



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RODRIGO MENDES PEREIRA

GEOMETRIA MÉTRICA E TOPOLOGIA DE SUPERFÍCIES  
ALGEBRICAMENTE PARAMETRIZADAS

FORTALEZA

2016

RODRIGO MENDES PEREIRA

GEOMETRIA MÉTRICA E TOPOLOGIA DAS SUPERFÍCIES  
ALGEBRICAMENTE PARAMETRIZADAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: SINGULARIDADES.

Orientador:

Prof. Dr. Lev Birbrair

Coorientador:

Prof. Dr. Juan Jose Nuño Ballesteros

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- P495g Pereira, Rodrigo Mendes.  
Geometria métrica e topologia das superfícies algebricamente parametrizadas / Rodrigo Mendes  
Pereira. – 2016.  
68 f.
- Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em  
Matemática, Fortaleza, 2016.  
Orientação: Prof. Dr. Lev Birbrair.  
Coorientação: Prof. Dr. Juan Jose Nuño Ballesteros.
1. Nós. 2. Aplicações analíticas. 3. Mergulho normal. 4. singularidades. I. Título.

CDD 510

---

RODRIGO MENDES PEREIRA

GEOMETRIA MÉTRICA E TOPOLOGIA DAS SUPERFÍCIES  
ALGEBRICAMENTE PARAMETRIZADAS.

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: SINGULARIDADES.

Aprovada em: 20/07/2016.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Lev Birbrair (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Juan Jose Nuño Ballesteros (Coorientador)  
Universitat de València(UV)

---

Prof. Dr. Alexandre Fernandes (Examinador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Vincent Grandjean (Examinador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Aurélio Menegon Neto (Examinador)  
Universidade Federal da Paraíba(UFPB)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização. Em especial, aos meus pais, por todo apoio e carinho.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela força e fé;

Aos meus pais pela educação, amor e cuidados que se transpassam até os dias de hoje;

A minha irmã pelo amor e amizade;

A minha esposa Kátia Feitosa pelo amor, apoio e compreensão;

A todos meus amigos em particular, Jonas Roberto, Amauri Junior, Renato Targino, Rosa Sérgio e Cícera Barbosa pelo companheirismo e palavras de incentivo;

Aos meus amigos da Teoria de Singularidades Edson, Joserlan e Edvalter pela convivência e companheirismo;

Ao meu orientador Lev Birbrair pela orientação, ensinamentos, incentivo e confiança em mim depositada;

Ao meu co-orientador Juan Jose Nuño Ballesteros pela orientação, ensinamentos e grande acolhida no período em que estive na Espanha;

Aos amigos do período de graduação, mestrado e doutorado em UFC e aos amigos do IFCE;

Ao meu ex-orientador de mestrado Alexandre Fernandes pelos ensinamentos e disponibilidade desde a época de mestrado;

Ao professores do departamento de Matemática pela anos de contribuição em minha formação;

Aos membros da banca examinadora Vincent Grandjean, Aurélio Menegon e Alexandre Fernandes pelas correções, sugestões e colaboração (também ao professor Osamu Saeki);

À Andréa Dantas e Jessyca Soares pela disponibilidade e competência;

À capes pelo apoio financeiro;

## RESUMO

Nesse trabalho, estudamos as singularidades das superfícies obtidas como imagem de um plano por uma aplicação algébrica ou analítica no espaços  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^4$ . Estudamos as propriedades topológicas e métricas dos nós que são obtidos como link de tais superfícies. É obtido critérios de mergulho normal para a superfície-imagem e, além disso, é investigado as ligações entre a topologia do nó e o mergulho normal. Faremos ainda uma descrição dos cones tangentes destas superfícies nos pontos singulares.

**Palavras-chave:** Nós. Aplicações analíticas. Mergulho normal. Singularidades.

## ABSTRACT

In this work, we study the singularities of the surfaces obtained as an image of a plane by an algebraic or analytic application in the spaces  $\mathbb{R}^3$  and  $\mathbb{R}^4$ . We study the topological and metric properties of the knots that are obtained as a link of this surfaces. Normal embedding criterion are obtained for the surfaces and, in addition, the connections between the topology of the knot and normal embedding are investigated. We will also give a description of the tangent cones of these surfaces at the singular points.

**Keywords:** Knots. Analytic maps. Normal embedding. Singularities.



## SUMÁRIO

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1   | INTRODUÇÃO . . . . .                             | 9  |
| 2   | PRELIMINARES . . . . .                           | 13 |
| 2.1 | Conceitos básicos . . . . .                      | 13 |
| 2.2 | Fatos úteis em teoria dos nós . . . . .          | 15 |
| 3   | NÓS COMO LINK DE SUPERFÍCIES PARAMETRIZADAS      | 18 |
| 3.1 | Projeções Genéricas . . . . .                    | 24 |
| 3.2 | Famílias $\delta$ -constantes . . . . .          | 28 |
| 4   | CONE TANGENTE DE SUPERFÍCIES PARAMETRIZADAS      | 33 |
| 5   | CONJUNTOS NORMALMENTE MERGULHADOS . . . . .      | 41 |
| 5.1 | Teorema do arco-critério . . . . .               | 42 |
| 6   | LARGURA E ALTURA DE SUPERFÍCIES . . . . .        | 47 |
| 7   | GEOMETRIA LIPSCHITZ E SINGULARIDADES DE POSTO    |    |
|     | 1 . . . . .                                      | 53 |
| 7.1 | Mergulho normal e trivialidade dos nós . . . . . | 61 |
| 8   | CONCLUSÃO . . . . .                              | 64 |
|     | REFERÊNCIAS . . . . .                            | 66 |

## 1 INTRODUÇÃO

A teoria de singularidades tem, essencialmente, seu ponto de partida quando dada aplicação diferenciável entre espaços euclidianos deixa de ter posto maximal de sua derivada num dado ponto de seu domínio. Quando isso não ocorre, sabemos que mudanças suaves de coordenadas no domínio e contra-domínio transforma tal aplicação numa transformação linear. Então, surge uma pergunta natural: Qual o comportamento de dada aplicação  $f$  na vizinhança de um ponto  $p$  em que  $Df(p)$  não tem posto maximal?

Nesse instante, parece inevitável pensar em classificação, isto é, é natural uma tentativa de fixar certa relação de equivalência sobre o espaço das aplicações suaves e assim tentar listar suas respectivas classes. A origem desse interesse nos remete aos trabalhos de Morse (ver por exemplo, Milnor (1962)) relativo aos pontos críticos não-degenerados de funções diferenciáveis e suas generalizações que podem ser associadas as contribuições notáveis de H. Whitney, J. Mather e V. Arnold (ver Sotomayor (1976) para uma organização histórica, bibliográfica e matemática de tais contribuições).

Em tais investigações, o problema de equivalência diferenciável mesmo quando consideramos funções no plano já revela a natureza de sua complexidade. Por exemplo, família  $f_t : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ ,  $f(z, w) = (z + tw)w(z + w)(z - w)$  fornece número infinito de classes de diferenciabilidade.

Nesse contexto, trabalhos posteriores mostram que tornar menos fina tal relação de equivalência sobre o espaço das funções é algo bastante frutífero. Nesse ponto a estrutura métrica (Lipschitz) e topológica tem revelado uma visão prospectiva e acessível com respeito ao problema de classificação. Com respeito, a estrutura topológica de aplicações, podemos citar algumas referências dentre muitas como Thom (1964), Fukuda (1981) e Naka (1984) e, mais recentemente, Ballesteros e J.A Moya-Perez (2010), (2014), Marar e Ballesteros (2009) e Mendes e Ballesteros (2016) considerando classificação topológica de germes de aplicações com singularidade isolada.

Os capítulos 2 e 3 da tese dão início a uma investigação sobre a estrutura topológica de aplicações  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^4$  com singularidade isolada. Essa investigação proposta pelo professor Juan Jose Nuño Ballesteros se encaixa, do ponto de vista de interesse similar, nos trabalhos por último listados acima. No capítulo de preliminares, apresentamos uma pequena digressão sobre a estrutura das aplicações diferenciáveis e tópicos de teoria dos nós que utilizaremos diretamente. No capítulo 2, apresentamos os principais resultados motivados pela investigação com respeito a  $C^0$ - $\mathcal{A}$ -equivalência. Provamos um teorema de estrutura cônica (ver teorema 3.1 para o caso de germes analíticos com singularidade isolada), traduzindo assim nossa investigação sobre topologia de aplicações para o campo de teoria dos nós.

Vale ressaltar que, mais geralmente, a estratégia para classificação de germes de

aplicações finitamente determinadas consiste em extrair modelos combinatórios a partir do *link* das aplicações codificando assim inteiramente cada órbita  $C^0$ - $\mathcal{A}$  topológica (o que não é possível, em geral). Veja por exemplo, Ballesteros 2015 para esclarecimento desta técnica em sua generalidade. Um outro foco da teoria de singularidades é investigar a estrutura de um conjunto singular, especialmente no caso em que o conjunto está definido como o conjunto das soluções de um sistema de equações algébricas ou analíticas. Um sistema de equações está definindo uma aplicação de um espaço Euclidiano para um outro. Se esta aplicação satisfaz as condições do Teorema da função implícita, o conjunto das soluções é uma variedade diferenciável. Caso contrário, recaímos sobre um questionamento análogo sobre como se comporta sua estrutura (tal qual como fizemos para aplicações) do ponto de vista topológico ou métrico. Nesta direção, obtemos, como mencionado, nesta tese que germes  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$  analíticos com singularidade isolada estão determinando superfícies parametrizadas em  $\mathbb{R}^4$  cujo link sobre uma 3-esfera  $\mathbb{S}^3(0, \epsilon)$  determina um nó. Um primeiro resultado que obtemos é que no caso de singularidade isolada, temos um teorema de estrutura cônica (um análogo do teorema de Fukuda para o caso de germes finitamente determinados ver Fukuda (1981)). Usando a teorema de estrutura cônica, obtemos uma consequência desejada: Nós obtidos como link de superfícies parametrizadas são invertíveis cobordantes. Essa abordagem foi percebida em conjunto com professor Osamu Saeki em Salvador-Brasil no ano de 2015. Nesse caso, mostramos que o tipo topológico dos nós é um invariante completo com respeito a  $C^0$ - $\mathcal{A}$  equivalência (observe que esse fato é conhecido para o caso de curvas complexas planas). No que segue, mostramos também que nós parametrizados não triviais só começam a aparecer (inicialmente no caso de parametrizações com posto 1) quando estamos no 2-jato  $(x, xy, 0, 0)$ . Para isso, consideramos projeções genéricas em  $\mathbb{R}^3$  e com o uso de um doodle (link em  $\mathbb{S}^2$ ) e sua palavra de Gauss codificamos parcialmente diagrama genérico de um nó (técnica essa abordada em Marar e Ballesteros (2009)). Além disso, definimos um  $\delta$ -invariante analítico para medir a complexidade da projeção do nó bem como para o estudo de nós sobre uma família de aplicações.

Na segunda parte do trabalho, iniciamos abordagem métrica de superfícies parametrizadas. Nosso interesse chave é investigar a relação entre sua topologia no ambiente com o seu tipo métrico intrínseco-extrínseco. Dado  $X \subset \mathbb{R}^4$  superfície temos duas métricas naturais. A primeira é considerar métrica euclidiana sobre  $X$ , isto é, dados  $x, y \in X$ , temos  $d_e(x, y) = \|x - y\|$ . A segunda, chamada métrica intrínseca, esquecemos o ambiente, pondo  $d_X(x, y) = \inf\{L(\gamma); \gamma \subset X\}$ , onde  $\inf$  denota ínfimo e  $\gamma$  é um caminho de comprimento finito sobre  $X$  conectando  $x$  e  $y$ . Birbrair e Mostowski (2000) introduzem o conceito de mergulho normal sobre conjuntos definidos por equações ou inequações algébricas ou analíticas.  $X \subset \mathbb{R}^n$  é dito normalmente mergulhado quando  $d_e$  e  $d_X$  são equivalentes como distâncias. Significa que métrica intrínseca está determinando métrica extrínseca. Essa é uma primeira noção de regularidade do ponto de

vista métrico (evidenciado em Birbrair e Mostowski (2000)). De fato, nesse trabalho é provado que qualquer subconjunto compacto semialgébrico do espaço euclidiano possui um modelo normalmente mergulhado em algum espaço euclidiano. De uma outra ótica, este resultado funciona (no sentido métrico) como uma resolução de singularidades (ver Brieskorn (1986), pág 389 sobre resoluções). Alguns trabalhos recentes mostram resultados consideráveis quando se tem mergulho normal. No nosso contexto, por exemplo, seja  $(X, 0) \subset (\mathbb{R}^4, 0) = (\mathbb{C}^2, 0)$  curva complexa plana (que é uma superfície parametrizada). Em Fernandes (2003), é mostrado que  $X$  é normalmente mergulhado em 0, se e somente se,  $X$  é suave em 0. Mais recentemente, Birbrair et al em (2016) mostram que se dado conjunto algébrico complexo  $X$  é normalmente mergulhado e tem cone tangente reduzido linear em  $x_0$ , então  $X$  é suave em  $x_0$ . A contra-partida em geometria algébrica real possui certa resistência. No entanto, provamos no capítulo 7 que se  $x_0$  é uma singularidade de posto 1 de  $X$  com 2-jato  $(x, xy, , 0, 0, )$  então, mergulho normal implica nó trivial. Milnor e Fox (1966) já usavam o termo suave para singularidades desse tipo. De outro modo, podemos dizer topologia não trivial sobre superfícies parametrizadas implica geometria métrica induzida (Lipschitz) não trivial também. Vale ressaltar que o inverso não necessariamente ocorre para superfícies parametrizadas em  $\mathbb{R}^4$  (ver corolários 3.2 e 7.1). Salientamos ainda que o ingrediente parametrizado “estreita a conexão” com topologia e métrica de tais superfícies. Por exemplo, note que dado qualquer nó suave  $K \subset \mathbb{S}^3$ , o cone sobre esse nó é uma superfície Lipschitz extrínseca, em particular, normalmente mergulhada.

O resultado do capítulo 7 foi obtido como consequência das técnicas que introduzimos nesta tese para investigação métrica de superfícies (que, por si só, podem apresentar direcionamentos independentes). Ordenadamente, no Capítulo 3, consideramos o cone tangente de superfícies parametrizadas no seu ponto singular. A partir de dada parametrização, mostramos como obter zonas minimais de arcos em  $\mathbb{R}^2$  gerando cone tangente, considerando um diagrama de Newton adaptado a parametrização. Vale ressaltar que o cone tangente é um importante invariante métrico de conjuntos subanalíticos (ver Sampaio (2016)) e possui diversas caracterizações (ver Whitney (1965)).

No capítulo 5, obtemos uma caracterização que esperamos que seja proveitosa para futuras investigações em geometria Lipschitz de singularidades. Mostramos que:  $X$  conjunto subanalítico e normalmente mergulhado em  $x_0 \in X$  equivale a dizer que para qualquer par de arcos passando por  $x_0$ , temos que ordem de contato intrínseco é igual a ordem de contato extrínseca (um número racional), ver teorema 5.2. Em seguida, usando esse critérios provamos que superfícies com cone tangente semi-plano em  $x_0$  nunca podem ser normalmente mergulhadas (corolário 5.3).

No capítulo 6, dada  $(X, x_0)$  germe de uma superfície, definimos dois números que chamamos de Largura e Altura. Esses dois números detectam possível obstrução de

mergulho normal de  $X$  em  $x_0$ . Geometricamente, conjunto singular da projeção de tal superfície sobre o cone tangente em  $x_0$  está delineando dobras em  $X$  sobre regiões magras também no cone tangente. É sobre essas zonas (chamadas zonas polares) que medimos largura e altura relevante com a respeito a geometria Lipschitz de  $X$ . O principal resultado deste capítulo diz que mergulho normal de  $X$  em  $x_0$  implica Largura igual a altura sobre qualquer uma destas zonas.

## 2 PRELIMINARES

### 2.1 Conceitos básicos

Nesta seção, apresentaremos fatos básicos sobre aplicações  $C^\infty$  que serão usados na parte inicial do trabalho (muitas vezes chamaremos tais aplicações somente de *suave*). As referências gerais podem ser encontradas em Morris (1976), Arnold, Varshenko (1989) e Montaldi (2009). A ideia aqui consiste em listar as ferramentas de trabalho da parte inicial da tese.

Considere uma aplicação  $F : M \rightarrow N$  suave, onde  $M, N$  são variedades diferenciáveis (que serão variedades  $C^\infty$  quando não mencionado outro caso).  $F$  é dita uma imersão quando, para cada ponto  $x \in M$ , sua diferencial  $DF(x)$  é injetiva. Se  $F$  for um homeomorfismo sobre  $F(M)$  dizemos que  $F$  é um mergulho. Imagens de imersões (respectivamente mergulhos) são ditas subvariedades imersas (respectivamente subvariedades mergulhadas). Resultados básicos sobre imersões e mergulhos podem ser vistos em Lee (2003).

Salientamos ainda que nosso trabalho é, essencialmente, local:

**Definição 2.1.** Um germe de uma aplicação  $f : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, f(x))$  é uma classe de equivalência dada pela seguinte relação:  $f$  é equivalente a  $g \Leftrightarrow$  existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  tal que  $f|_U = g|_U$ .

Em outras palavras, no estudo local de uma aplicação num ponto  $p$  pode-se escolher qualquer aplicação como representante de uma classe de aplicações que coincidem em alguma vizinhança. Pode até ser que duas aplicações sejam diferentes fora de tal vizinhança.

Quando escrevermos  $f : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, f(x))$  estamos querendo dizer que escolhemos um representante da classe de equivalência supracitada.

Considere  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  espaço das aplicações suaves de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^p$ . Existe uma noção concisa de topologia em  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  (para detalhes ver Morris 1976, cap 2), a chamada topologia de Whitney. Um resultado de importância para análise de órbitas em  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  é o teorema de transversalidade de Thom (ver Gibson 1979, página 53). Vamos enunciar abaixo uma versão mais fraca desse teorema, mas com boa intuição geométrica:

**Teorema 2.1.** O conjunto das aplicações suaves de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^p$  que são transversais a dadas subvariedades  $M_1, \dots, M_t$  em  $\mathbb{R}^p$  é um conjunto denso em  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ .

**Demonstração.** Ver Gibson 1979, página 52.

Vale notar que o teorema acima já introduz, de fato, o conceito de *estabilidade*.

### Estabilidade e finita determinância

**Definição 2.2.** Dados  $X, Y$  variedades diferenciáveis, dizemos que  $f \in C^\infty(X, Y)$  é estável quando existe uma vizinhança  $W_f$  de  $f$  na topologia de Whitney tal que para cada  $f'$  em  $W_f$  existem difeomorfismos  $\phi, \psi$  em  $X$  e  $Y$  respectivamente tais que  $f' = \psi \circ f \circ \phi$ .

Dada  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ , denotamos por  $j^k f(0)$  seu  $k$ -jet, que é, sua expansão de Taylor de grau  $k$ . Diremos que  $f$  é  $k$ -finitamente determinado se para qualquer  $g$  tal que  $j^k g(0) = j^k f(0)$ , temos que  $g, f$  são  $\mathcal{A}$ -equivalentes (equivalência a menos de difeomorfismos no domínio e na imagem). Nesse caso,  $f$  é finitamente determinado se é  $k$ -determinado para algum  $k$ . A verificação direta de que um germe é finitamente determinado pode ser um problema não simples. De sorte, que dispomos de um critério mais geométrico. O critério de Mather-Gaffney. A grosso modo, ele diz o seguinte (ver C.T.C Wall (1981)):

*Uma aplicação analítica  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$  é finitamente determinada, se e somente se, sua complexificação possui instabilidade isolada na origem.*

Essa caracterização se torna, de fato, geométrica quando consideramos resultados de Whitney sobre estabilidade. Por exemplo, um germe finitamente determinado do plano em  $\mathbb{R}^3$  é, para um representante, imersão com cruzamentos normais na vizinhanças de seus pontos singulares (retirando-os) (ver Whitney (1944)). No nosso trabalho, estamos particularmente interessados nas dimensões  $n = 2$  e  $p = 4$  e em suas projeções (quando  $p = 3$ ). Posteriormente, vamos estabelecer um critério geométrico de finita determinancia para o caso  $n = 2$  e  $p = 4$ .

### Coposto de uma aplicação

Dada uma aplicação suave  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  dizemos que  $f$  tem coposto  $c$  em  $x$  quando o núcleo da diferencial  $Df(x)$  tem posto  $c$ . Denotamos o conjunto destes pontos por  $\Sigma^c(f)$ . Uma contribuição notável com respeito ao estudo das singularidades de aplicações se deu devido a Thom e, em seguida, Boardman. A idéia consiste em classificar a complexidade de um ponto singular  $x$  conforme  $x \in \Sigma^j(f|_{\Sigma^c(f)})$  ou  $x$  pertença a número finito de possíveis iterações deste tipo.

Ressaltamos que dentro da classe  $C^\infty$ , vamos considerar aplicações analíticas:

**Definição 2.3.**  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  é dito analítica quando cada componente  $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é analítica. Cada componente é analítica quando para cada  $p \in \mathbb{R}^n$ , existe vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $p$  e descrição  $f|_{\mathcal{U}}(x_1, \dots, x_n) = \sum a_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ .

## 2.2 Fatos úteis em teoria dos nós

Chamamos de nó um conjunto  $K$  homeomorfo a um círculo  $\mathbb{S}^1$ ,  $K \subset \mathbb{S}^3$  (ou em  $\mathbb{R}^3$ ). De outro modo,  $K$  é imagem de uma aplicação contínua  $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , i.e,  $x([0, 1]) = K$ . Consideramos que  $x$  é pelo menos uma aplicação  $C^1$ . Isto permite obter um nó poligonal  $K'$  equivalente a  $K$  e com uma projeção regular contendo apenas pontos duplos (veja Crowell e Fox (1963)). Usaremos o termo nó para representar um nó que seja pelo menos  $C^1$ , salvo menção contrária.

### Equivalência

Como é conhecido a equivalência entre dois nós é um conceito relacionado com a 3-topologia dos seus complementos. De fato, quaisquer dois nós são intrinsicamente homeomorfos e portanto não há distinção alguma nessa direção. Duas equivalências conhecidas são:

- (i) Dois nós  $K_1, K_2$  são ditos equivalentes quando existe um homomorfismo  $H : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  tal que  $H(K_1) = K_2$ .
- (ii) Dizemos que dois nós  $K_1, K_2$  tem o mesmo tipo isotópico quando existe  $H : I \times \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  tal que  $H_t : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ ,  $H_t(p) = H(t, p)$  é homeomorfismo, para todo  $t \in I$ ,  $H_0 = Id$  e  $H_1 \circ K_1 = K_2$ .

Na equivalência i, consideramos ainda :

- (iii) Dois nós  $K_1, K_2$  são ditos equivalentes por uma esfera topológica quando existe um homomorfismo  $H : \mathcal{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  tal que  $H(K_1) = K_2$  e  $\mathcal{S}^3$  é homeomorfo a esfera  $\mathbb{S}^3$ .

Em 1989, Cameron Gordon e John Luecke provaram que se os complementos dos respectivos nós são homeomorfos com um homeomorfismo preservando orientação então eles tem mesmo tipo de isotopia, isto é, as duas primeiras equivalências acima são equivalentes. Note que um homeomorfismo de  $\mathbb{S}^3$  em  $\mathbb{S}^3$  necessariamente preserva ou reverte orientação. Desse modo, se dois nós  $K_1$  e  $K_2$  são equivalentes então  $K_1$  e  $K_2$  tem o mesmo tipo de isotopia ou  $-K_1$  e  $K_2$  tem o mesmo tipo de isotopia ( $-K_1$  indicando orientação oposta a  $K_1$ ). Neste trabalho, estamos interessados na equivalência (i) (e não nos preocupamos com orientação). No que segue, vamos considerar alguns fatos e observações sobre cobordismo de nós que serão relevantes para os nossos propósitos:

### Cobordismo

1. (Cobordismo) Dois nós  $K_1$  e  $K_2$  em  $\mathbb{S}^3$  são ditos cobordantes quando existe uma subvariedade compacta suave  $W$  mergulhada em  $\mathbb{S}^3 \times I$  com  $\partial W = K_1 \cup K_2$ . Além disso, temos  $K_1 \times \{0\} = W \cap (\mathbb{S}^3 \times \{0\})$  e  $K_2 \times \{1\} = W \cap (\mathbb{S}^3 \times \{1\})$ . A notação  $(W; K_1, K_2)$  indica um cobordismo entre  $K_1$  e  $K_2$ .
2. (Cobordismo produto) Se  $(W; K_1, K_2)$  e  $(W'; K_2, K_3)$  são dois cobordismos com componente de fronteira comum podemos considerar colagem  $W \cup W'$  ao longo de



$K_2$  e obter um cobordismo  $(W \cup W'; K_1, K_3)$  (detalhes podem ser vistos em Morris (1976), capítulo 8).

3. (Cobordismo invertível) Seja  $(W; K_1, K_2)$  cobordismo. Se existir cobordismo  $(W'; K_2, K_1)$  de tal modo que  $(W \cup W'; K_1, K_1)$  é homeomorfo a  $(K_1 \times [0, 1]; K_1, K_1)$  dizemos que  $(W; K_1, K_2)$  é um cobordismo invertível no fim  $K_2$ . Se, além disso, tal cobordismo for também invertível no fim  $K_1$ , dizemos que trata-se de um cobordismo invertível em ambos os fins. Dizemos ainda que  $K_1$  (resp  $K_2$ ) limita um cobordismo invertível e  $K_2$  (resp  $K_1$ ) o decompõe.
4. (h-Cobordismo) Sejam  $V, V'$  variedades diferenciáveis componentes de fronteira de uma variedade compacta suave  $W$ .  $(W; V, V')$  é dito um  $h$ -cobordismo quando as inclusões  $i_{K_1} : V \hookrightarrow W$  e  $i_{K_2} : V' \hookrightarrow W$  são equivalências homotópicas.

Em 1975, W.D. Summers, provou, mais geralmente, o seguinte (um  $n$ -nó  $K$  significa  $K$  difeomorfo a  $\mathbb{S}^n$ ):

**Proposição 2.1.** Sejam  $K_1, K_2$  dois  $n$ -nós em  $\mathbb{S}^{n+2}$  e  $(W; K_1, K_2)$  cobordismo invertível em ambos os fins. Então  $(\mathbb{S}^{n+2} \times I) - W$  fornece um  $h$ -cobordismo entre  $\mathbb{S}^{n+2} - K_1$  e  $\mathbb{S}^{n+2} - K_2$ .

**Demonstração.** Ver D.W.Summers (1975).

Como ficou claro, nosso interesse nesse resultado é quando  $n = 1$ .

### Estrutura periférica de nós

Notação:  $\simeq$  indica homeomorfos,  $\equiv$  indica homotópicos e  $\approx$  indica isomorfismo.

Dado  $K \subset \mathbb{S}^3$ , considere  $V_k \simeq K \times \overline{\mathbb{D}}^2$  vizinhança tubular do nó (um toro sólido). Seja  $m$  curva simples fechada em  $\partial V_k$  (fronteira de  $V_k$ ) que limita um disco em  $\text{int}(V_k)$ . Observe que isto equivale a dizer que  $m$  é não homotopicamente trivial em  $\partial V_k$  e homologicamente trivial em  $V_k$ .  $m$  é chamado de um *meridiano* de  $K$ . Considere também uma curva  $l$  simples fechada em  $\partial V_k$  que é homóloga a  $K$  em  $V_k$ .  $l$  é chamada uma longitude de  $K$ . Como  $\mathbb{S}^3 - K \equiv \mathbb{S}^3 - \text{int}(V_k)$  temos que seus grupos fundamentais são isomorfos. Então, classes de homotopia  $[m]$  e  $[l]$  podem ser consideradas em  $\pi_1(\mathbb{S}^3 - K)$  ou  $\pi_1(\mathbb{S}^3 - \text{int}(V_k))$ .

Considere dois nós  $K_1, K_2 \subset \mathbb{S}^3$  e admita que  $\pi_1(\mathbb{S}^3 - K_1) \approx \pi_1(\mathbb{S}^3 - K_2)$ .

**Definição 2.4.** Seja  $\varphi : \pi_1(\mathbb{S}^3 - K_1) \approx \pi_1(\mathbb{S}^3 - K_2)$  isomorfismo. Dizemos que  $\varphi$  *preserva estrutura periférica* quando  $\varphi([m_1]) = [m_2]$  e  $\varphi([l_1]) = [l_2]$  onde o  $(m_1, l_1)$ ,  $(m_2, l_2)$  são respectivos pares meridiano-longitude de  $K_1$  e  $K_2$ .

**Teorema 2.2.** Considere dois nós  $K_1, K_2 \subset \mathbb{S}^3$  com grupos fundamentais  $\pi_1(\mathbb{S}^3 - K_1)$ ,  $\pi_1(\mathbb{S}^3 - K_2)$  isomorfos. Se o isomorfismo correspondente preserva estrutura periférica então os nós  $K_1$  e  $K_2$  são equivalentes.

**Demonstração.**

É suficiente por Gordon e Luecke (1989) obter que os complementos  $\mathbb{S}^3 - K_1$  e  $\mathbb{S}^3 - K_2$  são homeomorfos. Para obter isto, veja Conway (1975) (ver também Waldhausen (1968)).  $\square$

**Teorema 2.3.** *Sejam  $K_1$  e  $K_2$  dois nós em  $\mathbb{S}^3$ . Se eles são invertíveis cobordantes em ambos os fins então são equivalentes.*

**Demonstração.**

Seja  $m_1$  um meridiano. Usando a equivalência homotópica como na proposição 2.1 temos retração  $r_2 : \mathbb{S}^3 \times I - W \rightarrow \mathbb{S}^3 - K_2$ ,  $m_1 \subset \mathbb{S}^3 - K_1 \subset \mathbb{S}^3 \times I - W$  onde  $W$  fornece o cobordismo entre  $K_1$  e  $K_2$ . Desejamos mostrar que  $(r_2 \circ i_1)_*[m_1] = [m_2]$ , onde  $i_1 : \mathbb{S}^3 - K_1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3 \times I - W$  é a inclusão. e  $m_2$  é um meridiano de  $\mathbb{S}^3 - K_2$ . Temos que  $[m_1] \neq 0$ . Podemos admitir que  $r_2 \circ i_1(m_1) \subset \partial V_{k_2}$  para alguma vizinhança tubular de  $K_2$ . Considerando isomorfismo,  $r_2 \circ i_1(m_1)$  é não homotopicamente trivial em  $\partial V_{k_2} \subset \mathbb{S}^3 - \text{int}(V_{k_2})$ . Resta, portanto, verificar que  $r_2 \circ i_1(m_1)$  é homologicamente trivial em  $V_{k_2}$  (toro sólido). Se não fosse assim, como  $H_1(V_{k_2}) \approx \mathbb{Z}$  (sua homologia integral) então  $r_2 \circ i_1(m_1)$  seria uma longitude (homóloga a  $K_2$ ). No entanto,  $r_2 \circ i_1(m_1)$  seria homologicamente trivial em  $\mathbb{S}^3 - \text{int}(V_{k_2})$  (ver Rolfsen (1990), pág 30). Mas este não é o caso pois  $m_1$  não é homologicamente trivial em  $\mathbb{S}^3 - \text{int}(V_{k_1})$  e homologia é também invariante por homotopia. segue que  $r_2 \circ i_1(m_1)$  deve ser meridiano, isto é,  $(r_2 \circ i_1)_*[m_1] = [m_2]$ .

Seja agora  $l_1$  uma longitude em  $\mathbb{S}^3 - \text{int}(V_{k_1})$ ,  $l_1 \subset \partial V_{k_1}$ . Assumimos, do mesmo modo como fizemos acima, que  $\tilde{l}_2 = r_2 \circ i_1(l_2) \subset \partial V_{k_2}$ . É suficiente mostrar que  $\tilde{l}_2$  é não homologicamente trivial em  $V_{k_2}$ . Veja que se for  $\tilde{l}_2$  homologicamente trivial em  $V_{k_2}$   $l_2$  não pode ser um meridiano, pois com argumento totalmente simétrico (partindo agora de  $\mathbb{S}^3 - \text{int}(V_{k_2})$  ao que fizemos no caso dos meridianos, teríamos meridiano indo em longitude, o que não ocorre. Portanto, temos que  $\tilde{l}_2$  limitaria um disco em  $\partial V_{k_1}$ , supondo homologia trivial. Nesse caso, podemos obter um meridiano em  $\partial V_{k_2}$  intersectando  $\tilde{l}_2$  em mais de um ponto. Por outro lado,  $l_1$  intersecta qualquer meridiano em  $\partial V_{k_1}$  num único ponto (ver Rolfsen (1990), pág 29). Desse modo, retiramos respectivos meridiano (e sua imagem) teríamos que  $l_1$  permaneceria conexo, mas  $l_2$  não. Isso contradiz continuidade de retração. Portanto, deve ser  $\tilde{l}_2$  também longitude.  $\square$

### 3 NÓS COMO LINK DE SUPERFÍCIES PARAMETRIZADAS

Dois germes  $C^\infty$  de aplicações  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  são ditas  $C^0$ - $\mathcal{A}$ -equivalentes (resp  $\mathcal{A}$ -equivalentes) se existem germes de homeomorfismos (resp. difeomorfismos)  $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  e  $\psi : (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  tal que  $g \circ \varphi = \psi \circ f$ .

Aqui, estamos interessados em superfícies singulares em  $\mathbb{R}^4$  que são localmente parametrizadas como a imagem do germe de uma aplicação analítica  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ .

**Definição 3.1.** Seja  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$  germe de uma aplicação analítica. Diremos que  $f$  tem *singularidade isolada* se existe um representante  $f : U \rightarrow V$ , onde  $U, V$  são abertos da origem em  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4$  respectivamente tal que  $f$  é um mergulho topológico e uma imersão sobre  $U \setminus \{0\}$ .  $X = f(U)$  é dito uma *superfície com singularidade isolada*.

**Exemplo 3.1.** (*Curvas complexas planas*) Considere o germe em  $(0, 0)$  de uma componente irredutível de  $X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; f(x, y) = 0\}$  onde  $f$  é um polinômio não constante. Admita que  $f$  não tem fatores repetidos. Note que se  $(0, 0)$  é um ponto crítico de  $f$  então é necessariamente isolado. Pelo teorema de Puiseux ( Brieskorn (1986), pág 386), existe parametrização  $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ ,  $\varphi(t) = (t^m, \psi(t))$ ,  $\psi$  analítica. Este é um interessante caso particular de superfícies parametrizadas com singularidade isolada em  $\mathbb{R}^4$ .

**Observação 3.1.** Se  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$  é  $C^\infty$  e finitamente determinado, então  $f$  é  $\mathcal{A}$ -equivalente ao germe de uma aplicação analítica com singularidade isolada.

#### *Demonstração.*

Pela condição de finita determinância, podemos assumir, a menos de  $\mathcal{A}$ -equivalência, que  $f$  é uma aplicação polinomial. Denote por  $\hat{f} : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^4, 0)$  a complexificação de  $f$ . Então  $\hat{f}$  é também finitamente determinado como um germe analítico complexo. Pelo critério de finita determinância de Mather-Gaffney (ver C.T.C Wall (1981) e preliminares), existe um representante  $\hat{f} : \hat{U} \rightarrow \hat{V}$ , onde  $\hat{U}, \hat{V}$  são vizinhanças abertas da origem em  $\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^4$  tal que  $\hat{f}$  é própria,  $\hat{f}^{-1}(0) = \{0\}$  e a restrição a  $\hat{U} \setminus \{0\}$  é estável. Para germes de aplicações estáveis  $\hat{f} : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ , a dimensão do conjunto auto-interseção de  $f$ ,  $D(f) = \{x \in \hat{U} \setminus \{0\}; f^{-1}(f(x)) \neq x\}$  é dado por  $\dim(D(f)) = 2n - p$ . Portanto, para  $n = 2, p = 4$ , temos  $\dim(D(f)) = 0$ . Então, diminuindo  $\hat{U}$  se necessário, podemos assumir que  $\hat{f}$  não tem pontos duplos sobre  $U$ . Por outro lado, tomando projeção real  $f$ , o conjunto singular  $S(f)$  tem dimensão igual a  $n - (p - n + i)i$ , onde  $i$  é a “ordem” da singularidade, i.e.,  $i = \dim\{Ker T_x f; x \in U \setminus \{0\}\}$ . No nosso caso,  $\dim(S(f)) = 2 - (4 - 2 + i).i = 2 - 2i - i^2$ ,  $i = 2$  ou  $1$  (se  $i = 0$ ,  $f$  é um mergulho suave). Logo  $f$  não tem singularidades em  $U \setminus \{0\}$ . Assim, podemos obter um representante  $f$  com singularidade isolada (para  $\dim(D(f))$ ,  $\dim(S(f))$ , ver Gibson (1979)).  $\square$

Note que o inverso não é verdade, em geral. Por exemplo,  $f(x, y) = (x, y^2, y(x^2 + y^2), 0)$  tem singularidade isolada mas não é finitamente determinado. Sua complexificação tem uma curva de pontos duplos ao longo de  $x^2 + y^2 = 0$ .

Vamos introduzir agora um delta invariante que fornece uma ferramenta algébrica para detectar se uma superfície tem singularidade isolada. Nossa definição é baseada no ideal de ponto duplos definido por Mond (1987)). Denote por  $\mathcal{E}_n$  o anel local de germes de funções  $C^\infty$  de  $(\mathbb{R}^n, 0)$  em  $\mathbb{R}$ . Dada uma aplicação  $C^\infty$   $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ , com  $n \leq p$ , podemos escrever

$$f_i(x) - f_i(x') = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(x, x')(x_j - x'_j), \quad i = 1, \dots, p, \quad (3.1)$$

para algumas funções  $\alpha_{ij} \in \mathcal{E}_{2n}$ . Considere o ideal (dito *ideal de pontos duplos* de  $f$ )  $I^2(f) \subset \mathcal{E}_{2n}$  gerado por  $f_i(x) - f_i(x')$ ,  $i = 1, \dots, p$  e pelos  $n \times n$  menores da matriz  $(\alpha_{ij}(x, x'))$ . A principal propriedades deste ideal é que seu zero locus, denotado por  $D^2(f)$ , é o germe do conjunto de pontos  $(x, x')$  tal que  $x \neq x'$  e  $f(x) = f(x')$  ou  $x = x'$  e  $x$  é um ponto crítico de  $f$ . Isto decorre diretamente da equação 3.1.

No caso em que  $f$  tem posto 1 em 0, depois de uma mudança de coordenadas no domínio (i.e., a menos de  $\mathcal{A}$ -equivalência), escrevemos  $f$  da seguinte forma:

$$f(z, y) = (z, f_n(z, y), \dots, f_p(z, y)), \quad z \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Desse modo,  $I^2(f)$  pode ser considerado em  $\mathcal{E}_{n+1}$  no lugar de  $\mathcal{E}_{2n}$ . Note que  $I^2(f)$  é gerado pelas diferenças divididas das funções  $f_i$ :

$$\Delta f_i(z, y, y') := \frac{f_i(z, y) - f_i(z, y')}{y - y'}, \quad i = n, \dots, p,$$

(ver Mond (1987) para mais detalhes sobre esta construção).

**Definição 3.2.** Dado o germe de uma aplicação  $C^\infty$   $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ , definamos o *número de pontos duplos intrínseco* de  $f$  por  $\delta(f) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{E}_4}{I^2(f)}$ .

Quando  $n = 2$  e  $p = 4$  temos  $f(x, y) = (x, p(x, y), q(x, y), r(x, y))$ , com  $p, q, r \in \mathcal{E}_2$ . Considerando  $I^2(f)$  com as diferenças divididas, teremos:

$$\delta(f) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{E}_3}{\langle \Delta p, \Delta q, \Delta r \rangle}.$$

Vale ressaltar que as definições acima de  $I^2(f)$ ,  $D^2(f)$  e  $\delta(f)$  podem ser entendidas de maneira natural para germes de aplicações holomorfas  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ . Nesse caso, substituímos  $\mathcal{E}_n$  por  $\mathcal{O}_n$ , o anel local dos germes de funções holomorfas em  $(\mathbb{C}^n, 0)$ .

**Exemplo 3.2.** Seja  $f(x, y) = (x, xy, y^3, y^4)$ . Nesse caso,  $\delta(f) = 3$ .

Observe que  $f$ , no exemplo acima, não tem pontos duplos. O ponto é que o número  $\delta(f)$  mede o número máximo de pontos duplos que aparecem a partir de um desdobramento (uma deformação) de  $f$ .

**Lema 3.1.** Seja  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$  germe de uma aplicação analítica. Então, valem as seguintes afirmações:

1.  $D^2(f) = \{0\}$  se, e somente se,  $f$  tem singularidade isolada;
2.  $\delta(f) < \infty$  se, e somente se,  $f$  é finitamente determinado.

**Demonstração.**

A condição necessária do item 1 é evidente por definição de  $D^2(f)$ : Para um representante, temos que 0 é o único ponto crítico e  $f$  não tem pontos duplos. A condição suficiente segue por definição de singularidade isolada. Com respeito ao item 2, condição necessária: considere que  $\delta(f) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{O}_4}{I^2(f)} < \infty$ . Seja  $\hat{f}$  complexificação de  $f$ . Como  $\delta(f) = \delta(\hat{f})$  temos que existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{M}_4^k \subset I^2(\hat{f})$  (veja Gibson (1979), pág 104). Segue que  $D^2(f) = \{0\}$ . Pelo critério de Mather-Gaffney temos que  $\hat{f}$  é finitamente determinado e portanto  $f$  também.

Condição suficiente: Seja  $\hat{f}$  finitamente determinado, Segue que  $D^2(f) = V(I^2(f)) = \{0\}$  e portanto

$I(V(I^2(f))) = \mathcal{M}_4$ . Usando Hilbert Nullstellensatz, temos que

$$\sqrt{I^2(f)} = I(V(I^2(f))) = \mathcal{M}_4.$$

$\Rightarrow \exists q \in \mathbb{N}, \mathcal{M}_4^q \subset I^2(f) \Rightarrow \delta(\hat{f}) < \infty \Rightarrow \delta(f) < \infty$ . □

No exemplo 3.1 quando tomamos a interseção  $X \cap \mathbb{S}^3(0, \epsilon)$  para  $\epsilon$  suficientemente pequeno temos um nó tórico iterado. Nesse caso, tanto a 3-topologia do nó quanto a órbita topológica de sua parametrização é determinada pelos chamados pares característicos de Puiseux (ver Brieskorn 1986 teorema 12, pág 438-439). Uma pergunta natural é o que acontece quando, mais geralmente,  $X$  é parametrizada como imagem do germe de uma aplicação analítica real  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ . A existência de uma estrutura cônica local para conjuntos semialgébrcos na vizinhança de pontos não isolados (ver apêndice) é argumento suficiente para afirmar que superfícies analíticas com singularidade isolada em  $\mathbb{R}^4$  tem sua topologia determinada por um nó numa 3-esfera  $\mathbb{S}_\epsilon^3$ . No entanto, o resultado que provaremos abaixo revela também sobre a estrutura cônica da aplicação  $f$ . O que, de antemão, diz que uma superfície parametrizada determina uma parametrização do nó  $f(U) \cap \mathbb{S}_\epsilon^3$  que não depende do raio  $\epsilon$ .

**Notações:**

Dada  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  e um representante  $f : U \rightarrow V$ , denotamos:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_\epsilon^p &= \{y \in \mathbb{R}^p : \|y\|^2 \leq \epsilon\}, & \mathbb{S}_\epsilon^{p-1} &= \{y \in \mathbb{R}^p : \|y\|^2 = \epsilon\}, \\ \tilde{\mathbb{D}}_\epsilon^n &= f^{-1}(\mathbb{D}_\epsilon^p), & \tilde{\mathbb{S}}_\epsilon^{n-1} &= f^{-1}(\mathbb{S}_\epsilon^{p-1}). \end{aligned}$$

**Teorema 3.1.** Seja  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$  germe de uma aplicação analítica com singularidade isolada. Existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que para qualquer  $\epsilon$ , com  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ , temos:

1.  $\tilde{\mathbb{S}}_\epsilon^1$  é difeomorfo a  $\mathbb{S}^1$ .
2.  $f|_{\tilde{\mathbb{S}}_\epsilon^1} : \tilde{\mathbb{S}}_\epsilon^1 \rightarrow \mathbb{S}_\epsilon^3$  é um mergulho, cuja  $\mathcal{A}$ -classe é independente de  $\epsilon$ .
3.  $f|_{\tilde{\mathbb{D}}_\epsilon^2} : \tilde{\mathbb{D}}_\epsilon^2 \rightarrow \mathbb{D}_\epsilon^4$  é  $C^0$ - $\mathcal{A}$ -equivalente ao cone de  $f|_{\tilde{\mathbb{S}}_\epsilon^1} : \tilde{\mathbb{S}}_\epsilon^1 \rightarrow \mathbb{S}_\epsilon^3$ .

**Demonstração.**

Tome um representante  $f : U \rightarrow V$ , onde  $U \subset \mathbb{R}^2$  e  $V \subset \mathbb{R}^4$  são vizinhanças abertas da origem, tal que  $f$  é  $C^0$ -mergulho e uma imersão sobre  $U \setminus \{0\}$ . Considere  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g = \|f\|^2$ . Pelo teorema de Sard e lema de seleção da curva,  $g$  tem um número finito de valores críticos. Logo, existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que  $\forall \epsilon, 0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ ,  $\epsilon$  é um valor regular de  $g$ . Para cada  $\epsilon$  nesse intervalo, temos  $\mathbb{S}_\epsilon^3$  transversal a  $f(U)$ . Então,  $\tilde{\mathbb{S}}_\epsilon^1 = f^{-1}(\mathbb{S}_\epsilon^3)$  é uma subvariedade compacta 1-dimensional em  $U$  e  $f|_{\tilde{\mathbb{S}}_\epsilon^1} : \tilde{\mathbb{S}}_\epsilon^1 \rightarrow \mathbb{S}_\epsilon^3$  é um mergulho. Assim, obtemos a primeira parte de (2).

Para provar (1), note que  $f^{-1}(0) = \{0\}$ , com 0 mínimo isolado de  $g$ . No caso em que 0 é um ponto crítico não degenerado, usando lema de Morse, temos que  $g^{-1}([0, \epsilon])$ , é homeomorfo (e portanto difeomorfo) ao disco fechado  $\mathbb{D}^2$ . Portanto  $g^{-1}(\epsilon) = f^{-1}(\mathbb{S}_\epsilon^3)$  é difeomorfo a  $\partial\mathbb{D}^2 = \mathbb{S}^1$ . No caso em que 0 é ponto crítico degenerado, ainda é verdade que  $g^{-1}([0, \epsilon])$  é homeomorfo a  $\partial\mathbb{D}^2$ . (ver Milnor (1964), teorema generalizado de Reeb)).

Denote  $I = (0, \epsilon]$  tal que todo  $\epsilon$  é valor regular de  $g$ . Considere as seguintes aplicações:

$$\begin{aligned} \Phi : \tilde{D}_\epsilon^2 \setminus \{0\} &\longrightarrow I \times \tilde{\mathbb{S}}_\epsilon^1, & \Psi : D_\epsilon^4 \setminus \{0\} &\longrightarrow I \times \mathbb{S}_\epsilon^3, \\ x &\longmapsto (g(x), \phi(x)), & y &\longmapsto (\|y\|^2, \sqrt{\epsilon} \frac{y}{\|y\|}), \end{aligned}$$

$\phi(x)$  é o ponto de interseção de  $\tilde{\mathbb{S}}_\epsilon^1$  com a curva integral do gradiente de  $g$  passando por  $x$ .  $\Phi$  e  $\Psi$  são difeomorfismos.

Defina  $F : I \times \tilde{\mathbb{S}}_\epsilon^1 \rightarrow I \times \mathbb{S}_\epsilon^3$  por  $F = \Psi \circ f \circ \Phi^{-1}$ . Por construção,  $F(\{t\} \times \tilde{\mathbb{S}}_\epsilon^1) \subset \{t\} \times \mathbb{S}_\epsilon^3$ , para todo  $t \in I$ . Portanto, podemos escrever  $F$  na forma  $F(t, x) = (t, f_t(x))$ , com  $f_t : \tilde{\mathbb{S}}_\epsilon^1 \rightarrow \mathbb{S}_\epsilon^3$  e  $t \in I$ .

Note que  $f_\epsilon$  é  $\mathcal{A}$ -equivalente a  $f_t$ . Em outras palavras,  $f_t$  é estável. Além disso, é imediato que  $f_t$  é  $\mathcal{A}$ -equivalente a  $f|_{\tilde{\mathbb{S}}_\epsilon^1}$ . Isso fornece a parte final de (2). De fato, pela forma que construímos os difeomorfismos, temos uma condição mais forte:  $F$  é

$\mathcal{A}$ -trivial, ou seja, existem difeomorfismos  $H$  e  $K$  da forma:

$$\begin{aligned} H : I \times \tilde{S}_\epsilon^1 &\longrightarrow I \times \tilde{S}_\epsilon^1, & K : I \times \mathbb{S}_\epsilon^3 &\longrightarrow I \times \mathbb{S}_\epsilon^3, \\ (t, x) &\longmapsto (t, h_t(x)), & (t, y) &\longmapsto (t, k_t(y)), \end{aligned}$$

de tal modo que  $K \circ F \circ H^{-1} = id \times f_\epsilon$ . Finalmente, temos que  $f|_{\tilde{D}_\epsilon^2 \setminus \{0\}}$  is  $\mathcal{A}$ -equivalente a  $id \times f_\epsilon$ . Adicionando a origem, essa  $\mathcal{A}$ -equivalencia pode ser estendida a  $C^0$ - $\mathcal{A}$ -equivalencia entre  $f|_{\tilde{D}_\epsilon^2} : \tilde{D}_\epsilon^2 \rightarrow D_\epsilon^4$  e o cone de  $f|_{\tilde{S}_\epsilon^1} : \tilde{S}_\epsilon^1 \rightarrow S_\epsilon^3$ . Assim, obtemos (3).

□

Lembrando que no caso de germes finitamente determinados, esse teorema segue diretamente do teorema de Fukuda (1981).

**Definição 3.3.** Seja  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$  germe de uma aplicação analítica com singularidade isolada. Diremos que  $\epsilon_0 > 0$  é um raio de Milnor-Fukuda para  $f$  se para qualquer  $\epsilon$ , com  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ , As condições (1), (2) e (3) acima são satisfeitas.  $f|_{\tilde{S}_\epsilon^1} : \tilde{S}_\epsilon^1 \rightarrow \mathbb{S}_\epsilon^3$  será dito *link* de  $f$  e vamos denotar por  $L(f)$ . Já sua imagem (o nó de  $f$ ) denotaremos por  $K(f)$ .

Podemos deduzir algumas consequências imediatas a partir do teorema de estrutura cônica:

1.  $L(f)$  é um mergulho  $S^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$ ,
2.  $L(f)$  é bem definido a menos de  $\mathcal{A}$ -equivalencia,
3.  $K(f)$  é bem definido a menos de equivalência de nós,
4.  $f$  é topologicamente equivalente ao cone de  $L(f)$ .

**Corolário 3.1.** Sejam  $f, g : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$  germes de aplicações analíticas com singularidade isolada. Se  $L(f), L(g)$  são  $C^0$ - $\mathcal{A}$ -equivalentes, então  $f, g$  são  $C^0$ - $\mathcal{A}$ -equivalentes.

**Demonstração.** É consequência direta do item 4 no teorema anterior. □

A partir desse corolário, decorre que, se  $K(f)$  é um nó trivial, então  $f$  é  $C^0$ - $\mathcal{A}$ -equivalente ao mergulho padrão  $(x, y) \mapsto (x, y, 0, 0)$ . Dizemos, nesse caso, que  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$  é *desnodada*.

Até esse ponto já se torna evidente a conexão direta da topologia de aplicações analíticas  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$  com a classe de nós que aparecem como link de sua superfície imagem.

Nossa intenção agora é obter um resultado de equivalência na outra direção, isto é, dado que  $f, g$  são  $C^0$ - $\mathcal{A}$ -equivalentes, recebemos uma equivalência de nós.

No caso geral (aplicações da forma  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ ) a observação acima permanece válida. Esse era um dos propósitos que mencionamos no capítulo 1 quando escrevemos sobre alguns fatos em teoria dos nós.

**Teorema 3.2.** Sejam  $f, g : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$  germes analíticos com singularidade isolada. Se  $f, g$  são  $C^0$ - $\mathcal{A}$ -equivalentes, então  $K(f), K(g)$  são equivalentes por uma esfera topológica.

**Demonstração.**

Precisaremos do seguinte lema, antes:

**Lema 3.2.** Let  $f, g : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$  germes analíticos com singularidade isolada. Se  $f, g$  são  $C^0$ - $\mathcal{A}$ -equivalentes, então  $K(f), K(g)$  são equivalentes por uma equivalência e um cobordismo de nós.

Temos homeomorfismos  $\phi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  e  $\psi : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$  tal que

$$g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$$

Seja  $\delta > 0$  raio de Milnor-Fukuda de  $g$  e  $\tilde{S}_\delta^1 = g^{-1}(\mathbb{S}^3(0, \delta))$  e  $\tilde{\mathbb{D}}_\delta^2$  aberto em  $\mathbb{R}^2$  tal que  $\partial\tilde{\mathbb{D}}_\delta^2 = \tilde{S}_\delta^1$ . Por outro lado, seja  $\epsilon_0$  raio de Milnor-Fukuda de  $f$ . Reduzindo  $\delta$  se necessário, temos  $Q_\delta = \psi^{-1}(\mathbb{D}_\epsilon^4) \subset \mathbb{D}_\epsilon^4$ . Considere

$$V_{\epsilon, \delta} = \tilde{\mathbb{D}}_\epsilon^2 - \text{int}(\phi^{-1}(\tilde{\mathbb{D}}_\delta^2)) \text{ e } W_{\epsilon, \delta} = \mathbb{D}_\epsilon^4 - \text{int}(\psi^{-1}(\mathbb{D}_\delta^4)).$$

Pelo teorema do anel (ver Brown (1960), teorema 2), temos  $V_{\epsilon, \delta}$  homeomorfo a  $S^1 \times I$  e  $W_{\epsilon, \delta}$  homeomorfo a  $\mathbb{S}^3 \times I$ . Como a restrição de  $f : V_{\epsilon, \delta} \rightarrow W_{\epsilon, \delta}$  é um mergulho temos um cobordismo de nós entre

$$(\partial Q_\delta, \psi^{-1}(K(g))) \text{ e } (S_\epsilon^3, K(f))$$

Concomitante a isso,  $\psi^{-1}$  fornece uma equivalência de nós entre

$$(\mathbb{S}_\delta^3, K(g)) \text{ e } (\partial Q_\delta, \psi^{-1}(K(g))).$$

**Prova do teorema:**

Usando o lema anterior e a estrutura cônica de  $f$  e  $g$  (3.1), obtemos que  $\psi^{-1}(K(g))$  e  $K(f)$  são invertíveis cobordantes em ambos os fins. Agora, usando o teorema 2.3 obtemos o resultado.  $\square$



### 3.1 Projeções Genéricas

Dado um nó  $K \subset \mathbb{S}_\epsilon^3$ , é possível conhecer sua topologia considerando uma projeção genérica sobre  $\mathbb{S}^2$ . De fato, se tal projeção é genérica, o nó projetado tem somente um número finito de cruzamentos transversais. Se, além disso, conhecemos a posição relativa de seus ramos próximos de cada cruzamento (ou seja, se está por cima ou por baixo no momento do cruzamento genérico na projeção) então podemos determinar completamente seu tipo topológico.

Seja  $v \in \mathbb{S}^3$  um vetor tal que  $\pm v \notin K$ . Denote por  $p_v : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  projeção linear genérica cujo núcleo é a linha gerado por  $v$ . Então,  $\pi_v : \mathbb{S}^3 \setminus \{\pm v\} \rightarrow \mathbb{S}^2$  é uma projeção esférica associada dada por  $\pi_v(x) = p_v(x)/\|p_v(x)\|$ . É conhecido que para um genérico  $v$ ,  $\pi_v(K)$  é uma curva imersa com somente pontos duplos transversais. Este tipo de curva chamamos de um *doodle* em  $\mathbb{S}^2$ .

Dado um doodle  $D$  em  $\mathbb{S}^2$ , temos associado a *palavra de Gauss* de  $D$ :

Nós rotulamos os cruzamentos de  $D$  com letras  $a_1, \dots, a_k$  (uma para cada cruzamento) e então construímos uma sequência escolhendo uma dada orientação de curva e iniciando com um ponto base escolhido (de preferência, fora dos cruzamentos). Cada letra aparece duas vezes na sequência, uma com expoente  $+1$  e outra com expoente  $-1$ , de acordo com a compatibilidade de orientação da curva com respeito a uma orientação de  $\mathbb{S}^2$  (ver figura 1).

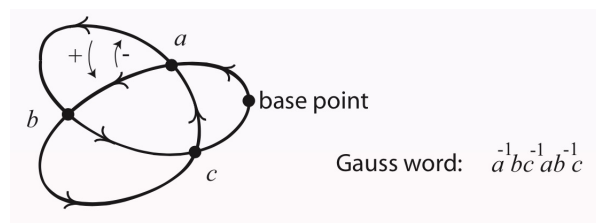


Figura 1

O lema seguinte fornece uma condição suficiente para determinar se temos um nó trivial a partir da palavra de Gauss associada a uma projeção genérica.

**Lema 3.3.** Seja  $K \subset \mathbb{S}^3$  um nó. Admita que exista uma projeção genérica  $\pi_v(K) \subset \mathbb{S}^2$  cuja palavra de Gauss é a identidade quando considerada como um elemento de um grupo livre gerado por suas letras. Então  $K$  é um nó trivial.

**Demonstração.**

Indução sobre o número  $r$  de cruzamentos do doodle  $\pi_v(K)$ .

Supondo  $r = 1$  é imediato que  $K$  é trivial. Considere o teorema válido para  $\pi_v(K)$  com  $r \leq n$  cruzamentos.

Seja  $K$  nó e  $\pi_v(K)$  doodle projeção com  $n + 1$  cruzamentos. Suponha sua palavra de Gauss

$$W = e \in G = \langle a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \rangle,$$

$G$  grupo livre. Vamos denotar  $\tilde{W}$  sua palavra de Gauss sem sinal.  $W = e$  implica que  $\tilde{W}$  possui ao menos um par de letras iguais  $a_k a_k$ , pois caso contrário não há como  $W$  ser reduzida. Seja  $a_k$  cruzamento associado ao termo  $a_k a_k^{-1}$  em  $W$ . Considere  $z_i < z_j \in \mathbb{S}^1$  ( $\mathbb{S}^1$  orientado no sentido anti-horário) tal que  $\pi_v \circ K(z_i) = \pi_v \circ K(z_j) = a_k$ . Vamos denotar  $\widehat{z_i z_j}$  a curva em  $\mathbb{S}^1$  ligando esses dois pontos com essa orientação. Sobre  $a_k$  temos que não ocorre em  $\pi_v \circ K(\widehat{z_i z_j})$  nenhum outro cruzamento (digamos  $a_l$ ). Pois caso contrário, teríamos a curva  $\pi_v \circ K(\widehat{z_i z_l z_j})$  com termo  $a_k a_l a_k$  na palavra  $\tilde{W}$ . Agora, como  $\pi_v \circ K$  é projeção genérica de  $K$ , o pedaço do nó cuja projeção é  $\pi_v \circ K(\widehat{z_i z_j})$  pode ter cruzamento desfeito usando o 1º movimento de Reidemeister (Twist  $\rightarrow$  Untwist). Feito isso, considerando  $\tilde{K}$  o nó obtido depois desse movimento, temos que  $P_v \circ \tilde{K}$  sem o cruzamento  $a_k$  e portanto com palavra de Gauss equivalente a  $W$  sem o termo  $a_k a_k^{-1}$ . Esta palavra ainda se cancela e com o doodle  $P_v \circ \tilde{K}$  com  $n$  cruzamentos. Por hipótese de indução,  $\tilde{K}$  é um nó trivial. E finalmente, como  $\tilde{K}$  e  $K$  são equivalentes,  $K$  é também um nó trivial. Assim, a prova fica concluída.  $\square$

No que segue, desejamos responder a seguinte pergunta: Como obter a projeção de um nó  $K(f)$  a partir de  $f$ ? Vejamos.

Seja  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$  germe analítico com singularidade isolada e considere projeção  $p_v \circ f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ . Fixemos um representante  $f : U \rightarrow V$  tal que  $f$  é um  $C^0$ -mergulho e uma imersão sobre  $U \setminus \{0\}$ . Segue pelo teorema de transversalidade de Thom que para um  $v$  genérico, a aplicação  $\tilde{f} := p_v \circ f$  é também genérica sobre  $U \setminus \{0\}$ . Portanto,  $\tilde{f}$  é uma imersão com cruzamentos normais exceto em pontos isolados, onde  $\tilde{f}$  tem singularidades do tipo Guarda-chuva de Whitney (ver Whitney (1944)). Reduzindo  $U$  se necessário, podemos evitar pontos triplos e Guardas-chuvas. Segue que  $f$  tem somente pontos duplos transversais sobre  $U \setminus \{0\}$ . Desse modo,  $\tilde{f}$  tem um link bem definido no sentido de Marar e Ballesteros (2009). Este link é uma curva fechada imersa em  $\mathbb{S}_\epsilon^2$  com somente pontos duplos transversais chamada doodle de  $\tilde{f}$ . Feita essa observação, o teorema abaixo responde nossa pergunta:

**Teorema 3.3.** Seja  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$  germe analítico com singularidade isolada. Então o nó de  $f$  tem uma projeção genérica equivalente ao doodle de  $p_v \circ f$ , para algum vetor genérico  $v$ .

### **Demonstração.**

Podemos admitir por simplicidade que  $v = (0, 0, 0, 1)$ . Fixemos um representante  $f : U \rightarrow V$   $C^0$ -mergulho e mergulho suave fora da origem e para cada  $t \in [0, 1]$ , considere:

$$f_t(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y), t f_4(x, y)).$$

Temos  $f_1 = f$  e  $f_0$  identificando  $p_v \circ f$ . Note que  $f_t : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^4$  é um mergulho, pois

$$f_t = G_t \circ f, \quad G_t(X, Y, Z, W) = (X, Y, Z, tW).$$

Seja  $L(f) : f^{-1}(\mathbb{S}_\epsilon^3) \rightarrow \mathbb{S}_\epsilon^3$ ,  $\epsilon \leq \epsilon_0$  ( $\epsilon_0$  raio de Milnor-Fukuda).

Afirmação 1: Dado  $\epsilon > 0$ ,  $\epsilon \leq \epsilon_0$  temos para  $0 < t \leq 1$ ,  $f_t|_{f_t^{-1}(\mathbb{S}_\epsilon^3)}$  é mergulho suave.

De fato, temos que  $f_t^{-1}(\mathbb{S}_\epsilon^3) = (G_t \circ f)^{-1}(\mathbb{S}_\epsilon^3) = f^{-1}(G_t^{-1}(\mathbb{S}_\epsilon^3))$ , onde  $f(\mathcal{U}) \cap G_t^{-1}(\mathbb{S}_\epsilon^3) = \{(a, b, c, d) \in f(\mathcal{U}); a^2 + b^2 + c^2 + t^2 d^2 = \epsilon^2\}$ . Segue que:

$$f(\mathcal{U}) \cap \mathbb{S}_\epsilon^3 \text{ e } f(\mathcal{U}) \cap G_t^{-1}(\mathbb{S}_\epsilon^3) \text{ são difeomorfos.}$$

Basta restringir  $\varphi : \mathbb{S}_\epsilon^3 \rightarrow G_t^{-1}(\mathbb{S}_\epsilon^3)$ ,  $\varphi(X, Y, Z, W) = (X, Y, Z, \frac{W}{t})$  a  $f(\mathcal{U}) \cap \mathbb{S}_\epsilon^3$ .

E  $f$  mergulho suave fora da origem implica que  $f^{-1}(\mathbb{S}_\epsilon^3)$  e  $f^{-1}(G_t^{-1}(\mathbb{S}_\epsilon^3))$  são difeomorfos. Portanto,  $f_t^{-1}(\mathbb{S}_\epsilon^3)$  é difeomorfo a  $\mathbb{S}^1$ ,  $0 < t \leq 1$ . Assim,  $f_t|_{f_t^{-1}(\mathbb{S}_\epsilon^3)}$  é mergulho pois  $f_t^{-1}(\mathbb{S}_\epsilon^3) = f^{-1}(G_t^{-1}(\mathbb{S}_\epsilon^3)) \subset \mathcal{U}$  e  $f_t$  é mergulho sobre  $\mathcal{U}$ , como vimos.

Agora, para cada  $t_0 \in (0, 1]$ , temos que a aplicação

$$(L(f_t), t) : f_t^{-1}(\mathbb{S}_\epsilon^3) \times [t_0, 1] \rightarrow \mathbb{S}_{\epsilon_0}^3$$

Fornece uma isotopia entre  $L(f_t)$  e  $L(f)$ . Usando teorema de extensão de isotopia, temos, de fato, uma isotopia ambiente e portanto  $L(f_t)$   $0 < t \leq 1$  e  $L(f)$  são equivalentes. Além disso, veja que para cada  $t \in (0, 1]$ , o nó

$$L(\tilde{f}_t) = f_t|_{f^{-1}(P^{-1}(\mathbb{S}_{\epsilon_0}^2))} = (L(P \circ f), t f_4)|_{f^{-1}(P^{-1}(\mathbb{S}_{\epsilon_0}^2))}$$

tem mesmo tipo isotópico de  $L(f_t) = f_t|_{f_t^{-1}(\mathbb{S}_\epsilon^3)}$ . Basta deformar  $f_t^{-1}(\mathbb{S}_\epsilon^3)$  em  $f^{-1}(P^{-1}(\mathbb{S}_{\epsilon_0}^2))$  usando o teorema do anel <sup>1</sup> para  $f^{-1}(P^{-1}(\mathbb{B}_{\epsilon_0}^4)) - f_t^{-1}(\mathbb{B}_\epsilon^4)$  e mais uma vez usar o teorema de extensão de isotopia para estender a isotopia para o ambiente. Finalmente, note que  $L(P \circ f)$  é também uma projeção genérica do nó  $\tilde{F}_t$  já que  $t f_4$  é, nesse caso, apenas uma função altura levantando os cruzamentos de  $L(P \circ f)$ . Finalmente como  $L(\tilde{f}_t)$  e  $L(f)$  são equivalentes,  $L(P \circ f)$  é uma projeção genérica para  $L(f)$ .  $\square$

Considere  $J^2(2, 4)$  espaço dos 2-jets de  $(\mathbb{R}^2, 0)$  em  $(\mathbb{R}^4, 0)$  e por  $\sum^1 J^2(2, 4)$  o subconjunto de 2-jets de coposto 1 em 0. O grupo  $\mathcal{A}^2$  dos 2-jets de difeomorfismos de  $(\mathbb{R}^2, 0)$  e  $(\mathbb{R}^4, 0)$  age suavemente sobre este subconjunto. Para esta ação, temos o seguinte:

**Lema 3.4.** Existem 4 órbitas em  $\sum^1 J^2(2, 4)$  sobre a ação de  $\mathcal{A}_2$ . A saber:

$$(x, y^2, xy, 0), \quad (x, y^2, 0, 0), \quad (x, xy, 0, 0) \quad \text{e} \quad (x, 0, 0, 0)$$

**Demonstração.**

É essencialmente análogo a prova de D.Mond para o caso de germes  $g : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ . Seja

$$j^2 f(0) = (x, b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2, c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2, d_{20}x^2 + d_{11}xy + d_{02}y^2),$$

$b_{ij}$ ,  $c_{ij}$ ,  $d_{ij}$  coeficientes reais.

O termo  $x^2$  pode ser eliminado. Para isso considere o 2-jato de difeomorfismo  $\varphi : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$  dado por

$$\varphi(X, Y, Z, W) = (X, Y - b_{20}X^2, Z - c_{20}X^2, W - d_{20}X^2)$$

<sup>1</sup>Como tais curvas são suaves, podemos considerar um difeomorfismo sobre o anel  $\mathbb{S}^1 \times I$ .

Então  $\hat{j}^2 f(0) = \varphi \circ j^2 f(0) = ((x, b_{11}xy + b_{02}y^2, c_{11}xy + c_{02}y^2, d_{11}xy + d_{02}y^2))$ . Seja agora

$$A = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{02} \\ c_{11} & c_{02} \\ d_{11} & d_{02} \end{pmatrix}$$

E vamos denotar por  $A_{bc}, A_{bd}$  e  $A_{cd}$  os respectivos menores de  $A$ . Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $\det(A_{bc}) \neq 0$ . Então podemos escrever

$$\hat{j}^2 f(0) = (x, A_{bc}[y \cdot (x, y)], d_{11}xy + d_{02}y^2)$$

E em seguida, podemos ampliar  $A_{bc}$ . Mais precisamente, considerar

$$\tilde{A}_{bc} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{02} & 0 \\ 0 & c_{11} & c_{02} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De modo que,  $\hat{j}^2 f(0) = \tilde{A}_{bc}[x, y \cdot (x, y), d_{11}xy + d_{02}y^2]$  e, claramente,  $\tilde{A}_{bc}$  é invertível. Segue, para esse caso, que

$$j^2 f(0) \sim^{A_2} (x, y^2, xy, 0)$$

Já que  $j^2 f(0) = B \circ \tilde{A}_{bc}^{-1} \circ \hat{j}^2 f(0)$ , onde  $B : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$  é dado por

$$B(X, Y, Z, T) = (X, Y, Z, T - d_{11}Y - d_{02}Z)$$

Suponhamos agora que  $\det(A_{bc}) = 0$ . Se  $b_{02} \neq 0$  então  $A_{bc}$  tem posto 1 o que significa que depois de uma mudança de coordenadas podemos assumir  $c_{11} = c_{02} = 0$ . Nesse caso, completando quadrados na segunda posição ( $b_{11}xy + b_{02}y^2$ ) obtemos  $j^2 f(0) \sim (x, e_{02}y^2, 0, d_{11}xy + d_{02}y^2)$  que pertence as órbitas  $(x, y^2, xy, 0)$  ou  $(x, y^2, 0, 0)$  novamente com mudança linear de coordenadas.

Agora se  $b_{02} = 0$  então ficamos com o germe  $(x, b_{11}xy, 0, d_{11}xy + d_{02}y^2)$  que também está em uma das 4  $\mathcal{A}_2$ -órbitas supostas no lema.  $\square$

Observe que  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$  tem tipo  $\Sigma^{1,0}$  se, e somente se, seu 2-jet é equivalente a uma das duas  $\mathcal{A}^2$ -órbitas  $(x, y^2, xy, 0)$  ou  $(x, y^2, 0, 0)$ .

**Corolário 3.2.** Seja  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$  aplicação com singularidade isolada do tipo  $\Sigma^{1,0}$ . Então  $K(f)$  é um nó trivial. Além disso, quaisquer aplicações deste tipo são  $C^0 - \mathcal{A}$ -equivalentes a  $A(x, y) = (x, y, 0, 0)$ .

**Demonstração.**

Pelo teorema 4.2 em Marar e Ballesteros (2009)  $p_v \circ f$  tem um doodle cuja palavra de Gauss é da forma

$$a_1 a_2^{-1} a_3 \dots a_k^\epsilon a_k^{-\epsilon} \dots a_3^{-1} a_2 a_1^{-1},$$

com  $\epsilon = (-1)^{k+1}$ . Usando o teorema 3.3,  $K(f)$  tem uma projeção genérica equivalente ao doodle de  $p_v \circ f$ . como a palavra de Gauss acima é trivial como elemento de um grupo

livre, segue que  $K(f)$  é um nó trivial pelo lema 3.3. A última parte decorre do teorema 3.2.  $\square$

### 3.2 Famílias $\delta$ -constantes

Consideremos famílias a 1-paraâmetro de germes analíticos  $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  tal que  $F(t, 0) = 0$  para todo  $t$ . Denotando  $f_t(x) = F(t, x)$ , temos para cada  $t$ , o germe  $f_t : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ .

**Definição 3.4.** *Uma família  $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$  é dita  $\delta$ -constant se  $\delta(f_0) < \infty$  e  $\delta(f_t) = \delta(f_0)$  para todo  $t$  numa vizinhança de 0.*

Uma primeira propriedade interessante é que uma família  $\delta$ -constant tem singularidade isolada "uniformemente", que é, singularidade isolada numa vizinhança que independe de  $t$ . Por simplicidade, vamos nos restringir ao caso de coposto 1 em 0.

**Lema 3.5.** *Seja  $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$  família  $\delta$ -constante tal que  $f_0$  tem coposto 1 em 0. Existe um representante  $F : (-\delta, \delta) \times U \rightarrow V$  tal que para todo  $t \in (-\delta, \delta)$ ,  $f_t : U \rightarrow V$  é um  $C^0$ -mergulho e uma imersão sobre  $U \setminus \{0\}$ .*

**Demonstração.**

Seja  $\hat{F} : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^4, 0)$  complexificação de  $F$  e denote  $\hat{f}_t(x) = \hat{F}(t, x)$ . Temos por hipótese que  $\delta(\hat{f}_0) < \infty$  e  $\delta(\hat{f}_t) = \delta(\hat{f}_0)$  para todo  $t$  numa vizinhança de 0. Além disso, como  $\hat{f}_0$  tem coposto 1 em 0, nós podemos escolher coordenadas tal que:

$$\hat{f}_t(x, y) = (x, p_t(x, y), q_t(x, y), r_t(x, y)),$$

E assim,

$$\delta(\hat{f}_t) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\langle \Delta p_t, \Delta q_t, \Delta r_t \rangle}.$$

Por Hilbert Nullstellensatz, Podemos fixar um representante numa vizinhança aberta  $\hat{U}$  of 0 em  $\mathbb{C}^3$  tal que  $D^2(\hat{f}_0) = \{0\}$ . Agora, vamos usar o princípio de conservação do número (ver Theo De Jong (2000) [p. 250]): Existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $t$  com  $|t| < \delta$ ,

$$\delta(\hat{f}_0) = \sum_{(x, y, y') \in D^2(\hat{f}_t)} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3(x, y, y')}}{\langle \Delta p_t, \Delta q_t, \Delta r_t \rangle}.$$

No entanto, o lado direito deve conter ao menos um termo igual a  $\delta(\hat{f}_t)$  correspondente a origin. Segue que  $D^2(\hat{f}_t) = \{0\}$ . Finalmente, se  $U$  é a projeção real de  $\hat{U}$ , teremos  $D^2(f_t) = \{0\}$  on  $U$ .  $\square$

Com o intuito de obter nosso principal resultado, vamos considerar famílias com multiplicidade constante. Recorde que a multiplicidade do germe de uma aplicação

$f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  é o número

$$m(f) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{E}_n}{\langle f_1, \dots, f_p \rangle}.$$

No caso em que  $f$  tem coposto 1 em 0, escrevendo como em (3.2), temos:

$$m(f) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{E}_1}{\langle f_1(0, y), \dots, f_p(0, y) \rangle}.$$

Novamente, esta definição também faz sentido para germes de aplicações holomorfas se nós considerarmos  $\mathcal{O}_n$  no lugar de  $\mathcal{E}_n$ . De modo análogo a 3.4, diremos que a família  $F$  é  $m$ -constante se  $m(f_0) < \infty$  e  $m(f_t) = m(f_0)$  para  $t$  suficientemente pequeno.

**Lema 3.6.** Seja  $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$  família  $m$ -constante tal que  $f_0$  tem coposto 1 em 0. Então existe um representante  $F : (-\delta, \delta) \times U \rightarrow V$  e  $\epsilon_0 > 0$  tal que para todo  $t \in (-\delta, \delta)$  e para todo  $\epsilon$  com  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ ,  $\epsilon$  é valor regular de  $g_t = \|f_t\|^2$ .

**Demonstração.**

Seguiremos com a mesma notação usada na prova do lema 3.5, adicionando a notação  $\hat{g}_t$  para representar a complexificação de  $g_t$ :

$$\hat{g}_t(x, y) = x^2 + p_t(x, y)^2 + q_t(x, y)^2 + r_t(x, y)^2.$$

Denotemos também  $\hat{G} : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C})$  para o desdobramento associado a  $\hat{g}_t$ , que é,  $\hat{G}(t, x, y) = (t, \hat{g}_t(x, y))$ .

Assuma  $m(f_t) = m$  e considere os pesos  $(m, 1)$  para as variáveis  $(x, y)$ . Depois de uma mudança linear de coordenadas na imagem, podemos supor que o monômio  $y^m$  aparece somente em uma das funções  $p_t, q_t$  ou  $r_t$ . Então  $\hat{g}_t$  tem uma parte principal  $x^2 + a_m^2 y^{2m}$ , para algum  $a_m \neq 0$  e todos os outros monômios em  $\hat{g}_t$  com grau pesado maior. De fato, se o termo  $y^m$  aparece na função  $p_t$ , temos:

$$\begin{aligned} p_t(x, y)^2 &= (a_m y^m + a_{m+1} y^{m+1} + \dots + x(b_\ell y^\ell + b_{\ell+1} y^{\ell+1} + \dots) + \dots)^2 \\ &= a_m^2 y^{2m} + 2b_\ell x y^{m+\ell} + \dots \end{aligned}$$

Logo, todos os outros monômios diferentes de  $y^{2m}$  tem grau pesado  $\geq 2m + \ell > 2m$ . O mesmo argumento pode ser escrito par as funções  $q_t, r_t$ .

Isto implica que a família  $\hat{g}_t$  tem número de Milnor constante e igual a  $\mu(\hat{g}_t) = 2m - 1$ . Usando o teorema de Greuel (1986), o locus singular de  $\hat{G}$  é o germe do eixo  $t$   $(\mathbb{C} \times \{0\}, 0)$ . Então, o discriminante (a imagem do locus singular) é também o germe do eixo  $t$  na imagem. Portanto existe uma vizinhança aberta  $\hat{U}$  da origem em  $\mathbb{C}^2$  e  $\delta, \epsilon_0 > 0$  tal que para todo  $t$  com  $|t| < \delta$  e para todo  $z \in \mathbb{C}$  com  $0 < |z| \leq \epsilon_0$ ,  $z$  é um valor regular de  $\hat{g}_t$ . Finalmente, tomamos  $U$  uma projeção real de  $\hat{U}$ .  $\square$

**Teorema 3.4.** Seja  $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$  família  $\delta$ -constante,  $m$ -constante tal que  $f_0$  has coposto 1 em 0. Então  $K(f_t)$  é equivalente (como nó) a  $K(f_0)$  para todo  $t$  numa vizinhança de 0.

**Demonstração.**

Usando o lema 3.5, existe um representante  $F : (-\delta, \delta) \times U \rightarrow V$  tal que  $f$  é  $C^0$ -mergulho e imersão sobre  $U \setminus \{0\}$ . E pelo lema 3.6, existe  $\epsilon_0 > 0$  com  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ ,  $\epsilon$  é um valor regular de  $g_t = \|f_t\|^2$ . Segue portanto, como na prova do teorema 3.1 que para todo  $t \in (-\delta, \delta)$ ,  $\epsilon_0$  é um raio de Milnor-Fukuda para  $f_t$  e  $K(f_t) = f_t(U) \cap S_{\epsilon_0}^3$  é o nó de  $f_t$ . Além disso, usando os mesmos argumentos como na prova do teorema 3.1, podemos considerar um difeomorfismo  $\Phi : F^{-1}(S_{\epsilon_0}^3) \rightarrow (-\delta, \delta) \times S^1$  da forma  $\Phi(t, x, y) = (t, \phi_t(x, y))$  de tal modo que  $\phi_t(f_t^{-1}(S_{\epsilon_0}^3)) = S^1$ . Então  $F \circ \Phi^{-1} : (-\delta, \delta) \times S^1 \rightarrow S_{\epsilon_0}^3$  fornece uma isotopia entre os nós  $K(f_t)$ , os quais serão todos equivalentes.  $\square$

Este teorema permite, em particular, estender a investigação sobre que classe de nós que aparecem como link de superfícies com singularidade isolada de coposto 1.

Considere germe de aplicação  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$  com singularidade isolada cujo 2-jato tem tipo  $(x, xy, 0, 0)$ . Em geral, tal germe pode ser escrito na forma:

$$f(x, y) = (x, xy + p(x, y), q(x, y), r(x, y)),$$

Para funções  $p, q, r \in \mathfrak{m}_2^3$ , onde  $\mathfrak{m}_2$  denota o ideal maximal de  $\mathcal{E}_2$ . Vamos nos restringir ao caso em que  $p = 0$ .

**Teorema 3.5.** Seja  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$  germe com singularidade isolada da forma

$$f(x, y) = (x, xy, q(x, y), r(x, y)),$$

para algumas funções  $q, r \in \mathfrak{m}_2^3$ . Então  $f$  é desnodado.

**Demonstração.**

Seja  $q, r$  escrito da forma  $q(x, y) = q_0(y) + xq_1(x, y)$  e  $r(x, y) = r_0(y) + xr_1(x, y)$  e considere família a 1-parâmetro

$$f_t(x, y) = (x, xy, q_0(y) + txq_1(x, y), r_0(y) + txr_1(x, y)).$$

Logo, o ideal das diferenças divididas fica da seguinte forma:

$$I^2(f_t) = \langle x, \frac{Q(0,u)-Q(0,y)}{u-y} + tx \frac{Q_1(x,u)-Q_1(x,y)}{u-y}, \frac{R(0,u)-R(0,y)}{u-y} + tx \frac{R_1(x,u)-R_1(x,y)}{u-y} \rangle$$

Segue que:

$$\delta(f_t) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{E}_3}{\langle x, \Delta q_0, \Delta r_0 \rangle} \quad e \quad m(f_t) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{E}_2}{\langle x, q_0, r_0 \rangle},$$

Assim  $f_t$  is  $\delta$ -constante e  $m$ -constante. Pelo teorema 3.4,  $f_1 = f$  é  $C^0$ - $\mathcal{A}$ -equivalente a  $f_0$ .

Como  $\delta(f_0) < \infty$ , temos  $\delta(\gamma_0) < \infty$ , onde  $\gamma_0$  é a curva plana  $\gamma_0(y) = (q_0(y), r_0(y))$ . Então,  $\gamma_0$  tem singularidade isolada e é  $C^0$ - $\mathcal{A}$ -equivalente ao mergulho padrão  $y \mapsto (y, 0)$ . Esta  $C^0$ - $\mathcal{A}$ -equivalencia pode ser estendida a  $C^0$ - $\mathcal{A}$ -equivalencia entre  $f_0$  e  $(x, y) \mapsto (x, xy, y, 0)$ . Finalmente, usando mudanças de coordenadas em  $\mathbb{R}^4$ , obtemos mergulho padrão  $(x, y) \mapsto (x, y, 0, 0)$ .  $\square$

É possível achar nós não triviais na classe de germes de aplicações com 2-jato do tipo  $(x, xy, 0, 0)$ , se assumimos que  $p \neq 0$ . Nesse ponto, vale a pena ressaltar que para germes  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$  de coposto 1 em 0, existe uma forma alternativa e conveniente de representar  $K(f)$ :

**Proposição 3.1.** Seja  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$  germe analítico com singularidade isolada tal que  $f$  tem coposto 1 em 0. Existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que para  $0 < x \leq \epsilon_0$ ,  $K(f)$  é descrito (a menos de  $C^0$ - $\mathcal{A}$ -equivalencia) pela união de curvas  $\gamma_x, \gamma_{-x}$ , onde

$$\gamma_x(y) = (p(x, y), q(x, y), r(x, y)).$$

$p, q, r$  funções analíticas numa vizinhança da origem.

**Demonstração.**

Seja  $\epsilon_0 > 0$  tal que  $L(f) = f|_{f^{-1}(\mathbb{S}_{\epsilon_0}^2)}$  é bem definido,  $\epsilon \leq \epsilon_0$ . Considere números positivos  $x_0, \epsilon_1$  suficientemente pequenos tal que a curva simples fechada

$$\{(x_0, y); -\epsilon_1 \leq y \leq \epsilon_1\} \cup \{(x, \epsilon_1); -x_0 \leq x \leq x_0\} \cup \{(-x_0, y); -\epsilon_1 \leq y \leq \epsilon_1\} \cup \{(x, -\epsilon_1); -x_0 \leq x \leq x_0\}$$

esteja inteiramente contida em  $f^{-1}(B_{\epsilon_0}^4)$ . Vamos denotar esta curva por  $\partial Q_{\epsilon_1, x_0}$ . Note que  $\partial Q_{\epsilon_1, x_0}$  é a fronteira de um retângulo 2-dimensional  $Q_{\epsilon_1, x_0}$  com lados  $2x_0$  e  $2\epsilon_1$ . Como  $f$  é mergulho topológico podemos escolher ainda  $\epsilon_2 > 0$  tal que  $f^{-1}(\overline{B}_{\epsilon_2}^4) \subsetneq \text{int}(Q_{\epsilon_1, x_0})$ . Temos então

$$f^{-1}(\overline{B}_{\epsilon_2}^4) \subsetneq \text{int}(Q_{\epsilon_1, x_0}) \text{ e } Q_{\epsilon_1, x_0} \subsetneq f^{-1}(B_{\epsilon_0}^4).$$

Então como anteriormente,  $\tilde{K}(f) = f(\partial Q_{\epsilon_1, x_0})$  e  $K(f)$  são invertíveis cobordantes. Portanto, são equivalentes. Observe agora que

$$f|_{(\partial Q_{\epsilon_1, x_0})} = \gamma_{x_0} \cup \gamma_{\epsilon_1} \cup \gamma_{-x_0} \cup \gamma_{-\epsilon_1}$$

Onde

$$\begin{aligned} \gamma_{x_0} &= (x_0, P(x_0, y), Q(x_0, y), R(x_0, y))|_{y \in [-\epsilon_1, \epsilon_1]} \text{ e} \\ \gamma_{\epsilon_1} &= (x, P(x, \epsilon_1), Q(x, \epsilon_1), R(x, \epsilon_1))|_{x \in [-x_0, x_0]} . \end{aligned}$$

Afirmção:  $\tilde{K}(f)$  e  $\gamma_{x_0} \cup \gamma_{-x_0}/\sim$  são nós equivalentes, onde o conjunto  $\gamma_{x_0} \cup \gamma_{-x_0}/\sim$  é obtido identificando os pontos:  $\gamma_{x_0}(-\epsilon_1) \sim \gamma_{-x_0}(-\epsilon_1)$  e  $\gamma_{x_0}(\epsilon_1) \sim \gamma_{-x_0}(\epsilon_1)$ .

Para provar esta afirmação, é suficiente mostrar que as curvas  $\gamma_{\epsilon_1}$  e  $\gamma_{-\epsilon_1}$  tem o mesmo tipo topológico do segmento  $(t, 0)$ . Feito isso, fica claro que omitindo essas curvas do nó  $f|_{f^{-1}(\partial Q_{\epsilon_1, x_0})}$  não estamos alterando a sua classe (não há mudança na 3-topologia de seu complemento).

É suficiente demonstrar isso para apenas um deles, digamos  $\gamma_{\epsilon_1}$ :



$$\gamma_{\epsilon_1}(x) = ((x, P(x, \epsilon_1), Q(x, \epsilon_1), R(x, \epsilon_1))) = (x, 0, 0, 0) + (0, P(x, \epsilon_1), Q(x, \epsilon_1), R(x, \epsilon_1)).$$

Com uma mudança linear de coordenadas, obtemos, a menos de  $\mathcal{A}$ -equivalência:

$$\tilde{\gamma}_{\epsilon_1}(x) = (x, 0, 0, 0) + (0, P(x, \epsilon_1) - P(0, \epsilon_1), Q(x, \epsilon_1) - Q(0, \epsilon_1), R(x, \epsilon_1) - R(0, \epsilon_1)), \quad \tilde{\gamma}_{\epsilon_1}(0) = 0.$$

Tomando

$$p = \min \{ \text{ord}_x(P(x, \epsilon_1) - P(0, \epsilon_1)), \text{ord}_x(Q(x, \epsilon_1) - Q(0, \epsilon_1)), \text{ord}_x(R(x, \epsilon_1) - R(0, \epsilon_1)) \}$$

podemos escrever

$$\tilde{\gamma}_{\epsilon_1}(x) = (x, 0, 0, 0) + x^p(\alpha(x)), \quad \alpha(0) \neq 0.$$

1. Se  $p > 1$  então  $\tilde{\gamma}'_{\epsilon_1}(0) = (1, 0, 0, 0)$
2. Se  $p = 1$  então podemos supor, sem perda de generalidade, que  $\text{ord}_x(P(x, \epsilon_1) - P(0, \epsilon_1)) = 1$ . Nesse caso, teremos:  $\tilde{\gamma}'_{\epsilon_1}(0) = (1, P_1(0, \epsilon_1), 0, 0)$ . Onde  $P(x, \epsilon_1) - P(0, \epsilon_1) = xP_1(x, \epsilon_1)$ .

Em ambos os casos,  $\tilde{\gamma}'_{\epsilon_1}(0) \neq 0$ . Portanto, usando a forma local das imersões, temos que  $\tilde{\gamma}_{\epsilon_1}$  é  $\mathcal{A}$ -equivalente a  $(x, 0, 0, 0)$ . Assim, escolhendo um intervalo  $(-x_0, x_0)$  suficientemente pequeno e um representante  $\tilde{\gamma}_{\epsilon_1}$   $\mathcal{A}$ -equivalente a  $(x, 0, 0, 0)$ , a afirmação fica demonstrada.  $\square$

**Exemplo 3.3.** Seja  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$  aplicação dada por :

$$f(x, y) = (x, y^3 - xy, y^4 - \frac{3}{2}xy^2, y^5 + \frac{3}{5}x^2y - \frac{5}{3}xy^3).$$

Escrevendo  $f(x, y) = (x, \gamma_x(y))$ , pela proposição anterior, a união das curvas  $\gamma_x$  e  $\gamma_{-x}$  fornece  $K(f)$  a menos de equivalência de nós. O nó obtido é o nó trefoil.

**Observação 3.2.** De outro modo,  $f(x, y) = (x, \gamma_x(y))$  pode ser visto como uma família a 1-parâmetro de curvas no espaço. Para  $x = 0$ ,  $\gamma_0(y) = (y^3, y^4, y^5)$  tem singularidade isolada na origem enquanto para  $x \neq 0$ ,  $\gamma_x$  é uma estabilização de  $\gamma_0$ .

#### 4 CONE TANGENTE DE SUPERFÍCIES PARAMETRIZADAS

Dada uma subvariedade  $M \subset \mathbb{R}^n$   $k$ -dimensional de classe  $C^r$ , temos que dado um ponto  $a \in M$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $a$  tal que  $M \cap U$  é localmente um gráfico de uma aplicação  $C^r$   $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ . Esta é uma generalização do teorema da função implícita (ver Lee (2003) proposição 5.16). Significa que, a menos de uma mudança suave de coordenadas,  $\mathbb{R}^k \oplus D\phi(\tilde{a})\mathbb{R}^k$  determina o espaço tangente a  $M \cap U$  em  $a = (\tilde{a}, \phi(\tilde{a}))$  com a mesma dimensão que  $M$ . Mais geralmente, tal modelo linear na vizinhança de um ponto pode ser imitado para conjuntos mais gerais como a imagem  $M = F(\mathcal{U})$ ,  $F$  aplicação analítica, por exemplo. Nesse caso, se posto de diferencial de  $F$  em dado ponto não tem posto maximal, podemos não ter estrutura de gráfico suave.

Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  conjunto não vazio e  $x \in \overline{X}$  (fecho de  $X$ ). Um vetor  $v \in \mathbb{R}^n$  é dito tangente a  $X$  no ponto  $x$  quando existe uma sequência de números reais positivos  $t_j$  e uma sequência  $(x_j)$  em  $X$  tal que  $t_j(x_j - x) \rightarrow v$  quando  $x_j \rightarrow x$ . Denotamos por  $T_x X$  o conjunto de todos os vetores tangentes a  $X$  em  $x$ . Observe que, no caso de uma subvariedade suave,  $T_x X$  coincide com o espaço tangente a  $X$  em  $x$ .

**Definição 4.1.**  $T_x X$  é dito *cone tangente* de  $X$  em  $x$ .

**Observação 4.1.** (*Caracterizações*)

1. Seja  $x_0 \in \overline{X}$ ,  $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^n$ . Considere  $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$  satisfazendo o seguinte: Para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $y \in X$ ,  $y \neq x_0$  tal que

$$\left\| \frac{v}{\|v\|} - \frac{y-x_0}{\|y-x_0\|} \right\| < \epsilon.$$

Então  $v \in T_{x_0} X$ .

2.  $T_{x_0} X = Cone(S_{x_0} X)$ , onde  $S_{x_0} X = \{w \in \mathbb{R}^n; w = \lim_{y_j \rightarrow x} \frac{y_j - x_0}{\|y_j - x_0\|}\}$  é dito o link tangente de  $X$  em  $x_0$ .

Para determinar o cone tangente de um conjunto algébrico ou semi-algébrico (ver apêndice) é suficiente considerar curvas no lugar de sequências. Mais precisamente, considere o link tangente:

$$\tilde{S}_x X = \{v \in \mathbb{R}^n; v = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\gamma(t) - x}{t}, \|\gamma(t) - x\| = t\}.$$

Onde  $\gamma : [0, \epsilon) \rightarrow X$ , é uma curva continua para qual o limite acima existe ( $\gamma(0) = x$ ).

**Observação 4.2.** Usaremos notação  $D_0^+ \gamma(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\gamma(t) - x}{t}$ . E quando não usarmos notação  $(,)$  para indicar germe de aplicações ou conjuntos, estaremos já admitindo a escolha de um representante.

**Proposição 4.1.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  semialgébrico,  $x \in X$ . Então  $\tilde{S}_x X = S_x X$ .*

**Demonstração.**

Por definição, note que  $\tilde{S}_x X \subset S_x X$ . Seja agora  $v \in S_x X$ . Considere caracterização 1 na observação 4.1. Fixado  $v$ , Seja  $d_v(y) = \left\| \frac{v}{\|v\|} - \frac{y-x_0}{\|y-x_0\|} \right\|$ .  $d_v$  é claramente uma função semialgébrica e, por isso,  $d_v^{-1}((0, \epsilon])$  é um conjunto semialgébrico em  $X$  tal

que  $x_0 \in \overline{d_v^{-1}((0, \epsilon])}$ . Desse modo, usando lema de seleção da curva (ver apêndice), escolha  $\gamma \subset \overline{d_v^{-1}((0, \epsilon])}$  tal que  $\gamma(0) = x_0$ . Parametrizando  $\gamma$  pela distância até  $x_0$  veja que  $D_0^+ \gamma(t) = v$ .  $\square$

**Observação 4.3.** Note que em  $\tilde{S}_x X$ ,  $\gamma$  está parametrizada por  $X \cap \mathbb{S}$ , onde  $S^{n-1}(x, t)$  é a esfera euclidiana em  $\mathbb{R}^n$  de raio  $t$ . Outra alternativa, é escrever, usando parametrização de Puiseux,  $\gamma(t) = tv + o(t)$ . Observe que,  $D_0^+ \gamma(t) = v$ . Nesse capítulo, usaremos tais parametrizações para determinar direções no cone tangente de superfícies

Considere  $U$  aberto em  $\mathbb{R}^m$  e uma aplicação diferenciável  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x \in U$ . Dado  $v \in \mathbb{R}^n$ , é imediato que  $f'(x).v \in T_{f(x)}f(U)$ . Mas não é verdade que  $f'(x).\mathbb{R}^n = T_{f(x)}f(U)$ .

**Exemplo 4.1.** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (x, y^2)$ . Então,  $f'(0).\mathbb{R}^2 = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$ . No entanto, considerando a curva  $f(t^2, t)$ , temos que o vetor  $(1, 1) \in T_0f(\mathbb{R}^2)$ . De fato,

$$f(t^2, t) = (t^2, t^2).$$

**Observação 4.4.** Seja  $X = f(U)$  superfície parametrizada e  $v \in T_0X$ . Pela proposição 4.1, existe  $\gamma : [0, \delta) \rightarrow X$  tal que  $\gamma'(0) = v$ . Seja  $\tilde{\gamma} = f^{-1}(\gamma) : [0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^2$  o "pull-back" de  $\gamma$ . Pela condição de  $C^0$ -mergulho,  $\tilde{\gamma}(0) = 0$ . Significa que podemos assumir, sem perda de generalidade, que para cada  $v \in T_0X$ , temos  $v = D_0^+ f \circ \tilde{\gamma}(t)$ ,  $\tilde{\gamma} : [0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Além disso, como  $f$  é analítica,  $f^{-1}(\gamma)$  é subanalítica e portanto existe uma parametrização de Puiseux para  $\tilde{\gamma}$ , a saber:  $\tilde{\gamma}(t) = (t^r, Dt^s + o(t^s))$ ,  $D$  constante real e  $r, s \in \mathbb{N}$ . Note que considerando  $\gamma_1(t) = (t^r, Dt^s)$ , temos  $D_0^+ \gamma_1(t) = D_0^+ \tilde{\gamma}(t)$ .

**Exemplo 4.2.** Seja  $S \subset \mathbb{C}^n$  conjunto analítico complexo 1-dimensional irreduzível,  $0 \in S$  ponto singular. É conhecido que existe parametrização de uma vizinhança de  $0 \in \mathbb{C}$  sobre uma vizinhança de  $0 \in \mathbb{C}^n$ . Mais precisamente temos,  $S \cap V = z(U)$  onde  $z(\zeta) = (z_1(\zeta), \dots, z_n(\zeta))$  e cada  $z_j$  é uma função analítica em  $\zeta$  (veja uma justificativa dessa fato em, por exemplo, Chirka (1989), pág 67. Em particular, temos uma superfície parametrizada em  $\mathbb{R}^{2n}$  e seu cone tangente em  $0$  é uma linha complexa (um plano real). No caso de um conjunto analítico redutível em  $0$ , seu cone tangente é a união de linhas complexas que não excedem o número de componentes irreduzíveis. Considere ainda  $X = f^{-1}(0)$ , onde  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  é o germe de uma função holomorfa na origem. Podemos escrever:

$$f = f_m + f_{m+1} + \dots$$

onde  $f_k$  consiste na componente homogênea de grau  $k$ . Nesse caso, o cone tangente de  $X$  em  $0$  é dado por

$$T_0X = \{v \in \mathbb{C}^n; f_m(v) = 0\}. \quad (4.1)$$

O que, em particular, no caso em que  $n = 2$  (uma curva complexa plana) se  $\{f = 0\}$  é irreduzível, temos também uma superfície parametrizada no  $\mathbb{R}^4$  e seu cone tangente é completamente determinado por 4.1. No caso real, podemos ter degenerescência, como mostra o seguinte exemplo:

$$X = f^{-1}(0), f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^3.$$

Nesse caso,  $T_0X = \{(0, 0, z); z \geq 0\}$ . Além disso, na imagem de uma aplicação, podemos ter componentes não planas:

**Exemplo 4.3.** Seja  $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y), \dots, F_n(x, y))$  com  $F_i$  homogênea de grau  $d$ ,  $\forall i$ ,  $n > 2$ . Considere  $\gamma_{ab}(t) = F(at, bt)$ ,  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Então  $D_0^+ \gamma_{ab}(t) = F(a, b)$ . Por outro lado, tome  $v \in C(\text{Im}F, 0)$ . Por definição, existe  $\gamma \subset \text{Im}F$ ,  $\gamma(0) = 0$  tal que  $D_0^+ \gamma(t) = v$ . Tomando  $\tilde{\gamma} = F^{-1}(\gamma)$ , escrevemos:

$$\tilde{\gamma}(t) = t\tilde{v} + o(t).$$

Então,  $\gamma(t) = F(t\tilde{v} + o(t)) = t^d F(\tilde{v}) + o(t^d)$ . Segue que  $v = F(\tilde{v})$ . Portanto,  $C(\text{Im}F, 0) = \text{Im}F$ .

No que segue, estamos interessados em determinar o cone tangente de superfícies dada como imagem de aplicações algébricas. Não colocaremos restrição aqui sobre conjunto singular de superfície.

**Definição 4.2.** Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $0 \in X$ .  $X$  é dito germe de uma superfície algébrica parametrizada (numa vizinhança da origem) quando existe representante  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  aplicação polinomial tal que  $f$  é um  $C^0$ -mergulho e  $X = f(U)$ .

Dada  $X = f(U)$  superfície algébrica parametrizada, como  $f$  é  $C^0$ -mergulho para algum representante, temos que

$$f(x, 0) \neq 0 \text{ e } f(0, y) \neq 0.$$

Como funções  $f_i$  (componentes de  $f$ ) são polinomiais podemos escrever  $f_i(x, 0) = x^{q_i} h_i(x, 0)$  onde  $h_i(0, 0) \neq 0$ .  $q$  é dito a ordem de  $f_i$  (vamos denotar  $\text{ord}f_i(x, 0)$ ). Vamos por  $\text{ord}f(x, 0) = \min\{\text{ord}f_i(x, 0); i = 1, 2, \dots, n\}$  e  $\text{ord}f(0, y) = \min\{\text{ord}f_j(0, y); j = 1, 2, \dots, n\}$ .

**Lema 4.1.** Depois de uma mudança linear de coordenadas, existem  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  tal que:

1.  $\text{ord}f(x, 0) = \text{ord}f_i(x, 0) < \text{ord}f_k(x, 0)$ ,  $k \neq i$ ,
2.  $\text{ord}f(0, y) = \text{ord}f_j(0, y) < \text{ord}f_k(0, y)$   $k \neq j$ ,

**Demonstração.**

Tome  $i$  tal que  $\text{ord}f(x, 0) = \text{ord}f_i(x, 0)$  e suponha  $\text{ord}f(x, 0) = \text{ord}f_i(x, 0) = \text{ord}f_r(x, 0)$ ,  $i \neq r$ . Considere  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_r - \frac{a_i}{a_r} x_i, \dots, x_n)$$

onde  $f_i(x, 0) = a_i x^{q_i} + o(x^{q_i})$  e  $f_r(x, 0) = a_r x^{q_i} + o(x^{q_i})$ . Então  $\text{ord}\psi \circ f(x, 0) = \text{ord}\tilde{f}_i(x, 0) < \text{ord}\tilde{f}_r(x, 0)$ . ( $\tilde{f}_i, \tilde{f}_r$  novas componentes). Em seguida, procedemos de forma análoga para  $\text{ord}f(0, y)$ . Repetindo isto um número finito de vezes, temos o lema.  $\square$

Vamos assumir inicialmente que  $\text{ord}f(x, 0) = \text{ord}f_i(x, 0) = q$  e  $\text{ord}f(0, y) = \text{ord}f_j(0, y) = p$  ocorrem com  $i \neq j$ . Permutando coordenadas se necessário, podemos considerar que  $i = 1, j = 2$ . Vamos plotar em  $\mathbb{R}_+^2$ , os pontos  $(0, q)$  e  $(p, 0)$ . Em coordenadas

$(\alpha, \beta)$ ), temos a reta e equação:

$$q\alpha + p\beta = pq. \quad (4.2)$$

Para cada função coordenada  $f_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , seja

$$\tilde{f}_k(x, y) = y^q + f_k(x, y).$$

Considere pesos  $(\mu, 1)$  associado ao segmento mais íngreme quando tomamos o polígono de Newton de  $\tilde{f}_k$ . Mais precisamente, temos um segmento com extremidade em  $(0, q)$  e com maior inclinação em módulo. Temos:

$$\tilde{f}_k(x, y) = y^q + f_k^0(x, y) + f_k^1(x, y) \quad (4.3)$$

onde  $\tilde{f}_k(ct^\mu, t) - f_k^1(ct^\mu, t)$  (para uma constante genérica  $c$ <sup>1</sup>) tem grau pesado  $q$  e  $f_k^1(ct^\mu, t)$  tem grau pesado maior. De modo análogo, considere pesos  $(1, \tilde{\mu})$  associado ao segmento menos íngreme do polígono de Newton de:

$$\tilde{\tilde{f}}_k(x, y) = x^p + f_k(x, y) = x^p + \tilde{f}_k^0(x, y) + \tilde{f}_k^1(x, y) \quad (4.4)$$

de tal modo tal que  $x^p + \tilde{f}_k^0(x, y)$  tem grau pesado  $p$  e o restante tem grau pesado maior quando composto com uma curva  $(t, ct^{\tilde{\mu}})$  ( $c$  também genérica). Esse segmento tem agora extremidade em  $(p, 0)$  e menor inclinação em módulo. Em seguida, podemos tomar dentre  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $k_0, k_1, \dots, k_r$   $r \leq n$  tal que as funções componentes  $\tilde{f}_{k_j}$   $j = 1, \dots, p$  fornecem o segmento mais íngreme dentre todas outras componentes. E analogamente, escolhemos  $r_0, r_1, \dots, r_{r'}$  tal que as funções  $\tilde{\tilde{f}}_{k_j}$ ,  $j = 1, \dots, r'$  fornecem o segmento menos íngreme dentre todas as outras componentes. Considere os pesos associados  $(\tilde{\mu}_0, 1)$  e  $(1, \tilde{\mu}_1)$ . Se olharmos para a equação 4.2, podemos comparar  $\tilde{\mu}_0$  e  $\tilde{\mu}_1$  com a inclinação  $\frac{q}{p}$  dada por esta linha, escrevendo  $\frac{q}{p}\alpha + \beta = q$ .

Observe que se  $c$  é não genérica no sentido que definimos, pode ser necessário considerar sequência de expoentes do mesmo modo quando estamos parametrizando uma curva  $g(x, y) = 0$ . Considere seguinte definição:

**Definição 4.3.**  $X$  é dito uma superfície algébrica parametrizada *arco-genérica* quando  $\cap_j \tilde{f}_{k_j}^{-1}(0) = \cap_j \tilde{\tilde{f}}_{k_j}^{-1}(0) = \{(0, 0)\}$ .

Observe que, para superfícies arco-genéricas, as funções componentes iniciais que consideramos estão determinando parte densa do cone tangente de  $X$  em 0.

**Observação 4.5.** Estamos chamando de *componente cônica*, qualquer subconjunto de  $T_0X$  não contido em qualquer plano em  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 4.1.** Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $0 \in X$  superfície algébrica parametrizada arco genérica. Considere que ocorrem somente os pesos  $\tilde{\mu}_0$  e  $\tilde{\mu}_1$  a partir das funções coordenadas  $f_k$ , com

<sup>1</sup>uma constante genérica significa que  $f_0(ct^\mu, t) \neq 0$

$k > 2$ . Seja  $q = \text{ordf}(0, y)$  e  $p = \text{ordf}(x, 0)$  realizando ordens com respeito a  $x$  e a  $y$  como no lema 4.1. Então temos as seguintes afirmações:

1. Se  $\frac{q}{p} = \tilde{\mu}_0$  então  $T_0X$  não tem componentes planas. Além disso,  $T_0X$  está contido num subespaço isomorfo a  $\mathbb{R}^r$ , onde  $r$  é o número de componentes associadas a  $\tilde{\mu}_0$  e  $\tilde{\mu}_1$ .
2. Se  $\frac{q}{p} < \tilde{\mu}_0$  podemos ter componentes cônicas e componentes planas. As combinações possíveis são no máximo:
  - 2 ou 3 componentes planas e 0 componentes cônicas;
  - 0 componentes planas e 2 ou 3 componentes cônicas;
  - 1 componentes plana e 1 componentes cônica;
  - 2 componentes planas e 1 componentes cônica;
  - 1 componentes plana e 2 componentes cônicas;
3. Se  $\frac{q}{p} > \tilde{\mu}_0$  temos única componente plana e nenhuma componente cônica.

Antes da prova observe que nos itens 1, 2 e 3 figuram as únicas (igualdades) desigualdades possíveis para cada hipótese. Isso porque, se for  $\frac{q}{p} < \tilde{\mu}_0$  significa que temos pelo menos um ponto abaixo da linha  $q\alpha + p\beta = pq$ . Logo, tem-se também  $\frac{p}{q} < \tilde{\mu}_1$ . No item 3 é análogo.

### **Demonstração.**

1. Temos  $\tilde{\mu}_0 = \frac{q}{p} = \tilde{\mu}_1$ . Sejam  $f_{k_0}, f_{k_1}, \dots, f_{k_r}$  componentes coordenadas tais que

$$\tilde{f}_{k_i} = y^q + f_{k_i}$$

tem peso  $(\frac{q}{p}, 1)$  e  $f_{r_0}, f_{r_1}, \dots, f_{r_r}$  tais que

$$\tilde{f}_{r_i} = x^p + f_{r_i} \text{ tem pesos } (1, \frac{p}{q})$$

Note que  $\{f_{k_0}, f_{k_1}, \dots, f_{k_r}\} = \{f_{r_0}, f_{r_1}, \dots, f_{r_r}\}$ . Então considerando curvas do tipo

$$f(\gamma_{cd}(t)) \text{ onde } \gamma_{cd}(t) = (ct^{\frac{q}{p}}, dt) \ t \geq 0$$

Obtemos  $T_0X$  dado pela imagem da aplicação  $(f_{k_0}^0(c, d), f_{k_1}^0(c, d), \dots, f_{k_r}^0(c, d))$ . Poderíamos ter escolhido curva  $\gamma_{cd}(t) = (ct, dt^{\frac{p}{q}})$ . Note que pela condição de arco genenericidade nem todas coordenadas são nulas.

2. Entre  $\frac{q}{p} < \tilde{\mu}_0$  e  $\frac{p}{q} < \tilde{\mu}_1$  há um peso  $\tilde{\mu}_{01}$  tal que  $\tilde{\mu}_0 \geq \tilde{\mu}_{01}$ ,  $\tilde{\mu}_1 \geq \tilde{\mu}_{01}$  que pode determinar componentes. Ele ocorre do seguinte modo:

Sejam  $f_{k_0}, f_{k_1}, \dots, f_{k_r}$  e  $f_{r_0}, f_{r_1}, \dots, f_{r_r}$  componentes com termos iniciais  $f_{k_i}^0$  (resp  $f_{r_i}^0$ ) fornecendo segmentos  $l_{\tilde{\mu}_0}$  (resp  $l_{\tilde{\mu}_1}$ ) com maior inclinação (resp menor inclinação). Temos expoentes de monômios  $\{(\alpha_i^{\tilde{\mu}_0}, \beta_i^{\tilde{\mu}_0})\}$ ,  $\{(\alpha_j^{\tilde{\mu}_1}, \beta_j^{\tilde{\mu}_1})\}$  que estão sobre as retas  $l_{\tilde{\mu}_0}$  e  $l_{\tilde{\mu}_1}$  respectivamente. Consideremos segmento  $l_{\tilde{\mu}_{01}}$  conectando pontos de  $l_{\tilde{\mu}_0}$  e  $l_{\tilde{\mu}_1}$  de tal modo que todos os pontos de  $\{(\alpha_i^{\tilde{\mu}_0}, \beta_i^{\tilde{\mu}_0})\} \cup \{(\alpha_j^{\tilde{\mu}_1}, \beta_j^{\tilde{\mu}_1})\}$  estão acima ou sobre (ou no fecho convexo) de  $l_{\tilde{\mu}_{01}}$ . Isto incluindo possivelmente  $(0, q)$  e  $(p, 0)$ . Denotamos a inclinação deste segmento (em módulo) por  $\tilde{\mu}_{01}$ . Podemos então separar os seguintes casos:

- $\tilde{\mu}_{01} = \tilde{\mu}_0$  ou  $\tilde{\mu}_{01} = \tilde{\mu}_1$ .

i) Seja  $r = 1$  e  $r' = 1$ . Nesse caso, supondo que  $k_r, r_{r'} \notin \{1, 2\}$ , temos exatamente duas componentes planas. Com efeito, considere conjunto dos arcos:

$$\{\tilde{\gamma}_{cd}(t) = (ct^{\tilde{\mu}_0}, dt); (c, d) \in \mathbb{R}^2\} \text{ e } \{\gamma_{cd}(t) = (ct, dt^{\tilde{\mu}_1}); (c, d) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Desse modo,  $f(\tilde{\gamma}_{cd}(t))$  fornece componente  $(0, f_2^0(c, d), \dots, f_{k_1}^0(c, d), \dots, 0)$  e  $f(\gamma_{cd}(t))$  fornece componente  $(f_1^0(c, d), \dots, f_{r_1}^0(c, d), \dots, 0)$ . Note que se  $k_1 = r_1$  componentes se intersectam na reta  $(0, \dots, f_{k_1}^0(c, d), \dots, 0)$ .

Considerando o mesmo conjunto de arcos acima, obtemos o seguinte:

ii)  $r > 1$  e  $r' = 1$ :

Temos uma componente cônica em  $\mathbb{R}^r$  e uma componente plana com possível interseção numa reta.

iii)  $r > 1$  e  $r' > 1$ :

Temos duas componentes cônicas em  $\mathbb{R}^r$  com possível interseção numa reta.

- Seja  $\tilde{\mu}_{01} \notin \{\tilde{\mu}_0, \tilde{\mu}_1\}$ .

Considere  $\{f_{s_1}, f_{s_2}, \dots, f_{s_{r''}}\}$  componentes com expoentes de monômios  $f_{s_i}^0$  sobre  $l_{\tilde{\mu}_{01}}$ . Como  $\tilde{\mu}_{01} \notin \{\tilde{\mu}_0, \tilde{\mu}_1\}$ , então  $(p, 0) \notin l_{\tilde{\mu}_{01}}$ ,  $(0, q) \notin l_{\tilde{\mu}_{01}}$ . Portanto, segue que:

$$\tilde{\mu}_0 > \tilde{\mu}_{01} \text{ e } \tilde{\mu}_0 < \tilde{\mu}_1.$$

Note que  $r'' \geq 2$  (as duas componentes que determinam o segmento). Assim, ficamos com as seguintes possibilidades:

iv)  $r'' = 2$ ,  $r' = 1$  e  $r = 1$ .

Temos exatamente 3 componentes planas, considerando espaço de arcos:

$$\{\tilde{\gamma}_{cd}\}, \{\gamma_{cd}\} \text{ e } \{\tilde{\tilde{\gamma}}_{cd}\}$$

Onde  $\tilde{\tilde{\gamma}}_{cd}(t) = (ct^{\tilde{\mu}_{01}}, dt)$ .

v)  $r'' > 2$ ,  $r' = 1$  e  $r = 1$ .

1 componente cônica e 2 componentes planas

vi)  $r'' = 2$ ,  $r' > 1$  e  $r > 1$ .

1 componente plana e 2 componentes cônicas.

vii)  $r'' > 2$ ,  $r' = 1$  e  $r > 1$

1 componente plana e 2 componentes cônicas.

viii)  $r'' > 2$ ,  $r' > 1$  e  $r > 1$ .

3 componentes cônicas.

**3.** Tanto  $\tilde{\gamma}_{cd}(t) = (ct^{\frac{q}{p}}, dt)$  quanto  $\gamma_{cd}(t) = (ct, dt^{\frac{q}{p}})$  estão fornecendo componente  $(f_1^0(c, d), f_2^0(c, d), 0, \dots, 0)$ . De fato, para outras componentes  $f_k$ , temos  $(\tilde{\mu}_0, 1)$  fornecendo grau pesado  $q$  para  $f_k^0$ . Da mesma forma, se tomarmos pesos  $(1, \tilde{\mu}_1)$  obtemos grau pesado  $p$  para  $f_r^0$ . Agora, como  $\frac{q}{p} > \tilde{\mu}_0$  e  $\frac{q}{p} > \tilde{\mu}_1$  obtemos grau pesado maior do que  $q$  e  $p$  em  $f_k^0$  e  $f_r^0$  quando consideramos pesos  $(\frac{q}{p}, 1)$  e  $(1, \frac{p}{q})$  respectivamente. Portanto  $(f_1^0(c, d), f_2^0(c, d), 0, \dots, 0)$  é a única componente plana que ocorre.  $\square$

Notemos que o Teorema que acabamos de exibir possui algumas restrições. Isto porquê a análise para mais declives é similar e tornaria a prova ainda mais técnica e repetitiva. Nossa intenção foi mostrar que a obtenção do cone tangente a partir do polígono de Newton que construímos é algoritmizável, a menos de mudança linear de coordenadas. De fato, não perdemos informação nenhuma sobre a estrutura geométrica do cone tangente com mudanças lineares considerando que o cone tangente é um invariante Lipschitz (ver Sampaio (2016)).

Vale ressaltar ainda que estamos obtendo, de outra forma, subconjunto nos espaços dos arcos (de forma minimal) gerando cone tangente.

**Corolário 4.1.** Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  superfície parametrizada,  $0 \in X$ . Se  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  tem posto 1 em 0 então  $T_0X$  está contido num plano. Além disso,  $X$  é arco-genérica.

**Demonstração.**

Usando o lema 4.1, podemos considerar representante

$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_n(x, y))$  tal que  $p = \text{ord}f(x, 0) = \text{ord}f_1(x, 0)$  e  $\text{ord}f(0, y) = \text{ord}f_2(0, y) = q$ . Além disso, como  $\text{posto}Df(0, 0) = 1$  podemos, depois de mudança de coordenadas, admitir que  $f_1(x, y) = x$  (no capítulo seguinte, exibimos uma prova desse fato). Desse modo, temos  $p = 1$  e portanto  $\frac{q}{p} = q$ . Observe agora que em qualquer outra componente  $f_k$ ,  $k > 2$  temos expoentes  $(1, m_2)$  ou  $(1 + m_1, m_2)$ ,  $m_1, m_2 \geq 1$ . Desse modo, temos peso  $\tilde{\mu}_1 = \frac{q-m_2}{0-1}$  ou  $\tilde{\mu}_1 = \frac{q-m_2}{0-(1+m_1)}$ . Este último é obtido notando que segmento conectando  $(0, q)$  a  $(1 + m_1, m_2)$  tem equação  $\frac{q-m_2}{1+m_1}\alpha + \beta = q$ . Nos dois casos,  $q > \tilde{\mu}_1$ . Segue pelo teorema 4.1 que  $T_0X$  tem somente uma componente plana. E como  $f_2(0, t) \neq 0$ , segue que  $X$  é arco-genérica.  $\square$

**Observação 4.6.** Observe que, no caso do germe  $X = F(U)$  de uma superfície algébrica parametrizada em 0, quando há duas direções linearmente independentes  $v_1, v_2$  em  $T_0X$ , então  $T_0X$  é necessariamente 2-dimensional. Com efeito, seja  $\gamma'_1(0) = v_1$  e  $\gamma'_2(0) = v_2$ , considere  $\gamma \subset F(T(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2))$  não tangente a  $\gamma_1$  nem a  $\gamma_2$ ,  $F(\tilde{\gamma}_i) = \gamma_i$  e  $T(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2)$  componente do plano com fronteira  $\tilde{\gamma}_1 \cup \tilde{\gamma}_2$ . Podemos escolher agora um arco  $\beta$  entre  $\gamma$  e  $\gamma_1$  não tangente aos dois. Veja que isso pode ser feito um número infinito de vezes. Portanto,  $T_0X$  é 2-dimensional pela condição de semialgebricidade. Agora com mudança linear de coordenadas, podemos sempre supor que duas direções linearmente independentes em  $T_0X$  pode ser dada por  $F(x, 0)$  e  $F(0, y)$ . Finalmente, concluímos que quando não estamos nesse caso,  $T_0X$  é uma única semi-reta partindo da origem, ou seja, o que supomos anteriormente foi o caso relevante.

**Exemplo 4.4.** Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $F(x, y) = (x^p, x^r y^s, y^q)$   $p, q, r, s \in \mathbb{N}$ . Considere  $X = F(\mathbb{R}^2)$  superfície imagem. Considere função

$$D(x, y) = xq + yp - qp$$

Temos que :

1. Se  $D(r, s) < 0$  então  $T_0X$  é a união de 2 componentes planas.



2. Se  $D(r, s) = 0$  então  $T_0X$  é formado por uma única componente cônica.
3. Se  $D(r, s) > 0$  então  $T_0X$  está contido num plano.

**Demonstração.**  $D(r, s) = rq + sp - qp$ . Então

$$D(r, s) > 0 \Leftrightarrow \frac{rq}{p} + s > q \Leftrightarrow \frac{rq}{p} > q - s \Leftrightarrow \frac{q}{p} > \frac{q-s}{r} = \tilde{\mu}_0. \quad \square$$

**Exemplo 4.5.** Considere  $F(x, y) = (x^2 + y^3, x^2y^2, y^4)$ . Nesse caso,  $T_0X$  é 1-dimensional (ver figura abaixo).

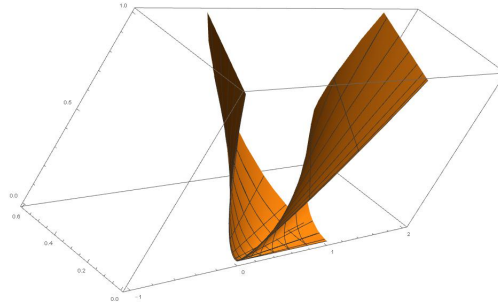


Figura 2: Superfície em voo.

## 5 CONJUNTOS NORMALMENTE MERGULHADOS

Considere  $X, Y$  espaços métricos. Uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  é dita *Lipschitz* quando existe constante  $k > 0$  tal que

$$d_1(f(x_1), f(x_2)) \leq kd_2(x_1, x_2)$$

para todo  $x_1, x_2 \in X$ .  $d_1, d_2$  são distâncias sobre  $X, Y$  respectivamente. Uma aplicação Lipschitz  $f : X \rightarrow Y$  é dita *bi-Lipschitz* se sua inversa existe e é Lipschitz. Nesse caso, diremos que  $X$  and  $Y$  são *bi-Lipschitz equivalentes com respeito as métricas consideradas*.

Considere  $X = p^{-1}(0)$ , onde  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é um polinômio (ou mais geralmente um conjunto semialgébrico ou subanalítico).  $X$  pode ser visto como um espaço métrico considerando naturalmente duas métricas sobre  $X$ , a saber:

- A *métrica intrínseca*. Esta é definida do seguinte modo: dado dois pontos  $x_1, x_2 \in X$  defina  $d_X(x_1, x_2)$  como o ínfimo dos comprimentos de caminhos retificáveis sobre  $X$  conectando  $x_1$  e  $x_2$ . Esta métrica é bem definida sobre  $X$ .
- A *métrica extrínseca*: Nesse caso, a distância entre dois pontos  $x_1, x_2 \in X$  é a distância euclidiana  $\|x_1 - x_2\|$  em  $\mathbb{R}^m$ .

Quando essas duas distâncias são equivalentes, dizemos que  $X$  é *normalmente mergulhado* em  $\mathbb{R}^n$ . Significa dizer que existe uma constante real  $C > 0$  tal que

$$d_X(x, y) \leq C\|x - y\|,$$

para quaisquer  $x, y \in X$ .

De forma equivalente  $X$  é dito normalmente mergulhado quando a identidade  $i : (X, \|\cdot\|) \rightarrow (X, d_X)$  é uma aplicação bi-Lipschitz. Do ponto de vista local, diremos que  $X$  é normalmente mergulhado em  $x_0$  quando existir uma vizinhança  $U_{x_0}$  de  $x_0$  tal que  $X \cap U_{x_0}$  é normalmente mergulhado.

A menos que mencionado o contrário, bi-Lipschitz equivalência é sempre considerada com respeito a métrica extrínseca.

**Observação 5.1.** Um conjunto convexo é normalmente mergulhado. Um complexo simplicial finito é normalmente mergulhado. Uma variedade compacta suave é normalmente mergulhada. Uma variedade Lipschitz com respeito a métrica extrínseca é normalmente mergulhada.

**Exemplo 5.1.** Seja  $\kappa = \mathbb{R}$  ou  $\kappa = \mathbb{C}$ . Sobre os conjuntos  $X = \{(x, y) \in \kappa^2; x^2 - y^3 = 0\}$ , distâncias intrínseca e extrínseca não são equivalentes, ou seja, não é normalmente mergulhado.

Estes exemplos evidenciam a regularidade existente com respeito a condição de mergulho normal. Um condição ainda mais forte é a regularidade Lipschitz:

$X$  é dito uma variedade Lipschitz quando para cada  $x \in X$  existe uma vizinhança  $U_x \subset \mathbb{R}^m$  tal que  $U_x \cap M$  é bi-Lipschitz equivalente a uma bola aberta em de um espaço euclidiano  $\mathbb{R}^k$ . Se  $k = 2$ ,  $X$  é dito uma superfície Lipschitz.

**Teorema 5.1.** Seja  $(X, x_0) \subset (\mathbb{R}^n, x_0)$  germe semialgébrico com singularidade isolada. Suponha que o cone tangente de  $X$  em  $x_0$  é 2-dimensional. Então,  $X$  é uma superfície Lipschitz com respeito a métrica intrínseca em  $x_0$

**Demonstração.**

Por Birbrair (1999),  $\dim(T_0X) = 2 \Rightarrow X$  é bi-Lipschitz equivalente (com respeito a métrica intrínseca) ao germe do conjunto  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0\}$  in 0.  $C$  é uma superfície Lipschitz com respeito a métrica extrínseca (e, portanto, com respeito a métrica intrínseca).

**Exemplo 5.2.**  $X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; x^2 - y^3 = 0\}$  é, numa vizinhança da origem, uma superfície Lipschitz intrínseca em  $(0, 0)$

A geometria Lipschitz de conjuntos-aplicações se situa, de certo modo, na faixa entre a categoria topológica e analítico-diferencial. Num certo sentido, resultados são inferidos seja no sentido topológico-Lipschitz ( ver Fernandes (2003)) como no sentido Lipschitz-Analítico (ver Birbrair et al (2016)).

A categoria Lipschitz extrínseca determina categoria intrínseca e esta primeira se mostra mais complicada. Parece natural que investigar sua complexidade possui como ponto de referência, o quão dada classe se distancia da categoria normalmente mergulhada. Iremos nas nossas próximas secões estabelecer critérios para detectar quando temos mergulho normal sobre conjuntos definíveis sobre uma estrutura o-minimal (ver Coste (1999)) e, mais particularmente, sobre superfícies no espaço euclidiano.

## 5.1 Teorema do arco-critério

### Conceitos básicos:

Sempre que mencionarmos o termo arco num espaço  $X$ , estaremos nos referindo a uma aplicação  $\gamma : [0, \delta) \rightarrow X$ ,  $\gamma(0) = x_0$  continua e semialgébrica. Quando não causar confusão, estaremos usando simbolo  $\gamma$  para denotar também a imagem de  $\gamma$

**Definição 5.1.** Dado um germe de uma função analítica real  $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}, f(x_0))$ , podemos considerar função  $g = f \circ \gamma : [0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  que é continua e semialgébrica,  $\gamma(0) = x_0$ . Logo, pelo teorema de Puiseux (ver 7.2), existe  $q \in \mathbb{Q}$  e constante real  $C$  tal que  $g(t) = Ct^q + o(t^q)$ . Denotaremos  $q = \text{ord}_t g$  (ordem de  $f$  ao longo do arco  $\gamma$ ).

### Ordem de contato entre arcos.

Seja  $\gamma_1, \gamma_2$  arcos em  $\mathbb{R}^m$  passando por um ponto  $x_0$ . Considere parametrização de arcos pela distância até a origem ( $\|\gamma_i(t) - x_0\| = t$ ). Nesse caso, a função  $f_{12}(t) = \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|$  (or  $\tilde{f}_{12}(t) = d_P(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ ) é uma função semialgébrica ( $d_P$

é uma distância semialgébrica que é bi-Lipschitz a distância intrínseca (ver Birbrair e Mostowski (2000)). Quando  $f_{12}$  é não identicamente nula, temos constante  $C > 0$  and  $\alpha_{12} \in \mathbb{Q}$  tal que:

$$f_{12}(t) = Ct^{\alpha_{12}} + o(t^{\alpha_{12}}).$$

Chamamos o expoente  $\alpha_{12} = \text{tord}(\gamma_1, \gamma_2)$  de ordem de contato *extrínseco* entre os arcos  $\gamma_1, \gamma_2$ . Do mesmo modo, definimos a ordem de contato *intrínseco* como a ordem da função  $\tilde{f}_{12}(t) = d_X(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  que denotaremos por  $\text{tord}_X(\gamma_1, \gamma_2)$ .

**Observação 5.2.** (Propriedade não arquimediana. ver Birbrair e Fernandes (2000) .

Sejam  $X_1, X_2$  and  $X_3$  três diferentes semi-arcs de  $X$ . Considere  $\alpha_{12}, \alpha_{23}$  e  $\alpha_{13}$  ordem de contato entre  $(X_1, X_2)$ ,  $(X_2, X_3)$  e  $(X_1, X_3)$ . Suponha que  $\alpha_{12} \leq \alpha_{23} \leq \alpha_{13}$ . Então,  $\alpha_{12} = \alpha_{23}$ .

É Suficiente notar que  $\|X_1(t) - X_2(t)\| \leq \|X_1(t) - X_3(t)\| + \|X_3(t) - X_2(t)\| \Rightarrow \alpha_{12} \geq \alpha_{23}$ .  $\square$

Mostraremos que a condição local de mergulho normal pode ser caracterizada por arcos.

**Teorema 5.2.** Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  semialgébrico,  $X \cap \mathbb{S}^{n-1}$  conexo,  $\epsilon$  suficientemente pequeno e  $x_0 \in X$ . As seguintes afirmações são equivalentes:

- $X$  é normalmente mergulhado em  $x_0 \in X$ ;
- Existe constante  $k > 0$  tal que para qualquer  $\gamma_1, \gamma_2$  arcos parametrizados pela distância até  $x_0$  ( $\gamma_i(0) = x_0, i = 1, 2$ ), temos:

$$d_X(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq k\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|. \quad (5.1)$$

### **Demonstração.**

Se  $X$  é normalmente mergulhado em  $x_0$ , a desigualdade 5.1 é imediata por definição. Assuma que  $X$  não é normalmente mergulhado em  $x_0$ . Considere aplicação  $\psi : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\psi(x_1, x_2) = (\|x_1 - x_2\|, d_P(x_1, x_2))$ , onde  $d_P : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  é a métrica semialgébrica tal que aplicação identidade  $id : (X, d_P) \rightarrow (X, d_X)$  é homeomorfismo bi-Lipschitz entre os respectivos espaços métricos (ver Birbrair e Mostowski (2000)). Neste caso,  $\psi$  é semialgébrica e continua pois componentes são funções contínuas e semialgébricas. Além disso, imagem  $\psi(X \times X)$  é localmente fechada e conexa em  $\psi(x_0, x_0) = 0 \in \mathbb{R}^2, x_0 \in X$ . Observe ainda que  $\psi(X \times X)$  é semialgébrico 2-dimensional, pelo teorema de Tarski-Seidenberg (7.4). Assumindo que  $X$  não é normalmente mergulhado,  $\psi(X \times X)$  é localmente limitado por uma arco  $\beta$  tangente ao eixo  $y, 0 \in \beta$ . Podemos agora, considerar uma par de arcos  $(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2)$  na imagem inversa de  $\beta$ . Pela condição de tangência com o eixo  $y$ , temos que:

$$\text{ord}_t d_P(\tilde{\gamma}_1(t), \tilde{\gamma}_2(t)) < \text{ord}_t(\|\tilde{\gamma}_1(t) - \tilde{\gamma}_2(t)\|). \quad (5.2)$$

Temos parametrização de  $\tilde{\gamma}_1$ ,  $\|\tilde{\gamma}_1(t) - x_0\| = t$ . Considerando sequencia de pontos  $\{\gamma_1(t)\}$  com  $t \rightarrow 0^+$ , precisamos verificar se dada sequencia  $\{\gamma_2(t)\}$  com  $t \rightarrow 0^+$  e  $\|\gamma_2(t) - x_0\| = t$  é suficiente para medir a defasagem entre as métricas por sobre os arcos  $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ . Pela condição de não mergulho normal, há uma sequencia de pontos sobre os arcos  $\gamma_1, \gamma_2$  tal que o quociente entre essas métricas “explode” (desigualdade 5.2 está nos dizendo isso). Mas precisamos verificar que andando de modo uniforme sobre esferas de raio  $t$ , o mesmo acontece. Com respeito ao contato extrínseco, existe lema de comparação de ordem que garante isto (ver Birbrair e Fernandes (2000)). De fato, mesmo lema também é verdade com respeito a geometria intrínseca e daí, estamos bem:

**Lema 5.1.** (*Lema de comparação de ordem intrínseco*). Sejam  $\gamma_1, \gamma_2$  arcos em  $X$ ,  $\overline{\gamma_1} \cap \overline{\gamma_2} = x_0$ . Considere ainda parametrizações  $\|\gamma_i(t) - x_0\| = t$ ,  $i=1, 2$ . Então vale que:

$$\text{ord}(d_P(\gamma_1(t), \gamma_2)) = \text{ord}(d_P(\gamma_1(t), \gamma_2(t))).$$

**Demonstração.**

Temos que  $d_P(\gamma_1(t), \gamma_2) = \inf\{d_P(\gamma_1(t), p); p \in \gamma_2\}$  e  $\text{ord}(d_P(\gamma_1(t), \gamma_2(t)))$  é definido de modo análogo a ordem de contato extrínseca.

Observe que  $d_P(\gamma_1(t), \gamma_2) \leq d_P(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ . Precisamos mostrar a outra desigualdade, isto é, que existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$d_P(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq C d_P(\gamma_1(t), \gamma_2),$$

Vamos considerar métrica panqueca  $d_P$ . Por definição de  $d_P$  (ver Birbrair e Mostowski (2000)), podemos escolher arcos semialgêbricos  $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_N$  tal que para  $t \in [0, \delta)$ ,  $\delta$  suficiente pequeno, tais arcos realizam a distância entre  $\gamma_1(t)$  e  $\gamma_2$ :

$$d_P(\gamma_1(t), \gamma_2) = \|\gamma_1(t) - \tilde{\beta}_1(t)\| + \|\tilde{\beta}_1(t) - \tilde{\beta}_2(t)\| + \dots + \|\tilde{\beta}_N(t) - \tilde{\gamma}_2(t)\|.$$

onde  $\tilde{\beta}_i(0) = x_0$ .

Note que os arcos  $\tilde{\beta}_i$  não necessariamente estão parametrizados pela distância até a origem. temos que:

$$\|\gamma_1(t) - \tilde{\beta}_S(t)\| \geq d_{outer}(\gamma_1(t), \beta_S), \forall S, \quad (5.3)$$

onde  $d_{outer}(\gamma_1(t), \beta_S)$  é definido análogo a  $d_P(\gamma_1(t), \gamma_2)$ . Por outro lado,

$$d_P(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq \|\gamma_1(t) - \beta_1(t)\| + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\| + \dots + \|\beta_N(t) - \gamma_2(t)\|$$

onde agora  $\beta_i$  é a parametrização de  $\tilde{\beta}_i$  pela distância até a origem. Temos: ( $\simeq$  significa mesmo expoente),

$$\|\gamma_1(t) - \beta_1(t)\| + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\| + \dots + \|\beta_N(t) - \gamma_2(t)\| \simeq \|\beta_S(t) - \beta_{S-1}(t)\|$$

(para algum  $S \in \{1, \dots, N+1\}$ ), onde  $\beta_0(t)$  é  $\gamma_1(t)$  e  $\beta_{N+1}(t)$  é  $\gamma_2(t)$ . Usando a propriedade não arquimediana, temos que:

$$\|\beta_S(t) - \beta_{S-1}(t)\| \simeq \|\gamma_1(t) - \beta_S(t)\|.$$

Agora, pelo lema de comparação de ordem extrínseco, temos que:

$$\|\gamma_1(t) - \beta_S(t)\| \simeq d_{outer}(\gamma_1(t), \beta_S)$$

Portanto, existe constante  $C_2 > 0$  tal que

$$d_P(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq C_2 d_{outer}(\gamma_1(t), \beta_S). \quad (5.4)$$

Assim, por (5.3) and (5.4), o lema está provado.

Prova do Teorema.

Consideramos parametrização de  $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$  pela distância até a origem e obtemos:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_X(\tilde{\gamma}_1(t), \tilde{\gamma}_2(t))}{\|\tilde{\gamma}_1(t) - \tilde{\gamma}_2(t)\|} = +\infty.$$

□

**Observação 5.3.** Observe que o teorema do arco critério pode ser reformulado do seguinte modo:

1.  $X$  é normalmente mergulhado em  $x_0 \in X$ ;
2. Para qualquer  $\gamma_1, \gamma_2$  arcos parametrizados pela distância até  $x_0$  ( $\gamma_i(0) = x_0, i = 1, 2$ ), temos  $tord(\gamma_1, \gamma_2) = tord_X(\gamma_1, \gamma_2) := tord_P(\gamma_1, \gamma_2)$ .

Vejamos uma aplicação, considerando cone tangente :

**Teorema 5.3.** Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$   $0 \in X$  e  $X$  imagem de uma aplicação polinomial  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  injetiva. Suponha que o cone tangente em zero é um semi-plano. Então  $X$  não é normalmente mergulhado em  $0$ .

**Demonstração.**

Tome  $V$  plano 2-dimensional contendo semi-plano  $T_0X$ . Considere o germe da projeção ortogonal  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow V$  restrito a  $X$ .

Afirmação. Existe  $\delta > 0$  tal que  $P|_X : X \cap B(0, \delta) \rightarrow V$  é uma aplicação própria, onde  $B(0, \delta)$  denota uma bola aberta em  $\mathbb{R}^n$  com centro em  $0$  e raio  $\delta$ .

Prova:

Existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $v \in P(X \cap B(0, \delta)) \cap T_0X$ , temos  $\#P^{-1}(v) \leq N$  (onde  $\#$  indica cardinalidade). Caso contrário, temos sequência  $v_n \rightarrow 0$  tal que  $\#P^{-1}(v_n) \rightarrow \infty$ . Como a fibra de  $P$  pertence a uma direção ortogonal ao cone tangente  $T_0X$ , Pelo lema de seleção da curva, existiria  $\gamma \subset P^{-1}(0)$  e  $\gamma'(0) \notin C(X, 0)$ , uma contradição.

Observe agora que  $\#P^{-1}(v) > 1$  para  $v \in T_0X - \partial T_0X$  valor regular. De fato, como  $T_0X$  é um semi-plano  $P$  é não sobrejetiva. Logo  $deg(P, v) = 0$  (grau da aplicação  $P|_X$ ). Portanto,  $\#P^{-1}(v) > 1$ .

Continuando, note que  $\partial T_0X \subset P(\rho)$  onde  $\rho$  é o locus singular de  $P$ . De fato, em  $T_0X$  teremos semi-arcos  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$  e  $\Gamma_i \cup \Gamma_j = \partial T_0X$  cuja união é  $P(\rho)$ . Claramente, existe  $\Gamma_i, \Gamma_j$  não tangentes em  $0$ . Seleccionamos uma arco  $\gamma(t) = tv$  no centro de  $T = T(\Gamma_i, \Gamma_j)$ . Temos  $\gamma_1, \gamma_2 \subset P^{-1}(\gamma)$ . Observe que qualquer caminho que liga  $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ , necessariamente intersecta  $P^{-1}(\partial T)$ . Assim,

$$tord_X(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = tord(\gamma(t), \partial T) = 1.$$

Por outro lado,  $tord(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) > 1$  pois  $\gamma_1, \gamma_2$  são tangentes  $v$ . Segue pelo arco teorema do arco-critério 5.2 que  $d_X$  e  $d_{ext}$  não são equivalentes. □

Veja que  $H_+ = \{(x, y, 0, \dots, 0); y \geq 0\}$  tem cone tangente semi-plano em  $0$ .

No entanto, observe que  $H_+$  não pode ser imagem de uma aplicação polinomial injetiva  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Observação 5.4.** Com esse teorema, podemos produzir um grande número de superfícies não normalmente mergulhadas do seguinte modo: Considere uma parametrização com uma das ordens das funções componentes com respeito a  $x$  ou a  $y$  um número par, digamos  $2m$ ,  $m \geq 1$ . Admita ainda que tais ordens ocorrem em componentes distintas. Agora, considere demais componentes com ordem maior que  $2m$ . Nesse caso, a superfície imagem obtida não é normalmente mergulhada. Com efeito, teremos certamente uma componente plana estrita. Agora, usamos o teorema 5.3.

**Exemplo 5.3.**  $F(x, y) = (x^4 + y^3, xy, y^5)$  tem cone tangente plano na origem;

$F(x, y) = (x^4, x^3y, xy^3, y^5)$  tem uma única componente cônica no seu cone tangente.

**Observação 5.5.** Se  $X$  é uma superfície normalmente mergulhada com singularidade isolada e com cone tangente 2-dimensional, usando o teorema de classificação dado em Birbrair (1999), temos que  $T_0X$  é bi-Lipschitz homeomorfo a um plano.

**Exemplo 5.4.** Seja  $(X, 0) = G(\mathbb{R}^2, 0)$  superfície parametrizada onde  $G(x, y) = (x^3, xy, y^3)$ . Note que 0 é singularidade isolada e  $T_0X$  é 2-dimensional. No entanto,  $X$  não é normalmente mergulhado em 0.

## 6 LARGURA E ALTURA DE SUPERFÍCIES

**Definição 6.1.** (*Triângulos de Hölder (ver Birbrair 1999)*) Um subconjunto  $T \subset \mathbb{R}^n$  é dito um  $\beta$ -Hölder triângulo (ou uma  $\beta$ -zona) com vértice  $0 \in T$  se o germe  $(T, 0)$  é bi-Lipschitz equivalente a  $(T_\beta, 0)$ , onde

$$T_\beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq x^\beta, 0 \leq x \leq 1\},$$

onde  $\beta \in \mathbb{Q} \cap [1, \infty)$  é seu expoente de Hölder.

**Definição 6.2.** Seja  $X$  conjunto semialgébrico fechado 2-dimensional,  $0 \in X$ . Admita que  $T_0X$  é plano. A região polar de  $X$  associada a projeção ortogonal  $P|_X : (X, 0) \rightarrow (T_0X, 0) \simeq (\mathbb{R}^2, 0)$  é o conjunto

$$\rho = \{x \in X; \text{rank}(DP|_X) \neq 2\}.$$

**Proposição 6.1.** Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  semialgébrico 2-dimensional, normalmente mergulhado em  $0 \in X$  com  $P|_X$  não injetiva. Considere que  $X \cap \mathbb{S}^{n-1}(0, \epsilon)$  conexo, para  $\epsilon$  suficientemente pequeno. Admita ainda que o cone tangente de  $X$  em  $0$  é um plano. Um subconjunto  $T' \subset T_0X$  tal que  $\forall v \in T', \#(X \cap P^{-1}(v)) = 1$  possui a seguinte estrutura

$$T' = \mathbb{R}^2 - \cup T_i.$$

com  $T_i$  são triângulos de Hölder com expoente maior do que 1.

### **Demonstração.**

Considere  $\rho$  região polar de  $X$  associada a projeção  $P$  e seu conjunto discriminante  $\Delta \subset T_0X$  definido por  $P(\rho) = \Delta$ .

Afirmção 1.

$\Delta$  é a união de arcos semialgébricos e a função  $\#(P^{-1}(v) \cap X)$  é localmente constante sobre o complemento de  $\Delta$ .

Prova:

Pela condição de semialgebricidade, temos que o conjunto dos pontos regulares em  $X$  é aberto e denso em  $X$ . Em particular, isto também ocorre em qualquer representante do germe de  $X$  em  $0$ . Pelo teorema de Sard,  $P(\rho \cap \text{reg}(\tilde{X}))$  tem medida nula em  $T_0X$ . Além disso, como  $\dim(\tilde{X} - \text{reg}(\tilde{X})) < 2$  e  $P$  é uma aplicação semialgébrica,  $\dim P(\tilde{X} - \text{reg}(\tilde{X})) < 2$  também. Portanto,  $\Delta(P) = P(\rho \cap \text{reg}(\tilde{X})) \cup P(\tilde{X} - \text{reg}(\tilde{X}))$  é a união de semiarcos semialgébricos  $\Gamma_i$ ,  $0 \in \Gamma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$  pelo lema de seleção da curva. Como  $P|_{P^{-1}(\mathbb{R}^2 - \Delta)} = P|_{X - \rho}$  é um difeomorfismo local e uma aplicação própria (ver teorema 5.3) segue que  $P$  é um recobrimento sobre cada componente conexa de  $X - \rho$ . Portanto,  $\#(P^{-1}(v) \cap X)$  é localmente constante e, além disso, finito.

Agora, nós devemos mostrar que as zonas, onde  $\#(P^{-1}(v) \cap X) > 1$  são “magras” (significando triângulos de Hölder com expoente maior do que 1). Suponhamos que isto não ocorre. Significa que existe um triângulo  $T_i$ , limitado por dois arcos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  da curva discriminante que não são tangentes em zero e  $\#(P^{-1}(v) \cap X) > 1$  sobre  $T_i$ . Tome um arco  $\beta \subset T_i$ , passando pelo zero e não tangente nem a  $\Gamma_1$  nem a  $\Gamma_2$ . Temos,



por hipótese, pelo menos dois arcos  $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2 \subset (P^{-1}(\beta) \cap X)$ . Observe que  $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2$  e  $\beta$  são tangentes em zero. De fato, Seja  $\|P \circ \tilde{\beta}_i(t)\| = \|\beta(t)\| = t$ . Temos:

$$\beta'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\beta_i(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{P(\tilde{\beta}_i(t))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} P\left(\frac{\tilde{\beta}_i(t)}{t}\right) = P\left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{\beta}_i(t)}{t}\right) = P \circ \tilde{\beta}'_i(0).$$

e  $P \circ \tilde{\beta}'_i(0) = \tilde{\beta}'_i(0)$  pois  $\tilde{\beta}'_i(0) \in T_0X$ .

Considere agora  $\tilde{\beta}_1$  e  $\tilde{\beta}_2$  parametrizados pela distância até origem ( $\|\tilde{\beta}_i(t)\| = t$ ). Então  $ord(d_{inn}(\tilde{\beta}_1(t), \tilde{\beta}_2(t))) = 1$ . De fato,  $P^{-1}(T_i) - P^{-1}(\partial T_i)$  consiste de duas componentes conexas (folhas do recobrimento) contendo  $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2$  respectivamente. Segue que qualquer caminho conectando  $\tilde{\beta}_1(t), \tilde{\beta}_2(t)$  deve passar por  $P^{-1}(\Gamma_1)$  ou  $P^{-1}(\Gamma_2)$  (supomos  $P^{-1}(\Gamma_1)$  sem perda de generalidade). Seja  $\tilde{\Gamma}_1 \subset P^{-1}(\gamma_1)$  Como  $tord(\beta, \Gamma_1) = 1$ , temos  $tord(\tilde{\beta}_1, \tilde{\Gamma}_1) = 1$ . Note agora que  $d_X(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2) \geq d_X(\tilde{\beta}_1, \tilde{\Gamma}_1) \geq \|\tilde{\beta}_1 - \tilde{\Gamma}_1\|$ . Segue que  $tord_X(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2) = 1$ . Mas como  $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2$  são tangentes,  $tord(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2) > 1$ . Logo pelo teorema de arco-critério (5.2),  $X$  não é normalmente mergulhado em 0. Esta contradição diz que, no caso normalmente mergulhado,  $\#(P^{-1}(v) \cap X) > 1$  ocorre somente em zonas com expoente maior do que 1.  $\square$

As direções tangentes as zonas  $T_i$  onde  $\#(P^{-1}(v) \cap X) > 1$ ,  $v \in T_i$  chamaremos direções excepcionais e as zonas  $T_i$  chamaremos de zonas excepcionais. Seja  $T_i$  uma zona excepcional. Vamos associar dois números racionais a zona  $T_i$ .

**Definição 6.3.** A *Largura* de  $T_i$  com respeito a superfície  $X$  é dada pelo número:

$$Largura(T_i) = \min\{ord\|\tilde{\gamma}_1(t) - \tilde{\gamma}_2(t)\|; \tilde{\gamma}_i \subset P^{-1}(\gamma_i)\}$$

onde  $\partial T_i = \tilde{\gamma}_1 \cup \tilde{\gamma}_2$  e  $\|\tilde{\gamma}_i(t)\| = t$ .

**Definição 6.4.** A *Altura* de  $T_i$  com respeito a  $X$  é dada pelo número:

$$Altura(T_i) = \min\{ord(\|\tilde{\beta}_1(t) - \tilde{\beta}_2(t)\|; \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \subset P^{-1}(\beta))\}.$$

$\beta \subset T_i$ .

**Teorema 6.1.** Seja  $(X, x_0) \subset (\mathbb{R}^m, 0)$  germe de uma superfície semialgébrica com link conexo,  $x_0 \in X$ . Se  $X$  é normalmente mergulhado em  $x_0$  então para toda excepcional zona  $T_i$ , temos:

$$Largura(T_i) = Altura(T_i).$$

**Demonstração.**

Parametrizamos todos os arcos pela distância até  $x_0$ . Considere  $P : X \cap B(0, \epsilon_0) \rightarrow T_0X$  projecção ortogonal  $\epsilon_0$  tomado de tal modo que  $X \cap S(0, \epsilon)$  é topologicamente trivial,  $\epsilon \leq \epsilon_0$ . Considere  $T_i \subset T_{x_0}X$  zona excepcional.

Afirmção 1. Existe em  $P^{-1}(T_i)$ , um triângulo de Holder (que vamos também chamar de folha, algumas vezes)  $\tilde{T}_{i1} \subset X$  tal que  $tord(\partial \tilde{T}_{i1}) = Largura(T_i)$ , e  $\tilde{\gamma}_1 \subset \tilde{T}_{i1}$  onde:

$$tord(\tilde{\gamma}_{i1}, \tilde{\gamma}_1) = tord(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_{i2}) \leq Largura(T_i) = tord(\tilde{\gamma}_{i1}, \tilde{\gamma}_{i2})$$

com  $\partial \tilde{T}_{i1} = \tilde{\gamma}_{i1} \cup \tilde{\gamma}_{i2}$ .

Prova da afirmação: Recorde que temos recobrimento sobre cada componente de  $T_{x_0}X - \Delta$ . Além disso,

- O triângulo  $T_i$  pode ser dividido em subconjuntos  $T_i = \cup T_{i,s}$ , tal que para todo  $s$  temos que  $\#\{P^{-1}(v), v \in T_{i,s}\}$  é constante e não existe curvas discriminantes em  $\text{int}(T_{i,s})$ , ou seja,  $T_{i,s} \cap \Delta = \partial T_{i,s}$ .

Agora, seja  $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 \subset P^{-1}(\partial T_i)$  com  $Largura(T_i) = \text{tord}(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2)$ . Considere semiarcos  $\tilde{\gamma}_{i_1}, \tilde{\gamma}_{i_2}, \dots, \tilde{\gamma}_{i_s}$  de cada folha em  $\{P^{-1}(\partial T_{i,s})\}_s$ . Usando a propriedade não arquimediana, existe ao menos uma folha, nomeada,  $\tilde{T}_{i_1}$  tal que  $\partial \tilde{T}_{i_1}$  fornece  $Largura(T_i)$ . Seja  $\tilde{\gamma}_{ij} \cup \tilde{\gamma}_{ik}$  fronteira de  $\tilde{T}_{i_1}$ . Note que ao longo de  $\tilde{T}_{i_1}$ ,  $\#P^{-1}(v) = 1$  e é possível escolher  $\tilde{\gamma}_{ijk} \subset \tilde{T}_{i_1}$  tal que  $\text{tord}(\tilde{\gamma}_{ijk}, \tilde{\gamma}_{ik}) = \text{tord}(\tilde{\gamma}_{ijk}, \tilde{\gamma}_{ij}) \leq Largura(T_i)$ . E essa última desigualdade provém da propriedade não arquimediana associada ao triângulo  $\tilde{\gamma}_{ijk}\tilde{\gamma}_{ik}\tilde{\gamma}_{ij}$ . Para a existência de  $\tilde{\gamma}_{ijk}$ , considere a função altura:

$$h : \tilde{T}_{i_1} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \|x - P(x)\|.$$

Sobre arcos, temos  $h(\gamma(t)) = \|\gamma(t) - P \circ \gamma(t)\|$ . Associado a  $h$ , temos  $\mu(h) : \tilde{T}_{i_1} \rightarrow [0, \alpha] \subset \mathbb{Q}$ , onde  $\mu(h)(\gamma) = \text{tord}(\gamma, P(\gamma))$ . Considere agora  $\mu(a)(h), \mu(b)(h)$  expoentes  $\text{tord}(\tilde{\gamma}_{i_1}, \gamma), \text{tord}(\tilde{\gamma}_{i_2}, \gamma)$  respectivamente. Defina  $\mu(c)(h) = \mu(a)(h) - \mu(b)(h)$ . Como próximo de  $\tilde{\gamma}_{i_1}$  temos  $\mu(c)(h) > 0$  e próximo de  $\tilde{\gamma}_{i_2}$  temos  $\mu(c)(h) < 0$ , existe, pela continuidade do intervalo associado a  $\mu(h)$  em  $\mathbb{Q}$ ,  $\gamma$  tal que  $\mu(c)(h)(\gamma) = 0$ .

Além disso, como  $\#(P^{-1}(v) \cap X) > 1$ ,  $v \in P(\tilde{T}_{i_1}) \subset T_i$  existe também  $\tilde{\tilde{\gamma}}_{ijk}, \tilde{\tilde{\gamma}}_{ijk} \neq \tilde{\gamma}_{ijk}$  tal que  $P(\tilde{\tilde{\gamma}}_{ijk}) = P(\tilde{\gamma}_{ijk}) \subset T_i$ .

Suponha agora  $Altura(T_i) > Largura(T_i)$ . Segue que:

$$\text{tord}(\tilde{\tilde{\gamma}}_{ijk}, \tilde{\gamma}_{ijk}) \geq Altura(T_i) > Largura(T_i) \geq \text{tord}(\tilde{\gamma}_{ijk}, \tilde{\gamma}_{ij}) \geq \text{ord}(d_{inn}(\tilde{\tilde{\gamma}}_{ijk}, \tilde{\gamma}_{ijk})).$$

Onde a primeira desigualdade segue apartir da definição de  $Altura(T_i)$ , a segunda desigualdade segue por hipótese e a terceira desigualdade segue da afirmação acima. Temos  $\tilde{\tilde{\gamma}}_{ijk}, \tilde{\gamma}_{ij} \subset \tilde{T}_{i_1}$ ,  $\tilde{\gamma}_{ij} \subset \partial \tilde{T}_{i_1}$  e além disso,  $\tilde{\tilde{\gamma}}_{ijk}, \tilde{\gamma}_{ijk}$  estão contido em diferentes folhas. Portanto, qualquer caminho que conecte  $\tilde{\tilde{\gamma}}_{ijk}, \tilde{\gamma}_{ijk}$  deve passar por  $\tilde{\gamma}_{ij}$  (isto justifica a quarta desigualdade). Assim,

$$\text{tord}(\tilde{\tilde{\gamma}}_{ijk}, \tilde{\gamma}_{ijk}) > \text{ord}(d_{inn}(\tilde{\tilde{\gamma}}_{ijk}, \tilde{\gamma}_{ijk})).$$

Assim,  $X$  não é normalmente mergulhado em  $x_0$ . (teorema 5.2).

Suponha agora  $Altura(T_i) < Largura(T_i)$ . Tome semiarco  $\gamma \subset T_i$  tal que  $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 \subset P^{-1}(\gamma)$  e  $Altura(T_i)$  é realizada, isto é,

$$\text{tord}(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2) = Altura(T_i).$$

Para ver isso, considere  $h : T_i \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $h(x) = \min\{\|x_1 - x_2\|; x_1, x_2 \in P^{-1}(x)\}$ . Esta função é semialgébrica. Podemos considerar decomposição celular finita  $T_{i,s}$  tal que  $h$  seja contínua em cada  $T_{i,s}$ . Por Birbrair et al, 2014, proposição 2.6, teremos intervalos  $Q_i, s = [a_{i,s}, b_{i,s}]$  em  $\mathbb{Q} \cup \infty$ . Considere  $a = \min\{a_{i,s}\}$ . Segue que  $Altura(T_i) = a$ .

Note agora que com a hipótese:  $Altura(T_i) < Largura(T_i)$  então deve ser  $\gamma \subset \text{int}(T_i)$ . De fato, admita que  $\gamma \subset \partial T_i$ . Tome  $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 \subset P^{-1}(\gamma_1)$  onde  $\partial T_i = \gamma_1 \cup \gamma_2$ . Considere o triângulo  $\gamma_2\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2$ . Temos que  $\text{tord}(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2) \geq Largura(T_i) > Altura(T_i)$

Portanto,  $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$  não podem realizar  $Altura(T_i)$ .

Considere agora os semiarcos  $\alpha_{12}, \alpha_{22} \subset P^{-1}(\partial T_i), \alpha_{12} \subset P^{-1}(\gamma_1), \alpha_{22} \subset P^{-1}(\gamma_2)$  tal que  $\tilde{\gamma}_2 \subset T(\alpha_{12}, \alpha_{22}) \subset P^{-1}(T_i)$ . Podemos assumir como anteriormente que  $T_i$  não possui curvas discriminantes em  $int(T_i)$ . De modo análogo, podemos tomar  $T(\alpha_{11}, \alpha_{21})$  tal que  $\tilde{\gamma}_1 \subset T(\alpha_{11}, \alpha_{21})$ . Podemos parametrizar todos os arcos em  $P^{-1}(T_i)$  pela direção tangente dada por  $T_i$ . Omitindo o parâmetros dos semiarcos  $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{11}$  e  $\alpha_{21}$ , temos triângulos euclidianos  $\alpha_{12}\tilde{\gamma}_2\alpha_{22}$  e  $\alpha_{11}\tilde{\gamma}_1\alpha_{21}$ . Sobre os segmentos  $\overline{\alpha_{12}\alpha_{22}}$  e  $\overline{\alpha_{11}\alpha_{21}}$  considere projeções  $\tilde{P}(\tilde{\gamma}_2), \tilde{P}(\tilde{\gamma}_1)$  (respectivamente) dada pelas interseções com a reta contendo o segmento  $\overline{\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2}$ .

Afirmção.  $Altura(T_i) \geq a$  ou  $Altura(T_i) \geq b$ , onde  $a = \text{tord}(\tilde{\gamma}_1, \tilde{P}(\tilde{\gamma}_1))$  e  $b = \text{tord}(\tilde{\gamma}_2, \tilde{P}(\tilde{\gamma}_2))$ .

Prova. Lembre que os segmentos  $\overline{\alpha_{11}\alpha_{21}}, \overline{\alpha_{12}\alpha_{22}}$  tem uma posição relativa com respeito ao cone tangente. Considere

$$\partial Q = \overline{\alpha_{11}\alpha_{21}} \cup \overline{\alpha_{12}\alpha_{22}} \cup \overline{\alpha_{11}\alpha_{12}} \cup \overline{\alpha_{21}\alpha_{22}}.$$

Temos dois casos:

1.  $\overline{\alpha_{11}\alpha_{21}} \cap \overline{\alpha_{12}\alpha_{22}} = \emptyset$ .

$\partial Q$  determina um quadrilátero  $Q$ . Como  $Largura(T_i) > Altura(T_i)$ , temos que  $\tilde{\gamma}_1$  ou  $\tilde{\gamma}_2 \notin Q$ . Portanto,  $\text{tord}(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2) \geq a$  ou  $\text{tord}(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2) \geq b$ .

2.  $\overline{\alpha_{11}\alpha_{21}} \cap \overline{\alpha_{12}\alpha_{22}} \neq \emptyset$ .

$\partial Q$  determinam dois (ou somente um) triângulos  $Q_1, Q_2$  com um vértice comum. Então o argumento segue de forma análoga.  $\tilde{\gamma}_1$  or  $\tilde{\gamma}_2 \notin Q_1 \cup Q_2$ .

□

Sem perda de generalidade, considere  $Altura(T_i) \geq b = \text{tord}(\tilde{\gamma}_2, \tilde{P}(\tilde{\gamma}_2))$ . Como no triângulo  $\alpha_{12}\tilde{\gamma}_2\alpha_{22}$ , o segmento  $\overline{\tilde{P}(\tilde{\gamma}_2)\alpha_{22}}$  is contained in  $\overline{\alpha_{12}\alpha_{22}}$  temos  $\text{tord}(\tilde{P}(\tilde{\gamma}_2), \alpha_{22}) \geq \text{tord}(\alpha_{12}, \alpha_{22}) \geq Largura(T_i) > Altura(T_i) \geq \text{tord}(\tilde{P}(\tilde{\gamma}_2), \tilde{\gamma}_2)$ . Logo,  $\text{tord}(\tilde{\gamma}_2, \tilde{P}(\tilde{\gamma}_2)) = \text{tord}(\tilde{\gamma}_2, \alpha_{22})$  pela propriedade não arquimediana com respeito ao triangulo  $\tilde{P}(\tilde{\gamma}_2)\tilde{\gamma}_2\alpha_{22}$ . Segue que:

$$\text{tord}(\alpha_{12}, \alpha_{22}) \geq Largura(T_i) > Altura(T_i) \geq \text{tord}(\tilde{P}(\tilde{\gamma}_2), \tilde{\gamma}_2) = \text{tord}(\tilde{\gamma}_2, \alpha_{22}) \geq \text{tord}_{int}(\alpha_{11}, \alpha_{22}).$$

Onde a última desigualdade decorre notando que qualquer caminho conectando  $\alpha_{11}$  e  $\alpha_{22}$  passa por  $\tilde{\gamma}_2$ . Dai, usamos lema de comparação de ordem intrínseca ( 5.1). Assim,  $X$  não é normalmente mergulhado. □

**Observação 6.1.** Definimos a largura de uma zona excepcional de  $X$  na vizinhança de um ponto considerando o contato mínimo entre as fibras com respeito a projeção ortogonal no cone tangente. Podemos, além disso, considerar expoente de Hölder  $\beta_i = \text{tord}(\gamma_1, \gamma_2)$ , onde  $\partial T_i = \gamma_1 \cup \gamma_2$ . Este número fornece uma estimativa superior para  $Altura(T_i)$ :

**Teorema 6.2.** Seja  $X$  conjunto semialgébrico 2-dimensional com link conexo,  $0 \in X$ . Se  $X$  é normalmente mergulhado em  $0$  então  $\text{tord}(\partial T_i) \geq Altura(T_i)$ .

**Demonstração.**

Considere reparametrização de aplicação projeção:

$g : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $g(x) = \|x\| \frac{P(x)}{\|P(x)\|}$  quando  $x \neq 0$  e pomos  $g(0) = 0$ .

Observe que o conjunto polar e o conjunto discriminante de  $P$  e  $g$  são os mesmos. Suponha que fosse  $tord(\partial T_i) < Altura(T_i)$ . De forma análoga ao que fizemos anteriormente, podemos dividir  $T_i$  em subconjuntos  $T_i = \cup T_{i,s}$  tal que, para todo  $s$ , temos  $\#\{P^{-1}(v), v \in T_{i,s}\}$  constante e sem curvas discriminantes em  $int(T_{i,s})$ ,  $T_{i,s} \cap \Delta = \partial T_{i,s}$ . E agora, pela propriedade não arquimediana, existe  $s$  tal que:

$$tord(\gamma_{1,s}, \gamma_{2,s}) = tord(\gamma_1, \gamma_2)$$

onde  $\gamma_{1,s}, \gamma_{2,s}$  são curvas na fronteira de  $T_{i,s}$ . Tome um arco  $\gamma \subset T_{i,s}$  tal que

$$tord(\gamma, \gamma_{1,s}) = tord(\gamma, \gamma_{2,s}) = \beta = tord(\gamma_1, \gamma_2).$$

Note que dado  $x$ , temos  $\|g(x)\| = \|x\| \frac{\|P(x)\|}{\|P(x)\|} = \|x\|$ .  $g$  preserva distância até a origem e dado que  $x \in X \cap S(0, \epsilon)$ , a aplicação  $g$  pode ser representada em coordenadas polares onde  $\theta \in \mathbb{S}^1$  e  $t \in (0, \epsilon)$ .  $\mathbb{S}^1$  parametriza o link de nossa superfície  $X$ . Para cada  $t$  existe ao menos dois pares de segmentos  $[\theta_1(t), \theta_2(t)]$  e  $[\theta_3(t), \theta_4(t)]$  tal que:

- $g([\theta_1(t), \theta_2(t)]) \subset T_{i,s}$   $g([\theta_3(t), \theta_4(t)]) \subset T_{i,s}$
- $g(\theta_j(t)) \subset \partial T_{i,s}$  for all  $j = 1, 2, 3, 4$
- $g(\theta_1(t)) \neq g(\theta_2(t))$ ,  $g(\theta_3(t)) \neq g(\theta_4(t))$ .

Podemos escolher um desses segmentos realizando  $tord(\gamma_1, \gamma_2)$  (digamos  $[\theta_1(t), \theta_2(t)]$ ). Sobre cada segmento  $[\theta_1(t), \theta_2(t)]$ ,  $[\theta_3(t), \theta_4(t)]$  existe um ponto pertencendo a imagem inversa de  $\gamma$ . Considere duas componentes  $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$  de  $g^{-1}(\gamma)$  pertencendo a dois diferentes triangulos de holder  $\cup_t[\theta_1(t), \theta_2(t)]$  e  $\cup_t[\theta_3(t), \theta_4(t)]$ . Segue que  $ord(d_{inn}(\tilde{\gamma}_1(t), \tilde{\gamma}_2(t))) \leq ord\|\theta_1(t) - \tilde{\gamma}_1(t)\| = tord(\partial T_{i,s})$ . Mas,  $ord\|\tilde{\gamma}_1(t) - \tilde{\gamma}_2(t)\| \geq Altura(T_{i,s}) \geq Altura(T_i) > tord(\partial T_i) = tord(\partial T_{i,s})$ . Portanto  $X$  não pode ser normalmente mergulhado (pelo teorema de arco critério 5.2).  $\square$

**Exemplo 6.1.** A desigualdade contrária no teorema 6.2 não ocorre em geral. Vejamos:

Seja  $T = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq y \leq 3x^{101}, x \geq 0\} \cup \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; 0 \geq y \geq -3x^{101}, x \geq 0\} = T_1 \cup T_2$ . Tome 2 arcos  $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 \subset \mathbb{R}^3, \tilde{\gamma}_i(0) = 0$  tal que  $P(\tilde{\gamma}_1) = \partial T_1 = P(\tilde{\gamma}_2)$  com  $tord(\tilde{\gamma}_1, \partial T_1) = 101$  e  $tord(\tilde{\gamma}_2, \partial T_1) = 2$  onde  $P(x, y, z) = (x, y, 0)$ . Por outro lado, consideremos  $\tilde{\gamma}_3, \tilde{\gamma}_3(0) = 0$  com  $tord(\tilde{\gamma}_3, \partial T_2) = 2$ ,  $P(\tilde{\gamma}_3) = \partial T_2$ . Considere

$$X_1 = T(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_3) \cup T(\tilde{\gamma}_3, \tilde{\gamma}_2).$$

onde  $T(\tilde{\gamma}_i, \tilde{\gamma}_j) = \{\tilde{\gamma}_i(t) + s(\tilde{\gamma}_j(t) - \tilde{\gamma}_i(t)); (s, t) \in [0, 1] \times I\}$ . Seja  $\tilde{\gamma}_s(t) = \tilde{\gamma}_i(t) + s(\tilde{\gamma}_j(t) - \tilde{\gamma}_i(t)) \in T(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_3)$ . Temos  $tord(\tilde{\gamma}_s, \tilde{\gamma}_1) = 2$ . Do mesmo modo, para  $\tilde{\gamma}_s \subset T(\tilde{\gamma}_3, \tilde{\gamma}_2)$ ,  $tord(\tilde{\gamma}_s, \tilde{\gamma}_3) = 2$ . Portanto,  $Altura(T) = 2$ . No entanto,  $tord(\partial T) = 101$ . Observe que  $X_1$  é normalmente mergulhado.

**Observação 6.2.** Considerando o teorema 6.1, é possível obter outra prova do teorema 6.2, observando que  $Largura(T_i) \leq tord(\partial T_i)$ . Isso decorre da seguinte observação:

**Lema 6.1.** Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  conjunto semialg\u00e9brico,  $0 \in X$  e  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ ,  $E \in G_k(\mathbb{R}^n)$  uma proje\u00e7\u00e3o tal que de tal modo que  $P^{-1}(0) \cap T_0X = \{0\}$ . Ent\u00e3o,

$$\text{tord}(\gamma_1, \gamma_2) \leq \text{tord}(Po\gamma_1, Po\gamma_2).$$

**Demonstra\u00e7\u00e3o.**

Se  $\text{tord}(\gamma_1, \gamma_2) = 1$ , a desigualdade acima \u00e9 sempre v\u00e1lida. suponha  $\text{tord}(\gamma_1, \gamma_2) >$

1. Seja  $v = \gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$ . Tome  $Po\gamma_1, Po\gamma_2 : [0, \epsilon) \rightarrow P(X)$ . Ent\u00e3o

$$Po\gamma_1'(0) = Po\gamma_2'(0) = Pov.$$

De fato, como  $v \in T_0X$ ,  $Pov \neq 0$  e considerando  $\|P \circ \gamma_i(t)\| = t$ ,  $i = 1, 2$ , temos:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{P(\gamma_1(t))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} P\left(\frac{\gamma_1(t)}{t}\right) = P\left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\gamma_1(t)}{t}\right) = Pov.$$

Considere agora  $T_{v(t)}$  hiperplano em  $\mathbb{R}^n$  ortogonal ao vetor  $v$  passando por  $t \frac{v}{\|v\|}$ .

Seja

$$g_{12}(t) = \|\gamma_1 \cap T_{v(t)} - \gamma_2 \cap T_{v(t)}\| = Dt^q + o(t^q),$$

para algum n\u00famero real  $D > 0$ . como vimos, nas preliminares,  $q = \text{tord}(\gamma_1, \gamma_2)$ . Considere

$$H_{\gamma_1}^q = \{x \in T_{v(t)}; d_{ind}(x, \gamma_1(t)) \leq Dt^q + o(t^q)\}$$

Para  $t$  suficientemente pequeno, temos  $\gamma_1, \gamma_2 \subset H_{\gamma_1}^q$  e al\u00e9m disso,

$$Po\gamma_1, Po\gamma_2 \subset P(H_{\gamma_1}^q) \subset H_{Po\gamma_1}^q.$$

onde  $H_{Po\gamma_1}^q = \{x \in T_{Pov(t)}; d_{ind}(x, Po\gamma_1(t)) \leq Dt^q + o(t^q)\}$ . Portanto,  $\text{tord}(Po\gamma_1, Po\gamma_2) \geq q$ .

Assim, como  $P^{-1}(0) \cap T_0X = \{0\}$ , (onde agora  $P : X \rightarrow T_0X$  \u00e9 a proje\u00e7\u00e3o ortogonal) temos  $Largura(T_i) \leq \text{tord}(\partial T_i)$ .  $\square$

## 7 GEOMETRIA LIPSCHITZ E SINGULARIDADES DE POSTO 1

Como fizemos no caso topológico, vamos iniciar investigação (agora do ponto de vista métrico) com respeito a germes de superfícies parametrizadas. Separamos investigação de acordo com o posto de sua derivada na origem. Se temos  $\text{posto}(Df(0,0)) = 2$ , então  $X$  é suave numa vizinhança da origem e portanto uma superfície Lipschitz com respeito a métrica extrínseca. Consideremos então  $X = f(\mathbb{R}^2, 0) \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $\text{posto}(Df(0,0)) = 1$ . Diremos que  $X$  é uma superfície de posto 1 em 0.

Vale ressaltar que dada  $(X, 0) = f(\mathbb{R}^2, 0)$  germe de uma superfície parametrizada, se consideramos uma aplicação  $g$   $\mathcal{A}$ -equivalente a  $f$  então é imediato que a geometria Lipschitz das superfícies não é alterada (podemos até só pedir que as mudanças de coordenadas sejam somente  $C^1$ ).

**Proposição 7.1.** Seja  $(X, 0) \subset (\mathbb{R}^n, 0)$  um germe de uma superfície posto 1 em 0. Então, o cone tangente na origem  $C(X, 0)$  é um plano ou um semi-plano.

**Demonstração.**

Esta proposição já foi provada (ver corolário 4.1). No entanto, decidimos deixar prova inicial pois, ela exhibe a ideia inicial do que fizemos no capítulo 3.

Temos  $X = f(\mathbb{R}^2, 0)$ , onde  $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_n(x, y))$ , função analítica  $f_i$  na vizinhança da origem. Como  $\text{posto}(DF(0,0)) = 1$ , podemos supor, a menos de permutação de coordenadas que  $\frac{\partial f_1(0,0)}{\partial x} \neq 0$ . Tome  $\phi(x, y) = (f_1(x, y), y)$ .  $\phi$  é um difeomorfismo local. Então, temos uma parametrização de  $X$  dado por

$$\tilde{f}(x, y) = f \circ \phi^{-1}(x, y) = (x, f_2 \circ \phi^{-1}(x, y), \dots, f_n \circ \phi^{-1}(x, y)).$$

Observe que  $\tilde{f}$  homeomorfismo na imagem implica que  $\tilde{f}(0, y) \neq 0$ , ou seja, para algum  $i$ ,  $\tilde{f}_i(0, y) \neq 0$ . Usando mudança linear de coordenadas, obtemos  $p = \text{ord}\tilde{f}(0, y) = \text{ord}\tilde{f}_2(0, y) < \text{ord}\tilde{f}_j(0, y)$ ,  $j \neq i$ . Então,

$$\tilde{f}(0, y) = a_p y^p e_2 + o(y^p)$$

onde  $e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots, 0)$ .

Além disso, considerando difeomorfismos  $(x_1, x_2, \dots, x_i - f_i(x_1, 0), \dots, x_n)$  podemos assumir que  $\tilde{f}_i(x, 0) = 0$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ . Seja  $\gamma_{ab} \subset X$  um arco dado por:

$$\gamma_{ab}(t) = \tilde{F}(at^p, bt) = at^p e_1 + b^p a_p t^p e_2 + o(t^p).$$

Esta curva tem vetor tangente  $\gamma'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\gamma_{ab}(t^{\frac{1}{p}})}{t} = (a, \tilde{b}) \in \mathbb{R}^2$ , para todo  $a, \tilde{b} \in \mathbb{R}$  quando  $p$  é ímpar (é suficiente tomar  $b = \frac{\sqrt[p]{\tilde{b}}}{a_p}$  e  $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$  para todo  $a \in \mathbb{R}, \tilde{b} \in \mathbb{R}_+$  (ou  $\tilde{b} \in \mathbb{R}_-$ , quando  $a_p < 0$ ) se  $p$  é par. De modo geral, Seja  $\gamma : [0, \epsilon) \rightarrow X$  uma curva semialgebraic,  $\gamma(0) = 0$  e tome  $\tilde{\gamma} = \tilde{f}^{-1}(\gamma) \subset \mathbb{R}^2$ . Então  $\tilde{\gamma}(0) = 0$  e  $\tilde{\gamma}$  semialgebraico. Então temos  $\tilde{\gamma}(t) = (Ct^q + o(t^q), Dt^r + o(t^r))$ . Assim,

$$\gamma(t) = (Ct^q + o(t^q), f(Ct^q + o(t^q), Dt^r + o(t^r)))$$

onde  $f(x, y) = (\tilde{f}_2(x, y), \dots, \tilde{f}_n(x, y))$ . Observe que

- $q < r \Rightarrow \gamma'(0) \parallel e_1$ ;
- $q > r \Rightarrow \gamma'(0) \parallel e_2$ ;
- $q = pr \Rightarrow \gamma'(0) \in \langle e_1, e_2 \rangle$ ;

Então  $\gamma'(0) \in \mathbb{R}^2$  (p ímpar) e  $\gamma'(0) \in \mathbb{R}_+^2$  (ou  $\mathbb{R}_-^2$ ) (p par). Assim,

- $\mathbb{R}^2 = C(X, 0) \Leftrightarrow \text{ord}\tilde{f}(0, y)$  é ímpar;
- $\mathbb{R}_+^2$  or  $\mathbb{R}_-^2 = C(X, 0) \Leftrightarrow \text{ord}\tilde{f}(0, y)$  é par.

Usando o teorema 5.3 e a proposição anterior, obtemos

**Corolário 7.1.** Todos os germes  $(X, 0) = f(\mathbb{R}^2, 0)$  de superfícies de posto 1 cuja  $\text{ord}f(0, y)$  é par não são normalmente mergulhadas.

**Demonstração.**

Com efeito,  $T_0X$  é um semi-plano. Agora, o resultado segue pelo teorema 5.3.

□

Ressaltamos que, a partir de agora, nosso interesse é investigar topologia de superfícies em  $\mathbb{R}^4$  (ou equivalentemente topologia do complemento dos nós que aparecem em seu link em 3-esferas) quando impomos condições métricas de regularidade.

**Observação 7.1.** No caso de uma superfície parametrizada, a projeção ortogonal  $P|_X : X \rightarrow T_0X$  pode ser identificada como um germe  $P : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ , notando que  $P|_X = P|_{F(\mathbb{R}^2, 0)} = P \circ F|_{(\mathbb{R}^2, 0)}$ .

No caso de posto 1, já vimos que podemos representar, a menos de mudança linear de coordenadas,  $f(x, y) = (x, f_2(x, y), f_3(x, y), f_4(x, y))$  com  $\text{ord}f_2(0, y) < \text{ord}f_j(0, y)$ ,  $j \neq 2$  e  $f(x, 0) = (x, 0, 0, 0)$ . Temos que  $P|_X(x, y) = (x, f_2(x, y))$  e a região polar associada a projeção é dada pelo conjunto:

$$\rho = S(P|_X) = \{(x, y) \in \mathcal{U}; \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} = 0\}.$$

**Definição 7.1.** No caso de posto 1, a representação  $f(x, y) = (x, f_2(x, y), f_3(x, y), f_4(x, y))$  com  $\text{ord}f_2(0, y) < \text{ord}f_j(0, y)$ ,  $j \neq 2$  e  $f(x, 0) = (x, 0, 0, 0)$  chamaremos de *forma normal* da parametrização.

Como consequência do corolário 5.3, note que, usando decomposição de David Mond (obtida em 3.4), concluímos imediatamente que superfícies parametrizadas por aplicações do tipo  $\Sigma^{1,0}$  nunca são normalmente mergulhadas.

Vejamos agora o que acontece com superfícies parametrizadas por aplicações  $f$  na órbita  $\mathcal{A}_2.(x, xy, 0, 0)$ . Note que forma normal de  $f$  fica

$$f(x, y) = (x, xy + P_1(x, y), Q(x, y), R(x, y)),$$

onde  $P_1, Q, R$  são elementos do ideal  $\mathcal{M}_2^3 = (x^3, x^2y, xy^2, y^3)$ . Quando  $\text{ord}_y P_1(0, y) < \text{ord}_y Q(0, y) < \text{ord}_y R(0, y)$  diremos que  $X$  é uma superfície tipo cuspidal.

**Teorema 7.1.** Seja  $X = f(\mathbb{R}^2, 0) \subset \mathbb{R}^n$  superfície tipo cuspidal. Então  $X$  não normalmente mergulhada.

**Demonstração.**

Considere a forma normal  $f(x, y) = (x, f_2(x, y), f_3(x, y), f_4(x, y))$ ,  $f(x, 0) = (x, 0, 0, 0)$  e  $\text{ord}f_2(0, y) < \text{ord}f_j(0, y)$ ,  $j \neq 2$ . Como  $f$  tem posto 1 em 0,  $\text{ord}f_2(0, y) \geq 2$ . Usando o corolário 7.1 se  $\text{ord}f_2(0, y) = 2l$ ,  $l \geq 1$  então  $T_0X \simeq \mathbb{R}_+^2$  e portanto  $X$  não é normalmente mergulhado em 0. Vejamos então o caso em que  $\text{ord}f(0, y) = \text{ord}_y f_2(0, y) = 2m + 1 = n$ ,  $m \geq 1$ , onde  $f_2(x, y) = xy + P_1(x, y)$ . Segue que:

$$\frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} = bx + a_n y^{n-1} + h(x, y)$$

onde  $h$  tem grau pesado maior que  $n - 1$  quando consideramos pesos  $(n - 1, 1)$ . O que equivale a:

$$f_2(x, y) = bxy + \frac{a_n}{n} y^n + \tilde{h}(x, y)$$

$\tilde{h}$  com grau pesado maior do que  $n$  considerando mesmos pesos. Podemos agora obter parametrização inicial do conjunto polar associado  $\rho$ . Usando polígono de Newton, obtemos:

$$\Delta = P(\rho(t)) = P(-\frac{a_n}{b} t^{n-1} + o(t^{n-1}), t) = (-\frac{a_n}{b} t^{n-1} + o(t^{n-1}), a_n(\frac{1}{n} - 1)t^n + o(t^n)).$$

Seja  $T(\Delta) \subset T_0X \simeq \mathbb{R}^2$  triangulo com fronteira  $\Delta$ . temos  $\text{tord}(\partial T(\Delta)) = \frac{n}{n-1}$ . Agora, observe que em  $T(\Delta)$ ,  $\text{altura}(T(\Delta))$  é bem definida. De fato, podemos considerar curva de ponto duplos com respeito a projeção no cone tangente:

$$D^2(P) = \{(x, y, u) \in \mathbb{C}^3; \frac{P(x, u) - P(x, y)}{u - y} = 0\}.$$

$D^2(P)(P = (x, f_2))$  tem uma solução real, se e somente se

$$D^2(f_2) = \{(x, y, u); \frac{f_2(x, u) - f_2(x, y)}{u - y} = 0\}$$

tem solução real distinta de  $(0, 0, 0)$ . Escrevendo equação

$$\frac{f_2(x, u) - f_2(x, y)}{u - y} = x + a_n(y^{n-1} + y^{n-2}u + \dots + u^{n-2}y + u^{n-1}) + \dots = 0$$

e usando o teorema da função implícita, vemos que existe solução real distinta de  $(0, 0, 0)$ . Note ainda que  $\rho = D^2 f_2(x, y, y) \subset D^2 f_2(x, y, u)$ . O que mostra que “multiplicidade” da superfície com respeito a projeção no cone tangente ocorrem sobre zona discriminante  $T_i = T(\Delta)$ . Portanto  $\text{altura}(T(\Delta))$  está bem definida.

Mais geralmente, temos uma estimativa de  $\text{Altura}(T_i)$  dada da seguinte forma:

Seja  $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 \subset P^{-1}(\gamma)$ ,  $\gamma \subset T_i$ . Considere numeros:

- $b = \text{tord}(\tilde{\gamma}_1, \gamma)$
- $c = \text{tord}(\tilde{\gamma}_2, \gamma)$
- $a = \text{tord}(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2)$

Temos triangulo nao arquimediano com medidas  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Vamos supor, sem perda de generalidade, que  $b \leq c$ . Se  $b \geq a$  entao pela desigualdade triangular (euclidiana)  $a = b$ .



Portanto  $a \geq b$ . Segue, pela definição de infimo, que

$$Altura(T_i) \geq Altura(T_i, T_0X). \quad (7.1)$$

Onde  $Altura(T_i, T_0X) = \inf\{tord(\gamma, P(\gamma)), P(\gamma) \subset T(\Delta) \subset T_0X\}$ .

Afirmacão:  $Altura(T(\Delta))$  é estimada por uma das funções coordenadas.

Prova. Consideremos  $altura(T_i)$  em relação a projeção linear  $P_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $P_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, 0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)$ . Note que  $T_0X = T_0P_i(X)$  e a projeção ortogonal  $P|_{P_i(X)} : P_i(X) \rightarrow T_0X$  permanece a mesma. Seja  $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 \subset X$  arcos passando por 0.

$$\tilde{\gamma}_1(t) = f(\gamma_1(t)) \text{ e } \tilde{\gamma}_2(t) = f(\gamma_2(t))$$

No que diz respeito a projeção  $P$ , temos

$$Pof(\gamma_1(t)) = Pof(\gamma_2(t)) = \gamma.$$

Sobre  $T_i$ ,  $\tilde{\gamma}_1(t)$ ,  $\tilde{\gamma}_2(t)$  e  $\gamma$  e são tangentes a  $e_1$  e podemos supor que esta parametrizada pelo eixo  $x$ . Assim, usando a observação 7.2 (no final da prova) obtemos a ordem de contato ( $tord(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2)$ ) por:

$$\begin{aligned} ord\|f(\gamma_1(t)) - f(\gamma_2(t))\| &= ord\|(Pof(\gamma_1(t)), f_3(\gamma_1(t)), f_4(\gamma_1(t)) - \\ &(Pof(\gamma_2(t)), f_3(\gamma_2(t)), f_4(\gamma_2(t)))\| = ord\|(f_3(\gamma_1(t)) - f_3(\gamma_2(t)), f_4(\gamma_1(t)) - f_4(\gamma_2(t))\|. \end{aligned}$$

Portanto,  $ord\|f(\gamma_1(t)) - f(\gamma_2(t))\|$  depende da ordem inferior das diferenças acima. Entao,

$$Altura(T_i) = Altura(T_i)_{P_i(X)} \quad (7.2)$$

Para  $i = 3$  ou  $i = 4$ . Finalmente, por (7.1) e (7.2):

$$Altura(T_i) \geq tord(P_i \circ f(\gamma_j), P \circ P_i \circ f(\gamma_j)), \quad (7.3)$$

para  $j = 1$  ou  $2$  (podemos supor que  $tord(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2) = Altura(T_i)$ ). Por (7.3),  $Altura(T(\Delta)) \geq ordf_i(\gamma_j)$ ,  $\gamma_j \subset T(\rho)$ ,  $i = 3$  ou  $4$ .

Se  $\gamma_j$  é tangente ao eixo  $y$ , temos parametrização  $\gamma_j(t) = (ct^{\tilde{\alpha}} + o(t^{\tilde{\alpha}}), t)$  com  $\gamma_j \subset T(\rho)$ ,  $1 \leq \tilde{\alpha} \leq n-1$  e  $\tilde{\gamma}_j(t) = (ct^{\tilde{\alpha}} + o(t^{\tilde{\alpha}}), f_2(\gamma_j(t)), f_3(\gamma_j(t)), f_4(\gamma_j(t)))$ . Para obter ordem de contato pela tangência, consideramos reparametrização:

$$\overline{\gamma}_j(t) = \tilde{\gamma}_j(t^{\frac{1}{\tilde{\alpha}}}) = (ct + o(t), f_2(\gamma_j(t^{\frac{1}{\tilde{\alpha}}}), f_3(\gamma_j(t^{\frac{1}{\tilde{\alpha}}}), f_4(\gamma_j(t^{\frac{1}{\tilde{\alpha}}})))).$$

Note que  $ord_t f_i(\gamma_j) \geq \min\{\frac{ordf_i(0,t)}{\tilde{\alpha}}, \frac{2\tilde{\alpha}+1}{\tilde{\alpha}}, \frac{2+\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}}\} > \frac{n}{n-1} = Largura(T_\Delta)$ . De fato,

- $ordf_i(0, y) > ordf_2(0, y) \Rightarrow \frac{ordf_i(0,t)}{\tilde{\alpha}} > \frac{n}{n-1}$ ;
- $\frac{2\tilde{\alpha}+1}{\tilde{\alpha}} = \frac{1}{\tilde{\alpha}} + 2 \geq 2 + \frac{1}{n-1} > \frac{n}{n-1}$ ;
- $\frac{2+\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}} = \frac{2}{\tilde{\alpha}} + 1 \geq 1 + \frac{2}{n-1} > \frac{n}{n-1}$ ;

Por outro lado, se  $\gamma_j$  não é tangente ao eixo  $y$ , temos parametrização dada por  $\gamma_j(t) = (et, t^{\tilde{\alpha}_i} + o(t^{\tilde{\alpha}_i}))$ ,  $\tilde{\alpha}_i \geq 1$ . Neste caso,  $\tilde{\gamma}_j$  and  $\gamma$  já estão parametrizados pelo vetor

$(1, 0, 0, 0)$ . Nesse caso, observe que  $tord(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2) > 3 > \frac{n}{n-1}$ , pois  $f_j \in \mathcal{M}_2^3$ .

Assim, concluímos que  $Altura(T_\Delta) > Largura(T_\Delta)$  e pelo teorema 6.1,  $X$  não é normalmente mergulhado em 0.  $\square$

**Observação 7.2.** Dado dois arcos  $\gamma_1, \gamma_2 \subset \mathbb{R}^m$  tangentes em 0,  $\alpha_{12} = tord(\gamma_1, \gamma_2) > 1$ , temos que  $ord_t(g_{12}) = tord(\gamma_1, \gamma_2)$ , onde

$$g_{12}(t) = \|\gamma_1 \cap T_{v(t)} - \gamma_2 \cap T_{v(t)}\|,$$

onde  $T_{v(t)}$  é o hiperplano ortogonal a  $v$  passando por  $t\frac{v}{\|v\|}$ , onde  $v = \gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$ .

**Demonstração.** Note que, da maneira que definimos,  $g_{12}(t)$  é semialgébrica e  $g_{12}(0) = 0$ . Portanto existe  $q \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty)$  tal que  $g_{12}(t) = Dt^q + o(t^q)$ ,  $D$  alguma constante positiva. Observe que  $T_{v(t)}$  é tangente a bola  $B(0, t)$  em  $t\frac{v}{\|v\|}$ . logo  $g_{12}(t) \geq d_{ind}(\gamma_1 - B(0, t), \gamma_2 - B(0, t))$ . Agora, segue pelo lema de comparação de ordem extrínseco (ver Birbrair e Fernandes 2000)  $tord(\gamma_1, \gamma_2) \geq q$ . Por outro lado, considere a bola

$$\mathcal{B} = B(t\frac{v}{\|v\|}, 2t) \subset T_{v(t)}.$$

e tome o cone sobre  $\mathcal{B}$ ,  $C(\mathcal{B})$ . Para  $t$  pequeno,  $\gamma_1, \gamma_2 \subset C(\mathcal{B})$  e

$$C(\mathcal{B}) \subset B(0, \sqrt{2}t) \Rightarrow \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\| \geq g_{12}(t).$$

onde  $\|\gamma_i(t)\| = \sqrt{2}t$ ,  $i = 1, 2$ . Logo,  $q \geq tord(\gamma_1, \gamma_2)$ .  $\therefore tord(\gamma_1, \gamma_2) = q$ .  $\square$

**Exemplo 7.1.** No exemplo 3.3, a superfície  $X$  que tem como link o nó trefoil não é normalmente mergulhada.

Uma pergunta: Superfícies algébricas com cone tangente plano em  $x_0$  e sem zonas excepcionais é normalmente mergulhado em  $x_0$ ? A resposta é falsa. Considere por exemplo, curva complexa  $X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; x^2 - y^3 = 0\}$ .  $X$  não é normalmente mergulhado em 0 e seu conjunto discriminante é 0. No caso de uma parametrização com posto 1 em 0, mostraremos abaixo que mesmo com discriminante não trivial, podemos ter projeção ortogonal fornecendo uma aplicação bi-Lipschitz.

**Observação 7.3.** Supondo  $\rho = S(P)$  curva regular não tangente ao eixo  $y$ , temos  $\rho(t) = (t, \psi(t))$ ,  $\psi$  analítica. Nesse caso, podemos tomar como sistema de coordenadas o par  $(x, y + \psi(x))$ . Nesse sistema de coordenadas, temos:  $\rho = \{(x, 0)\}$ .

**Teorema 7.2.** Seja  $X \subset \mathbb{R}^4$  superfície de posto 1,  $T_0X$  plano. Admita que  $\rho$  é suave e não tangente ao eixo  $y$  e além disso, existe uma constante  $C > 0$  de tal modo que  $\frac{\partial f_j(x, y)}{\partial y} \leq C \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y}$ ,  $j = 3, \dots, n$ . Então, projeção ortogonal é uma aplicação bi-Lipschitz e, em particular,  $X$  é uma superfície Lipschitz.

**Demonstração.**

Dada forma normal, temos que a desigualdade  $ordf_2(0, y) < ordf_3(0, y) < ordf_4(0, y)$  fornece projeção no cone tangente  $P(x, y) = (x, f_2(x, y))$ . E com mudança linear de coordenadas temos que,  $\rho = S(P) = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$ .

Afirmação 1.  $P$  é aplicação injetiva.

Prova. Suponha que existe  $q = P(x, u) = P(x, y)$ ,  $u \neq y$ . Lembrando que pelo teorema estrutura conica, temos que existe  $\epsilon_0 > 0$  de tal modo que para qualquer  $\epsilon$ , com  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$  temos:

1.  $f^{-1}(\mathbb{S}_\epsilon^3) = \tilde{S}_\epsilon^1$  é difeomorfo a  $S^1$ .
2.  $f|_{\tilde{S}_\epsilon^1} : \tilde{S}_\epsilon^1 \rightarrow \mathbb{S}_\epsilon^3$  e um mergulho, cujo  $\mathcal{A}$  classe é independente de  $\epsilon$ .

Agora, considere  $f$  restrito a curva fechada simples

$$\partial Q_{\epsilon_1, x_0} = \{(x_0, y); -\epsilon_1 \leq y \leq \epsilon_1\} \cup \{(x, \epsilon_1); -x_0 \leq x \leq x_0\} \cup \{(-x_0, y); -\epsilon_1 \leq y \leq \epsilon_1\} \cup \{(x, -\epsilon_1); -x_0 \leq x \leq x_0\}.$$

Observe que para  $x_0, \epsilon$  suficientemente pequeno, a curva

$$f|_{\partial Q_{\epsilon_1, x_0}} = \gamma_{x_0} \cup \gamma_{\epsilon_1} \cup \gamma_{-x_0} \cup \gamma_{-\epsilon_1}$$

tem as mesmas propriedades (1) e (2) acima (temos estrutura de variedade com cantos). Esta curva tambem representa link de  $X$ . Assim, o ponto duplo  $q$  pode ser visto como uma projeccao dos pontos  $f(x, y)$ ,  $f(x, u)$  no cone tangente a partir de  $\gamma_{x_0}$  (ou  $\gamma_{-x_0}$ ). Em particular,  $(x, y, u)$  é uma soluçao real de  $\frac{f_2(x, u) - f_2(x, y)}{u - y} = 0$ . Isso significa que existe  $c \in (y, u)$  tal que  $\frac{\partial f_2(x, c)}{\partial y} = 0$ . Então  $c = 0$ , visto que, por hipotese, temos que  $S(P) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} = 0\} = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$ . Seja  $P_v : \mathbb{R}^n \rightarrow E$  projeccao linear generica sobre  $E \in G_3(\mathbb{R}^4)$ . Genericidade, como estamos considerando até agora, significa que  $P_v(X) - \{0\}$  uma subvariedade imersa com apenas cruzamentos normais, se existirem. Com uma mudanca de coordenadas, se necessário, podemos admitir que  $P_v \circ f(x, y) = (x, f_2(x, y), f_3(x, y), 0)$ . Segue que

$$\{P_v \circ f(x, y), P_v \circ f(x, u)\} \in P_v(X) \cap H_x - \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3; x \in \mathbb{R}\}.$$
<sup>1</sup>

onde  $H_x$  é um hiperplano 2-dimensional  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$ . Isto implica que  $q \in P_v(X) \cap H_x - \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}$ . Agora, observe que  $L_0X = T_0X \cap S^3(0, \epsilon) = S_\epsilon^1$  (Link tangente de  $X$ ) está bem definido pequeno  $\epsilon$ . Por  $x = \frac{\epsilon}{2}$ , temos  $L_0X \cap H_x = \{p_1, p_2\}$ ,  $p_1 \in \mathbb{R}_+^2, p_2 \in \mathbb{R}_-^2$ . (podemos assumir  $q \in \mathbb{R}_+^2$  sem perda de generalidade). Seja  $r = \{tp_2; t \in I\} \subset T_0X = \{(X, Y, 0, 0)\}$ . Por definição de cone tangente, existe  $\gamma \subset X$  tal que  $\frac{\gamma'(0)}{\|\gamma'(0)\|} = \frac{p_2}{\|p_2\|}$ ,  $\gamma(0) = 0$  e para  $t$  pequeno,  $\gamma(t) \subset C_\delta(r) \subset \mathbb{R}_-^2$  (cone sobre  $r$ ). Tome uma parametrizacao  $P_v \circ f_x : [-L, L] \rightarrow P_v(X) \cap H_x$  restrita a um intervalo  $[y, y']$  de tal forma que  $P_v \circ f_x(y') = P_v \circ \gamma(y')$  and  $u \in [y, y']$  ( $P_v \circ f_x(u) = q$ ). Note que pela forma que parametrizamos o link temos os pontos  $P_v \circ f_x(y)$  e  $P_v \circ \gamma(y')$  conectados desta forma (i.e, dentro do hiperplano  $H_x$ ). Considere agora uma linha  $s$  ortogonal a  $T_0X$  passando por  $P_v \circ F(x, y)$ ,  $P_v \circ F(x, u)$  e  $q$ . Se por um acaso tais pontos sobre  $P^{-1}(q)$  forem pontos duplos transversais de  $P_v(X) \cap H_x$  façamos uma pequena variacão da linha  $s$  (i.e, uma outra linha  $s'$  tal que  $d(s, s') \ll \epsilon$ ). Desse modo, podemos admitir que  $P_v \circ F(x, y) \neq P_v \circ F(x, u)$ . Agora, observe que a curva plana (que representa um pedaço da projecção no *link*)  $P_v(X) \cap H_x$  é

<sup>1</sup>Se  $P(x, y) = P(x, u) = (x, 0)$   $y \neq u$ , desde  $f_2(0, y) \neq cte$ , temos que  $P|_{(y, u)} \neq (x, 0)$ . Neste caso, observa-se que existe  $c'$  tal que  $\frac{\partial f_2}{\partial y}(x, c') = 0$ , com  $c' \neq 0$  a contradicção.

dado por  $C(t) = P_v \circ f(x, t) = (x, f_2(x, t), f_3(x, t), 0)$ . Considere a interseção  $C \cap s$ . Temos  $C'(t) = (0, \frac{\partial f_2(x, t)}{\partial t}, \frac{\partial f_3(x, t)}{\partial t}, 0)$  e  $s \cap \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\} = \emptyset$ . Se  $\frac{\partial f_2(x, y)}{\partial t} = 0$  ou  $\frac{\partial f_2(x, u)}{\partial t} = 0$  já estamos com uma contradição com respeito a curva  $\rho$ ,  $u, y \neq 0$  ( $\rho = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$ ). Então suponhamos que seja  $\frac{\partial f_2(x, y)}{\partial t} \neq 0$ . Segue portanto que teremos um intervalo  $J$  tal que  $P_v(X) \cap H_x \cap H_1 \neq \emptyset$  onde  $H_x - s = H_1 \cup H_2$  com  $H_1 \cap \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\} = \emptyset$ . Portanto,  $C|_{y, y'}$  conecta  $C(y)$  a  $C(t) = P_v \circ \gamma(t)$ . Assim, existirá  $u'$  de tal modo que  $C(u') \cap s \neq \emptyset$  e conseqüentemente  $c' \in (y, u')$  tal que  $\frac{\partial f_2(x, c')}{\partial t} = 0$ . No entanto,  $c' \neq 0$  já que  $C(c') \in H_1$ , contradição. Logo  $P$  não deve ter pontos duplos, i.e,  $P$  é injetiva.

Afirmção 2.  $P^{-1}$  é Lipschitz

Temos  $P^{-1}(x, f_2(x, y)) = (x, f_2(x, y), f_3(x, y), f_4(x, y))$ . Então:

$$\begin{aligned} & \|P^{-1}(x, f_2(x, u)) - P^{-1}(x, f_2(x, y))\| = \\ & \|(x, f_2(x, u), f_3(x, u), f_4(x, u)) - (x, f_2(x, y), f_3(x, y), f_4(x, y))\| = \\ & \|f_2(x, u) - f_2(x, y), f_3(x, u) - f_3(x, y), f_4(x, u) - f_4(x, y)\| \end{aligned}$$

Escolhamos a norma do máximo:

$$\Rightarrow \|P^{-1}(x, f_2(x, u)) - P^{-1}(x, f_2(x, y))\|_{max} = \max\{\|f_2(x, u) - f_2(x, y)\|, \|f_3(x, u) - f_3(x, y)\|, \|f_4(x, u) - f_4(x, y)\|\}.$$

Por outro lado, no domínio de  $P^{-1}$ , temos:

$$\|(x, f_2(x, u)) - (x, f_2(x, y))\| = \|f_2(x, u) - f_2(x, y)\|$$

Afirmção: Existe  $\tilde{C} > 0$  tal que

$$\|f_j(x, u) - f_j(x, y)\| \leq \tilde{C} \|f_2(x, u) - f_2(x, y)\|$$

$j = 3, 4$ . Prova:

Seja  $u \neq y$ . Então existe uma constante  $\tilde{C} > 0$  numa vizinhança da origem  $(0, 0)$  tal que:

$$\frac{\frac{|(x, f_i(x, u)) - (x, f_i(x, y))|}{|u - y|}}{\frac{|(x, f_2(x, u)) - (x, f_2(x, y))|}{|u - y|}} \leq \tilde{C}, \quad (7.4)$$

Pois, do contrário considerando  $(u, y) \rightarrow (0, 0)$  teríamos

$$\frac{\frac{\partial f_i(x, y)}{\partial y}}{\frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y}} \rightarrow \infty \text{ quando } y \rightarrow 0.$$

Contrariando nossa hipótese. De outro modo, significa que

$$\begin{aligned} & \|P^{-1}(x, f_2(x, u)) - P^{-1}(x, f_2(x, y))\| \leq \tilde{C} \|f_2(x, u) - f_2(x, y)\| = \\ & \tilde{C} \|(x, f_2(x, u)) - (x, f_2(x, y))\|. \end{aligned}$$

No caso em que temos:

$$\|P^{-1}(x, f_2(x, y)) - P^{-1}(a, f_2(a, u))\|_{max} = \max\{|x - a|, \|f_2(x, y) - f_2(a, u)\|, \|f_3(x, y) - f_3(a, u)\|, \|f_4(x, y) - f_4(a, u)\|\}$$

Com  $x \neq a$ , o termo linear  $|x - a|$  mantém a desigualdade que desejamos.  $\square$

**Corolário 7.2.** Com as mesmas hipóteses, admita que  $\Delta = \{0, 0\}$ . Então  $X$  é uma superfície Lipschitz.

**Demonstração.**

Se  $P(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, f_2(x, y)) = (0, 0)$ . Então,  $x = 0$  and  $f_2(0, y) = 0$ . A última igualdade implica  $y = 0$ . Logo,  $\Delta = \{0, 0\} \Rightarrow S(P) = \{0, 0\}$ . Então suponha

$$P(x, y) = P(x, u) = q$$

$u \neq y$ . Temos  $\frac{\partial f_2(x, c)}{\partial y} = 0$  para algum  $c \in (y, u)$ . Segue que  $x = 0$  e  $c = 0$ . Agora, repetimos a prova como no teorema anterior para  $P(0, y)$  e  $P(0, u)$ .  $\square$

**Exemplo 7.2.** Seja  $X = f(\mathbb{R}^2, 0)$  superfície dada por

$$f(x, y) = (x, y(x^2 + y^2), y^4).$$

Então  $X$  é uma superfície Lipschitz.

Note que se retiramos a hipótese  $\frac{\partial f_j(x, y)}{\partial y} \leq C \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y}$  não teremos necessariamente uma superfície Lipschitz. Para ver isso, considere a superfície com parametrização  $F(x, y) = (x, y^3, xy^2)$ . Temos  $\frac{\partial f_3(x, y)}{\partial y} = 2xy$  e  $\frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} = 3y^2$ . Veja que  $X$  não é superfície Lipschitz, pois não é normalmente mergulhada. Com efeito, para cada  $x$ , temos no link a cúspide  $(y^3, xy^2)$ .

**Exemplo 7.3.** Se temos  $S(P)$  suave e tangente ao eixo  $y$ , podemos ter Largura e Altura iguais. De fato, considere o seguinte exemplo:

$$F(x, y) = (x, x^2y + \frac{2}{3}xy^3 - \frac{y^5}{5}, xy, y^{11})$$

Cone tangente em 0 é o plano  $xy$  e  $P(x, y) = (x, x^2y + \frac{2}{3}xy^3 - \frac{y^5}{5})$ . Temos que  $\frac{\partial F_2(x, y)}{\partial y} = (x + y^2)^2$ . Nesse caso,  $Largura(T) = \frac{3}{2} = Altura(T)$ . (ver figura abaixo para uma projeção em  $\mathbb{R}^3$  de tal superfície).

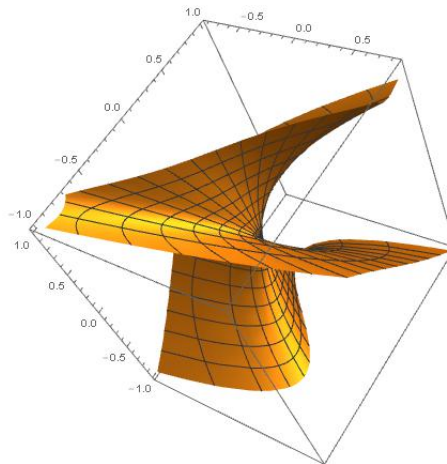


Figura 3: Largura igual a altura

## 7.1 Mergulho normal e trivialidade dos nós

Nesta seção, iniciamos investigação motivado por seguinte questão: Dada  $(X, 0) \subset (\mathbb{R}^4, 0)$  superfície parametrizada e suponha que  $X$  é normalmente mergulhado em 0. O que podemos dizer sobre tipo topológico do nó  $X \cap \mathbb{S}^3(0, \epsilon)$ ? Como fizemos anteriormente, iniciamos investigação em ordem de dificuldade considerando singularidades de posto 1 em 0. Sabemos, pelo corolário 3.2, que para parametrizações com 2-jatos na órbitas  $(x, y^2, xy, 0)$  e  $(x, y^2, 0, 0)$  todos os nós que aparecem no seu *link* são triviais e além disso, existem nós não triviais para superfícies parametrizadas na órbita  $(x, xy, 0, 0)$ . No teorema abaixo, mostramos que se acrescentarmos o ingrediente “regularidade métrica” para nós parametrizados na órbita  $(x, xy, 0, 0)$  obtemos trivialidade.

**Teorema 7.3.** Seja  $X = F(\mathbb{R}^2, 0)$  superfície parametrizada em  $\mathbb{R}^4$  tal que  $J^2(F) \in \mathcal{A}_2.(x, xy, 0, 0)$ . Se  $X$  é normalmente mergulhado em 0, então  $X \cap \mathbb{S}^3(0, \epsilon)$  é trivial, para  $\epsilon \leq \epsilon_0$ ,  $\epsilon_0$  raio de Milnor-Fukuda.

### *Demonstração.*

Inicialmente, notemos que  $X$  normalmente mergulhado e uma superfície de posto 1 em 0 implica que  $T_0X$  é plano (proposição 4.1). No que segue, precisaremos do seguinte lema:

**Lema 7.1.** Dado  $X \subset \mathbb{R}^4$  germe de uma superfície parametrizada de posto 1 em 0, existe uma mudança linear de coordenadas tal que a projeção

$$P(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1, z_2, z_3, 0)$$

é estável em  $X - \{0\}$  e a imagem do cone tangente de  $X$  em zero por esta projeção é o cone tangente de  $P(X)$ . Além disso, parametrização é uma forma normal.

Prova do lema:

Podemos escolher uma direção de projeção no espaço projetivo  $\mathbb{RP}^3$  que é transversal ao cone tangente de  $X$  em 0 e tal projeção é estável em  $X - \{0\}$ . Além disso, com mudança linear de coordenadas (que não altera estabilidade e transversalidade) podemos escolher coordenada  $z_1, z_2, z_3, z_4$  tal que o cone tangente tem equação  $(z_1, z_2, 0, 0)$ . Lembrando que forma normal de  $X$  pode ser escrito da seguinte forma:

$$(x, Q(x, y), P(x, y), R(x, y)),$$

onde  $ord_y(Q(0, y)) < ord_y(P(0, y))$  e  $ord_y(Q(0, y)) < ord_y(R(0, y))$ , onde  $F(x, 0) = (x, 0, 0, 0)$ . Como  $J^2(F) \in \mathcal{A}_2.(x, xy, 0, 0)$ , pela hipótese de mergulho normal e usando o teorema 7.1, temos que o monômio  $xy$  não aparece na função  $Q(x, y)$ .

Considere  $q = ord_y Q(0, y)$  and  $p = ord_y P(0, y)$ . Com mudança linear de coordenadas, podemos obter  $ord_y F_y(0, y) = ord_y Q(0, y) < ord_y P(0, y) < ord_y R(0, y)$ . Considere  $P_3 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $P_3(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1, z_2, z_3, 0)$  projeção genérica como no lema 7.1. Como vimos na seção 3.1, o conjunto  $P_3(X)$  fornece diagrama genérico do nó  $X \cap \mathbb{S}^3(0, \epsilon)$ , quando consideramos  $P_3(X) \cap \mathbb{S}^2(0, \epsilon)$ ,  $\epsilon$  suficiente pequeno. De fato, podemos escolher raio de Milnor-Fukuda tanto para o nó quanto para sua projeção. Os

pontos duplos transversais do diagrama do nó com respeito a esta projeção podem ser obtidos a partir das equações (ver Marar e Ballesteros 2009, Marar e Mond 1989 para detalhes):

$$\Delta P(x, y, u) = \frac{P(x, u) - P(x, y)}{u - y} = \Delta Q(x, y, u) = \frac{Q(x, u) - Q(x, y)}{u - y} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x + a(y^{p-1} + \dots + u^{p-1}) + \dots = 0$$

e

$$a_1(x) + a_2(x)(y+u) + a_3(x)(y^2 + uy + u^2) + \dots + b(y^{q-1} + y^{q-2}u + \dots + yu^{q-2} + u^{q-1}) + \dots = 0,$$

onde

$$Q(x, y) = a_1(x)y + a_2(x)y^2 + \dots + a_q(x)y^q + \dots$$

with  $a_q(0) \neq 0$ . Então, a solução inicial desta equação pode ser obtida considerando  $x = -a(y^{p-1} + \dots + u^{p-1}) = -aH_{p-1}(y, u)$ .

$$\Delta Q(-aH_{p-1}(y, u), y, u) = a_1(-aH_{p-1}(y, u)) + a_2(-aH_{p-1}(y, u))(y+u) + \dots + bH_{q-1}(y, u) + \dots = 0,$$

onde  $H_{q-1}(y, u) = y^{q-1} + y^{q-2}u + \dots + yu^{q-2} + u^{q-1}$ . Como  $q = \text{ord}_y Q(0, y) < \text{ord}_y P(0, y) = p$ , a parte inicial desta equação é:

$$H_{q-1}(y, u) = y^{q-1} + y^{q-2}u + \dots + yu^{q-2} + u^{q-1} = 0.$$

E como  $q - 1$  é par, esta equação não tem solução real  $\neq (0, 0, 0)$ . Portanto, a projeção  $P_3(X)$  não tem pontos duplos assim  $X \cap \mathbb{S}^3(0, \epsilon)$  é um nó trivial.

□

## APÊNDICE Sobre Geometria Definível:

**Definição 7.2.**  $X \subset \mathbb{R}^n$  é dito semialgébrico quando pode ser descrito da seguinte forma:

$$\{x \in \mathbb{R}^n; P_1(x) = 0, \dots, P_q(x) = 0 \text{ e } Q_1(x) > 0 \text{ e } \dots \text{ e } Q_l(x) > 0\},$$

onde as funções  $P_i$  e  $Q_j$  são funções polinomiais. Se  $P_i$  and  $Q_j$  são tomadas analíticas reais e localmente  $X$  é descrito como acima, dizemos que  $X$  é semi-analítico. (Para detalhes ver Coste 1999 e 2000).

Vejamos alguns exemplos:

- Os subconjuntos semialgébricos de  $\mathbb{R}$  consistem exatamente da união finita de pontos e intervalos.
- Considere  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  aplicação polinomial, onde

$$f(x_1, \dots, x_m) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$$

Então  $f^{-1}(A)$ ,  $f(B)$  é semialgébrico, para todo conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $B \subset \mathbb{R}^m$  semi-algébrico.

Um resultado que será útil é o seguinte:

**Proposição 7.2.** *Puiseux decomposition (ver Pawlucki 1984)* Seja  $f : [0, t_0] \rightarrow \mathbb{R}$  semi-algébrica;  $f(0) = 0$ . Então, existe  $\epsilon > 0$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$  and  $h : [0, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}$  analítica tal que

$$f(r) = r^{\frac{m}{n}} h(r^{\frac{1}{n}}), \forall r \in [0, \epsilon^n]$$

**Definição 7.3.** Considere  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $B \subset \mathbb{R}^m$  conjuntos semialgébricos. Uma aplicação  $f : A \rightarrow B$  é dita semialgébrica quando seu gráfico é um conjunto semialgébrico de  $\mathbb{R}^{n+m}$ .

**Teorema 7.4.** *(Tarski-Seindenberg)*

Seja  $B$  um subconjunto semialgébrico de  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  a aplicação projeção nas primeiras  $n$  coordenadas. Então  $\pi(B)$  é semialgébrico.

**Demonstração.** Ver Coste 1999, teorema 2.3.

**Teorema 7.5.** *(Lema de seleção da curva)* Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  semialgébrico e  $x_0 \in \overline{X}$ . Então existe  $\gamma : [0, \delta) \rightarrow \overline{X}$ ,  $\gamma((0, \delta)) \subset X$  com  $\gamma$  semialgébrica e  $\gamma(0) = x_0$ .

**Demonstração.** Ver Coste 1999, teorema 3.13.

**Teorema 7.6.** *(teorema de estrutura cônica local)* Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  semialgébrico,  $x_0 \in \overline{X}$  ponto não isolado. Então, existe  $\epsilon_0$  suficientemente pequeno tal que  $X \cap \mathbb{B}(x_0, \epsilon)$  é homeomorfo semialgébrico ao cone sobre o link  $X \cap \mathbb{S}^{n-1}(x_0, \epsilon)$ ,  $\epsilon \leq \epsilon_0$ .

**Demonstração.**

Ver Coste 1999, teorema 4.4.



## 8 CONCLUSÃO

No capítulo 3, de posse de um teorema de estrutura cônica local, mostramos como obter a partir da parametrização da superfície, um modelo genérico do diagrama do nó (ferramenta clássica em teoria dos nós). Mostramos também que o tipo topológico do nó é um invariante completo com respeito a  $C^0$ - $\mathcal{A}$ -equivalência de germes de aplicação de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^4$ . Além disso, apresentamos um teorema que fornece invariantes que detectam tipo topológico constante da 3-topologia dos nós ao longo de uma família. E ao final, de posse de tais ferramentas, obtemos de forma maximal quais das órbitas em aplicações de posto 1 tem estrutura topológica trivial.

No capítulo 4, mostramos como obter um conjunto de zonas de arcos minimais que explicita parte inicial da parametrização responsável pela descrição do cone tangente da superfície imagem. Parece natural que este modelo fornece uma versão análoga do que ocorre no caso algébrico complexo onde parte inicial homogênea gera cone tangente (o que não é verdade no caso de superfícies parametrizadas, em geral).

No capítulo 5, dispomos de um critério de arcos para o estudo da regularidade métrica (mergulho normal) de um conjunto definido por equações e inequações algébricas ou analíticas. Este critério pode ser visto como uma ferramenta em geometria métrica, análoga ao famoso lema de seleção da curva fortemente utilizado em geometria algébrica real. Além disso, tal critério associa uma coleção de expoentes (ordens de contato) revelando uma configuração métrica na vizinhança de dado ponto.

No capítulo 6, definimos largura e altura de superfícies e mostramos que mergulho normal implica que largura e altura são iguais. É esperado que esse resultado, além de detectar regularidade métrica, forneça uma coleção inicial de invariantes com respeito a geometria métrica (Lipschitz) de superfícies parametrizadas.

No capítulo 7, usamos critério de arcos (capítulo 5) e critério largura-altura (capítulo 5) para detectar tipo métrico de superfícies de posto 1. Vale observar que no caso de posto 1, podemos escrever parametrização de superfície como um desdobramento de uma curva  $\gamma_0 \subset \mathbb{R}^3$ , ou seja,  $f(x, y) = (x, \gamma_x(y))$  com  $f(0, y) = (0, \gamma_0(y))$ . Nesse caso, com as ferramentas descritas acima, obtemos que se  $\gamma_0$  tem cone tangente degenerado, então superfície-imagem de  $f$  não é normalmente mergulhada. E no que segue, notemos que o inverso não é verdade, isto é,  $\gamma_0$  suave não garante superfície normalmente mergulhada (ver teorema 7.1). Além disso, estabelecemos uma condição sobre polares das componentes coordenadas para que projeção sobre cone tangente seja uma aplicação bi-Lipschitz.

Ainda no capítulo 7, provamos que se  $X$  é normalmente mergulhado dentro da órbita  $(x, xy, 0, 0)$  então o link de  $X$  é um nó trivial. Vale ressaltar que se hipótese de mergulho normal é retirada temos, de fato, onde está grande parte da topologia não

trivial de superficies parametrizadas.

## REFERÊNCIAS

- ARNOLD, V.I.; VARCHENKO, A. N.; GUSEIN-ZADE, S.M. *Singularities of differentiable maps I*. Birkhauser, 1989.
- BALLESTEROS, Nuno. J.J. *Combinatorial models in the topological classification of singularities of mappings*. Brasil-Mexico second meeting on singularities, 2015, 1-39 p.
- BIRBRAIR, L. bi-Lipschitz classification of 2-dimensional semialgebraic sets. *Houston Journal of Mathematics*, v. 25, n. 3, p. 453–472, 1999.
- BIRBRAIR, L.; FERNANDES, A. Metric theory of semialgebraic curves. *Rev. Mat. Complut.*, p. 369–382, 2000.
- BIRBRAIR, L.; FERNANDES, A.; GRANDJEAN, V. On the bi-Lipschitz contact equivalence of function-germs in  $\mathbb{R}^2$ . *Preprint*, <http://arxiv.org/pdf/1406.2559v2.pdf>, 2014.
- BIRBRAIR, L.; MOSTOWSKI, T. Normal embeddings of semialgebraic sets. *Michigan Math. J.*, p. 125–132, 2000.
- BIRBRAIR, L. et al. Lipschitz regular complex algebraic sets are smooth. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 144, n. 3, p. 983–987, 2016.
- BRIESKORN, E; KNÖRRER, H. *Plane Algebraic Curves*, Birkhäuser. 1986.
- BROWN, M. A proof of the generalized Schoenflies theorem. *Bull. A. M. S.*, v. 66, p. 74–76, 1960.
- CHIRKA, E.M. *Complex analytic sets*. Kluwer Academic, 1989.
- CONWAY, C.McA.; J.H; GORDON. A group to classify knots. *Bull. London Math. Soc.*, p. 84–86, 1975.
- COSTE, M. *An Introduction to o minimal Geometry*. Dottorato di ricerca in matematica / Università di Pisa, Dipartimento di Matematica. Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali, 1999.
- COSTE, M. *An Introduction to Semialgebraic Geometry*. Dottorato di ricerca in matematica / Università di Pisa, Dipartimento di Matematica. Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali, 2000.
- CROWELL, R.H.; FOX, R.H. *Introduction to knot theory*. 1963.

- FERNANDES, A. Topological equivalence of complex curves and bilipschitz homeomorphisms. *Michigan Math. J.*, v. 51, p. 593–606, 2003.
- FOX, R.H; MILNOR, J.W. Singularities of 2-spheres in 4-space and cobordism of knots. *Osaka J. Math.*, v. 3, p. 257–267, 1966.
- FUKUDA, T. Local topological properties of differentiable mappings I. *Dissertationes Math.*, v. 65, n. 2, p. 227–250, 1981.
- GIBSON, C.G. *Singular points of smooth mappings*. Research Notes in Math, 1979.
- GORDON, C. McA.; LUECKE, J. Knots are determined by their complements. *Amer. Math. Soc. (N.S.)*, v. 1, p. 83–87, 1989.
- GREUEL, G.M. Constant Milnor number implies constant multiplicity for quasihomogeneous singularities. *Manusc. Math.*, v. 56, p. 159–166, 1986.
- JONG, T.de; PFISTER, G. *Local analytic geometry. Basic theory and applications*. Advanced Lectures in Mathematics., 2000.
- LEE, J. *Introduction to smooth manifolds*. Springer, 2003.
- MARAR, W.L.; MOND, D. Multiple point schemes for corank 1 maps. *J. London Math.Soc.*, v. 39, p. 553–567, 1989.
- MARAR, W.L.and BALLESTEROS Nuno J.J. The doodle of a finitely determined map germ from  $\mathbb{R}^2$  to  $\mathbb{R}^3$ . *Adv. Math.*, p. 1281–1301, 2009.
- MENDES, R; BALLESTEROS, Nuno J.J. Knots and the topology of singular surfaces in  $\mathbb{R}^4$ . *Contemporary Mathematics*, v. 675, 2016.
- MILNOR, J. *Morse Theory*, v. 51. Princeton Univ. Press, Princeton, 1962.
- MILNOR, J. Differential topology. T.L. Saaty (Ed.), *Lectures on Modern Mathematics II*, Wiley, p. 165–182. 1964.
- MOND, D. Some remarks on the geometry and classification of germs of maps from surfaces to 3-space. *Topology*, v. 26, p. 361–383, 1987.
- MONTALDI, J. *Singularities, Bifurcations and Catastrophes*. University of Manchester, 2009, 1-169 p.
- MORRIS, W. *Differential topology*. Graduate text in mathematics, 1976.
- MOYA-PEREZ, .A.; BALLESTEROS, Nuno. J.J. Topological classification of corank 1

map germs from  $\mathbb{R}^3$  to  $\mathbb{R}^3$ . *Rev. Mat. Complut.* 27, v. 27, n. 2, p. 421–445, 2014.

MOYA-PEREZ, J.A; BALLESTEROS, Nuno. J.J. The link of finitely determined map germ from  $\mathbb{R}^2$  to  $\mathbb{R}^2$ . *J. Math. Soc. Japan*, v. 62, n. 4, p. 1069–1092, 2010.

NAKA, I. On topological types of polynomial mappings. *Topology* 23, v. 23, n. 1, p. 45–66, 1984.

PAWLUCKI, A. Le théorème de Puiseux pour une application sous-analytique. *Bull. Polish Acad. Sci. Math*, v. 32, n. 9-10, p. 555–560, 1984.

ROLFSEN, D. *Knots and Links*. Publish or Perish, Houston,, 1990.

SAMPAIO, J. E. Bi-Lipschitz homeomorphic subanalytic sets have bi-Lipschitz homeomorphic tangent cones. *Selecta Math.(N.S.)*, v. 22, n. 2, p. 553–559, 2016.

SOTOMAYOR, J. *Singularidades de aplicações diferenciáveis*. III Escola Latino Americana de Matemática, 1976.

SUMNERS, D.W. Invertible Knot Cobordisms. *Com. Math. Helv.*, v. 46, p. 240–256, 1975.

THOM, R. Local topological properties of differentiable mappings. *Oxford Univ. Press*, p. 191–202, 1964.

WALDHAUSEN, F. On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large. *Ann. Math.*, v. 87, p. 56–88, 1968.

WALL, C.T.C. Finite determinacy of smooth map-germs. *Bull. London Math. Soc.*, v. 13, p. 481–539, 1981.

WHITNEY, Hassler. The singularities of a smooth n-manifold in  $(2n-1)$ -space. *Ann. of Math.*, v. 45, n. 2, p. 247–293, 1944.

WHITNEY, Hassler. Tangents to an analytic variety. *Annals of mathematics*,, v. 81, n. 3, p. 496–549, 1965.