



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

GILVAN FERREIRA SILVA

OSCILADOR HARMÔNICO CALDIROLA-KANAI E APLICAÇÃO DA TEORIA DA  
INFORMAÇÃO DE FISHER E ENTROPIA DE SHANNON

FORTALEZA – CE

2017

GILVAN FERREIRA SILVA

OSCILADOR HARMÔNICO CALDIROLA-KANAI E APLICAÇÃO DA TEORIA DA  
INFORMAÇÃO DE FISHER E ENTROPIA DE SHANNON

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Ilde Guedes da Silva.

FORTALEZA – CE

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- S58o Silva, Gilvan Ferreira.  
Oscilador Harmônico de Caldirola-Kanai e Aplicação da Teoria da Informação de Fisher e Entropia de Shannon / Gilvan Ferreira Silva. – 2017.  
61 f. : il.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2017.  
Orientação: Prof. Dr. Ilde Guedes da Silva.  
Coorientação: Prof. Dr. Diego Ximenes Macedo.
1. Oscilador de Caldirola-Kanai. 2. Método dos Invariantes. 3. Entropia de Shannon e Informação de Fisher. I. Título.

CDD 530

---

GILVAN FERREIRA SILVA

OSCILADOR HARMÔNICO CALDIROLA-KANAI E APLICAÇÃO DA TEORIA DA  
INFORMAÇÃO DE FISHER E ENTROPIA DE SHANNON

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em: 07/06/2017.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Dr. Ilde Guedes da Silva (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Dr. Marcony Silva Cunha  
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dedico este trabalho àqueles que me permitem o exercício do maior sentimento humano – o amor incondicional. Assim, é dedicado ao Mário José Rodrigues Ferreira e Lídia Barbosa Silva, Franciana Maria Lopes de Paiva, Ana Clara Paiva Mello, Marcos Ferreira de Paula Miranda, Luíza Ferreira de Paula Miranda, Felipe Ferreira de Paiva, respectivamente, meus pais, esposa e filhos.

# AGRADECIMENTOS

Inicialmente, agradeço a Deus pela proteção, saúde e energia para trilhar o curso de pós-graduação. Aos meus pais, pelo ensino e estrutura axiológica transmitida da infância à maturidade. Ao meu orientador, pela paciência e condução sábia, serena e eficaz na execução do trabalho. Ao amigo Diego Ximenes Macedo, pela coorientação desse trabalho, dividindo seus saberes, indicando artigos, sugerindo leituras complementares que fortaleceram as indicações do orientador. Aos professores e amigos que trilharam juntos nas cadeiras obrigatórias e optativas que integram o curso e agregaram conhecimento para execução do trabalho. Aos funcionários do Departamento de Física, em especial àqueles da secretaria de pós-graduação da Física, pelo tratamento sempre cortês e tempestivo dispensado às minhas demandas naquele setor. À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

“A utopia está lá no horizonte. Aproximo-me dois passos, ela se afasta dois passos. Caminho dez passos e o horizonte corre dez passos. Por mais que eu caminhe, jamais alcançarei. Para que serve a utopia? Serve para isso: para que eu não deixe de caminhar.” Eduardo Galeano – Jornalista e escritor

# RESUMO

Nesta dissertação, fazemos um breve histórico dos elementos que a compõem, a saber, Osciladores Harmônicos Quânticos com dependência temporal explícita; Método dos Invariantes de Lewis e Riesenfeld associado com a técnica de Hartley e Ray; Entropia de Shannon e Teoria da informação de Fisher. Nessa descrição introdutória, buscamos apresentar uma visão processual dos conhecimentos científicos. Ainda, na introdução, apresentamos as motivações para a execução do trabalho acadêmico e sua organização. Em capítulo posterior, descrevemos o formalismo de Lewis e Riesenfeld aplicados a osciladores que têm uma dependência temporal explícita. Para melhor descrever, dividimos o capítulo em seções nas quais definimos o Invariante, encontramos seus autoestados, relacionamos os autoestados com a solução de Schrödinger e aplicamos o formalismo ao oscilador com dependência temporal que, para o nosso trabalho, foi o conhecido Oscilador de Caldirola-Kanai com  $M(t) = me^{\gamma t}$ . Encontramos as soluções na coordenada da posição e, após, trabalhamos com a função de onda do estado fundamental. No capítulo seguinte, determinamos a incerteza. Para tanto, utilizamos a álgebra de operadores criação e destruição, tão conhecida pelos físicos. Encontramos a entropia de Shannon e a Informação de Fisher. Por fim, uma análise dos resultados analíticos e gráficos, estabelecendo uma comparação entre as técnicas.

**Palavras-chave:** Oscilador de Caldirola-Kanai. Método dos Invariantes. Entropia de Shannon e Informação de Fisher.



# ABSTRACT

In this dissertation, we give a brief historical overview of the elements that form it, namely Quantum Harmonic Oscillators with explicit temporal dependence; Lewis & Riesenfelds Method of the Invariants associated with Hartley & Rays technique; Shannon's entropy and Fisher's information theory. In this introductory description, we seek to present a procedural view of scientific knowledge. Also, in the introduction, we present the motivations for the execution of the academic work and its organization. In a later chapter, we describe Lewis and Riesenfeld's formalism applied to oscillators that have an explicit temporal dependency. To better describe it, we divide the chapter into sections in which we define the Invariant, find its self-states, relate the self-states with the Schrödinger's solution, and apply the formalism to the time-dependent oscillator which, in our work, was the well-known Caldirola-Kanai with  $M(t) = me^{\gamma t}$ . We find the solutions in the coordinate of the position and, after that, we work with the wave function of the ground state. In the following chapter, we determine the uncertainty. To do so, we use the creation and destruction algebra of operators, So known by physicists. We find the Shannon's entropy and Fisher's information. We do an analysis of the analytical and graphical results, establishing a comparison between these techniques.

**Keywords:** Caldirola-Kanai Oscillator. Method of Invariants. Shannon's entropy and Fisher's information.

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

3.1	Densidade de probabilidade da posição, $t = 1$ ; $\gamma = 0,6$ linha cheia preta; $\gamma = 1,2$ linha pontilhada preta; $\gamma = 1,8$ linha tracejada preta. . . . .	44
3.2	Densidade de probabilidade do momento, $t = 1$ ; $\gamma = 0,6$ linha cheia preta; $\gamma = 1,2$ linha pontilhada preta; $\gamma = 1,8$ linha tracejada preta. . . . .	45
3.3	Incerteza da posição, $\gamma = 0,6$ linha cheia preta; $\gamma = 1,2$ linha pontilhada preta; $\gamma = 1,8$ linha tracejada preta. . . . .	48
3.4	Incerteza do momento, $\gamma = 0,6$ linha cheia preta; $\gamma = 1,2$ linha tracejada preta; $\gamma = 1,8$ linha tracejada vermelha. . . . .	48
3.5	Produto da incerteza $\gamma = 0,6$ e $\Omega = 0,95$ . . . . .	49
3.6	Produto das Incertezas em relação a $\gamma$ . . . . .	49
3.7	Informação de Fisher na posição, $\gamma = 0,6$ linha cheia preta; $\gamma = 1,2$ linha pontilhada preta; $\gamma = 1,8$ linha tracejada preta. . . . .	50
3.8	Informação de Fisher no momento, $\gamma = 0,6$ linha cheia preta; $\gamma = 1,2$ linha pontilhada preta; $\gamma = 1,8$ linha tracejada preta. . . . .	51
3.9	Entropia de Shannon na coordenada da posição . . . . .	52
3.10	Entropia de Shannon na coordenada do momento . . . . .	52
3.11	Somatório das Entropias de Shannon em linha vermelha e $\ln \pi + 1$ tracejada	53
3.12	Soma Entrópica em relação a $\gamma$ . . . . .	53

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>13</b>
1.1	Oscilador Harmônico . . . . .	13
1.2	Método dos Invariantes . . . . .	15
1.3	Entropia de Shannon e Teoria da Informação de Fisher . . . . .	16
1.4	Motivação do Trabalho e Organização da Dissertação . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Cap. 2 Método de Lewis e Riesenfeld</b>	<b>21</b>
2.1	Definição do Operador Invariante . . . . .	21
2.2	Autoestados e Autovalores do operador Invariantes . . . . .	23
2.3	Relação entre autoestados do operador invariante e as soluções da equação de Schrödinger . . . . .	24
2.4	Aplicação do Método de Lewis e Riesenfeld a um Oscilador dependente do tempo . . . . .	26
2.4.1	Autoestado e autovalores do Invariante $I(t)$ . . . . .	29
2.4.2	Definição das fases de $I(t)$ . . . . .	31
2.4.3	Estados quânticos . . . . .	35
2.5	Aplicação do Método ao Oscilador de Caldirola-Kanai . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Cap. 3 Incerteza, Entropia de Shannon e Informação de Fisher</b>	<b>40</b>
3.1	Incertezas no Método algébrico de operadores . . . . .	40
3.2	Informação de Fisher . . . . .	42
3.2.1	Cálculo da informação de fisher $F_q$ . . . . .	45
3.2.2	Cálculo da informação de Fisher $F_p$ . . . . .	46
3.3	Entropia de Shannon . . . . .	47
3.3.1	Cálculo da Entropia de Shannon $S_q$ . . . . .	47

3.3.2	Cálculo da Entropia de Shannon $S_p$ . . . . .	47
3.4	Resultados e Discussões . . . . .	48
3.4.1	Do Método Algébrico de Operadores . . . . .	48
3.4.2	Da Informação de Fisher . . . . .	50
3.4.3	Da Entropia de Shannon . . . . .	52
4	Cap. 4 Considerações finais e Perspectivas	54
	<b>Referências</b>	<b>56</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Inaugura-se esse trabalho acadêmico com breves apresentações históricas dos conceitos e teorias que o compõem. Tal decisão não tem a finalidade de escapar da apresentação focada no resultado final, e, sim, valorizar o processo de construção dos conceitos e teorias científicas. A título de exemplo, no estudo da mecânica, não se pode ignorar as contribuições de Galileu Galilei (1564-1642), exigindo-se uma leitura processual e histórica e não uma visão, apenas, no resultado final. O destacado por Butterfield [1]:

[...] não é suficiente ler Galileu com os olhos do século XX ou interpretá-lo em termos modernos. Só podemos compreender o seu trabalho se soubermos algo acerca do sistema que pôs em causa e devemos conhecer esse sistema, independentemente das afirmações que os seus adversários faziam sobre ele. Em todo caso, não basta descrever e expor descobertas. É necessário investigar mais profundamente os processos históricos e aprender algo acerca da interdependência dos acontecimentos, assim como esforçarmo-nos por compreender os homens que pensavam de uma maneira diferente da nossa. Não se podem fazer grandes progressos se pensarmos nos estudos mais antigos apenas como exemplo de uma ciência deficiente, ou se imaginarmos que só os progressos conseguidos pelos cientistas recentes são dignos da nossa atenção. (BUTTERFIELD, 1949, p.11)

### 1.1 Oscilador Harmônico

A literatura aponta como a gênese dos estudos do oscilador harmônico (OH) o século XVIII [2], o trabalho realizado em 1739 pelo físico e matemático Leonhard Euler (1707-1783). Sua atividade intelectual nessa oportunidade teve o foco a resolução da

equação diferencial que descreve o movimento harmônico, assim, o escopo foi puramente matemático. Em momento seguinte, já no século XIX, aplicou-se ao OH a equação de Euler-Lagrange que, para sistemas conservativos, apresentava uma certa simplicidade, pois seu formalismo tem base escalar frente ao formalismo vetorial de Newton. Porém para sistemas não conservativos a questão não se apresentava de forma tão simples.

Em 1878 [2], Lord Rayleigh incluiu uma função dissipativa escolhida de forma conveniente na equação de Euler-Lagrange de forma que se alcançava a equação que descrevia o oscilador harmônico amortecido, no entanto, sem aplicar nenhum princípio variacional, fato que se apresentou como um problema.

O problema de sistemas não conservativos, segundo a literatura, fora inicialmente tratado por Bateman [3], que construiu uma lagrangeana com dependência temporal explícita para descrever o oscilador harmônico amortecido. A seguir, no campo da mecânica quântica para sistemas dissipativos, temos o trabalho feito por Caldirola e Kanai, introduzindo um hamiltoniano que a literatura nomeia de hamiltoniana Caldirola-Kanai. Porém, nessa descrição houve o inconveniente conceitual da violação do princípio da incerteza de Heisenberg [4].

Para tais sistemas dissipativos, conforme descrito por Ikot [5], para abordagem canônica, têm-se duas representações: Caldirola-Kanai (CK) que se apresenta como um oscilador unidimensional amortecido aberto, constituindo-se de massa com a variação exponencial no tempo; Bateman-Feshbach-Tikochinsky (BFT) que consiste de um oscilador amortecido e outro amplificado, sendo um sistema fechado que conserva a energia através da transferência da energia dissipada no amortecido para o amplificado.

Após um lapso temporal de utilização do modelo de CK e BFT, Ray [6] afirma que o hamiltoniano é, na realidade, um oscilador harmônico simples com a massa variando exponencialmente com o tempo e com seu valor médio constante, dessa forma não podendo representar um oscilador amortecido. Em trabalho sobre o tema da dissipação, Aguiar e Guedes [7] aduzem a relação entre a energia mecânica do sistema e a hamiltoniana da forma  $E = He^{-\gamma t}$ . Ainda, Ray concluiu que o momento canônico é diverso do momento cinético.

Posteriormente, Herrera [8] apresentou um novo princípio variacional de hamilton, onde se acrescenta uma função exponencial no tempo. Nesse novo modelo, alcançaram-se as equações que descrevem o oscilador harmônico amortecido e o valor médio

do hamiltoniano decresce no tempo. Assim, pode-se descrever movimentos dissipativos por esse hamiltoniano.

No mesmo período, Kobe, Reali e Sieniutycz [9] demonstraram que a igualdade entre energia e o hamiltoniano tem validade apenas para sistemas conservativos, pois, não havendo uma justificativa boa para o acréscimo da função exponencial, há um indicativo de que o princípio variacional não esteja correto, assentando que, em sistemas dissipativos, as duas quantidades devem ser diferentes. Eles chegaram a esse resultado usando o Lagrangeano de Kanai-Caldirola-Bateman (LKCB), e, por isso, essa demonstração não é completamente satisfatória.

Conforme demonstrado acima, os osciladores harmônicos e os sistemas dissipativos continuam sendo objeto de estudo até hoje e, é um problema que motiva a elaboração de vários trabalhos acadêmicos, apenas para citar alguns destacamos os de Michelin [10], de Macedo [11], de Bessa [12], de Krumreich [13] e de Longhi [14].

## 1.2 Método dos Invariantes

Outro olhar e conseqüentemente outro procedimento sobre o sistema com dependência temporal explícita, com escopo de buscar resultados para o problema, consiste em encontrar o Hamiltoniano ligado ao sistema, quantizá-lo e, a seguir, resolver a equação de Schrödinger. Os que iniciaram esse procedimento foram Caldirola e Kanai, porém, como descrito, há o problema da violação do princípio da Incerteza de Heisenberg quando aplicado para descrever o oscilador harmônico amortecido.

Em trabalho, ainda, sobre sistemas dissipativos, Lewis [15] demonstrou que há um invariante, ou seja, uma constante do movimento, apresentado no trabalho de Ermakov, em 1880, que descreveu o sistema de um oscilador harmônico dependente do tempo. Tal invariante fora denominado pela literatura de invariante de Ermakov-Lewis.

Em Estudo posterior, Lewis e Riesenfeld [16] construíram uma teoria geral de invariantes dependentes do tempo. O método se apresenta em encontrar uma relação entre os autoestados do invariante e as soluções da equação de Schrödinger. Aplicaram o invariante de Ermakov-Lewis ao oscilador harmônico com uma frequência dependente do tempo. Porém, na busca pela equação de onda do oscilador, faz-se necessário a resolução da equação de autovalor para o operador invariante, tarefa que não se apresenta como de

fácil solução.

Para contornar tal dificuldade, Hartley e Ray (HR) [17] aplicaram uma transformação unitária na equação de autovalor para o operador invariante e a reduziram a uma equação de Schrödinger independente do tempo. O sistema que Hartley e Ray estudaram foi o oscilador harmônico simples com frequência dependente do tempo e massa unitária.

Esse método vem sendo aplicado em vários estudos acadêmicos, dentre os quais, citamos Pedrosa [18], Dey [19], Bertin, M. C. et al [20], Ibarra-Sierra, V. G. et al [21]. Esses exemplos mostram que o método tem despertado interesses múltiplos. No próximo capítulo, explicitaremos a descrição desse método.

### 1.3 Entropia de Shannon e Teoria da Informação de Fisher

A conexão entre a informação e a física quântica não é nova, os debates são de tempos bem recuados, ganhando destaque a discussão entre Einstein e Bohr sobre a interpretação da mecânica quântica no final na década de 1920. No entanto, os debates se alteraram de forma significativa com a criação do campo de informação quântica na década de 1990.

O tratamento da informação quântica tem como um dos marcos, quanto à teoria quântica, as discussões conceituais e as reflexões advindas do experimento sugerido por Einstein, Podolsky e Rosen em 1935, e do teorema de Bell de 1964. Surge o primeiro grande resultado, qual seja, os estados quânticos não podem ser copiados com perfeita fidelidade, conforme expuseram Wootters, Zurek e Dieks em 1982 [46].

Tal pesquisa fora a resposta de um desafio lançado por Nick Herbert no trabalho escrito em 1980 que propunha um mecanismo de enviar sinais superluminais utilizando um emaranhamento dos estados. Tais trabalhos estabelecem uma distinção essencial entre informação clássica e informação quântica, marcando uma limitação relacionada às técnicas clássicas de correção de erros.

Para Einstein, a teoria da informação é incompleta, pois a informação sobre os estados físicos por ela descritos careciam de informação. Já para Bohr, a completude da teoria quântica era um falso problema, pois ele interpretava a teoria quântica como



adequada e necessária, proclamando uma verdadeira revolução na física. Destacamos os textos abaixo que explicitam as idéias de cada um retirada de [22]:

Eu estou, de fato, firmemente convencido que o caráter essencialmente estatístico da teoria quântica contemporânea deve ser atribuído exclusivamente ao fato que esta teoria opera com uma descrição incompleta dos sistemas físicos. (Einstein, 1982, p. 666)

[...]a informação referente ao comportamento de um objeto atômico obtida sob condições experimentais definidas pode ser adequadamente caracterizada como complementar a qualquer informação sobre o mesmo objeto obtida por algum outro arranjo experimental excluindo os requisitos das primeiras condições. Embora tais tipos de informação não possam ser combinadas em uma única representação por meio de conceitos ordinários, efetivamente elas representam aspectos igualmente essenciais de qualquer conhecimento do objeto em questão que possa ser obtido nesse domínio. (Bohr, 1987, p. 26).

Em destaque acima, verifica-se que os debates focam na questão da completude da teoria e a noção de “informação”. O quadro se altera com o trabalho de David Bohm na década de 1950 que sugeriu uma interpretação causal, ou seja, alternativa à complementariedade. O pouco interesse no tema se explica pelo fato de a maioria dos físicos professarem uma visão realista da teoria quântica.

Uma grande contribuição para o tema, veio na década de 40, de Claude Shannon, cuja teoria da informação se teve acesso. A entropia introduzida por Claude Shannon foi inicialmente empregada para o estudo dos limites fundamentais das operações de tratamento de sinais, conforme apontado em [23].

Em 1948, focou-se no problema da melhor forma de codificar uma informação que um remetente deseja transmitir. Neste trabalho fundamental, ele usou ferramentas da teoria da probabilidade, desenvolvidas por Norbert Wiener, que estavam em seus estágios iniciais de serem aplicadas a teoria das comunicações na época. Shannon desenvolveu a entropia da informação como uma medida de incerteza em uma mensagem.

Tempos depois, surgem trabalhos aplicando na física como os de Aquino e *et al* [24]. Na mecânica quântica, tal entropia fora definida como incerteza entrópica relacionada à posição da partícula e ao momento. Dessa forma, apresentava-se como uma

maneira nova de se determinar a relação de incerteza das grandezas quânticas, apresentada em [25].

O cálculo da entropia de Shannon e a incerteza entrópica teve suas aplicações, inicialmente, nos sistemas de massa constante. Pode-se citar os trabalhos de Yanez [26] determinando a entropia de Shannon da posição e momento para o oscilador isotrópico e o átomo de hidrogênio; o trabalho de Majernik *et al* [27] onde se trabalhou com o oscilador harmônico e se obteve a entropia de Shannon para posição e momento e as correspondentes incertezas entrópicas dos estados quânticos em função da energia; Além disso, que existem estados próprios que exibem compressão na entropia da informação de posição; e o trabalho de DONG *e tal* [29] que obtiveram as entropias de Shannon e os desvios-padrão de uma partícula em um poço potencial tangente simétrico.

Após, surgiram aplicações para outros sistemas, tais como no trabalho de Laguna *et al* [30] que se analisou a correlação de posição-momento no átomo de Moshinsky; no trabalho de Sun *et al* [31] que é avaliada a entropia de Shannon num sistema de um potencial trigonométrico assimétrico de Rosen-Morse para o estado fundamental e os primeiros estados excitados; no trabalho de Rudnicki *et al* [32], que teve o escopo nos sistemas quânticos em potenciais arbitrários de simetria esférica em D-dimensional; no trabalho de Majernik *et al* [33], aplicando a entropia tipo Shannon na física estatística e quântica;

Anteriormente a Shannon, Fisher apresentou um método para medir o conteúdo de informação contínua, para tanto, utilizou a distribuição estatística da teoria de probabilidade clássica. Nos idos dos anos 80, Wootters apontou que a medida de informação de Fisher e a mecânica quântica compartilham um formalismo comum e ambas relacionam as probabilidades com os quadrados das funções contínuas, conforme demonstrado Pennini [34].

Tal trabalho estabeleceu uma comparação entre a aproximação clássica - arma da física de muito importância para uma compreensão intuitiva da física subjacente em soluções numéricas caras da equação de Schrödinger- e a aplicação do tratamento estatístico de natureza quântica.

A informação de Fisher tem se apresentado como um procedimento de medição eficiente usado para estimar limites quânticos finais. Ela também mede a entropia do sistema (grau de desordem) e determina as relações de incerteza do sistema quântico.

Vários trabalhos acadêmicos tem aplicado tal procedimento, citamos os de Romera *et al* [35] que aplicam o procedimento num sistema de uma partícula num potencial central e [36] que derivaram a relação de incerteza para a informação de Fisher de sistemas de partículas únicas D-dimensional com potenciais centrais; no trabalho de Omiste *et al* que aplicam em sistema de potencial de Coulomb em meia linha e consideraram o método de Fisher como mais adequado para obtenção da incerteza tanto para posição, como para o momento.

Como destacado acima, a entropia de Shannon e a teoria da informação de Fisher têm apresentado aplicações variadas na física e em sistemas variados. Nessa dissertação, aplicamos os procedimentos - entropia de Shannon e informação de Fisher - ao oscilador de Caldirola-Kanai cujos resultados estão apresentados em capítulo específico à frente.

## 1.4 Motivação do Trabalho e Organização da Dissertação

Conforme destacado nos tópicos anteriores, o oscilador harmônico quântico é um sistema de muito interesse acadêmico. Isso se dá por apresentar uma solução exata, solúvel e ter aplicações em grande parte das áreas da física. Dentre essas áreas, podemos citar as vibrações dos átomos nos sólidos e circuitos elétricos, vibrações elásticas em membranas e vibrações em moléculas do ar. Esse aspecto desse sistema, apresenta-se como uma primeira motivação para escolha do oscilador harmônico como objeto desse trabalho acadêmico.

Na sequência da definição do objeto, escolhemos um oscilador que apresenta uma dependência temporal explícita, pois tal problema representa um modelo com solução exata e aplicações na óptica quântica, realizado por Colegrave e Abdalla em [38]; na descrição da intensidade do campo eletromagnético numa cavidade, feito por Brown em [39]; em estudos de gravitação, utilizando osciladores com dependência temporal para estudar universos em expansão por Lemos em [40].

Finalizando a escolha do escopo do trabalho, entramos em contato com o trabalho realizado por GHASEMI em [41], que aplicou a entropia de Shannon e a teoria da informação de Fisher ao oscilador isotônico, explicitando os resultados numéricos e

graficamente. Em mergulho maior no tema, Nascimento e Guedes em [42] determinaram as entropias de Shannon e a informação de Fisher num oscilador quântico com massa dependente da posição. Dessa forma, restou configurado o objetivo do trabalho, qual seja, determinação da entropia de Shannon e teoria de Informação de Fisher para o oscilador quântico de Caldirola-Kanai.

No tocante à organização da dissertação, no capítulo 2, descreve-se o método dos invariantes de Lewis e Riesenfeld, seguindo os passos dos trabalhos de Pedrosa [18], de Silva [51], de Lima [49]. Nessa descrição, dividimos em sessões para melhor descrever o formalismo utilizado.

No capítulo 3, apresentamos as análises, demonstrando as incertezas, entropias e informação analítica e graficamente aplicadas ao sistema de Caldirola-Kanai, objeto de estudo dos trabalhos [43], [44] e [45]. Ao final, no capítulo 4, expressa-se as considerações finais e perspectivas.

Cabe salientar que a literatura científica acerca de sistemas quânticos dependentes do tempo é muito extensa. Por mais que tenhamos nos esforçado para citá-las nas referências desta dissertação, certamente algumas foram omitidas.

# Capítulo 2

## Cap. 2 Método de Lewis e Riesenfeld

Nesse capítulo, será descrito o método de Lewis e Riesenfeld (LR) com a obtenção do operador invariante; o procedimento para encontrar os seus autoestados e autovalores; a relação desse autoestados e autovalores do operador invariante e as soluções da equação de Schrödinger e, ao final do capítulo, uma aplicação do método para o oscilador de Caldirola- Kanai. Seguiremos de perto os trabalhos de Lewis e Riesenfeld, bem como as teses de Pedrosa [18], de Silva [51], de Lima [49], portanto não havendo produção autoral nesse capítulo.

### 2.1 Definição do Operador Invariante

O método idealizado por Lewis e Riesenfeld tinha como escopo a resolução de problemas da mecânica quântica ligados a osciladores harmônicos com dependência temporal. A motivação dos autores na aplicação do método de invariantes, segundo os mesmos, foi a simplicidade nas regras de construção dos invariantes e a sua relação com a expansão assintótica da teoria de invariante adiabática.

No método proposto, considera-se um sistema descrito por uma hamiltoniana com dependência explícita do tempo  $H(t)$ . Assume-se a existência de um operador invariante  $I(t)$ . Tal invariante obedece à seguinte relação:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{[I, H]}{i\hbar} = 0 \quad (2.1)$$

e

$$I = I^\dagger \quad (2.2)$$

Ao obedecer à equação (2.1) e (2.2), o operador invariante apresenta seus autovalores puramente reais, suas autofunções ortogonais e formam um conjunto completo.

Sabe-se que o estado de um sistema físico, no campo da mecânica quântica, está completamente determinado quando se conhece a sua função de onda  $\Psi(q, t)$ . Na notação de Dirac, o estado físico de um sistema pode ser representado por  $|\psi(t)\rangle$ . Sua evolução temporal ocorre de acordo com a equação de Schrödinger. Dessa forma, sendo  $H(t)$  o operador hamiltoniano, podemos escrever:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle \quad (2.3)$$

Ao aplicar  $|\psi(t)\rangle$  em (2.1), teremos:

$$i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} |\psi(t)\rangle + [I, H] |\psi(t)\rangle = 0 \quad (2.4)$$

Por outro lado, realizando as operações com o termo que possui o comutador  $[I, H]$ , podemos escrever:

$$IH |\psi(t)\rangle - HI |\psi(t)\rangle = i\hbar (I \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle - H(I |\psi(t)\rangle)) \quad (2.5)$$

Ao levar a Eq. (2.5) para a (2.4), com base em pequena álgebra, podemos escrever a equação abaixo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (I |\psi(t)\rangle) = H(I |\psi(t)\rangle) \quad (2.6)$$

Analisando-se a eq.(2.6), podemos verificar que a ação do operador invariante sobre um vetor de estado que satisfaz a equação de Schrödinger produz uma outra solução da mesma equação. Em particular, se  $|\psi(t)\rangle$  é solução da equação de Schrödinger, o vetor estado resultante da aplicação de  $(I |\psi(t)\rangle)$  também se apresenta como solução da mesma. Durante o procedimento acima, como não foi feita nenhuma restrição, o resultado é válido para qualquer operador invariante.

## 2.2 Autoestados e Autovalores do operador Invariantes

O operador  $I(t)$ , conforme afirmado anteriormente, é hermitiano, logo os seus autovalores são reais e possui um conjunto completo de autoestados  $|\lambda; \kappa; t\rangle$  que satisfaz a equação de autovalor abaixo:

$$I(t) |\lambda; \kappa; t\rangle = \lambda |\lambda; \kappa; t\rangle \quad (2.7)$$

e

$$\langle \lambda'; \kappa'; t | \lambda; \kappa; t \rangle = \delta_{\lambda', \lambda} \delta_{\kappa', \kappa} \quad (2.8)$$

da notação acima,  $\delta_{\lambda', \lambda} \delta_{\kappa', \kappa}$  denotam o símbolo de Kronecker. De início, peguemos a eq.(2.7) e diferenciamos em relação ao tempo, obtemos:

$$\frac{\partial I}{\partial t} |\lambda; \kappa; t\rangle + I \frac{\partial}{\partial t} |\lambda; \kappa; t\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t} |\lambda; \kappa; t\rangle + \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\lambda; \kappa; t\rangle \quad (2.9)$$

A seguir, vamos aplicar a eq.(2.1) sobre  $|\lambda; \kappa; t\rangle$ , e obtemos:

$$\frac{\partial I}{\partial t} |\lambda; \kappa; t\rangle + \frac{1}{i\hbar} [I, H] |\lambda; \kappa; t\rangle = 0 \quad (2.10)$$

O produto escalar da eq.(2.10) por  $\langle \lambda'; \kappa'; t |$ , encontramos:

$$i\hbar \langle \lambda'; \kappa'; t | \left( \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda; \kappa; t\rangle \right) + (\lambda - \lambda') \langle \lambda'; \kappa'; t | H | \lambda; \kappa; t \rangle = 0 \quad (2.11)$$

Para  $\lambda = \lambda'$ , temos:

$$\langle \lambda; \kappa'; t | \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda; \kappa; t\rangle = 0 \quad (2.12)$$

Como próximo passo, apliquemos  $\langle \lambda; \kappa; t |$  sobre a Eq.(2.9), e encontramos:

$$\langle \lambda; \kappa; t | \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda; \kappa; t\rangle + \langle \lambda; \kappa; t | I \frac{\partial}{\partial t} |\lambda; \kappa; t\rangle = \langle \lambda; \kappa; t | \frac{\partial \lambda}{\partial t} |\lambda; \kappa; t\rangle + \langle \lambda; \kappa; t | \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\lambda; \kappa; t\rangle \quad (2.13)$$

Como a  $\langle \lambda; \kappa; t | I \frac{\partial}{\partial t} | \lambda; \kappa; t \rangle$  e  $\langle \lambda; \kappa; t | \lambda \frac{\partial}{\partial t} | \lambda; \kappa; t \rangle$  são iguais, obtemos:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \langle \lambda; \kappa; t | \frac{\partial I}{\partial t} | \lambda; \kappa; t \rangle = 0 \quad (2.14)$$

O resultado acima retrata que os autovalores  $\lambda$  são independentes do tempo. No entanto, não se pode afirmar o mesmo para o autoestado que depende do tempo. Esse será tratado na seção seguinte.

### 2.3 Relação entre autoestados do operador invariante e as soluções da equação de Schrödinger

O escopo dessa seção é encontrar a conexão entre os autoestados do operador invariante e as soluções da equação de Schrödinger. Para tanto, partiremos da eq.(2.9) e do resultado expresso na eq.(2.14). Dessa forma, encontramos:

$$(\lambda - I) \frac{\partial}{\partial t} | \lambda; \kappa; t \rangle = \frac{\partial I}{\partial t} | \lambda; \kappa; t \rangle \quad (2.15)$$

Tomando-se o produto escalar da equação (2.15) por  $\langle \lambda'; \kappa'; t |$ , bem como a equação (2.11), podemos escrever:

$$i\hbar(\lambda - \lambda') \left\langle \lambda'; \kappa'; t \left| \frac{\partial}{\partial t} \right| \lambda; \kappa; t \right\rangle = (\lambda - \lambda') \left\langle \lambda'; \kappa'; t \left| H \right| \lambda; \kappa; t \right\rangle \quad (2.16)$$

Para  $\lambda \neq \lambda'$ , conclui-se que:

$$i\hbar \left\langle \lambda'; \kappa'; t \left| \frac{\partial}{\partial t} \right| \lambda; \kappa; t \right\rangle = \left\langle \lambda'; \kappa'; t \left| H \right| \lambda; \kappa; t \right\rangle \quad (2.17)$$

Porém, para  $\lambda = \lambda'$ , a equação (2.16) não necessariamente é válida. Caso tivéssemos a validade para igualdade destacada, poderíamos assegurar que  $| \lambda; \kappa; t \rangle$  satisfaz a equação de Schrödinger. Dessa forma, concluiríamos que  $| \lambda; \kappa; t \rangle$  seria uma solução especial  $| \psi(t) \rangle$ .

Sabemos que todas as grandezas calculadas por média usando função de onda são tais que seu significado físico dependem da função de onda multiplicada pelo seu conjugado. Dessa forma, podemos afirmar que  $| \psi(t) \rangle$  e  $e^{i\alpha} | \psi(t) \rangle$ , onde  $\alpha$  é um número real qualquer, representam o mesmo estado físico. Isso denota que a função de onda



normalizada é determinada a menos de uma constante, denominada pela literatura de *fator de fase*. Essa indeterminação não afeta os resultados físicos, pois, no produto das funções e seus conjugados, o fator de fase é  $e^{i\alpha}e^{-i\alpha} = 1$ .

Diante do exposto, podemos multiplicar  $|\lambda; \kappa; t\rangle$  por um fator de fase arbitrário dependente do tempo. Definimos um novo conjunto de autovetores de  $I(t)$  relacionados ao conjunto anterior de autovetores por meio de uma transformação de gauge dependente do tempo. O novo conjunto de autovetores se apresenta da seguinte forma

$$|\lambda; \kappa; t\rangle_s = e^{i\alpha_{\lambda\kappa}(t)} |\lambda; \kappa; t\rangle, \quad (2.18)$$

onde  $\alpha_{\lambda\kappa}(t)$  são funções reais dependentes do tempo. Dessa forma, a nova equação de autovalor para  $I(t)$  pode ser escrita

$$I |\lambda; \kappa; t\rangle_s = \lambda |\lambda; \kappa; t\rangle_s \quad (2.19)$$

A escolha da fase deve ser tal que a equação (2.16) continue válida para  $\lambda = \lambda'$ . Utilizando os novos estados na equação (2.15), encontramos:

$$(\lambda - I) \frac{id\alpha_{\lambda\kappa}}{dt} |\lambda; \kappa; t\rangle + \frac{\partial}{\partial t} |\lambda; \kappa; t\rangle = \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda; \kappa; t\rangle \quad (2.20)$$

Fazendo o produto escalar da equação acima com o estado  $|\lambda'; \kappa'; t\rangle$ , para  $\lambda = \lambda'$ , encontramos:

$$\hbar \delta_{\kappa'\kappa} \frac{d\alpha_{\lambda,\kappa}}{dt} = \left\langle \lambda; \kappa'; t \left| i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right| \lambda; \kappa; t \right\rangle \quad (2.21)$$

Para satisfazer a equação destacada acima, os estados  $|\lambda; \kappa; t\rangle$  devem ser escolhidos de forma que o lado direito da equação seja igual a zero para  $\kappa \neq \kappa'$ . Como o operador  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H$  é hermitiano, podemos fazer essa diagonalização. Assim, as funções de fase  $\alpha_{\lambda\kappa}(t)$  irão satisfazer a seguinte equação:

$$\hbar \frac{d\alpha_{\lambda,\kappa}}{dt} = \left\langle \lambda; \kappa; t \left| i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right| \lambda; \kappa; t \right\rangle \quad (2.22)$$

Então, como cada autoestado  $|\lambda; \kappa; t\rangle_s$  satisfaz a equação de Schrödinger, podemos escre-

ver sua solução geral conforme abaixo destacado:

$$|\psi(t)\rangle_s = \sum c_{\lambda\kappa} e^{i\alpha_{\lambda\kappa}(t)} |\lambda; \kappa; t\rangle \quad (2.23)$$

onde  $c_{\lambda\kappa}$  são os coeficientes independentes do tempo.

Com o fito de ilustrar o método de Lewis e Riesenfeld (LR) tópico descrito, aplicaremos na seção que se segue num sistema físico de interesse, qual seja, um oscilador harmônico unidimensional com frequência dependente explicitamente do tempo.

## 2.4 Aplicação do Método de Lewis e Riesenfeld a um Oscilador dependente do tempo

Para um oscilador unidimensional, tem-se associado o seguinte hamiltoniano:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}mw^2(t)q^2 \quad (2.24)$$

na equação (2.24)  $q$  e  $p$  são as variáveis canonicamente conjugadas que satisfazem a relação de comutação  $[q, p] = i\hbar$  e  $m$  e  $w(t)$  são, respectivamente, a massa e a frequência do oscilador. As equações canônicas do movimento ligado ao hamiltoniano em estudo, são:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (2.25)$$

e

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -mw^2(t)q \quad (2.26)$$

nas quais, quando associadas, geram a equação do movimento:

$$\ddot{q} + w^2(t)q = 0 \quad (2.27)$$

Esta última equação é de resolução simples quando  $w$  não tem a dependência temporal, no entanto, a frequência  $w$  dependente do tempo traz uma complicação maior para a busca da solução. A literatura nomeia a equação supra como de Mathieu-Hill, que pode ser solucionada quando se conhece a função  $w(t)$ . Visando escapar dessa dependência, ou seja, encontrar uma solução para uma frequência  $w(t)$  arbitrária, vamos

aplicar o método de operadores invariantes ao hamiltoniano. Para tanto, vamos buscar os autoestados inerentes ao problema. Assume-se, fruto do trabalho de Ermakov- Lewis, a existência de um operador invariante  $I(t)$ , na forma quadrática, dado por:

$$I(t) = \frac{1}{2}[\alpha(t)q^2 + \beta(t)p^2 + \gamma\{q, p\}_+] \quad (2.28)$$

no qual  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  e  $\gamma(t)$  são funções reais, dependentes do tempo, a serem determinadas, bem como o  $\{q, p\}_+$  é a notação usual do anticomutador. Seguindo o declinado em tópico anterior, vamos derivar a equação acima em relação ao tempo. Obtemos, de forma explícita:

$$\dot{I} = \frac{1}{2}(2\alpha q\dot{q} + \dot{\alpha}q^2 + 2\beta p\dot{p} + \dot{\beta}p^2 + \gamma\{q, p\}_+ \gamma(q\dot{p} + \dot{q}p + p\dot{q} + \dot{p}q)) \quad (2.29)$$

Ao substituir  $\dot{q}$  e  $\dot{p}$  dados pela equações (2.25) e (2.26), após um pouco de álgebra para arrumar os termos, encontra-se:

$$\dot{I} = \frac{1}{2}([\dot{\alpha} - 2mw^2\gamma]q^2 + [\dot{\beta} + \frac{2\gamma}{m}]p^2 + [\dot{\gamma} + \frac{\alpha}{m} - mw^2\beta]\{q, p\}_+) = 0 \quad (2.30)$$

Para satisfazer o disposto na eq.(2.1), podemos escrever as equações abaixo:

$$\dot{\alpha} = 2mw^2\gamma \quad (2.31)$$

$$\dot{\beta} = -\frac{2}{m}\gamma \quad (2.32)$$

$$\dot{\gamma} = -\frac{\alpha}{m} + mw^2\beta \quad (2.33)$$

Analisando-se as equações acima, observa-se que o invariante ficará determinado, a menos de  $w^2(t)$ , caso conheçamos a expressão da função  $\gamma(t)$ . Porém, por conveniência, introduz-se outra função  $\sigma(t)$ , de forma que seu quadrado seja uma função real dependente do tempo. Assim, define-se  $\beta(t)$  da forma abaixo:

$$\beta(t) = \sigma^2(t) \quad (2.34)$$

levando a definição acima para eq.(2.32), obtém-se:

$$\gamma = -m\sigma\dot{\sigma} \quad (2.35)$$

em substituição seguinte em (2.31), temos:

$$m^2(\sigma\ddot{\sigma} + \dot{\sigma}^2) = \alpha - m^2w^2\sigma^2 \quad (2.36)$$

$$\alpha = m^2[(\sigma\ddot{\sigma} + \dot{\sigma}^2) + w^2\sigma^2] \quad (2.37)$$

$$\dot{\alpha} = m^2(3\dot{\sigma}\ddot{\sigma} + \sigma\ddot{\sigma}) + 2m^2w\sigma(w\dot{\sigma} + \dot{w}\sigma) \quad (2.38)$$

Após substituir  $\dot{\alpha}$  em (2.31) e rearrumar a equação, chega-se a seguinte forma:

$$\sigma \frac{d}{dt} [m^2\ddot{\sigma} + m^2w^2\sigma] + 3\dot{\sigma} [m^2\ddot{\sigma} + m^2w^2\sigma] = 0 \quad (2.39)$$

A seguir, define-se uma função auxiliar  $\eta$ , definida como:

$$\eta = m^2\ddot{\sigma} + m^2w^2\sigma \quad (2.40)$$

Na substituição da função auxiliar  $\eta$  na eq.(2.39), pode-se escrever:

$$\sigma \frac{d\eta}{dt} = -3\dot{\sigma}\eta \quad (2.41)$$

cuja solução pode ser expressa da forma:

$$\eta = \frac{c^2}{\sigma^3} \quad (2.42)$$

onde  $c^2$  é uma constante de integração. Do resultado da integração, encontra-se para  $\sigma$ :

$$\ddot{\sigma} + w^2\sigma = \frac{c^2}{m^2\sigma^3} \quad (2.43)$$

Agora, isolando-se o termo  $\ddot{\sigma}$  e levando para eq.(2.37), após um pouco de álgebra, obtém-

se:

$$\alpha = m^2 \dot{\sigma}^2 + \frac{c^2}{\sigma^2} \quad (2.44)$$

Realizando as substituições nas equações (2.31 - 2.33), finalmente se pode escrever:

$$I(t) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{c}{\sigma} \right)^2 q^2 + (\sigma p - m \dot{\sigma} q)^2 \right] \quad (2.45)$$

Para retirar a arbitrariedade da constante de integração  $c^2$ , faz-se uma transformação de escala da seguinte forma:

$$\sigma(t) = c^{1/2} \rho(t) \quad (2.46)$$

Finalmente, pode-se escrever o invariante  $I(t)$  da forma:

$$I(t) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{q}{\rho} \right)^2 + (\rho p - m \dot{\rho} q)^2 \right] \quad (2.47)$$

sujeito ao vínculo abaixo:

$$\ddot{\rho} + w^2(t) \rho = \frac{1}{m^2 \rho^3} \quad (2.48)$$

Finalizando esse tópico, qualquer solução particular da eq.(2.48) pode ser usada para se construir um operador invariante na forma expressa por (2.47). A literatura nomeia o par de equações formado por (2.27) e (2.48) e o invariante (2.47) de sistema de Ermakov para a hamiltoniana (2.24). Por isso, o invariante  $I(t)$  dado pela eq.(2.47) é conhecido por invariante de Ermakov-Lewis. A redescoberta desse invariante, atualmente, tem propiciado grandes desenvolvimentos ao estudo de sistemas quânticos dependentes do tempo. Para citar alguns exemplos, destacamos os trabalhos de Dey e Fring [19], de Lima *et al* [47], de Huang *e tal* [48].

### 2.4.1 Autoestado e autovalores do Invariante $I(t)$

Os autoestados e autovetores de  $I(t)$  serão encontrados realizando operações semelhante a de Paul Dirac para diagonalizar o hamiltoniano de um oscilador harmônico com frequência constante. Define-se operadores de criação  $a^\dagger(t)$  e destruição  $a(t)$ , ambos com dependência temporal, dados pela relação abaixo:

$$a = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left(\frac{q}{\rho}\right) + i(\rho p - m\dot{\rho}q) \right] \quad (2.49)$$

$$a^\dagger = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left(\frac{q}{\rho}\right) - i(\rho p - m\dot{\rho}q) \right] \quad (2.50)$$

Tal escolha foi realizada de forma que a relação de comutação  $[a, a^\dagger] = 1$  seja encontrada. Verifica-se, de forma relativamente fácil, que:

$$aa^\dagger = \left(\frac{1}{2\hbar}\right) \left[ \left(\frac{q}{\rho}\right)^2 + (\rho p - m\dot{\rho}q)^2 + i[q, p] \right] = \left(\frac{1}{2\hbar}\right) (2I - \hbar) \quad (2.51)$$

de modo que podemos escrever:

$$I(t) = \hbar \left( aa^\dagger + \frac{1}{2} \right) \quad (2.52)$$

Do acima, verifica-se que o problema de autovalores de  $I(t)$  se reduz ao problema de autovalores do operador hermitiano  $N = aa^\dagger$ . Dessa forma, os autoestados normalizados  $|\lambda, t\rangle$  de  $I(t)$  são os mesmos autoestados normalizados  $|n, t\rangle$ , de modo que podemos escrever:

$$N |n, t\rangle = n |n, t\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.53)$$

Noutra banda, o espectro de autovalores de  $I(t)$  é dado por:

$$I |n, t\rangle = \lambda_n |n, t\rangle, \quad (2.54)$$

onde temos:

$$\lambda_n = \hbar \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.55)$$

Nesse método algébrico, temos as seguintes equações:

$$a |n, t\rangle = \sqrt{n} |n-1, t\rangle, \quad (2.56)$$

$$a^\dagger |n, t\rangle = \sqrt{n+1} |n+1, t\rangle, \quad (2.57)$$

$$\langle n', t | n, t \rangle = \delta_{n'n} \quad (2.58)$$

Observa-se, de tudo acima, que os operadores  $a(t)$ ,  $a^\dagger(t)$  e  $N$  obedecem à álgebra dos operadores de destruição, criação e número que são utilizados para diagonalizar o operador

Hamiltoniano do oscilador harmônico independente do tempo.

## 2.4.2 Definição das fases de $I(t)$

Com o objetivo de finalizar a aplicação do método, vamos determinar as fases de  $I(t)$ . Para tanto, faz-se necessário calcular os elementos diagonais da matriz do operador  $H(t)$  e  $\frac{\partial}{\partial t}$ . Após substituí-se tal resultado na eq.(2.22), obtém-se a determinação das funções de fase. Como primeira operação, escreve-se o hamiltoniano em termos dos operadores  $a$  e  $a^\dagger$ . Para isso, escrevemos as grandezas  $q$  e  $p$  em termos desses operadores. Assim, temos

$$q = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \rho (a + a^\dagger) \quad (2.59)$$

$$p = i\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left(\frac{1}{\rho} - im\dot{\rho}\right) a^\dagger - \left(\frac{1}{\rho} + im\dot{\rho}\right) a \right] \quad (2.60)$$

dessa forma os termos do hamiltoniano  $H(t)$  ficam expressos como se segue

1.  $\frac{\hbar}{4m} \left( -\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{2im\dot{\rho}}{\rho} - m^2\dot{\rho} - mw^2(t)\rho \right) (a^\dagger)^2 \right)$
2.  $-\left(\frac{1}{\rho^2} + 2im\dot{\rho} - m^2\dot{\rho}^2 - mw^2(t)\rho^2\right) a^2$
3.  $+\left(\frac{1}{\rho^2} + m^2\dot{\rho}^2 + m^2w^2(t)\rho^2\right) \{a, a^\dagger\}_+$

Ao substituir os termos do hamiltoniano em estudo, após uma álgebra elevada, podemos escrever:

$$\langle n|H|n\rangle = \frac{\hbar}{2m} \left[ \frac{1}{\rho^2} + m^2\dot{\rho}^2 + m^2w^2\rho^2 \right] \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (2.61)$$

A matriz que representa o operador  $H$  possui elementos fora da diagonal uma vez que as equações definidas acima não diagonalizam o operador. O próximo passo é encontrar os elementos de matriz do operador  $\frac{\partial}{\partial t}$ . Para tanto, vamos derivar a eq.(2.57) em relação ao tempo, e temos como resultado:

$$\left( \frac{\partial a^\dagger}{\partial t} + a^\dagger \frac{\partial}{\partial t} \right) |n, t\rangle = (n+1)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t} |n+1, t\rangle, \quad (2.62)$$

No passo seguinte, opera-se o produto escalar da equação acima por  $|n, t\rangle$  e então teremos o seguinte:

$$\langle n, t | \left( \frac{\partial a^\dagger}{\partial t} + a^\dagger \frac{\partial}{\partial t} \right) |n, t\rangle = (n+1)^{\frac{1}{2}} \langle n, t | \frac{\partial}{\partial t} |n+1, t\rangle \quad (2.63)$$

reescrevendo os termos, a equação fica da seguinte maneira:

$$\langle n, t | \frac{\partial a^\dagger}{\partial t} | n, t \rangle + \langle n, t | a^\dagger \frac{\partial}{\partial t} | n, t \rangle = (n+1)^{\frac{1}{2}} \langle n, t | \frac{\partial}{\partial t} | n+1, t \rangle \quad (2.64)$$

Usando a equação (2.57), temos:

$$\langle n, t | \frac{\partial a^\dagger}{\partial t} | n, t \rangle + n^{\frac{1}{2}} \langle n-1, t | \frac{\partial}{\partial t} | n, t \rangle = (n+1)^{\frac{1}{2}} \langle n, t | \frac{\partial}{\partial t} | n+1, t \rangle \quad (2.65)$$

Realizando uma mudança de variável  $n \rightarrow (n-1)$ , a equação se torna:

$$\langle n, t | \frac{\partial}{\partial t} | n, t \rangle = \langle n-1, t | \frac{\partial}{\partial t} | n-1, t \rangle + n^{-1/2} \langle n, t | \frac{\partial a^\dagger}{\partial t} | n-1, t \rangle \quad (2.66)$$

Derivando a equação (2.50) e utilizando as equações (2.59) e (2.60) que expressam, respectivamente,  $q$  e  $p$ , ficamos com a expressão abaixo:

$$\frac{\partial a^\dagger}{\partial t} = \frac{1}{2} \left\{ \left( -\frac{2\dot{\rho}}{\rho^2} + im(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2) \right) a + im(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2) a^\dagger \right\} \quad (2.67)$$

Dessa forma, substituindo a equação acima na eq.(2.66), chegamos a relação:

$$\langle n, t | \frac{\partial}{\partial t} | n, t \rangle = \langle n-1, t | \frac{\partial}{\partial t} | n-1, t \rangle + \frac{imn}{2} [(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2)] \quad (2.68)$$

Façamos a seguinte observação:

1.  $n = 1 \rightarrow \langle 1, t | \frac{\partial}{\partial t} | 1, t \rangle = \langle 0, t | \frac{\partial}{\partial t} | 0, t \rangle + \frac{im}{2} [(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2)];$
2.  $n = 2 \rightarrow \langle 2, t | \frac{\partial}{\partial t} | 2, t \rangle = \langle 1, t | \frac{\partial}{\partial t} | 1, t \rangle + \frac{i2m}{2} [(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2)] = \langle 0, t | \frac{\partial}{\partial t} | 0, t \rangle + im [(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2)]$

Do acima, podemos escrever:

$$\langle n, t | \frac{\partial}{\partial t} | n, t \rangle = \langle 0, t | \frac{\partial}{\partial t} | 0, t \rangle + \frac{imn}{2} [(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2)] \quad (2.69)$$

Assim, notamos que os elementos de matriz do operador  $\frac{\partial}{\partial t}$  devem ser imaginários puros, isto ocorre devido este operador não ser hermitiano. Da equação acima, não se pode retirar nenhuma informação adicional do termo  $\langle 0, t | \frac{\partial}{\partial t} | 0, t \rangle$ , então, por conveniência, faz-se a seguinte escolha:

$$\langle 0, t | \frac{\partial}{\partial t} | 0, t \rangle = \frac{im}{4} [(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2)], \quad (2.70)$$



assim, quando se toma o limite para  $\rho$  constante, encontramos  $\langle 0, t | \frac{\partial}{\partial t} | 0, t \rangle$  tendendo a zero. Por fim, os elementos diagonais de matriz do operador  $\frac{\partial}{\partial t}$  serão dados por:

$$\langle n, t | \frac{\partial}{\partial t} | n, t \rangle = \frac{im}{2} [(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2)](n + \frac{1}{2}) \quad (2.71)$$

Agora, calculemos os elementos diagonais de matriz dos operadores  $H(t)$  e  $\frac{\partial}{\partial t}$ , dados, respectivamente, pelas eq.(2.61) e eq.(2.71), ao substituir na eq.(2.22):

$$\frac{d\alpha_n}{dt} = -\frac{1}{2m} [m^2\rho\ddot{\rho} + \frac{1}{\rho^2} + m^2w^2\rho^2](n + \frac{1}{2}) \quad (2.72)$$

Em observância a condição de vínculo da eq.(2.48) que assenta  $\ddot{\rho} + w^2(t)\rho = \frac{1}{m^2\rho^3}$ , a equação acima se reduz a:

$$\frac{d\alpha_n}{dt} = -\frac{1}{m\rho^2}(n + \frac{1}{2}), \quad (2.73)$$

que, integrando, encontra-se:

$$\alpha_n(t) = -(n + \frac{1}{2})\frac{1}{m} \int_0^t \frac{1}{\rho^2} d(t') \quad (2.74)$$

O resultado acima nos permite escrever que os autoestados de  $I(t)$  que satisfazem a equação de Schrödinger para o oscilador harmônico dependente do tempo serão dados por:

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\alpha_n(t)} |n, t\rangle, \quad (2.75)$$

na qual  $\alpha_n(t)$  é fornecido por (2.74). Dessa forma, podemos escrever a solução geral da equação de Schrödinger para o operador hamiltoniano como segue:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{i\alpha_n(t)} |n, t\rangle \quad (2.76)$$

Por outro lado, mencionamos a técnica utilizada por Hartley e Ray (HR) [52] os quais usaram uma transformação unitária com  $M(t) = m$ , então podemos expressar a dependência temporal da equação de Schrödinger em termos de um operador unitário  $U(t)$  que satisfaz as seguintes condições:

$$|\psi(t)\rangle_s = U(t) |\psi(0)\rangle_s \quad (2.77)$$

e

$$i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} = H(t)U, \quad (2.78)$$

para o caso  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ , a solução da equação acima pode ser expressa como  $U(t) = \exp(-\frac{iHt}{\hbar})$ . Porém, no modelo em estudo,  $H(t)$  depende explicitamente do tempo. Mesmo assim, a evolução temporal dos autoestados de  $I(t)$ ,  $|n, t\rangle$  pode ser determinada como

$$|n, t\rangle = e^{-i\alpha_n(t)}U(t)|n, 0\rangle, \quad (2.79)$$

onde em  $t = 0$ ,  $U(0) = 1$  e  $\alpha_n(0) = 0$ . Desse modo, os estados  $|n, 0\rangle_s = |n, 0\rangle$  são iguais.

Na representação de Schrödinger, o operador  $q$  corresponde à multiplicação por  $q$  e  $p$  é representado pelo operador diferencial  $-i\hbar\partial/\partial q$ . Nesta representação, podemos escrever a equação de Schrödinger para hamiltoniana em estudo como

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(q, t) = H(t)\psi(q, t), \quad (2.80)$$

com

$$H(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2}mw^2(t)q^2 \quad (2.81)$$

onde a função de onda  $\psi(q, t) \equiv \langle q|\psi(t)\rangle$  é expressa na representação de coordenadas. Por outro lado, o invariante exato (2.47) e sua equação de autovalor é, neste momento, dado por

$$I\phi_n(q, t) = \lambda_n\phi_n(q, t), \quad (2.82)$$

onde os autovalores  $\lambda_n$  são constantes e as autofunções  $\phi_n(q, t)$ , na representação de coordenadas, satisfazem a relação  $\langle \phi'_n|\phi\rangle = \delta_{n'n}$ . Dessa maneira, podemos escrever as soluções de Schrödinger  $\psi_n(q, t)$  em termos das autofunções  $\phi_n(q, t)$  de  $I(t)$  como

$$\psi_n(q, t) = e^{i\alpha_n(t)}\phi_n(q, t) \quad (2.83)$$

onde as fases  $\alpha_n(t)$  são dadas por

$$\hbar \frac{d\alpha_n(t)}{dt} = \langle \phi_n|i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t)|\phi_n\rangle \quad (2.84)$$

logo, a solução geral da equação de Schrödinger pode ser escrita na forma

$$\psi(q, t) = \sum_n c_n e^{i\alpha_n(t)} \phi_n(q, t) \quad (2.85)$$

### 2.4.3 Estados quânticos

Para encontrar as funções de onda do oscilador  $\phi_n(t)$  descrito pela hamiltoniana em estudo (2.24), escrevem-se as soluções da equação de Schrödinger em termos de um operador unitário  $U(t)$  que satisfaça a seguinte condição:

$$\phi'_n(q, t) = U\phi_n(q, t) \quad (2.86)$$

com  $U$  dado por:

$$U = \exp\left[-\frac{im\dot{\rho}}{2\hbar\rho}q^2\right], \quad (2.87)$$

usando a técnica da transformação unitária de Hartley e Ray, podemos reescrever a equação de autovalor (2.54) como:

$$I' \phi'_n(q, t) = \lambda_n \phi'_n(q, t), \quad (2.88)$$

com  $I' = UIU^\dagger$ . Realizando cálculos simples presentes em [18], encontramos:

$$I' = -\frac{\hbar^2}{2}\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2} \frac{q^2}{\rho^2} \quad (2.89)$$

Ao se definir uma nova variável  $\sigma = \frac{q}{\rho}$ , podemos escrever a equação de autovalor da seguinte forma:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \frac{\sigma^2}{2}\right] \varphi_n(\sigma) = \lambda_n \varphi_n(\sigma), \quad (2.90)$$

ou da forma:

$$I' \varphi_n(\sigma) = \lambda_n \varphi_n(\sigma) \quad (2.91)$$

onde temos:

$$\phi'_n(q, t) = \frac{1}{\rho^{1/2}} \varphi_n(\sigma) = \frac{1}{\rho^{1/2}} \varphi_n\left(\frac{q}{\rho}\right) \quad (2.92)$$

o fator  $\frac{1}{\rho^{1/2}}$  é introduzido para que a condição de normalização seja satisfeita. Ao analisar a eq.(2.90), verificamos que se trata da equação de Schrödinger unidimensional independente

do tempo, cuja solução é bem conhecida pela literatura, senão vejamos:

$$\varphi_n(\sigma) = \left[ \frac{1}{\pi^{1/2} \hbar^{1/2} n! 2^n} \right]^{1/2} \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2\hbar}\right] H_n\left[\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{1/2} \sigma\right] \quad (2.93)$$

onde:

$$\lambda_n = \hbar\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (2.94)$$

e  $H_n$  é o polinômio de Hermite de ordem  $n$ . Assim, usando as eqs.(2.77),(2.78),(2.83) e (2.84), encontra-se:

$$\phi_n(q, t) = \left[ \frac{1}{\pi^{1/2} \hbar^{1/2} n! 2^n \rho} \right]^{1/2} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{m\rho^2}\right) q^2\right] H_n\left[\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{1/2} \frac{q}{\rho}\right] \quad (2.95)$$

O passo seguinte é calcular a  $\alpha_n(t)$ . Para tanto, inserindo as eqs.(2.81),(2.86) na eq.(2.84), obtemos, depois de alguns cálculos, que

$$\hbar \frac{d\alpha_n}{dt} = \langle \phi' | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar \frac{\dot{\rho}}{\rho} q \frac{\partial}{\partial q} + \frac{i\hbar \dot{\rho}}{2\rho} - \frac{I'}{m\rho^2} | \phi' \rangle \quad (2.96)$$

em seguida, substituindo a eq.(2.92) na eq.(2.96), encontramos:

$$\hbar \frac{d\alpha_n(t)}{dt} = \langle \varphi_n | -\frac{I'}{m\rho^2} | \varphi_n \rangle \quad (2.97)$$

logo, utilizando a eq.(2.91) e a normalização de  $\varphi_n$ , obtemos:

$$\alpha_n(t) = -(n + \frac{1}{2}) \frac{1}{m} \int_0^t \frac{1}{\rho^2} d(t') \quad (2.98)$$

Finalmente, usando as equações (2.83) e (2.95) encontramos que as soluções exatas da equação de Schrödinger (2.80) são dadas por:

$$\psi_n(q, t) = \exp[i\alpha_n(t)] \left[ \frac{1}{\pi^{1/2} \hbar^{1/2} n! 2^n \rho} \right]^{1/2} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{m\rho^2}\right) q^2\right] H_n\left[\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{1/2} \frac{q}{\rho}\right] \quad (2.99)$$

onde as fases são dadas pela eq.(2.98). Para se obter a solução geral da equação de Schrödinger, inserem-se as eqs.(2.95) e (2.98) na equação (2.85). Como visto nessa seção, a técnica de HR e o método de LR nos proporcionam um cálculo direto dos autoestados do invariante e de suas fases.

## 2.5 Aplicação do Método ao Oscilador de Caldirola-Kanai

Passemos a aplicar o método anteriormente descrito para o oscilador de Caldirola-Kanai, com  $w(t) = w_0$  e sua massa dada por:

$$M(t) = me^{\gamma t} \quad (2.100)$$

a sua hamiltoniana fica expressa da seguinte maneira:

$$H(t) = e^{-\gamma t} \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m w_0^2 e^{\gamma t} q^2 \quad (2.101)$$

onde  $\gamma$  é uma constante. As equações de Heisenberg para o sistema são:

$$\dot{q} = \frac{p}{M(t)} \quad (2.102)$$

$$\dot{p} = -M(t)w^2q \quad (2.103)$$

das quais obtemos a equação do movimento:

$$\ddot{q} + \beta(t)\dot{q} + w^2q = 0 \quad (2.104)$$

com

$$\beta(t) = \frac{d}{dt} \ln[M(t)] \quad (2.105)$$

O invariante para o sistema descrito pela Hamiltoniana (2.101) é dado por:

$$I(t) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{q}{\rho} \right)^2 + (\rho p - M \dot{\rho} q)^2 \right] \quad (2.106)$$

onde para a equação auxiliar  $\rho(t)$ , temos:

$$\ddot{\rho} + \beta(t)\dot{\rho} + w^2\rho = \frac{1}{M^2\rho^3} \quad (2.107)$$

Sua equação de autovalor pode ser expressa por:

$$I\phi_n(q, t) = \lambda_n\phi_n(q, t) \quad (2.108)$$

sendo os autovalores  $\lambda_n$  constantes e as autofunções  $\phi_n(q, t)$  satisfazendo a relação  $\langle \phi'_n | \phi_n \rangle = \delta_{n',n}$ . Dessa maneira, pode-se escrever as soluções da equação de Schrodinger  $\psi_n(q, t)$  em termos das autofunções  $\phi_n(q, t)$  de  $I(t)$  como:

$$\psi_n(q, t) = e^{i\alpha_n(t)} \phi_n(q, t) \quad (2.109)$$

as  $\alpha_n(t)$  nos termos da seção anterior são dadas por:

$$\hbar \frac{d\alpha_n(t)}{dt} = \langle \phi_n | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t) | \phi_n \rangle \quad (2.110)$$

Utilizando a transformação unitária, com o objetivo de encontrar as funções de onda do oscilador descrito pela Hamiltoniana (2.101), temos:

$$\phi'_n(q, t) = U \phi_n(q, t) \quad (2.111)$$

com

$$U = \exp\left[-\frac{iM(t)\dot{\rho}}{2\hbar\rho} q^2\right] \quad (2.112)$$

A equação de autovalor fica expressa por:

$$I' \phi'_n(q, t) = \lambda_n \phi'_n(q, t) \quad (2.113)$$

com  $I' = UIU^\dagger$ , no trabalho de Pedrosa [18] determinou  $I'$  como

$$I' = -\frac{\hbar^2}{2\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2} \frac{q^2}{\rho^2} \quad (2.114)$$

Assim, após os procedimentos descritos na seção anterior, encontramos:

$$\phi_n(q, t) = \left[\frac{1}{\pi^{1/2}\hbar^{1/2}n!2^n\rho}\right]^{1/2} \exp\left[\frac{iM(t)}{2\hbar}\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{M(t)\rho^2}\right)q^2\right] H_n\left[\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{1/2}\frac{q}{\rho}\right] \quad (2.115)$$

Para o cálculo das fases  $\alpha_n(t)$ , depois de alguns procedimentos algébricos, encontra-se:

$$\hbar \frac{d\alpha_n}{dt} = \langle \phi'_n | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar \frac{\dot{\rho}}{\rho} q \frac{\partial}{\partial q} + i\hbar \frac{\dot{\rho}}{2\rho} - \frac{I'}{M\rho^2} | \phi'_n \rangle \quad (2.116)$$

e

$$\hbar \frac{d\alpha_n}{dt} = \langle \phi'_n | - \frac{I'}{M\rho^2} | \phi'_n \rangle \quad (2.117)$$

Por fim,

$$\alpha_n(t) = -(n + \frac{1}{2}) \int_0^t \frac{1}{M(t')\rho^2} dt' \quad (2.118)$$

As soluções exatas da equação de Schrodinger é dado por:

$$\psi_n(q, t) = \exp[i\alpha_n(t)] \left[ \frac{(1)}{\pi^{1/2} \hbar^{1/2} n! 2^n \rho} \right]^{1/2} \exp\left[ \frac{iM(t)}{2\hbar} \left( \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{M(t)\rho^2} \right) q^2 \right] H_n \left[ \left( \frac{1}{\hbar} \right)^{1/2} \frac{q}{\rho} \right] \quad (2.119)$$

Em trabalho de Pedrosa [18], considerou-se que a solução particular da equação de Milne-Pinney para o oscilador Caldirola-Kanai é dada por

$$\rho(t) = \frac{e^{-\gamma t/2}}{(m\Omega)^{1/2}} \quad (2.120)$$

onde

$$\Omega^2 = w_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} \quad (2.121)$$

Como  $\Omega$  deve ser real para que o invariante seja hermitiano, devemos ter que  $w_0^2 > \frac{\gamma^2}{4}$ . Substituindo as equações (2.100) e (2.120) na equação (2.118), encontramos  $\alpha_n(t)$  na forma:

$$\alpha_n(t) = -\Omega(n + \frac{1}{2})t \quad (2.122)$$

Levando esses resultados para a equação (2.119), as funções de ondas exatas do oscilador de Caldirola-Kanai são escritas como segue abaixo:

$$\psi_n(q, t) = \left[ \frac{(m\Omega)^{1/2}}{\pi^{1/2} \hbar^{1/2} n! 2^n} \right]^{1/2} \exp\left\{ \left[ \frac{\gamma}{4} - i\Omega(n + \frac{1}{2}) \right] t \right\} \exp\left[ -\frac{m}{2\hbar} \left( \Omega + \frac{i\gamma}{2} \right) e^{\gamma t} q^2 \right] H_n \left[ \left( \frac{m\Omega}{\hbar} \right)^{1/2} q e^{\gamma t/2} \right] \quad (2.123)$$

Para o estado fundamental  $n = 0$ , a função de onda é expressa da seguinte forma

$$\psi_0(q, t) = \left[ \frac{m\Omega}{\pi\hbar} \right]^{1/4} \exp\left[ \frac{\gamma}{4} - \frac{i\Omega}{2} \right] t \exp\left[ -\frac{m}{2\hbar} \left( \Omega + \frac{i\gamma}{2} \right) e^{\gamma t} q^2 \right] \quad (2.124)$$

No capítulo seguinte, utilizaremos a função de onda encontrada acima para se determinar a incerteza, entropia de Shannon e informação de Fisher no estado fundamental.

# Capítulo 3

## Cap. 3 Incerteza, Entropia de Shannon e Informação de Fisher

Neste capítulo, vamos apresentar, analítica e graficamente, as incertezas, entropias e informação aplicados ao oscilador de Caldirola- Kanai. Para tanto, para melhor descrever, dividimos em seções. Seguimos de perto os trabalhos de Ghasemi *et al* [41] e J.P.G Nascimento e Guedes [42]. Destaca-se que os cálculos, gráficos e suas análises são produção autoral, estabelecendo uma contribuição para o tema.

### 3.1 Incertezas no Método algébrico de operadores

Para o cálculo da incerteza, escrevemos as grandezas  $q$  e  $p$ , respectivamente, a posição e o momento como apresentado na equação (2.59) e (2.60)

$$q = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2} \rho(a + a^\dagger) \quad (3.1)$$

e

$$p = i\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{1}{\rho} - iM\dot{\rho}\right)a^\dagger - \left(\frac{1}{\rho} + iM\dot{\rho}\right)a\right] \quad (3.2)$$

onde  $a$  e  $a^\dagger$  são escritos conforme abaixo apresentado

$$a = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{q}{\rho}\right) + i(\rho p - M\dot{\rho}q)\right] \quad (3.3)$$



e

$$a^\dagger = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2} \left[ \left(\frac{q}{\rho}\right) - i(\rho p - M\dot{\rho}q) \right] \quad (3.4)$$

ainda, obedecem à álgebra dos operadores de criação  $a^\dagger$  e destruição  $a$ , ou seja,

$$a |n, t\rangle = n^{1/2} |n-1, t\rangle \quad (3.5)$$

$$a^\dagger |n, t\rangle = (n+1)^{1/2} |n+1, t\rangle \quad (3.6)$$

$$\langle n', t | n, t \rangle = \delta_{n', n} \quad (3.7)$$

As incertezas em  $q$  e  $p$ , no estado  $|n, t\rangle$ , são definidas por:

$$(\Delta q)^2 = \langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2 \quad (3.8)$$

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 \quad (3.9)$$

onde os termos acima são determinados como se segue:

$$\langle q \rangle_{\psi_n} = \langle n, t | q | n, t \rangle \quad (3.10)$$

$$\langle q^2 \rangle_{\psi_n} = \langle n, t | q^2 | n, t \rangle \quad (3.11)$$

$$\langle p \rangle_{\psi_n} = \langle n, t | p | n, t \rangle \quad (3.12)$$

$$\langle p^2 \rangle_{\psi_n} = \langle n, t | p^2 | n, t \rangle \quad (3.13)$$

após cálculos simples, temos que  $\langle q \rangle_{\psi_n}$  e  $\langle p \rangle_{\psi_n}$  são nulos, enquanto que para  $\langle q^2 \rangle_{\psi_n}$  e  $\langle p^2 \rangle_{\psi_n}$  encontramos

$$\langle q^2 \rangle_{\psi_n} = \rho^2 \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \quad (3.14)$$

$$\langle p^2 \rangle_{\psi_n} = \frac{1}{\rho^2} (1 + M^2 \rho^2 \dot{\rho}^2) \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \quad (3.15)$$

Dessa forma, podemos escrever a incerteza da posição  $(\Delta q)^2$  e do momento  $(\Delta p)^2$  nas identidades abaixo:

$$(\Delta q)^2 = \rho^2 \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \quad (3.16)$$

$$(\Delta p)^2 = \frac{1}{\rho^2} (1 + M^2 \rho^2 \dot{\rho}^2) \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \quad (3.17)$$

Observa-se que, realizando o produto das incertezas acima  $(\Delta q)(\Delta p)$ , encontramos

$$(\Delta q)(\Delta p) = (1 + M^2 \rho^2 \dot{\rho}^2)^{1/2} (n + \frac{1}{2}) \hbar \quad (3.18)$$

Analisando o resultado obtido acima, verifica-se que, para o estado fundamental,  $n = 0$ , de um oscilador harmônico dependente do tempo, a incerteza será mínima quando  $\rho = \text{constante}$ . Assim, dado uma forma temporal da massa e frequência de forma que a solução auxiliar gerada seja constante, teremos uma incerteza mínima para o estado fundamental. A título de exemplo, se aplicarmos a técnica dos invariantes para o oscilador harmônico independente do tempo, teremos  $\rho = (mw)^{-1/2}$ , conseqüentemente, a incerteza para o estado fundamental será  $(\Delta q)(\Delta p) = \frac{\hbar}{2}$ , portanto em pleno acordo com o previsto pela literatura quântica [50].

Para o oscilador com que estamos trabalhando nessa dissertação - Caldirola-Kanai, incerteza da posição e do momento no estado fundamental, encontramos o que se segue:

$$(\Delta q) = \left(\frac{\hbar}{2m\Omega}\right)^{1/2} e^{-\frac{\gamma t}{2}} \quad (3.19)$$

$$(\Delta p) = \left(\frac{m\Omega\hbar}{2}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\gamma^2}{4\Omega^2}\right)^{1/2} e^{\frac{\gamma t}{2}} \quad (3.20)$$

Assim, encontramos para o produto da incerteza:

$$(\Delta q)(\Delta p) = \frac{\hbar}{2} \left(1 + \frac{\gamma^2}{4\Omega^2}\right)^{1/2} \quad (3.21)$$

## 3.2 Informação de Fisher

A informação de Fisher foi estabelecida em 1925 [53] como uma maneira de medir a quantidade de informação que um observável  $x$  carrega em relação a um dado parâmetro  $\theta$ . São as denominadas relações de incerteza entrópicas, que podem fornecer novos limites inferiores ao produto das incertezas.

A informação de Fisher de um observável unidimensional  $x$  com densidade de probabilidade  $P(x)$  é dado por

$$F_x = \int P(x) \left[\frac{d \ln P(x)}{dx}\right]^2 dx \geq 0 \quad (3.22)$$

Dessa forma, a informação de Fisher da posição de um sistema quântico, no qual a densidade de probabilidade no espaço das posições é  $P(x) = |\psi_n(x, t)|^2$ , é expressa da seguinte maneira:

$$F_x = \int |\psi_n(x, t)|^2 \left[ \frac{d \ln |\psi_n(x, t)|^2}{dx} \right]^2 dx = \int \psi_n(x, t) \psi_n^*(x, t) \left[ \frac{d \ln \psi_n(x, t) \psi_n^*(x, t)}{dx} \right]^2 dx \quad (3.23)$$

podendo ser escrita da seguinte maneira:

$$F_x = 4 \int \psi_n'(x, t) \psi_n'^*(x, t) dx + \int \left[ \frac{\psi_n'(x, t)}{\psi_n(x, t)} - \frac{\psi_n'^*(x, t)}{\psi_n^*(x, t)} \right]^2 |\psi_n(x, t)|^2 dx \quad (3.24)$$

onde

$$\psi' = \frac{d\psi_n}{dx} \quad (3.25)$$

No mesmo passo, a informação de Fisher para o momento é expressa da maneira abaixo destacada:

$$F_p = 4 \int \varphi_n'(p, t) \varphi_n'^*(p, t) dx + \int \left[ \frac{\varphi_n(p, t)}{\varphi_n(p, t)} - \frac{\varphi_n'^*(p, t)}{\varphi_n^*(p, t)} \right]^2 |\varphi_n(p, t)|^2 dx \quad (3.26)$$

onde temos que  $\varphi(p, t)$  é a transformada de Fourier de  $\psi(q, t)$  dada por

$$\varphi(p, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{1}{2}}} \int e^{-ipx/\hbar} \psi(q, t) dq \quad (3.27)$$

Aplicando-se para o caso em estudo nesse trabalho acadêmico, temos como função de onda do estado fundamental a Eq.(2.111). Assim, podemos escrever a sua conjugada conforme assentado *infra*:

$$\psi_0^*(q, t) = \left[ \frac{m\Omega}{\pi\hbar} \right]^{\frac{1}{4}} \exp\left[\left(\frac{\gamma}{4} + \frac{i\Omega}{2}\right)t\right] \exp\left[-\frac{m}{2\hbar}\left(\Omega - \frac{i\gamma}{2}\right)e^{\gamma t} q^2\right] \quad (3.28)$$

com o escopo de encontrarmos a densidade de probabilidade para posição, realizamos o produto das duas funções de onda declinadas acima. Assim, a  $\varrho(q, t)$  se expressa conforme abaixo:

$$\varrho(q, t) = \left[ \frac{m\Omega}{\pi\hbar} \right]^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{\gamma t}{2}\right] \exp\left[-\frac{m}{\hbar}\Omega e^{\gamma t} q^2\right] \quad (3.29)$$

Apresentamos a seguir o gráfico de  $\varrho(q, t)$  onde se verifica que a mesma se

encontra de acordo com a literatura afeta à função densidade de probabilidade, senão vejamos:

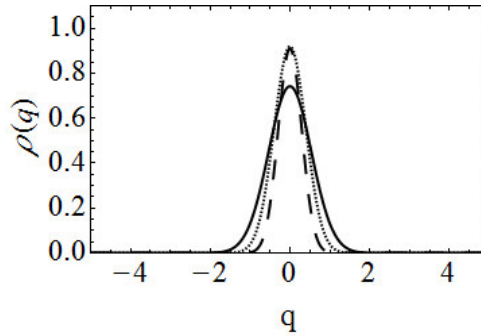


Figura 3.1: Densidade de probabilidade da posição,  $t = 1$ ;  $\gamma = 0,6$  linha cheia preta;  $\gamma = 1,2$  linha pontilhada preta;  $\gamma = 1,8$  linha tracejada preta.

A função de onda na coordenada do momento é expressa da seguinte forma:

$$\varphi(p, t) = \left(\frac{2}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\Omega}{m\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[\frac{t}{4}(\gamma - 2i\Omega)\right] \exp\left[-\frac{p^2 e^{-\gamma t} (2\Omega - i\gamma)}{m\hbar(4\Omega^2 + \gamma^2)}\right] e^{-\frac{\gamma t}{2}} (2\Omega + i\gamma)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.30)$$

da equação acima, verificamos que se trata, a exemplo do que ocorre na coordenada da posição, de uma função complexa, condição inibidora para uma interpretação física real. Com o fito de extrair uma informação do estado quântico, escrevemos sua conjugada nos termos apresentados a seguir:

$$\varphi^*(p, t) = \left(\frac{2}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\Omega}{m\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[\frac{t}{4}(\gamma + 2i\Omega)\right] \exp\left[-\frac{p^2 e^{-\gamma t} (2\Omega + i\gamma)}{m\hbar(4\Omega^2 + \gamma^2)}\right] e^{-\frac{\gamma t}{2}} (2\Omega - i\gamma)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.31)$$

de forma que o produto das funções aponta-nos a densidade de probabilidade para o momento  $\varrho_p(p, t)$  que constitui uma maneira de se obter um significado físico da função de onda. Tal densidade é expressa da maneira seguinte,

$$\varrho_p(p, t) = \frac{2}{\hbar} \left(\frac{\Omega}{m\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{-\gamma t}{2}\right] \exp\left[-\frac{p^2 e^{-\gamma t} (4\Omega)}{m\hbar(4\Omega^2 + \gamma^2)}\right] (4\Omega^2 + \gamma^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.32)$$

abaixo o gráfico da densidade de probabilidade para a coordenada do momento com o fito de ratificar a concordância face à literatura aplicável [50]

De posse das densidades nas coordenadas da posição e momento, quais sejam,  $\varrho(q, t)$  e  $\varrho_p(p, t)$ , passamos a calcular as informações de fisher  $F_q$  e  $F_p$ . Ainda, para facilitar

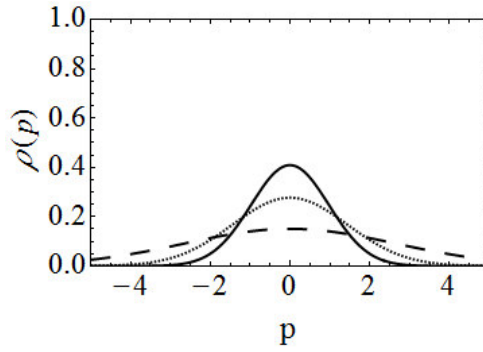


Figura 3.2: Densidade de probabilidade do momento,  $t = 1$ ;  $\gamma = 0,6$  linha cheia preta;  $\gamma = 1,2$  linha pontilhada preta;  $\gamma = 1,8$  linha tracejada preta.

as operações, consideramos as constantes  $m$  e  $\hbar$  com valor unitário.

### 3.2.1 Cálculo da informação de fisher $F_q$

Inicialmente, calculamos as derivadas das equações (2.111) e (3.28), que são escritas como se segue,

$$\frac{d\psi_0}{dq} = \psi_0(q, t) \left( -\left( \Omega + \frac{i\gamma}{2} \right) e^{\gamma t} q \right) \quad (3.33)$$

$$\frac{d\psi_0^*}{dq} = \psi_0^*(q, t) \left( -\left( \Omega - \frac{i\gamma}{2} \right) e^{\gamma t} q \right) \quad (3.34)$$

como próximo ato, substituímos as equações (3.33) e (3.34) no primeiro termo da equação (3.24) e depois de uma pequena álgebra, chegamos à identidade abaixo declinada,

$$F_q = 4e^{2\gamma t} \left( \Omega^2 + \frac{\gamma^2}{4} \right) \int q^2 \varrho(q, t) dq + 2^\circ \text{ termo} \quad (3.35)$$

passando para o segundo termo da equação (3.24), realizando as substituições e após uma álgebra, chegamos a identidade *infra*:

$$F_q = 1^\circ \text{ termo} - \gamma^2 e^{2\gamma t} \int q^2 \varrho(q, t) dq \quad (3.36)$$

ao realizar a operação algébrica final, encontramos  $F_q$ ,

$$F_q = 4\Omega^2 e^{2\gamma t} \int q^2 \varrho(q, t) dq \quad (3.37)$$

Por fim, realizando a integração que se apresenta acima, com extremos de  $-\infty$  a  $\infty$ , encontramos a forma final da informação de Fisher para a posição:

$$F_q = 2\Omega e^{\gamma t} \quad (3.38)$$

### 3.2.2 Cálculo da informação de Fisher $F_p$

Seguindo o mesmo procedimento da subseção acima, encontramos para derivada das funções de onda, na coordenada do momento, e sua respectiva conjugada, as identidades destacadas *infra*:

$$\frac{d\varphi}{dp} = -\varphi(p, t) \left( \frac{2pe^{-\gamma t}(2\Omega + i\gamma)}{4\Omega^2 + \gamma^2} \right) \quad (3.39)$$

$$\frac{d\varphi^*}{dp} = -\varphi^*(p, t) \left( \frac{2pe^{-\gamma t}(2\Omega - i\gamma)}{4\Omega^2 + \gamma^2} \right) \quad (3.40)$$

no cálculo do primeiro termo da informação de Fisher para o momento, após uma pequena álgebra, obtemos:

$$F_p = \frac{16e^{-2\gamma t}}{(4\Omega^2 + \gamma^2)^2} \int \varrho(p, t) p^2 dp + 2^\circ \text{termo} \quad (3.41)$$

para o segundo termo da equação de Fisher, realizando a álgebra necessária, chegamos ao resultado,

$$F_p = 1^\circ \text{termo} - \frac{16e^{-2\gamma t} \gamma^2}{(4\Omega^2 + \gamma^2)^2} \int p^2 \varrho(p, t) dp \quad (3.42)$$

em ato final, somando-se os termos encontrados, podemos escrever a  $F_p$  na forma seguinte,

$$F_p = \frac{64e^{-2\gamma t} \Omega^2}{(4\Omega^2 + \gamma^2)^2} \int p^2 \varrho(p, t) dp \quad (3.43)$$

Fazendo a integração com os limites mínimos e máximos, respectivamente,  $-\infty$  e  $\infty$ , obtemos a identidade final para  $F_p$ , senão vejamos,

$$F_p = \frac{2}{\Omega(1 + \frac{\gamma^2}{4\Omega^2})} e^{-\gamma t} \quad (3.44)$$

### 3.3 Entropia de Shannon

Alguns estudos e aplicações da entropia de Shannon, bem como os aspectos históricos, foram apresentados na introdução desta pesquisa, mais precisamente nos parágrafos iniciais da subseção 1.3.

A entropia de Shannon estabelece o conceito de informação e se define como tudo que reduz a incerteza. Tal entropia, para um conjunto de elementos discretos  $X = x_i$  onde a cada elemento está associado uma probabilidade  $P(x_i)$ , é calculada por

$$S_q = - \sum P(x_i) \ln P(x_i) \quad (3.45)$$

No sistema quântico *em estudo*, aplicamos a relação acima para encontrar as entropias entrópicas  $S_q$  e  $S_p$ , dadas, respectivamente, pelas relações abaixo,

$$S_q = - \int \varrho(q, t) \ln \varrho(q, t) dq \quad (3.46)$$

$$S_p = - \int \varrho(p, t) \ln \varrho(p, t) dp \quad (3.47)$$

#### 3.3.1 Cálculo da Entropia de Shannon $S_q$

Ao pegar eq.(3.29) e substituir na eq.(3.46), após uma acentuada álgebra a qual optamos por não colacionar no corpo textual desse trabalho, encontramos a seguinte relação para entropia de Shannon na coordenada da posição:

$$S_q = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\Omega}{\pi}\right) - \frac{\gamma t}{2} \quad (3.48)$$

#### 3.3.2 Cálculo da Entropia de Shannon $S_p$

Em procedimento similar para a coordenada do momento, ou seja, inserindo a eq.(3.32) na eq.(3.47) e, novamente, que após uma acentuada álgebra a qual optamos por não colacionar no corpo textual desse trabalho acadêmico, encontramos o que se segue:

$$S_p = \frac{\gamma t}{2} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4\Omega}{\pi(4\Omega^2 + \gamma^2)}\right) + \frac{1}{2} \quad (3.49)$$

## 3.4 Resultados e Discussões

### 3.4.1 Do Método Algébrico de Operadores

Iniciamos a seção com a apresentação dos gráficos da incerteza da posição  $\Delta q$ , incerteza do momento  $\Delta p$  e do produto da incerteza  $\Delta q \Delta p$  quando aplicado o procedimento algébrico de operadores.

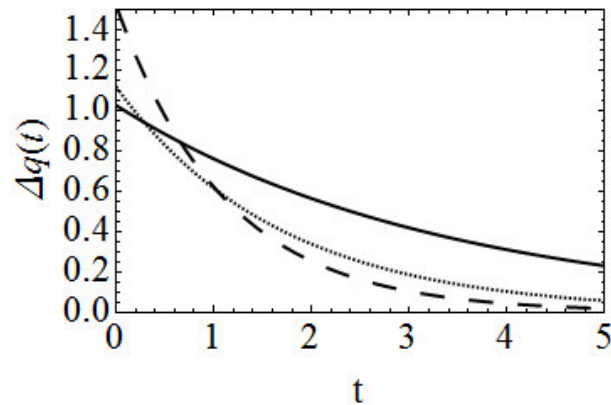


Figura 3.3: Incerteza da posição,  $\gamma = 0,6$  linha cheia preta;  $\gamma = 1,2$  linha pontilhada preta;  $\gamma = 1,8$  linha tracejada preta.

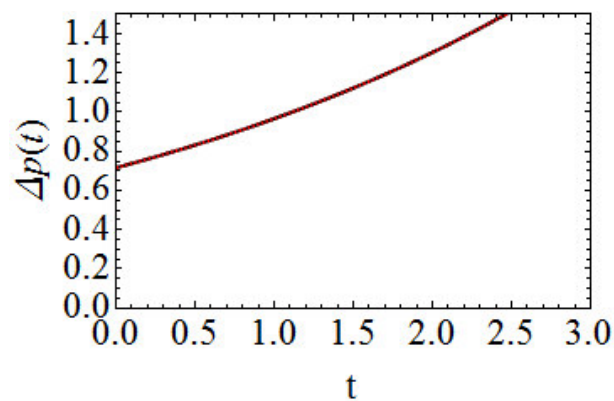
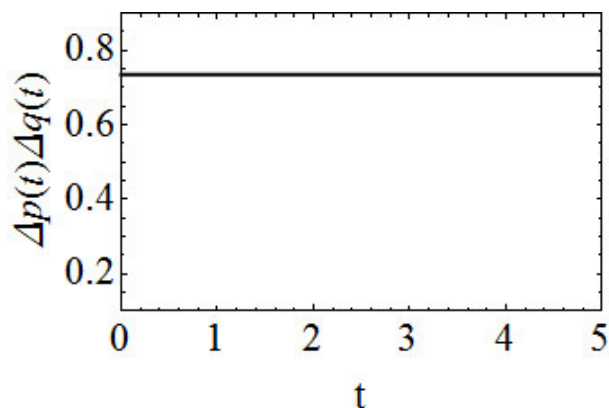


Figura 3.4: Incerteza do momento,  $\gamma = 0,6$  linha cheia preta;  $\gamma = 1,2$  linha tracejada preta;  $\gamma = 1,8$  linha tracejada vermelha.

Na análise dos gráficos, verifica-se que  $\Delta q$  apresenta queda com o tempo e que, com o crescimento de  $\gamma$ , o decaimento da função se mostra mais acentuado. Sendo um sistema dissipativo, a incerteza da posição decaindo com o tempo se encontra em consonância com a literatura.

Quanto à incerteza do momento, verifica-se que não há muita alteração com a mudança de  $\gamma$ . Os resultados alcançados estão em consonância com a literatura afeta ao

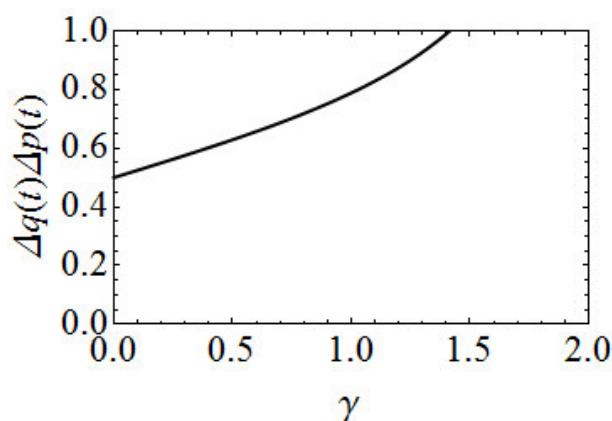


Figura 3.5: Produto da incerteza  $\gamma = 0,6$  e  $\Omega = 0,95$ 

tema, pois a incerteza da posição decresce com o respectivo crescimento da incerteza do momento.

Quanto ao produto das incertezas, verifica-se que se apresenta constante no tempo e maior do que o valor mínimo. São os denominados na literatura de estados comprimidos sobre os quais há um crescente número de trabalhos acadêmicos. A título de exemplos, citamos os trabalhos de Melo [58] e Souza em [59].

Ainda em relação ao produto das incertezas, com o aumento de  $\gamma$  temos um crescimento desse produto. Explica-se pelo fato da incerteza da posição diminuir e conseqüentemente haver um aumento da incerteza do momento. Abaixo o gráfico do comportamento do produto das incertezas:

Figura 3.6: Produto das Incertezas em relação a  $\gamma$

### 3.4.2 Da Informação de Fisher

Inicialmente, analisamos os gráficos 3.1 e 3.2 das densidades de probabilidades face a mudança de  $\gamma$ . Verifica-se que, para a probabilidade da posição, há uma localização mais próxima da origem, diminuindo a incerteza da posição destacada no tópico anterior.

Quanto à densidade de probabilidade do momento, verifica-se um alargamento da curva com o crescimento de  $\gamma$  e o crescimento da incerteza do momento com o tempo.

As informações de Fisher e as incertezas da posição e do momento de osciladores tem suas relações pelas inequações de Cramer-Rao [54], conforme destacado em [55], da forma,

$$F_q \geq \frac{1}{(\Delta q)^2} \quad (3.50)$$

e

$$F_p \geq \frac{1}{(\Delta p)^2} \quad (3.51)$$

Aplicando-se ao caso em estudo, encontramos as identidades,

$$(\Delta q)^2 = \frac{1}{2\Omega e^{\gamma t}} \quad (3.52)$$

e

$$(\Delta p)^2 = \frac{1}{\frac{2}{\Omega(1+\frac{\gamma^2}{4\Omega^2})} e^{-\gamma t}} \quad (3.53)$$

A informação de Fisher na posição, nos termos da equação (3.28), apresenta um crescimento com o tempo, comportamento esperado frente a relação dessa grandeza com a incerteza da posição. Abaixo o gráfico:

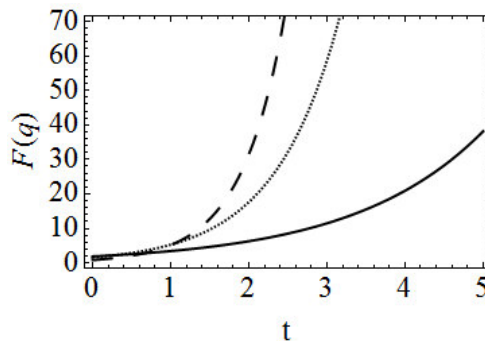


Figura 3.7: Informação de Fisher na posição,  $\gamma = 0,6$  linha cheia preta;  $\gamma = 1,2$  linha pontilhada preta;  $\gamma = 1,8$  linha tracejada preta.

Na informação de Fisher no momento, nos termos da equação (3.44), verificamos uma diminuição com o tempo, paritário ao previsto na equação (3.48). Segue o gráfico dessa grandeza.

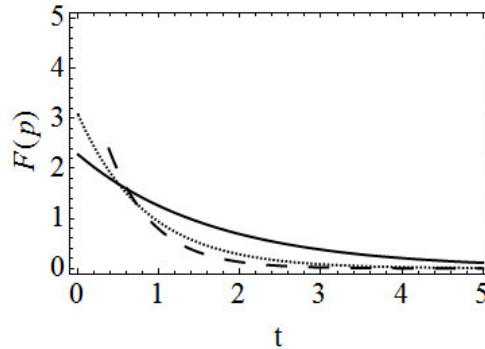


Figura 3.8: Informação de Fisher no momento,  $\gamma = 0,6$  linha cheia preta;  $\gamma = 1,2$  linha pontilhada preta;  $\gamma = 1,8$  linha tracejada preta.

Na comparação dos gráficos 3.3 e 3.7, ratifica-se a validade da relação entre  $\Delta q$  e  $F_q$ ; dos gráficos 3.4 e 3.8, ratifica-se a validade da relação entre  $\Delta p$  e  $F_p$ , logo em consonância com o disposto por Cramer-Rao em [54].

Finalizando a subseção, efetuando-se o produto de  $\Delta q$  e  $\Delta p$  e demais procedimentos algébricos, tendo  $\gamma = 0,6$  e  $\Omega = 0,95$ , obtemos:

$$(\Delta q)(\Delta p) = 0.72 \quad (3.54)$$

Agora, fazendo as substituições dos valores de  $\Omega$  e  $\gamma$  na eq.(3.21), atingida pela utilização da álgebra dos operadores de destruição e criação, encontramos para o produto das variações,  $(\Delta q)$  e  $(\Delta p)$  o valor abaixo destacado:

$$(\Delta q)(\Delta p) = 0.70 \quad (3.55)$$

Portanto, ao comparar os valores encontrados pelos diferentes métodos, bem como os gráficos destacados anteriormente, resta límpido que a informação de Fisher se apresenta como uma alternativa eficaz para se obter o produto da incerteza de um oscilador quântico.

### 3.4.3 Da Entropia de Shannon

A relação entrópica na posição, expressa na equação (3.45), mostra um comportamento de decréscimo com o tempo. Tal comportamento, revela-se de acordo com o esperado, pois com a diminuição da incerteza da posição, espera-se uma diminuição da entropia. Abaixo o gráfico da entropia de Shannon para coordenada da posição. Para a representar, utilizamos  $\gamma = 0.6$   $\Omega = 0.95$ , encontrado o respectivo valor nos termos da equação eq.(2.121).

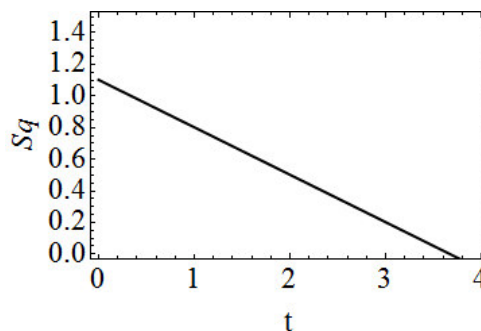


Figura 3.9: Entropia de Shannon na coordenada da posição

Quanto à relação entrópica na coordenada do momento, verifica-se um aumento com o tempo, em conformidade com o esperado teoricamente. Novamente, para melhor visualizar, representamos a entropia de Shannon na coordenada do momento abaixo, com os valores  $\gamma = 0.6$  e  $\Omega = 0.95$ , senão vejamos:

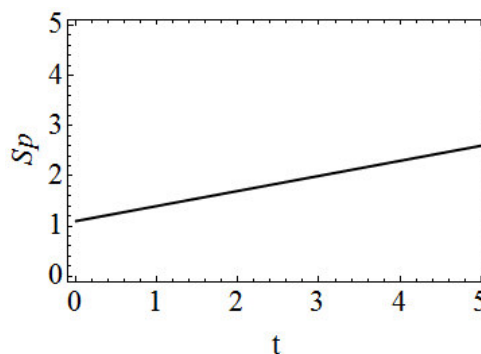


Figura 3.10: Entropia de Shannon na coordenada do momento

A fim de ratificar a relação de incerteza entrópica destacada nos trabalhos de [56] e [57], ilustramos abaixo a função soma  $S_p + S_q$  e o valor de  $\ln \pi + 1$ . Para tanto, utilizamos os valores de  $\gamma = 0.6$  e  $\Omega = 0.95$  nos termos da eq.(2.121).

Outro comportamento com relevância física, é a soma das entropias em relação ao  $\gamma$ . Nesse aspecto, releva-se um aumento da entropia do sistema, sendo um sistema

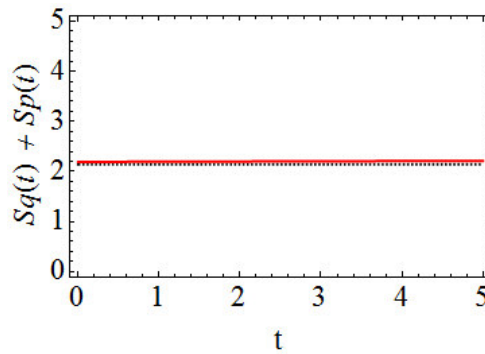


Figura 3.11: Somatório das Entropias de Shannon em linha vermelha e  $\ln \pi + 1$  tracejada dissipativo, esperava-se exatamente esse comportamento dessa grandeza. Assim, revela-se em consonância com a literatura afeta ao tema. Abaixo o gráfico que indica esse comportamento da soma entrópica:

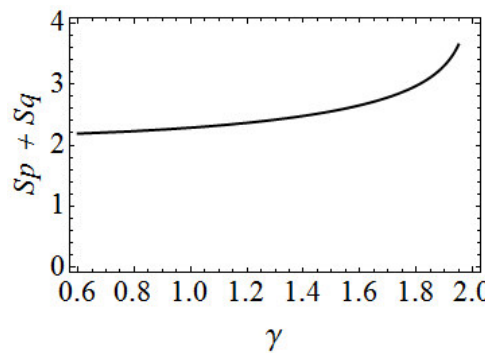


Figura 3.12: Soma Entrópica em relação a  $\gamma$

A relação entre a entropia de Shannon e a informação de Fisher, de acordo com [60], é dado por:

$$(\Delta x)(\Delta p) \geq \frac{1}{2\pi e} \exp(S) \tag{3.56}$$

usando as equações (3.50) e (3.51), podemos escrever:

$$S \geq 1 + \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln(F_x F_p) \tag{3.57}$$

assim, para o estado fundamental, nos termos da igualdade de Cramer-Rao ratificada acima, obtemos:

$$S_0 = 1 + \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln(F_0 x F_0 p) \tag{3.58}$$

A equação (3.58) mostra que quando a informação de Fisher diminui a entropia de Shannon aumenta e vice-versa.

# Capítulo 4

## Cap. 4 Considerações finais e Perspectivas

De forma inaugural, no capítulo introdutório, apresentamos breve histórico no que pertine ao estudo dos osciladores harmônicos, do método de Invariantes, da Entropia de Shannon e da teoria de Informação de Fisher. Ainda, nesse momento inicial, descrevemos as motivações do trabalho.

No capítulo 2, descrevemos o método de Lewis e Riesenfeld com o oscoopo de obter as funções de ondas exatas para equação de Schrodinger para um sistema quântico com dependência temporal. Nessa descrição, apresentamos a definição do invariante; os autoestados e autovalores do referido Invariante; a relação entre os autoestados do operador Invariante.

Ato contínuo, no mesmo capítulo, descrevemos a aplicação do Método de Lewis e Riesenfeld no oscilador de Caldirola- Kanai, que foi o sistema quântico com dependência temporal objeto desta pesquisa. Destacamos, como no momento introdutório ao capítulo 2, que seguimos de perto os trabalhos de Pedrosa [18], de Silva [51], de Lima [49].

De posse da solução exata para equação de Schrodinger, escolhemos o estado fundamental para se encontrar as incertezas/flutuações da posição, do momento e o seu respectivo produto.

No capítulo 3, aqui nossa contribuição para o tema, aplicamos os métodos algébricos de operadores criação  $a^\dagger$  e destruição  $a$  para encontrar as incertezas/ flutuações do sistema quântico em estudo; encontramos as Informações de Fisher para a posição e para o momento e, por fim, encontramos a entropia de Shannon nos respectivos espaços de coordenadas.

No que pertine ao resultado obtido com o método algébrico dos operadores,

os resultados se encontram em consonância com a literatura aplicável. Para o decréscimo da incerteza/flutuações da posição, temos um acréscimo na incerteza do momento.

Para o produto das incertezas, no sistema quântico em estudo, apresenta um valor superior ao mínimo  $\frac{\hbar}{2}$  e constante. São os denominados na literatura de estados comprimidos sobre os quais há um crescente número de trabalhos acadêmicos. Para tanto, citamos os trabalhos de Melo [58] e Souza em [59].

No tocante à Informação de Fisher, ratificou-se a relação da grandeza com as incertezas em ambos os espaços de coordenadas, mostrando a plena aplicabilidade do método como forma alternativa de obtenção das incertezas.

No que se refere à Entropia de Shannon, calculamos as respectivas grandezas entrópicas e ratificamos a relação das entropias, bem como sua relação com a informação de Fisher. Para tanto, os resultados obtidos foram expressos em equações e gráficos. Ratifica-se que os cálculos desse capítulo, as representações gráficas e suas respectivas análises são produções autorais.

Quanto às perspectivas, espera-se estender o estudo, em nível doutorado, da aplicabilidade dos métodos de Informação de Fisher e Entropia de Shannon para outros sistemas quânticos com dependência temporal.

Quanto à aplicabilidade prática imediata do método, destacamos que tal reflexão não fora objeto desse trabalho. No entanto, na área quântica, os métodos de obtenção das relações de incertezas determinadas grandezas se apresentam como de grande relevância. Ademais, nem sempre se vislumbra de imediato a aplicação prática de uma pesquisa teórica, o que geralmente fica para os futuros pesquisadores, como aconteceu, por exemplo, com a experiência dos raios catódicos.

Portanto, a verificação de outros métodos para se alcançar as incertezas se apresenta como ferramenta importante para o desenvolvimento da área, restando sua aplicabilidade prática diferida.

# REFERÊNCIAS

- [1] BUTTERFIELD, H. **As origens da Ciência Moderna**. Rio de Janeiro: Edições 70, 1992. Original de 1949.
- [2] J. M. F. Bassalo e M. S. D. Cattani, **Osciladores Harmônicos Clássicos e Quânticos**, Editora Livraria da Física (2009).
- [3] DEKKER, H. **Classical and quantum mechanics of the damped harmonic oscillator**. Phys. Rep. 80, 1981, p.1-112.
- [4] ALDAYA, V. et al. A symmetry trip from Caldirola to Bateman damped systems. **Arxiv**, Universidade de Murcia, p.1-16, 04 fev. 2011.
- [5] IKOT, Akpan N. et al. Quantum Damped Mechanical Oscillator. **International Journal Of Optics**, [s.l.], v. 2010, p.1-6, 2010. Hindawi Publishing Corporation. <http://dx.doi.org/10.1155/2010/275910>.
- [6] R. Ray, Am. J. Phys. **47**, 626 (1979).
- [7] AGUIAR, V.; GUEDES, I. Osciladores harmônicos amortecidos dependentes do tempo. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 35, n. 4, p. 4311, 2013.
- [8] L. Herrera, L. Nuñez, A. Patiño e H. Rago, Am. J. Phys. **54**, 273 (1986).
- [9] D. H. Kobe, G. Reali e S. Sieniutycz, Am. J. Phys. **54**, 997 (1986).
- [10] MICHELIN, Sérgio Eduardo. **Aplicação do Formalismo Hidrodinâmico da Mecânica Quântica a Problemas com Dissipação de Energia**. 1984. 85 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado, Departamento de Física, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1984.



- [11] MACEDO, Diego Ximenez. **Osciladores Harmônicos Acoplados Dependentes do Tempo**. 2012. 55 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado, Departamento de Física, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2012.
- [12] V.H.L.BESSA, Vagner. **Osciladores Log-periódicos e tipo Caldirola- Kanai**. 2012. 65 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado, Departamento de Física, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2012.
- [13] KRUMREICH, Cesar Eduardo. **Formulação Lagrangiana para Sistemas Dissipativos Através do Cálculo Fracionário**. 2013. 69 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado, Departamento de Física, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2013.
- [14] LONGHI, Stefano. -symmetric quantum oscillator in an optical cavity. **EPL (Europhysics Letters)**, v. 115, n. 6, p. 61001, 2016.
- [15] Jr. H. R. Lewis, Phys. Rev. Lett. **18**, 510 (1967).
- [16] Jr. H. R. Lewis e W. B. Riesenfeld, J. Math. Phys. **10**, 1458 (1969).
- [17] J. R. Ray, Phys. Rev. D **25**, 3417 (1982).
- [18] PEDROSA FILHO, Inácio de Almeida. **Estados Quânticos de Sistemas Hamiltonianos Dependentes do Tempo**. 2003. 82 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado em Física, Departamento de Física, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2003.
- [19] DEY, Sanjib; FRING, Andreas. Noncommutative quantum mechanics in a time-dependent background. **Physical Review D**, v. 90, n. 8, p. 084005, 2014.
- [20] BERTIN, M. C.; PIMENTEL, B. M.; RAMIREZ, J. A. Construction of dynamical invariants for the time-dependent harmonic oscillator with a time-dependent driven force. **arXiv preprint arXiv:1409.2429**, 2014.
- [21] IBARRA-SIERRA, V. G. et al. Time evolution of two-dimensional quadratic Hamiltonians: A Lie algebraic approach. **arXiv preprint arXiv:1601.05359**, 2016.
- [22] FREIRE JUNIOR, Olival; GRECA, Ileana Maria. Information and quantum theory. **Scientiae Studia**, v. 11, n. 1, p. 11-33, 2013.

- [23] SHANNON, Claude Elwood. A mathematical theory of communication. **ACM SIGMOBILE Mobile Computing and Communications Review**, v. 5, n. 1, p. 3-55, 2001.
- [24] AQUINO, N.; FLORES-RIVEROS, A.; RIVAS-SILVA, J. F. Shannon and Fisher entropies for a hydrogen atom under soft spherical confinement. **Physics Letters A**, v. 377, n. 34, p. 2062-2068, 2013.
- [25] BIALYNICKI-BIRULA, Iwo; MYCIELSKI, Jerzy. Uncertainty relations for information entropy in wave mechanics. **Communications in Mathematical Physics**, v. 44, n. 2, p. 129-132, 1975.
- [26] YÁNEZ, R. J.; VAN ASSCHE, Walter; DEHESA, J. S. Position and momentum information entropies of the D-dimensional harmonic oscillator and hydrogen atom. **Physical Review A**, v. 50, n. 4, p. 3065, 1994.
- [27] MAJERNIK, V.; OPATRŇY, T. Entropic uncertainty relations for a quantum oscillator. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v. 29, n. 9, p. 2187, 1996.
- [28] GHASEMI, A.; HOOSHMANDASL, M. R.; TAVASSOLY, M. K. On the quantum information entropies and squeezing associated with the eigenstates of the isotonic oscillator. **Physica Scripta**, v. 84, n. 3, p. 035007, 2011.
- [29] DONG, Shishan et al. Quantum information entropies for a squared tangent potential well. **Physics Letters A**, v. 378, n. 3, p. 124-130, 2014.
- [30] LAGUNA, H. G.; SAGAR, R. P. Position–momentum correlations in the Moshinsky atom. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 45, n. 2, p. 025307, 2011.
- [31] SUN, Guo-Hua; DONG, Shi-Hai; SAAD, Nasser. Quantum information entropies for an asymmetric trigonometric Rosen–Morse potential. **Annalen der Physik**, v. 525, n. 12, p. 934-943, 2013.
- [32] RUDNICKI, Lukasz; SÁNCHEZ-MORENO, Pablo; DEHESA, Jesus S. The Shannon-entropy-based uncertainty relation for D-dimensional central potenti-

- als. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 45, n. 22, p. 225303, 2012.
- [33] MAJERNIK, V.; MAJERNÍKOVÁ, Eva; SHPYRKO, S. Uncertainty relations expressed by Shannon-like entropies. **Open Physics**, v. 1, n. 3, p. 393-420, 2003.
- [34] PENNINI, F.; PLASTINO, A.; FERRI, G. L. Fisher information contains all HO-quantum-statistics already at the semiclassical level. **Physics Letters A**, v. 359, n. 1, p. 14-20, 2006.
- [35] ROMERA, E.; SÁNCHEZ-MORENO, P.; DEHESA, J. S. The Fisher information of single-particle systems with a central potential. **Chemical physics letters**, v. 414, n. 4, p. 468-472, 2005.
- [36] ROMERA, Elvira; SÁNCHEZ-MORENO, P.; DEHESA, J. S. Uncertainty relation for Fisher information of D-dimensional single-particle systems with central potentials. **Journal of mathematical physics**, v. 47, n. 10, p. 103504, 2006.
- [37] OMISTE, J. J.; YÁÑEZ, R. J.; DEHESA, J. S. Information-theoretic properties of the half-line Coulomb potential. **Journal of mathematical chemistry**, v. 47, n. 3, p. 911-928, 2010.
- [38] COLEGRAVE, R. K.; ABDALLA, M. Sebawe. A canonical description of the Fabry-Perot cavity. **Journal of Modern Optics**, v. 28, n. 4, p. 495-501, 1981.
- [39] BROWN, Lowell S. Quantum motion in a Paul trap. **Physical review letters**, v. 66, n. 5, p. 527, 1991.
- [40] LEMOS, N. A.; NATIVIDADE, C. P. Harmonic oscillator in expanding universes. **II Nuovo Cimento B (1971-1996)**, v. 99, n. 2, p. 211-225, 1987.
- [41] GHASEMI, A.; HOOSHMANDASL, M. R.; TAVASSOLY, M. K. On the quantum information entropies and squeezing associated with the eigenstates of the isotonic oscillator. **Physica Scripta**, v. 84, n. 3, p. 035007, 2011.
- [42] NASCIMENTO, J. P. G.; GUEDES, I. Classical oscillators with position-dependent mass. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 36, n. 4, p. 01-06, 2014.

- [43] CALDIROLA, Piero. Forze non conservative nella meccanica quantistica. **II Nuovo Cimento (1924-1942)**, v. 18, n. 9, p. 393-400, 1941.I
- [44] KANAI, E. On the quantization of the dissipative systems. **Progress of Theoretical Physics**, v. 3, n. 4, p. 440-442, 1948.
- [45] CALDIROLA, P. Quantum theory of nonconservative systems. **Il Nuovo Cimento B (1971-1996)**, v. 77, n. 2, p. 241-262, 1983.
- [46] WILDE, Mark M. **Quantum information theory**. Cambridge University Press, 2013.
- [47] DE LIMA, Alberes Lopes; PEDROSA, I. A. Teoria quântica de invariantes aplicada ao oscilador harmônico forçado dependente do tempo de Caldirola-Kanai. **Scientia Plena**, v. 4, n. 10, 2008.
- [48] HUANG, Xiao-Bin; CHEN, Ye-Hong; WANG, Zhe. Fast generation of three-qubit Greenberger-Horne-Zeilinger state based on the Lewis-Riesenfeld invariants in coupled cavities. **Scientific reports**, v. 6, 2016.
- [49] LIMA, Dibartolomei Antonio Pereira de. **Invariantes Dinâmicos, Estados Coerentes e Fases Geométricas em Mecânica Quântica**. 2014. 85 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado em Física, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2014.
- [50] MAHON, José Roberto Pinheiro. **Mecânica quântica: desenvolvimento contemporâneo com aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 2011.
- [51] SILVA, Alberes Lopes. **Sobre Aplicações da Teoria Quântica de Invariantes a Sistemas Hamiltonianos Dependentes do Tempo**. 2008. 126 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado em Física, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2008.
- [52] J.G.Hartley and J.R. Ray, *Phys.Rev.A* **24**,2837(1981).
- [53] FISHER, Ronald Aylmer. Theory of statistical estimation. In: **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**. Cambridge University Press, 1925. p. 700-725.

- [54] DEMBO, Amir; COVER, Thomas M.; THOMAS, Joy A. Information theoretic inequalities. **IEEE Transactions on Information Theory**, v. 37, n. 6, p. 1501-1518, 1991.
- [55] MACEDO, Diego Ximenes. **Informação de Fisher e entropia de Shannon de osciladores com massa dependente da posição**. 2017.65 f. Tese de Doutorado. Curso de Doutorado em Física, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017.
- [56] BIALYNICKI-BIRULA, Iwo; MYCIELSKI, Jerzy. Uncertainty relations for information entropy in wave mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, v. 44, n. 2, p. 129-132, 1975.
- [57] BECKNER, William. Inequalities in Fourier analysis. *Annals of Mathematics*, p. 159-182, 1975.
- [58] MELO, Genilson Ribeiro de. **Dinâmica de campos térmicos e estados de superposição do campo eletromagnético quantizado**.133 f. Dissertação (Mestrado)- Curso de Mestrado em Física, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2004.
- [59] DE SOUZA, Douglas Delgado. **Criptografia Quântica com estados comprimidos da luz**.134 f. Dissertação (Mestrado)- Curso de Mestrado em Física, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2011.
- [60] AGUIAR, V.; GUEDES, I. Joint entropy of quantum damped harmonic oscillators. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 401, p. 159-166, 2014.