UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ALEX ALEXANDRINO AQUINO

APLICAÇÕES LÚDICAS DA TEORIA DOS NÚMEROS

FORTALEZA
2013

ALEX ALEXANDRINO AQUINO

APLICAÇÕES LÚDICAS DA TEORIA DOS NÚMEROS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

A669a Aquino, Alex Alexandrino

Aplicações lúdicas da teoria dos números / Alex Alexandrino Aquino. – 2013.

39 f. : il., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2013.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Jogos no ensino da matemática. 2. Teoria dos números. 3. Ensino médio. I. Título.

CDD 793.74

ALEX ALEXANDRINO AQUINO

APLICAÇÕES LÚDICAS DA TEORIA DOS NÚMEROS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Luiz Antonio Caetano Monte
Universidade de Fortaleza (UNIFOR)

Dedico este trabalho aos meus pais Anetonio Bezerra Aquino e Maria josé Alexandrino Aquino, à minha esposa Gledsiane da Silva Lima Aquino e aos meus irmãos Antonio Alexandre Bezerra, Adriano Alexandrino Aquino e Alessandra Alexandrino Aquino.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por todas as bençãos concedidas.

Agradeço a todos que me deram apoio e incentivo, especialmente meus pais, minha esposa e meus irmãos.

Agradeço ao meu professor e orientador Marcelo Ferreira de Melo, pelas aulas, indicações e pronto atendimento ao trabalho de orientação e pelo compromisso contínuo durante todo o programa de mestrado.

Agradeço aos professores, José Afonso de Oliveira, Marcos Ferreira de Melo, José Robério Rogério, José Othon Dantas Lopes, Cleon da Silva Barroso, José Fábio Bezerra Montenegro pelas aulas ministradas e dedicação neste projeto de mestrado.

Agradeço a todos os meus colegas de pós-graduação em matemática da UFC, em especial, a Francisco José Calixto de Sousa e Juarez Alves Barbosa Neto, pelas grandes contribuiões ao longo do curso.

Agradeço ao meu amigo Marcelo Miranda da Silva, pelo apoio, pelo incentivo e pelas contribuições relacionadas à informática.

Enfim, agradeço a todos que de maneira direta ou indireta contribuíram para realização deste curso.

“Felizes aqueles que se divertem com problemas que educam a alma e elevam o espírito."

Fenelon

RESUMO

Neste trabalho são abordados jogos matemáticos populares como a Torre de Hanói e jogo de Nim, bem como os tópicos da teoria dos números que fundamentam tais jogos, apresentando argumentos matemáticos para explicar como e por que funcionam, permitindo assim, que o educando ao jogar, possa aplicar os conhecimentos matemáticos adquiridos. Primeiramente, os jogos são apresentados, depois são abordados conhecimentos matemáticos da teoria dos números. E mais adiante é feita a relação entre jogo e toeria.

Palavras-chave: Jogos Matemáticos, Ensino de Matemática, Divisibilidade, Bases Numéricas e Teoria dos Números.

ABSTRACT

This work addressed mathematical games popular as the Tower of Hanoi and game Nim, as well as the topics of number theory underlying such games, presenting mathematical arguments to explain how and why they work, thus allowing the student to play can apply the mathematical knowledge acquired. First, the games are presented, are then discussed the mathematical theory of numbers. And further is done the relationship between game and toeria.
Keywords: Math Games, math teaching, Severability, Numerical Bases and Theory of Numbers.

Sumário

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Ser educador no Brasil é exercer uma das profissões mais dígnas e prazerosas da humanidade. Porém este é um profissional que enfrenta muitas dificuldades no exercício de sua profissão. Parte das dificuldades encontradas estão relacionadas à falta de atenção, de motivação que muitos discentes apresentam e isto prejudica muito o processo de ensino aprendizagem. Para tentar solucionar estes problemas relacionados à falta de atenção e de motivação detectados constantemente nas salas de aula, principalmente do sistema de ensino público da educação básica, é preciso que o educador tente dinamizar sua prática docente, para isto deve buscar conhecer e utilizar ferramentas lúdicas que possam tornar suas aulas mais atrativas aos olhos dos alunos. E no ensino de Matemática esta necessidade de dinamizar a prática docente é maior ainda, pois se trata de uma disciplina que é vista de maneira equivocada por muitos, como sendo uma disciplina de difícil compreensão, baseada só em números, fórmulas e cálculos mecanizados.

Como dito anteriormente, muitos possuem uma visão equivocada da Matemática, e isto deve-se ao fato de não perceberem a importância que esta disciplina sempre teve e tem no cotidiano das pessoas, estando presente e sendo necessária em tudo que se possa imaginar, nas grandes invenções tecnológicas e até mesmo em brincadeiras e jogos simples e antigos. E para fazer com que as pessoas vejam a Matemática da forma correta e reconheçam sua importância desde a antiguidade à atualidade, a atuação de um profissional é imprescindível, a do professor, mas para isto ele deve dinamizar o ensino da mesma, contextualizando e utilizando ferramentas lúdicas que motivem seus alunos, que provoquem neles a curiosidade e o desejo de aprender cada vez mais e assim conhecer melhor o fascinante mundo desta disciplina.

Neste sentido os jogos são grandes aliados do professor de Matemática, por estimularem os discentes, despertando neles o desenvolvimento do pensamento criativo e do raciocínio lógico, dando mais autonomia e criatividade aos mesmos nos momentos de tomarem decisões para solucionar problemas. É natural no ser humano o interesse por jogos e uma vez que um aluno passa a gostar de jogos matemáticos passa a gostar também de Matemática, despertando assim, o desejo de ir além, procurando buscar novos conhecimentos. Deste modo os jogos acabam atraindo a atenção dos educandos para os temas a serem estudados na sala de aula. Por tanto a implantação de jogos no processo de ensino aprendizagem contribui para uma siginificativa evolução no aprendizado da Matemática.

Capítulo 2

JOGOS MATEMÁTICOS

2.1 Torre de Hanói

Um jogo antigo e bastante popular é a Torre de Hanói, criado em 1882 por Edouard Lucas, um matemático francês. Encontrado geralmente em peças de madeira, sendo formado por uma base, três hastes(pinos) que são fincados na posição vertical na base e um certo números de discos de diâmetros distintos com um furo no centro, que são inicialmente empilhados em uma das hastes de modo que nenhum deles fique sobre outro disco de diâmetro menor. Assim todos os discos são dispostos inicialmente em qualquer uma das hastes em ordem crescente de diâmetro de cima para baixo, lembrando desta forma a figura de uma torre. E o objetivo deste jogo é transferir todos os discos de uma haste para outra, movimentando um de cada vez, com a condição de que em nenhum momento um disco fique sobre outro de tamanho menor. Neste jogo é preciso técnicas estratégicas a cada jogada para assim alcançar o objetivo final, por isso contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico, do planejamento e solução de problemas.

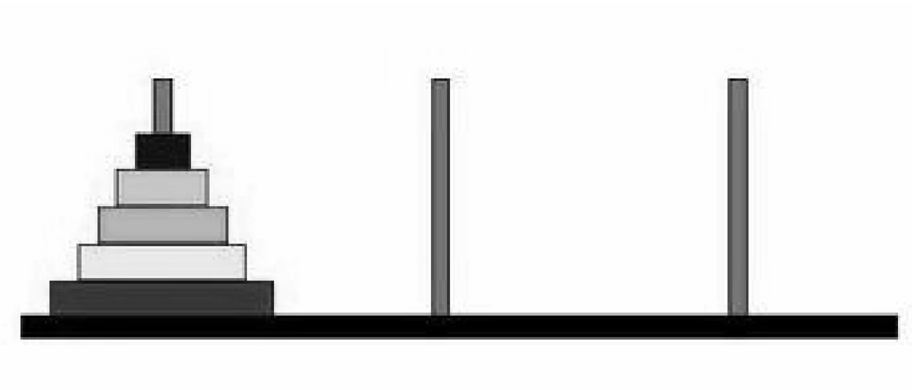


Figura 2.1: Torre de Hanói: Jogos Matemáticos.

Com apenas um disco, obviamente, basta um único movimento para transferí-lo de uma haste para outra. E com dois discos, realiza-se o primeiro movimento tranferindo o de menor diâmetro para uma segunda haste, o segundo movimento transferindo o outro disco para a terceira haste e o terceiro movimento colocando o primeiro disco transferido sobre o segundo e assim bastam três movimentos para transferir os dois discos de uma haste para outra. A medida em que a quantidade de discos aumenta, o jogo torna-se mais interessante e desafiador, exigindo um número maior de movimentos, aumentando assim o grau de dificuldade, exigindo, consequentemente, mais habilidade e concentração ao jogador. E o aumento no grau de dificuldade já é evidenciado se aumentar o número de discos para três e assim sucessivamente. Pois bem, para tranferir três discos de uma haste para outra, considerando A o disco de diâmetro menor, B o de diâmetro intermediário e C o de maior diâmetro, realiza-se o primeiro movimento transferindo A(de menor diâmetro) para uma segunda haste, no segundo movimento transfere-se B(o segundo disco) para a terceira haste, ficando assim, um disco em cada haste. No terceiro movimento coloca-se o disco A sobre o B, ficando assim uma haste sem discos. No quarto movimento muda-se o disco C para a haste que ficou sem disco no movimento anterior e assim, a haste onde estavam inicialmente os três discos fica vazia. No quinto movimento retira-se o disco A de cima do B colocando-o na haste que ficou sem disco no movimento anterior. Agora, no sexto movimento coloca-se o disco B sobre o disco C e finalmente no sétimo movimento coloca-se o disco A sobre os outros, empilhando assim todos os discos uma só haste. E por tanto, bastam sete movimentos para transferir os três dicos de uma haste para outra.

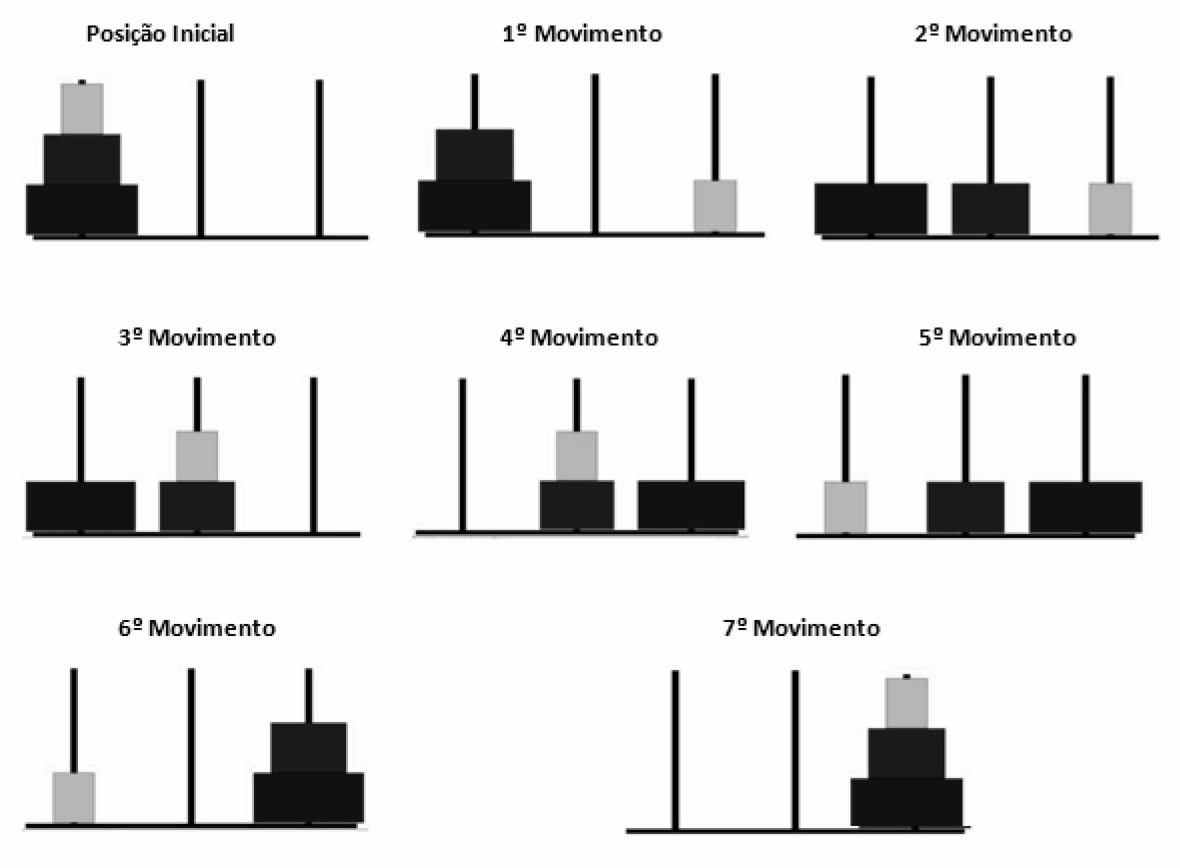


Figura 2.2: Movimentos da Torre de Hanói com 3 discos: Jogos Matemáticos.

É natural que alguém se pergunte: a Torre de Hanói pode ter quantos discos? e quantos movimentos bastam para solucionar tal jogo?. Para responder tais perguntas precisa-se conhecer teorias matemáticas que dão fundamentação teórica às respostas, por isso mais adiante abordarei tais teorias e apresentarei as respostas.

2.2 Jogo de Nim

Um outro jogo interessante é o NIM, de origem chinesa, ganhou destaque ao ponto de ser abordado em um artigo científico na revista Annals of Mathematics em 1901, e se popularizou,

mais ainda, após aparecer em cenas do filme "O Ano Passado em Marienbad"de Alain Resnais em 1951. A palavra Nim é de origem inglesa e significa tirar ou retirar. Este é um jogo bastante simples, disputado por duas pessoas que dispondo de uma quantidade de objetos, aglomerados em um único grupo ou distribuídos em três fileiras(com quantidades distintas de objetos), cada jogador pode retirar, na sua vez, de 1 a uma quantidade máxima de objetos previamente fixada por ambos. O objetivo do jogo é retirar todos os objetos. E define-se previamente se quem retirar o último objeto é considerado perdedor ou vencedor. Por exemplo:
Os garotos Adriano e Alexandre, dispondo de um grupo de 14 palitos de fósforo, sentaram no chão da sala da casa de Adriano, para jogar o Nim. Eles decidiram que, a cada jogada, cada jogador podia retirar de 1 a 3 palitos. Sendo vencedor aquele que retirasse o último palito.
Adriano, iniciou o jogo e retirou 2 palitos (restando assim, 12 palitos no jogo).
Alexandre retirou 3 palitos (restando assim, 9 palitos no jogo).
Na jogada seguinte, Adriano retirou 1 palito (restando assim, 8 palitos no jogo).
E Alexandre retirou 2 palitos (restando assim, 6 palitos no jogo).
Em seguida, Adriano retirou 2 palitos (restando assim, 4 palitos no jogo).
E Alexandre, 1 palito (restando assim, 3 palitos no jogo).
E por fim, Adriano retira os 3 palitos que restavam e assim vence o jogo.

Tendo perdido o jogo, Alexandre desafia, então, Adriano para jogar novamente com os mesmos 14 palitos. Adriano aceita o desafio, porém, como era mais esperto, propõe que desta vez, quem retirar o último palito perde o jogo e vai logo dizendo como eu venci o jogo anterior, eu começo novamente.
E Adriano, iniciou o jogo retirando 1 palito (restando assim, 13 palitos).
Alexandre também retirou 1 palito (restando assim, 12 palitos).
Na jogada seguinte, Adriano retirou 3 palitos (restando assim, 9 palitos).
E Alexandre retirou 2 palitos (restando assim, 7 palitos).
Em seguida, Adriano também retirou 2 palitos (restando assim, 5 palitos).
E Alexandre, 1 palito(restando assim, 4 palitos).
No passo seguinte, Adriano retira 3 palitos(restando assim 1 palito).
E Alexandre, retira, então, o último palito e perde o jogo, por tanto, Adriano vence novamente.

Alexandre não desiste e desafia Adriano novamente, mas, desta vez, pede que os palitos sejam dispostos em três fileiras com quantidades distintas de palitos e alternadamente, cada jogador deve retirar um número qualquer de palitos de uma, e de apenas uma, das fileiras, sendo considerado vencedor aquele que retirar o último palito. E eles decidem, então, jogar com 22 palitos, colocando 6 na 1ª fileira, 7 na 2ª e 9 na 3ª. E Adriano, mais um vez diz, eu começo.
Formação inicial: 1ª fileira: | | | | | | - 2ª fileira: | | | | | | | - 3ª fileira: | | | | | | | | |
Adriano iniciou retirando 3 palitos da 1ª fileira, deixando as fileiras do seguinte modo:
1ª fileira: | | | - 2ª fileira: | | | | | | | - 3ª fileira: | | | | | | | | |
Alexandre, na sua vez, retirou 5 palitos da 3ª fileira, deixando as fileiras do seguinte modo:
1ª fileira: | | | - 2ª fileira: | | | | | | | - 3ª fileira: | | | |
e Adriano novamente retirou 3 palitos da 1ª, deixando as fileiras do seguinte modo:
1ª fileira: vazia - 2ª fileira: | | | | | | | - 3ª fileira: | | | |
já Alexandre, na jogada seguinte, retirou 3 palitos da 2ª, deixando as fileiras do seguinte modo:
1ª fileira: vazia - 2ª fileira: | | | | - 3ª fileira: | | | |
a seguir Adriano, retirou 2 palitos da 3ª, deixando as fileiras do seguinte modo:
1ª fileira: vazia - 2ª fileira: | | | | - 3ª fileira: | |
e Alexandre retirou 2 palitos da 2ª, deixando as fileiras do seguinte modo:

1ª fileira: vazia - 2ª fileira: | | - 3ª fileira: | |
depois Adriano retirou 1 palito da 2ª, deixando as fileiras do seguinte modo:
1ª fileira: vazia - 2ª fileira: | - 3ª fileira: | |
já Alexandre retirou 1 palito da 3ª, deixando as fileiras do seguinte modo:
1ª fileira: vazia - 2ª fileira: | - 3ª fileira: |
E por fim, Adriano retirou o palito da 2ª fileira, restando assim, o último palito na 3ª fileira, que foi retirado por Alexandre que enfim, conseguiu vencer Adriano no jogo do Nim.

2.3 Moeda Falsa

Situação 1**:**
Numa bolsinha estão 9 moedas idênticas, sendo que 8 delas têm o mesmo peso e uma moeda é mais leve que as demais e por tanto é falsa. Utilizando uma balança de dois pratos, e sem pesos, quantas pesagens são suficientes para descobrir a moeda falsa?

Situação 2**:**
Um garoto possui 4 moedas idênticas, onde 3 têm o mesmo peso e uma é falsa e assim pesa menos que as demais. Utilizando uma balança de dois pratos, e sem pesos, quantas pesagens são suficientes para descobrir a moeda falsa?

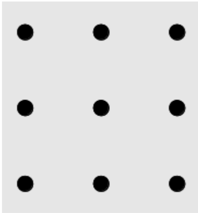
Situação 3**:**
Um possui 8 moedas de ouro idênticas, das quais sete tem o mesmo peso e uma pesa menos que as demais por ser falsa. Utilizando uma balança de dois pratos, e sem pesos, quantas pesagens são suficientes para descobrir a moeda falsa?

Situação 4**:**
Um morador de rua, pedindo esmolas, contabilizou ao final do dia 27 moedas idênticas de um real. Porém, ficou sabendo que alguém de propósito lhe deu uma moeda falsa de um real e, por ser honesto, não queria passar esta moeda falsa para outra pessoa e assim tentou descobri-la. Caso tivesse a disposição uma balança de dois pratos, e sem pesos, quantas pesagens seriam suficientes para descobrir a moeda falsa?

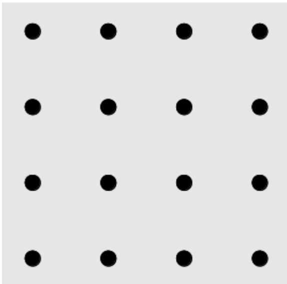
Situação 5**:** Adriano tem sete moedas idênticas, porém duas delas são falsas e pesam menos que as demais. Utilizando uma balança de dois pratos, e sem pesos, quantas pesagens são suficientes para descobrir as duas moedas falsas?

2.4 Jogos com Reticulado

Situação 1**:**
Utilizando um lápis, cubra os 9 pontos no reticulado da figura abaixo traçando 4 sementos de reta sem tirar o lápis do papel.



Situação 2**:**
Utilizando um lápis, cubra os 16 pontos no reticulado da figura abaixo traçando 6 segmentos de reta sem tirar o lápis do papel.



2.5 Jogos Envolvendo as Operações Básicas

Jogo 1**:**
Utilizando as peças de um dominó é possivel fazer uma brincadeira interessante, que pode ser feita pelo professor em sala de aula com seus alunosou por alguém que queira impressionar os amigos. Bem, comece colocando todas as peças com as faces numeradas voltadas para baixo e em seguida embaralhe-as. Peça a um colega que escolha uma das peças sem que você veja quais são os algarismos da mesma. É possível com o auxílio de algumas continhas descobrir a peça que seu colega pegou. Para isto peça a ele que escolha um dos algarismos da peça escolhida e multiplique por cinco, em seguida some três ao resultado da multiplicação. Depois peça que multiplique o resultado obtido anteriormente por dois. Agora peça que some o outro algarismo da peça do dominó com o resultado da multiplicação anterior. E por fim peça para seu colega dizer o resulado final. Deste resultado basta subtrair seis para descobrir os algarismos da peça escolhida pelo colega, já que o resultado desta subtração apresenta exatamente os dois algarismos que compoem a peça. Por exemplo se o reultado final for 26, você faz a seguinte subtração $26 - 6 = 20$, isto significa que a peça escolhida tem os algarismos dois e zero.

Outros modos de impressionar um amigo, usando algumas continhas:

Jogo 2**:**
Peça que ele pense em um número qualquer e multiplique por 6. E a seguir some 12. Depois, peça que divida por 3 o resultado obtido da soma anterior. E em seguida peça que do resultado desta divisão subtraia o dobro do número que ele pensou. E antes que ele apresente o resultado diga-o que o valor resultante destas contas é 4, deixando seu amigo impressionado.

Jogo 3**:**
Peça que ele, em segredo, pense em um número natural com pelo menos três algarismos. Peça-o para obter um número, trocando de posição algarismos do número que pensou incialmente. A seguir peça para subtrair o menor do maior dos dois números. E por fim, peça para reter um dos algarismos diferente de zero e divulgar os outros algarismos do resultado da subtração anterior. E você descubrirá o algarismo retido pelo seu amigo, pois o resultado da subtração é um número divisível por 9 e por tanto a soma dos algarismos deste número também é divisível por 9 e então para fazer a descoberta você deve procurar dentre os algarismos de 1 a 9, qual é o que somado com os algarismos divulgados por seu amigo resulta em um número divisível por 9.
Jogo 4**:**
Peça ao amigo para escolher um número xyz de três algarismos no sistema decimal, de modo que a diferença entre o algarismo das centenas x e o das unidades z seja, pelo menos, duas unidades. A seguir peça-o que tomando os números xyz e zyx(obtido invertendo a ordem dos algarismos de xyz, da direita para a esquerda), subtraia o menor do maior, obtendo o número abc. Em seguida, peça-o que some abc com cba e antes que ele anuncie o resultado desta última operação você o surpreenderá afirmando que é 1089.

2.6 Tabelas de Números Naturais

Dispondo de 6 tabelas (A, B, C, D, E e F) conforme a figura abaixo, peça a alguém que pense em um número natural de 1 a 63. Você pode descobrir tal número, desde que a pessoa indique em qual(quais) tabela(s) o número pensado aparece. E para fazer a descoberta de tal número, basta somar o primeiro número de cada tabela que ele pertence.

A	1	3	5	7	
9	11	13	15	17	19
21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43
45	47	49	51	53	55
	57	59	61	63	

D	8	9	10	11	
12	13	14	15	24	25
26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45
46	47	56	57	58	59
	60	61	62	63	

B	2	3	6	7	
10	11	14	15	18	19
22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43
46	47	50	51	54	55
	58	59	62	63	

E	16	17	18	19	
20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53
54	55	56	57	58	59
	60	61	62	63	

C	4	5	6	7	
12	13	14	15	20	21
22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45
46	47	52	53	54	55
	60	61	62	63	

F	32	33	34	35	
36	37	38	39	40	41
42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53
54	55	56	57	58	59
	60	61	62	63	

Capítulo 3

TÓPICOS DA TEORIA DOS NÚMEROS

Serão abordados neste capítulo, tópicos da Teoria dos Números no universo dos números naturais. Considere $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ o conjunto dos números naturais.

3.1 Princípio de Indução Matemática

Sejam a um número natural e $p(n)$ uma proposição. Suponha que
(i) $p(a)$ é verdadeira, e que
(ii)$\forall n \geq a$, a veracidade de $p(n)$ implica a veracidade de $p(n+1)$.
Então, $p(n)$ é verdadeira $\forall n \geq a$.

Este princípio é um importante instrumento para se fazer demonstrações matemáticas, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.1 *Mostre que* $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2, \forall n \in \mathbb{N}$.

Solução: Para $n = 1$ *é claro que vale a expressão acima. Agora, supondo que a expressão é válida para* n*, devemos mostrar que também vale para* $n + 1$*, ou seja, considerando que* $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$ *devemos mostrar que* $1+3+5+...+[2(n+1)-1] = (n+1)^2$.
Note que
$1 + 3 + 5 + ... + [2(n + 1) - 1] =$
$= 1 + 3 + 5 + ... + (2n + 1)$
$= 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1)$
$= n^2 + 2n + 1$
$= n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$

Por tanto, por indução temos que $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2, \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.2 *Mostre que* $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n.(n + 1), \forall n \in \mathbb{N}$.

Solução: Para $n = 1$ *obviamente a expressão acima é válida. Agora, supondo que a expressão é verdadeira para* n*, devemos mostrar que é também verdadeira para* $n + 1$*, ou seja devemos mostrar que* $2 + 4 + 6 + ... + 2(n + 1) = (n + 1) \cdot (n + 2)$.
Note que
$2 + 4 + 6 + ... + 2(n + 1) =$
$= 2 + 4 + 6 + ...(2n + 2) =$
$= 2 + 4 + 6 + ... + 2n + (2n + 2) =$
$= n.(n + 1) + (2n + 2) =$
$= n^2 + n + 2n + 2 =$
$= n^2 + 3n + 2 =$
$= (n + 1) \cdot (n + 2)$

Por tanto, por indução, temos que $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n \cdot (n + 1), \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.3 *Mostre por indução que* 9 *divide* $10^n - 1$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*.*
Solução: Para $n = 1$ *temos que* $10^1 - 1 = 10 - 1 = 9$ *e* $9|9$*, assim a expressão é válida para* $n = 1$*. Agora, supondo que* 9 *divide* $10^n - 1$ *(e assim existe* $q \in \mathbb{N}$ *tal que* $10^n - 1 = 9q$*), devemos mostrar que* 9 *também divide* $10^{n+1} - 1$*. Note que* $10^{n+1} - 1 = 10 \cdot 10^n - 1 = (9 + 1) \cdot 10^n - 1 = 9 \cdot 10^n + 10^n - 1$*, mas por hipótese de indução temos que* $10^n - 1 = 9q$*, assim* $10^{n+1} - 1 = 9 \cdot 10^n + 10^n - 1 = 9 \cdot 10^n + 9q = 9 \cdot (10^n + q)$ *e desta forma* $9|(10^{n+1} - 1)$*.*
Por tanto, por indução temos que 9 *divide* $10^n - 1$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*.*

3.2 Princípio da Boa Ordenação

Todo subconjunto não-vazio X dos números naturais possui um menor elemento. Ou seja, existe um elemento $a \in X$ que é menor que todos os demais elementos deste subconjunto de $\mathbb{N}$.

Este princípio também é um importante instrumento para se fazer demonstrações matemáteicas, sendo inclusive, equivalente ao Princípio de Indução Matemática.

3.3 Divisibilidade

Sendo a e b dois números naturais com b diferente de zero, diz-se que b divide a e escreve-se $b|a$, quando existe um natural q tal que $a = b \cdot q$. Diz-se ainda, que b é um divisor de a(q também é divisor de a) e que a é múltiplo de b(e de q).

3.4 Divisão Euclidiana

Dados dois números naturais a e b com $b < a$. Existem unicamente dois naturais q e r tais que $a = b \cdot q + r$, com $0, < r < b$. O números q é o quociente da divisão de a por b e r é o resto.

3.5 Bases numéricas

Dados dois números naturais a e b, a representação de a numa base b, de um modo único, é
$a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + ... + r_1 b^1 + r_0 b^0)$ com $r, n \in \mathbb{N}, b > 1$ e $0 < r < b$

Esta representação é chamada de expansão relativa à base b e escreve-se $a = (r_n r_{n-1} ... r_1 r_0)_b$ para designar a representação de a na base b.

No Sistema de Numeração Decimal(ou Sitema Numérico na Base 10) tem-se $b = 10$, $n \in \mathbb{N}$ e $r_n \in \{0, 1, 2, 3, ..., 9\}$.
Por exemplo:
$5.698 = 5 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 8$
$9.507.236 = 9 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 6$
Já no sistema de base 2 ou sitema binário, tem-se $b = 2$, $n \in \mathbb{N}$ e $r_n \in \{0, 1\}$. E assim a expansão binária de a é

$$a = r_n 2^n + r_{n-1} 2^{n-1} + ... + r_1 2^1 + r_0 2^0$$

Deste modo, todo número natural é representado por uma sequência de 0 e 1. Note que,
$1 = 1 \cdot 2^0$, assim o natural 1 é representado por 1 no sistema de base 2 e escreve-se $1 = (1)_2$.
$2 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$, assim o natural 2 é representado por 10 no sistema de base 2 e escreve-se $2 = (10)_2$.
$3 = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$, assim o natural 3 é representado por 11 no sistema de base 2 e escreve-se $3 = (11)_2$.
$4 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$, assim o natural 4 é representado por 100 no sistema de base 2 e escreve-se $4 = (100)_2$.
$5 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$, assim o natural 5 é representado por 101 no sistema de base 2 e escreve-se $5 = (101)_2$.
$6 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$, assim o natural 6 é representado por 110 no sistema de base 2 e escreve-se $5 = (110)_2$. E assim por diante.
Vejamos outros naturais representados na base 2:
$30 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$, assim o natural 30 é representado por 11110 no sistema de base 2 e escreve-se $30 = (11110)_2$.
$53 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$, assim o natural 53 é representado por 110101 no sistema de base 2 e escreve-se $53 = (110101)_2$.

Vale ressaltar que com a utilização da expansão binária de a ($a = r_n 2^n + r_{n-1} 2^{n-1} + ... + r_1 2 + r_0$ com $n \in \mathbb{N}$ e $r_n \in \{0, 1\}$), se escreve de modo único, todo número natural como soma de potências distintas de 2. Por exemplo:
$1 = 2^0$
$2 = 2^1$
$3 = 2^1 + 2^0$
$22 = 2^4 + 2^2 + 2^1$

O fato de todo número natural ser escrito, de forma única, como potências distintas de 2, justifica o funcionamento do jogo com as tabelas de números naturais mostrado no segundo capítulo.

Capítulo 4

JOGOS E TEORIA

4.1 Torre de hanói e Indução

Utilizando o Princípio de Indução Matemática podemos mostrar que a Torre de Hanói tem solução para qualquer quantidade n de discos, com $n \in \mathbb{N}$. Pois bem,
para $n = 1$, (ou seja, a Torre de Hanói com um disco) já vimos que tem solução.
Agora, supondo que a Torre de Hanói com n discos tem solução, devemos mostrar que o jogo com $n + 1$ discos também tem solução.
Bem, com $n + 1$ discos, deve-se transferir, inicialmente, os n discos superiores para uma das hastes livre(já que, por hipótese de indução, o jogo com n discos tem solução), ficando assim, a haste inicial com um disco(o maior), outra com n discos e uma haste vazia. A seguir, muda-se o disco maior, que restou na haste inicial, para a haste vazia. E por fim, transfere-se os n discos para a haste que contém o disco maior. Assim, supondo que a Torre de Hanói tem solução para n discos, mostra-se que há solução para $n+1$ discos e, por tanto, por indução, a Torre de Hanói tem solução para qualquer quantidade n de discos, com $n \in \mathbb{N}$.
Como vimos no segundo capítulo, para jogar a Torre de Hanói com apenas um disco basta fazer um único movimento, já com dois discos são suficientes 3 movimentos e com três discos são 7 movimentos. Note que

$$1 = 2^1 - 1$$

$$3 = 2^2 - 1$$

$$7 = 2^3 - 1$$

Os dados acima sugerem que a quantidade de movimentos suficientes para transferir n discos de uma haste para outra, na Torre de Hanói, é $2^n - 1$. Porém, isto não prova que para finalizar o jogo da Torre de Hanói com n discos são suficientes $2^n - 1$ movimentos. A prova de tal fato pode ser feita também por indução sobre n, com $n \in \mathbb{N}$. Pois bem:
para $n = 1$(ou seja, Torre de Hanói com 1 disco), realiza-se 1 movimento e $1 = 2^1 - 1$, por tanto a afirmação de que para n discos, são suficientes $2^n - 1$ movimentos é válida para $n = 1$.
Agora, supondo que para finalizar o jogo da Torre de Hanói com n discos são suficientes $2^n - 1$ movimentos, devemos mostrar que para finalizar o jogo com $n+1$ discos são suficientes $2^{n+1}-1$ movimentos.
Bem, ao provar que a Torre de Hanói tem solução para qualquer quantidade n de discos, vimos que para movimentar os $n + 1$ discos, movimenta-se primeiramente os n discos superiores para uma das hastes vazia, e para fazer isto, por hipótese de indução, realiza-se $2^n - 1$ movimentos. A seguir, muda-se o disco maior para a haste vazia, e para fazer isto, basta 1 movimento. E

por fim, transfere-se os n discos para a haste que contém o disco maior, realizando, para fazer isto,$2^n - 1$ movimentos. Decorre, então, que para movimentar os $n + 1$ discos, são suficientes $2.(2^n - 1) + 1 = 2.2^n - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$ movimentos.
Por tanto, por indução, tem-se que a quantidade de movimentos suficientes para transferir n discos de uma haste para outra, na Torre de Hanói, é $2^n - 1$.

Uma curiosidade sobre este jogo é que seu idealizador, o matemático francês Edouard Lucas, criou a seguinte lenda:
Na origem do tempo, num templo Hanói, Deus colocou 64 discos perfurados, de ouro puro e com diâmetros diferentes, ao redor de uma de três colunas de diamante, sendo que o primeiro disco colocado foi o de maior diâmetro, o segundo foi o que tinha o segundo maior diâmetro e assim por diante. Em seguida Deus ordenou a um grupo de sacerdotes que movessem todos os 64 discos para uma outra coluna, movendo um de cada vez, sendo que eles podem ser deslocados de uma coluna para qualquer outra desde que um disco não fique em cima de outro com diâmetro menor. E o mundo acabaria quando todos os 64 discos fossem transferidos para uma outra coluna.
Assim, segundo esta lenda, a duração do mundo, considerando que a cada segundo era realizado o movimento de um disco, era de $2^{64} - 1$ segundos. Assim, a duração do mundo, seria de aproximadamente, um bilhão de séculos.

4.2 Jogo de Nim e Divisão Euclidiana

C.L. Bouton ao públicar o artigo científico sobre o Jogo de Nim, na revista Annals of Mathematics em 1901, mostrou que há uma estratégia que leva, quem inicia o jogo, a sempre vencer. Para explicar tal estratégia, consideremos a a quantidade de objetos(palitos, pedrinhas, etc.) dispostos, em um único grupo, no início do jogo e b a quantidade máxima de objetos que cada jogador, na sua vez, possa tirar, com $b > 1$). Analisemos, então, as situações a seguir,
Situação 1: Se $b + 1$ não divide x nem $x - 1$ então $x = (b + 1).q + r$, com $r > 1$ (q e r são, respectivamente, o quociente e o resto da Divisão Euclidiana de x por $b + 1$). Se dois jogadores decidirem que perderá o jogo aquele que retirar o último objeto, então quem fizer a primeira jogada ganhará o jogo, se antes de iniciar, agrupar mentalmente os objetos em q grupos de $b + 1$ objetos, um grupo com $r - 1$ objetos e um outro grupo com um único objeto e na sua primeira jogada deve retirar os $r - 1$ objetos. Assim a cada vez que seu adversário retirar de 1 a b objetos, sobrará pelo menos um objeto em um grupo de $b + 1$ objetos e o primeiro jogador deve retirar justamente o que sobrar neste grupo. Assim, após cada jogada de seu adversário, o primeiro jogador vai eliminando um grupo de $b + 1$ objetos. E então, quando eliminar todos os grupos de $b + 1$ objetos, ficará apenas o grupo de 1 objeto para seu adversário retirar e perder o jogo.
Vejamos um exemplo:
Dois jogadores(A e B) decidem jogar com 22 palitos com a condição de que, a cada jogada, seja retirado de 1 a 3 palitos por cada jogador. Note que $1 + 3 = 4$ e $22 = 4.5 + 2$. Se o jogador A iniciar o jogo, então para vencer, deve imaginar que são 5 grupos de 4 palitos e outros dois grupos com 1 palito. E na sua primeira jogada tem que retirar $2 - 1 = 1$ palito, para que fique então 5 grupos com 4 palitos e 1 palito sobrando . Veja o esquema abaixo que que analisa jogada por jogada:
1ª jogada de A: retirar 1 palito.
1ª jogada de B: retira de 1 a 3 palitos. Vamos supor que B retire 1 palito.
2ª jogada de A: Deve eliminar o primeiro grupo de 4 palitos, para isto, A nesta jogada deve retirar $4 - 1 = 3$ palitos.

2ª jogada de de B: retira de 1 a 3 palitos. Vamos supor que B retire 3 palitos.
3ª jogada de A: Deve eliminar o segundo grupo de 4 palitos, para isto, A nesta jogada deve retirar $4 - 3 = 1$ palito.
3ª jogada de de B: retira de 1 a 3 palitos. Vamos supor que B retire 2 palitos.
4ª jogada de A: Deve eliminar o terceiro grupo de 4 palitos, para isto, A nesta jogada deve retirar $4 - 2 = 2$ palitos.
4ª jogada de de B: retira de 1 a 3 palitos. Vamos supor que B retire 3 palitos.
5ª jogada de A: Deve eliminar o quarto grupo de 4 palitos e assim o jogador A deve retirar $4 - 3 = 1$ palito.
5ª jogada de de B: retira de 1 a 3 palitos. Vamos supor que B retire 1 palito.
6ª jogada de A: Deve eliminar o quinto grupo de 4 palitos, para isto, A nesta jogada deve retirar $4 - 1 = 3$ palitos.
6ª jogada de de B: Como já foram eliminados os cinco grupos de 4 palitos, só sobrou o último palito para B retirar nesta jogada e assim perder o jogo.

Situação 2: Do mesmo modo que na situação anterior, se $b + 1$ não divide x nem $x - 1$ então $x = (b + 1).q + r$, com $r > 1$ (q e r são, respectivamente, o quociente e o resto da Divisão Euclidiana de x por $b + 1$). Se dois jogadores decidirem que ganhará o jogo aquele que retirar o último objeto, então quem fizer a primeira jogada ganhará o jogo, se antes de iniciar, agrupar mentalmente os objetos em q grupos de $b + 1$ objetos e um grupo com r objetos. E na sua primeira jogada deve retirar os r objetos. Assim a cada vez que seu adversário retirar de 1 a b objetos, sobrará pelo menos um objeto em um grupo de $b + 1$ objetos para ser retirado pelo primeiro jogador e desta forma sobrará no final, pelo menos 1 objeto para o primeiro jogador retirar e vencer o jogo.Vejamos um exemplo:
Dois jogadores(A e B) decidem jogar com 22 palitos com a condição de que, a cada jogada, seja retirado de 1 a 4 palitos por cada jogador. Note que $1 + 4 = 5$ e $22 = 5.4 + 2$. Se o jogador A iniciar o jogo, então para vencer, deve imaginar que são 4 grupos de 5 palitos e um outro grupo com 2 palitos. E na sua primeira jogada tem que retirar 2 palitos, para que fique então 4 grupos com 5 palitos e assim, acada vez que o jogador B retirar de 1 a 4 palitos de um certo grupo, sobrará pelo 1 palito neste grupo para ser retirado por A e deste modo A irá retirar o último palito e vencerá o jogo. Veja o esquema abaixo que que analisa jogada por jogada:
1ª jogada de A: retira 2 palitos.
1ª jogada de B: retira de 1 a 4 palitos. Vamos supor que B retire 4 palitos.
2ª jogada de A: Deve eliminar o primeiro grupo de 5 palitos, para isto, A nesta jogada deve retirar $5 - 4 = 1$ palitos.
2ª jogada de de B: retira de 1 a 4 palitos. Vamos supor que B retire 3 palitos.
3ª jogada de A: Deve eliminar o segundo grupo de 5 palitos, para isto, A nesta jogada deve retirar $5 - 3 = 2$ palitos.
3ª jogada de de B: retira de 1 a 4 palitos. Vamos supor que B retire 2 palitos.
4ª jogada de A: Deve eliminar o terceiro grupo de 5 palitos, para isto, A nesta jogada deve retirar $5 - 2 = 3$ palitos. Após esta jogada sobrará apenas 1 grupo de 5 palitos.
4ª jogada de de B: retira de 1 a 4 palitos. Vamos supor que B retire 1 palito. Note que restam apenas 4 palitos.
5ª jogada de A: retira os 4 palitos que restam e assim vence o jogo.

4.3 Jogo de Nim e Representação Binária

Uma outra maneira de jogar o Nim é com n palitos distribuídos em 3 fileiras com quantidades distintas e cada um dos dois jogadores, na sua vez, pode retirar um número qualquer de palitos de somente uma das fileiras, sendo considerado vencedor aquele retirar o último palito. Na estratégia para vencer deve-se, a cada jogada, expressar a quantidade de cada fileira na representação binária e em seguida somar como se fosse na base 10 as três representações binárias. O resultado da soma é chamado de chave inicial do jogo e uma chave pode ser segura(quando todos os algarismos da soma for par) ou insegura(quando todos os algarismos da soma for ímpar). Ganhará o jogo quem deixar a chave segura, logo na sua primeira jogada e nas demais. Veja que foi esta estratégia que Alexandre utilizou para vencer Adriano ao jogar com 22 palitos, sendo 6 na 1ª fileira, 7 na 2ª e 9 na 3ª.
Note que:
$6 = (110)_2$, $7 = (111)_2$, $9 = (1001)_2$ e $110 + 111 + 1001 = 1222$. E desta forma, a chave inicial do jogo 1222 é insegura.
Como Adriano iniciou retirando 3 palitos da 1ª fileira, deixando a mesma com 3 palitos, a 2ª com 7 e a 3ª com 9, a chave continuou insegura, pois $3 = (11)_2$, $7 = (111)_2$, $9 = (1001)_2$ e $11 + 111 + 1001 = 1123$.
Alexandre, na sua vez, retirou 5 palitos da 3ª fileira, restando assim 3 na 1ª fileira, 7 na 2ª e 4 na 3ª. E assim deixou a chave segura, pois $3 = (11)_2$, $7 = (111)_2$, $4 = (100)_2$ e $11 + 111 + 100 = 222$.
Adriano novamente retirou 3 palitos da 1ª, deixando assim, 7 na 2ª e 4 na 3ª fileira. E a chave voltou a ser insegura, pois $7 = (111)_2$, $4 = (100)_2$ e $111 + 100 = 211$.
Já Alexandre, na jogada seguinte, retirou 3 palitos da 2ª e o jogo ficou com 4 na 2ª e 4 na 3ª fileira. E assim, novamente, deixou a chave segura, pois,$4 = (100)_2$ e $100 + 100 = 200$.
A seguir Adriano, retirou 2 palitos da 3ª, deixando 4 na 2ª e 2 na 3ª. E a chave voltou a ser insegura, pois $2 = (10)_2$ e $4 = (100)_2$ e $10 + 100 = 110$.
E Alexandre retirou 2 palitos da 2ª, deixando a 2ª e a 3ª fileira com 2 palitos cada. E novamente a chave fica segura, pois $2 = (10)_2$ e $10 + 10 = 20$.
Depois Adriano retirou 1 palito da 2ª, ficando assim 1 palito na 2 fileira e 2 na 3ª. como $1 = (1)_2$, $2 = (10)_2$ e $1 + 10 = 11$ a chave volta a ser insegura.
já Alexandre retirou 1 palito da 3ª, deixando a 2ª e a 3ª fileira com 1 palito. E mais uma vez deixou a chave segura, já que $1 = (1)_2$ e $1 + 1 = 2$.
Como só resta 1 palito em cada fileira e cada jogador, na sua vez, só pode retirar palitos de um única fileira, Adriano, então retirou o palito que estava na 2ª e Alexandre retirou o palito que estava na 3ª fileira e venceu o jogo.

4.4 Moeda Falsa e Indução

Descobrir qual das moedas é falsa, utilizando um número mínimo de pesagens em uma balança de dois pratos e sem pesos, é algo bastante interessante e estimula a concentração e o raciocínio lógico. Bem, se num grupo de duas moedas, uma é falsa e pesa menos que a outra, obviamente basta fazer uma pesagem para descobri-la. E para descobrir a moeda falsa em um grupo de três moedas, coloca-se uma em cada prato da balança e deixa a outra fora, se os pratos equilibrarem, a moeda procurada é que ficou fora, já se os pratos ficarem desequilibrados, a moeda falsa é a do prato que ficou mais elevado, por tanto com três moedas, basta uma pesagem. Veja como descobrir a moeda falsa em cada grupo abaixo:
4 moedas: Coloca-se 2 em cada prato. Os pratos ficarão desequilibrados e como a moeda falsa

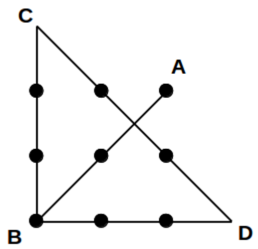
fica no prato mais elevado, as moedas do outro prato são descartadas. E para descobrir qual das duas moedas do prato mais elevado é a falsa, basta fazer uma nova pesagem. Por tanto, bastam 2 pesagens para descobrir qual das 4 moedas é falsa.

9 moedas: Coloca-se 3 moedas no prato esquerdo da balança e 3 no prato direito, deixando assim, 3 moedas fora da 1^{a} pesagem. Se os pratos ficarem equilibrados então a moeda falsa é uma das três que ficaram fora e para descobri-la basta uma nova pesagem e assim, são 2 pesagens para descobrir a moeda falsa. Agora, caso os pratos fiquem desequilibrados a moeda falsa é uma das 3 do prato que ficou mais elevado e para descobri-la basta uma nova pesagem, deste modo são 2 pesagens para descobrir tal moeda. Por tanto, para descobrir qual a moeda falsa em um grupo de 9 moedas bastam 2 pesagens.
Note que para descobrir a moeda falsa (que pesa menos que as demais)em um grupo de 2 moedas é suficiente 1 pesagem e em um grupo de 4 moedas são suficientes 2 pesagens. Observe que $2 = 2^1$ e $4 = 2^2$, nestes casos o número de pesagens suficientes para descobrir a moeda falsa é o expoente da potência de base 2. E isto não é coincidência, utilizando o Pricípio de Indução Matemática podemos mostrar que para se descobrir a moeda falsa em um grupo de 2^n moedas, são suficientes n pesagens. E vamos então fazer a demonstração por indução sobre n de tal fato. Pois bem,
para $n = 1$, temos $2^1 = 2$ moedas e para descobrir a falsa é suficiente 1 pesagem. Agora, supondo que em um grupo de 2^n moedas se descobre a moeda falsa com n pesagens, devemos mostrar que em um grupo de 2^{n+1} moedas, para se descobrir a moeda falsa, são suficientes $n+1$ pesagens. Bem, com 2^{n+1} moedas, primeiramente realiza-se 1 pesagem colocando 2^n moedas em cada prato da balança e o prato que ficar mais elevado é o que contém a moeda falsa, descarta-se então as moedas do outro prato, restando assim 2^n moedas das quais pretende-se descobrir a falsa. Mas, por hipótese de indução, para se descobrir a moeda falsa em grupo de 2^n moedas, são suficientes n pesagens. Assim, são suficiantes $n + 1$ pesagens para se descobrir a moeda falsa em grupo de 2^{n+1} moedas. E por tanto, por indução temos que em um grupo de 2^n moedas, são suficientes n pesagens para se descobrir a moeda falsa que pesa menos que as demais. Assim, em um total de 8 moedas descobre-se a moeda falsa com 3 pesagens, pois $8 = 2^3$.
Vimos que para se descobrir a moeda falsa em um total de 3 moedas basta 1 pesagem, já em um grupo de 9 moedas bastam 2 pesagens. E por indução, prova-se que, em um total de 3^n moedas, das quais uma é falsa e pesa menos que as demais, podemos descobrir tal moeda falsa, com n pesagens. Bem, para $n = 1$ temos 3 moedas e como já vimos basta 1 pesagem. Agora, supondo que para descobrir a moeda falsa em um total de 3^n moedas, são suficientes n pesagens, devemos mostrar que em um total de 3^{n+1} moedas, $(n + 1)$ pesagens são suficientes para se chegar a descoberta da moeda falsa. Como $3^{n+1} = 3.3^n$, então para descobrir a moeda falsa entre as 3^{n+1} moedas, deve-se na 1^{a} pesagem, colocar um grupo de 3^n moedas no prato esquerdo da balança e outro grupo de 3^n meodas no prato direito, deixando assim um outro grupo de 3^n moedas fora da pesagem inicial. Se nesta 1^{a} psagem os pratos ficarem equilibrados então a moeda falsa faz parte do grupo que ficou fora de tal pesagem, agora se os pratos ficarem desequilibrados então a moeda falsa faz parte do prato que ficou mais elevado. De qualquer forma, na 1^{a} pesagem fica identificado o grupo de 3^n moedas que contém a moeda falsa, e neste grupo para se descobrir a moeda falsa, por hipótese de indução, temos que são suficientes n pesagens. Assim, em um total de 3^{n+1} moedas são suficientes $n + 1$ pesagens para se descobrir a moeda falsa. E por tanto, por indução, temos que para se determinar a moeda falsa em um grupo 3^n moedas são suficientes n pesagens. Desta forma, em um grupo de 27 moedas, das quais uma é falsa e pesa menos que as demais, são suficientes 3 pesagens para descobrir a

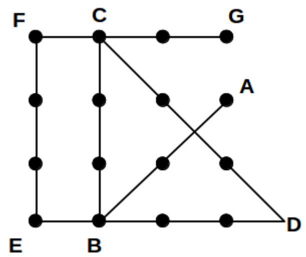
moeda falsa.

4.5 Reticulados e Indução

Como muitos outros desafios matemáticos, o de cobrir os pontos de um reticulado nxn traçando segmentos de reta, sem tirar o lápis do papel, exige concentração e imaginação, servindo assim para desenvolver o raciocínio lógico. A brincadeira começa com um reticulado $3x3$, ou seja com 9 pontos e, para cobrir tais pontos traçando segmentos de reta, utilizando um lápis, sem retirar do papel, trace os segmentos AB, BC, CD e DB como na figura abaixo:



Já para cobrir os 16 pontos de um reticulado $4x4$, traçando segmentos de reta, sem retirar o lápis do papel, trace os sgmentos AB, BC, CD, DE, EF e FG como na figura abaixo:



Como vimos no reticulado com $3^2 = 9$ pontos foram traçados 4 segmentos e no reticulado com $4^2 = 16$ pontos, o número de segmentos traçados foi 6. Note que $4 = 2.3-2$ e $6 = 2.4-2$. Assim, intuitivamente, para cobrir os n^2 pontos de um reticulado nxn, traçando segmentos de reta, sem retirar o lápis do papel, precisamos de $2n-2$ segmentos. Mas, a intuição não garante a veracidade de tal fato e por tanto, precisamos prová-lo. E podemos fazer tal prova por meio de indução matemática sobre $n \geq 3$.
Bem, para $n = 3$ já vimos que são $2.3 - 2 = 4$ segmentos. Agora, supondo que para cobrir os n^2 pontos de um reticulado, traçamos $2n-2$ segmentos de reta, sem retirar o lápis do papel e o último segmento traçado cobre um dos lados do reticulado, vamos mostrar que podemos cobrir os $(n+1)^2$ pontos de um reticulado $(n+1)x(n+1)$, sem retirar o lápis do papel, traçando $2.(n+1)-2$ segmentos de reta. Como $(n+1)^2 = n^2+(2n+1)$ então obtemos reticulado com $(n+1)^2$ pontos, acrescentando $2n+1$ pontos a um reticulado com n^2 pontos. Note que $2n+1$ é a quantidade de pontos de 2 lados consecutivos do reticulado $(n+1)x(n+1)$, e assim para cobrir estes $2n+1$ pontos basta traçar 2 segmentos de reta e como, por hipótese de indução, traçamos $2n-2$ segmentos para cobrir os n^2 pontos, então para cobrir todos os $(n+1)^2$ pontos de um reticulado $(n+1)x(n+1)$, traçamos $(2n-2+2) = [2(n+1)-2]$ segmentos de reta. Por tanto, por indução temos que para cobrir os n^2 pontos de um reticulado nxn, traçando segmentos de reta, sem retirar o lápis do papel, precisamos de $2n-2$ segmentos.

Capítulo 5

CONCLUSÃO

Neste trabalho foram mostrados alguns jogos matemáticos que podem ser utilizados em sala de aula pelos professores de Matemática da educação básica, e assim tais jogos podem contribuir com com processo de ensino-aprendizagem, já que são ferramentas lúdicas que despertam a atenção dos educandos. Estes jogos servem, também, para os alunos brincarem fora do ambiente escolar, com seus amigos ou com seus familiares em casa.

Além dos jogos, neste trabalho abordamos tópicos da teoria dos números, como: Princípio de Indução Matemática, Divisibilidade, Divisão Euclidiana e Bases Numéricas. Tais assuntos foram abordados com o intuito de se fazer a relação entre os jogos e a Matemática que os fundamentam.

Desta forma, com este trabalho espero contribuir para melhorar o ensino de Matemática, especialmente na escola em que trabalho.

Referências Bibliográficas

[1] Hefez, Abramo. *Elementos de Aritmética.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2011.

[2] Berloquin, Pierre. *100 Jogos Numéricos.* Lisboa: Gradiva, 1999.

[3] Sousa, Júlio César de Mello e. *Matemática Divertida e Curiosa.* Rio de Janeiro: Record, 2000.

[4] Bolt, Brian. *Actividades Matemáticas.* Lisboa: Gradiva, 1991.

[5] Stewart, Ian. *Jogos, Conjuntos e Matemática.* Lisboa: Gradiva, 1994.

[6] Oliveira, K. I. M.; Fernández, A. J. C. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010. (Coleção olimpíadas de matemática)