UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ELANO CAIO DO NASCIMENTO

NOVAS CARACTERIZAÇÕES PARA CILINDROS HIPERBÓLICOS EM ESPAÇOS ANTI DE SITTER

FORTALEZA

2017

ELANO CAIO DO NASCIMENTO

NOVAS CARACTERIZAÇÕES PARA CILINDROS HIPERBÓLICOS EM ESPAÇOS ANTI DE SITTER

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria.

Orientador: Profª. Dra. Fernanda Ester Camillo Camargo

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N194n Nascimento, Elano Caio do.
Novas caracterizações para cilindros hiperbólicos em espaços Anti de Sitter / Elano Caio do Nascimento. – 2017.
38 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2017.
Orientação: Profa. Dra. Fernanda Ester Camilo Camargo.

1. Espaço Anti de Sitter. 2. Hipersuperfícies tipo espaço. 3. Cilindros Hiperbólicos. I. Título.
CDD 510

ELANO CAIO DO NASCIMENTO

NOVAS CARACTERIZAÇÕES PARA CILINDROS HIPERBÓLICOS EM ESPAÇOS ANTI DE SITTER

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria.

Aprovada em: __ / __ / 2014.

BANCA EXAMINADORA

Profª. Dra. Fernanda Ester Camillo Camargo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Cícero Pedro de Aquino
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha mãe Elizabeth Maria, por sempre me apoiar a estudar e realizar meus objetivos. A minha avó Carmelita e ao meu tio Ramon, por estarem ao meu lado me ensinando e contribuindo para minha formação.

Agradeço à minha namorada, Rachel Santos Rolim, pelo incentivo e compreensão. Foi muito importante para mim e sou eternamente grato.

Agradeço a todos os professores do Departamento de Matemática da UFC, em especial a Professora Fernanda Ester Camillo Camargo, minha orientadora, pela paciência e pelo aprendizado que adquiri enquanto fui seu aluno. Muito obrigado.

Agradeço ao meu amigo Wanderley, pelas diversas contribuições nesse trabalho, sendo sempre solícito e disposto a ajudar.

Aos amigos e colegas que fiz durante o curso, Rafael Eufrázio, José Ilhano, Francisca Damiana, Narcélio Filho, Airton Freitas, Diego Sousa, Ravik Rocha, Gilson Granja, Janielly Gonçalves, Helano Campelo, Valber Junior, Acácio Bizarria, João Luiz, João Victor Maximiano, Nícolas Alcântara, Renan Santos, Leo Ivo, Marlon de Oliveira e Roger Oliveira.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Finalmente, muito obrigado a todos.

RESUMO

Neste trabalho, estudaremos hipersuperfícies do tipo espaço máximas completas no espaço anti de Sitter H_1^{n+1}, ou com curvatura escalar constante, ou com curvatura de Gauss-Kronecker constante não nula. Num primeiro momento, suporemos que tais hipersuperfícies possuam curvatura escalar constante e curvatura de Gauss-Kronecker limitada. Num segundo momento, trabalharemos apenas com a hipótese de que a curvatura de Gauss-Kronecker seja constante não nula. Em ambas situações, caracterizaremos os cilindros hiperbólicos $\mathbb{H}^m(c_1) \times \mathbb{H}^{n-m}(c_2), 1 \leq m \leq n-1$, como as únicas hipersuperfícies com $n-1$ curvaturas principais com mesmo sinal em cada ponto.

Palavras-chave: Espaço anti de Sitter. Hipersuperfícies tipo espaço. Cilindros Hiperbólicos.

ABSTRACT

In this work, we will study complete maximal spacelike hypersurfaces at space anti de Sitter H_1^{n+1}, or constant scalar curvature, or constant Gauss-Kronecker curvature nonzero. Initially, we will assume that these hypersurfaces have constant scalar curvature and Gauss-Kronecker limited curvature. In the second moment, we will work only with the hypothesis that the constant Gauss-Kronecker's curvature is nonzero. In both situations, we will characterize the hyperbolic cylinder $\mathbb{H}^m(c_1) \times \mathbb{H}^{nm}(c_2), 1 \leq m \leq n-1$ as the only hypersurfaces with $n-1$ principal curvatures with the same signal at each point.

Keywords: Anti de Sitter space. Spacelike Hypersurfaces. Hyperbolic cylinders.

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	9
2	**PRELIMINARES**	10
3	**RESULTADOS PRINCIPAIS**	18
3.1	**Cilindros hiperbólicos em um espaço anti-de Sitter**	18
3.2	**Caracterizações para cilindros hiperbólicos em um espaço anti-de Sitter**	19
4	**CONSIDERAÇÕES FINAIS**	37
	REFERÊNCIAS	38

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, nossos objetos de estudo são hipersuperfícies tipo-espaço máximas completas, que denotaremos por M^n, isometricamente imersas no espaço anti-de Sitter, o qual é uma variedade semi-Riemanniana de índice 1 com curvatura seccional constante $c < 0$, denotado por $\mathbb{H}_1^{n+1}(c)$, sob que as hipóteses de tais hípersuperficies terem ou curvatura escalar constante ou curvatura de Gauss-Kronecker não nula.

Esse estudo tem grande importância devido às aplicações físicas, mais especificamente em teoria da relatividade, e em aplicações matemáticas, como os problemas do tipo Bernstein. Uma hipersuperfície em $\mathbb{H}_1^{n+1}(c)$ é tipo-espaço quando a métrica induzida em M^n é positiva definida. Destacamos também as hipersuperfícies máximas, que são aquelas cuja curvatura média, que é expressa pelo produto das curvaturas principais, é identicamente nula.

Nessas condições, Ishihara (1988) provou que subvariedades tipo-espaço completas máximas de uma forma espacial semi-Riemanniana, são totalmente geodésicas, isto é, toda geodésica da subvariedade é também uma geodésica na forma espacial. Além disso, no mesmo artigo ele provou que, se M^n é uma subvariedade tipo-espaço completa máxima de $\mathbb{H}_p^{n+p}(-1)$, então $0 \leq S \leq np$, onde S é o quadrado da norma da segunda forma fundamental de M^n e que $S = np$ se, e somente se, M^n é isométrica ao produto $\mathbb{H}^{n_1}(c_1) \times \ldots \times \mathbb{H}^{n_{p+1}}(c_{p+1})$, onde $n = n_1 + \ldots + n_{p+1}, c_i < 0$, e $\mathbb{H}^{n_i}(c_i)$ é um espaço hiperbólico n_i-dimensional de curvatura constante c_i.

Considerando hipersuperfícies máximas completas 3-dimensionais de $\mathbb{H}_1^4(-1)$, Cheng (1994) provou que, se M^3 tenha ou curvatura de Gauss-Kronecker constante não-nula ou tenha curvatura escalar constante e curvatura de Gauss-Kronecker longe de zero, então M^3 é isométrica ao cilindro hiperbólico $\mathbb{H}^1(c_1) \times \mathbb{H}^2(c_2)$.

Cao e Wei (2007) caracterizaram os cilindros hiperbólicos $\mathbb{H}^m(c_1) \times \mathbb{H}^{n-m}(c_2)$, $1 \leq m \leq n-1$, como as únicas hipersuperfícies tipo-espaço máximas completas em $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1)$, $n \geq 2$, com duas curvaturas principais distintas λ e μ que satisfazem $\inf(\lambda - \mu)^2 > 0$.

Wu (2010) provou que as únicas hipersuperfícies tipo-espaço completas em $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1), n \geq 3$, com curvatura média constante ou curvatura escalar constante e duas curvaturas principais distintas λ e μ que satisfazem $\inf(\lambda - \mu)^2 > 0$ são isométricas aos cilindros hiperbólicos $\mathbb{H}^m(c_1) \times \mathbb{H}^{n-m}(c_2), 1 \leq m \leq n-1$.

Motivados por estes resultados, neste trabalho nós vamos analisar hipersuperfícies tipo-espaço máximas completas em $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1)$, ou com curvatura escalar constante ou com curvatura de Gauss-Kronecker constante não-nula.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentamos os principais conceitos, notações e teoremas utilizados no decorrer do trabalho. Sobre o método do referencial móvel, detalhes podem ser encontrados no trabalho de Carmo (1976). Para detalhes sobre variedades diferenciáveis recomendo a leitura do livro do Lee (2013), enquanto para definições e alguns resultados sobre Variedades Pseudo-Riemannianas recomendo o livro do O'Neill (1983).

Seja $\mathbb{R}_2^{n+2}$ o espaço real de dimensão $n+2$ munido de um produto escalar de índice 2 dado por

$$\langle x, y \rangle = -\sum_{i=1}^{2} x_i y_i + \sum_{j=3}^{n+2} x_j y_j,$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_{n+2})$ e $y = (y_1, \ldots, y_{n+2})$ pertencem a $\mathbb{R}_2^{n+2}$. Definimos o espaço anti-de Sitter cuja notação é dada por $\mathbb{H}_1^{n+1}$, como

$$\mathbb{H}_1^{n+1} = \{(x_1, \ldots, x_{n+2}) \in \mathbb{R}_2^{n+2}; -\sum_{i=1}^{2} x_i^2 + \sum_{j=3}^{n+2} x_j^2 = -1\}.$$

Considere, agora, $\psi : M^n \to \mathbb{H}_1^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço de dimensão n imersa em $\mathbb{H}_1^{n+1}$. Recordemos que uma hipersuperfície M^n em $\mathbb{H}_1^{n+1}$ é dita ser tipo-espaço se a métrica de $\mathbb{H}_1^{n+1}$ induz uma métrica positiva definida em M^n, através da imersão ψ.

Para qualquer $p \in M^n$, podemos escolher um referencial ortonormal local semi-Riemanniano $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ sobre $\mathbb{H}_1^{n+1}$ em torno de p tal que $e_1, \ldots, e_n$ são tangentes em M^n. A fim de ordenar nossos cálculos, faremos uso da seguinte convenção de índices: $1 \leq A, B, C, \ldots \leq n+1, 1 \leq i, j, k, \ldots \leq n$.. A este referencial ortonormal local dado, associamos o co-referencial $\{\omega_A\}$, tal que $\omega_A(e_B) = \varepsilon_B \delta_{AB}$, onde $\varepsilon_B = \pm 1$ e as 1-formas de conexão $\{\omega_{AB}\}$. Neste caso que tratamos, cada $\varepsilon_i = 1, i = 1, \ldots, n$ e $\varepsilon_{n+1} = -1$. Usando o método do referencial móvel, temos que a métrica semi-Riemanniana e as equações de estrutura de $\mathbb{H}_1^{n+1}$ são dadas, respectivamente, por

$$d\bar{s}^2 = \sum_A \varepsilon_A \, \omega_A^2,$$

$$d\omega_A = \sum_B \varepsilon_B \, \omega_{AB} \wedge \omega_B, \qquad \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0,$$

$$d\omega_{AB} = \sum_C \varepsilon_C \, \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} - \frac{1}{2} \sum_{C,D} \varepsilon_C \varepsilon_D K_{ABCD} \omega_C \wedge \omega_D,$$

$$K_{ABCD} = -\varepsilon_A \varepsilon_B (\delta_{AC} \delta_{BD} - \delta_{AD} \delta_{BC}),$$

onde K_{ABCD} são as componentes do tensor curvatura de $\mathbb{H}_1^{n+1}$.

Quando restrita à M^n, a métrica torna-se $ds^2 = \sum_i w_i^2$. Para darmos prosseguimento ao nosso estudo, precisamos do resultado abaixo. A sua demonstração pode ser encontrada no trabalho de Carmo (1976).

Lema 2.1 (Cartan) *Sejam M^n uma variedade diferenciável e $\omega_1, \ldots, \omega_r$ 1-formas linearmente independentes sobre um aberto $U \subset M^n$. Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ são 1-formas sobre U tais que:*

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \wedge \omega_i = 0, \tag{1}$$

então, existem funções diferenciáveis $b_{ij} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $\alpha_i = \sum_{j=1}^{r} b_{ij}\omega_j$ e $b_{ij} = b_{ji}$.

As equações de estrutura de M^n são dadas por:

$$d\omega_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j, \qquad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0,$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - \frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l,$$

onde R_{ijkl} são as componentes do tensor curvatura de M^n. Como $\omega_{n+1} = 0$ em M^n, pelo Lema de Cartan temos

$$\omega_{n+1i} = \sum_j h_{ij}\omega_j, \quad h_{ij} = h_{ji}. \tag{2}$$

Das equações de estrutura de M^n e $\mathbb{H}_1^{n+1}$ acima e de (2) decorre que as componentes do tensor curvatura de M^n estão relacionadas com as componentes tangentes do tensor curvatura de $\mathbb{H}_1^{n+1}$. A relação é estabelecida por:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l &= d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \\
&= -\omega_{in+1} \wedge \omega_{n+1j} - \frac{1}{2}\sum_{k,l} K_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l \\
&= -\sum_k h_{ik}\omega_k \wedge \sum_l h_{jl}\omega_l - \frac{1}{2}\sum_{k,l} K_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l \\
&= -\sum_{k,l} h_{ik}h_{jl}\omega_k \wedge \omega_l - \frac{1}{2}\sum_{k,l} K_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l.
\end{aligned}$$

Assim,

$$R_{ijkl} = K_{ijkl} - (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk})$$

donde obtém-se

$$R_{ijkl} = \delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ik}h_{jl}. \tag{3}$$

A equação (3) é chamada de *Equação de Gauss.*

Denotemos por $h = \sum_{ij} h_{ij}\omega_i\omega_j$ e $H = \frac{1}{n}\sum_i h_{ii}$ as respectivas segunda forma fundamental e curvatura média de M^n. A curvatura de Ricci e a curvatura escalar normalizada de M^n são dadas, respectivamente, por

$$R_{ij} = -(n-1)\delta_{ij} - nHh_{ij} + \sum_k h_{ik}h_{kj}, \tag{4}$$

$$R = \frac{1}{n(n-1)}\sum_i R_{ii}. \tag{5}$$

De (4) e (5) obtemos

$$n(n-1)(R+1) = S - n^2H^2, \tag{6}$$

onde $S = \sum_{ij} h_{ij}^2$ é o quadrado da norma da segunda forma fundamental h.

As componentes de h_{ijk} da derivada covariante ∇h satisfazem

$$\sum_k h_{ijk}\omega_k = dh_{ij} + \sum_k h_{ik}\omega_{kj} + \sum_k h_{jk}\omega_{ki}. \tag{7}$$

Diferenciando exteriormente (2) e usando (7), obtemos as *equações de Codazzi*,

$$h_{ijk} = h_{jik} = h_{ikj}; \qquad \forall i,j,k = 1,\ldots,n. \tag{8}$$

De modo similar, as componentes h_{ijkl} da derivada covariante segunda $\nabla^2 h$ são dadas por

$$\sum_l h_{ijkl}\omega_l = dh_{ijk} + \sum_l h_{ljk}\omega_{li} + \sum_l h_{ilk}\omega_{lj} + \sum_l h_{ijl}\omega_{lk}. \tag{9}$$

Diferenciando exteriormente o primeiro membro de (7) e utilizando (9) obtemos a *equação de Ricci*,

$$h_{ijkl} - h_{ijlk} = \sum_m h_{im}R_{mjkl} + \sum_m h_{jm}R_{mikl}. \tag{10}$$

O Laplaciano Δh_{ij} de h_{ij} é definido por $\Delta h_{ij} = \sum_k h_{ijkk}$. De (8) e (10), temos

$$\Delta h_{ij} = \sum_k h_{kkij} + \sum_{m,k} h_{km}R_{mijk} + \sum_{m,k} h_{mi}R_{mkjk}. \tag{11}$$

Vamos agora determinar uma expressão para o Laplaciano de S que representa o quadrado da norma de h. Para isso, seja $\mathbb{Q}_1^{n+1}(c)$ uma variedade semi-Riemanniana com índice 1 e curvatura constante c. Então, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1 (Fórmula do tipo Simons) *Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço em $\mathbb{Q}_1^{n+1}(c)$ de curvatura constante c. Se S denota o quadrado da norma da segunda forma fundamental h e M^n tem curvatura média constante H, então*

$$\frac{1}{2}\Delta S = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + S^2 + nc(S - nH^2) - nH \sum_{i,j,k}(h_{ki}h_{kj}h_{ij}). \tag{12}$$

Demonstração. Como $S = \sum_{i,j} h_{ij}^2$ temos que

$$\Delta S = \sum_{i,j} \Delta h_{ij}^2. \tag{13}$$

Para $1 \leq i, j \leq n$,

$$\Delta h_{ij}^2 = 2h_{ij}\Delta h_{ij} + 2|\nabla h_{ij}|^2.$$

De (11), decorre que

$$\frac{1}{2}\Delta h_{ij}^2 = \underbrace{h_{ij}\sum_k h_{kkij}}_{I} + \underbrace{h_{ij}\sum_{k,m} h_{mk}R_{mijk} + h_{ij}\sum_{k,m} h_{im}R_{mkjk}}_{II} + |\nabla h_{ij}|^2.$$

Examinemos (I) e (II). De (9), temos que

$$\sum_k h_{kkij} = \sum_k dh_{kki}(e_j) + \sum_{k,t} h_{tki}\omega_{tk}(e_j) + \sum_{k,t} h_{kti}\omega_{tk}(e_j) + \sum_{k,t} h_{kkt}\omega_{ti}(e_j). \tag{14}$$

Note que, utilizando (7)

$$\begin{aligned} \sum_k dh_{kki}(e_j) &= \sum_k e_j\left(dh_{kk}(e_i) + 2\sum_m h_{mk}\omega_{mk}(e_i)\right) \\ &= e_j(e_i\left(\sum_k h_{kk}\right)) + 2e_j\left(\sum_{k,m} h_{mk}\omega_{mk}(e_i)\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Trocando os índices k e m na segunda parcela, utilizando a antissimetria das 1-formas de conexão ω_{mk} e a simetria das funções h_{ij}, temos que

$$\sum_{k,m} h_{mk}\omega_{mk}(e_i) = \sum_{k,m} h_{km}\omega_{km}(e_i) = -\sum_{k,m} h_{mk}\omega_{mk}(e_i). \tag{16}$$

Logo,

$$\sum_{k,m} h_{mk}\omega_{mk}(e_i) = 0. \tag{17}$$

Assim, como $\sum_k h_{kk} = nH$ e H é constante, segue de (15) que $\sum_k dh_{kki}(e_j) = 0$.

De forma análoga, como em (16), conclui-se utilizando as equações de Codazzi (8) que

$$\sum_{k,t} h_{kti}\omega_{tk}(e_j) = \sum_{k,t} h_{tki}\omega_{tk}(e_j) = 0. \tag{18}$$

Para o terceiro termo de (14), temos

$$\sum_{k,t} h_{kkt}\omega_{ti}(e_j) \;=\; \sum_t \left(\sum_k h_{kkt}\omega_{ti}(e_j) \right).$$

Utilizando (7), temos:

$$\begin{aligned}
\sum_k h_{kkt}\omega_{ti}(e_j) &= \sum_k \left(dh_{kk}(e_t) + 2\sum_m h_{mk}\omega_{mk}(e_t) \right) \omega_{ti}(e_j) \\
&= \sum_k \left((e_t)(h_{kk}) + 2\sum_m h_{mk}\omega_{mk}(e_t) \right) \omega_{ti}(e_j) \\
&= e_t \left(\sum_k h_{kk} \right) \omega_{ti}(e_j) + 2 \left(\sum_{k,m} h_{mk}\omega_{mk}(e_t) \right) \omega_{ti}(e_j).
\end{aligned}$$

Como em (16), obtemos que $\sum_{k,m} h_{mk}\omega_{mk}(e_t) = 0$ e, sendo $\sum_k h_{kk} = nH$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k,t} h_{kkt}\omega_{ti}(e_j) &= \sum_t \left(e_t \left(\sum_k h_{kk} \right) \omega_{ti}(e_j) \right) \\
&= \sum_t (e_t(nH))\omega_{ti}(e_j) = 0,
\end{aligned}$$

pois H é constante. Logo, $(I) = 0$.

Analisando (II), segue da equação de Gauss (3), que

$$\sum_{k,m} h_{mk}R_{mijk} = \sum_{k,m} [ch_{mk}(\delta_{mj}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ij}) - h_{mk}(h_{mj}h_{ik} - h_{mk}h_{ij})]. \tag{19}$$

Se $i = j$

$$\begin{aligned}
\sum_{k,m} h_{mk} R_{miik} &= \sum_{k\neq m}[ch_{mk}(\delta_{mi}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ii})] + \sum_{k=m}[ch_{mm}(\delta_{mi}\delta_{im} - \delta_{mm}\delta_{ii})] \\
&\quad - \sum_{k,m}[h_{mk}(h_{mj}h_{ik} - h_{mk}h_{ij})] \\
&= ch_{ii} - c\delta_{ii}\sum_{m} h_{mm} - \sum_{k,m}[h_{mk}(h_{mk}h_{ik} - h_{mk}h_{ij})].
\end{aligned}$$

Se $i \neq j$

$$\begin{aligned}
\sum_{k,m} h_{mk} R_{mijk} &= \sum_{k\neq m}[ch_{mk}(\delta_{mj}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ij})] + \sum_{k=m}[ch_{mm}(\delta_{mj}\delta_{im} - \delta_{mm}\delta_{ij})] \\
&\quad - \sum_{k,m}[h_{mk}(h_{mj}h_{ik} - h_{mk}h_{ij})] \\
&= ch_{ji} - c\delta_{ij}\sum_{m} h_{mm} - \sum_{k,m} h_{mk}[(h_{mj}h_{ik} - h_{mk}h_{ij})].
\end{aligned}$$

De forma que, para todo $1 \leq i, j \leq n$

$$\sum_{k,m} h_{mk} R_{mijk} = ch_{ji} - c\delta_{ij}\sum_{m} h_{mm} - \sum_{k,m}[h_{mk}(h_{mj}h_{ik} - h_{mk}h_{ij})]. \tag{20}$$

Temos, ainda,

$$\begin{aligned}
\sum_{k,m} h_{im} R_{mkjk} &= \sum_{k,m}[ch_{mi}(\delta_{mj}\delta_{kk} - \delta_{mk}\delta_{kj}) - h_{mi}(h_{mj}h_{kk} - h_{mk}h_{kj})] \\
&= \sum_{k\neq m}[ch_{mi}(\delta_{mj}\delta_{kk} - \delta_{mk}\delta_{kj})] + \sum_{k=m}[ch_{mi}(\delta_{mj}\delta_{mm} - \delta_{mm}\delta_{mj})] - \\
&\quad - \sum_{k,m}[h_{mi}(h_{mj}h_{kk} - h_{mk}h_{kj})] \\
&= ch_{ji}(n-1) - \sum_{k,m}[h_{mi}(h_{mj}h_{kk} - h_{mk}h_{kj})]. \qquad (21)
\end{aligned}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
(II) \quad = \quad & cnh_{i,j}^2 - c\delta_{ij}\sum_m h_{ij}h_{mm} - \sum_{k,m}[h_{ij}h_{mk}(h_{mj}h_{ik} - h_{mk}h_{ij})] \\
& - \sum_{k,m}[h_{ij}h_{mi}(h_{mj}h_{kk} - h_{mk}h_{kj})] \\
= \quad & cnh_{ij}^2 - c\delta_{ij}\sum_m h_{ij}h_{mm} - \underbrace{\sum_{k,m} h_{ij}h_{mk}h_{mj}h_{ik}}_{a} + \sum_{k,m} h_{ij}^2 h_{mk}^2 \\
& - \sum_{k,m} h_{ij}h_{mi}h_{mj}h_{kk} + \underbrace{\sum_{k,m} h_{ij}h_{mi}h_{mk}h_{kj}}_{a}.
\end{aligned}
$$

Note que, após uma mudança nos índices m e k, os somatórios indicados por a se cancelam. Assim,

$$
(II) \quad = \quad cnh_{ij}^2 - c\delta_{ij}\sum_m h_{ij}h_{mm} + \sum_{k,m} h_{ij}^2 h_{mk}^2 - \sum_{k,m} h_{ki}h_{kj}h_{mm}h_{ij}.
$$

Desta forma,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{i,j}\Delta {h_{ij}}^2 = cn\sum_{i,j} h_{ij}^2 \quad & - \quad c\sum_{i,j}\left(\delta_{ij}\sum_m h_{ij}h_{mm}\right) + \sum_{i,j,k,m} h_{ij}^2 h_{mk}^2 \\
& - \sum_{i,j,k,m} h_{ki}h_{kj}h_{mm}h_{ij} + \sum_{i,j}|\nabla h_{ij}|^2.
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
cn\sum_{i,j} h_{ij}^2 \quad &= \quad cnS, \\
c\sum_{i,j}\left(\delta_{ij}\sum_m h_{ij}h_{mm}\right) \quad &= \quad c\sum_{i,j}(\delta_{ij}h_{ij}nH) = cn^2H^2, \\
\sum_{i,j,k,m} h_{ij}^2 h_{mk}^2 \quad &= \quad \sum_{i,j}\left(h_{ij}^2\sum_{k,m} h_{mk}^2\right) = S^2, \\
\sum_{i,j,k,m} h_{ki}h_{kj}h_{mm}h_{ij} \quad &= \quad \sum_{i,j,k}\left(h_{ki}h_{kj}h_{ij}\sum_m h_{mm}\right) = nH\sum_{i,j,k}(h_{ki}h_{kj}h_{ij}), \\
\sum_{i,j}|\nabla h_{ij}|^2 \quad &= \quad \sum_{i,j}|\sum_k e_k(h_{ij})e_k|^2 = \sum_{i,k} h_{ijk}^2.
\end{aligned}
$$

Assim, temos

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}\Delta h_{ij}^2 = cnS - cn^2H^2 + S^2 - nH\sum_{i,j,k}(h_{ki}h_{kj}h_{ij}) + \sum_{i,j,k}h_{ijk}^2.$$

Portanto, de (13) segue que

$$\frac{1}{2}\Delta S = \sum_{i,j,k}h_{ijk}^2 + S^2 + cn(S - nH^2) - nH\sum_{i,j,k}(h_{ki}h_{kj}h_{ij}).$$

■

Vamos utilizar dois teoremas provados por Ishihara (1988). Para isso, denotemos por $\mathbb{Q}_p^{n+p}(c)$ uma variedade semi-Riemanniana de dimensão $n+p$ com índice p e curvatura constante c. Assim, temos os seguintes teoremas:

Teorema 2.2 *Seja M^n uma subvariedade Riemanniana completa máxima imersa isometricamente em $\mathbb{Q}_p^{n+p}(-c)$ de curvatura constante $-c(c>0)$. Então $0 \leq S \leq npc$.*

Teorema 2.3 *As subvariedades $\mathbb{H}^{n_1}(\sqrt{\frac{n_1}{n}})\times\ldots\times\mathbb{H}^{n_{p+1}}(\sqrt{\frac{n_{p+1}}{n}})$ em $\mathbb{H}_p^{n+p}(1)$ são as únicas subvariedades tipo-espaço máximas completas e conexas de dimensão n em $\mathbb{H}_p^{n+p}(1)$ satisfazendo $S = np$.*

Além desses teoremas, na prova de nossos resultados, precisaremos do conhecido *Princípio do Máximo Generalizado* devido ao Yau (1975).

Lema 2.2 *Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci limitada inferiormente e $F : M^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 limitada inferiormente em M^n. Então existe uma sequência de pontos $\{p_k\}$ em M^n tal que*

$$F(p_k) < \inf F + \frac{1}{k}, \quad |\nabla F(p_k)| < \frac{1}{k}, \quad \Delta F(p_k) > -\frac{1}{k}.$$

3 RESULTADOS PRINCIPAIS

3.1 Cilindros hiperbólicos em um espaço anti-de Sitter

Antes de apresentarmos os resultados principais caracterizando os cilindros hiperbólicos em um espaço anti-de Sitter, devemos torná-lo familiar ao leitor, destacando algumas de suas propriedades principais.

Recordemos que o espaço hiperbólico, no modelo de quádrica do espaço de Minkowski, pode ser definido por

$$\mathbb{H}^m = \{(x_1, \ldots, x_{n+2}) \in \mathbb{R}_1^{m+1} : -x_1^2 + \sum_{j=2}^{m+1} x_j^2 = -1,\ x_{m+1} > 0\}.$$

Definimos, então, o cilindro hiperbólico como a hipersuperfície de tipo-espaço completa isométrica ao produto de espaços hiperbólicos $\mathbb{H}^1(c_1)$ e $\mathbb{H}^{n-1}(c_2)$, onde c_1 e c_2 são constantes negativas. Deste modo, a menos de isometria, podemos denotar os cilindros hiperbólicos como a hipersuperfície

$$\mathbb{H}^1(c_1) \times \mathbb{H}^{n-1}(c_2) = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n+2}) \in \mathbb{H}_1^{n+2} : -x_1^2 + x_3^2 = \frac{1}{c_1},\ -x_2^2 + \sum_{j=4}^{n+2} x_j^2 = \frac{1}{c_2} \right\},$$

onde $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = -1$.

Não é difícil verificar que um cilindro hiperbólico é uma hipersuperfície de tipo-espaço, desde que mostremos primeiro que ela é um conjunto de nível regular. De fato, usando a função $f : \mathbb{H}_1^{n+1} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x_2^2 + \sum_{j=4}^{n+2} x_j^2$, temos que $\mathbb{H}^1(c_1) \times \mathbb{H}^{n-1}(c_2) = f^{-1}(-1)$.

Para cada $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}_1^{n+1})$,

$$\begin{aligned} \langle \nabla f, X \rangle &= X(f) = -2x_2X_2 + 2x_4X_4 + \cdots + 2x_{n+2}X_{n+2} \\ &= 2\langle (0, x_2, 0, x_4, \ldots, x_{n+2}), X \rangle \\ &= 2\langle Y, X \rangle, \end{aligned}$$

onde $Y(x) = (0, , x_2, 0, x_4, \ldots, x_{n+2})$. Escrevendo a componente tangencial de Y como $Y^T \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}_1^{n+1})$, temos

$$Y^T = Y + \langle Y, Id \rangle Id,$$

desde que o campo identidade Id é normal a $\mathfrak{X}(\mathbb{H}_1^{n+1})$.

Por outro lado, $\langle Y(x), x \rangle = f(x)$, para todo $x \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}_1^{n+1})$. Daí, se $x \in$

$\mathfrak{X}(\mathbb{H}^1(c_1)\times\mathbb{H}^{n-1}(c_2))$

$$\nabla f(x) = 2Y^T(x) = 2(Y(x)+\langle Y(x),x\rangle x) = 2(Y(x)+f(x)x) = 2\left(Y(x)+\frac{1}{c_2}x\right).$$

Observemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\langle\nabla f(x),\nabla f(x)\rangle &= \langle Y(x),Y(x)\rangle + \frac{1}{c_2^2}\langle x,x\rangle + \frac{2}{c_2}\langle Y(x),x\rangle\\ &= \frac{1}{c_2}-\frac{1}{c_2^2}+\frac{2}{c_2^2} = \frac{1}{c_2}(1+\frac{1}{c_2})\\ &= -\frac{1}{c_1}\frac{1}{c_2}<0,\end{aligned} \tag{22}$$

onde usamos que $\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}=-1$ na ùltima igualdade acima, além do fato que as constantes c_1 e c_2 são negativas. Segue, então, que o cilindro hiperbólico $\mathbb{H}^1(c_1)\times\mathbb{H}^{n-1}(c_2)$ é uma hipersuperfície de tipo-espaço, já que é um conjunto de nível regular e seu campo normal ∇f é de tipo tempo.

O campo normal unitário N a $\mathbb{H}^1(c_1)\times\mathbb{H}^{n-1}(c_2)$ é, portanto, dado por

$$\begin{aligned}N(x) &= \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}\\ &= \frac{Y(x)+\frac{1}{c_2}x}{\sqrt{\frac{1}{c_1c_2}}}\\ &= \sqrt{c_1c_2}Y+\frac{\sqrt{c_1c_2}}{c_2}x\\ &= \sqrt{-c_1-c_2}Y+\frac{\sqrt{-c_1-c_2}}{c_2}x\\ &= \sqrt{-c_1-c_2}(\frac{1}{c_2}x_1,(1+\frac{1}{c_2})x_2,\frac{1}{c_2}x_3,(1+\frac{1}{c_2})x_4,\dots,(1+\frac{1}{c_2})x_{n+2})\\ &= \sqrt{-c_1-c_2}(\frac{1}{c_2}x_1,-\frac{1}{c_1}x_2,\frac{1}{c_2}x_3,-\frac{1}{c_1}x_4,\dots,-\frac{1}{c_1}x_{n+2})\\ &= (-\sqrt{-c_1-1}x_1,\sqrt{-c_2-1}x_2,-\sqrt{-c_1-1}x_1,\sqrt{-c_2-1}x_4,\dots,\sqrt{-c_2-1}x_{n+2}).\end{aligned} \tag{23}$$

Calculando sua diferencial, obtemos que $\mathbb{H}^1(c_1)\times\mathbb{H}^{n-1}(c_2)$ tem uma curvatura principal $\lambda_1=-\sqrt{-c_1-1}$ e $n-1$ curvaturas principais dadas por $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\sqrt{-c_2-1}$.

3.2 Caracterizações para cilindros hiperbólicos em um espaço anti-de Sitter

Nesta seção, apresentamos novas caracterizações para cilindros hiperbólicos em um espaço anti-de Sitter. A referência principal utilizada foi Chaves et al. (2012).

Antes de introduzirmos os resultados referentes ao objeto de estudo, precisaremos de alguns lemas algébricos, os quais apresentamos a seguir.

Lema 3.1 *Seja M^n uma variedade semi-Riemanniana de dimensão n e considere as funções $h_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$ em M^n, $i, j = 1, \ldots, n$ tais que $\lambda_i : M^n \to \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis com $\lambda_i \neq 0$ em M^n. Assim, a função $F = \log|\det(h_{ij})|$ é suave e o laplaciano de F é dado por*

$$\Delta F = -\sum_{i,j,k} \frac{1}{\lambda_i\lambda_j} h_{ijk}^2 + \sum_{i,k} \frac{1}{\lambda_i} h_{iikk}.$$

Demonstração. Inicialmente, denotemos por A_{ij} a sub-matriz obtida da matriz $(h_{ij})_{n\times n}$, onde retira-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna. Assim,

$$\begin{aligned} \det(h_{ij}) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} h_{1j} \det(A_{1j}) \\ &= h_{11}\det(A_{11}) - h_{12}\det(A_{12}) + \ldots + (-1)^{1+n} h_{1n}\det(A_{1n}) \end{aligned} \tag{24}$$

Escrevendo $\varphi = \log$ e $f = \det(h_{ij})$, temos que

$$\begin{aligned} \Delta F &= \Delta(\log(\det(h_{ij}))) \\ &= \Delta(\varphi \circ f) \\ &= \varphi''(f)|\nabla f|^2 + \varphi'(f)\Delta f \\ &= -\frac{1}{\det(h_{ij})^2}|\nabla \det(h_{ij})|^2 + \frac{1}{\det(h_{ij})}\Delta \det(h_{ij}) \end{aligned} \tag{25}$$

Como $\nabla \det(h_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} e_k(\det(h_{ij}))e_k$ e $\Delta \det(h_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} e_k e_k(\det(h_{ij}))$, vamos calcular $e_k(\det(h_{ij}))$.

Por (24), temos

$$\begin{aligned} e_k(\det(h_{ij})) &= e_k(h_{11})\det(A_{11}) + h_{11}e_k(\det(A_{11})) - e_k(h_{12})\det(A_{12}) - h_{12}e_k(\det(A_{12})) \\ &+ \ldots + (-1)^{1+n} e_k(h_{1n})\det(A_{1n}) + (-1)^{1+n} h_{1n} e_k(\det(A_{1n})). \end{aligned} \tag{26}$$

Temos também que

$$\det(A_{11}) = \begin{vmatrix} h_{22} & h_{23} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n2} & h_{n3} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= h_{22}\begin{vmatrix} h_{33} & h_{34} & \cdots & h_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n3} & h_{n4} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix} - h_{23}\begin{vmatrix} h_{32} & h_{34} & \cdots & h_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n2} & h_{n4} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix} \\
&\quad + \ldots + (-1)^n h_{2n}\begin{vmatrix} h_{32} & h_{33} & \cdots & h_{3n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n2} & h_{n3} & \cdots & h_{nn-1} \end{vmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\det(A_{12}) &= \begin{vmatrix} h_{21} & h_{23} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n3} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix} \\
&= h_{21}\begin{vmatrix} h_{33} & h_{34} & \cdots & h_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n3} & h_{n4} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix} - h_{23}\begin{vmatrix} h_{31} & h_{34} & \cdots & h_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n4} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix} \\
&\quad + \ldots + (-1)^n h_{2n}\begin{vmatrix} h_{31} & h_{33} & \cdots & h_{3n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n3} & \cdots & h_{nn-1} \end{vmatrix},
\end{aligned}
$$

$\ldots,$

$$
\begin{aligned}
\det(A_{1n}) &= \begin{vmatrix} h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn-1} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^n h_{n1}\begin{vmatrix} h_{22} & h_{23} & \cdots & h_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n-12} & h_{n-13} & \cdots & h_{n-1n-1} \end{vmatrix} \\
&\quad +(-1)^{n+1} h_{n2}\begin{vmatrix} h_{21} & h_{23} & \cdots & h_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n-11} & h_{n-13} & \cdots & h_{n-1n-1} \end{vmatrix} \\
&\quad + \ldots + (-1)^{2(n-1)} h_{nn-1}\begin{vmatrix} h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n-11} & h_{n-12} & \cdots & h_{n-1n-2} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Assim, usando que $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ num ponto $p \in M^n$, por (26) temos

$$
e_k(\det(h_{ij})) = h_{11k} h_{22} h_{33} \ldots h_{nn} + h_{11} e_k(\det(A_{11})). \tag{27}
$$

Agora, vamos calcular $e_k(\det(A_{11}))$ em p para obtermos $\nabla(\det(h_{ij}))$. Pelos cálculos dos determinantes de A_{1j} acima, $j = 1, \ldots, n$ temos que

$$\begin{aligned}
e_k(\det(A_{11})) &= e_k(h_{22})\begin{vmatrix} h_{33} & h_{34} & \cdots & h_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n3} & h_{n4} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix} + h_{22}e_k\begin{vmatrix} h_{33} & h_{34} & \cdots & h_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n3} & h_{n4} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix} \\
&\quad - e_k(h_{23})\begin{vmatrix} h_{32} & h_{34} & \cdots & h_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n2} & h_{n4} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix} - h_{23}e_k\begin{vmatrix} h_{32} & h_{34} & \cdots & h_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n2} & h_{n4} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix} \\
&\quad + \ldots + (-1)^n e_k(h_{2n})\begin{vmatrix} h_{32} & h_{33} & \cdots & h_{3n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n2} & h_{n3} & \cdots & h_{nn-1} \end{vmatrix} \\
&\quad + (-1)^n h_{2n}e_k\begin{vmatrix} h_{32} & h_{33} & \cdots & h_{3n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n2} & h_{n3} & \cdots & h_{nn-1} \end{vmatrix} \\
&= e_k(h_{22})\begin{vmatrix} h_{33} & h_{34} & \cdots & h_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n3} & h_{n4} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix} + h_{22}e_k\begin{vmatrix} h_{33} & h_{34} & \cdots & h_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n3} & h_{n4} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

pois $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ em p.

Calculando de modo análogo

$$e_k\begin{vmatrix} h_{33} & h_{34} & \cdots & h_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n3} & h_{n4} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix},$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
e_k(\det(A_{11})) &= h_{22k}h_{33}\ldots h_{nn} + h_{22}h_{33k}h_{44}\ldots h_{nn} \\
&\quad + \ldots + h_{22}h_{33}\ldots h_{nnk}. \qquad (28)
\end{aligned}$$

Assim, por (27) e (28), em p, temos que

$$\begin{aligned}
e_k(\det(h_{ij})) &= \sum_{i=1}^{n} h_{11}\ldots h_{iik}\ldots h_{nn} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{Kh_{iik}}{h_{ii}}, \qquad (29)
\end{aligned}$$

onde $K = h_{11}\ldots h_{nn}$.

Agora, iremos calcular $e_ke_k(\det(h_{ij}))$. Por (26) temos

$$\begin{aligned} e_ke_k(\det(h_{ij})) &= e_ke_k(h_{11})\det(A_{11}) + 2e_k(h_{11})e_k(\det(A_{11})) + h_{11}e_ke_k(\det(A_{11})) \\ &\quad -e_ke_k(h_{12})\det(A_{12}) - 2e_k(h_{12})e_k(\det(A_{12})) - h_{12}e_ke_k(\det(A_{12})) \\ &\quad +\ldots + (-1)^{1+n}e_ke_k(h_{1n})\det(A_{1n}) + (-1)^{1+n}2e_k(h_{1n})e_k(\det(A_{1n})) \\ &\quad +(-1)^{1+n}h_{1n}e_ke_k(\det(A_{1n})). \end{aligned}$$

Usando que $h_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$ em p, temos

$$\begin{aligned} e_ke_k(\det(h_{ij})) &= e_ke_k(h_{11})\det(A_{11}) + 2e_k(h_{11})e_k(\det(A_{11})) + h_{11}e_ke_k(\det(A_{11})) \\ &\quad -2e_k(h_{12})e_k(\det(A_{12})) + \ldots + (-1)^{1+n}2e_k(h_{1n})e_k(\det(A_{1n})). \end{aligned} \tag{30}$$

Precisamos calcular $e_k(\det(A_{1j}))$ para $j \geq 2, \ldots, n$.

Em p, temos que

$$\begin{aligned} e_k(\det(A_{12})) &= e_k(h_{21})\begin{vmatrix} h_{33} & h_{34} & \cdots & h_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n3} & h_{n4} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix} + h_{21}e_k\begin{vmatrix} h_{33} & h_{34} & \cdots & h_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n3} & h_{n4} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix} \\ &\quad -e_k(h_{23})\begin{vmatrix} h_{31} & h_{34} & \cdots & h_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n4} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix} - h_{23}e_k\begin{vmatrix} h_{31} & h_{34} & \cdots & h_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n4} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix} \\ &\quad +\ldots + (-1)^n e_k(h_{2n})\begin{vmatrix} h_{31} & h_{33} & \cdots & h_{3n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n3} & \cdots & h_{nn-1} \end{vmatrix} \\ &\quad +(-1)^n h_{2n}e_k\begin{vmatrix} h_{31} & h_{33} & \cdots & h_{3n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n3} & \cdots & h_{nn-1} \end{vmatrix} \\ &= h_{21k}h_{33}\ldots h_{nn}, \end{aligned}$$

e analogamente,

$$e_k(\det(A_{1j})) = h_{22}\ldots h_{j1k}\ldots h_{nn}$$

pois $h_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$ em p.

Logo, calculando analogamente $e_ke_k(\det(A_{11}))$ em p, podemos escrever (30) por

$$
\begin{aligned}
e_k e_k(\det(h_{ij})) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{K h_{iikk}}{h_{ii}} + 2 \sum_{i,j=1;i<j}^{n} \frac{K h_{iik} h_{jjk}}{h_{ii} h_{jj}} \\
&- \sum_{i,j=1;i\neq j}^{n} \frac{K h_{ijk}^2}{h_{ii} h_{jj}},
\end{aligned} \tag{31}
$$

onde $K = h_{11} \ldots h_{nn}$.

Note que, em p, $\det(h_{ij}) = K$. Como $\nabla \det(h_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} e_k(\det(h_{ij}))e_k$, segue de (29) que

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\det(h_{ij})^2} |\nabla \det(h_{ij})|^2 &= -\frac{1}{K^2} \left(\sum_{i,k=1}^{n} \frac{K^2 h_{iik}^2}{h_{ii}^2} + 2 \sum_{i,j,k=1;i<j}^{n} \frac{K^2 h_{iik} h_{jjk}}{h_{ii} h_{jj}} \right) \\
&= -\sum_{i,k=1}^{n} \frac{h_{iik}^2}{h_{ii}^2} - 2 \sum_{i,j,k=1;i<j}^{n} \frac{h_{iik} h_{jjk}}{h_{ii} h_{jj}}.
\end{aligned} \tag{32}
$$

Por outro lado, como $\Delta \det(h_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} e_k e_k(\det(h_{ij}))$, segue de (31) que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\det(h_{ij})} \Delta \det(h_{ij}) &= \frac{1}{K} \left(\sum_{i,k=1}^{n} \frac{K h_{iikk}}{h_{ii}} \right) + \frac{1}{K} \left(2 \sum_{i,j,k=1;i<j}^{n} \frac{K h_{iik} h_{jjk}}{h_{ii} h_{jj}} \right) \\
&- \frac{1}{K} \left(\sum_{i,j,k=1;i\neq j}^{n} \frac{K h_{ijk}^2}{h_{ii} h_{jj}} \right) \\
&= \sum_{i,k=1}^{n} \frac{h_{iikk}}{h_{ii}} + 2 \sum_{i,j,k=1;i<j}^{n} \frac{h_{iik} h_{jjk}}{h_{ii} h_{jj}} \\
&- \sum_{i,j,k=1;i\neq j}^{n} \frac{h_{ijk}^2}{h_{ii} h_{jj}}.
\end{aligned} \tag{33}
$$

Somando (32) e (33) obtemos

$$
\begin{aligned}
\Delta F &= -\frac{1}{\det(h_{ij})^2} |\nabla \det(h_{ij})|^2 + \frac{1}{\det(h_{ij})} \Delta \det(h_{ij}) \\
&= -\sum_{i,k=1}^{n} \frac{h_{iik}^2}{h_{ii}^2} - 2 \sum_{i,j,k=1;i<j}^{n} \frac{h_{iik} h_{jjk}}{h_{ii} h_{jj}} \\
&+ \sum_{i,k=1}^{n} \frac{h_{iikk}}{h_{ii}} + 2 \sum_{i,j,k=1;i<j}^{n} \frac{h_{iik} h_{jjk}}{h_{ii} h_{jj}} - \sum_{i,j,k=1;i\neq j}^{n} \frac{h_{ijk}^2}{h_{ii} h_{jj}} \\
&= -\sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{h_{ijk}^2}{h_{ii} h_{jj}} + \sum_{i,k=1}^{n} \frac{h_{iikk}}{h_{ii}}.
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Lema 3.2 *Sejam* λ_i *e* β_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$ *números reais tais que valem*

$$\lambda_n < 0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_{n-1} \text{ e}$$

$$\sum_i \lambda_i = \sum_i \beta_{ij} = \sum_i \lambda_i \beta_{ij} = 0, \text{ para } j = 1, \ldots, n.$$

Fixado $j \in \{1, \ldots, n\}$, *considere* $g_j \in \{1, \ldots, n\}$ *o maior índice tal que* $|\beta_{g_j j}| = \max\{|\beta_{ij}|, i = 1, \ldots, n\}$. *Então* $g_j = n$ *se, e somente se,* $\beta_{ij} = 0, i = 1, \ldots, n$.

Demonstração. Suponha que $g_j = n$ e assuma que $\beta_{nj} \neq 0$, chegaremos a uma contradição. De fato, sem perda de generalidade, podemos assumir que $\beta_{nj} > 0$. Das hipóteses, segue que

$$0 = (\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \beta_{ij}) + \lambda_n \beta_{nj} = (\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \beta_{ij}) + (-\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i) \beta_{nj} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (\beta_{ij} - \beta_{nj}). \tag{34}$$

Como $\lambda_i > 0$, para $i = 1, \ldots, n-1$ e, por hipótese, $\beta_{ij} - \beta_{nj} \leq 0$, de (34), tem-se que $\beta_{ij} = \beta_{nj}$, para $i = 1, \ldots, n-1$. Então, como por hipótese, $\sum_i \beta_{ij} = 0$, segue que $\beta_{nj} = 0$, o que é uma contradição. Para a recíproca, basta observar que se $\beta_{ij} = 0, i = 1, \ldots, n$, então $|\beta_{g_j j}| = \max\{|\beta_{ij}|, i = 1, \ldots, n\} = 0 = |\beta_{nj}|$. ■

Estamos prontos para apresentar os resultados envolvendo cilindros hiperbólicos. O primeiro deles caracteriza cilindros hiperbólicos em um espaço anti-de Sitter, sob condições sobre as curvaturas principais.

Teorema 3.1 *Seja* M^n *uma hipersuperfície máxima completa imersa em* $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1)$. *Suponha que* M^n *possui curvatura escalar constante,* $n-1$ *curvaturas principais com o mesmo sinal em todo ponto e curvatura de Gauss-Kronecker limitada longe do zero. Então* M^n *é isométrica ao cilindro hiperbólico* $\mathbb{H}^1(c_1) \times \mathbb{H}^{n-1}(c_2)$, *onde* c_1 *e* c_2 *são constantes negativas.*

Demonstração. Para qualquer ponto p fixado em M^n, podemos escolher um referencial local ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ geodésico em p que diagonaliza a segunda forma fundamental nesse ponto, isto é, tal que $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ em p. Mudando a orientação de M^n e reordenando, se necessário, os índices dos campos tangentes e_i, podemos assumir, de acordo com a hipótese, que as curvaturas principais $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ satisfazem

$$\lambda_n < 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_{n-1}. \tag{35}$$

Além disto, também por hipótese, temos que a curvatura de Gauss-Kronecker, a qual denotaremos por K, é limitada longe do zero. Portanto, a função $F = \log |\det(h_{ij})|$ está globalmente definida em M^n e é suave. Para todos efeitos, todos os cálculos a seguir são pensados no ponto p. Desta forma, pelo Lema 3.1, o Laplaciano de F é expresso por

$$\Delta F = -\sum_{i,j,k} \frac{1}{\lambda_i \lambda_j} h_{ijk}^2 + \sum_{i,k} \frac{1}{\lambda_i} h_{iikk}. \tag{36}$$

Como M^n é máxima, segue de (14) que $\sum_k h_{kkij} = 0$; assim por (11), (20), (21) e do fato que $h_{ij} = \delta_{ij}\lambda_i$ e $\sum_m h_{mm} = 0$ temos que

$$\begin{aligned}
\sum_k h_{ijkk} &= \Delta h_{ij} \\
&= \sum_{m,k} h_{km} R_{mijk} + \sum_{m,k} h_{mi} R_{mkjk} \\
&= -h_{ij} + \delta_{ij} \sum_m h_{mm} - \sum_{k,m} [h_{mk}(h_{mj}h_{ik} - h_{mk}h_{ij})] - (n-1)h_{ij} \\
&\quad - \sum_{k,m} [h_{mi}(h_{mj}h_{kk} - h_{mk}h_{kj})] \\
&= (S-n)h_{ij}.
\end{aligned} \tag{37}$$

Tomando $j = i$ em (37), obtemos $\sum\limits_k h_{iikk} = (S-n)\lambda_i$. Então, a segunda parcela de (36) é dada por

$$\sum_{i,k} \frac{1}{\lambda_i} h_{iikk} = \sum_i \frac{1}{\lambda_i} \sum_k h_{iikk} = \sum_i (S-n) = n(S-n). \tag{38}$$

Desde que M^n tem curvatura escalar constante, por (6), temos que o quadrado da norma da segunda forma fundamental S é constante; além disso, usando novamente que M^n é máxima ($H = 0$) e utilizando as *equações de Codazzi* (8), segue que

$$0 = \frac{1}{2}\Delta S = S(S-n) + \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = S(S-n) + \sum_i h_{iii}^2 + 3\sum_{i \neq j} h_{iij}^2 + \sum_{i \neq j \neq k} h_{ijk}^2. \tag{39}$$

Com respeito ao primeiro termo de (36), temos

$$\begin{aligned}
-\sum_{i,j,k} \frac{1}{\lambda_i\lambda_j} h_{ijk}^2 &= -\sum_i \frac{1}{\lambda_i^2} h_{iii}^2 - \sum_{i=j\neq k} \frac{1}{\lambda_i^2} h_{iik}^2 - \sum_{i=k\neq j} \frac{1}{\lambda_i\lambda_j} h_{iij}^2 \\
&\quad - \sum_{i\neq j=k} \frac{1}{\lambda_i\lambda_j} h_{jji}^2 - \sum_{i\neq j\neq k} \frac{1}{\lambda_i\lambda_j} h_{ijk}^2.
\end{aligned} \tag{40}$$

Multiplicamos, agora, as equações (36),(38) e (40) por S. Em seguida, utilizamos (39) na expressão resultante para $S\Delta F$, a fim de obtermos

$$\begin{aligned} S\Delta F &= -\sum_i \left(\frac{S}{\lambda_i^2}+\frac{n}{3}\right)h_{iii}^2 - \sum_{i\neq j}\left(\frac{S}{\lambda_i^2}+\frac{2S}{\lambda_i\lambda_j}+n\right)h_{iij}^2 \\ &\quad - \sum_{i\neq j\neq k}\left(\frac{S}{\lambda_i\lambda_j}+\frac{n}{3}\right)h_{ijk}^2 + \frac{2n}{3}S(S-n). \end{aligned} \tag{41}$$

Uma vez mais, as *equações de Codazzi* (8) nos permitem escrever

$$3\sum_{i\neq j\neq k}\frac{1}{\lambda_i\lambda_j}h_{ijk}^2 = \sum_{i\neq j\neq k}\left(\frac{1}{\lambda_i\lambda_j}+\frac{1}{\lambda_i\lambda_k}+\frac{1}{\lambda_j\lambda_k}\right)h_{ijk}^2 = \sum_{i\neq j\neq k}\left(\frac{\lambda_i+\lambda_j+\lambda_k}{\lambda_i\lambda_j\lambda_k}\right)h_{ijk}^2. \tag{42}$$

Substituindo (42) em (41), obtemos

$$\begin{aligned} S\Delta F &= -\sum_i^n \left(\frac{S}{\lambda_i^2}+\frac{n}{3}\right)h_{iii}^2 - \sum_{i\neq j}^{n-1}\left(\frac{S}{\lambda_i^2}+\frac{2S}{\lambda_i\lambda_j}+n\right)h_{iij}^2 \\ &\quad -\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{S}{\lambda_i^2}+\frac{2S}{\lambda_i\lambda_n}+n\right)h_{iin}^2 - \sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{S}{\lambda_n^2}+\frac{2S}{\lambda_j\lambda_n}+n\right)h_{nnj}^2 \\ &\quad -\frac{1}{3}\sum_{i\neq j\neq k}^{n}\left[\left(\frac{\lambda_i+\lambda_j+\lambda_k}{\lambda_i\lambda_j\lambda_k}\right)S+n\right]h_{ijk}^2 + \frac{2n}{3}S(S-n). \end{aligned} \tag{43}$$

Analisando o sinal das parcelas do lado direito da igualdade em (43), vemos que a primeira e a segunda parcela são, evidentemente, não positivas. Por outro lado, $\frac{\lambda_i+\lambda_j+\lambda_k}{\lambda_i\lambda_j\lambda_k} \geq 0$, para $i\neq j\neq k \in \{1,\dots,n\}$, já que $\lambda_n = -\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i$ e tem-se (35); assim a quinta parcela também é não positiva. Além disso, novamente de (35), vale que $n\lambda_n^2 > \lambda_1^2+\ldots+\lambda_n^2 = S$, donde podemos obter a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{S}{\lambda_i^2}+\frac{2S}{\lambda_i\lambda_n}+n\right)h_{iin}^2 &\geq \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{S}{\lambda_i^2}+\frac{2S}{\lambda_i\lambda_n}+\frac{S}{\lambda_n^2}\right)h_{iin}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}S\left(\frac{1}{\lambda_i}+\frac{1}{\lambda_n}\right)^2 h_{iin}^2 \geq 0 \end{aligned} \tag{44}$$

Logo, a terceira parcela também é não positiva. Resta-nos estudar o sinal da quarta parcela. Para isso, utilizaremos o Lema 3.2. Fixemos, inicialmente, $j\in\{1,\dots,n\}$. Derivando $\sum_i h_{ii} = 0$ em relação a e_j e recordando que $\sum_{i,k} h_{ik}^2 = S$, que é constante, obtemos

$$\sum_i h_{iij} = 0$$

e

$$\sum_i \lambda_i h_{iij} = 0,$$

respectivamente.

Portanto, escrevendo $\beta_{ij} = h_{iij}$, temos que λ_i e β_{ij} satisfazem as condições do Lema 3.2. Segue, então, da demonstração do Lema supracitado, que, fixado $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\max\{|h_{iij}|, i = 1, \ldots, n\} \neq |h_{nnj}|$ ou $h_{nnj} = 0$. Denote por g_j o índice em $I_{n-1} = \{1, \ldots, n-1\}$ tal que $|h_{g_j g_j j}| = \max\{|h_{iij}|, i = 1, \ldots, n\}$. Daí, considere os seguintes subconjuntos de I_{n-1}, quais sejam, $A = \{j \in I_{n-1}; g_j = j\}$, $B = \{j \in I_{n-1}; g_j \notin \{j, n\}\}$ e $C = \{j \in I_{n-1}; g_j = n\}$. Agora, reordenando os $e_1, \ldots, e_n$, se necessário, podemos assumir que $A = \emptyset$ ou $A = \{1, \ldots, r\}$, $B = \emptyset$ ou $B = \{r+1, \ldots, t\}$ e $C = \emptyset$ ou $C = \{t+1, \ldots, n-1\}$, onde adotamos a seguinte convenção: se $A = \emptyset$, então $r = 0$, se $B = \emptyset$, então $t = r$ e se $C = \emptyset$, então $t = n-1$. Por exemplo, se $B = \emptyset$, então $A = \{1, \ldots, r\}$ e $C = \{r+1, \ldots, n-1\}$.

Vamos escrever (43)de modo mais conveniente.

$$\begin{aligned}
S\Delta F = & -\sum_{i=r+1}^{n}\left(\frac{S}{\lambda_i^2}+\frac{n}{3}\right)h_{iii}^2 - \sum_{i\neq j\in I_{n-1},(i,j)\neq(g_j,j)}\left(\frac{S}{\lambda_i^2}+\frac{2S}{\lambda_i\lambda_j}+n\right)h_{iij}^2\\
& -\sum_{j=1}^{r}\left[\left(\frac{S}{\lambda_n^2}+\frac{2S}{\lambda_j\lambda_n}+n\right)h_{nnj}^2+\left(\frac{S}{\lambda_j^2}+\frac{n}{3}\right)h_{jjj}^2\right]\\
& -\sum_{j=r+1}^{t}\left[\left(\frac{S}{\lambda_n^2}+\frac{2S}{\lambda_j\lambda_n}+n\right)h_{nnj}^2+\left(\frac{S}{\lambda_{g_j}^2}+\frac{2S}{\lambda_j\lambda_{g_j}}+n\right)h_{g_jg_jj}^2\right]\\
& -\frac{1}{3}\sum_{i\neq j\neq k}^{n}\left[\left(\frac{\lambda_i+\lambda_j+\lambda_k}{\lambda_i\lambda_j\lambda_k}\right)S+n\right]h_{ijk}^2\\
& -\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{S}{\lambda_i^2}+\frac{2S}{\lambda_i\lambda_n}+n\right)h_{iin}^2+\frac{2n}{3}S(S-n).
\end{aligned}$$

Como $h_{jjj}^2 \geq h_{nnj}^2, j = 1, 2, \ldots, r$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{S}{\lambda_n^2}+\frac{2S}{\lambda_j\lambda_n}+n\right)h_{nnj}^2+\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{S}{\lambda_j^2}+\frac{n}{3}\right)h_{jjj}^2\\
&\geq\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{S}{\lambda_n^2}+\frac{2S}{\lambda_j\lambda_n}+\frac{S}{\lambda_j^2}+\frac{4n}{3}\right)h_{nnj}^2=\sum_{j=1}^{r}\left[S\left(\frac{1}{\lambda_n}+\frac{1}{\lambda_j}\right)^2+\frac{4n}{3}\right]h_{nnj}^2\geq 0.
\end{aligned}\tag{45}$$

Além disso, como $h_{g_jg_jj}^2 > h_{nnj}^2,\ j = r+1, \ldots, t$, temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=r+1}^{t}\left(\frac{S}{\lambda_n^2}+\frac{2S}{\lambda_j\lambda_n}+n\right)h_{nnj}^2+\sum_{j=r+1}^{t}\left(\frac{S}{\lambda_{g_j}^2}+\frac{2S}{\lambda_j\lambda_{g_j}}+n\right)h_{g_jg_jj}^2\\
&\qquad\geq\sum_{j=r+1}^{t}\left[\frac{S}{\lambda_n^2}+\frac{S}{\lambda_{g_j^2}}+2n+\frac{2S}{\lambda_j}\left(\frac{1}{\lambda_{g_j}}+\frac{1}{\lambda_n}\right)\right]h_{nnj}^2\geq 0.
\end{aligned}\tag{46}$$

Então, por (44), (45), (46) e do fato que $S \geq 0$ podemos concluir que

$$S\Delta F \leq \frac{2n}{3}S(S-n). \tag{47}$$

Uma vez que M^n é uma hipersuperfície máxima em $\mathbb{H}_1^{n+1}$, de (4), obtemos que $Ric(v,v) \geq -(n-1)$, para todo $v \in TM$ com $|v| = 1$. Assim, a curvatura de Ricci de M^n é limitada inferiormente. Como existe $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon \leq |K|$, já que K é limitada longe do zero, temos que F é uma função suave limitada inferiormente. Como consequência, podemos aplicar o Lema 2.2, obtendo uma sequência de pontos (p_k) em M^n tal que

$$\lim_{k\to\infty} F(p_k) = \inf F, \quad \lim_{k\to\infty} |\nabla F(p_k)| = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \inf \Delta F(p_k) \geq 0. \tag{48}$$

Avaliando a desigualdade (47) em tais pontos p_k da sequência obtida, tomando o limite e usando (48), obtemos

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \inf S\Delta F(p_k) \leq \frac{2}{3}nS(S-n),$$

implicando que $S \geq n$. Mas, por outro lado, pelo Teorema 2.2, temos $0 \leq S \leq n$. Logo $S = n$. Agora, pelo Teorema 2.3, concluímos que M^n é isométrica ao cilindro hiperbólico $\mathbb{H}^1(c_1) \times \mathbb{H}^{n-1}(c_2)$, o que encerra a demonstração. ■

Corolário 3.1 *Seja M^4 uma hipersuperfície máxima completa em $\mathbb{H}_1^5(-1)$ com curvatura escalar constante. Se M^4 possui curvatura de Gauss-Kronecker negativa e limitada longe do zero, então M^4 é isométrica ao cilindro hiperbólico $\mathbb{H}^1(c_1) \times \mathbb{H}^3(c_2)$, onde c_1 e c_2 são constantes negativas.*

Demonstração. Basta observarmos que, para $n = 4$, a curvatura de Gauss-Kronecker $K < 0$ se, e somente se, M^4 tem três curvaturas principais com o mesmo sinal, e, portanto, as condições do Teorema 3.1 são satisfeitas. ■

Para a prova do próximo resultado, precisaremos de dois lemas auxiliares. Antes, devemos recordar que, como $Ric(v,v) \geq -(n-1)$, para todo $v \in TM$ com $|v| = 1$, temos que M^n é uma hipersuperfície completa com curvatura de Ricci limitada inferiormente. Desde que $S = \sum_{i,j} h_{ij}^2 > 0$, se a curvatura de Gauss-Kronecker for não nula, S é uma função suave limitada inferiormente, e, portanto, podemos aplicar o Lema 2.2 para obtermos uma sequência de pontos p_k em M^n tal que

$$S(p_k) < \inf S + \frac{1}{k}, \quad |\nabla S(p_k)| < \frac{1}{k}, \quad \Delta S(p_k) > -\frac{1}{k}. \tag{49}$$

Ademais, pelo Teorema 2.2, sabemos que $S \leq n$. Logo, tomando uma subsequência se necessário, podemos assumir que

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_i(p_k) = \tilde{\lambda}_i, \ \tilde{\lambda}_i \neq 0. \tag{50}$$

Lema 3.3 *Seja M^n uma hipersuperfície máxima completa com curvatura de Gauss-Kronecker constante não-nula em $\mathbb{H}_1^{n+1}$. Suponha, também, que M^n possui $n-1$ curvaturas principais com o mesmo sinal. Se existe uma subsequência de pontos $\{p_k\}$ em M definida como em* (49) *e* (50) *e tal que*

$$|h_{nnj}(p_k)| = \max\{|h_{iij}(p_k)|, i = 1, \ldots, n\},$$

então $\lim\limits_{k\to\infty} h_{iij}(p_k) = 0, i = 1, \ldots, n.$

Demonstração. Para qualquer ponto p em M^n fixado, podemos escolher um referencial ortonormal local $\{e_1, \ldots, e_n\}$ geodésico em p, tal que $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ em p. Mudando a orientação de M^n e reordenando os campos vetoriais tangentes $e_1, \ldots, e_n$ se necessário, podemos assumir que as curvaturas principais verificam $\lambda_n < 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_{n-1}$. Suponha que tal subsequência exista e, por simplicidade de notação, vamos ainda denotá-la por $\{p_k\}$. Se necessário, considere as subsequências $\{\tilde{p}_k\}$ e $\{p'_k\}$, onde $h_{nnj}(\tilde{p}_k) \geq 0$ e $h_{nnj}(p'_k) < 0$ e separemos nosso estudo para cada uma das subsequências.

Usando a subsequência $\{\tilde{p}_k\}$, e tomando um referencial adequado como descrito anteriormente para cada ponto da subsequência, temos que $e_j(S)(\tilde{p}_k) = S_j(\tilde{p}_k)$. Desde que

$$\nabla S(\tilde{p}_k) = \sum_i S_i(\tilde{p}_k) e_i(\tilde{p}_k),$$

temos que $|\nabla S|(\tilde{p}_k) = \sqrt{\sum_i S_i^2(\tilde{p}_k)}$. Daí, por (49), segue que, nos pontos da subsequência $\{\tilde{p}_k\}$,

$$|S_j| < \frac{1}{k}.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} -\frac{1}{k} < S_j(\tilde{p}_k) &= 2\left(\sum_{i,j} e_j(h_{ij})h_{ij}\right)(\tilde{p}_k) \\ &= 2\left(\sum_i \lambda_i h_{iij}\right)(\tilde{p}_k) \\ &= 2\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i h_{iij} + \lambda_n h_{nnj}\right)(\tilde{p}_k) \\ &= 2\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (h_{iij} - h_{nnj})\right)(\tilde{p}_k), \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, usamos que $\lambda_n = -\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i$. Então, uma vez que

$$h_{nnj}(\tilde{p}_k) = |h_{nnj}(\tilde{p}_k)| \geq |h_{iij}(\tilde{p}_k)|,$$

da hipótese, temos que $-h_{nnj}(\tilde{p}_k) \leq h_{iij}(\tilde{p}_k) \leq h_{nnj}(\tilde{p}_k)$. Assim,

$$-\frac{1}{2k} < \lambda_i(\tilde{p}_k)(h_{iij}(\tilde{p}_k) - h_{nnj}(\tilde{p}_k)) \leq 0,$$

pois, para $i = 1, \ldots, n-1$, as curvaturas principais λ_i são positivas e, portanto,

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_i(\tilde{p}_k)(h_{iij}(\tilde{p}_k) - h_{nnj}(\tilde{p}_k)) = 0,$$

pela desigualdade acima. Porém, de (50), obtemos que

$$0 < \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda_i(\tilde{p}_k)} = \frac{1}{\tilde{\lambda}_i} < \infty.$$

Então

$$0 = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda_i(\tilde{p}_k)} \lim_{k\to\infty} \lambda_i(\tilde{p}_k)(h_{iij}(\tilde{p}_k) - h_{nnj}(\tilde{p}_k)) = \lim_{k\to\infty}(h_{iij}(\tilde{p}_k) - h_{nnj}(\tilde{p}_k)),$$

o que nos permite concluir que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n-1} \lim_{k\to\infty}(h_{iij}(\tilde{p}_k) - h_{nnj}(\tilde{p}_k)) \\ &= \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1} h_{iij}(\tilde{p}_k) - (n-1)h_{nnj}(\tilde{p}_k)\right) \\ &= \lim_{k\to\infty}(-nh_{nnj})(\tilde{p}_k), \end{aligned}$$

onde na terceira igualdade, usamos que $\sum_{i=1}^{n-1} h_{iij}(\tilde{p}_k) = -h_{nnj}(\tilde{p}_k)$. Logo

$$\lim_{k\to\infty} h_{nnj}(\tilde{p}_k) = 0 \tag{51}$$

Finalmente, para a subsequência $\{p'_k\}$, por (49) temos

$$\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_i h_{iij} + \lambda_n h_{nnj})(p'_k) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i(h_{iij} - h_{nnj})(p'_k) = S_j(p'_k) < \frac{1}{k}.$$

Mas, raciocinando como anteriormente,

$$-h_{nnj}(p'_k) = |h_{nnj}(p'_k)| \geq |h_{iij}(p'_k)|,$$

da hipótese, então, temos que $h_{nnj}(p'_k) \leq h_{iij}(p'_k) \leq -h_{nnj}(p'_k)$, o que implica que

$$0 \leq \lambda_i(p'_k)(h_{iij}(p'_k) - h_{nnj}(p'_k)) < \frac{1}{k}$$

e

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_i(p'_k)(h_{iij}(p'_k) - h_{nnj}(p'_k)) = 0.$$

Como no caso da subsequência $\{\tilde{p}_k\}$ temos

$$\lim_{k\to\infty} h_{nnj}(p'_k) = 0 \tag{52}$$

Segue de (51) e (**??**) que $\lim_{k\to\infty} h_{nnj}(p_k) = 0$ e, novamente como $|h_{nnj}(p_k)| = \max\{|h_{iij}(p_k)|,\ i = 1, \ldots, n\}$, então $\lim_{k\to\infty} h_{iij}(p_k) = 0$, para $i = 1, \ldots, n$. ■

Lema 3.4 *Seja M^n uma hipersuperfície máxima completa com curvatura de Gauss-Kronecker constante não nula em $\mathbb{H}_1^{n+1}$. Suponha, também, que M possui $n-1$ curvaturas principais com o mesmo sinal. Se existe uma subsequência de pontos $\{p_k\}$ em M satisfazendo* (49) *e* (50) *e tal que*

$$|h_{n-1n-1n}(p_k)| = \max\{|h_{iin}(p_k)|, i = 1, \ldots, n-1\},$$

então $\lim_{k\to\infty} h_{iin}(p_k) = 0, i = 1, \ldots, n-1.$

Demonstração. Como na prova do Lema 3.3, suponha que tal subsequência exista e, por simplicidade de notação, continuemos a denotá-la por $\{p_k\}$. Se necessário, considere as subsequências $\{\tilde{p}_k\}$ e $\{p'_k\}$, onde $h_{n-1n-1n}(\tilde{p_k}) \geq 0$ e $h_{n-1n-1n}(p'_k) < 0$ e analisemos o que ocorre para cada uma delas separadamente.

Por (49), temos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{k} < S_n &= \left(\sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i h_{iin}\right) + \lambda_{n-1} h_{n-1n-1n} + \lambda_n h_{nnn} \\ &= \sum_{i=1}^{n-2} (\lambda_i - \lambda_n)(h_{iin} - h_{n-1n-1n}) - n\lambda_n h_{n-1n-1n}. \end{aligned} \tag{53}$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
0 &= e_n\left(\log(|\det(h_{ij})|)\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n-2}\frac{1}{\lambda_i}h_{iin}\right)+\frac{1}{\lambda_{n-1}}h_{n-1n-1n}+\frac{1}{\lambda_n}h_{nnn} \\
&= \sum_{i=1}^{n-2}\left(\frac{1}{\lambda_i}-\frac{1}{\lambda_n}\right)h_{iin}-\sum_{i=1}^{n-2}\frac{1}{\lambda_i}h_{n-1n-1n}+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda_j}-\frac{2}{\lambda_n}\right)h_{n-1n-1n} \\
&= \sum_{i=1}^{n-2}\left(\frac{\lambda_n-\lambda_i}{\lambda_i\lambda_n}\right)(h_{iin}-h_{n-1n-1n})+\left(\frac{-n}{\lambda_n}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\lambda_j}\right)h_{n-1n-1n}. \qquad (54)
\end{aligned}$$

Adicionando (53), multiplicada por $\left(\frac{-n}{\lambda_n}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\lambda_j}\right)$, com (54), multiplicada por $n\lambda_n$, obtemos

$$-\left(\frac{-n}{\lambda_n}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\lambda_j}\right)\frac{1}{k}<\sum_{i=1}^{n-2}\left(\frac{-n}{\lambda_n}-\frac{n}{\lambda_i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\lambda_j}\right)(\lambda_i-\lambda_n)(h_{iin}-h_{n-1n-1n}),$$

onde omitimos acima o ponto $\tilde{p}_k$. Voltando a escrever a equação acima em $\tilde{p}_k$ e tomando o limite para $k\to\infty$, obtemos

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{-n}{\lambda_n}-\frac{n}{\lambda_i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\lambda_j}\right)(\lambda_i-\lambda_n)(h_{iin}-h_{n-1n-1n})(\tilde{p}_k)=0. \qquad (55)$$

Assim, usando (50) do mesmo modo que no Lema anterior, segue que

$$\lim_{k\to\infty}(h_{iin}-h_{n-1n-1n})(\tilde{p}_k)=0,$$

e podemos concluir que

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{n-2}\lim_{k\to\infty}\left((h_{iin}(\tilde{p}_k)-h_{n-1n-1n}(\tilde{p}_k)\right) \\
&= \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-2}h_{iin}(\tilde{p}_k)-(n-2)h_{n-1n-1n}(\tilde{p}_k)\right) \\
&= \lim_{k\to\infty}(-(n-1)h_{n-1n-1n}(\tilde{p}_k)-h_{nnn}(\tilde{p}_k)). \qquad (56)
\end{aligned}$$

Como

$$\sum_{i=1}^{n-2}\lambda_i(h_{iin}-h_{n-1n-1n})+\lambda_n(h_{nnn}-h_{n-1n-1n})=S_n<\frac{1}{k},$$

temos

$$0 \leq \lambda_n(h_{nnn} - h_{n-1n-1n}) < \frac{1}{k} - \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i(h_{iin} - h_{n-1n-1n}),$$

onde, novamente, omitimos o ponto $\tilde{p}_k$. Voltando a escrever a equação em tal ponto $\tilde{p}_k$, e tomando o limite para $k \to \infty$, segue de (50) e (56) que

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_n(\tilde{p}_k)(h_{nnn}(\tilde{p}_k) - h_{n-1n-1n}(\tilde{p}_k)) = 0. \tag{57}$$

Uma vez que $\lim_{k\to\infty} \lambda_n(\tilde{p}_k) < 0$, por (56) e (57), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k\to\infty}(-(n-1)h_{n-1n-1n}(\tilde{p}_k) - h_{nnn}(\tilde{p}_k)) + \lim_{k\to\infty}(h_{nnn}(\tilde{p}_k) - h_{n-1n-1n}(\tilde{p}_k) \\ &= \lim_{k\to\infty}(-nh_{n-1n-1n}(\tilde{p}_k)). \end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{k\to\infty} h_{n-1n-1n}(\tilde{p}_k) = 0. \tag{58}$$

Como no caso da subsequência $\{\tilde{p}_k\}$, temos

$$\lim_{k\to\infty} h_{n-1n-1n}(p'_k) = 0. \tag{59}$$

Portanto, segue de (58) e (59) que $\lim_{k\to\infty} h_{n-1n-1n}(p_k) = 0$ e, como $|h_{n-1n-1n}(p_k)| = \max\{|h_{iin}(p_k)|, i = 1, \ldots, n-1\}$, então $\lim_{k\to\infty} h_{iin}(p_k) = 0$ para $i = 1, \ldots, n-1$. ■

Agora, estamos em condições de provar o seguinte

Teorema 3.2 *Seja M^n uma hipersuperfície máxima completa em $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1)$ com curvatura de Gauss-Kronecker constante não nula. Se M^n possui $n-1$ curvaturas principais com o mesmo sinal em todo ponto, então M^n é isométrica ao cilindro hiperbólico $\mathbb{H}^1(c_1) \times \mathbb{H}^{n-1}(c_2)$, onde c_1 e c_2 são constantes negativas.*

Demonstração. Como no Teorema 3.1, para qualquer ponto p fixado em M^n, podemos escolher um referencial local ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ geodésico em p tal que $h_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$ em p. Mudando a orientação de M^n e reordenando, se necessário, os índices dos campos vetoriais tangentes e_i, podemos assumir que

$$\lambda_n < 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_{n-1}.$$

Uma vez que a curvatura de Gauss-Kronecker K é uma constante não nula, podemos raciocinar de modo similar à prova de (41), obtendo

$$\begin{aligned} 0 = \Delta F \quad = \quad & -\sum_{i}^{n} \frac{1}{\lambda_i^2} h_{iii}^2 - \sum_{i \neq j}^{n-1} (\frac{1}{\lambda_i^2} + \frac{2}{\lambda_i \lambda_j}) h_{iij}^2 - \sum_{i=1}^{n-1} (\frac{1}{\lambda_i^2} + \frac{2}{\lambda_i \lambda_n}) h_{iin}^2 \\ & -\sum_{i=1}^{n-1} (\frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{2}{\lambda_i \lambda_n}) h_{nni}^2 - \frac{1}{3} \sum_{i \neq j \neq k}^{n} (\frac{\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k}{\lambda_i \lambda_j \lambda_k}) h_{ijk}^2 \\ & + n(S - n). \end{aligned} \tag{60}$$

Como na prova do Teorema 3.1, vamos considerar os subconjuntos A, B e C, onde $g_j \in \{1, \dots, n\}$ é o maior índice tal que $|h_{g_j g_j j}| = \max\{|h_{iij}|, i = 1, \dots, n\}$.

Podemos reescrever a expressão (60) como

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & -\sum_{i=r+1}^{n} \frac{1}{\lambda_i^2} h_{iii}^2 - \sum_{i \neq j; i,j \leq n-1; (i,j) \neq (g_j, j), j=r+1,\dots,t} \left(\frac{1}{\lambda_i^2} + \frac{2}{\lambda_i \lambda_j} \right) h_{iij}^2 \\ & -\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_i^2} + \frac{2}{\lambda_i \lambda_n} \right) h_{iin}^2 - \sum_{j=1}^{r} \left[\left(\frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{2}{\lambda_j \lambda_n} \right) h_{nnj}^2 + \frac{1}{\lambda_j^2} h_{jjj}^2 \right] \\ & - \sum_{j=r+1}^{t} \left[\left(\frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{2}{\lambda_j \lambda_n} \right) h_{nnj}^2 + \left(\frac{1}{\lambda_{g_j}^2} + \frac{2}{\lambda_j \lambda_{g_j}} \right) h_{g_j g_j j}^2 \right] \\ & -\frac{1}{3} \sum_{i \neq j \neq k}^{n} \left(\frac{\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k}{\lambda_i \lambda_j \lambda_k} \right) h_{ijk}^2 + n(S - n) \\ & - \sum_{j=t+1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{2}{\lambda_j \lambda_n} \right) h_{nnj}^2. \end{aligned} \tag{61}$$

Ainda do mesmo modo que na prova do Teorema 3.1, podemos mostrar que, com exceção das somas $\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_i^2} + \frac{2}{\lambda_i \lambda_n} \right) h_{iin}^2$ e $\sum_{j=t+1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{2}{\lambda_j \lambda_n} \right) h_{nnj}^2$, todos as outras somas em (61) são não positivas. Com efeito, a primeira e a segunda somas em (61) são evidentemente não positivas; prosseguindo analogamente como em (45) e (46) vemos que a quarta e a quinta somas também são não positivas e por fim, a sexta soma é não positiva, pois $\frac{\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k}{\lambda_i \lambda_j \lambda_k} \geq 0$, como vimos na prova do Teorema 3.1.

Segue, então, que

$$-\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_i^2} + \frac{2}{\lambda_i \lambda_n} \right) h_{iin}^2 + n(S - n) - \sum_{j=t+1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{2}{\lambda_j \lambda_n} \right) h_{nnj}^2 \geq 0. \tag{62}$$

Usando o Lema 2.2 para a função S, obtemos uma sequência de pontos p_k em M^n satisfazendo (49) e (50). Calculando (62) em p_k e tomando o limite para $k \to \infty$, obtemos o resultado. De fato, dada uma tal sequência $\{p_k\}$, tomando $i = n$ e $j =$

$t+1,\ldots,n-1$ no Lema 3.3, temos

$$\lim_{k\to\infty} h_{nnj}(p_k)=0, \tag{63}$$

pois, para o conjunto $C=\{t+1,\ldots,n-1\}$, vale que $|h_{nnj}|=\max\{|h_{iij}|, i=1,\ldots,n\}$. Note que, para $1\leq i\leq n-2$, reenumerando as curvaturas principais, se necessário, temos

$$\frac{1}{\lambda_i^2}+\frac{2}{\lambda_i\lambda_n}=\frac{\lambda_n+2\lambda_i}{\lambda_i^2\lambda_n}=\frac{(\lambda_i-\lambda_{n-1})-\sum_{j=1,j\neq i}^{n-2}\lambda_j}{\lambda_i^2\lambda_n}>0. \tag{64}$$

Portanto, exceto, possivelmente, o termo $\left(\frac{1}{\lambda_{n-1}^2}+\frac{2}{\lambda_{n-1}\lambda_n}\right)h_{n-1n-1n}^2$, todos os outros termos na primeira parcela de (62) são não negativos. Mas, se existir uma subsequência de $\{p_k\}$ tal que $|h_{n-1n-1n}(p_k)|=\max\{|h_{iin}(p_k)|$, para $i=1,\ldots,n-1\}$, o Lema 3.4 implica que

$$\lim_{k\to\infty} h_{iin}(p_k)=0,\ i=1,\ldots,n-1. \tag{65}$$

Caso contrário, excluindo os pontos p_k tais que $|h_{n-1n-1n}(p_k)|=\max\{|h_{iin}(p_k)|,\ i=1,\ldots,n-1\}$ que são em quantidade finita, obtemos uma sequência $\{p_k\}$ satisfazendo $|h_{lln}(p_k)|=\max\{|h_{iin}(p_k)|$, para $i=1,\ldots,n-1\}$, com $l\neq n-1$. Então, temos que

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\lambda_l^2}+\frac{2}{\lambda_l\lambda_n}\right)h_{lln}^2+\left(\frac{1}{\lambda_{n-1}^2}+\frac{2}{\lambda_{n-1}\lambda_n}\right)h_{n-1n-1n}^2 &\geq\\ \left[\frac{1}{\lambda_l^2}+\frac{1}{\lambda_{n-1}^2}+2\left(\frac{1}{\lambda_l\lambda_n}+\frac{1}{\lambda_{n-1}\lambda_n}\right)\right]h_{n-1n-1n}^2&\\ =\left[\left(\frac{1}{\lambda_l}-\frac{1}{\lambda_{n-1}}\right)^2+2\left(\frac{\lambda_n+\lambda_l+\lambda_{n-1}}{\lambda_l\lambda_{n-1}\lambda_n}\right)\right]h_{n-1n-1n}^2.&\end{aligned} \tag{66}$$

Calculando (62) em p_k e tomando o limite para $k\to\infty$, de (63),(64),(65) e (66), obtemos que $n(\inf S-n)\geq 0$, o que implica que $\inf S\geq n$. Pelo Teorema 2.2, temos que $\sup S\leq n$, donde obtemos $n\leq\inf S\leq\sup S\leq n$ e $\inf S=\sup S=n$. Logo, pelo Teorema (2.3), concluímos que M^n é isométrica ao cilindro hiperbólico $\mathbb{H}^1(c_1)\times\mathbb{H}^{n-1}(c_2)$.

■

Corolário 3.2 *Seja M^4 uma hipersuperfície máxima completa em $\mathbb{H}_1^5(-1)$ com curvatura de Gauss-Kronecker constante negativa, então M^4 é isométrica ao cilindro hiperbólico $\mathbb{H}^1(c_1)\times\mathbb{H}^3(c_2)$, onde c_1 e c_2 são constantes negativas.*

Demonstração. Desde que M^4 tem curvatura de Gauss-Kronecker constante negativa, então M^4 tem três curvaturas principais com o mesmo sinal e agora basta aplicarmos o Teorema 3.2. ■

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Wu (2010) construiu infinitas hipersuperfícies máximas não isométricas mutuamente em $\mathbb{H}_1^{n+1}$ com duas curvaturas principais distintas λ e μ, com multiplicidades $n-1$ e 1, respectivamente. Considerando $\lambda > 0, m = 1$ e $H_1 = 0$, pelo Teorema 3.1 no trabalho de Wu (2010), $\omega = \lambda^{-\frac{1}{n}}$ satisfaz a equação diferencial ordinária

$$\frac{d^2\omega}{du^2} = \omega(-(n-1)\lambda^2 + 1), \tag{67}$$

a qual, por integração reduz-se a $(\frac{d\omega}{du})^2 = c + \omega^{2-2n} + \omega^2$, onde $c < 0$ é constante. A solução constante positiva $\lambda = \sqrt{\frac{1}{n-1}}$ corresponde ao cilindro hiperbólico $\mathbb{H}^1(c_1) \times \mathbb{H}^{n-1}(c_2)$.

Tomando qualquer solução não constante λ de (67) e aplicando o método desenvolvido por Wu (2010), obtemos uma hipersurperfície completa máxima $\tilde{M}$ de $\mathbb{H}_1^{n+1}$ cuja curvatura escalar R e curvatura de Gauss-Kronecker K são dadas por

$$K = \mu\lambda^{n-1} = -(n-1)\lambda^n,$$

pois $0 = H = (n-1)\lambda + \mu$ e de (6)

$$R = -1 + \frac{1}{n(n-1)}S = -1 + \frac{1}{n(n-1)}((n-1)\lambda^2 + \mu^2) = -1 + \lambda^2,$$

já que $\mu^2 = (n-1)^2\lambda^2$.

Além disso, Wu (2010) também provou no Teorema 4.3 de seu trabalho que qualquer hipersuperfície construída de acordo com este método e não-isométrica a $\mathbb{H}^1(c_1) \times \mathbb{H}^{n-1}(c_2)$ deve satisfazer $\inf(\lambda - \mu)^2 = 0$, ou equivalentemente $\inf \lambda = 0$.

Assim, M^n é uma hipersuperfície máxima completa de $\mathbb{H}_1^{n+1}$ cuja curvatura escalar R e curvatura de Gauss-Kronecker K satisfazem:

$$0 = \inf |K|, \quad K = -(n-1)\lambda^n, \quad R = -1 + \lambda^2, \lambda > 0,$$

λ não constante.

Isto mostra que as hipóteses nos Teoremas 3.1 e 3.2 deste trabalho não podem ser retiradas.

REFERÊNCIAS

CAO, Linfen; WEI, Guoxin. A new characterization of hyperbolic cylinder in anti-de Sitter space. **Journal of mathematical analysis and applications**, v. 329, n. 1, p. 408–414, 2007.

CARMO, Manfredo Perdigão do. **Método do referencial móvel**. Rio de Janeiro: IMPA, 1976.

CHAVES, L. A. M.; VALÉRIO B. C., R. M. B.; SOUSA. New characterization for hyperbolic cylinders in anti-de Sitter spaces. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 393, n. 1, p. 166–176, 2012.

CHENG, Qing-Ming. Complete maximal spacelike hypersurfaces of H 1 4 (c). **Manuscripta mathematica**, v. 82, n. 1, p. 149–160, 1994.

ISHIHARA, Toru. Maximal spacelike submanifolds of a pseudo-Riemannian space of constant curvature. **Michigan Mathematical Journal**, v. 35, n. 3, p. 345–352, 1988.

LEE, John M. **Introduction to smooth manifolds**. 19. ed. New York: Springer, 2013, 708 p.

O'Neill, B. **Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity.** New York: Academic Press, 1983, 468 p.

WU, B.Y. On complete spacelike hypersurfaces with constant m-th mean curvature in an anti-de Sitter space. **International Journal of Mathematics**, v. 21, n. 05, p. 551–569, 2010.

YAU, Shing-Tung. Harmonic functions on complete Riemannian manifolds. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v. 28, n. 2, p. 201–228, 1975.