradeço ao professor Ernani Ribeiro Jr., pela orientação, o incentivo, ajuda e colaboração para este trabalho. Tenho certeza que toda sua exigência reflete diretamente na qualidade dos resultados obtidos. Mais do que um orientador, Ernani é um grande amigo, iniciamos o mestrado juntos, eu, ele e Manoel Vieira e com toda certeza é um prazer retornar a UFC para fazer o doutorado e ter oportunidade de concluir esse curso sob sua orientação.

Agradeço ao professor Cícero Aquino o qual desempenhou um papel fundamental nos dois primeiros anos de doutorado, isso porque sua parceria culminou no primeiro trabalho científico, além disso, muitos foram os cafezinhos que tomamos conversando sobre problemas em matemática, devo destacar também, meus agradecimentos ao professor Henrique de Lima da UFCG, Benedito Leandro UFG e Rondinelle Batista da UFPI, pela parceria em pesquisas.

Gostaria de agradecer aos professores(as) da Pós-Graduação em matemática da UFC, Abdênago Barros, Antonio Caminha, Diego Moreira, Fernanda Camargo, Daniel Cibotaru, Fábio Montenegro, Lev Birbrair, Jorge Herbert, Luciano Mari que contribuiram diretamente na minha formação acadêmica.

Aos professores do departamento de matemática da Universidade Federal do Piauí, agradeço todo apoio e incentivo dado durante essa caminhada, em especial, agradeço aos professores Manoel Vieira, Kelton Bezerra, Antônio Wilson, Rondinelle Batista, pela amizade e os momentos de descontração tomando um bom cafezinho.

Aos meus amigos da Pós-graduação em Matemática da UFC (alguns inclusive já terminaram sua pós-graduação), que acabam tornando-se uma família pelo tempo que passamos juntos, Manoel Vieira, Alex Santos, Antonio Grangeiro, Amilca Peru, Tiago Cruz, Fagner, Assis Benjamim, Jocel, Cleiton Cunha, Davi Lustosa, Diego Sousa, Diego Eloi, Adam Oliveira, Edvalter Sena, Elzimar, Emanuel Viana (iieuull), Eraldo Lima, Fabrício Oliveira, Franciane Vieira, Marcos Ranieri, Damião Junio, Renivaldo Senna, Tiarlos Cruz, Valdir, Wanderley Pereira dentre muitos outros.

Agradecimentos também a Andrea Dantas e Jessyca Soares pela competência e agilidade.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

"No meio da dificuldade encontra-se a oportunidade."(Albert Einstein)

RESUMO

Esse trabalho está dividido em duas partes. A primeira delas está relacionada ao estudo de fórmulas tipo-Böchner para métricas críticas do funcional volume em variedades compactas com métrica fixada no bordo (estas são conhecidas como métricas críticas de Miao-Tam). Como aplicação, estabeleceremos uma fórmula integral que permitirá generalizar o resultado obtido por Miao e Tam em 2011 para o caso Einstein, mais precisamente, provaremos que métricas críticas de Miao-Tam com curvatura de Ricci paralelo são isométricas às bolas geodésicas em um espaço forma simplesmente conexo $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{H}^n$. Se nos restringirmos às variedades com dimensão 3, veremos que tais estruturas se mostram ainda mais rígidas, a saber, provaremos que métricas críticas com curvatura seccional não-negativa são precisamente as bolas geodésicas de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{S}^3$. Além disso, generalizamos o resultado obtido por Kim e Shin (2016) substituindo condição de harmonicidade do tensor de Weyl pela hipótese que o tensor de Weyl tem divergente de segunda ordem nulo (i.e., $\mathrm{div}^2 W = 0$). Mais precisamente, mostraremos que métricas críticas de Miao-Tam em dimensão 4, com bordo isométrico a esfera $\mathbb{S}^3$ e satisfazendo $\mathrm{div}^2 W = 0$, são isométricas às bolas geodésicas em um espaço forma simplesmente conexo $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{S}^4$ ou $\mathbb{H}^4$. Concomitantemente, obtemos resultados de rigidez para triplas estáticas positivas. Na segunda parte do trabalho, estudaremos o espaço-tempo estático no vácuo, o qual pode ser visto como um caso especial das métricas V-estáticas para variedades completas com curvatura escalar nula. Neste caso, restringiremos nosso estudo a quarta dimensão e provaremos que não existem múltiplos buracos negros em um espaço-tempo estático no vácuo com a parte autodual do tensor de Weyl harmônico (i.e., $\mathrm{div} W^+ = 0$).

Palavras-chave: Funcional volume. Métricas críticas. Ricci paralelo. Espaço-tempo estático. Buraco negro.

ABSTRACT

This work is divided in two parts. In the first one we prove a Böchner type formula for critical metrics of the volume functional on compact manifolds with fixed metric on boundary (such critical metrics are called Miao-Tam critical metrics). As an application, we derive an integral formula that will be crucial to deduce a generalization of a result obtained by Miao and Tam in 2011 for the Einstein case. More precisely, we prove that a Miao-Tam critical metric with parallel Ricci curvature must be isometric to a geodesic ball in a simply connected space form $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ or $\mathbb{H}^n$. Furthermore, in dimension 3, we prove that critical metrics with non-negative sectional curvature are precisely geodesic balls of $\mathbb{R}^3$ or $\mathbb{S}^3$. Moreover, we generalize a result due to Kim and Shin (2016), replacing the harmonic Weyl tensor condition by the second order divergence free Weyl tensor condition (i.e., $\mathrm{div}^2 W = 0$), which is weaker that the former. To be precise, we shall show that a 4-dimensional Miao-Tam critical metric, with boundary isometric to a standard sphere $\mathbb{S}^3$ and satisfying $\mathrm{div}^2 W = 0$ is isometric to a geodesic ball in a simply connected space form $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{S}^4$ or $\mathbb{H}^4$. At the same time, we get some rigidity results for positive static triples. In the second part, we study static vacuum space-times, which can be seen as a special case of the V-static metrics for complete Riemannian manifolds with null scalar curvature. In this case, we focus our attention on four dimensions. We prove that there are no multiple black holes on static vacuum space-times with half harmonic Weyl tensor (i.e., $\mathrm{div} W^+ = 0$).

Keywords: Volume functional. Critical metrics. Parallel Ricci tensor. Static space-times. Black holes.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esse trabalho é dividido em duas partes. No que segue, forneceremos um breve desenvolvimento histórico dos problemas estudados, bem como os resultados obtidos nos últimos anos. Além disso, descreveremos nossa contribuição nos problemas aqui apresentados.

No primeiro momento do trabalho, abordaremos um problema em geometria que vem ganhando destaque nos últimos anos. Em poucas palavras, este se refere ao estudo de *métricas V-estáticas*. No que segue $(M^n,\, g)$ representa uma variedade Riemanniana conexa. Seguindo a terminologia usada por Miao e Tam (2009) bem como Corvino, Eichmair e Miao (2013), dizemos que g é uma *métrica V-estática* se existe uma função suave f e uma constante κ satisfazendo ao sistema de equações

$$L_g^*(f) = -(\Delta f)g + Hess\, f - fRic = \kappa g, \tag{1}$$

onde L_g^* é o L^2-adjunto formal da linearização do operador curvatura escalar L_g, o qual se destaca em problemas relacionados à função curvatura escalar prescrita. Aqui, Ric, Δ e $Hess$ representam, respectivamente, o tensor de Ricci, o operador laplaciano e a Hessiana sobre M^n. Uma tal função f é chamada *potencial V-estático*.

Métricas V-estáticas são importantes para entender a relação entre volume e curvatura escalar. Deste modo, fica estabelecido o problema de encontrar pontos estacionários para o funcional volume sobre o espaço das métricas cuja curvatura escalar é igual a uma constante dada; confira, por exemplo, os trabalhos de Miao e Tam (2009) e (2011), assim como, Corvino, Eichmair e Miao (2013), e Yuan (2016). Em geral, a curvatura escalar não é suficiente para controlar o volume. Entretanto, Miao e Tam (2012) provaram um resultado de rigidez para o hemisfério superior com respeito à curvatura escalar e volume não-decrescente. Por outro lado, Corvino et al. (2013) foram capazes de mostrar que, quando a métrica g não admite solução não-trivial para a Eq. (1), podemos encontrar simultaneamente uma pertubação prescrita da curvatura escalar, compactamente suportada em um domínio limitado Ω, e uma pertubação prescrita do volume por uma pequena deformação da métrica em $\overline{\Omega}$. Destacamos que uma métrica Riemanniana g para a qual existe uma função não-trivial f satisfazendo (1) tem curvatura escalar constante R (cf. Proposição 2.1 em (2013) e Teorema 7 em (2009)).

O caso em que $\kappa \neq 0$ em (1) e a função potencial f anula-se sobre o bordo foi estudado por Miao e Tam (2009). Nesta abordagem, uma *métrica crítica de Miao-Tam* é a tripla $(M^n,\, g,\, f)$, onde $(M^n,\, g)$ é uma variedade Riemanniana compacta com bordo suave ∂M e dimensão maior ou igual a três, e $f : M^n \to \mathbb{R}$ é uma função suave tal que

$f^{-1}(0) = \partial M$ e f satisfaz a equação

$$L_g^*(f) = -(\Delta f)g + Hess\, f - fRic = g. \tag{2}$$

Miao e Tam (2009) mostraram que essas métricas surgem como pontos críticos do funcional volume sobre M^n, quando restrito à classe de métricas g com curvatura escalar constante e métrica Riemanniana γ perscrita sobre o bordo, $g_{|T\partial M} = \gamma$. Alguns exemplos explícitos de métricas críticas de Miao-Tam estão na forma de produtos *warped*; esses exemplos incluem a métrica espacial de Schwarzschild e métricas adS-Schwarzschild (cf. Corolários 3.1 e 3.2 em Miao e Tam (2011)).

No artigo de Miao e Tam (2011), os autores questionam se existem métricas críticas de Miao-Tam com curvatura seccional não constante sobre variedades compactas cujo bordo é isométrico à esfera padrão. Nesse sentido, inspirados nas ideias desenvolvidas por Kobayashi (1982) e Kobayashi e Obata (1962), eles provaram que uma métrica crítica de Miao-Tam sobre uma variedade compacta M^n, simplesmente conexa, localmente conformemente plana e com bordo isométrico à esfera padrão $\mathbb{S}^{n-1}$ torna a variedade isométrica a uma bola geodésica em uma forma espacial simplesmente conexa $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$.

Em 2015, Barros, Diógenes e Ribeiro Jr., baseados em técnicas desenvolvidas em um trabalho de Cao e Chen de 2013, provaram que se uma métrica crítica de Miao-Tam sobre uma variedade compacta M de dimensão 4, simplesmente conexa, com bordo isométrico à esfera padrão $\mathbb{S}^3$ satisfaz à condição Bach-flat, então M^4 deve ser isométrica à bola geodésica em uma forma espacial simplesmente conexa $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{H}^4$ ou $\mathbb{S}^4$. Além disso, eles mostraram que, em dimensão 3, o resultado ainda é verdadeiro se trocarmos a condição Bach-flat pela afirmação mais fraca de que M^3 tem tensor de Bach com divergência nula.

Paralelamente, Miao e Tam (2011) estudaram tais métricas críticas sob a condição Einstein. Neste caso, eles conseguiram remover a condição do bordo ser isométrico à esfera canônica. Mais precisamente, eles provaram o seguinte resultado.

Teorema 1.1 (Miao e Tam, 2011) *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam sobre uma variedade Einstein, compacta e com bordo suave ∂M. Então, (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica em uma forma espacial simplemente conexa $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$.*

É importante lembrar que toda variedade Riemanniana com tensor de Ricci paralelo tem tensor curvatura harmônico. Mas a recíproca não é verdadeira em geral, veja por exemplo Derdzinski (1980) e (1982) para mais detalhes. De fato, existem exemplos de variedades Riemannianas compactas e não-compactas com tensor curvatura harmônico mas que não possuem tensor de Ricci paralelo. Destacamos agora que, como o tensor métrico é paralelo, imediatamente obtemos que variedades Einstein possuem tensor de Ricci paralelo, entretanto a recíproca deste fato é falsa, como podemos constatar com o

Exemplo 2.1 (veja Capítulo 2 Seção 2.3 para mais detalhes). Motivados por esse desenvolvimento histórico sobre o estudo de métricas críticas do funcional volume, mostraremos no Capítulo 3 que a afirmação sobre a variedade ser Einstein no resultado de Miao-Tam (cf. Teorema 1.1) pode ser enfraquecida para condição do tensor de Ricci ser paralelo. Para provarmos este fato, estabeleceremos uma fórmula integral para métricas críticas de Miao-Tam; mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.2 *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam com (M^n, g) compacta, orientada, conexa e bordo ∂M suave. Então, temos:*

$$\int_M f|divRm|^2 dM_g + \frac{n}{n-1}\int_M |Ric - \frac{R}{n}g|^2 dM_g + \int_M f(\Delta|Ric|^2 - |\nabla Ric|^2) dM_g = 0.$$

Como consequência do teorema acima, juntamente com a desigualdade clássica de Kato, provaremos o seguinte resultado de rigidez.

Corolário 1.1 *Seja $(M^n,\ g,\ f)$ uma métrica crítica de Miao-Tam sobre uma variedade compacta, orientada, conexa, com tensor de Ricci paralelo e bordo suave ∂M. Então $(M^n,\ g)$ é isométrica a uma bola geodésica em uma forma espacial simplesmente conexa $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$, ou $\mathbb{S}^n$.*

Conforme vimos anteriormente, variedades Einstein M^n, $n \geq 3$, têm tensor de Ricci paralelo. Portanto, o corolário acima claramente melhora o Teorema 1.1. Além disso, vale destacar que nossos argumentos para a prova do Teorema 1.2 diferem significativamente dequeles de Miao e Tam (2011).

Prosseguindo, observamos que a equação (1) pode ser vista como uma generalização da *equação estática* $L_g^*(f) = 0$ (cf. os trabalhos de Ambrozio (2015) e Corvino (2000)), a saber, $\kappa = 0$ em Eq. (1). Relembramos que uma *tripla estática positiva* é uma tripla $(M^n,\ g,\ f)$, consistindo de uma variedade suave M de dimensão n, conexa e com fronteira ∂M (possivelmente vazia), uma métrica Riemanniana completa g sobre M e uma função potencial não-trivial $f \in C^\infty(M)$ que é não-negativa, anulando-se precisamente na fronteira ∂M e satisfazendo a equação estática

$$L_g^*(f) = -(\Delta f)g + Hess\, f - fRic = 0. \tag{3}$$

Agora, é importante relembrar um clássico exemplo de tripla estática positiva com fronteira não-vazia.

Exemplo 1.1 *Um exemplo de tripla estática positiva com fronteira conexa é obtido escolhendo $(\mathbb{S}^n_+(r),\ g)$, onde $\mathbb{S}^n_+(r)$ é o hemisfério superior aberto de raio r em $\mathbb{R}^{n+1}$, dotado com a métrica Euclidiana g. Assim, $\partial M = \mathbb{S}^{n-1}(r)$ é o equador, a função altura f sobre*

$\mathbb{S}^n_+(r)$ é positiva, anula-se precisamente sobre $\partial M = \mathbb{S}^{n-1}(r)$, e satisfaz à Eq. (3).

Foi conjecturado que o único espaço-tempo estático no vácuo, com constante cosmológica positiva e horizonte de eventos conexo é o espaço de *de Sitter* de raio r. Esta conjectura é conhecida como *cosmic no-hair conjecture* (abaixo) e foi formulada por Boucher, Gibbons e Horowitz em 1984. Devemos enfatizar que existem triplas estáticas positivas com bordo duplo, como por exemplo, o *espaço de Nariai*. Assim, a conexidade da fronteira é essencial para a Conjectura 1.1 ser verdadeira. Em outras palavras, os autores citados propuseram a seguinte conjectura.

Conjectura 1.1 (Cosmic no-hair conjecture, 1984) *O Exemplo 1.1 é a única tripla estática positiva com horizonte simples (i.e., bordo conexo) e curvatura escalar positiva.*

Nas últimas décadas, foram obtidas algumas respostas parciais para a Conjectura 1.1. A saber, se $(M^n,\, g)$ é uma variedade Einstein, então basta aplicar o teorema tipo Obata obtido por Reilly em 1977 (veja também o artigo de Obata (1962)) para concluir que a Conjectura 1.1 é verdadeira. Além disso, Kobayashi (1982) e Lafontaine (1983) provaram de forma independente que tal conjectura é válida sob a condição da variedade ser conformemente plana.

Mais recentemente, Ambrozio (2015) obteve alguns resultados de classificação para variedades estáticas de dimensão 3 com curvatura escalar positiva. Para isto, ele provou uma fórmula tipo Bochner para triplas estáticas positivas de dimensão 3 envolvendo o tensor sem traço do operador de Ricci e o tensor de Cotton. É importante destacar que, de modo similar, Batista et al. (2017) obtiveram uma fórmula tipo Bochner para variedades Riemannianas de dimensão 3 satisfazendo (2). Destacamos que essas fórmulas podem ser usadas para excluir alguns possíveis novos exemplos. Neste trabalho de tese, estenderemos tais fórmulas tipo Bochner para uma classe mais geral de métricas em dimensões arbitrárias $n > 2$. Mais precisamente, provaremos o seguinte resultado.

Teorema 1.3 *Seja $(M^n,\, g,\, f, \kappa)$ uma variedade Riemanniana suave conexa, e f uma função suave sobre M^n satisfazendo a equação V-estática (1). Então:*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathrm{div}(f\nabla|Ric|^2) &= \Big(\frac{n-2}{n-1}|C_{ijk}|^2 + |\nabla Ric|^2\Big)f + \frac{n\kappa}{n-1}|\mathring{Ric}|^2 \\ &+\Big(\frac{2}{n-1}R|\mathring{Ric}|^2 + \frac{2n}{n-2}tr(\mathring{Ric}^3)\Big)f \\ &-\frac{n-2}{n-1}W_{ijkl}\nabla_l f C_{ijk} - 2fW_{ijkl}R_{ik}R_{jl}, \qquad (4)\end{aligned}$$

onde C representa o tensor de Cotton, W o tensor de Weyl e $\mathring{Ric}$ o tensor de Ricci sem traço.

Relembre que, em uma variedade Riemanniana de dimensão 3, o tensor de

Weyl é nulo. Portanto, é imediato verificar que o Teorema 1.3 é uma generalização, para qualquer dimensão, do Teorema 3 do trabalho de Batista et al. (2017), assim como da Proposição 12 do trabalho de Ambrozio (2015).

Antes de apresentar algumas aplicações da fórmula obtida acima, devemos lembrar que uma variedade Riemanniana $(M^n,\, g)$ tem *curvatura de Weyl radial nula* com respeito a uma função potencial f sobre M se

$$W(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,,\nabla f) = 0. \tag{5}$$

Essa classe de variedades inclui o caso das variedades localmente conformemente planas. Além disso, tal condição tem sido usada para classificar sólitons de Ricci gradientes, bem como variedades quasi-Einstein (cf. Petersen e Wylie (2010), Catino (2012), He, Petersen e Wylie (2012)). Aqui, usaremos essa hipótese para obter o seguinte corolário.

Corolário 1.2 *Seja $(M^n,\, g,\, f)$ uma métrica crítica de Miao Tam sobre uma variedade compacta, conexa e orientada, com curvatura escalar positiva e função potencial não-negativa f. Suponha que:*

- *M^n tem curvatura de Weyl radial nula, e*
- *$|\mathring{Ric}|^2 \le \frac{R^2}{n(n-1)}$.*

Então M^n é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{S}^n$.

Não é difícil notar que o resultado acima generaliza o Corolário 1 em Batista et al. (2017). Prosseguindo, obtemos a seguinte consequência para o caso estático.

Corolário 1.3 *Seja $(M^n,\, g,\, f)$ uma tripla estática positiva sobre uma variedade compacta, conexa e orientada, com curvatura escalar positiva. Suponha que:*

- *M^n tem curvatura de Weyl radial nula e*
- *$|\mathring{Ric}|^2 \le \frac{R^2}{n(n-1)}$.*

Então, uma das seguintes afirmações é verdadeira:

1. *M^n é equivalente a um hemisfério padrão de $\mathbb{S}^n$; ou*
2. *$|\mathring{Ric}|^2 = \frac{R^2}{n(n-1)}$ e $(M^n,\, g,\, f)$ é recoberta por uma tripla estática que é equivalente ao cilindro padrão.*

Observação 1.1 *Vale a pena observar que o Corolário 1.3 pode ser visto como uma resposta parcial para a Conjectura 1.1.*

Prosseguindo, relembremos um clássico lema obtido por Berger, a qual garante que qualquer 2-tensor simétrico T sobre uma variedade Riemanniana $(M^n,\, g)$ com curvatura seccional não-negativa deve satisfazer

$$(\nabla_i \nabla_j T_{ik} - \nabla_j \nabla_i T_{ik}) T_{jk} \ge 0. \tag{6}$$

De fato, temos

$$(\nabla_i \nabla_j T_{ik} - \nabla_j \nabla_i T_{ik}) T_{jk} = \sum_{i<j} R_{ijij} (\lambda_i - \lambda_j)^2,$$

onde os λ_i são os autovalores do tensor T (cf. Lema 4.1 no trabalho de Cao (2007)). Aqui, usaremos esta informação, juntamente com o Teorema 1.3, para deduzir um resultado de rigidez para métricas críticas de Miao-Tam em dimensão 3 com curvatura seccional não-negativa (veja também a Proposição 3.1 na Seção 3.2, para dimensão arbitrária). Mais precisamente, estabeleceremos o seguinte resultado.

Teorema 1.4 *Seja $(M^3,\, g,\, f)$ uma métrica crítica de Miao-Tam sobre uma variedade de dimensão três, compacta, conexa, orientada, com bordo suave ∂M e curvatura seccional não-negativa. Além disso, assuma que f é não-negativa. Então, M^3 é isométrica a uma bola geodésica em uma forma espacial simplemente conexa $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{S}^3$.*

Analogamente, obtemos o seguinte resultado para o caso estático.

Teorema 1.5 *Seja $(M^3,\, g,\, f)$ uma tripla estática positiva de dimensão três, com curvatura seccional não-negativa e curvatura escalar normalizada $R = 6$. Então, M^3 é isométrica a um hemisfério padrão $\mathbb{S}^3_+$ ou a um cilindro padrão sobre $\mathbb{S}^2$, munido com a métrica produto.*

Antes de apresentar o próximo resultado, lembremos que Kim e Shin (2016) provaram que se uma métrica crítica de Miao-Tam sobre uma variedade compacta M^4 de dimensão 4, simplesmente conexa e com bordo isométrico à esfera padrão $\mathbb{S}^3$ satisfaz a condição de Weyl harmônico (i.e., $\mathrm{div} W = 0$), então M^4 deve ser isométrica à bola geodésica em uma forma espacial simplesmente conexa $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{H}^4$ ou $\mathbb{S}^4$. Destacamos que tal harmonicidade é definida, para qualquer $(0,4)$-tensor F, por

$$\mathrm{div} F(X_1, X_2, X_3) = tr_g\{(Y, Z) \mapsto \nabla_Y F(Z, X_1, X_2, X_3)\},$$

onde g é a métrica de M^4. Ao mesmo tempo, Catino, Mastrolia e Monticelli em (2016) obtiveram uma importante classificação para sólitons de Ricci gradientes com condições de nulidade de quarta ordem sobre o tensor de Weyl. Mais precisamente, eles provaram que qualquer sóliton de Ricci gradiente *shrinking* de dimensão n, com tensor de Weyl tendo divergência de quarta ordem nula, i.e.,

$$\mathrm{div}^4 W = \nabla_k \nabla_j \nabla_i \nabla_l W_{ijkl} = 0,$$

é Einstein ou um quociente finito de $N^{n-k} \times \mathbb{R}^k$, $(k > 0)$, o produto de uma variedade Einstein N^{n-k} com o sóliton *shrinking* gaussiano $\mathbb{R}^k$. Assim, inspirados nesses trabalhos, classificaremos as métricas críticas de Miao-Tam sob a condição de que o tensor de Weyl tem divergência de segunda ordem nula, i.e.,

$$\mathrm{div}W^2 = \nabla_i \nabla_l W_{ijkl} = 0.$$

Tal condição claramente generaliza o caso localmente conformemente plano em Miao e Tam (2011), assim como o caso Weyl harmônico apresentado por Kim e Shin (2016). Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.6 *Seja $(M^4,\, g,\, f)$ uma métrica crítica de Miao-Tam sobre uma variedade de dimensão quatro, compacta, simplesmente conexa, com tensor de Weyl tendo divergência de segunda ordem nula, e bordo isométrico à esfera $\mathbb{S}^3$. Então, (M^4, g) é isométrica à bola geodésica em uma forma espacial simplemente conexa $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{H}^4$ ou $\mathbb{S}^4$.*

Na segunda parte deste trabalho de tese, abordaremos um problema fundamental em geometria, que é o estudo de espaços-tempo estáticos no vácuo, isto é, uma métrica V-estática com $\kappa = 0$ na Equação (1), onde M^n representa uma variedade completa com bordo não-vazio e curvatura escalar nula ($R \equiv 0$).

Uma questão fundamental neste assunto, está relacionada com a unicidade de buracos negros, assim como com a não-existência de múltiplos buracos negros em espaços estáticos. Neste contexto, em um célebre artigo, Israel (1967) deu a primeira resposta para a unicidade de buracos negros. Mais precisamente, ele provou que um buraco negro estático e topologicamente esférico é descrito pela métrica de Schwarzschild ou pela métrica de Reissner-Nördström. Algum tempo depois, inspirados nos trabalhos de Gibbons (1974), Israel (1967) e Muiller e Seifert (1973), Bunting e Masood-ul-Alam (1987) estudaram tal problema em um espaço-tempo assintoticamente plano. Em geral, muitos autores investigaram este problema e forneceram importantes contribuições para o desenvolvimento desta teoria; recomendamos ao leitor os trabalhos de Heusler (1966), Holland (2012), Hawking e Ellis (1973) e Qing e Yuan (2013) para uma visão geral dos progressos alcançados neste assunto.

Definição 1.1 *Uma variedade Riemanniana (M^n, g), $n \geq 3$, é dita um espaço-tempo estático no vácuo se existe uma função $f : M \to (0, +\infty)$ satisfazendo a equação estática no vácuo*

$$Hess f = fRic \quad e \quad \Delta f = 0. \tag{7}$$

Um cálculo simples garante que $R = 0$, onde R representa a curvatura escalar de g. Além disso, é bem conhecido que se a variedade é completa (sem bordo), a única solução para a equação estática no vácuo (7), com $f > 0$, é a métrica plana com $f =$ constante (cf. Anderson (1999)).

Prosseguindo, dada uma *métrica estática*

$$\bar{g} = g - f^2 dt^2 \tag{8}$$

sobre $\overline{M}^{n+1} = M^n \times_f \mathbb{R}$ (cf. Hawking e Ellis (1973), Lichnerowicz (1955), Kobayashi e Obata (1980, 1981) e Qing e Yuan 2013), é bem conhecido que:

- $Ric_{\bar{g}}(X,Y) = Ric_g(X,Y) - \frac{1}{f} Hess_g f(X,Y)$,
- $Ric_{\bar{g}}(V,H) = -g(V,H)\frac{\Delta_g f}{f}$ e
- $Ric_{\bar{g}}(X,V) = 0$,

onde $Hess_g$ e Δ_g são, respectivamente, a Hessiana e o operador Laplaciano calculados na métrica g. Além disso, X e Y são campos de vetores horizontais, enquanto H e V são campos de vetores verticais (veja Besse (2008) e O'Neill (1983)). Daí, $\overline{M}$ é *Ricci-flat*, se, e somente se, a função f satisfaz (7).

Neste trabalho, consideramos soluções não-triviais da equação estática no vácuo (7). Além disso, assumimos que $f^{-1}(0) = \partial M$ é compacto, e que a métrica g e a função f extendem-se suavemente para ∂M. Lembremos agora que o conjunto $\partial M = f^{-1}(0)$ é chamado de *horizonte*, o qual corresponde aos domínios que cercam uma coleção de buracos negros. Dizemos que não existem múltiplos buracos negros em $(M^n,\, g)$ quando o horizonte $\partial M = f^{-1}(0)$ é conexo. Para mais detalhes, veja o trabalho de Arderson (1999).

Já é bem conhecido que variedades de dimensão 4 são especias. Por exemplo, destacamos que o fibrado de 2-formas sobre uma variedade de dimensão 4 orientada e compacta pode ser invariantemente decomposto como soma direta (cf. os livros de Besse (2008) ou Dillen e Verstralen (2000)). Além disso, sobre uma variedade Riemanniana orientada $(M^4,\, g)$, o tensor de curvatura de Weyl W é um endomorfismo do fibrado de 2-formas $\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$, tal que

$$W = W^+ \oplus W^-,$$

onde $W^\pm : \Lambda^2_\pm \longrightarrow \Lambda^2_\pm$ são chamadas as partes autodual e antiautodual de W. Métricas semi-conformemente planas são também conhecidas como autoduais ou antiautoduais se $W^+ = 0$ ou $W^- = 0$, respectivamente.

Antes de prosseguir, convém recordar que uma variedade Riemanniana (M^n, g) tem curvatura *f-fracamente harmônica* se o tensor de Ricci Ric_g satisfaz

$$d^D Ric_g(\nabla f, \cdot, \nabla f) = 0$$

para uma função $f : M \to \mathbb{R}$, onde d^D é o operador diferencial de primeira ordem do espaço das seções dos 2-tensores simétricos $C^\infty(S^2 M)$ em $C^\infty(\bigwedge^2 T^*M \otimes T^*M)$, definido por

$$d^D\omega(X,Y,Z) = \nabla_X\omega(Y,Z) - \nabla_Y\omega(X,Z).$$

Com estas notações, recentemente Hwang, Chang e Yun (2016) estudaram as métricas estáticas no vácuo satisfazendo a condição de curvatura *f-fracamente harmônica*. Mais precisamente, eles provaram o seguinte resultado.

Teorema 1.7 (Hwang-Chang-Yun, 2016) *Seja $\left(M^n,\, g,\, f\right)$ um espaço-tempo estático no vácuo, com curvatura f-fracamente harmônica. Então, não existem múltiplos buracos negros em M^n.*

Assim, inspirados neste recente trabalho, mudaremos a condição de curvatura *f-fracamente harmônica* no resultado de Hwang-Chang-Yun pela hipótese de que o tensor W^+ seja harmônico sobre M. Mais precisamente, estabeleceremos o seguinte resultado.

Teorema 1.8 *Seja $\left(M^4,\, g,\, f\right)$ um espaço-tempo estático no vácuo com a parte autodual do tensor de Weyl harmônica (i.e., $\operatorname{div} W^+ = 0$). Então não existem múltiplos buracos negros em M^4.*

Obviamente se mudarmos a condição $\operatorname{div} W^+ = 0$ pela condição $\operatorname{div} W^- = 0$ a conclusão do Teorema 1.8 será a mesma. Ademais, enfatizamos que não existe relação entre curvatura *f-fracamente harmônica* e a condição de que a variedade tenha tensor W^+ harmônico. Destacamos, ainda, que a condição $\operatorname{div} W^+ = 0$ pode ser vista como uma generalização da condição Einstein.

2 PRELIMINARES

Ao longo deste capítulo forneceremos algumas notações básicas bem como alguns fatos relacionados às métricas V-estáticas dos quais faremos uso posteriormente. Para mais informações, indicamos como referência O'NEILL (1983), Chow, Nu e Li (2006), veja também os trabalhos de Miao, Shi e Tam (2010) e, Corvino, Eichmair e Miao (2013).

No que segue, seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n, com métrica g e conexão de Levi-Civita ∇. Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o espaço dos vetores suaves de M. Além disso, o espaço das funções suaves sobre M será denotado por $\mathcal{C}^\infty(M)$. Deste modo, recordemos que o tensor curvatura de Riemann é o $(1,3)$-tensor $Rm : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ definido por

$$Rm(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Ademais, podemos ver este tensor como um $(0,4)$-tensor, $Rm : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$, pela seguinte identidade

$$Rm(X,Y,Z,W) = \langle Rm(X,Y)W, Z \rangle.$$

Tomando o traço do tensor de Riemann obtemos o bem conhecido tensor de Ricci, que para um referencial ortonormal $\{e_i\}$ pode ser expressso na seguinte maneira

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} Rm(X, e_i, Y, e_i).$$

Temos também a função curvatura escalar, obtida simplesmente tomando o traço do tensor de Ricci.

Para nossos propósitos lembremos ainda a identidade de Bianchi, que para $X, Y, Z, W, V \in \mathfrak{X}(M)$, é dada por

$$\nabla Rm(X,Y,Z,W,V) + \nabla Rm(Y,Z,X,W,V) + \nabla Rm(Z,X,Y,W,V) = 0. \tag{9}$$

Em coordenadas isto é equivalente a

$$\nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{kilm} + \nabla_k R_{ijlm} = 0.$$

Como consequência, deduzimos a seguinte igualdade

$$(divRm)_{jkl} = \nabla_i R_{ijkl} = \nabla_k R_{jl} - \nabla_l R_{jk}. \tag{10}$$

Além disso, segue das fórmulas de comutatividade da derivada covariante (identidade de

Ricci), que para qualquer variedade Riemanniana M^n temos

$$\nabla_i\nabla_j R_{kl} - \nabla_j\nabla_i R_{kl} = R_{ijks}R_{sl} + R_{ijls}R_{ks}, \tag{11}$$

para mais detalhes veja CHOW (2007).

2.1 Alguns tensores importantes

Agora, relembraremos alguns tensores para uma variedade Riemanniana (M^n, g) de dimensão n, os quais serão vistos em coordenadas locais para facilitar o entendimento do próximo capítulo. Começamos com o tensor de Weyl W, este é definido para $n \geq 3$, pela seguinte decomposição:

$$\begin{aligned} W_{ijkl} &= R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}\big(R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il}\big) \\ &\quad + \frac{R}{(n-1)(n-2)}\big(g_{jl}g_{ik} - g_{il}g_{jk}\big), \end{aligned} \tag{12}$$

onde R_{ijkl} denota o tensor de curvatura de Riemann ($R_{ijkl} = Rm(e_i, e_j, e_k, e_l)$) e R_{ij} denota o tensor de Ricci. Outro tensor importante é o tensor de Cotton C, definido como

$$C_{ijk} = \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)}\big(\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik}\big). \tag{13}$$

Não é difícil verificar que o tensor de Weyl e o tensor de Cotton estão relacionados pela seguinte identidade

$$\nabla_l W_{ijkl} = -\frac{(n-3)}{(n-2)} C_{ijk}. \tag{14}$$

Além disso, é importante lembrar algumas propriedades do tensor de Cotton, este é antissimétrico nos dois primeiros índices e tem traço nulo em quaisquer dois índices, isto é,

$$C_{ijk} = -C_{jik} \ \text{ e } \ g^{ij}C_{ijk} = g^{ik}C_{ijk} = 0. \tag{15}$$

Prosseguindo, temos o tensor de Schouten A, definido por

$$A_{ij} = \frac{1}{n-2}\big(R_{ij} - \frac{R}{2(n-1)}g_{ij}\big). \tag{16}$$

De (12) e (16) concluímos que

$$R_{ijkl} = (A \owedge g)_{ijkl} + W_{ijkl}, \tag{17}$$

onde $\owedge$ representa o produto Kulkarni-Nomizu, o qual é definido por

$$(A \owedge B)_{ijkl} = A_{ik}B_{jl} + A_{jl}B_{ik} - A_{il}B_{jk} - A_{jk}B_{il}.$$

Por fim, relembremos o tensor de BACH (1921) sobre uma variedade Riemanniana (M^n, g), $n \geq 4$, este é definido em termos da componente do tensor de Weyl W_{ijkl} como segue

$$B_{ij} = \frac{1}{n-3}\nabla_k\nabla_l W_{ikjl} + \frac{1}{n-2}R_{kl}W_{ikjl}, \tag{18}$$

enquanto para $n = 3$ o tensor de Bach é dado por

$$B_{ij} = \nabla_k C_{kij}. \tag{19}$$

Destacamos, que em dimensão 4, as métricas que tem tensor de Bach nulo (neste caso dizemos simplesmente *Bach-flat*) são precisamente os pontos críticos do funcional conformemente invariante

$$\mathcal{W}(g) = \int_M |W_g|^2 dM_g,$$

definido no espaço das métricas Riemanniana. Além disso, ressaltamos que métricas conformemente planas ou Einstein são sempre *Bach-flat*.

Para nossos propósitos, deduziremos uma expressão para

$$(R_{ij}R_{jk}R_{ik} - R_{ijkl}R_{jl}R_{ik})$$

em qualquer variedade Riemanniana (M^n, g). Tal expressão, como veremos no Capítulo 3, desempenha um papel fundamental na conclusão de alguns dos resultados principais deste trabalho que estão relacionados às métricas críticas de Miao-Tam, assim como, as triplas estáticas positivas.

Lema 2.1 *Seja $(M^n,\ g)$ uma variedade Riemanniana. Então temos:*

$$R_{ij}R_{jk}R_{ik} - R_{ijkl}R_{jl}R_{ik} = \frac{1}{n-1}R|\mathring{Ric}|^2 + \frac{n}{n-2}tr(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl}R_{ik}R_{jl}.$$

Demonstração: Usando a definição do tensor de Riemann (12) teremos

$$\begin{aligned} R_{ij}R_{jk}R_{ik} - R_{ijkl}R_{jl}R_{ik} &= \frac{n}{n-2}R_{ij}R_{jk}R_{ik} - W_{ijkl}R_{jl}R_{ik} \\ &\quad - \frac{(2n-1)}{(n-1)(n-2)}R|Ric|^2 + \frac{R^3}{(n-1)(n-2)}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} R_{ij}R_{jk}R_{ik} - R_{ijkl}R_{jl}R_{ik} &= \frac{n}{n-2}R_{ij}R_{jk}R_{ik} - W_{ijkl}R_{jl}R_{ik} \\ &\quad - \frac{(2n-1)}{(n-1)(n-2)}R|\mathring{Ric}|^2 - \frac{1}{n(n-2)}R^3. \end{aligned} \tag{20}$$

Por outro lado, como $\mathring{R}_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij}$, então obtemos

$$
\begin{aligned}
R_{ij} R_{ik} R_{jk} &= \mathring{R}_{ij} R_{ik} R_{jk} + \frac{R}{n} |Ric|^2 \\
&= \mathring{R}_{ij} \mathring{R}_{ik} R_{jk} + \frac{2}{n} R |Ric|^2 - \frac{R^3}{n^2} \\
&= \mathring{R}_{ij} \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jk} + \frac{3}{n} R |\mathring{Ric}|^2 + \frac{R^3}{n^2}.
\end{aligned}
$$

Portanto, substituindo esta última expressão em (20) obtemos o resultado desejado.

□

2.2 Produtos warped Riemanniano

Nesta seção apresentaremos uma classe particular de variedades Riemannianas que são naturalmente munidas com um campo vetorial conforme. Para fazer isto, considere M uma variedade Riemanniana de dimensão n, orientada e conexa, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo da reta e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função suave e positiva. Seja $\overline{M}^{n+1} = I \times M^n$ a variedade produto e considere π_I e π_M como as projeções sobre os fatores I e M, respectivamente. Em $\overline{M}$ defina a métrica

$$
\langle U, V \rangle_p = \langle (\pi_I)_* U, (\pi_I)_* V \rangle + f^2(p) \langle (\pi_M)_* U, (\pi_M)_* V \rangle,
$$

para todo $p \in \overline{M}$ e todos $U, V \in T_p\overline{M}$. A variedade Riemanniana a qual nos referimos é o par $(\overline{M}, \langle\ ,\ \rangle)$ que será representada simplesmente por

$$
\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n,
$$

e será chamada de produto warped Riemanniano.

Um caso particular destas variedades é obtido considerando a função warped identicamente 1, tais variedades Riemannianas são conhecidas como espaços produtos Riemanniano (ou simplesmente como produto simples).

Para finalizar esta seção, seja $U, V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ e considere a decomposição

$$
U = U^* + \langle U, \partial t \rangle \partial t \quad e \quad V = V^* + \langle V, \partial t \rangle \partial t,
$$

onde U^* e V^* representam a projeção sobre a fibra M. Com estas considerações relembremos algumas propriedades do tensor de curvatura de $\overline{M}$ que podem ser encontradas detalhadamente no livro do O'Neill (1983) (ver Proposição 7.42).

(i) $\overline{R}(U^*, V^*)\partial t = 0$;

(ii) $\overline{R}(U^*, \partial t)V^* = -\langle U^*, V^* \rangle \dfrac{f''}{f} \partial t = -(\langle U, V \rangle - \langle U, \partial t \rangle \langle V, \partial t \rangle) \dfrac{f''}{f} \partial t$;

(iii) $\overline{R}(U^*, \partial t)\partial t = \dfrac{f''}{f}U^* = \dfrac{f''}{f}(U - \langle U, \partial t\rangle \partial t)$;

(iv) $\overline{R}(\partial t, \partial t) = 0$.

Tais fórmulas serão importantes, principalmente no final da próxima seção, onde descreveremos propriedades geométricas de dois espaços bem conhecidos no estudo de rigidez e classificação das triplas estáticas positivas.

2.3 Métricas V-estáticas

O objetivo desta seção é fornecer algumas propriedades das métricas V-estáticas as quais serão estudadas no Capítulo 3, bem como apresentar a caracterização variacional para tais estruturas, fato este que pode ser encontrado, por exemplo, no artigo de Corvino, Eichmair e Miao (2013).

O estudo de métricas V-estáticas foi desenvolvido inicialmente em casos particulares, como podemos constatar nos trabalhos de Miao e Tam (2009), nos quais os autores estudam pontos críticos do funcional volume restrito ao espaço das métricas Riemannianas com curvatura escalar constante e métrica prescrita no bordo, assim como, nos trabalhos de Miao, Shi e Tam (2010) onde o interesse se voltou para o funcional

$$F_\phi(g) = \int_{\partial M} H_g \phi d\sigma,$$

onde H_g é a curvatura média de ∂M em (M, g) com respeito ao normal unitário apontando para fora de M, $d\sigma$ é o elemento de volume de ∂M e ϕ é uma função suave prescrita sobre o bordo ∂M. Miao, Shi e Tam mostraram que neste caso os pontos críticos do funcional acima são precisamente as métricas estáticas, tais casos serão tratados de modo mais específico nas seções subsequentes (cf. Seção 3.2 e 3.3). Posteriormente, Corvino, Eichmair e Miao em (2013), fornecem uma abordamente unificada destes dois casos particulares iniciando o estudo das métricas V-estáticas.

Antes de fazermos alguns comentários sobre o caráter variacional de tais métricas, recordemos a definição de métricas V-estáticas.

Definição 2.1 *Uma métrica V-estática é uma variedade Riemanniana (M^n, g) com uma solução não trivial (f, κ) do seguinte sistema*

$$-(\Delta f)g + Hess f - f Ric = \kappa g,$$

onde κ é uma constante.

Por simplicidade, denotaremos (M, g, f, κ) como sendo tais métricas. Em particular, podemos reescrever a expressão acima na linguagem tensorial como

$$-(\Delta f)g_{ij} + \nabla_i \nabla_j f - fR_{ij} = \kappa g_{ij}. \tag{21}$$

Tomando o traço em (21) obtemos que as métricas V-estáticas satisfazem

$$\Delta f + \frac{R}{n-1} f + \frac{\kappa n}{n-1} = 0. \tag{22}$$

Além disso, se $\mathring{T} = T - \frac{\mathrm{tr}T}{n} g$ denota o tensor sem traço associado a T, a partir de (21) chegamos a

$$\begin{aligned} f\mathring{Ric} &= f(Ric - \frac{R}{n} g) \\ &= Hessf - \Delta f g - \kappa g - \frac{fR}{n} g. \end{aligned} \tag{23}$$

Daí, substituindo (22) em (23), obtemos a seguinte identidade

$$\begin{aligned} f\mathring{Ric} &= Hessf - \Delta f g + \frac{n-1}{n} \Delta f g \\ &= Hessf - \frac{\Delta f}{n} g \\ &= \mathring{Hess} f. \end{aligned}$$

Uma propriedade fundamental das métricas V-estáticas é que, se estas admitem solução não-trivial para (21), então tal estrutura deve ter curvatura escalar constante, tal fato pode ser verificado derivando ambos os membros da equação fundamental (21), isto é,

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_j (-(\Delta f) g_{ij} + \nabla_i \nabla_j f - fR_{ij}) \\ &= -\nabla_i \Delta f + \nabla_j \nabla_i \nabla_j f - \nabla_j (fR_{ij}), \end{aligned}$$

que usando a identidade de Ricci juntamente com a segunda identidade de Bianchi contraída duas vezes podemos reescrever a expressão acima como

$$\begin{aligned} 0 &= -\nabla_i \Delta f + (\nabla_i \Delta f + R_{ij} \nabla_j f) - R_{ij} \nabla_j f - \frac{1}{2} f \nabla_i R \\ &= -\frac{1}{2} f \nabla_i R, \end{aligned}$$

ou seja,

$$f \nabla R = 0$$

em M. Agora, escolhendo coordenadas especiais (a saber, coordenadas harmônicas) concluímos que f e g são analíticas (veja por exemplo a Proposição 2.1 no artigo de Corvino, Eichmair e Miao (2013), veja também o trabalho de Corvino (2000) e Miao e Tam (2009)), consequentemente f não pode se anular em um aberto de M. Portanto, devemos ter $\nabla R = 0$ e então a curvatura escalar é constante sobre M, isto prova a afirmação.

Devemos destacar que uma das motivações para o estudo de tais métricas se deve ao seu caráter variacional. Afim de enterdermos melhor esta descrição, seja M^n uma variedade suave com bordo suave ∂M e seja γ uma métrica Riemanniana em ∂M fixada. Considere $\mathcal{M}$ como o espaço das métricas Riemannianas sobre M, e $\mathcal{M}^c \subset \mathcal{M}$ o subconjunto das métricas Riemannianas com curvatura escalar constante c. Além disso, considere também o espaço

$$\mathcal{M}_\gamma = \{g \text{ métrica Riemanniana em } M; g|_{T\partial M} = \gamma\}.$$

Seja h um $(0,2)$-tensor simétrico sobre M. Com esta notação, lembremos que a linearização da curvatura de Ricci é dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(R_{ij}|_{g(t)}) &= \frac{1}{2}\Big(-\Delta h_{ij} + \nabla_i(\mathrm{div}h)_j + \nabla_j(\mathrm{div}h)_i - \nabla_i\nabla_j(trh) \\ &\quad -2R_{ipjq}h_{pq} + R_{ip}h_{pj} + R_{jp}h_{pi}\Big), \end{aligned}$$

onde $g(t)$ é uma curva sobre $\mathcal{M}$ tal que g(0)=g e $g'(0) = h$. Tal fórmula pode ser encontrada com todos os detalhes no livro do Chow, Lu e Ni (2006) ou ainda nas notas de tópicos de geometria do Viaclovsky (2011). Consequentemente, desde que a curvatura escalar é o traço do tensor de Ricci, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}R_{g(t)} &= \frac{\partial}{\partial t}g^{ij}R_{ij} + g^{ij}\frac{\partial}{\partial t}R_{ij} \\ &= -(g^{ip}h_{pq}g^{qj})R_{ij} - \Delta_g tr_g h + \mathrm{div}_g\mathrm{div}_g h \\ &= -\Delta_g tr_g h + \mathrm{div}_g\mathrm{div}_g h - h \cdot Ric_g, \end{aligned}$$

onde g^{ij} denota a matriz inversa da métrica g_{ij}. Assim, a linearização L_g da aplicação curvatura escalar $R : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$L_g(h) = -\Delta_g(tr_g h) + \mathrm{div}_g\mathrm{div}_g h - h \cdot Ric_g.$$

Além disso, seu L^2-adjunto formal tem a seguinte expressão

$$L_g^* f = -(\Delta_g f)g + Hess_g f - fRic(g)$$

(aqui, convencionamos que $\Delta_g f = tr_g(Hess_g f)$). Em seguida, consideramos o funcional volume $V : \mathcal{M} \to (0,\infty)$, onde para cada métrica $g \in \mathcal{M}$ associa o volume da variedade

Riemanniana M. Agora lembremos que a variação do funcional volume é dada por

$$DV_g(h) = \frac{1}{2}\int_M tr_g h d\mu_g.$$

Assim, definindo $\Theta(g) = (R(g), V(g))$ temos imediatamente que

$$\mathcal{S}_g(h) = D\Theta_g(h) = (L_g(h), DV_g(h)).$$

Ademais, seu adjunto formal é então

$$\mathcal{S}_g^*(f,a) = L_g^* f + \frac{a}{2}g,$$

para mais detalhes veja Corvino, Eichmair e Miao (2013). Isto permite concluir que potenciais V-estáticos correspondem precisamente a elementos não-triviais no núcleo de $\mathcal{S}_g^*$. Além disso, o sistema de equações

$$L_g^* f = \kappa g \tag{24}$$

é equivalente a $\mathcal{S}_g^*(f, -2\kappa) = 0$. Com essas notações em mente o seguinte teorema unifica em um contexto geral o Teorema 5 do trabalho de Miao e Tam (2009) e o Teorema 2.1 de Miao, Shi e Tam (2010).

Teorema 2.1 (Corvino, Eichmair e Miao, 2013) *Seja κ uma constante e seja ϕ uma função suave sobre ∂M. Assuma que $\kappa \neq 0$ ou que ϕ não é identicamente nula. Considere o funcional sobre*

$$\mathcal{M}_\gamma^c = \{g \in \mathcal{M}_\gamma; R_g = c\}$$

dado por

$$g \mapsto E_{\kappa,\phi}(g) = \kappa V(g) - \int_{\partial M} H\phi d\sigma, \tag{25}$$

onde V(g) é o volume de (M,g) e $d\sigma$ é a forma volume de γ. Suponha $g \in \mathcal{M}_\gamma^c$ é uma métrica suave tal que o operador $\Delta_g + \frac{c}{n-1}$ tem espectro positivo (Dirichlet). Então g é um ponto crítico de $E_{\kappa,\phi}(\cdot)$ sobre $\mathcal{M}_\gamma^c$ se, e somente se, existe uma função suave definida sobre M com

$$L_g^* f = \kappa g \text{ em } M \text{ e } f = \phi \text{ sobre } \partial M. \tag{26}$$

Demonstração: Seja $\{g(t)\}_{|t|<\epsilon} \subset \mathcal{M}_\gamma^c$ um caminho continuamente diferenciável tal que $g(0) = g$. Seja $h = g'(0)$. Para o que segue, denote por $H(t)$ a curvatura média sobre o bordo ∂M calculada com respeito ao campo normal unitário apontando para fora de M. Além disso, relembremos a seguinte relação (o leitor pode encontrar mais detalhes sobre esta identidade no artigo de Miao e Tam (2009), veja Eq. (34) do referido artigo)

$$2H'(0) = \langle \nabla_g tr_g h, \nu \rangle - \mathrm{div}_g h(\nu) - \mathrm{div}_\gamma X - \langle \Pi, h_\gamma \rangle,$$

onde ν é o campo normal unitário apontando para fora de ∂M em (M,g(0)), X é o campo de vetor dual da 1-forma $h(\nu,\cdot)|_{T\partial M}$ sobre $(\partial M,\gamma)$, $\mathrm{div}_\gamma X$ é o divergente de X sobre $(\partial M,\gamma)$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_\gamma$ é a métrica produto sobre $(\partial M,\gamma)$, e Π representa a segunda forma fundamental de ∂M. Usando que $h|_{T\partial M} = 0$, segue que

$$2\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} E_{\kappa,\phi} = \int_M ktr_g h dM - \int_{\partial M} \phi[\langle \nabla_g tr_g h, \nu \rangle - \mathrm{div}_g h(\nu) - \mathrm{div}_\gamma X] d\sigma. \qquad (27)$$

Agora, como

$$\mathrm{div}_g(f\nabla_g tr_g h - tr_g h \nabla_g f) = f\Delta_g tr_g h - tr_g h \Delta_g f,$$

tomamos a integral em ambos os lados para obter

$$-\int_{\partial M} \phi \langle \nabla_g tr_g h, \nu \rangle d\sigma = \int_M tr_g h \Delta_g f dM - \int_M f\Delta_g tr_g h dM - \int_{\partial M} tr_g h \frac{\partial f}{\partial \nu} d\sigma. \qquad (28)$$

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned} \int_M f \mathrm{div}_g \mathrm{div}_g h dM &= \int_M f\nabla_i \nabla_j h_{ij} dM \\ &= \int_M \nabla_i (f\nabla_j h_{ij}) dM - \int_M \nabla_i f \nabla_j h_{ij} dM \\ &= \int_{\partial M} \phi \mathrm{div}_g h(\nu) d\sigma - \int_M (\nabla_j(\nabla_i f h_{ij}) - \nabla_j \nabla_i f h_{ij}) dM \\ &= \int_{\partial M} \phi \mathrm{div}_g h(\nu) d\sigma - \int_{\partial M} h(\nabla_g f, \nu) d\sigma + \int_M \langle Hess_g f, h \rangle dM, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \phi \mathrm{div}_g h(\nu) d\sigma &= \int_M f \mathrm{div}_g \mathrm{div}_g h dM - \int_M \langle Hess_g f, h \rangle dM \\ &\quad + \int_{\partial M} h(\nabla_g f, \nu) d\sigma. \end{aligned} \qquad (29)$$

Daí, substituindo (28) e (29) na expressão (27) chegamos a

$$\begin{aligned} 2\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} E_{\kappa,\phi} &= \int_M \Big(ktr_g h + f[-\Delta_g(tr_g h) + \mathrm{div}_g \mathrm{div}_g h] \\ &\quad + (\Delta_g f) tr_g h - \langle Hess_g f, h \rangle \Big) dM \\ &\quad + \int_{\partial M} \Big(h(\nu, \nabla_g f) - h(\nu, \nabla_\gamma f) - tr_g h \frac{\partial f}{\partial \nu} \Big) d\sigma. \end{aligned} \qquad (30)$$

Prosseguindo, levando em conta a seguinte decomposição

$$\nabla_g f = \nabla_\gamma f + \langle \nabla_g f, \nu\rangle \nu$$

e lembrando que $h|_{T\partial M} = 0$, obtemos

$$h(\nu, \nabla_g f) - h(\nu, \nabla_\gamma f) \ = \ \langle \nabla_g f, \nu\rangle h(\nu,\nu) = tr_g h \frac{\partial f}{\partial \nu}.$$

Consequentemente, a equação (30) pode ser reescrita como

$$2\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} E_{\kappa,\phi} \ = \ \int_M \langle h, kg - L_g^* f\rangle dM, \tag{31}$$

onde usamos o fato que $\{g_t\}_{|t|\leq \epsilon} \subset \mathcal{M}_\gamma^c$ implica que

$$L_g(h) = -\Delta_g(tr_g h) + \mathrm{div}_g \mathrm{div}_g h - \langle h, Ric_g\rangle = 0.$$

Assim, se f é solução de (26), então g é ponto crítico do funcional $E_{\kappa,\phi}(\cdot)$ sobre $\mathcal{M}_\gamma^c$.

Reciprocamente, assuma que g é ponto crítico de $E_{\kappa,\phi}(\cdot)$ e considere a única solução f do problema de fronteira

$$\begin{cases} (n-1)\Delta_g f + cf = -n\kappa, & \text{em } M; \\ f = \phi, & \text{sobre } \partial M. \end{cases}$$

Seja $\widehat{h}$ um $(0,2)-$tensor simétrico, suave, arbitrário e com suporte compacto em M. Desde que o primeiro autovalor de Dirichlet de $\Delta_g + \frac{c}{n-1}$ é positivo, segue da Proposição 1 em (2009) que existe $t_0 > 0$ e $\epsilon > 0$ tal que, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, existe uma única função suave positiva $u(t)$ sobre M com $|u(t) - 1| \leq \epsilon$ tal que $u(t) = 1$ sobre ∂M, $g(t) = u(t)^{\frac{4}{n-2}}(g + t\widehat{h}) \in \mathcal{M}_\gamma^c$, e $\{u(t)\}|_{|t|<t_0}$ é diferenciável em $t = 0$ com $u(0) = 1$. Agora, devemos notar que a curva $g(t)$ satisfaz $h = g'(0) = \frac{4}{n-2}u'(0)g + \widehat{h}$. Assim, de (31) juntamente com o fato que f é solução do problema de fronteira acima, temos que

$$0 = \int_M \langle \widehat{h}, fRic_g + (\Delta_g f)g - Hess_g f + \kappa g\rangle dM.$$

Como $\widehat{h}$ foi escolhido arbitrariamente, concluímos que f satisfaz (26). Isto finaliza a prova do teorema. $\square$

Encerraremos o capítulo considerando alguns casos especiais das métricas V-estáticas. O primeiro deles, é o caso $\kappa = 1$ na Eq. (21), o qual é conhecido como métricas críticas de Miao-Tam.

Inicialmente, recordemos que Miao e Tam (2011), baseados nas técnicas desenvolvidas nos trabalhos de Kobayashi e Obata (1981) e Kobayashi (1982), estudaram tais métricas críticas sobre a condição da variedade ser localmente conformemente plana. Mais precisamente, eles provaram o seguinte resultado

Teorema 2.2 (Miao e Tam, 2011) *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam sobre uma variedade de dimensão n, compacta, simplesmente conexa, localmente conformemente plana e com bordo isométrico a uma esfera padrão $\mathbb{S}^{n-1}$. Então, (M^n, g) deve ser isométrica à bola geodésica em uma forma espacial simplesmente conexa $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$.*

Este resultado foi generalizado por Barros, Diógenes e Ribeiro Jr. (2015), para as dimensões 3 e 4 sobre a hipótese da variedade ser *Bach-flat*, que como já vimos esta é uma condição mais fraca que localmente conformemente plana. Destacamos que para obter tal resultado, Barros et al. estudaram os conjuntos de níveis da função potencial e obtiveram propriedades interessantes sobre a geometria de tais níveis e os reflexos causados na geometria da variedade ambiente. Mais precisamente, eles provam o seguinte resultado de rigidez.

Teorema 2.3 (Barros, Diógenes e Ribeiro, 2015) *Seja (M^4, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam sobre uma variedade de dimensão 4, simplesmente conexa, Bach-flat e com bordo isométrico à esfera padrão $\mathbb{S}^3$. Então, (M^4, g) é isométrica a uma bola geodésica em uma forma espacial simplemente conexa $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{H}^4$ ou $\mathbb{S}^4$.*

Observação 2.1 *Vale resaltar que, para demonstrar o teorema acima, os autores deduziram, em particular, um resultado de rigidez para as métricas críticas de Miao-Tam em dimensão 4 sobre a condição de curvatura de Weyl radial nula (i.e., $W_{ijkl}\nabla_l f = 0$), a saber, se (M^4, g, f) é uma métrica crítica de Miao-Tam satisfazendo a condição de curvatura de Weyl radial nula então esta deve ser localmente conformemente plana e, como já conhecemos a classificação neste caso, então obtemos a rigidez de tais métricas satisfazendo $W_{ijkl}\nabla_l f = 0$ (para mais detalhes veja Seção 3.1 do trabalho de Barros, Diógenes e Ribeiro (2015)). Além disso, procedendo de modo análogo a demosntração do referido artigo, não é difícil notar que este último fato é válido de maneira geral para métricas V-estáticas.*

Recordemos agora que tais métricas foram estudadas por Miao e Tam (2011) sobre a condição Einstein. Neste caso, os autores foram capazes de remover a condição de bordo isométrico à esfera padrão. Mais precisamente, eles provaram o seguinte resultado.

Teorema 2.4 (Miao e Tam, 2011) *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam sobre uma variedade Einstein, compacta e com bordo suave ∂M. Então, (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica em uma forma espacial simplemente conexa $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$.*

Destacamos que este resultado de rigidez foi generalizado pelo autor e Ribeiro Jr. para o caso de tensor de Ricci paralelo. Ademais, como já sabemos que o tensor métrico é paralelo, então temos que a hipótese de Ricci paralelo é uma condição mais fraca que Einstein, entretanto, existem exemplos de variedades com tensor de Ricci paralelo que não satisfazem a condição Einstein. Para mais detalhes veja Teorema 3.3, assim como o Corolário 3.1 no próximo capítulo.

Por fim, abordaremos o caso $\kappa = 0$ na Eq. (21), o qual é conhecido como triplas estáticas positivas. Em suma, faremos os cálculo de algumas afirmações que serão descritas nos Exemplos 3.4 e 3.5 da Seção 3.

Exemplo 2.1 *Iniciamos com o cilindro sobre $\mathbb{S}^{n-1}$ com métrica produto. Este é dado por*

$$\Big(M = \Big[0, \frac{\pi}{\sqrt{n}}\Big] \times \mathbb{S}^{n-1},\ g = dt^2 + \frac{n-2}{n}h,\ f(t) = sen(\sqrt{n}t)\Big),$$

onde h representa a métrica canônica de $\mathbb{S}^{n-1}$. Mostremos que tal estrutura define uma tripla estática positiva não-Einstein, conformemente plana e que satisfaz a condição de Ricci paralelo. De fato, afim de calcular a curvatura de Ricci de tal variedade, escolha um referencial ortonormal $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ para M, onde $\{e_i\}_{i\geq 2}$ representa um referencial ortogonal tangente a $\mathbb{S}^{n-1}$. Daí, pela equação de Gauss temos

$$R^M_{ijkl} = R^{\mathbb{S}^{n-1}}_{ijkl} = \frac{n-2}{n}(h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}) = \frac{n}{n-2}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}), \tag{32}$$

para todo $2 \leq i, j, k, l \leq n$. Assim, tomando o traço na expressão acima e observando que $R_{1i} = 0$, para todo $0 \leq i \leq n$, vemos que a curvatura de Ricci de M tem a seguinte expresssão

$$Ric = -ndt^2 + ng. \tag{33}$$

Isto implica que (M, g) tem Ricci paralelo, entretanto não é uma variedade de Einstein. Além disso, tome o traço em (33) para ver que a curvatura escalar é dada por $R = n(n-1)$ e com um cálculo direto vemos que (M, g) satisfaz a identidade

$$|\mathring{Ric}|^2 = |Ric|^2 - \frac{R^2}{n} = n(n-1) = \frac{R^2}{n(n-1)}.$$

Agora, segue da expressão do tensor de Riemann e da curvatura de Ricci obtidas acima, juntamente com a definição do tensor de Weyl (ver Equação (12)) que, (M^n, g) é conformemente plana (para dimensão três é suficiente notar que $C_{ijk} = 0$). Por fim, verificaremos que a equação fundamental é satisfeita. Para isto, note que $\nabla f \circ \pi_I = \sqrt{n}cos(\sqrt{n}t)\partial t$ e

$$\begin{aligned} Hessf(e_i, e_j) &= \langle \nabla_{e_i}\nabla f, e_j\rangle \\ &= \sqrt{n}\langle \nabla_{e_i}(cos(\sqrt{n}t)\partial t), e_j\rangle \\ &= \sqrt{n}\langle -\sqrt{n}sen(\sqrt{n}t)e_i(\pi_I)\partial t + cos(\sqrt{n}t)\nabla_{e_i}\partial t, e_j\rangle \\ &= -nsen(\sqrt{n}t)\langle e_i, \partial t\rangle\langle e_j, \partial t\rangle. \end{aligned}$$

Em particular, $\Delta f = -nsen(\sqrt{n}t)$. *Assim, deduzimos a seguinte equação*

$$\begin{aligned} -\Delta f g_{ij} + \nabla_i \nabla_j f - f R_{ij} &= nsen(\sqrt{n}t) g_{ij} - nsen(\sqrt{n}t)\langle e_i, \partial t\rangle \langle e_i, \partial t\rangle \\ &\quad -sen(\sqrt{n}t) R_{ij}. \end{aligned}$$

Portanto, fazendo uma análise separada dos casos deduzimos que a equação fundamental para métricas estáticas é satisfeita, isto é,

$$-(\Delta f) g + Hess f - f Ric = 0.$$

Exemplo 2.2 *(Espaço de Schwarzschild) Descreveremos algumas propriedades do bem conhecido espaço de Schwarzchild. Para alguma constante* $m \in \Big(0, \sqrt{\frac{(n-2)^{n-2}}{n^n}}\Big)$*, considere o espaço de Schwarzschild definido por*

$$\Big(M = [r_1, r_2] \times \mathbb{S}^{n-1},\ g = \frac{1}{1 - 2mt^{2-n} - t^2} dt^2 + t^2 h,\ f(t) = \sqrt{1 - 2mt^{2-n} - t^2}\Big),$$

onde $0 < r_1 < r_2$ *são raízes de* f *e* h *denota a métrica canônica de* $\mathbb{S}^{n-1}$. *Neste caso temos uma tripla estática positiva conformemente plana que não satisfaz a condição de Ricci paralelo. De fato, lembre que o tensor de Weyl* ($n \geq 4$) *é um invariante conforme (em dimensão 3 o mesmo vale para o tensor de Cotton), para mais detalhes sobre esse fato veja, por exemplo, CHOW (2007). Assim, definindo a métrica*

$$\widetilde{g} = dt^2 + \phi^2(t) h,$$

onde $\phi(t) = t\sqrt{1 - 2mt^{2-n} - t^2}$*, vemos que tal métrica é conforme a métrica* g*, a saber,*

$$g = \frac{1}{1 - 2mt^{2-n} - t^2} \widetilde{g}.$$

Afim de facilitar os cálculos escrevemos $e^{2u} = (1 - 2mt^{2-n} - t^2)^{-1}$*, o que implica* $u = lnt - ln\phi(t)$.

Para o que segue, seja $\{\widetilde{e}_1 = \partial t, \widetilde{e}_2, \ldots, \widetilde{e}_n\}$ *um referencial ortonormal para* $(M, \widetilde{g})$ *com* $\{\widetilde{e}_i\}_{i \geq 2}$ *tangente à esfera* $\mathbb{S}^{n-1}$. *Daí, usando a equação de Gauss deduzimos que*

$$R^{\mathbb{S}^{n-1}}_{ijkl} = \widetilde{R}^M_{ijkl} + \Big(\frac{\phi'}{\phi}\Big)^2 (\widetilde{g}_{ik}\widetilde{g}_{jl} - \widetilde{g}_{il}\widetilde{g}_{jk}). \tag{34}$$

Consequentemente, tomando o traço em jl *é imediato verificar que*

$$\widetilde{R}^M_{ik} = \Big[-\frac{\phi''}{\phi} + (n-2)\Big(\frac{1 - \phi'^2}{\phi^2}\Big)\Big]\widetilde{g}_{ik}, \tag{35}$$

para todo $0 \leq i, k \leq n$. *Prosseguindo, pelo que vimos na seção de produtos warped, temos* *para todo $i \geq 2$*

$$\widetilde{Ric}^M(\partial t, e_i) = 0 \quad e \quad \widetilde{Ric}^M(\partial t, \partial t) = -\frac{\phi''}{\phi}(n-1),$$

de modo que podemos escrever o tensor de Ricci como

$$Ric^M_{\widetilde{g}} = \Big[-\frac{\phi''}{\phi} + (n-2)\Big(\frac{1-\phi'^2}{\phi^2}\Big)\Big]\widetilde{g} - (n-2)\Big[\frac{\phi''}{\phi} + \frac{1-\phi'^2}{\phi^2}\Big]dt^2. \tag{36}$$

Além disso, a partir da expressão acima obtemos que a curvatura escalar na métrica $\widetilde{g}$ é dada por

$$R_{\widetilde{g}} = (n-1)\Big[-2\frac{\phi''}{\phi} + (n-2)\Big(\frac{1-\phi'^2}{\phi^2}\Big)\Big].$$

Agora, desde que as métricas g e $\widetilde{g}$ são conformes, vale a seguinte relação

$$R_g = e^{-2u}(R_{\widetilde{g}} - 2(n-1)\Delta_{\widetilde{g}}u - (n-1)(n-2)|\nabla^{\widetilde{g}}u|^2).$$

Consequentemente, a curvatura escalar R_g assume a seguinte expressão

$$R_g = (n-1)e^{-2u}\Big[\frac{(n-2)}{\phi^2} - \frac{(n-4)}{t^2} - \frac{2\phi'}{t\phi}\Big],$$

que após algumas simplificações obtemos $R_g = n(n-1)$.

Com estas informações em mente, estamos prontos para calcular o tensor de Weyl na métrica $\widetilde{g}$, para isto, considere inicialmente o caso $i, j, k, l \in \{2, \ldots, n\}$ (os demais casos são feitos de modo análogo). Assim, pela Equação (12) juntamente com (36) e usando novamente a equação de Gauss, temos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}_{ijkl} &= \widetilde{R}^M_{ijkl} - \frac{1}{n-2}Ric^M_{\widetilde{g}} \owedge \widetilde{g} + \frac{R_{\widetilde{g}}}{2(n-1)(n-2)}\widetilde{g} \owedge \widetilde{g} \\
&= R^{\mathbb{S}^{n-1}}_{ijkl} - \Big(\frac{\phi'}{\phi}\Big)^2\Big(\frac{\widetilde{g} \owedge \widetilde{g}}{2}\Big) - \frac{1}{n-2}\Big[-\frac{\phi''}{\phi} + (n-2)\Big(\frac{1-\phi'^2}{\phi^2}\Big)\Big]\widetilde{g} \owedge \widetilde{g} \\
&\quad + \frac{1}{2(n-2)}\Big[-2\frac{\phi''}{\phi} + (n-2)\Big(\frac{1-\phi'^2}{\phi^2}\Big)\Big]\widetilde{g} \owedge \widetilde{g} \\
&= \phi^2\langle R^{\mathbb{S}^{n-1}}(\widetilde{e}_i, \widetilde{e}_j)\widetilde{e}_k, \widetilde{e}_l\rangle_h - \frac{1}{\phi^2}\Big(\frac{\widetilde{g} \owedge \widetilde{g}}{2}\Big) \\
&= \frac{1}{\phi^2}(\widetilde{g}_{ik}\widetilde{g}_{jl} - \widetilde{g}_{il}\widetilde{g}_{jk}) - \frac{1}{\phi^2}\Big(\frac{\widetilde{g} \owedge \widetilde{g}}{2}\Big) = 0,
\end{aligned}$$

isto é, $\widetilde{W}_{ijkl} = 0$, para todo $i, j, k, l \in \{2, \ldots, n\}$, e como nos demais casos também obtemos que o tensor de Weyl na métrica $\widetilde{g}$ se anula, segue que $\widetilde{W} = W_{\widetilde{g}} \equiv 0$. Portanto, pelo que já sabemos, o mesmo ocorre com a métrica g, ou seja, (M, g) é conformemente plana.

Mostremos agora que f é a função potencial que torna (M, g, f) uma tripla estática positiva. Devemos notar que, se $\{\widetilde{e}_i\}$ representa um referencial ortonormal para $\widetilde{g}$, então $\{e_i = e^{-u}\widetilde{e}_i\}$ define um referencial ortonormal na métrica g. Agora, é imediato verificar que $\nabla^g f = (m(n-2)t^{1-n} - t)e_1$, então, após alguns calculos a partir da definição, vemos que a hessiana de f assume a seguinte expressão

$$\begin{aligned} Hess_g f(e_i, e_j) &= e_i(m(n-2)t^{1-n} - t)\langle e_1, e_j\rangle_g \\ &+(m(n-2)t^{1-n} - t)\{\widetilde{e}_i(f)\langle \partial t, \widetilde{e}_j\rangle_{\widetilde{g}} + f\langle \nabla^{\widetilde{g}}_{\widetilde{e}_i}\partial t, \widetilde{e}_j\rangle_{\widetilde{g}} \\ &+\widetilde{e}_i(u)\langle e_1, \widetilde{e}_j\rangle_{\widetilde{g}} + e_1(u)\langle \widetilde{e}_j, \widetilde{e}_j\rangle_{\widetilde{g}} - fu'\langle \widetilde{e}_i, \partial t\rangle_{\widetilde{g}}\langle \widetilde{e}_j, \partial t\rangle_{\widetilde{g}}\}. \end{aligned} \tag{37}$$

Em particular, para $i, j \geq 2$, chegamos a uma forma mais simplificada, isto é,

$$Hess_g f(e_i, e_j) = (m(n-2)t^{-n} - 1)fg_{ij}.$$

Além disso, tomando o traço em (37) obtemos $\Delta_g f = -nf$, o que implica

$$-(\Delta_g f)g_{ij} + Hess_g f(e_i, e_j) = (m(n-2)t^{-n} + n - 1)fg_{ij}.$$

Assim, falta verificar que

$$Ric_g(e_i, e_j) = (m(n-2)t^{-n} + n - 1)fg_{ij}.$$

Para esta finalidade, relembre que as curvaturas de Ricci nas métricas g e $\widetilde{g}$ estão relacionadas à seguinte forma,

$$\begin{aligned} Ric_g(e_i, e_j) &= f^2\{Ric_{\widetilde{g}}(\widetilde{e}_i, \widetilde{e}_j) + (2-n)Hess_{\widetilde{g}}u(\widetilde{e}_i, \widetilde{e}_j) \\ &\quad -\widetilde{g}(\widetilde{e}_i, \widetilde{e}_j)\Delta_{\widetilde{g}}u + (2-n)|\nabla^{\widetilde{g}}u|^2\widetilde{g}(\widetilde{e}_i, \widetilde{e}_j)\}. \end{aligned}$$

Daí, calculando os termos desta expressão separadamente, chegamos a

$$Hess_{\widetilde{g}}u(\widetilde{e}_i, \widetilde{e}_j) = \left(\frac{1}{t} - \frac{\phi'}{\phi}\right)\frac{\phi'}{\phi}(n-1)$$

e

$$\Delta_{\widetilde{g}}u = -\frac{1}{t^2} - \frac{\phi''}{\phi} - (n-2)\frac{\phi'^2}{\phi^2} + (n-1)\frac{\phi'}{t\phi},$$

ou seja, a expressão do tensor de Ricci assume a seguinte forma

$$Ric_g(e_i, e_j) = f^2\left\{\frac{n-2}{\phi^2} - \frac{n-3}{t^2} - \frac{\phi'}{t\phi}\right\}g_{ij},$$

para todo $i, j \geq 2$. Como $\phi(t) = t\sqrt{1 - 2mt^{2-n} - t^2}$, obtemos após algumas simplificações a igualdade desejada. Destacamos que os demais casos são feitos de modo similar.

Por fim, note que $\nabla Ric \neq 0$, isto é, (M, g) não possui Ricci paralelo. Para ver este último fato, basta observar que, para todo $i, j \geq 2$,

$$\nabla_1 R_{ij} = E_1(m(n-2)t^{-n} + (n-1))g_{ij} = -mn(n-2)t^{-n-1}fg_{ij} \neq 0.$$

3 RESULTADOS DE RIGIDEZ PARA MÉTRICAS V-ESTÁTICAS

O objetivo deste capítulo é fornecer fórmulas tipo Bochner para métricas V-estáticas e a partir delas estender alguns resultados recente na teoria de métricas críticas. A propósito, se nos restringirmos as métricas críticas do funcional volume (ou métricas críticas de Miao-Tam), que como já vimos são casos particulares das métricas V-estáticas, podemos deduzir uma fórmula integral nestes ambientes e como consequência imediata obtemos a extensão para o caso Ricci paralelo do resultado obtido por Miao e Tam (2011) para variedades de Einstein, ou seja, no referido artigo os autores mostram que, se uma métrica crítica é Einstein, então esta deve ser isométrica a uma bola geodésica em uma forma espacial simplesmente conexa $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$. Esta fórmula integral deu origem ao artigo intitulado *Critical metrics of the volume functional on manifolds with boundary* escrito pelo autor em parceria com Ribeiro Jr. (2017a). Além disso, outras consequências serão obtidas considerando tais métricas com curvatura seccional não-negativa, a saber, em dimensão três, mostraremos que as métricas críticas de Miao-Tam são precisamente aquelas das bolas geodésicas em uma forma espacial simplesmente conexa $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{S}^3$. Na sequência, considerando agora outro caso particular das métricas V-estáticas, as conhecidas triplas estáticas positivas, veremos que tal fórmula tipo Bochner quando restrita a estes ambientes fornecem resultados de rigidez, que são os análogos aos que foram obtidos para o caso de métricas críticas de Miao-Tam. Destacamos que as fórmulas tipo Bochner juntamente com suas aplicações deram origem ao artigo intitulado *Remarks on critical metrics of the scalar curvature and volume functionals on compact manifolds with boundary* escrito pelo autor também em parceria com Ribeiro Jr. (2017b). No que segue (M^n, g) denotará uma variedade Riemanniana de dimensão n com métrica g e conexão de Levi-Civita ∇. O espaço das funções diferenciáveis (ou de classe $\mathcal{C}^\infty$) sobre M será denotado por $\mathcal{C}^\infty(M)$. O espaço dos campos diferenciáveis sobre M será denotado por $\mathfrak{X}(M)$.

3.1 Fórmula tipo Bochner para métricas V-estáticas

Primeiramente, recordemos a definição de métricas V-estáticas vista no Capítulo 2 Seção 2.3.

Definição 3.1 *Uma* ***métrica V-estática*** *é uma tripla $(M^n,\, g,\, f)$, onde $(M^n,\, g)$ é uma variedade Riemanniana e f é uma função suave em M que satisfaz à seguinte equação:*

$$-(\Delta f)g + Hess f - fRic = \kappa g, \tag{38}$$

onde κ é uma constante.

Agora, enunciaremos um lema para métricas V-estáticas que será bastante útil para nossos propósitos, vale ressaltar que tal lema foi obtido inicialmente no contexto de métricas críticas do funcional volume por Barros, Diógenes e Ribeiro Jr. (2015), onde os autores estudam tais métricas em dimensão 4 sob à condição Bach-flat (veja Lema 1 no trabalho de Barros, Diógenes e Ribeiro Jr. (2015)).

Lema 3.1 *Seja (M^n, g, f, κ) uma métrica V-estática. Então temos:*

$$f(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) = R_{ijkl}\nabla_l f + \frac{R}{n-1}(\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}) - (\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}).$$

Demonstração: Iniciamos usando (21) para inferir

$$(\nabla_i f)R_{jk} + f\nabla_i R_{jk} = \nabla_i\nabla_j\nabla_k f - (\nabla_i \Delta f)g_{jk}. \tag{39}$$

Além disso, como M^n tem curvatura escalar constante obtemos de (22) que

$$\nabla_i \Delta f = -\frac{R}{n-1}\nabla_i f,$$

de modo que, substituido em (39), implica

$$f\nabla_i R_{jk} = -(\nabla_i f)R_{jk} + \nabla_i\nabla_j\nabla_k f + \frac{R}{n-1}\nabla_i f g_{jk}. \tag{40}$$

Para finalizar, basta aplicarmos a identidade de Ricci para chegarmos em

$$f(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) = R_{ijkl}\nabla_l f + \frac{R}{n-1}(\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}) - (\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}),$$

como queríamos provar. □

Observe que, substituindo a equação (12) no Lema 3.1 obtemos a seguinte identidade

$$fC_{ijk} = T_{ijk} + W_{ijkl}\nabla_l f, \tag{41}$$

onde T_{ijk}, é o tensor auxiliar definido como

$$\begin{aligned} T_{ijk} &= \frac{n-1}{n-2}(R_{ik}\nabla_j f - R_{jk}\nabla_i f) + \frac{1}{n-2}(g_{ik}R_{js}\nabla_s f - g_{jk}R_{is}\nabla_s f) \\ &\quad - \frac{R}{n-2}(g_{ik}\nabla_j f - g_{jk}\nabla_i f). \end{aligned}$$

Prosseguindo, obteremos uma fórmula divergente para uma variedade Riemanniana com curvatura escalar constante.

Lema 3.2 *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana de dimensão* n *com curvatura escalar constante. Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função suave definida sobre* M. *Então*

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(f\nabla|Ric|^2) &= -f|C_{ijk}|^2 + 2f|\nabla Ric|^2 + \langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle + \frac{2n}{n-2}fR_{ij}R_{ik}R_{jk} \\
&\quad -\frac{4n-2}{(n-1)(n-2)}fR|\mathring{Ric}|^2 - \frac{2}{n(n-2)}fR^3 + 2\nabla_i(fC_{ijk}R_{jk}) \\
&\quad +2C_{ijk}\nabla_j fR_{ik} - 2fW_{ijkl}R_{ik}R_{jl}.
\end{aligned}$$

Demonstração: Como M^n tem curvatura escalar constante, temos

$$\begin{aligned}
f|C_{ijk}|^2 &= f|\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}|^2 \\
&= 2f|\nabla Ric|^2 - 2f\nabla_i R_{jk}\nabla_j R_{ik}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, um cálculo direto nos fornece

$$\begin{aligned}
\nabla_j(f\nabla_i R_{jk}R_{ik}) &= \nabla_j f\nabla_i R_{jk}R_{ik} + f\nabla_j\nabla_i R_{jk}R_{ik} \\
&\quad +f\nabla_i R_{jk}\nabla_j R_{ik},
\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
f|C_{ijk}|^2 &= 2f|\nabla Ric|^2 - 2\nabla_j(f\nabla_i R_{jk}R_{ik}) + 2\nabla_j f\nabla_i R_{jk}R_{ik} \\
&\quad +2f\nabla_j\nabla_i R_{jk}R_{ik}.
\end{aligned}$$

Em seguida, pelas fórmulas de comutatividade para a segunda derivada covariante da curvatura de Ricci (veja Eq. (11)) juntamente com (13), deduzimos que

$$\begin{aligned}
f|C_{ijk}|^2 &= 2f|\nabla Ric|^2 + 2\nabla_j f(C_{ijk} + \nabla_j R_{ik})R_{ik} \\
&\quad +2f(R_{ij}R_{ik}R_{jl} - R_{ijkl}R_{ik}R_{jl}) - 2\nabla_j(f\nabla_i R_{jk}R_{ik}) \\
&= 2f|\nabla Ric|^2 + 2C_{ijk}\nabla_j fR_{ik} + \langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle \\
&\quad +2f(R_{ij}R_{ik}R_{jk} - R_{ijkl}R_{ik}R_{jl}) - 2\nabla_j(f\nabla_i R_{jk}R_{ik}). \qquad (42)
\end{aligned}$$

Agora, substituímos (12) na expressão (42) para obter

$$\begin{aligned}
f|C_{ijk}|^2 &= 2f|\nabla Ric|^2 + 2C_{ijk}\nabla_j fR_{ik} + \langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle + 2fR_{ij}R_{ik}R_{jk} \\
&\quad -2fW_{ijkl}R_{ik}R_{jl} - \frac{2f}{n-2}(2R|Ric|^2 - 2R_{ij}R_{ik}R_{jk}) \\
&\quad +\frac{2Rf}{(n-1)(n-2)}(R^2 - |Ric|^2) - 2\nabla_j(f\nabla_i R_{jk}R_{ik}),
\end{aligned}$$

que podemos reescrever como

$$\begin{aligned} f|C_{ijk}|^2 &= 2f|\nabla Ric|^2 + 2C_{ijk}\nabla_j f R_{ik} + \langle \nabla f, \nabla |Ric|^2\rangle + \frac{2n}{n-2} f R_{ij}R_{ik}R_{jk} \\ &\quad -2fW_{ijkl}R_{ik}R_{jl} - \frac{(4n-2)}{(n-1)(n-2)} fR|Ric|^2 + \frac{2}{(n-1)(n-2)} fR^3 \\ &\quad -2\nabla_j(f\nabla_i R_{jk}R_{ik}). \end{aligned}$$

Finalmente, não é difícil verificar que

$$\begin{aligned} f|C_{ijk}|^2 &= 2f|\nabla Ric|^2 + 2C_{ijk}\nabla_j f R_{ik} + \langle \nabla f, \nabla |Ric|^2\rangle + \frac{2n}{n-2} f R_{ij}R_{ik}R_{jk} \\ &\quad -2fW_{ijkl}R_{ik}R_{jl} - \frac{(4n-2)}{(n-1)(n-2)} fR|\mathring{Ric}|^2 - \frac{2}{n(n-2)} fR^3 \\ &\quad -2\nabla_j(f\nabla_i R_{jk}R_{ik}) \\ &= 2f|\nabla Ric|^2 + 2C_{ijk}\nabla_j f R_{ik} + \langle \nabla f, \nabla |Ric|^2\rangle + \frac{2n}{n-2} f R_{ij}R_{ik}R_{jk} \\ &\quad -2fW_{ijkl}R_{ik}R_{jl} - \frac{(4n-2)}{(n-1)(n-2)} fR|\mathring{Ric}|^2 - \frac{2}{n(n-2)} fR^3 \\ &\quad +2\nabla_i(fC_{ijk}R_{jk}) - \operatorname{div}(f\nabla|Ric|^2), \end{aligned}$$

que prova o resultado desejado.

□

Agora passamos a enunciar e provar a primeira fórmula tipo Bochner que nos referimos no início do capítulo, de fato, tal fórmula é a versão divergente da fórmula integral obtida no artigo intitulado *Critical metrics of the volume functional on manifolds with boundary* escrito pelo autor em parceria com Ribeiro Jr..

Teorema 3.1 *Seja (M^n, g, f, κ) uma métrica V-estática. Então*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\operatorname{div}(f\nabla|Ric|^2) &= -f|C_{ijk}|^2 + f|\nabla Ric|^2 + \langle \nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle - \frac{n\kappa}{n-1}|\mathring{Ric}|^2 \\ &\quad +2\nabla_i(fC_{ijk}R_{jk}). \end{aligned}$$

Demonstração: Pelo Lema 3.1 deduzimos

$$\begin{aligned} \nabla_i(\nabla_j f R_{ik}R_{jk} + R_{ijkl}\nabla_l f R_{jk}) &= \nabla_i(\nabla_j f R_{ik}R_{jk}) \\ &\quad +\nabla_i\Big[fC_{ijk}R_{jk} - \frac{R}{n-1}(\nabla_i f R - \nabla_j f R_{ji}) \\ &\quad +(|Ric|^2\nabla_i f - \nabla_j R_{ik}R_{jk})\Big]. \end{aligned}$$

Após organizarmos os termos da expressão acima chegamos a

$$\begin{aligned}\nabla_i(\nabla_j f R_{ik}R_{jk} + R_{ijkl}\nabla_l f R_{jk}) &= \nabla_i(fC_{ijk}R_{jk})\\ &\quad +\nabla_i\Big[-\frac{R^2}{n-1}\nabla_i f + \frac{R}{n-1}R_{ji}\nabla_j f + |Ric|^2\nabla_i f\Big]\\ &= \nabla_i(fC_{ijk}R_{jk}) - \frac{R^2}{n-1}\Delta f + \frac{R}{n-1}\nabla_i\nabla_j f R_{ji}\\ &\quad +|Ric|^2\Delta f + \langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle.\end{aligned}$$

Portanto, usando (21) e (22) obtemos

$$\begin{aligned}\nabla_i(\nabla_j f R_{ik}R_{jk} + R_{ijkl}\nabla_l f R_{jk}) &= \nabla_i(fC_{ijk}R_{jk}) + \langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle - \frac{R^2}{n-1}\Delta f\\ &\quad +\frac{R}{n-1}(fR_{ij} + (\Delta f + \kappa)g_{ij})R_{ji} + \Delta f|Ric|^2\\ &= \nabla_i(fC_{ijk}R_{jk}) + \langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle\\ &\quad +\frac{R}{n-1}f|Ric|^2 + \frac{R^2\kappa}{n-1} + \frac{-Rf - n\kappa}{n-1}|Ric|^2\\ &= \nabla_i(fC_{ijk}R_{jk}) + \langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle - \frac{n\kappa}{n-1}|\mathring{Ric}|^2.\end{aligned} \tag{43}$$

Por outro lado, não é difícil verificar que

$$\begin{aligned}\nabla_i(\nabla_j f R_{ik}R_{jk} + R_{ijkl}\nabla_l f R_{jk}) &= \nabla_i\nabla_j f R_{ik}R_{jk} + \nabla_j f R_{ik}\nabla_i R_{jk} + \nabla_i R_{ijkl}\nabla_l f R_{jk}\\ &\quad +R_{ijkl}\nabla_i\nabla_l f R_{jk} + R_{ijkl}\nabla_l f\nabla_i R_{jk}.\end{aligned}$$

Daí, segue do Lema 3.1 e Eq. (21), que a seguinte igualdade é satisfeita

$$\begin{aligned}\nabla_i(\nabla_j f R_{ik}R_{jk} + R_{ijkl}\nabla_l f R_{jk}) &= f(R_{ij}R_{ik}R_{jk} - R_{ijkl}R_{ik}R_{jl}) + C_{ijk}\nabla_j f R_{ik}\\ &\quad +fC_{ijk}\nabla_i R_{jk} + \frac{1}{2}\langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle.\end{aligned}$$

Relembrando que o tensor de Cotton é anti-simétrico nos dois primeiros índices e usando a Equação (42), deduzimos

$$\begin{aligned}\nabla_i(\nabla_j f R_{ik}R_{jk} + R_{ijkl}\nabla_l f R_{jk}) &= f|C_{ijk}|^2 - f|\nabla Ric|^2 + \nabla_j(f\nabla_i R_{jk}R_{ik})\\ &= f|C_{ijk}|^2 - f|\nabla Ric|^2 - \nabla_i(fC_{ijk}R_{jk})\\ &\quad +\frac{1}{2}\mathrm{div}(f\nabla|Ric|^2).\end{aligned} \tag{44}$$

Portanto, comparando (43) e (44) obtemos o resultado desejado. $\square$

Com essas informações em mente, podemos enunciar e provar nossa segunda fórmula tipo Bochner, que juntamente com suas aplicações, deram origem ao artigo intitulado *Remarks on critical metrics of the scalar curvature and volume functionals on compact manifolds with boundary* escrito pelo autor em parceria com Ribeiro Jr. (veja Baltazar e Ribeiro Jr.(2017b)). É importante destacar que esta fórmula generaliza o resultado de Ambrozio (2015) para métricas estáticas, assim como o resultado de Batista, Diógenes, Ranieri e Ribeiro Jr. (2017) para métricas críticas do funcional volume. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.2 *Seja (M^n, g, f, κ) uma métrica V-estática. Então*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathrm{div}(f\nabla|Ric|^2) &= \Big(\frac{n-2}{n-1}|C_{ijk}|^2 + |\nabla Ric|^2\Big)f + \frac{n\kappa}{n-1}|\mathring{Ric}|^2\\ &+\Big(\frac{2}{n-1}R|\mathring{Ric}|^2 + \frac{2n}{n-2}tr(\mathring{Ric}^3)\Big)f\\ &-\frac{n-2}{n-1}W_{ijkl}\nabla_l f C_{ijk} - 2fW_{ijkl}R_{ik}R_{jl},\end{aligned}$$

onde C denota o tensor de Cotton, W o tensor de Weyl e $\mathring{Ric}$ representa o tensor de Ricci sem traço.

Demonstração: Primeiramente, usamos a Equação (41) para deduzir

$$f|C_{ijk}|^2 = \frac{2(n-1)}{n-2}R_{ik}\nabla_j f C_{ijk} + W_{ijkl}\nabla_l f C_{ijk}.$$

Em seguida, substituindo esta expressão no Lema 3.2, obtemos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(f\nabla|Ric|^2) &= 2f|\nabla Ric|^2 + \langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle + \frac{2n}{n-2}fR_{ij}R_{ik}R_{jk} - \frac{1}{n-1}f|C_{ijk}|^2\\ &-\frac{4n-2}{(n-1)(n-2)}fR|\mathring{Ric}|^2 - \frac{2}{n(n-2)}fR^3 + 2\nabla_i(fC_{ijk}R_{jk})\\ &-\frac{n-2}{n-1}W_{ijkl}\nabla_l f C_{ijk} - 2fW_{ijkl}R_{ik}R_{jl}. \end{aligned}\tag{45}$$

Agora, tomando a diferença entre as expressões obtidas em (45) e Teorema 3.1, temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathrm{div}(f\nabla|Ric|^2) &= \Big(\frac{n-2}{n-1}|C_{ijk}|^2 + |\nabla Ric|^2\Big)f + \frac{n\kappa}{n-1}|\mathring{Ric}|^2\\ &+\frac{2n}{n-2}fR_{ij}R_{ik}R_{jk} - \frac{4n-2}{(n-1)(n-2)}fR|\mathring{Ric}|^2 - \frac{2}{n(n-2)}fR^3\\ &-\frac{n-2}{n-1}W_{ijkl}\nabla_l f C_{ijk} - 2fW_{ijkl}R_{ik}R_{jl}. \end{aligned}\tag{46}$$

Antes de prosseguir, lembremos que

$$fR_{ij}R_{ik}R_{jk} = f\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ik} + \frac{3}{n}fR|\mathring{Ric}|^2 + \frac{fR^3}{n^2}.$$

Consequentemente, substituindo esta última expressão em (46), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathrm{div}(f\nabla|Ric|^2) \;\; = \;\; & \Big(\frac{n-2}{n-1}|C_{ijk}|^2 + |\nabla Ric|^2\Big)f + \frac{n\kappa}{n-1}|\mathring{Ric}|^2 \\ & + \Big(\frac{2}{n-1}R|\mathring{Ric}|^2 + \frac{2n}{n-2}tr(\mathring{Ric}^3)\Big)f \\ & - \frac{n-2}{n-1}W_{ijkl}\nabla_l f C_{ijk} - 2fW_{ijkl}R_{ik}R_{jl},\end{aligned}$$

como desejado. □

As próximas seções deste capítulo destina-se as aplicações das fórmulas obtidas nos Teoremas 3.1 e 3.2 para casos especiais das métricas V-estáticas, a saber, as métricas críticas de Miao-Tam e as conhecidas triplas estáticas positivas. Antes de apresentarmos tais consequências, faremos uma abordagem sobre tais estruturas descrevendo algumas propriedades fundamentais. Além disso, forneceremos alguns exemplos não triviais os quais servem de modelos para problemas de classificação de tais ambientes.

3.2 Métricas críticas do funcional volume

O estudo das métricas críticas do funcional volume foi iniciado por Miao e Tam (2009, 2011). Primeiramente eles estudaram o problema variacional do funcional volume e posteriormente a equação de Euler-Lagrange associado ao problema variacional do funcional volume. Por simplicidade, seguindo a notação usada por Barros, Diógenes e Ribeiro Jr. (2015), estas métricas recebem a seguinte definição.

Definição 3.2 *Uma **métrica crítica de Miao-Tam** é uma tripla $(M^n,\, g,\, f)$, onde $(M^n,\, g)$ é uma variedade Riemanniana compacta, conexa e com bordo suave ∂M e f é uma função suave em M tal que $f^{-1}(0) = \partial M$ e satisfaz à seguinte equação:*

$$-(\Delta f)g + Hess f - fRic = g. \tag{47}$$

Apresentaremos agora alguns exemplos construidos por Miao e Tam (2009), para mais detalhes sobre estes exemplos veja também o trabalho de tese de Diógenes (2015). Iniciamos com a bola geodésica do espaço Euclidiano com métrica canônica.

Exemplo 3.1 *(Bola geodésica em $\mathbb{R}^n$) Considere $M^n \subset \mathbb{R}^n$ uma bola geodésica centrada na origem de raio R_0 e a função f definida por $f(x) = \frac{R_0^2}{2(n-1)} - \frac{|x|^2}{2(n-1)}$. Consideremos em*

$\mathbb{R}^n$ a métrica canônica g e em M a métrica induzida. Daí, não é difícil verificar que

$$Hessf = -\frac{1}{n-1}g.$$

Consequentemente,

$$-(\Delta f)g + Hessf - fRic = \frac{n}{n-1}g - \frac{1}{n-1}g = g,$$

e além disso, $f^{-1}(0) = \partial M$. Logo $(M^n,\, g,\, f)$ é uma métrica crítica de Miao-Tam.

Em seguida descreveremos outro exemplo importante de métricas críticas, a saber, a bola geodésica do espaço hiperbólico.

Exemplo 3.2 *(Bola geodésica em $\mathbb{H}^n$) Considere a variedade $\mathbb{L}^{n+1} = (\mathbb{R}^{n+1},\, ds^2)$, onde $ds^2 = dx_1^2 + ... + dx_n^2 - dt^2$. Considere $\mathbb{H}^n = \{(x_1, ..., x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1};\, \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - t^2 = -1, t \geq 1\}$ mergulhado em $\mathbb{L}^{n+1}$ e seja g a métrica induzida. Agora fixe $p = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{H}^n$ e considere $M^n \subset \mathbb{H}^n$ uma bola geodésica centrada em p de raio R_0 e a função f definida por $f(x_1, ..., x_n, t) = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{\cosh r}{\cosh R_0}\right)$, onde r é a distância geodésica de $(x_1, ..., x_n, t)$ ao ponto p. Daí,*

$$Hessf = -\frac{coshr}{(n-1)\cosh R_0}g,$$

de modo que a Eq. (47) é claramente satisfeita e vale $f^{-1}(0) = \partial M$. Logo, $(M^n,\, g,\, f)$ é uma métrica crítica de Miao-Tam.

Por fim, de modo análogo ao caso anterior, temos que a bola geodésica da esfera também é uma métrica crítica de Miao-Tam. Mais precisamente, temos o seguinte exemplo.

Exemplo 3.3 *(Bola geodésica em $\mathbb{S}^n$) Considere $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $p = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{S}^n$. Sejam $M^n \subset \mathbb{S}^n$ uma bola geodésica centrada em p de raio $R_0 < \frac{\pi}{2}$ e f a função definida por $f(x_1, ..., x_n, t) = \frac{1}{n-1}\left(\frac{\cos r}{\cos R_0} - 1\right)$, onde r é a distância geodésica de $(x_1, ..., x_n, t)$ ao ponto p. Daí, obtemos*

$$Hessf = -\frac{cosr}{(n-1)\cos R_0}g$$

e de maneira análoga aos exemplos anteriores vemos que a Equação (47) é satisfeita. Desde que vale $f^{-1}(0) = \partial M$, segue que $(M^n,\, g,\, f)$ é uma métrica crítica de Miao-Tam.

Prosseguindo, conforme foi visto na introdução, variedades Einstein possuem tensor de Ricci paralelo, entretanto a recíproca desse fato não é verdadeira. Assim, com o objetivo de entender melhor a geometria de tais estruturas sobre a condição Ricci paralelo, usaremos o Teorema 3.1 para obter uma fórmula integral para métricas críticas de Miao-

Tam. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.3 *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam com (M^n, g) compacta, orientada, conexa e bordo ∂M suave. Então temos:*

$$\int_M f|divRm|^2 dM_g + \frac{n}{n-1}\int_M |Ric - \frac{R}{n}g|^2 dM_g + \int_M f(\Delta|Ric|^2 - |\nabla Ric|^2) dM_g = 0.$$

Demonstração: Tome a integral da fórmula obtida no Teorema 3.1 para chegar a

$$\int_M |C_{ijk}|^2 dM + \frac{n}{n-1}\int_M |\mathring{Ric}|^2 dM = \int_M f|\nabla Ric|^2 dM + \int_M \langle \nabla f, \nabla |Ric| \rangle dM, \qquad (48)$$

onde foi usado o teorema da divergência junto com o fato que $f|_{\partial M} = 0$.

Note agora que

$$\begin{aligned} \int_M \langle \nabla f, \nabla |Ric| \rangle dM &= \int_M \operatorname{div}(f\nabla |Ric|) dM - \int_M f\Delta |Ric| dM \\ &= -\int_M f\Delta |Ric| dM. \end{aligned}$$

Daí, substituindo esta última identidade em (48) e lembrando que, no caso de curvatura escalar constante, o tensor de Cotton coincide com o divergente do tensor de Riemann (ver Eq. (10)), deduzimos a fórmula desejada.

□

Como consequência, obtemos a seguinte extensão para o caso Ricci paralelo do Teorema 1.1 do trabalho de Miao e Tam (2011), onde os autores classificam métricas críticas do funcional volume que são Einstein.

Corolário 3.1 *Seja $(M^n,\ g,\ f)$ uma métrica crítica de Miao-Tam com tensor de Ricci paralelo, onde M é uma variedade compacta, orientada, conexa e com bordo ∂M suave. Então, $(M^n,\ g)$ é isométrica a uma bola geodésica em uma forma espacial simplesmente conexa $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$, ou $\mathbb{S}^n$.*

Demonstração: Inicialmente note que, pela expressão (10) juntamente com a nossa hipótese sobre o tensor de Ricci, vemos que a variedade Riemanniana tem curvatura harmônica. Além disso, pela *desigualdade de Kato* temos

$$|\nabla |Ric|| \leq |\nabla Ric|.$$

Assim, usamos mais uma vez que M^n tem tensor de Ricci paralelo, para concluir que $|Ric|$ é constante sobre M^n. Agora, basta usar o Teorema 3.3 para deduzir

$$\frac{n}{n-1}\int_M |Ric - \frac{R}{n}g|^2 dM_g = 0$$

e isto implica que M^n é Einstein. Portanto, basta usarmos o Teorema 1.1 (veja também Teorema 1.1 de Miao e Tam (2011)) para concluir que $(M^n,\, g)$ é isométrico a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$. $\square$

É importante destacar que toda variedade Einstein tem tensor de Weyl harmônico (cf. Derdzinski 1982), além disso, sabemos que não existe relação direta entre a condição Bach-flat, considerada por Barros, Diógenes e Ribeiro Jr. 2015, e a condição da variedade ter tensor de Weyl harmônico. Portanto, é natural perguntar quais implicações geométricas existem se assumirmos a harmonicidade do tensor de Weyl sobre métricas críticas de Miao-Tam. Note que, usando mais uma vez o Teorema 3.3 juntamente com Teorema 1.1, não é difícil verificar que, se uma métrica crítica de Miao-Tam sobre uma variedade compacta, orientada, conexa, com tensor de Weyl harmônico e bordo suave satisfaz

$$\int_M f\Delta|Ric|^2 dM_g \geq \int_M f|\nabla Ric|^2 dM_g. \tag{49}$$

Então $(M^n,\, g)$ é isométrica a uma bola geodésica em uma forma espacial simplesmente conexa $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$, or $\mathbb{S}^n$. Contudo, é interessante provar que a condição (49) pode ser removida.

Observação 3.1 *Recentemente, Kim e Shin (2016) mostraram que, de fato, a desigualdade (49) pode ser removida. Mais precisamente, eles provaram que, se uma métrica crítica de Miao-Tam sobre uma variedade de dimensão 4, compacta, simplesmente conexa e com bordo isométrico a esfera padrão $\mathbb{S}^3$ satisfaz a condição* $\mathrm{div}W = 0$, *então tal variedade deve ser isométrica à bola geodésica em uma forma espacial simplesmente conexa* $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{H}^4$ *ou* $\mathbb{S}^4$ *(para mais detalhes veja Teorema 10.3 no referido artigo).*

Continuando nosso estudo, relembremos que uma variedade Riemanniana $(M^n,\, g)$ tem *curvatura de Weyl radial nula* com respeito a uma função potencial f sobre M se

$$W(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,,\nabla f) = 0. \tag{50}$$

Recordemos que a condição sobre a variedade Riemanniana ter curvatura de Weyl radial nula vem sendo estudada por muitos autores em diferentes tipos de estruturas. Destacamos, por exemplo, que Catino (2012) provou que uma variedade quasi-Einstein generalizada satisfazendo (50) deve ser localmente um produto warped, além disso essa hipótese não pode ser removida conforme podemos constatar na Observação 1.2 do referido artigo.

Aqui, usamos esta condição com objetivo de provar a seguinte consequência da fórmula tipo Bochner obtida no Teorema 3.2.

Corolário 3.2 *Seja* (M^n, g, f), *uma métrica crítica de Miao-Tam sobre uma variedade compacta, conexa, orientada, com curvatura escalar positiva e função potencial não-negativa* f. *Suponha que:*

- M^n *tem curvatura de Weyl radial nula e*
- $|\mathring{Ric}|^2 \leq \frac{R^2}{n(n-1)}$.

Então, M^n *é isométrica a uma bola geodésica em* $\mathbb{S}^n$.

Demonstração: O caso $n = 3$ foi provado por Batista et al. em (2017), sendo assim, no que segue estaremos considerando o caso $n \geq 4$. Primeiramente, recordemos que o tensor de Cotton e o divergente do tensor de Weyl estão relacionados como segue

$$C_{ijk} = -\frac{n-2}{n-3}\nabla_l W_{ijkl}. \tag{51}$$

Note também que a condição sobre a curvatura de Weyl, a saber, $W_{ijkl}\nabla_l f = 0$, juntamente com (51) e (47) fornece a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_i(W_{ijkl}\nabla_k f R_{jl}) \\ &= \nabla_i W_{ijkl}\nabla_k f R_{jl} + W_{ijkl}\nabla_i\nabla_k f R_{jl} \\ &= \frac{n-3}{n-2}C_{klj}\nabla_k f R_{jl} + f W_{ijkl}R_{ik}R_{jl}. \end{aligned}$$

Daí, usando que o tensor de Cotton é anti-simétrico nos dois primeiros índices, obtemos

$$f W_{ijkl}R_{ik}R_{jl} = \frac{n-3}{2(n-2)}C_{ijk}(\nabla_j f R_{ik} - \nabla_i f R_{ik}),$$

que pode ser reescrito como segue

$$f W_{ijkl}R_{ik}R_{jl} = \frac{n-3}{2(n-1)}C_{ijk}T_{ijk}.$$

Consequentemente, segue de (41) que

$$f W_{ijkl}R_{ik}R_{jl} = \frac{n-3}{2(n-1)}f|C_{ijk}|^2. \tag{52}$$

Agora, substituindo (52) no Teorema 3.2 chegamos a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathrm{div}(f\nabla|Ric|^2) &= \Big(\frac{n-2}{n-1}|C_{ijk}|^2+|\nabla Ric|^2\Big)f+\frac{n}{n-1}|\mathring{Ric}|^2\\ &+\Big(\frac{2}{n-1}R|\mathring{Ric}|^2+\frac{2n}{n-2}tr(\mathring{Ric}^3)\Big)f\\ &-\frac{n-3}{n-1}f|C_{ijk}|^2,\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathrm{div}(f\nabla|Ric|^2) &= \Big(\frac{1}{n-1}|C_{ijk}|^2+|\nabla Ric|^2\Big)f+\frac{n}{n-1}|\mathring{Ric}|^2\\ &+\Big(\frac{2}{n-1}R|\mathring{Ric}|^2+\frac{2n}{n-2}tr(\mathring{Ric}^3)\Big)f.\end{aligned}\tag{53}$$

Antes de prosseguir, vale relembrar que o clássico lema de Okumura (cf. Lema 2.1 do trabalho de Okumura 1974) assegura a seguinte desigualdade

$$tr(\mathring{Ric}^3)\geq-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|\mathring{Ric}|^3.\tag{54}$$

Portanto, integrando a Eq. (53) sobre M e usando (54), podemos deduzir que

$$\begin{aligned}0 &\geq \int_M\Big(\frac{1}{n-1}|C_{ijk}|^2+|\nabla Ric|^2\Big)fdM_g+\frac{n}{n-1}\int_M|\mathring{Ric}|^2dM_g\\ &+\int_M\frac{2n}{\sqrt{n(n-1)}}|\mathring{Ric}|^2\Big(\frac{R}{\sqrt{n(n-1)}}-|\mathring{Ric}|\Big)fdM_g.\end{aligned}\tag{55}$$

Para finalizar, como cada integral acima é não-negativa, concluímos que $|\mathring{Ric}|^2=0$ e isto força M^n ser uma variedade Einstein. Então, basta aplicarmos o Teorema 1.1 do trabalho de Miao e Tam (2011) para concluir que (M^n,g) é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{S}^n$ concluindo a prova do Corolário 3.2. □

Conforme foi visto na introdução, o lema de Berger afirma que qualquer 2-tensor simétrico T sobre uma variedade Riemanniana $(M^n,\ g)$ com curvatura seccional não-negativa deve satisfazer

$$(\nabla_i\nabla_jT_{ik}-\nabla_j\nabla_iT_{ik})T_{jk}\geq 0.\tag{56}$$

Em particular, para o tensor de Ricci devemos obter imediatamente que

$$R_{ij}R_{jk}R_{ik}-R_{ijkl}R_{ik}R_{jl}\geq 0.\tag{57}$$

Com essas informações em mente, juntamente com Teorema 3.2 e a identidade obtida no Lema 2.1, podemos deduzir um resultado de rigidez para métricas críticas de Miao-Tam com curvatura seccional não-negativa. Tal resultado é uma extensão do

Teorema 1.4 apresentado na introdução, para dimensão arbitrária. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.1 *Seja* $(M^n,\, g,\, f)$ *uma métrica crítica de Miao-Tam sobre uma variedade compacta, orientada, conexa, com bordo suave* ∂M *e curvatura seccional não-negativa. Além disso, suponha sua função potencial* f *seja não-negativa. Se* M^n *tem curvatura de Weyl radial nula, então* M^n *é isométrica a uma bola geodésica em uma forma espacial simplesmente conexa* $\mathbb{R}^n$ *ou* $\mathbb{S}^n$.

Demonstração: Primeiramente, multiplicamos por f a expressão obtida no Lema 2.1 e usamos o Teorema 3.2 para obter a seguinte identidade

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathrm{div}(f\nabla|Ric|^2) &= \Big(\frac{n-2}{n-1}|C_{ijk}|^2+|\nabla Ric|^2\Big)f+\frac{n}{n-1}|\mathring{Ric}|^2\\ &+2\Big(R_{ij}R_{jk}R_{ik}-R_{ijkl}R_{jl}R_{ik}\Big)f\\ &-\frac{n-2}{n-1}W_{ijkl}\nabla_l f C_{ijk}.\end{aligned}$$

Como M^n tem curvatura de Weyl radial nula, segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathrm{div}(f\nabla|Ric|^2) &= \Big(\frac{n-2}{n-1}|C_{ijk}|^2+|\nabla Ric|^2\Big)f+\frac{n}{n-1}|\mathring{Ric}|^2\\ &+2\Big(R_{ij}R_{jk}R_{ik}-R_{ijkl}R_{jl}R_{ik}\Big)f.\end{aligned}$$

Agora, integrando a expressão acima sobre M^n e lembrando que vale a desigualdade em (57), deduzimos que $\mathring{Ric}=0$, o que implica, (M^n,g) ser Einstein. Portanto, aplicando o Teorema 1.1 concluímos que (M^n,g) é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{S}^n$. Isto finaliza a prova da proposição. □

Recordemos agora, que em dimensão três o tensor de Weyl se anula completamente, desta forma é imediato verificar que a proposição acima nos fornece o seguinte resultado.

Teorema 3.4 *Seja* $(M^3,\, g,\, f)$ *uma métrica crítica de Miao-Tam sobre uma variedade de dimensão três, compacta, conexa, orientada, com bordo suave* ∂M *e curvatura seccional não-negativa, além disso, assuma que* f *é não-negativa. Então,* M^3 *é isométrica à bola geodésica em uma forma espacial simplemente conexa* $\mathbb{R}^3$ *ou* $\mathbb{S}^3$.

Finalizaremos esta seção com uma fórmula integral para métricas críticas de Miao-Tam (veja Lema 3.3 abaixo), que juntamente com a classificação de Kim e Shin para métricas críticas com Weyl harmônico (veja Teorema 10.3 em Kim-Shin (2016)) permitirá demosntrar a rigidez de tais métricas sobre a hipótese de nulidade de segunda ordem no tensor de Weyl. De maneira mais precisa, inspirado no trabalho de Catino, Mastrolia e Monticelli (2016), estudaremos as métricas críticas de Miao-Tam sob à condição que o tensor de Weyl tenha divergência de segunda ordem nula, i.e.,

$$\mathrm{div}^2 W = \nabla_i \nabla_l W_{ijkl} = 0.$$

Primeiramente, recordemos o resultado de Kim e Shin mencionado anteriormente.

Teorema 3.5 (Kim-Shin, 2016) *Seja $(M^4,\, g,\, f)$ uma métrica crítica de Miao-Tam sobre uma variedade de dimensão quatro, compacta, simplesmente conexa, com tensor de Weyl harmônico e bordo isométrico à esfera $\mathbb{S}^3$. Então, (M^4, g) é isométrica a bola geodésica em uma forma espacial simplemente conexa $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{H}^4$ ou $\mathbb{S}^4$.*

Com essas informações em mente, deduziremos nossa fórmula integral para uma métrica crítica de Miao-Tam arbitrária. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Lema 3.3 *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam. Então temos:*

$$\int_M f^2|C|^2 dM_g + \int_M f^2 \mathrm{div}^3 C dM_g + 2\int_M \mathrm{div} C(\nabla f, \nabla f) dM_g = 0.$$

Demonstração: Como já sabemos que M tem curvatura escalar constante, usamos (13) para deduzir

$$\begin{aligned} \int_M f^2|C|^2 dM_g &= \int_M f^2(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) C_{jkl} dM_g \\ &= 2\int_M f^2 \nabla_i R_{jk} C_{ijk} dM_g, \end{aligned}$$

que pode ser reescrito como

$$\int_M f^2|C|^2 dM_g = -2\int_M \nabla_i f^2 R_{jk} C_{ijk} dM_g - 2\int_M f^2 R_{jk} \nabla_i C_{ijk} dM_g, \tag{58}$$

onde aplicamos o teorema de Stokes juntamente com o fato que f se anula sobre o bordo.

Agora, como o tensor de Cotton tem traço nulo em qualquer dois índices, pela equação fundamental (see Eq. (47)), temos

$$\int_M f^2|C|^2 dM_g = -4\int_M \nabla_i f \nabla_j \nabla_k f C_{ijk} dM_g - 2\int_M f \nabla_j \nabla_k f \nabla_i C_{ijk} dM_g.$$

Usando novamente o teorema de Stokes, vemos que

$$\begin{aligned}\int_M f^2|C|^2 dM_g &= -4\int_{\partial M} C_{ijk}\nabla_i f\nabla_k f\nu_j dM_g + 4\int_M \nabla_j\nabla_i f\nabla_k f C_{ijk} dM_g\\ &\quad -2\int_M \mathrm{div}C(\nabla f,\nabla f)dM_g + \int_M \nabla_k f^2\nabla_j\nabla_i C_{ijk} dM_g, \qquad (59)\end{aligned}$$

onde ν representa o campo normal unitário ao longo de ∂M. Daí, como a função f tem sinal (lembre que $f^{-1}(0)=\partial M$) então deduzimos que o campo normal unitário sobre ∂M satisfaz $\nu = \mp\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$, o que implica

$$C(\nabla f,\nu,\nabla f)=0.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\int_M f^2|C|^2 dM_g + 2\int_M \mathrm{div}C(\nabla f,\nabla f)dM_g &= \int_M \nabla_k f^2\nabla_j\nabla_i C_{ijk} dM_g\\ &= -\int_M f^2\mathrm{div}^3 C dM_g,\end{aligned}$$

e isto prova a fórmula desejada. □

Prosseguindo, supondo que M^4 satisfaz $\mathrm{div}^2 W=0$, podemos usar o Lema 3.3 juntamente com (14) para deduzir que a variedade possui tensor de Weyl harmônico. Então, basta aplicar o Teorema 3.5 para concluir que M^4 é isométrica a bola geodésica em uma forma espacial simplemente conexa $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{H}^4$ ou $\mathbb{S}^4$. Portanto, temos o seguinte resultado de rigidez.

Teorema 3.6 *Seja* $(M^4,\ g,\ f)$ *uma métrica crítica de Miao-Tam sobre uma variedade de dimensão quatro, compacta, simplesmente conexa, com tensor de Weyl tendo a divergência de segunda ordem nula e bordo isométrico à esfera* $\mathbb{S}^3$*. Então,* (M^4,g) *é isométrica a bola geodésica em uma forma espacial simplemente conexa* $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{H}^4$ *ou* $\mathbb{S}^4$.

3.3 Tripla estática positiva

Iniciamos esta subseção relembrando a definição de uma tripla estática positiva.

Definição 3.3 *Uma **tripla estática positiva** $(M^n,\ g,\ f)$, é uma variedade Riemanniana completa $(M^n,\ g)$, conexa, com bordo suave ∂M (possivelmente vazio) e f é uma função suave em M que é não-negativa, $f^{-1}(0)=\partial M$ satisfazendo à seguinte equação:*

$$-(\Delta f)g + Hess f - fRic = 0. \qquad (60)$$

Conforme foi visto na introdução, o hemisfério $\mathbb{S}^n_+(r)$ com métrica canônica e função potencial dada pela função altura é um exemplo clássico de uma tripla estática positiva Einstein. A seguir, forneceremos outros exemplos bem conhecidos na literatura, mas como veremos, os mesmos não são variedades Einstein. Tais exemplos podem ser encontrados nos trabalhos de Kobayashi (1982) e Lafontaine (1983), onde os autores estudaram a classificação de métricas estáticas que são conformemente plana.

Exemplo 3.4 *Cilindro sobre $\mathbb{S}^{n-1}$ com métrica produto,*

$$\Big(M = \Big[0, \frac{\pi}{\sqrt{n}}\Big] \times \mathbb{S}^{n-1},\ g = dt^2 + \frac{n-2}{n}h,\ f(t) = sen(\sqrt{n}t)\Big),$$

onde h representa a métrica canônica de $\mathbb{S}^{n-1}$. Tal estrutura define uma tripla estática positiva não-Einstein, conformemente plana e que satisfaz a condição de Ricci paralelo (veja mais detalhes no Capítulo 2, Seção 2.3).

O próximo exemplo de tripla estática positiva é o bem conhecido espaço de Schwarzchild descoberto no início do século XIX e que ganhou destaque devido ao fato de ser a primeira estrutura conhecida a satisfazer as equações de campo de Einstein, além disso, destacamos que este espaço tem grande relevância no estudo da Relatividade geral, pois o mesmo descreve a geometria de estrelas super massivas bem como buracos negros.

Exemplo 3.5 *Para alguma constante $m \in \Big(0, \sqrt{\frac{(n-2)^{n-2}}{n^n}}\Big)$, considere o espaço de Schwarzschild definido por*

$$\Big(M = \Big[r_1, r_2\Big] \times \mathbb{S}^{n-1},\ g = \frac{1}{1 - 2mt^{2-n} - t^2}dt^2 + t^2h,\ f(t) = \sqrt{1 - 2mt^{2-n} - t^2}\Big),$$

onde $0 < r_1 < r_2$ são raízes de f e h denota a métrica canônica de $\mathbb{S}^{n-1}$. Neste caso temos uma tripla estática positiva conformemente plana que não satisfaz a condição de Ricci paralelo (veja mais detalhes no Capítulo 2, Seção 2.3).

Prosseguindo nosso estudo, Qing e Yuan em 2013, obtiveram a classificação das métricas estáticas para o caso Bach-flat. Em particular, temos que a Conjectura 1.1 é valida neste caso (cf. Teorema 3.7). Destacamos que no trabalho de Gibbons, Hartnoll e Pope (2003), os autores construíram contraexemplos para a conjectura *cosmic no-hair* nos casos $4 \leq n \leq 8$. Entretanto, é interessante mostrar sob que condições a conjectura permanece verdadeira. Para os nossos propósitos, relembremos a seguinte classificação das triplas estáticas positivas que são Bach-flat.

Teorema 3.7 (Qing e Yuan (2013)) *Seja $(M^n,\, g,\, f)$ uma tripla estática positiva com curvatura escalar $R = n(n-1)$. Suponha que $(M^n,\, g)$ é Bach-flat, então $(M^n,\, g,\, f)$ é o recobrimento de uma das seguintes triplas estáticas:*

1. *O hemisfério padrão com métrica canônica*

$$(\mathbb{S}^n_+, g_{\mathbb{S}^{n-1}}, f = x_{n+1}).$$

2. *O cilindro sobre $\mathbb{S}^{n-1}$ com métrica produto*

$$\Big(M = \Big[0, \frac{\pi}{\sqrt{n}}\Big] \times \mathbb{S}^{n-1},\ g = dt^2 + \frac{n-2}{n} g_{\mathbb{S}^{n-1}},\ f(t) = sen(\sqrt{n}t)\Big).$$

3. *Para alguma constante $m \in \Big(0, \sqrt{\frac{(n-2)^{n-2}}{n^n}}\Big)$ consideremos o espaço de Schwarzschild definido por*

$$\Big(M = \Big[r_1, r_2\Big] \times \mathbb{S}^{n-1},\ g = \frac{1}{1 - 2mt^{2-n} - t^2} dt^2 + t^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}},\ f(t) = \sqrt{1 - 2mt^{2-n} - t^2}\Big),$$

onde $r_1 < r_2$ são raízes positivas de f.

Baseado nestas informações, provaremos agora o nosso primeiro resultado de rigidez para triplas estáticas positivas o qual pode ser visto como uma resposta positiva para Conjectura 1.1.

Corolário 3.3 *Seja $(M^n,\ g,\ f)$, uma tripla estática positiva compacta, conexa, orientada e com curvatura escalar positiva. Suponha que:*

- *M^n tem curvatura de Weyl radial nula e*
- *$|\mathring{Ric}|^2 \leq \frac{R^2}{n(n-1)}$.*

Então, uma das seguinte afirmações é verdadeira:

1. *M^n é equivalente a um hemisfério padrão de $\mathbb{S}^n$; ou*
2. *$|\mathring{Ric}|^2 = \frac{R^2}{n(n-1)}$ e $(M^n,\ g,\ f)$ é, a menos de recobrimento, a tripla estática positiva equivalente ao cilindro padrão.*

Demonstração: O caso $n = 3$ foi provado por Ambrozio em (2015), sendo assim, no que segue estaremos considerando o caso $n \geq 4$. Iniciamos a demosntração substituindo (52) na fórmula tipo Bochner obtida no Teorema 3.2, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathrm{div}(f\nabla|Ric|^2) &= \Big(\frac{1}{n-1}|C_{ijk}|^2 + |\nabla Ric|^2\Big)f \\ &+\Big(\frac{2}{n-1}R|\mathring{Ric}|^2 + \frac{2n}{n-2}tr(\mathring{Ric}^3)\Big)f, \end{aligned} \tag{61}$$

onde neste caso $\kappa = 0$, já que estamos considerando o caso estático.

Prosseguindo, de modo análogo ao que foi feito no Corolário 3.2, usamos novamente o Lema de Okumura (cf. Lema 2.1 do trabalho de Okumura (1974)), para obter

$$\begin{aligned} 0 \;\geq\; & \int_M \Big(\frac{n-2}{n-1}|C_{ijk}|^2 + |\nabla Ric|^2\Big) f dM_g \\ & + \int_M \frac{2n}{\sqrt{n(n-1)}}|\mathring{Ric}|^2\Big(\frac{R}{\sqrt{n(n-1)}} - |\mathring{Ric}|\Big) f dM_g \geq 0. \end{aligned} \tag{62}$$

Portanto, a expressão acima garante que $\mathring{Ric} = 0$ (i.e., a variedade é Einstein) ou $|\mathring{Ric}| = \frac{R}{\sqrt{n(n-1)}}$. No caso Einstein basta aplicarmos o Lema 3 do trabalho de Reilly (1977) para concluir que M^n é isométrica a um hemisfério $\mathbb{S}^n_+$. Por outro lado, a desigualdade (62) também nos diz que M^n tem tensor de Cotton nulo e tensor de Ricci paralelo. Daí, usamos (18) para obter

$$(n-2)B_{ij} = \nabla_k C_{kij} + W_{ikjl}R_{kl} = W_{ikjl}R_{kl},$$

e consequentemente, pela equação fundamental das métricas estáticas, deduzimos

$$\begin{aligned} (n-2)fB_{ij} &= W_{ikjl}\nabla_k\nabla_l f \\ &= \nabla_k(W_{ijkl}\nabla_l f) - \nabla_k W_{ikjl}\nabla_l f. \end{aligned}$$

Agora, pela hipótese sobre o tensor de Weyl juntamente com (14), chegamos a

$$\begin{aligned} (n-2)fB_{ij} &= -\nabla_k W_{jlik}\nabla_l f \\ &= \frac{n-3}{n-2}C_{jli}\nabla_l f = 0. \end{aligned}$$

Assim, desde que f anula-se precisamente no bordo, segue da continuidade do tensor de Bach que (M^n, g) tem tensor de Bach nulo. Portanto, o resultado segue agora da classificação obtida no Teorema 3.7 (veja também o Teorema 1 em Ambrozio (2015) para $n = 3$).

□

O nosso próximo resultado representa uma extensão do Teorema 1.5 apresentado na introdução deste trabalho. Mais precisamente temos a seguinte proposição.

Proposição 3.2 *Seja $(M^n,\, g,\, f)$ uma tripla estática positiva com curvatura seccional não negativa e curvatura escalar $R = n(n-1)$. Se M^n tem curvatura de Weyl radial nula, Então M^n é equivalente a um hemisfério padrão de $\mathbb{S}^n_+$ ou é recoberta por uma tripla estática que é equivalente ao cilindro padrão sobre $\mathbb{S}^{n-1}$ com métrica produto descrita no Teorema 3.7.*

Demonstração: A prova é feita de modo similar à demonstração da Proposição 3.1 para o caso de métricas críticas de Miao-Tam. De fato, substituindo a expressão obtida no Lema 2.1 no Teorema 3.2 chegamos a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathrm{div}(f\nabla|Ric|^2) &= \Big(\frac{1}{n-1}|C_{ijk}|^2+|\nabla Ric|^2\Big)f\\ &\quad +2\Big(R_{ij}R_{jk}R_{ik}-R_{ijkl}R_{jl}R_{ik}\Big)f.\end{aligned}$$

Agora, integrando a expressão acima sobre M^n e usando (57), concluímos que $(M^n,\, g)$ tem tensor de Cotton nulo e tensor de Ricci paralelo. Daí, basta repetirmos os argumentos aplicados no final da prova do Corolário 3.3. Portanto, finalizamos a prova da proposição. $\square$

Destacamos que em dimensão 4, somente a condição de curvatura de Weyl radial nula é suficiente para provarmos que a variedade é equivalente a um hemisfério padrão $\mathbb{S}^n_+$ ou a um cilindro padrão sobre $\mathbb{S}^3$ (veja Observação 2.1 para mais detalhes).

4 ESPAÇO-TEMPO ESTÁTICO NO VÁCUO

Este capítulo tem como objetivo investigar a não existência de múltiplos buracos negros em espaços-tempo estáticos no vácuo, o mesmo é baseado no artigo *A note on nonexistence of multiple black holes in static vacuum Einstein space-times* escrito pelo autor em parceria com B. Leandro (2017).

Um espaço-tempo estático no vácuo de dimensão n é uma variedade Riemanniana (M, g) munida com uma função positiva f (com $f^{-1}(0) = \partial M$, no caso de $\partial M \neq 0$) que satisfaz as equações

$$Hessf = fRic \quad \text{e} \quad \Delta f = 0.$$

Em particular, a curvatura escalar é nula. O conjunto $f^{-1}(0) = \partial M$ é chamado de horizonte e este representa a fronteira de um buraco negro em relatividade geral. Além disso, pela expressão acima, não é difícil verificar que ∂M é totalmente geodésico em M. Devemos notar que soluções destas equações provém de variedades *Ricci-flats* do tipo $\overline{M} = M \times_f \mathbb{S}^1$ ou $\overline{M} = M \times_f \mathbb{R}^1$ dotada com métrica Riemanniana ou Lorentziana da seguinte forma

$$\overline{g} = g \pm f^2 dt^2.$$

É bem conhecido que espaços estáticos no vácuo que são geodesicamente completos devem ter sua função potencial f constante (veja, por exemplo, o trabalho de Anderson (1999)).

Nas últimas décadas tem sido crescente o interesse no estudo de espaço-tempo estático no vácuo. Uma das questões notáveis neste contexto, está relacionada a unicidade de buracos negros e a não existência de múltiplos buracos negros nestes ambientes. Assim, entre os anos 1967 e 1987, muitos matemáticos e físicos deram importantes contribuições para este problema, destacamos por exemplo, os trabalhos de Irsael (1967) e, Bunting e Masood-ul-Alam (1987), que de maneira mais específica, comprovou-se que se um espaço-tempo estático no vácuo é assintoticamente plano, então este deve ser isométrico ao espaço de Schwarzschild.

Antes de prosseguir, recordemos que uma variedade Riemanniana (M^n, g) tem curvatura *f-fracamente harmônica* se o tensor de Ricci Ric_g satisfaz

$$d^D Ric_g(\nabla f, \cdot, \nabla f) = 0$$

para uma função $f : M \to \mathbb{R}$, onde d^D é o operador diferencial de primeira ordem do espaço das seções dos 2-tensores simétricos $C^\infty(S^2 M)$ em $C^\infty(\bigwedge^2 T^*M \otimes T^*M)$ definido por

$$d^D \omega(X, Y, Z) = \nabla_X \omega(Y, Z) - \nabla_Y \omega(X, Z).$$

Com esta notação, em (2016) Hwang, Chang e Yun estudaram espaços estáticos no vácuo satisfazendo a condição de curvatura fracamente harmônica, eles mostraram que nestas condições o espaço-tempo deve ter bordo conexo o que significa dizer que não existem múltiplos buracos negros. Mais precisamente, eles provaram o seguinte resultado.

Teorema 4.1 (Hwang-Chang-Yun, 2016) *Seja* $\big(M^n,\, g,\, f\big)$ *um espaço-tempo estático no vácuo com curvatura* f*-fracamente harmônica. Então não-existem múltiplos buracos negros em* M^n*.*

Assim, uma das nossas motivações para este trabalho foi investigar o que acontece em dimensão 4 se mudarmos a hipótese de curvatura fracamente harmônica pela codição de que a parte autodual (ou antiautodual) do tensor de Weyl tenha divergente nulo, isto é, $\mathrm{div}W^+ = 0$, veja Teorema 4.2 na Seção 4.1 . Destacamos que a priori, a condição de que uma variedade satisfaz $\mathrm{div}W^+ = 0$, não tem relação direta com o fato dela ter curvatura fracamente harmônica. Entretanto, como veremos na próxima seção, para um espaço-tempo estático no vácuo, a harmonicidade de W^+ implicará que o espaço-tempo terá curvatura fracamente harmônica.

Ao longo desta seção iremos abordar algumas particularidades que acontecem na quarta dimensão. Para obter mais detalhes sobre os fatos que descreveremos a seguir veja, por exemplo, Dillen e Verstralen (2000), Besse (2008), Scorpan (2005) ou ainda Viaclovsky (2011).

No que segue, M^4 denotará uma variedade orientade de dimansão 4 e g sua métrica Riemanniana sobre M^4. Como foi previamente destacado na introdução, variedades de dimensão 4 são muito especiais. Por exemplo, seguindo a notação usada no livro do Dillen e Verstralen (2000), dado qualquer referencial ortonormal local $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sobre um aberto de M^4 com base dual $\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$, existe um único operador $*$ chamado *estrela de Hodge* (agindo sobre bivetores), $* : \Lambda^2 \to \Lambda^2$, onde Λ^2 representa o espaço das 2-formas, tais que

$$\begin{aligned}
*(e^1 \wedge e^2) &= e^3 \wedge e^4, \\
*(e^1 \wedge e^3) &= e^4 \wedge e^2, \\
*(e^1 \wedge e^4) &= e^2 \wedge e^3, \\
*(e^2 \wedge e^3) &= e^1 \wedge e^4, \\
*(e^2 \wedge e^4) &= e^3 \wedge e^1, \\
*(e^3 \wedge e^4) &= e^1 \wedge e^2.
\end{aligned}$$

Isto implica que $*$ é uma involução, isto é, $*^2 = Id$. Em particular, obtemos que o fibrado das 2-formas sobre uma variedade Riemanniana orientada de dimensão 4 pode ser decomposto como soma direta $\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$. Assim, segue que o tensor de Weyl W é um endomorfismo de $\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$ definido, para todo $\omega \in \Lambda^2$, por

$$(W\omega)_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k,l} W_{ijkl}\omega_{kl}$$

tal que

$$W = W^+ \oplus W^-, \tag{63}$$

onde $W^\pm : \Lambda^2_\pm \longrightarrow \Lambda^2_\pm$ são chamadas de autodual e antiautodual partes de W. Estas últimas são definidas por

$$W^\pm\omega = \pi_\pm W \pi_\pm \omega,$$

onde $\pi_\pm : \Lambda^2 \longrightarrow \Lambda^2_\pm$ é a projeção $\frac{1}{2}(I \pm *)$. Métricas semi-conformemente planas são também conhecidas como autoduais ou antiautoduais se $W^+ = 0$ ou $W^- = 0$, respectivamente.

Prosseguindo, não é difícil verificar que a seguinte identidade é verdadeira

$$\langle W^+\omega_1, \omega_2\rangle = \langle \omega_1, W^+\omega_2\rangle,$$

ou seja, W^+ é um operador simétrico. Daí, deduzimos a seguinte expressão para W_{pqrs},

$$\begin{aligned} W^+_{pqrs} &= \langle W^+(e^p \wedge e^q), e^r \wedge e^s\rangle \\ &= \langle \pi^+ W \pi^+(e^p \wedge e^q), e^r \wedge e^s\rangle \\ &= \frac{1}{4}\langle W(e^p \wedge e^q + *(e^p \wedge e^q)), e^r \wedge e^s + *(e^r \wedge e^s)\rangle. \end{aligned}$$

Em particular, temos

$$\begin{aligned} W^+_{1234} &= \frac{1}{4}\langle W(e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4), e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4\rangle \\ &= \frac{1}{4}(W_{1212} + 2W_{1234} + W_{3434}). \end{aligned} \tag{64}$$

Por outro lado, desde que W comuta com o operador estrela de Hodge, isto é, $\pi_+ W = W\pi_+$ (veja por exemplo as notas de Viaclovsky (2011)), então podemos calcular (64) de maneira alternativa como segue

$$\begin{aligned} W^+_{1234} &= \langle \pi_+ W(e^1 \wedge e^2), e^3 \wedge e^4\rangle \\ &= \langle W\pi_+(e^1 \wedge e^2), e^3 \wedge e^4\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle W(e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4), e^3 \wedge e^4\rangle \\ &= \frac{1}{2}(W_{1234} + W_{3434}). \end{aligned} \tag{65}$$

Assim, comparando (64) e (65) obtemos $W_{1212} = W_{3434}$, e consequentemente escrevemos

W^+_{1234} da seguinte maneira

$$W^+_{1234} = \frac{1}{2}\big(W_{1234} + W_{1212}\big).$$

Em geral, como o tensor de Weyl tem traço nulo em qualquer par de índices, obtemos

$$W^+_{pqrs} = \frac{1}{2}\big(W_{pqrs} + W_{pq\overline{r}\,\overline{s}}\big), \tag{66}$$

onde $(\overline{r}\,\overline{s})$ representa o dual de $(r\,s)$, isto é, $(r\,s\,\overline{r}\,\overline{s}) = \sigma(1234)$ para alguma permutação par σ na configuração $\{1, 2, 3, 4\}$ (cf. Equation 6.17, p. 466 em Dillen e Verstralen (2000)).

Relembramos também que o tensor W^+ é harmônico se $\mathrm{div}W^+ = 0$, onde div é o divergente formal definido para qualquer $(0, 4)$-tensor F por

$$\mathrm{div}F(X_1, X_2, X_3) = tr_g\{(Y, Z) \mapsto \nabla_Y F(Z, X_1, X_2, X_3)\}$$

e g é a métrica de M^4. Vale ressaltar que em dimensão 4 temos

$$|\mathrm{div}W|^2 = |\mathrm{div}W^+|^2 + |\mathrm{div}W^-|^2.$$

Assim, a hipótese sobre o tensor de Weyl ter a parte autodual harmônica (isto é, $\mathrm{div}W^+ = 0$) é mais fraca de que a condição de harmonicidade do tensor de Weyl (isto é, $\mathrm{div}W = 0$). Além disso, é bem conhecido que variedades de dimensão 4, compactas, orientadas com Ricci paralelo deve ter $\mathrm{div}W^+ = 0$. Isto implica que toda variedade Einstein de dimensão 4 tem parte autodual do tensor de Weyl harmônico (cf. 16.65 em BESSE (2008), veja também Lema 6.14 em Dillen e Verstralen (2000)). Mas, a recíproca desta afirmação não é necessariamente verdadeira. Portanto, de acordo com BESSE (2008), a suposição $\mathrm{div}W^+ = 0$ pode ser vista como uma generalização da condição Einstein.

4.1 Espaço estático no vácuo satisfazendo $\mathrm{div}W^+ = 0$.

Iniciamos relembrando a definição de métricas estáticas no vácuo.

Definição 4.1 *Uma variedade Riemanniana (M^n, g), $n \geq 3$, é dita um espaço-tempo estático no vácuo se existe uma função $f : M \to (0, +\infty)$ satisfazendo a equação estática no vácuo*

$$Hessf = fRic \quad e \quad \Delta f = 0. \tag{67}$$

Destacamos que nossa abordagem foi motivado pelas ideias desenvolvidas em Barros e Ribeiro Jr. (2014) e Barros, Leandro e Ribeiro Jr. (2015). Na sequência, recorde a equação (41), a qual relaciona o tensor de Cotton com o tensor de Weyl e que, para o caso estático no vácuo, pode ser reescrita na seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
fC_{ijk} &= W_{ijkl}\nabla_l f + \frac{(n-1)}{(n-2)}\big(R_{ik}\nabla_j f - R_{jk}\nabla_i f\big) \\
&\quad -\frac{1}{(n-2)}\big(R_{is}\nabla_s f g_{jk} - R_{js}\nabla_s f g_{ik}\big),
\end{aligned} \tag{68}
$$

ou seja

$$
fC_{ijk} = W_{ijkl}\nabla_l f + T_{ijk}, \tag{69}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
T_{ijk} &= \frac{(n-1)}{(n-2)}\big(R_{ik}\nabla_j f - R_{jk}\nabla_i f\big) \\
&\quad -\frac{1}{(n-2)}\big(R_{is}\nabla_s f g_{jk} - R_{js}\nabla_s f g_{ik}\big).
\end{aligned} \tag{70}
$$

O resultado a seguir é inspirado pelo trabalho de Barros e Ribeiro Jr. (2015), onde os autores estudadam métricas críticas do funcional curvatura escalar total em dimensão 4 (cf. Seção 3.1 do referido artigo). No entanto, como a prova não é trivial, forneceremos sua demonstração detalhada.

Lema 4.1 *Seja* $\big(M^4,\, g,\, f\big)$ *um espaço-tempo estático no vácuo com* $\mathrm{div}W^+ = 0$. *Então,* ∇f *é um autovetor da curvatura de Ricci.*

Demonstração: Como a curvatura escalar de M^4 é nula, temos que (13) torna-se

$$
C_{klj} = \nabla_k R_{lj} - \nabla_l R_{kj}.
$$

Então, como consequência imediata de (66) obtemos

$$
\begin{aligned}
4\mathrm{div}W^+_{jkl} &= 2(\mathrm{div}W_{jkl} + \mathrm{div}W_{\overline{j}\overline{k}\overline{l}}) \\
&= C_{klj} + C_{\overline{k}\,\overline{l}\,j},
\end{aligned} \tag{71}
$$

onde na última etapa usamos (14). Agora, pelas Eqs. (68) e (71) deduzimos

$$
\begin{aligned}
4f\mathrm{div}W^+_{jkl} &= f[\big(\nabla_k R_{jl} - \nabla_l R_{jk}\big) + \big(\nabla_{\overline{k}} R_{j\overline{l}} - \nabla_{\overline{l}} R_{j\overline{k}}\big)] \\
&= \big[W_{kljs}\nabla_s f + W_{\overline{k}\,\overline{l}\,j\,s}\nabla_s f + T_{lkj} + T_{\overline{l}\,\overline{k}\,j}\big].
\end{aligned} \tag{72}
$$

No que segue, considere um referencial ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ diagonalizando Ric em um ponto q, tal que $\nabla f(q) \neq 0$, com os respectivos autovalores associados λ_k, $(k = 1, \ldots, 4)$. É importante destacar que os pontos regulares de M^4, denotado por $\{p \in M^4 : \nabla f(p) \neq 0\}$, é denso em M^4. Caso contrário, f deve ser constante em um conjunto aberto de M^4; para mais detalhes veja, por exemplo, CORVINO (2000). Portanto, de (70) e (72) juntamente com a hipótese de que M satisfaz $\mathrm{div}W^+ = 0$, podemos deduzir as seguintes identidades

$$\begin{cases} (\lambda_1 - \lambda_2)\nabla_1 f \nabla_2 f + (\lambda_3 - \lambda_4)\nabla_3 f \nabla_4 f = 0, \\ (\lambda_1 - \lambda_3)\nabla_1 f \nabla_3 f + (\lambda_4 - \lambda_2)\nabla_4 f \nabla_2 f = 0, \\ (\lambda_1 - \lambda_4)\nabla_1 f \nabla_4 f + (\lambda_2 - \lambda_3)\nabla_2 f \nabla_3 f = 0. \end{cases} \tag{73}$$

Afirmamos agora que ∇f é um autovetor da curvatura de Ricci. De fato, como estamos considerando $\nabla f(p) \neq 0$ temos que, $(\nabla_j f) \neq 0$, para algum $1 \leq j \leq 4$. Se isto ocorre para exatamente um deles, então $\nabla f = (\nabla_j f)e_j$ para algum j, e consequentemente $Ric(\nabla f) = \lambda_j \nabla f$. Por outro lado, se temos $(\nabla_j f) \neq 0$ para duas direções, sem perda de generalidade podemos assumir $\nabla_1 f \neq 0$, $\nabla_2 f \neq 0$, $\nabla_3 f = 0$ e $\nabla_4 f = 0$. Então, de (73) temos $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ e como

$$\nabla f = (\nabla_1 f)e_1 + (\nabla_2 f)e_2,$$

deduzimos que

$$\begin{aligned} Ric(\nabla f) &= Ric((\nabla_1 f)e_1 + (\nabla_2 f)e_2) \\ &= (\nabla_1 f)Ric(e_1) + (\nabla_2 f)Ric(e_2) \\ &= (\nabla_1 f)\lambda_1 e_1 + (\nabla_2 f)\lambda_2 e_2 = \lambda \nabla f. \end{aligned}$$

O caso $(\nabla_j f) \neq 0$ para três direções é análogo. Agora, resta analisar o caso $(\nabla_j f) \neq 0$ para $j = 1, 2, 3$ e 4. Neste caso, usamos novamente (73) para obter

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2)^2(\nabla_1 f \nabla_2 f)^2 &+ (\lambda_3 - \lambda_4)^2(\nabla_3 f \nabla_4 f)^2 \\ +(\lambda_1 - \lambda_3)^2(\nabla_1 f \nabla_3 f)^2 &+ (\lambda_4 - \lambda_2)^2(\nabla_4 f \nabla_2 f)^2 \\ +(\lambda_1 - \lambda_4)^2(\nabla_1 f \nabla_4 f)^2 &+ (\lambda_2 - \lambda_3)^2(\nabla_2 f \nabla_3 f)^2 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$, e de modo similar vemos que ∇f é um autovetor para Ric. Isto finaliza a prova do lema. □

Antes de enunciar o nosso resultado sobre não existência de múltiplos buracos negros, recordemos um fato que será fundamental na prova do resultado principal, sugerimos ao leitor o trabalho de Hwang, Chang e Yun (2016) para uma prova detalhada do lema a seguir.

Lema 4.2 (Hwang-Chang-Yun, 2016) *Seja (M^n, g, f) um espaço-tempo estático no vácuo. Se f é não-trivial, então o conjunto $Crit(f) = \{p \in M^n; \nabla f(p) = 0\}$ tem medida nula.*

Agora podemos enunciar e provar o principal resultado desse capítulo que, como já vimos na introdução, deu origem ao artigo intitulado *A note on nonexistence of* *multiple black holes in static vacuum Einstein space-times.* Mais precisamente, temos o seguinte teorema.

Teorema 4.2 *Seja* $\left(M^4,\, g,\, f\right)$ *um espaço-tempo estático no vácuo com a parte autodual do tensor de Weyl harmônica (i.e.,* $\mathrm{div}W^+ = 0$*). Então não existem múltiplos buracos negros em* M^4.

Demonstração: Para qualquer ponto $p \in M$ onde $\nabla f(p) \neq 0$, considere um sistema de coordenadas locais $\{\theta^2, \theta^3, \theta^4\}$ sobre a superfície de nível $\{x \in M : f(x) = f(p)\}$. Neste caso, para qualquer vizinhança da superfície de nível Σ onde $|\nabla f| \neq 0$, usamos sistema de coordenadas locais

$$(x^1, x^2, x^3, x^4) = (f, \theta^2, \theta^3, \theta^4)$$

adaptado a superfície de nível. Com esta notação acima, a métrica g pode ser expressa como

$$ds^2 = \frac{1}{|\nabla f|^2} df^2 + g_{ab}(f, \theta) d\theta^a d\theta^b,$$

onde $a, b \in \{2, 3, 4\}$. Pelo Lema 4.1, podemos cosiderar o campo normal $e_1 = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ para Σ_c e e_2, e_3, e_4 como o referencial ortonormal sobre Σ_c tal que $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ diagonaliza o tensor de Ricci Ric em p.

Levando em conta que

$$Ric(\nabla f) = \lambda \nabla f$$

e

$$\nabla_{e_a} f = g(\nabla f, e_a) = 0$$

para $a = \{2, 3, 4\}$, deduzimos de (69) que

$$f C_{1a1} = W_{1a1s} \nabla_s f + T_{1a1} = 0.$$

De fato, como o tensor de Weyl tensor é anti-simétrico obtemos $W(\nabla f, \cdot, \nabla f, \nabla f) = 0$. Além disso, de (70) temos que

$$T_{1a1} \;=\; \frac{3}{2}\big(R_{11} \nabla_a f - R_{a1} \nabla_1 f\big) - \frac{1}{2}\big(R_{1s} \nabla_s f g_{a1} - R_{as} \nabla_s f g_{11}\big) = 0.$$

Isto nos permite concluir que $f C_{1j1} = 0$ for $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ nos pontos p onde $\nabla f(p) \neq 0$. Além disso, lembre que $f > 0$ sobre M. Consequentemente, deduzimos que

$$C(\nabla f, \cdot, \nabla f) = 0$$

em $M\backslash Crit(f)$. Portanto, pela continuidade do tensor de Cotton e do Lema 4.2 concluímos que, de fato, $C(\nabla f, \cdot, \nabla f)$ anula-se sobre M^4.

Finalmente, pela definição do tensor de Cotton (13) chegamos a

$$d^D Ric(\nabla f, \cdot, \nabla f) = 0,$$

e então podemos aplicar o Teorema 1 do artigo de Hwang, Chang e Yun (2016) para concluir que não existem múltiplos buracos negros em M^4. Isto completa a prova do teorema. $\square$

5 CONCLUSÃO

Na primeira parte do trabalho conseguimos uma resposta parcial da conjectura *cosmic no-hair* enunciada na introdução (veja Conjectura 1.1). Além disso, foi obtido um forte resultado de rigidez considerando triplas estáticas positivas em dimensão 3 com curvatura seccional não-negativa. Ao mesmo tempo, estudamos as métricas críticas do funcional volume e neste caso, considerando que a variedade satisfaz a condição de Ricci paralelo, respondemos de maneira negativa um questionamento proposto por Miao e Tam (2011) sobre a existência de métricas críticas do funcional volume que não possuem curvatura seccional constante, mais precisamente, sob a condição Ricci paralelo, provamos que tais métricas devem ser isométricas a uma bola geodésica em $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{H}^n$. Além disso, em dimensão quatro, obtivemos a classificação de tais métricas sobre a hipótese do tensor de Weyl ter divergência de segunda ordem nula.

No segundo momento da tese obtivemos resultados de não-existência de múltiplos buracos negros em espaços-tempo estáticos no vácuo. De modo mais preciso, concluímos que a condição geométrica de que o espaço estático no vácuo tem parte anti-auto-dual do tensor de Weyl harmônico deve interferir diretamente na topologia do espaço-tempo fazendo com que este tenha bordo conexo, o que significa dizer que o espaço possui um único buraco negro.

REFERÊNCIAS

AMBROZIO, L. On static three-manifold with positive scalar curvature arXiv:1503.03803v1 [math.DG], 2015. Artigo aceito para publicação em Journal Differential Geometry.

ANDERSON, M. Scalar curvature, metric degenerations and the static vacuum Einstein equations on 3-manifolds. *Geom. and Funct. Anal.*, v. 9, p. 855–967, 1999.

BACH, R. Zur Weylschen Relativitätstheorie und der Weylschen Erweiterung des Krümmungstensorbegriffs. *Math. Z.*, v. 9, p. 110–135, 1921.

BALTAZAR, H.; LEANDRO, B. A note on nonexistence of multiple black holes in static vacuum Einstein space-times, 2017. Artigo aceito para publicação em Illinois Journal of Mathematics.

BALTAZAR, H.; RIBEIRO JR., E. Critical metrics of the volume functional on manifolds with boundary. *Proceedings of the American Math. Society.*, v. 145, p. 3513–3523, 2017a.

BALTAZAR, H.; RIBEIRO JR., E. Remarks on critical metrics of the scalar curvature and volume functionals on compact manifolds with boundary arXiv:1703.01819v1 [math.DG], 2017b. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1703.01819.pdf>. Acesso em: 22 abr. 2017.

BARROS, A.; DIÓGENES, R.; RIBEIRO JR., E. Bach-flat critical metrics of the volume functional on 4-dimensional manifolds with boundary. *The Journal of Geometric Analysis*, v. 25, p. 2698–2715, 2015.

BARROS, A.; Jr., RIBEIRO. Critical point equation on four-dimensional compact manifolds. *Math. Nachr.*, v. 14, p. 1618–1623, 2014.

BARROS, LEANDRO B., A.; Jr., RIBEIRO. Critical metrics of the total scalar curvature functional on 4-manifolds. *Math. Nachr.*, v. 16, p. 1814–1821, 2015.

BATISTA, R.; DIÓGENES, R.; RANIERI, M; RIBEIRO JR., E. Critical metric of the volume functional on compact three manifolds with smooth boundary. *The Journal of Geometric Analysis*, v. 27, p. 1530–1547, 2017.

BESSE, A. *Einstein manifolds.* New York: Springer-Verlag, 2008.

BOUCHER, W.; GIBBONS, G.; HOROWITZ, G. Uniqueness theorem for anti-de Sitter spacetime. *Phys. Rev. D.*, v. 30, n. 6, p. 2447, 1984.

BUNTING, MASOOD-ul-ALAM A.K.M., G.L. Non-existence of multiple black holes in asymptotically Euclidean static vacuum space-times. *Gen. Rel. Grav.*, v. 19, p. 147–154, 1987.

CAO, H.-D.; CHEN, Q. On Bach-flat gradient shrinking Ricci solitons. *Duke Mathematical Journal*, v. 162, p. 1149–1169, 2013.

CAO, X. Compact gradient shrinking Ricci solitons with positive curvature operator. *J. Geom. Anal.*, v. 17, p. 425, 2007.

CATINO, G. Generalized quasi-Einstein manifolds with harmonic Weyl tensor. *Math. Z.*, v. 271, p. 751–756, 2012.

CATINO, G.; MASTROLIA, P.; MONTICELLI, D. Gradient Ricci solitons with vanishing conditions on Weyl arXiv:1602.00534v2 [math.DG], 2016. To appear in J. Math. Pures Appl.

CHOW, B.; LU, P.; NI, L. *Hamilton's Ricci Flow.* American Mathematical Society, 2006.

CHOW, B. et al. *The Ricci flow: techniques and applications. Part I. Geometric aspects.* American Mathematical Society, 2007.

CORVINO, J. Scalar Curvature Deformation and a Gluing Construction for the Einstein Constraint Equations. *Communications in Mathematical Physics*, v. 214, n. 1, p. 137–189, 2000.

CORVINO, J.; EICHMAIR, M.; MIAO, P. Deformation of scalar curvature and volume. *Math. Annalen*, v. 357, p. 551–584, 2013.

DERDZINSKI, A. Classification of certain compact Riemannian manifolds with harmonic curvature and non-parallel Ricci tensor. *Math. Z.*, v. 172, p. 273–280, 1980.

DERDZINSKI, A. On compact Riemannian manifolds with harmonic curvature. *Math. Annalen*, v. 259, p. 145–152, 1982.

DIÓGENES, R. *Métricas Críticas do Funiconal Volume, Volume Mínimo e Curvatura Mínima em Variedades de Dimensão Quatro.* 2015. 81 f. Tese (Doutorado em Matemática) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.

DILLEN, F.; VERSTRALEN, L. *Handbook of Differential Geometry.* Elsevier Science B. V., 2000.

GIBBONS, G.; HARTNOLL, S.; POPE, C. Bohm and Einstein-Sasaki metrics, black holes and cosmological event horizonts. *Phys. Rev. D.*, v. 67, p. 84024, 2003.

HAWKING S.W., G.F.R., ELLIS. *The large scale structure of space-Time.* Cambridge Univ. Press, 1973.

HE, P., C. PETERSEN; WYLIE, W. On the classification of warped product Einstein metrics. *Comm. in Analysis and Geom.*, v. 20, p. 271–311, 2012.

HEUSLER, M. *Black hole uniqueness theorems.* In: Cambridge Lecture Notes in Physics, vol. 6. Cambridge University Press, Cambridge, 1966.

HOLLAND, S.; A., ISHIBASHI. *Black hole uniqueness theorems in higher dimensional space-times.* Class. Quantum Grav. 32, 2012.

HWANG, CHANG J.-YUN G., S. Nonexistence of multiple black holes in static space-times and weakly harmonic curvature. *Gen. Relativ. Gravit.*, v. 48, p. 120, 2016.

ISRAEL, W. Event horizons in static vacuum space-time. *Phys. Rev.*, v. 164, p. 1776–1779, 1967.

KIM, J.; SHIN, J. Four dimensional static and related critical space with harmonic curvature arXiv:1604.03241v1 [math.DG], 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1604.03241.pdf>. Acesso em: 22 abr. 2017.

KOBAYASHI, O. A differential equation arising from scalar curvature function. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, v. 34, n. 4, p. 665–675, 1982.

KOBAYASHI, O.; OBATA, M. Certain mathematical problems on static models in general relativity. *In*: Proceedings of the 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations, 1980. P. 1333-1344.

KOBAYASHI, O.; OBATA, M. Conformally-flatness and static space-time. *In*: HANO, J. and MORIMOTO, A. and MURAKAMI, S. and OKAMOTO, K. and OZEKI, H. (Org.). **Manifolds and Lie Groups.** Boston, MA: Birkhäuser, 1981. P. 197-206.

LAFONTAINE, J. Sur la géométrie d'une généralisation de l'équation différentielle d'Obata. *J. Math. Pures Appliquées*, v. 62, p. 63–72, 1983.

LICHNEROWICZ, A. *Théories relativistes de la gravitation et de l'éléctromagnetismc.* Paris: Masson, 1955.

MIAO, P.; Shi, Y.-G.; TAM, L.-F. On geometric problems related to Brown-York and Liu-Yau quasilocal mass. *Comm. Math. Phys.*, v. 298, n. 2, p. 437–459, 2010.

MIAO, P.; TAM, L.-F. On the volume functional of compact manifolds with boundary with constant scalar curvature. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, v. 36, n. 2, p. 141–171, 2009.

MIAO, P.; TAM, L.-F. Einstein and conformally flat critical metrics of the volume functional. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 363, n. 6, p. 2907–2937, 2011.

MIAO, P.; TAM, L.-F. Scalar curvature rigidity with a volume constraint. *Comm. Anal. Geom.*, v. 20, n. 2, p. 1–30, 2012.

MUILLLER, H.; SEIFERT, J. Two asymmetric black holes can not be in static equilibrium. *Int.J.Theo.Phys.*, v. 8, p. 443–450, 1973.

OBATA, M. Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere. *J. Math. Soc. Japan*, v. 14, p. 333–340, 1962.

OKUMURA, M. Hypersurfaces and a pinching problem on the second fundamental tensor. *Amer. J. Math.*, v. 96, p. 207–213, 1974.

O'NEILL, B. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity.* Academic Press, London, 1983.

PETERSEN, P.; WYLIE, W. On the classification of gradient ricci solitons. *Geom. Topol.*, v. 14, p. 2277–2300, 2010.

QING, J.; YUAN, W. A note on static spaces and related problems. *J. Geom. and Phys.*, v. 74, p. 18–27, 2013.

REILLY, R. Application of the Hessian operator in a Riemannian manifold. *Indiana Univ. Math. J.*, v. 26, p. 459–472, 1977.

SCORPAN, I. *The wild world of 4-manifolds.* Providence: American Mathematical Society, 2005.

VIACLOVSKY, J. Course Web Page: Math 865, Advanced Topics in Geometry, 2011. Fall, Topics course in Riemannian Geometry.

W., GIBBONS G. The motions of black holes. *Commun. Math.Phys.*, v. 35, p. 13–23, 1974.

YUAN, W. Volume comparison with respect to scalar curvature arXiv:1609.08849v1 [math.DG], 2016. Disponível em: <http://arxiv.org/pdf/1609.08849v1.pdf>. Acesso em: 22 abr. 2017.